



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Doutorado em Matemática

Soluções Limites para Problemas Elípticos Envolvendo Medidas

Tese de
Adilson Eduardo Presoto[†]

Orientador: Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
Universidade Federal de São Carlos

Coorientador: Prof. Dr. Augusto César Ponce
Université Catholique de Louvain

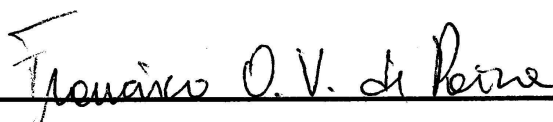
Campinas, 2011

[†]apoiado financeiramente pelas agências CAPES e CNPq

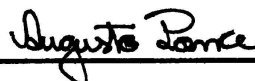
Soluções Limites para Problemas Elípticos Envolvendo Medidas

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Adilson Eduardo Presoto** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 21 de novembro de 2011



Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
Orientador



Prof. Dr. Augusto César Ponce
Co-orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
2. Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros
3. Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó
4. Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira
5. Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de **DOUTOR** em **MATEMÁTICA**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR ANA REGINA MACHADO – CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – UNICAMP

P926s	<p>Presoto, Adilson Eduardo, 1983- Soluções limites para problemas elípticos envolvendo medidas / Adilson Eduardo Presoto. - Campinas, SP : [s.n.], 2011.</p> <p>Orientador: Francisco Odair Vieira de Paiva. Coorientador: Augusto César Ponce. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.</p> <p>1. Equações diferenciais elípticas. 2. Equações semilineares elípticas. 3. Chern-Simons, Sistemas de. 4. Radon, Medidas de. 5. Dirichlet, Problemas de. I. Paiva, Francisco Odair Vieira de, 1975-. II. Ponce, Augusto César. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.</p>
-------	---

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Limit solutions for elliptic problems involving measures

Palavras-chave em inglês:

Elliptic differential equations

Semilinear elliptic equations

Chern-Simons system

Radon measures

Dirichlet problem

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Francisco Odair Vieira de Paiva [Orientador]

Orlando Francisco Lopes

Lucas Catão de Freitas Ferreira

João Marcos Bezerra do Ó

Everaldo Souto de Medeiros

Data da defesa: 21-11-2011

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 21 de novembro de 2011 e aprovada

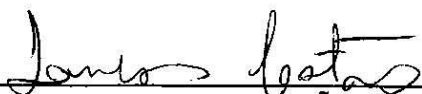
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). FRANCISCO ODAIR VIEIRA DE PAIVA



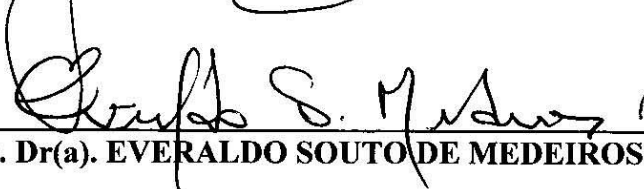
Prof(a). Dr(a). ORLANDO FRANCISCO LOPES



Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA



Prof(a). Dr(a). JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó



Prof(a). Dr(a). EVERALDO SOUTO DE MEDEIROS

Dedicado a todos que me apoiaram.

Agradecimentos

Muitas pessoas e instituições estiveram do meu lado durante o doutorado e anseio por prestar-lhes uma justa homenagem. Peço desculpas aos negligenciados. No início da lista, como não poderia ser diferente, à família: minha mãe, Neide, sempre presente, a qual devo boa parte deste trabalho; meus irmãos, Anderson, excelente amigo e grande apoiador, e Alan, que contribuiu positivamente; e o meu pai, Nilson, falecido no ano de ingresso na faculdade, um dos meus maiores incentivadores mesmo diante de inúmeras dificuldades.

Aos meus orientadores: Profs. Odair e Augusto pelas boas conversas e dúvidas solucionadas. Ao último também pela oportunidade de trabalhar com um excelente matemático e irretocável profissional durante a parte do doutorado realizada na Université Catholique de Louvain, onde fui generosamente recebido.

Aos meus amigos que tornaram essa travessia mais agradável: Raphael, Maitê, Patrícia, Angelo, Luís, Durval, Danilo e Wellington, dentre alguns de suma importância nesses anos.

A duas instituições responsáveis por minha formação acadêmica: UFSCar e UNICAMP, que forneceram uma distinta qualificação. Aos mestres e funcionários destas universidades por suas magníficas contribuições. Em especial, à secretaria de pós do IMECC, detentora de uma presteza admirável.

Agradeço o Prof. Everaldo da UFPB pela cuidadosa leitura e pelo apontamento de vários erros e sugestões.

Por fim, enalteço todos os tributários brasileiros, que por intermédio das agências formentadoras de pesquisa CAPES e CNPq permitiram a dedicação exclusiva.

What is now proved was once only imagined.

WILLIAM BLAKE
THE MARRIAGE OF HEAVEN AND HELL

Resumo

No trabalho precursor de Brezis, Marcus e Ponce [15], estudou-se problemas semilineares elípticos com uma não linearidade não decrescente, contínua e dependendo apenas da variável dependente e com medidas como dados. Os autores estavam particularmente interessados no caso em que a equação não possuía solução. Numa das técnicas estudadas, eles aproximaram a medida por funções suaves através da convolução e, sob a condição adicional de convexidade da não linearidade, mostraram que as soluções correspondentes convergiam para a solução do mesmo problema com a maior medida menor do que ou igual a medida inicial tal que o problema tinha solução.

O nosso objetivo é explorar profundamente este método. Ao invés de lidar com a convolução, consideramos sequências de medidas de Radon que convergem na topologia fraca-estrela e tais que o problema tem solução para cada termo. A pergunta que se põe é: as soluções convergem? Se sim, temos que o limite satisfaz a mesma equação com uma medida, em geral, distinta do limite-fraco, logo desejamos também determinar esta medida. Quando temos uma não linearidade, como descrita no parágrafo acima, as respostas têm um alto grau de variação, conforme os exemplos dados nos trabalhos de Ponce, e são inconclusivas. A proposta da tese é estudar a convergência dessas soluções para equações e sistemas semilineares elípticos com a não linearidade sendo do tipo exponencial. No caso em que temos a equação semilinear no plano, as soluções convergem para a solução do mesmo problema com uma medida

que depende apenas do limite-fraco da sequênciã. Também, vemos que em dimensõs superiores essas asserçõs nã se verificam mais. Por fim, o sistema que aplicamos a tãcnica acima é o Sistema de Chern-Simons, surgido na fãsica teórica e que representa o modelo de Chern-Simons Abeliano relativãstico envolvendo duas partãculas Higgs e dois campos calibrados.

Abstract

In the pioneering work of Brezis, Marcus and Ponce [15], the authors studied elliptic semilinear problems with a continuous nondecreasing nonlinearity which vanishes at origin and depends only on dependent variable, and with measures as initial data. They were particularly interested in the case which the equation does not have a solution. One of the techniques discussed was the approach of the measure by smooth functions via convolution. Under the additional condition of convexity, they showed that the corresponding solutions converge to the solution for the same problem with the largest measure less than initial datum such that the problem admits a solution.

Our aim is to explore deeply this method. Instead of dealing with the convolution, we consider sequences of Radon measures which converge in weak-star topology and such that the problem has solution for each term. The question posted is: the solutions converge? If yes, the limit solves the same problem with, in general distinct from the weak limit, another measure, thus, we also wish to determine this measure. The purpose of the thesis is to study the convergence of solutions for equations and systems with exponential nonlinearity. If we have the equation semilinear on the plane, the solutions converge to a solution for the same problem with a measure which depends only on weak limit of the sequence. We also see that in upper dimensions the results are no longer assured. In the end, the system concerned is the Chern-Simons System

that comes from theoretical physics and it represents a relativistic Abelian Chern-Simons model with two Higgs particles and two gauge fields.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	7
2.1	Equação Semilinear com Medida	17
2.1.1	Não Linearidades que Mudam de Sinal	26
2.1.2	Comportamento Local e Regularidade	28
2.2	Prova do Teorema de Brezis e Merle	33
2.3	Prova do Teorema de Vázquez	35
2.4	Compacidade em $W^{1,p}(\Omega)$	40
2.5	Decomposição de Medidas	44
3	Equação Semilinear Singular	47
3.1	Caso $0 < \alpha < 2$	48
3.2	Caso $\alpha \geq 2$	51

4	Soluções Limites para uma Equação Semilinear	53
4.1	Limite Reduzido	57
4.2	Prova do Teorema Principal	63
4.3	Medidas de Radon com Sinal	65
4.4	Equação Escalar de Chern-Simons	73
5	Soluções Limites para a Equação com $N \geq 3$	75
5.1	Prova do Teorema Principal	77
5.2	Um interessante exemplo	82
6	Soluções Limites para o Sistema de Chern-Simons	85
6.1	Limite Reduzido	89
6.2	Comportamento Uniforme	91
6.3	Prova do Teorema Principal	94
6.3.1	Caso $\mu(\{x\}), \nu(\{x\}) < 4\pi$ para todo $x \in \Omega$	94
6.3.2	Caso Geral	98

CAPÍTULO 1

Introdução

Em um eterno trabalho de construção e transformação, as ciências elucidam o universo, o mundo e nós mesmos. Nesse infundável processo, a matemática age vigorosamente como suas linguagem e base. Muitos a veem como um amontoado de teoremas e fórmulas, enquanto outros como um edifício de ideias e inspirações, cujos alicerces foram fincados há quase dois mil anos. Na sua edificação, deparamos com um encadeamento no qual um autor dá um passo além de um antecessor. Fato expressado no aforismo do filósofo alemão Schopenhauer: “Todo inteiro natural pressupõe os precedentes como causa de sua existência”. Se este texto é possível, foi porque os trabalhos de Brezis, Ponce, Marcus o precederam, e estes foram antecidos pelos de Véron, Vázquez e outros; e assim segue um longo rol genealógico.

Nosso ponto de partida é o teorema 1 de Brezis e Strauss presente em [20], onde dados um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $f \in L^1(\Omega)$ e uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, não decrescente tal que $g(0) = 0$, os autores provaram que

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

tem solução $u \in L^1(\Omega)$ com $g(u) \in L^1(\Omega)$.

Munidos deste fato e adicionando a hipótese de convexidade na não linearidade, Brezis, Marcus e Ponce em [15] mostraram que dada uma sequência regularizante (ρ_n) , as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + g(u_n) = \rho_n * \mu & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

convergem em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu^* & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (1.3)$$

onde μ^* é a maior medida menor do que ou igual a μ para a qual o problema acima tem solução. Nossa principal contribuição neste trabalho é trocar a convexidade por $g(t) = e^t - 1$, restringir-se a domínios no plano e assegurar o mesmo resultado para qualquer sequência (μ_n) de medidas de Radon positivas, no lugar de $(\rho_n * \mu)$, tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e (1.2) tem solução para todo $n \in \mathbb{N}$. A maioria das propriedades estabelecidas é exclusiva dessa equação e da bidimensionalidade. Por exemplo, se consideramos a mesma equação com $g(t) = e^t - 1$ em dimensão superior a dois, elaboramos um exemplo de uma sequência de medidas de Radon positivas tais que as soluções associadas convergem para uma função que resolve (1.3) com uma medida distinta de μ^* .

O mesmo método de aproximação é empregado num sistema acoplado com medidas como dados. Ele é chamado por extensão de Sistema de Chern-Simons,

$$\begin{cases} -\Delta u + e^v(e^u - 1) = \mu & \text{em } \Omega \\ -\Delta v + e^u(e^v - 1) = \nu & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (1.4)$$

Este sistema provém do modelo de Chern-Simons Abeliano relativístico envolvendo duas partículas Higgs e dois campos calibrados. Nesse modelo, as medidas μ e ν são somas negativas de medidas de Dirac com massa 4π , $-\sum 4\pi\delta_{p_i}$, $\Omega = \mathbb{R}^N$ e as soluções se anulam no infinito. A equivalência entre as equações de Chern-Simons e o sistema (1.4) é demonstrada em [29].

No caminho percorrido facilmente abrem-se novos horizontes. Por exemplo, usar a técnica de aproximação do dado inicial em

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \nu & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (1.5)$$

onde $\nu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$. Possibilidade auferida pela paridade entre as asserções para (1.1) com $f = \mu$ e para (1.5) estabelecida por Brezis e Ponce em [18]. Mas um dos grandes impedimentos em transportar as proposições reside na falta de caracterização das medidas que (1.5) tem solução. Ainda mais, desconhece-se um resultado equivalente ao de Brezis, Marcus e Ponce quando convolui-se a medida. Logo revela-se um longo trajeto para o estudo de (1.5).

Outro ermo percurso a debravar é o Problema de Neumann, ou mais geralmente o problema mixto, com dados iniciais sendo medidas de Radon,

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \nu & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (1.6)$$

onde η é a normal exterior. Por [19] se $g \equiv 0$, sabemos que (1.5) tem solução se, e somente se,

$$\mu(\Omega) + \nu(\partial\Omega) = 0.$$

Portanto, uma condição a priori a fim de que u seja solução de (1.5) é que

$$\mu(\Omega) - \int_{\Omega} g(u) dx = \nu(\partial\Omega). \quad (1.7)$$

Um importante passo na análise de (1.1) com $f = \mu$ é truncar a não linearidade g tornando-a limitada e obter uma sequência de soluções que converge para a solução de (1.3). A medida em (1.3) é especialmente denominada de medida reduzida. Dessa forma, (1.7) é um nítido obstáculo para obter tal medida do dado inicial; eclipsa a descrição das medidas que (1.6) tem solução, pois (1.6) não é solúvel mesmo para muitos pares de funções $L^1(\Omega)$; e, a menos que g seja convexa, podemos começar com μ e ν admissíveis, isto é, tais que (1.6) tem solução com μ e ν , mas suas convoluções não necessariamente sejam.

Um planeamento dos problemas (1.5) e (1.6) dentro da nossa ótica não é realizado aqui. Intencionamos apenas levantar as dificuldades que surgem na aplicação das nossas técnicas nestes casos.

A partir daqui, expomos sucintamente os principais tópicos de cada capítulo. No capítulo inicial, apresentamos as ferramentas imprescindíveis ao baseamento da teoria. Começamos com as generalizações de resultados de [15], onde se estudou o mesmo problema abaixo com g dependendo apenas de u , para soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + g(x, u) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

A incorporação da variável independente na não linearidade é importante na abordagem do Sistema de Chern-Simons. Além disso, dois teoremas fundamentais são estabelecidos. O primeiro sendo o famoso Teorema de Brezis e Merle, que se $\delta \in (0, 4\pi)$ temos a estimativa a priori

$$\int_{\Omega} e^{\frac{(4\pi-\delta)}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} u} dx \leq \frac{4\pi^2}{\delta} (\text{diam } \Omega)^2$$

para as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

com $f \in L^1(\Omega)$. E o segundo, não menos famoso, o Teorema de Vázquez, do qual segue que

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução se, e somente se, $\mu(\{x\}) \leq 4\pi$ para todo $x \in \Omega$. Ainda no final do capítulo, provamos que para $1 \leq p < N/(N-1)$ o subespaço das funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que o laplaciano é uma medida de Radon finita em Ω munido da norma obtida pela variação total do laplaciano está incluído compactamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ com sua norma usual.

As ideias da demonstração de Ponce para o Teorema de Vázquez são transportadas ao capítulo seguinte e ligeiramente alteradas para obter condições necessárias e suficientes para μ a fim de que

$$\begin{cases} -\Delta u + |x|^{-\alpha}(e^u - 1) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde $0 < \alpha < 2$, tenha solução. Também, abordamos incipientemente o caso $\alpha \geq 2$.

A partir do capítulo 4, concentra-se a originalidade da teste. Neste, os teoremas de Brezis e Merle e de Vázquez e as técnicas do artigo [15], além de outras introduzidas aqui, se unem harmoniosamente para produzir resultados explicitados acima de convergência para a equação semilinear elíptica

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (1.8)$$

quando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. No capítulo seguinte, vemos que a mudança da bidimensionalidade para dimensões maiores acarreta uma grande mudança de panorama. Destaca-se que para $N \geq 3$, construímos exemplos de sequências de medidas de Radon positivas tais que o limite das soluções de (1.8) com μ trocado pelos elementos desta sequência, satisfaz ainda (1.8) com uma medida que não tem uma relação direta com o limite-fraco da sequência de medidas, mas sim, uma dependência mais estreita da sequência.

No último capítulo, dedicamo-nos ao Sistema de Chern-Simons. O acoplamento do sistema leva-nos a uma técnica diferente da usada para a equação. Duas provas são abordadas, na primeira são exploradas propriedades geométricas das soluções. Na outra, os resultados para equações aliam-se com outros específicos para o sistema.

Pautados por dois dogmas de George Orwell: eliminar todas as palavras desnecessárias ao texto e não o obscurecer através de uma linguagem rebuscada, concebemos a tese. Embora direcionadas à política, tais ensinamentos podem ser facilmente empregados na matemática, onde a simbologia e a falta de coesão tismam a compreensão do leitor. Objetivamos uma leitura asséptica, fluida, autocompleta e agradável. Assim, anseiamos por que lhe permita um profundo mergulho nos meandros das demonstrações e a visualização de suas vísceras. Para a clareza do texto, em alguns resultados conhecidos previamente preferimos evitar demonstrações longas, sempre citando a referência da qual foi extraída e sua numeração original. Em outros, em que as exibimos, apenas remetemos à fonte da qual as obtemos. Creditamos pelos principais resultados na introdução do capítulo em que os contém e, pelos auxiliares, antes de suas inserções no corpo do texto.

Os problemas propostos foram satisfatoriamente solucionados. Para a equação, elaboramos uma teoria completa dentro da abordagem descrita. O sistema

respondemos parcialmente, ainda faltando atacar a limitação dos valores dos dados iniciais em conjuntos unitários. A tese também pode resultar em distintas ramificações e na utilização de suas técnicas em outras situações. Destaco que o entrelaçamento de equações diferenciais e medidas pertence à pesquisa contemporânea e atrai grande atenção da comunidade matemática internacional. Enfim, estamos crentes que a tese se enquadra dentro do programado e esperançosos que frutificará.

Notações e Convenções

Algumas notações são usadas indescritivelmente ao longo do texto. A letra grega Ω representa um domínio limitado, isto é um aberto limitado e conexo, em \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, com a fronteira suave. Dados um domínio Ω e $\delta > 0$, Ω_δ é o conjunto os pontos de Ω que dista mais do que δ de sua fronteira, precisamente,

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}.$$

As palavras medidas e medidas com sinal têm uma nomeação distinta da usual, renomeadas como medidas positivas e simplesmente medidas, respectivamente. A medida de um conjunto mensurável a Lebesgue F , é dada por $|F|$. Denotamos por $\rho_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a função de distância a fronteira, $\rho_0(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$. O espaço de Banach $L^1(\Omega; \rho_0 dx)$ é formado pelas funções $\rho_0 dx$ -mensuráveis tais que $\int_\Omega |f| \rho_0 dx < \infty$ e é munido da norma

$$\|f\|_{L^1(\Omega; \rho_0 dx)} = \int_\Omega |f| \rho_0 dx.$$

Duas classes de funções que se anulam na fronteira têm específicas nomenclaturas:

$$\mathcal{C}_0(\overline{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}); u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_0^2(\overline{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}); u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

CAPÍTULO 2

Preliminares

Devotamos nossas primeiras linhas ao estudo da equação semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + g(x, u) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = h & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (2.1)$$

sendo $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory, $h \in L^1(\partial\Omega)$ e μ uma medida de Radon. Entendemos como solução de (2.1) uma função $u \in L^1(\Omega)$ tal que $g(\cdot, u) \in L^1(\Omega, \rho_0 dx)$ e

$$-\int_{\Omega} u \Delta \xi dx + \int_{\Omega} g(x, u) \xi dx = \int_{\Omega} \xi d\mu - \int_{\partial\Omega} h \frac{\partial \xi}{\partial \eta} d\sigma$$

para toda $\xi \in \mathcal{C}_0^2(\overline{\Omega})$, onde η é a normal exterior e σ a medida de superfície. Ademais, u é uma subsolução de (2.1) se u é como acima e

$$-\int_{\Omega} u \Delta \xi dx + \int_{\Omega} g(x, u) \xi dx \leq \int_{\Omega} \xi d\mu - \int_{\partial\Omega} h \frac{\partial \xi}{\partial \eta} d\sigma \quad (2.2)$$

para toda $\xi \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$ tal que $\xi \geq 0$. Analogamente, após inverter a desigualdade em (2.2) definimos supersolução.

Neste texto, uma medida de Radon é um funcional linear contínuo em $\mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$, ou equivalentemente, conforme a proposição 4.C.1 de [15], um funcional linear contínuo em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ com a seguinte propriedade: dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\xi \in \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$, $|\xi| \leq 1$ em $\overline{\Omega}$ e $\text{supt } \xi \subset \overline{\Omega} \setminus \Omega_\delta$, então

$$|\langle \mu, \xi \rangle| \leq \epsilon.$$

Através do Teorema de Representação de Riesz, também a concebemos como uma medida de Radon em $\overline{\Omega}$ no sentido usual satisfazendo $|\mu|(\partial\Omega) = 0$. Denotamos o conjunto de medidas de Radon em Ω por $\mathcal{M}(\Omega)$.

O problema de Poisson, isto é, (2.1) com $g, h \equiv 0$ mesmo com medida como dado, sempre tem solução. Chamamos usualmente este resultado como regularidade elíptica. Ele é o corpo do teorema 8.1 de [36].

Teorema 2.1. *Seja $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. O problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

tem uma única solução. Além disso, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$ e satisfaz

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)},$$

onde $\frac{1}{p^} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.*

Via regularidade elíptica, estabelecemos estimativas interiores em $W^{1,p}(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$ para funções cujos laplacianos são medidas de Radon.

Proposição 2.2. *Seja $u \in L^1(\Omega)$ tal que $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$, então para cada $\omega \Subset \Omega$ e $1 \leq p < N/(N-1)$ temos que $u \in W^{1,p}(\omega)$ e existe uma constante $C = C(p, N) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\omega)} \leq C(\|u\|_{L^1(\Omega)} + \|\Delta u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}).$$

Para (2.1), o principal resultado de existência de solução utilizado é o método de sub e supersoluções para (2.1) de Montenegro e Ponce extraído de [33], teorema 1.1.

Teorema 2.3. *Sejam $u_1, u_2 \in L^1(\Omega)$ sub e supersoluções de (2.1), respectivamente, tais que $u_1 \leq u_2$ qtp em Ω e*

$$g(\cdot, v)\rho_0 \in L^1(\Omega) \quad \text{para todo } v \in L^1(\Omega) \text{ tal que } u_1 \leq v \leq u_2 \text{ qtp em } \Omega.$$

Então (2.1) tem uma solução u satisfazendo

$$u_1 \leq u \leq u_2 \quad \text{qtp em } \Omega.$$

Também não nos detemos na demonstração do próximo lema, para tal, endereçamos ao lema 1.5 de [32], onde foi provado o caso em que $\mu = 0$, mas cujas técnicas permitem prová-lo na forma enunciada.

Lema 2.4. *Sejam $u \in L^1(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega; \rho_0 dx)$, $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $h \in L^1(\partial\Omega)$ tais que*

$$-\int_{\Omega} u \Delta \xi dx + \int_{\Omega} f \xi dx = \int_{\Omega} \xi d\mu - \int_{\partial\Omega} h \frac{\partial \xi}{\partial \eta} d\sigma$$

para toda $\xi \in C_0^2(\overline{\Omega})$. Então se $\xi \in C_0^2(\overline{\Omega})$ é tal que $\xi \geq 0$ em Ω temos que

$$-\int_{\Omega} u^+ \Delta \xi dx + \int_{[u \geq 0]} f \xi dx \leq \int_{\Omega} \xi d\mu^+ - \int_{\partial\Omega} h^+ \frac{\partial \xi}{\partial \eta} d\sigma,$$

bem como

$$-\int_{\Omega} |u| \Delta \xi dx + \int_{\Omega} f \operatorname{sign}(u) \xi dx \leq \int_{\Omega} \xi d|\mu| - \int_{\partial\Omega} |h| \frac{\partial \xi}{\partial \eta} d\sigma.$$

Do lema acima deduzimos duas importantes proposições que são invocadas constantemente ao longo do texto.

Proposição 2.5. *Sejam $g_1, g_2 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções de Caratheodóry satisfazendo*

- i) $g(x, \cdot)$ é não decrescente para quase todo $x \in \Omega$;
- ii) $g(x, 0) = 0$ para quase todo $x \in \Omega$.

Suponha que u_i seja solução de (2.1) associada a g_i e (μ_i, h_i) para $i = 1, 2$. Se

$$g_1 \geq g_2, \quad \mu_1 \leq \mu_2 \quad \text{e} \quad h_1 \leq h_2$$

então $u_1 \leq u_2$ qtp em Ω .

Da proposição acima segue a unicidade de soluções para (2.1) quando g satisfaz as condições **i)** e **ii)** da proposição acima.

Proposição 2.6. *Sejam $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Caratheodóry que satisfaz os itens i) e ii) da proposição 2.5 e u uma solução de (2.1) com $h = 0$, então*

$$\int_{\Omega} |g(x, u)| dx \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \quad e \quad \int_{\Omega} |\Delta u| \leq 2\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}. \quad (2.4)$$

Na maior parte, estamos particularmente interessados no problema (2.1) com condição de Dirichlet, isto é, com $h = 0$,

$$\begin{cases} -\Delta u + g(x, u) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (2.5)$$

Os resultados obtidos a seguir são similares aos de Brezis, Ponce e Marcus em [15], onde os autores estudaram (2.5) com g dependendo apenas de u , mais precisamente, os autores lidaram com uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua não decrescente tal que $g(0) = 0$.

O problema (2.5), em geral, não tem solução. Por exemplo, se $g(t) = |t|^{p-1}t$, $\Omega = B_1$ e $\mu = a\delta_0$ com $a > 0$, Brezis observou em [10] que (2.5) não tem solução. Dessa forma, percebemos o comportamento dicotômico do problema clássico

$$\begin{cases} -\Delta u + |u|^{p-1}u = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (2.6)$$

pois se $p < N/(N-2)$ com imersões compactas vemos que para toda $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, (2.6) tem solução; e se $p \geq N/(N-2)$ nem sempre tem solução. Em [18], Barras e Pierre caracterizaram de duas formas distintas as medidas que (2.6) possui solução,

$$\mu = f + \Delta v, \quad \text{com } f \in L^1(\Omega) \text{ e } v \in L^p(\Omega)$$

ou

$$|\mu|(A) = 0 \text{ para todo bolero } A \subset \Omega \text{ tal que } \text{cap}_{2,p'}(A) = 0,$$

onde $\text{cap}_{2,p'}$ é a capacidade associada a $W^{2,p'}(\Omega)$.

A noção de capacidade acima e definida abaixo, está relacionada com a condição de existência, como acabamos de ver.

Definição 2.7. Dados $k \in \mathbb{N}$ e $p > 1$, a capacidade associada a $W^{k,p}(\Omega)$ de um compacto K , denotada por $\text{cap}_{k,p}(K)$, é definida por

$$\text{cap}_{k,p}(K) = \inf \{ \|\varphi\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p; \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \varphi \equiv 1 \text{ numa vizinhança aberta de } K \}.$$

Também definimos a capacidade associada a $W^{k,p}(\Omega)$ de um aberto $U \subset \Omega$,

$$\text{cap}_{k,p}(U) = \sup \{ \text{cap}_{k,p}(K); K \subset U, K \text{ é compacto} \},$$

e de borelianos E quaisquer contido em Ω ,

$$\text{cap}_{k,p}(E) = \inf \{ \text{cap}_{k,p}(U); E \subset U, U \text{ é aberto e } U \subset \Omega \}.$$

Quando $k = 1$ e $p = 2$, suprimos os índices nas notações acima e dizemos apenas capacidade (Newtoniana) ou capacidade H^1 em relação a Ω . Além disso, preferimos uma expressão equivalente e mais simples para a capacidade H^1 de um compacto K ,

$$\text{cap}(K) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx; \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ e } \varphi \equiv 1 \text{ numa vizinhança aberta de } K \right\}.$$

Discernimos as medidas para as quais (2.5) admite uma solução. A definição de boa-medida foi introduzida em [15].

Definição 2.8. Dizemos que μ é uma boa-medida se (2.5) admite solução. Denotamos por $\mathcal{G}(g)$ o espaço das boas-medidas de (2.5). Quando não houver perigo de confusão sintetizamos a notação e escrevemos apenas \mathcal{G} .

Apesar do problema (2.5), em geral, não possuir uma solução, Lin, Ponce e Yang mostraram em [29], teorema 9.1, que sempre existe uma, com μ em (2.5) trocada por uma medida comparavelmente menor.

Teorema 2.9. Suponhamos que $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, além de ser de Carathéodory, satisfaça:

1. $g(x, \cdot)$ é não decrescente para quase todo $x \in \Omega$;
2. $g(x, t) = 0$ para quase todo $x \in \Omega$, para todo $t \leq 0$;
3. $g(\cdot, t)$ é quase contínua para todo $t \in \mathbb{R}$.

Então dada $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ existe uma boa-medida μ^* para o problema (2.5) tal que $\mu^* \leq \mu$ e é a maior medida menor do que ou igual a μ tal que o problema (2.5) tem uma solução, em outras palavras, se $\nu \leq \mu$ é uma boa-medida para (2.5) então $\nu \leq \mu^*$.

A solução de (2.5) associada a medida μ^* , ou seja, a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + g(x, u) = \mu^* & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

é obtida via aproximação por u_n em $L^1(\Omega)$, onde u_n satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_n + g_n(x, u_n) = \mu & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.7)$$

com $g_n(x, t) = \min \{g(x, t), n\}$.

Doravante, supomos que g é uma função de Carathéodory que satisfaz as três condições do teorema acima. Também, chamamos usualmente μ^* de medida reduzida de μ . A seguir, introduzimos o conceito de quase contínuo, usado acima.

Definição 2.10. *Uma função mensurável $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é quase contínua se dado $\epsilon > 0$, existe um aberto $\omega \subset \Omega$ tal que $\text{cap}(\omega) < \epsilon$ e $G|_{\Omega \setminus \omega}$ é contínua.*

Se $u \in L^1(\Omega)$ e $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$ então por [2] sabemos que existe $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ quase contínua e $u = \tilde{u}$ qtp em Ω . Neste caso, implicitamente identificamos u com \tilde{u} .

Ao usar o terema 2.9 ao invés de um resultado simétrico presente em [15], alguns resultados de [15] são facilmente generalizados para o problema (2.5). Entre eles, destacam-se os dois próximos corolários.

Corolário 2.11. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e μ^* a medida reduzida de μ . Então,*

$$0 \leq \mu - \mu^* \leq \mu^+ = \sup \{\mu, 0\}. \quad (2.8)$$

Em particular,

$$|\mu^*| \leq |\mu|.$$

Como $g_n \leq g_{n+1}$ qtp em $\Omega \times \mathbb{R}$, pela proposição 2.5 vemos que (u_n) é uma sequência não crescente. Logo dado $\xi \geq 0$ em $\mathcal{C}_0^2(\overline{\Omega})$, aplicando Lema de Fatou em

$$-\int_{\Omega} u_n \Delta \xi dx + \int_{\Omega} g_n(x, u_n) \xi dx = \int_{\Omega} \xi d\mu,$$

obtemos que

$$\int_{\Omega} \xi d\mu^* = \int_{\Omega} u \Delta \xi dx + \int_{\Omega} g(x, u) \xi dx \leq \int_{\Omega} \xi d\mu,$$

ou seja, $\mu^* \leq \mu$. Contudo, menos trivial é a conclusão de que medida reduzida é positiva quando a medida original o for.

Corolário 2.12. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e μ^* a medida reduzida de μ . Se $\mu \geq 0$ então $\mu^* \geq 0$.*

Dois outros resultados reformulados para o caso de uma não linearidade dependendo também de x , são obtidos através das mesmas técnicas contidas em [15]. Estes, também são usados em inúmeros ensejos.

Teorema 2.13. *Sejam μ_1 e $\mu_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$ tais que $\mu_1 \leq \mu_2$. Se μ_2 for uma boa-medida então μ_1 também o é.*

Teorema 2.14. *O Subespaço \mathcal{G} é fechado em $\mathcal{M}(\Omega)$.*

Neste ponto, vale a pena fazer uma observação relevante. Nos resultados acima, desde o teorema 2.9, utilizamos que para todo $t \in \mathbb{R}$, $g(\cdot, t) = 0$ para quase todo $x \in \Omega$. Contudo, é necessário eliminar esta condição e definir medida reduzida associadas a funções de Carathéodory $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem apenas:

1. $g(x, \cdot)$ é não decrescente para quase todo $x \in \Omega$;
2. $g(x, 0) = 0$ para quase todo $x \in \Omega$;
3. $g(\cdot, t)$ é quase contínua para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ é positiva, as soluções de (2.7) são não negativas, então naturalmente tomamos a medida reduzida de μ associada a g sendo a associada a g^+ . Agora se

$\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ é tal que $\mu \leq 0$, notamos que se $w_n = -u_n$, onde u_n é solução de (2.7), então

$$\begin{cases} -\Delta w_n + g_n^-(x, -w_n) = -\mu^- & \text{em } \Omega \\ w_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Pelo teorema 2.9 sabemos que w_n converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta w + g_n^-(x, -w) = (-\mu)^* & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde $(-\mu)^*$ é a medida reduzida de $-\mu$ associada a $g^-(\cdot, -t)$. Assim, definimos a medida reduzida de μ como $\Delta w - g^-(x, -w)$. Enfim, se $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ é uma medida com sinal, consideramos a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + g_n(x, u_n) = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (2.9)$$

Através das mesmas ideias da demonstração do teorema 4.5 de [15], obtemos que

Teorema 2.15. *Seja u_n a solução de (2.9). Então $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, onde u é única solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u + g(x, u) = (\mu^+)^* + (-\mu^-)^* & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} g_n^+(\cdot, u_n) &\xrightarrow{*} g^+(\cdot, u) + \mu^+ - (\mu^+)^* \\ g_n^-(\cdot, u_n) &\xrightarrow{*} g^-(\cdot, u) + \mu^- + (-\mu^-)^* \end{aligned} \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega).$$

Assim, deparamo-nos com o conceito de [15] para medida reduzida com g mudando de sinal.

Definição 2.16. *Seja $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. A medida reduzida de μ associada a g é dada por*

$$\mu^* = (\mu^+)^* + (-\mu)^*.$$

Se g^- é limitada,

$$g_n^-(\cdot, u_n) \rightarrow g^-(\cdot, u) \quad \text{em } L^1(\Omega, \rho_0 dx).$$

Logo, dada $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, temos que

$$\mu^* = (\mu^+)^* - \mu^-.$$

Nesse caso, preservamos a propriedade de que a medida reduzida é a maior boa-medida menor do que ou igual a μ e as subsequentes ao teorema 2.9.

Nas seções subsequentes, apresentamos os famosos: Teorema de Brezis e Merle contido em [14], e o Teorema de Vázquez, presente em [37], que são chaves na obtenção de existência e unicidade de soluções quando lidamos com não linearidade exponencial.

No Teorema de Brezis e Merle, através da Desigualdade de Jensen, os autores obtiveram estimativas para exponenciais de funções com traço nulo cujo laplaciano é uma função integrável, isto é, para exponenciais de soluções de

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (2.10)$$

sendo $\mu \in L^1(\Omega)$. Devido à imersão contínua e isométrica de $L^1(\Omega)$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, estendemos o resultado para $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Fato que é facilmente obtido quando aproximamos u em $L^1(\Omega)$ pelas soluções de (2.10) com a medida $\rho_n * \mu$ no lugar de μ , onde (ρ_n) é uma sequência regularizante.

Teorema 2.17 (Teorema de Brezis e Merle). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e u a solução de (2.10). Então para todo $\delta \in (0, 4\pi)$ temos que*

$$\int_{\Omega} e^{\frac{4\pi-\delta}{\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}}|u|} dx \leq \frac{4\pi^2}{\delta} (\text{diam } \Omega)^2.$$

Anos mais tarde, Bartolucci, Leoni, Orsina e Ponce, teorema 2 de [4], generalizaram a versão do teorema acima para dimensões superiores. Nela, no lugar de funções integráveis como dado admite-se funções do Espaço de Morrey $M^{N/2}(\Omega)$, onde N é a dimensão do espaço. Redefinindo os espaços de Morrey como abaixo, pelo mesmo método aproximativo da segunda parte do Teorema de Brezis e Merle, ampliamos a conclusão para este subespaço das medidas de Radon.

Definição 2.18. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $p \geq 1$ um número real. Dizemos que μ pertence ao espaço de Morrey $M^p(\Omega)$ se*

$$\|\mu\|_{M^p(\Omega)} = \sup_{B_r(x)} \frac{|\mu|(B_r(x) \cap \Omega)}{r^{N(1-1/p)}} < \infty.$$

Teorema 2.19. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\mu \in M^{N/2}(\Omega)$ e u a solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Então para todo $0 < \alpha < 2N\omega_N$ temos que

$$\int_{\Omega} e^{((2N\omega_N - \alpha)/\|\mu\|_{M^{N/2}(\Omega)})|u|} dx \leq \frac{(N\omega_N)^2}{\alpha} (\text{diam } \Omega)^N.$$

Enquanto que no Teorema de Vázquez, em dimensão 2, caracterizamos de forma elegante as medidas de Radon tais que o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.11)$$

admite solução. Precisamente,

Teorema 2.20 (Teorema de Vázquez). *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. O Problema de Dirichlet (2.11) tem uma solução se, e somente, se $\mu(\{x\}) \leq 4\pi$ para todo $x \in \Omega$.*

No “se” do teorema, devido à simplicidade e à dependência de apenas do que é realizado aqui, preterimos a demonstração dada por Vázquez em [37] pela, com ligeiras modificações, de Ponce contida em [34]. No “somente” do teorema, utilizamos a demonstração original de Vázquez. Nesta parte, se $\mu(\{x_0\}) > 4\pi$ para algum $x_0 \in \Omega$ e (2.11) tem uma solução, então, denotando $a = \mu(\{x_0\})$, pelo teorema 2.13 temos que (2.11), com $a\delta_{x_0}$ no lugar de μ , tem uma solução v . Mas, com o resultados desenvolvidos a seguir, provarmos que

$$v(x) \sim \frac{a}{2\pi} \log \frac{1}{|x - x_0|}, \quad (2.12)$$

como média angular.

Definição 2.21. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. A média “angular” de uma função $w \in L^1(\Omega)$ numa circunferência centrada em x contida em Ω é dada por*

$$\bar{w}(x, r) = \int_{\partial B_r(x)} w d\sigma = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(x)} w d\sigma.$$

Como a segunda parte da expressão em (2.12) não é integrável em nenhuma vizinhança de x_0 obtemos uma contradição.

Também provamos a imersão compacta de $W_0^{1,p}(\Omega)$ com a norma dada pela variação total do laplaciano em $W_0^{1,p}(\Omega)$ com a norma usual, para $1 \leq p < N/(N-1)$. O resultado provém do artigo de Boccardo e Gallouët, [7]. Nele, os autores trataram com um operador na forma divergente A mais geral no lugar do laplaciano com dados em $L^1(\Omega)$. Nosso objetivo, é adaptar, ampliar a funções que o laplaciano é uma medida e não apenas integráveis e esmiuçar a demonstração.

Teorema 2.22. *Seja $(u_n) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, $\Delta u_n \in \mathcal{M}(\Omega)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e (Δu_n) é limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$. Então $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, para $1 \leq p < N/(N-1)$.*

Ainda no final deste capítulo, decompomos uma medida de Radon como soma de duas medidas mutuamente singulares. O resultado é bem conhecido e foi obtido do artigo [15].

Em suma, esse capítulo é dedicado à formulação e às demonstrações dos alicerces para a construção da teoria. Em alguns deles, preterimos as demonstrações originais por outras mais modernas.

2.1 Equação Semilinear com Medida

Primordial nas equações elípticas para assegurar desigualdades, o Princípio do Máximo é estabelecido na versão dada pela proposição 4.B.1 em [15].

Teorema 2.23. *Seja $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ satisfazendo*

$$-\int_{\Omega} u \Delta \varphi \leq 0$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$ em Ω . Então

$$-\int_{\Omega} u \Delta \varphi \leq 0$$

para toda $\varphi \in C_0^2(\bar{\Omega})$. Em particular,

$$u \leq 0 \quad \text{qtp em } \Omega.$$

Demonstração da proposição 2.2. Seja v a solução de

$$\begin{cases} \Delta v = \Delta u & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Pelo teorema 2.1 temos que

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_p \|\Delta u\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \quad (2.13)$$

para todo $1 \leq p < N/(N-1)$. Por outro lado, sendo $u - v$ uma função harmônica,

$$\|u - v\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq C_\omega \|u - v\|_{L^1(\Omega)} \leq C_\omega (\|u\|_{L^1(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\Omega)}). \quad (2.14)$$

Portanto, das últimas das desigualdades (2.13) e (2.14) obtemos o resultado. ■

Demonstração da proposição 2.5. Aplicando o lema 2.4 a $u_1 - u_2$, obtemos

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^+ \Delta \xi &\leq \int_{\Omega} \xi d(\mu_1 - \mu_2)^+ - \int_{\partial\Omega} (h_1 - h_2)^+ \frac{\partial \xi}{\partial \eta} dl \\ &\quad - \int_{[u_1 \geq u_2]} (g_1(x, u_1) - g_2(x, u_2)) \xi \leq 0 \end{aligned}$$

para toda $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\xi \geq 0$. Pelo teorema 2.23 temos que $(u_1 - u_2)^+ \leq 0$ qtp em Ω , ou seja, $u_1 \leq u_2$ qtp em Ω . ■

Proposição 2.24. *Sejam $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory que satisfaz as condições i) e ii) da proposição 2.5 e u uma solução de (2.1), então*

$$- \int_{\Omega} |u| \Delta \xi dx + \int_{\Omega} |g(x, u)| \xi dx \leq \int_{\Omega} \xi d|\mu| - \int_{\partial\Omega} |h| \frac{\partial \xi}{\partial \eta} d\sigma \quad (2.15)$$

para todo $\xi \in C_0^2(\Omega)$ tal que $\xi \geq 0$ em Ω . Seja u_i uma solução de (2.1) associada a (μ_i, h_i) para $i = 1, 2$. Então

$$\|u_1 - u_2\|_{L^1(\Omega)} + \|g(\cdot, u_1) - g(\cdot, u_2)\|_{L^1(\Omega; \rho_0 dx)} \leq C (\|\mu_1 - \mu_2\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + \|h_1 - h_2\|_{L^1(\partial\Omega)}).$$

Demonstração. Para a primeira parte basta aplicar o lema 2.4 com $g(\cdot, u)$ no lugar de f . Pelo lema 2.4, se $\xi \in C_0^2(\bar{\Omega})$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta \xi = 1 & \text{em } \Omega \\ \xi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

temos que

$$\int_{\Omega} |u_1 - u_2| dx + \int_{\Omega} |g(x, u_1) - g(x, u_2)| \xi dx \leq \int_{\Omega} \xi d|\mu_1 - \mu_2| - \int_{\partial\Omega} |h_1 - h_2| \frac{\partial \xi}{\partial \eta} d\sigma, \quad (2.16)$$

o que nos fornece que

$$C_1 \int_{\Omega} |g(x, u_1) - g(x, u_2)| \rho_0 dx \leq C_2 \int_{\Omega} d|\mu_1 - \mu_2| - \int_{\partial\Omega} |h_1 - h_2| \frac{\partial \xi}{\partial \eta} d\sigma. \quad (2.17)$$

Reunindo as equações (2.16) e (2.17) obtemos o resultado. \blacksquare

Demonstração da proposição 2.6. Dada uma sequência de funções superharmônicas $(\xi_n) \subset \mathcal{C}_0^2(\bar{\Omega})$, temos por (2.15) que

$$\int_{\Omega} |g(x, u)| \xi_n dx \leq \int_{\Omega} \xi_n d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo se $\xi_n \rightarrow 1$ em $L_{\text{loc}}^{\infty}(\Omega)$ e $0 \leq \xi_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, fazendo n tender ao infinito na desigualdade acima, obtemos que

$$\int_{\Omega} |g(x, u)| dx \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

A desigualdade restante segue diretamente da equação. \blacksquare

A prova abaixo de não existência de solução para um problema do tipo (2.5) foi obtido de [34].

Proposição 2.25. *Sejam $N \geq 3$, $p \geq N/(N-2)$ e $a \neq 0$. Então*

$$\begin{cases} -\Delta u + |u|^{p-1}u = a\delta_0 & \text{em } B_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases} \quad (2.18)$$

não tem solução.

Demonstração. Suponhamos que existam $p \geq N/(N-2)$ e $a > 0$ tais que (2.18) tenha uma solução u . Sejam $\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(B_1)$ tal que $\varphi(0) = 1$ e $\varphi_n(x) = \varphi(nx)$. Pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u \Delta \varphi_n| dx &= n^2 \int_{B_{1/n}} |u \Delta \varphi(nx)| dx \leq n^2 \left(\int_{B_{1/n}} u^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{B_{1/n}} |\Delta \varphi(nx)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \\ &= n^{2-N/p'} \left(\int_{B_{1/n}} u^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{B_1} |\Delta \varphi(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Como $2 - N/p' = 2 - N + N/p \leq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u \Delta \varphi_n dx = 0. \quad (2.19)$$

Por outro lado, usando o Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u|^p \varphi_n dx = 0. \quad (2.20)$$

Portanto, por (2.18) - (2.20),

$$a = \int_{\Omega} \varphi_n d(a\delta_0) = - \int_{\Omega} u \Delta \varphi_n dx + \int_{\Omega} |u|^{p-1} u \varphi_n dx \rightarrow 0,$$

quando n tende ao infinito, o que é uma contradição. ■

Seja u_n a solução de (2.7). Como $(g_n(\cdot, u_n))$ é limitada pela proposição 2.6, existe uma subsequência que converge na topologia fraco-estrela em $\mathcal{M}(\Omega)$. Contudo, facilmente obtemos que toda a sequência converge e ainda determinamos o seu limite fraco-estrela.

Proposição 2.26. *Se u_n é solução de (2.7) então*

$$g_n(\cdot, u_n) \xrightarrow{*} g(\cdot, u) + \mu - \mu^* \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega).$$

Demonstração. Seja $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$. Como u_n é solução de (2.7),

$$- \int_{\Omega} u_n \Delta \xi dx + \int_{\Omega} g_n(x, u_n) \xi dx = \int_{\Omega} \xi d\mu.$$

Do Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(x, u_n) \xi dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \Delta \xi dx + \int_{\Omega} \xi d\mu = \int_{\Omega} u \Delta \xi dx + \int_{\Omega} \xi d\mu \\ &= \int_{\Omega} g(x, u) \xi dx - \int_{\Omega} \xi d\mu^* + \int_{\Omega} \xi d\mu \end{aligned}$$

para toda $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$. ■

Corolário 2.27. *Seja $\mu \in \mathcal{G}$. Se u_n é a solução de (2.7) então*

$$g_n(\cdot, u_n) \xrightarrow{*} g(\cdot, u) \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega).$$

Notemos que pela hipótese 2 do teorema 2.9, existe um subconjunto $N \subset \Omega$ tal que $|N| = 0$ e $g(x, t) = 0$ para todo $(x, t) \in (\Omega \setminus N) \times (-\infty, 0]$. De fato, dada uma sequência (t_n) densa em $(-\infty, 0]$, por 2) temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe N_n tal que $|N_n| = 0$ e $g(x, t_n) = 0$ para todo $x \in \Omega \setminus N_n$. Além disso, g é uma função de Carathéodory, logo existe $M \subset \Omega$ tal que $|M| = 0$ e $g(x, \cdot)$ é contínua para todo $x \in \Omega \setminus M$. Portanto, se $N = M \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$, $|N| = 0$ e $g(x, t) = 0$ se $(x, t) \in (\Omega \setminus N) \times (-\infty, 0]$.

Agora, obtemos duas consequências notáveis do teorema 2.9, a primeira que a variação total da medida reduzida é menor do que a da medida original.

Demonstração do corolário 2.11. Vejamos que toda medida não positiva é uma boa-medida. De fato, se $\nu \leq 0$, pelo teorema 2.23, a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = \nu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

é não positiva. Pela observação acima, u resolve (2.5). Portanto, $-\mu^-$ é uma boa-medida menor do que ou igual a μ . Do teorema 2.9 segue que $-\mu^- \leq \mu^*$, logo

$$\mu - \mu^* \leq \mu + \mu^- = \mu^+,$$

e assim temos uma desigualdade em (2.8), a outra é trivial. ■

Enquanto que a segunda, nos diz que medidas de Radon positivas produzem medidas reduzidas positivas.

Demonstração do corolário 2.12. Basta ver que pela equação (2.8) temos que

$$-\mu^- \leq \mu^*. \quad \blacksquare$$

Um passo fundamental no principal teorema da seção são as convergências abaixo. Para afirmá-las, observamos que o teorema 2.1 e a proposição 2.24 podem ser reformulados quando a medida μ é apenas tal que

$$\int_{\Omega} \rho_0 d|\mu| < \infty,$$

nos quais trocamos, a menos de novas constantes, a medida μ pela $\nu = \rho_0 d\mu$. No teorema utiliza-se essencialmente mesma demonstração. Na proposição, basta usar que a função distância e a solução de

$$\begin{cases} -\Delta \xi = 1 & \text{em } \Omega \\ \xi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

são equivalentes, isto é, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que para todo $x \in \Omega$,

$$C_1 \rho_0(x) \leq \xi(x) \leq C_2 \rho_0(x).$$

Lema 2.28. *Sejam μ uma boa-medida, $1 \leq p < N/(N-1)$ e u_n e u as soluções de (2.7) e (2.5), respectivamente. Então*

$$u_n \rightarrow u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega) \quad e \quad g_n(x, u_n) \rightarrow g(x, u) \text{ em } L^1(\Omega; \rho_0 dx).$$

Demonstração. Note que u_n e u satisfazem

$$-\Delta u_n + g_n(x, u_n) = \mu \quad e \quad -\Delta u + g_n(x, u) = \mu + g_n(x, u) - g(x, u) \quad \text{em } (\mathcal{C}_0^2(\bar{\Omega}))^*,$$

respectivamente. Usando a proposição 2.24,

$$\int_{\Omega} |u_n - u| dx + \int_{\Omega} |g_n(x, u_n) - g_n(x, u)| \rho_0 dx \leq C \int_{\Omega} |g_n(x, u) - g(x, u)| \rho_0 dx. \quad (2.21)$$

Como $g_n(\cdot, u)$ é uma sequência não negativa, não decrescente e $g_n(x, u) \rightarrow g(x, u)$ qtp em Ω , pelo Teorema da Convergência Monótona temos que $g_n(\cdot, u) \rightarrow g(\cdot, u)$ em $L^1(\Omega; \rho_0 dx)$. O que em conjunto com (2.21) nos fornece que

$$\int_{\Omega} |g_n(x, u_n) - g(x, u)| \rho_0 dx \leq \int_{\Omega} |g_n(x, u_n) - g_n(x, u)| \rho_0 dx + \int_{\Omega} |g_n(x, u) - g(x, u)| \rho_0 dx \rightarrow 0.$$

quando n tende ao infinito, ou seja, $g_n(\cdot, u_n) \rightarrow g(\cdot, u)$ em $L^1(\Omega; \rho_0 dx)$. Dado $1 \leq p < N/(N-1)$, pelo teorema 2.1, $u, u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \left(\|g_n(\cdot, u_n) - g_n(\cdot, u)\|_{L^1(\Omega; \rho_0 dx)} + \|g_n(\cdot, u) - g(\cdot, u)\|_{L^1(\Omega; \rho_0 dx)} \right).$$

Como já temos que $g_n(\cdot, u) \rightarrow g(\cdot, u)$ e $g_n(\cdot, u_n) - g_n(\cdot, u) \rightarrow 0$ em $L^1(\Omega; \rho_0 dx)$, segue que $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Os dois próximos resultados são o cerne desta seção e são usados repetidas vezes.

Demonstração do teorema 2.13. Sejam $u_{1,n}$ e $u_{2,n}$ soluções de (2.7) com μ_1 e μ_2 no lugar de μ , respectivamente. Pela proposição 2.5 temos que $u_{1,n} \leq u_{2,n}$ qtp em Ω , logo $0 \leq g_n(\cdot, u_{1,n}) \leq g_n(\cdot, u_{2,n})$ qtp em Ω . Mas pelo teorema precedente $g_n(\cdot, u_{2,n}) \rightarrow g(\cdot, u_2)$ em $L^1(\Omega; \rho_0 dx)$. Usando o Teorema da Convergência Dominada, $g_n(\cdot, u_{1,n}) \rightarrow g(\cdot, u_1)$ em $L^1(\Omega; \rho_0 dx)$, uma vez que $u_{1,n} \rightarrow u_1$ em $L^1(\Omega)$, onde u_1 resolve (2.5) com μ_1^* no lugar de μ . Por fim, dada $\xi \in \mathcal{C}_0^2(\bar{\Omega})$, da definição de $u_{1,n}$ segue que

$$-\int_{\Omega} u_{1,n} \Delta \xi dx + \int_{\Omega} g_n(x, u_{1,n}) \xi dx = \int_{\Omega} \xi d\mu_1.$$

Portanto, fazendo n tender ao infinito,

$$-\int_{\Omega} u_1 \Delta \xi dx + \int_{\Omega} g(x, u_1) \xi dx = \int_{\Omega} \xi d\mu_1,$$

ou seja, u_1 é solução de (2.5) com μ_1 no lugar de μ . ■

Demonstração do teorema 2.14. Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e uma seqüência $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \rightarrow \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e u_n a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + g(x, u_n) = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela proposição 2.24 temos que (u_n) é de Cauchy em $L^1(\Omega)$. Logo existe uma subsequência (u_{n_k}) tal que $u_{n_k} \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$. Ainda pela mesma proposição, a seqüência $(g(x, u_{n_k}))$ também é de Cauchy em $L^1(\Omega; \rho_0 dx)$, conseqüentemente, $g(x, u_{n_k}) \rightarrow g(x, u)$ em $L^1(\Omega; \rho_0 dx)$. Portanto, fazendo k tender ao infinito em

$$-\int_{\Omega} u_{n_k} \Delta \xi dx + \int_{\Omega} g(x, u_{n_k}) \xi dx = \int_{\Omega} \xi d\mu_{n_k},$$

com $\xi \in \mathcal{C}_0^2(\bar{\Omega})$, vemos que u é solução de (2.5). ■

Dada um medida μ com sinal num espaço mensurável (X, \mathcal{M}) , definimos

$$\sup \{\mu, 0\}(E) = \mu^+(E) = \sup \{\mu(F) + 0(X \setminus F); F \in \mathcal{M}, F \subset E\}$$

$$\inf \{\mu, 0\}(E) = -\mu^-(E) = \inf \{\mu(F) + 0(X \setminus F); F \in \mathcal{M}, F \subset E\}$$

para todo $E \in \mathcal{M}$. Guiados pelas expressões acima, estabelecemos

Definição 2.29. Dadas medidas com sinal μ e ν num espaço mensurável (X, \mathcal{M}) , definimos

$$\begin{aligned}\sup \{\mu, \nu\}(E) &= \sup \{\mu(F) + \nu(X \setminus F); F \in \mathcal{M}, F \subset E\} \\ \inf \{\mu, \nu\}(E) &= \inf \{\mu(F) + \nu(X \setminus F); F \in \mathcal{M}, F \subset E\}\end{aligned}$$

Indutivamente, se μ_1, \dots, μ_n são medidas com sinal em (X, \mathcal{M}) ,

$$\begin{aligned}\sup \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\} &= \sup \{\sup \{\mu_1, \dots, \mu_{n-1}\}, \mu_n\} \\ \inf \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\} &= \inf \{\inf \{\mu_1, \dots, \mu_{n-1}\}, \mu_n\}\end{aligned}$$

A proposição a seguir, cuja demonstração é direta, expressa $\sup \{\mu, \nu\}$ e $\inf \{\mu, \nu\}$ como somas de medidas com sinal, o que acarreta que são medidas com sinal e de Radon.

Proposição 2.30. Sejam μ e ν medidas com sinal num espaço mensurável (X, \mathcal{M}) . Então

$$\begin{aligned}\sup \{\mu, \nu\} &= (\mu - \nu)^+ + \nu \\ \inf \{\mu, \nu\} &= \nu - (\mu - \nu)^+\end{aligned}$$

Corolário 2.31. Sejam μ_1 e μ_2 boas-medidas para o problema (2.5). Então $\mu = \sup \{\mu_1, \mu_2\}$ também o é.

Demonstração. Como μ_1 e μ_2 são boas-medidas e $\mu_i \leq \mu$ para $i = 1, 2$, pelo teorema 2.9 temos que $\mu_i \leq \mu^* \leq \mu$. Portanto,

$$\mu = \sup \{\mu_1, \mu_2\} \leq \mu^*$$

e, conseqüentemente, $\mu = \mu^*$. ■

Uma consequência do último corolário é a convexidade do conjunto das boas-medidas.

Proposição 2.32. O Subespaço \mathcal{G} é convexo.

Demonstração. Basta ver que $(1 - t)\mu + t\nu \leq \sup \{\mu, \nu\}$. ■

No próximo resultado trasladamos para o espaço de Medidas de Radon (com o convexo fechado sendo o espaço das boas-medidas), uma propriedade bem conhecida dos espaços com produto interno: a projeção única sobre conjuntos convexos fechados.

Corolário 2.33. *Se $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ então*

$$\|\mu - \mu^*\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \inf_{\nu \in \mathcal{G}} \|\mu - \nu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}. \quad (2.22)$$

Além disso, μ^ é a única boa-medida que atinge o ínfimo.*

Demonstração. Dada $\nu \in \mathcal{G}$, pela proposição 2.30 temos que

$$|\mu - \nu| = (\mu - \nu)^+ + (\mu - \nu)^- \geq (\mu - \nu)^+ = \mu - \inf \{\mu, \nu\}. \quad (2.23)$$

Pelo teorema 2.13, $\inf \{\mu, \nu\}$ é uma boa-medida. Mas $\inf \{\mu, \nu\} \leq \mu$, logo $\inf \{\mu, \nu\} \leq \mu^*$. Portanto,

$$\|\mu - \nu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = |\mu - \nu|(\Omega) \geq (\mu - \inf \{\mu, \nu\})(\Omega) \geq (\mu - \mu^*)(\Omega) = \|\mu - \mu^*\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \quad (2.24)$$

e assim obtemos (2.22). Agora, seja $\nu \in \mathcal{G}$ tal que $\|\mu - \nu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \|\mu - \mu^*\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$. Pela equação (2.24), $(\mu - \inf \{\mu, \nu\})(\Omega) = (\mu - \mu^*)(\Omega)$ e por (2.23), $(\mu - \nu)^- = 0$. Logo $\nu = \inf \{\mu, \nu\}$, pois senão existiria $A \subset \Omega$ boreliano tal que $\nu(A) > \inf \{\mu, \nu\}(A)$ e

$$\|\mu - \mu^*\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = (\mu - \inf \{\mu, \nu\})(\Omega \setminus A) + (\mu - \inf \{\mu, \nu\})(A) > (\mu - \nu)(\Omega) = |\mu - \nu|(\Omega).$$

Por outro lado $\inf \{\mu, \nu\} = \mu^*$. De fato, se existisse $A \subset \Omega$ boreliano tal que $\inf \{\mu, \nu\}(A) < \mu^*(A)$, teríamos que

$$\begin{aligned} \|\mu - \mu^*\|_{\mathcal{M}(\Omega)} &= |\mu - \nu|(\Omega \setminus A) + |\mu - \nu|(A) \geq (\mu - \inf \{\mu, \nu\})(\Omega \setminus A) + (\mu - \inf \{\mu, \nu\})(A) \\ &> (\mu - \mu^*)(\Omega \setminus A) + (\mu - \mu^*)(A) = (\mu - \mu^*)(\Omega) = \|\mu - \mu^*\|_{\mathcal{M}(\Omega)}, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Portanto, concluímos que $\nu = \inf \{\mu, \nu\} = \mu^*$. ■

Ainda antes do fim desta seção, vemos que em muitas asserções basta nos preocupar apenas com medidas positivas.

Corolário 2.34. *Seja $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Então μ é uma boa-medida se, e somente se, μ^+ o é.*

Demonstração. Se μ é uma boa medida então pelo corolário 2.11 $\mu^+ = \sup \{\mu, 0\}$ também o é. Reciprocamente, se μ^+ é uma boa-medida então, como $\mu \leq \mu^+$, pelo teorema 2.13, μ o é. ■

Dada $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, através do Teorema de Decomposição de Medidas, teorema 2.55 dado no fim do capítulo, escrevemos

$$\mu = \mu_1 + \mu_2,$$

onde $\mu_1(A) = 0$ para todo boreliano $A \subset \Omega$ tal que $\text{cap}(A) = 0$ e μ_2 se anula fora de um conjunto de capacidade nula. Doravante, chamamos μ_1 e μ_2 de partes difusa e concentrada de μ e as denotamos por μ_d e μ_c , respectivamente.

Corolário 2.35. *Seja $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Se μ é uma boa-medida então μ_c também o é.*

Demonstração. Ao notar que

$$\begin{aligned} (\mu^+ - \mu_c)_d &= (\mu^+)_d \geq 0 \\ (\mu^+ - \mu_c)_c &= \mu_c^+ - \mu_c \geq 0, \end{aligned}$$

concluimos que $\mu_c \leq \mu^+$. Portanto, pelos corolário 2.34 e teorema 2.13, μ_c é uma boa-medida. ■

2.1.1 Não Linearidades que Mudam de Sinal

O nosso objetivo aqui é reproduzir as asserções sobre medida reduzida para não linearidades g 's que se anulam quando $t \leq 0$ no caso em que g apenas muda de sinal e g^- é limitada. Enfatizamos que nesta seção, $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory que satisfaz

- $g(x, \cdot)$ é não decrescente para quase todo $x \in \Omega$;
- $g(x, 0) = 0$ para quase todo $x \in \Omega$;
- $g(\cdot, t)$ é quase contínua para todo $t \in \mathbb{R}$.
- g^- é limitada.

Corolário 2.11'. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e μ^* a medida reduzida de μ . Então,*

$$0 \leq \mu - \mu^* \leq \mu^+ = \sup \{\mu, 0\}. \quad (2.25)$$

Em particular,

$$|\mu^*| \leq |\mu|.$$

Demonstração. A demonstração segue diretamente de que $\mu^* = (\mu^+)^* - \mu^-$ e do corolário 2.11 para $(\mu^+)^*$. ■

Corolário 2.12'. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e μ^* a medida reduzida de μ . Se $\mu \geq 0$ então $\mu^* \geq 0$.*

Demonstração. Se $\mu \geq 0$ então pelo corolário 2.12 temos que $\mu^* = (\mu^+)^* \geq 0$, uma vez que $(\mu^+)^*$ é a medida reduzida de (2.5) com g^+ e μ^+ no lugar de g e μ . ■

A seguir, trazemos o lema 8.1 de [29], sem alterações relevantes em sua demonstração, para um contexto mais geral.

Lema 2.36. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $f \in L^1(\Omega)$. Se*

$$\begin{cases} -\Delta u + g(x, u) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.26)$$

tem solução então (2.26) também o tem com g^+, μ^+, f^+ no lugar de g, μ, f .

Demonstração. Aplicando o teorema 2.9 com g^+ e (μ^+, f^+) , obtemos que

$$\begin{cases} -\Delta v + g^+(x, v) = (\mu^+)^* & \text{em } \Omega \\ v = f^+ & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução. Agora, notemos que u é supersolução de

$$\begin{cases} -\Delta w + g^+(x, w) = \mu & \text{em } \Omega \\ w = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.27)$$

Além disso, se u_0 é a solução de (2.27) com $(-\mu^-, -f^-)$, u_0 é subsolução de (2.27) e pela proposição 2.5, $u_0 \leq u$ qtp em Ω . Pelo teorema 2.3, (2.27) tem solução $w \in L^1(\Omega)$. Sendo $\mu \leq \mu^+$, pelo teorema 2.9 temos que $\mu \leq (\mu^+)^*$. Mas pelo corolário 2.12', $(\mu^+)^* \geq 0$, logo $(\mu^+)^* \geq \mu^+$, conseqüentemente, $(\mu^+)^* = \mu^+$. ■

Teorema 2.9'. *Dada $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ existe uma boa-medida μ^* para o problema (2.5) tal que $\mu^* \leq \mu$ e é a maior medida menor do que ou igual a μ tal que o problema (2.5) tem solução, em outras palavras, se $\nu \leq \mu$ é uma boa-medida para (2.5) então $\nu \leq \mu^*$.*

Demonstração. Pelo teorema 2.15 temos que existe μ^* tal que (2.5) tem solução com μ^* no lugar de μ . Ainda mais,

$$\mu^* = (\mu^+)^* - \mu^- \leq \mu^+ - \mu^- = \mu.$$

Por fim, dada uma boa-medida ν para (2.5), pelo lema 2.36 temos que (2.5) com g^+, ν^+ também tem solução. Pelos teorema 2.9 e lema 2.36 temos que $\nu^+ \leq (\mu^+)^*$. Como $\nu^- \geq \mu^-$, segue que

$$\nu = \nu^+ - \nu^- \leq (\mu^+)^* - \mu^- = \mu^*. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.13. *Sejam μ_1 e $\mu_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$ tais que $\mu_1 \leq \mu_2$. Se μ_2 for uma boa-medida então μ_1 também o é.*

Demonstração. Sejam u_n a solução de (2.9) e u dada pelo teorema 2.15. Como $\mu_1^+ \leq \mu_2^+$, pelo teorema 2.13 temos que $\mu_1^* = \mu_1$, logo pelo teorema 2.15,

$$g_n^+(\cdot, u_n) \xrightarrow{*} g^+(\cdot, u) \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega).$$

Por outro lado, sendo g^- limitada,

$$g_n^-(\cdot, u_n) \xrightarrow{*} g^-(\cdot, u) \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega).$$

Portanto, u é solução de (2.5) com μ_1 no lugar de μ . ■

Teorema 2.14. *O Subespaço \mathcal{G} é fechado em $\mathcal{M}(\Omega)$.*

Demonstração. A demonstração é idêntica. ■

Além disso, a proposição 2.32 e os corolários 2.31 e 2.33 também são transladados para equações com não linearidades que mudam sinal sem alteração nas provas, uma vez que esta só depende dos resultados estendidos acima.

2.1.2 Comportamento Local e Regularidade

Nesta seção, exploramos o comportamento local e a regularidade das soluções de (2.5). Em suma, temos que se $\mu \in L^p(\Omega)$ e u é a solução de (2.5) então $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Abaixo, iniciamos um resultado conhecido da Teoria L^p .

Definição 2.37. Seja $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Uma função $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ satisfaz

$$\Delta u = \mu \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

se para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi = \int_{\Omega} \varphi d\mu.$$

Também definimos

$$\Delta u \leq \mu \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

se para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$,

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi \leq \int_{\Omega} \varphi d\mu.$$

Analogamente, temos (\geq) na segunda desigualdade se o mesmo ocorre na última.

Proposição 2.38. Sejam $u \in W^{1,1}(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ com $p > 1$. Se

$$-\Delta|u| \leq f \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{2.28}$$

então $u \in L^p(\Omega)$.

Demonstração. Com pequenas alterações na prova do teorema 2.23, obtemos que

$$-\int_{\Omega} |u| \Delta \xi \leq \int_{\Omega} f \xi,$$

para toda $\xi \in \mathcal{C}_0^2(\bar{\Omega})$ com $\xi \geq 0$. Dada $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $v \geq 0$, seja $\xi \in \mathcal{C}_0^2(\bar{\Omega})$ a solução de

$$\begin{cases} -\Delta \xi = v & \text{em } \Omega \\ \xi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando a Teoria L^p temos que

$$\|\xi\|_{W^{2,p'}(\Omega)} \leq C(p') \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Portanto, através da desigualdade de Hölder segue que

$$\int_{\Omega} |u|v = -\int_{\Omega} |u| \Delta \xi \leq \int_{\Omega} f \xi \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\xi\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C(p') \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \|f\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.29}$$

Segue por dualidade que $u \in L^p(\Omega)$ e ainda que $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p') \|f\|_{L^p(\Omega)}$. ■

Corolário 2.39. *Seja (f_n) uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$ para algum $p > 1$. Se u_n satisfaz*

$$-\Delta|u_n| \leq f_n \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$.

Demonstração. Pela equação (2.29) obtemos que $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f_n\|_{L^p(\Omega)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como (f_n) é limitada em $L^p(\Omega)$ o resultado segue. ■

Nas asserções a seguir, fazemos uso de duas versões da Desigualdade de Kato. As demonstrações constituem-se de apropriadas modificações em sua prova. A clássica versão pode ser encontrada em [38], teorema 21.19.

Proposição 2.40. *Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $\Delta u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, então*

$$\Delta|u| \geq \text{sign } u \Delta u \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (2.30)$$

Proposição 2.41. *Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, não decrescente e contínua, exceto numa quantidade finita de descontinuidades de primeiro tipo. Sejam $P(r) = \int_0^r p(s)ds$ e $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ com $\Delta u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Então*

$$\Delta P(u) \geq (\Delta u)p(u) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Proposição 2.42. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f \in L^p(\Omega)$ com $p > 1$ e u solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u + g(x, u) = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory tal que $g(x, t) \text{ sign } t \geq 0$ qtp em Ω e todo $t \in \mathbb{R}$. Então $u \in L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Pela proposição 2.40 temos que

$$-\Delta|u| \leq (f - g(x, u)) \text{ sign } u \leq f \text{ sign } u \leq |f| \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Seja v o potencial Newtoniano de $|f|$. Pela Desigualdade de Calderón-Zygmund, $v \in W^{2,p}(\Omega)$ e $-\Delta v = |f|$. Logo pela Desigualdade de Morrey temos que $v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Além disso, se $x \in \partial\Omega$,

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{\Omega} \Gamma(x-y)|f(y)|dy = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \log|x-y||f(y)|dy \\ &\geq -\frac{\log d}{2\pi} \int_{\Omega} |f(y)|dy \geq C\|f\|_{L^p(\Omega)} = c, \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde $d = \text{diam } \Omega$. Portanto, a função $w = v - c$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w = |f| & \text{em } \Omega \\ w \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Usando o teorema 2.23 obtemos que $|u| \leq w$ qtp em Ω . Como $w \in C^0(\overline{\Omega})$, concluímos que u é limitada ■

Se apenas supormos que $g(x, t) \text{sign}^+ t \geq 0$ qtp em Ω e todo $t \in \mathbb{R}$, a mesma demonstração acima nos garante que u^+ é limitada. Contudo tal hipótese não é suficiente para garantir que u^- também o seja. De fato, a função $u(x) = -\frac{1}{2} \log \left(\log \frac{e}{|x|} \right) \in W^{1,1}(B_1)$ satisfaz $\Delta u \in L^1(B_1)$,

$$\begin{cases} -\Delta u + ve^u = 0 & \text{em } B_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases},$$

onde $v(x) = \frac{|x|^2}{2} \left(\log \frac{e}{|x|} \right)^{-3/2}$ e $\lim_{|x| \rightarrow 0} u(x) = -\infty$, isto é, $u \notin L^\infty(B_1)$. Mas, sendo $v \geq 0$, é imediato que $g(x, t) = v(x)e^t \text{sign}^+ t \geq 0$ para todo $x \neq 0$ e $t \in \mathbb{R}$.

Por fim, generalizamos o teorema 3 do artigo [11] de Brezis. O autor o obteve para g que depende apenas de u , ou seja, quando $k \equiv 1$. Embora ampliamos o teorema para uma classe de não linearidade g significativamente maior, nossa demonstração não contém elementos novos. A priori introduzimos a função truncamento.

Definição 2.43. *Dado $s > 0$, a função de truncamento no nível s é definida por*

$$T_s(t) = \begin{cases} k, & \text{se } u > k \\ t, & \text{se } |t| \leq k \\ -k, & \text{se } u < -k \end{cases}.$$

Lema 2.44. *Sejam $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $g(\cdot, u) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory satisfazendo*

- i) $g(x, u) = k(x)h(u)$;
- ii) h é não decrescente e $h(0) = 0$;
- iii) $k \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ e $k \geq m$ qtp em Ω para algum $m > 0$.

Se u é uma solução de

$$-\Delta u + g(\cdot, u) = f \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

com $f \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$, então $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$.

Demonstração. Basta provar que $g(\cdot, u) \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$. Como na demonstração da proposição 2.42 temos que

$$-\Delta|u| \leq |f| \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Portanto pela proposição 2.38, $u \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$. Definamos $h_n(r) = h(T_n(r))$, onde T_n é a função truncamento em n , $p_n(s) = \text{sign } s|h_n(s)|^{p-1}$ e

$$P_n(r) = \int_0^r p_n(s)ds = \text{sign } r \int_0^r |h_n(s)|^{p-1}ds.$$

Logo $|P(r)| \leq |r||h_n(r)|^{p-1}$. Aplicando a proposição 2.41 a P obtemos que

$$\Delta P_n(u) \geq (g(x, u) - f) \text{sign } u|h_n(u)|^{p-1} \geq k(x)|h_n(u)|^p - |f||h_n(u)|^{p-1} \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Seja $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$. Dado $\alpha > 2$, temos que

$$\begin{aligned} m \int_{\Omega} |h_n(u)|^p \xi^\alpha dx &\leq \int_{\Omega} k(x)|h_n(u)|^p \xi^\alpha dx \leq C \int_{\Omega} |P_n(u)| \xi^{\alpha-2} dx + \int_{\Omega} |f||h_n(u)|^{p-1} \xi^\alpha dx \\ &\leq C \int_{\Omega} |u||h_n(u)|^{p-1} \xi^{\alpha-2} dx + \int_{\Omega} |f||h_n(u)|^{p-1} \xi^\alpha dx, \end{aligned}$$

onde C depende apenas de ξ . Pela Desigualdade de Hölder,

$$\int_{\Omega} |h_n(u)|^p \xi^\alpha dx \leq C \left(\int_{\text{supt } \xi} |h_n(u)|^p \xi^\alpha dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_{\text{supt } \xi} |u|^p \xi^{\alpha-2p} dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\text{supt } \xi} |f|^p \xi^\alpha dx \right)^{1/p} \right].$$

Agora, a constante C passa a depender de p e de m também. Logo

$$\left[\int_{\Omega} |h_n(u)|^p \xi^\alpha dx \right]^{1/p} \leq C \left[\left(\int_{\text{supt } \xi} |u|^p \xi^{\alpha-2p} dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\text{supt } \xi} |f|^p \xi^\alpha dx \right)^{1/p} \right].$$

Assim, como k é localmente limitada existe $M > 0$ tal que $k \leq M$ em $\text{supt } \xi$. Se $\alpha \geq 2p$,

$$\left[\int_{\Omega} |k(x)h_n(u)|^p \xi^\alpha dx \right]^{1/p} \leq CM \left[\left(\int_{\text{supt } \xi} |u|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\text{supt } \xi} |f|^p dx \right)^{1/p} \right],$$

onde C independe de n . Pelo Lema de Fatou concluímos que $|g(x, u)|^p \xi^\alpha \in L^1(\Omega)$ e

$$\left[\int_{\Omega} |g(x, u)|^p \xi^\alpha dx \right]^{1/p} \leq C \left[\left(\int_{\text{supt } \xi} |u|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\text{supt } \xi} |f|^p dx \right)^{1/p} \right]. \quad (2.32)$$

Portanto, $g(x, u) \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$. ■

Corolário 2.45. *Sejam $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e u como na proposição acima. Então dado $\Omega' \Subset \omega \Subset \Omega$, existe $C = C(g, \Omega', \omega, \Omega)$ tal que*

$$\|g(x, u)\|_{L^p(\Omega')} \leq C (\|u\|_{L^p(\omega)} + \|f\|_{L^p(\omega)}). \quad (2.33)$$

Demonstração. É imediato pela desigualdade (2.32) do lema acima. ■

2.2 Prova do Teorema de Brezis e Merle

Demonstração do teorema 2.17. Dividamos a prova em dois casos:

1. Seja μ uma função $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Nesse caso, a função $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \log \frac{d}{|x-y|} |f(y)| dy,$$

onde $d = \text{diam } \Omega$, satisfaz: $-\Delta w = |f|$ em Ω e $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Como

$$\frac{4\pi - \delta}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} w(x) = \int_{\Omega} \frac{4\pi - \delta}{2\pi} \log \frac{d}{|x-y|} \frac{|f(y)|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} dy = \int_{\Omega} \log \left(\frac{d}{|x-y|} \right)^{2 - \frac{\delta}{2\pi}} \frac{|f(y)|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} dy$$

e $d\nu = |f|/\|f\|_{L^1(\Omega)} dy$ é uma medida de probabilidade, pela Desigualdade de Jensen,

$$e^{\frac{4\pi - \delta}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} w(x)} = e^{\int_{\Omega} \log \left(\frac{d}{|x-y|} \right)^{2 - \frac{\delta}{2\pi}} \frac{|f(y)|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} dy} \leq \int_{\Omega} \left(\frac{d}{|x-y|} \right)^{2 - \frac{\delta}{2\pi}} \frac{|f(y)|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} dy.$$

Logo

$$\int_{\Omega} e^{\frac{4\pi - \delta}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} w} dx \leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{d}{|x-y|} \right)^{2 - \frac{\delta}{2\pi}} \frac{|f(y)|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} dy dx = \int_{\Omega} \frac{|f(y)|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} \int_{\Omega} \left(\frac{d}{|x-y|} \right)^{2 - \frac{\delta}{2\pi}} dx dy.$$

Fixado $y \in \Omega$, calculando separadamente,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{d}{|x-y|} \right)^{2 - \frac{\delta}{2\pi}} dx &\leq \int_{B_d(y)} \left(\frac{d}{|x-y|} \right)^{2 - \frac{\delta}{2\pi}} dx = \int_0^d \int_{\partial B_s(y)} \left(\frac{d}{|x-y|} \right)^{2 - \frac{\delta}{2\pi}} d\sigma ds \\ &= 2\pi d^{2 - \frac{\delta}{2\pi}} \int_0^d s^{\frac{\delta}{2\pi} - 1} ds = \frac{4\pi^2}{\delta} (\text{diam } \Omega)^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\Omega} e^{\frac{4\pi - \delta}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} w} dx \leq \frac{4\pi^2}{\delta} (\text{diam } \Omega)^2 \int_{\Omega} \frac{|f(y)|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} dy = \frac{4\pi^2}{\delta} (\text{diam } \Omega)^2.$$

Por fim, se $x \in \Omega$ temos que $|x - y| \leq d$ para $y \in \Omega$, conseqüentemente, $w \geq 0$ em $\partial\Omega$. Pelo teorema 2.23, $|u| \leq w$ e, portanto,

$$\int_{\Omega} e^{\frac{4\pi-\delta}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}|u|} dx \leq \int_{\Omega} e^{\frac{4\pi-\delta}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}w} dx = \frac{4\pi^2}{\delta}(\text{diam } \Omega)^2.$$

2. Agora, seja $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Estendamos μ à \mathbb{R}^2 , como identicamente nula fora de Ω , e denotemo-a por $\bar{\mu}$. Seja $\xi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \xi_n \leq 1$ e $\xi \equiv 1$ em $\Omega_{1/n}$. Ainda, consideremos $\mu_n = \xi_n(\rho_n * \bar{\mu})$. Notemos que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mu_n| dx &= \int_{\Omega} |\xi_n(\rho_n * \bar{\mu})| dx \leq \int_{\Omega} |\rho_n * \bar{\mu}| dx \leq \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^2} |\rho_n(x-y)| d\bar{\mu}(y) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} d|\bar{\mu}| \int_{\mathbb{R}^2} |\rho_n(x-y)| dx = \int_{\mathbb{R}^2} d|\bar{\mu}| = \|\mu\|_{\mathcal{M}(\bar{\Omega})}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Se u_n é a solução de (2.10) com μ_n no lugar de μ , aplicando o resultado do item anterior a u_n obtemos que se $\delta \in (0, 4\pi)$ então

$$\int_{\Omega} e^{\frac{4\pi-\delta}{\|\mu_n\|_{L^1(\Omega)}}|u_n|} dx \leq \frac{4\pi^2}{\delta}(\text{diam } \Omega)^2.$$

Por outro lado, pelo teorema 2.1, $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $u_n \rightarrow u$ qtp em Ω . Portanto, usando o Lema de Fatou e (2.34) concluímos que $e^{\frac{4\pi-\delta}{\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}}|u|}$ é integrável e

$$\int_{\Omega} e^{\frac{4\pi-\delta}{\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}}|u|} dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} e^{\frac{4\pi-\delta}{\|\mu_n\|_{L^1(\Omega)}}|u_n|} dx \leq \frac{4\pi^2}{\delta}(\text{diam } \Omega)^2. \quad \blacksquare$$

Também visamos ter estimativas interiores L^p com $p > 1$ para exponencial de soluções do problema de Poisson sem condições de fronteiras. A formulação do próximo corolário é tomado de [29].

Corolário 2.46. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $u \in L^1(\Omega)$ solução de*

$$-\Delta u = \mu \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Sejam também $r > 0$ e $\epsilon > 0$ satisfazendo

$$|\mu|(B_r(x) \cap \Omega) \leq 4\pi - \epsilon \quad \forall x \in \Omega.$$

Então, dados $p \in [1, \frac{4\pi}{4\pi-\epsilon})$ e $\Omega' \Subset \Omega$ existe $C = C(\|u\|_{L^1(\Omega)}, \epsilon, p, r, \Omega', \Omega)$ tal que

$$e^u \in L^p(\Omega') \quad \text{e} \quad \|e^u\|_{L^p(\Omega')} \leq C.$$

Demonstração. Sejam $B_{r_i}(x_i)$, $1 \leq i \leq k$, tais que $B_{r_i}(x_i) \Subset \Omega$, $\Omega' \subset \cup_{i=1}^k B_{r_i/2}(x_i)$ e $r_i \leq r$. Para cada $1 \leq i \leq k$, consideremos as soluções v e w de

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu & \text{em } B_{r_i}(x_i) \\ v = 0 & \text{sobre } \partial B_{r_i}(x_i) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{em } B_{r_i}(x_i) \\ w = u & \text{sobre } \partial B_{r_i}(x_i) \end{cases},$$

respectivamente. Notemos que devido à proposição 2.2, $u \in W^{1,1}(B_{r_i}(x_i))$, logo $u \in L^1(\partial B_{r_i}(x_i))$. Além disso, w pode ser obtida diretamente da Fórmula de Poisson. Por unicidade de solução, $u = v + w$ qtp em $B_{r_i}(x_i)$. Enquanto que o teorema 8.17 de [26], dado $q > 1$, nos fornece $C = C(q, r_i)$ tal que

$$\|w\|_{L^\infty(B_{r_i/2}(x_i))} \leq C \|w\|_{L^q(B_{3r_i/4}(x_i))}.$$

Fixando $1 < q < 2$, com os auxílios da proposição 2.2 e do teorema 2.1 obtemos que

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^\infty(B_{r_i/2}(x_i))} &\leq C \|w\|_{L^q(B_{3r_i/4}(x_i))} \leq C (\|u\|_{L^q(B_{3r_i/4}(x_i))} + \|v\|_{L^q(B_{3r_i/4}(x_i))}) \\ &\leq C (\|u\|_{L^1(B_{r_i}(x_i))} + \|\mu\|_{\mathcal{M}(B_{r_i}(x_i))}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

para $C = C(r_i)$. Dado $1 \leq p < 4\pi/(4\pi - \epsilon)$, usando o teorema 2.17 com $\delta = 4\pi - (4\pi - \epsilon)p$ e (2.35),

$$\int_{B_{r_i/2}(x_i)} e^{p|u|} dx \leq C \int_{B_{r_i}(x_i)} e^{p|v|} dx \leq C \int_{B_{r_i}(x_i)} e^{\frac{4\pi-\delta}{\|\mu\|_{\mathcal{M}(B_{r_i}(x_i))}} |v|} dx \leq C,$$

onde $C = C(\|u\|_{L^1(\Omega)}, \epsilon, p, r_i)$. Portanto,

$$\int_{\Omega'} e^{p|u|} dx \leq \sum_{i=1}^k \int_{B_{r_i/2}(x_i)} e^{p|u|} dx \leq C,$$

onde, finalmente, C é uma constante que depende de $\|u\|_{L^1(\Omega)}$, ϵ , p , r , Ω' e Ω . ■

2.3 Prova do Teorema de Vázquez

Inicialmente, introduzimos alguns lemas de [4] que são crucias para mostrar a recíproca do teorema 2.20. Eles são usados para estabelecer que

$$v(x) \sim \frac{a}{2\pi} \log \frac{1}{|x - x_0|}$$

numa vizinhança de x_0 , onde v é solução de

$$\begin{cases} -\Delta v + e^v - 1 = a\delta_{x_0} & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

com $x_0 \in \Omega$. Fato subjacente, conforme vimos na introdução do capítulo, da não existência de solução quando $\mu(\{x_0\}) > 4\pi$ para algum $x_0 \in \Omega$. Durante toda a seção, Ω é um domínio suave no plano. O primeiro resultado é apenas uma reformulação de uma das desigualdades de Green.

Lema 2.47. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $w \in L^1(\Omega)$ tais que $-\Delta w = \mu$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dado $x \in \Omega$, temos que*

$$\bar{w}(x, r) - \bar{w}(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_r^s \frac{\mu(B_\rho(x))}{\rho} d\rho \quad (2.36)$$

para todo $0 < r < s < \rho_0(x)$.

Demonstração. Provemos (2.36) para o caso em que $w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Dado $\rho < \rho_0(x)$, pelos Teorema de Green e de Mudança de Variáveis temos que

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x)} \Delta w dy &= \int_{B_1} \Delta w(x + \rho y) \rho^2 dy = \rho \int_{\partial B_1} \nabla w(x + \rho y) \cdot y d\sigma \\ &= \rho \frac{d}{d\rho} \int_{\partial B_1} w(x + \rho y) d\sigma = \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho(x)} w d\sigma \right), \end{aligned}$$

Logo

$$\bar{w}'(x, \rho) = -\frac{1}{2\pi\rho} \int_{B_\rho(x)} \mu(y) dy. \quad (2.37)$$

Integrando a igualdade de r a s obtemos (2.36). Por fim, consideremos $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Seja $w_n = \rho_n * w$. Sabemos que $w_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_{1/n})$. Dado $s < s_0 < \rho_0(x)$, pela proposição 2.53, dada na próxima seção, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $-\Delta w_n = \rho_n * \mu$ em $\mathcal{D}'(B_{s_0}(x))$ se $n \geq n_0$. Portanto, se $n \geq n_0$, pela parte anterior temos que

$$\bar{w}_n(x, r) - \bar{w}_n(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_r^s \left(\frac{1}{\rho} \int_{B_\rho(x)} \mu_n(y) dy \right) d\rho, \quad (2.38)$$

onde $\mu_n = \rho_n * \mu$. Agora por um lado, como $\nabla w_n = \rho_n * \nabla w$ em $\Omega_{1/n}$, $w_n \rightarrow w$ em $W^{1,1}(B_s(x))$. Pela continuidade do traço,

$$\bar{w}_n(x, \rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial B_\rho(x)} w_n d\sigma \rightarrow \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial B_\rho(x)} w d\sigma = \bar{w}(x, \rho)$$

para todo $\rho \in (0, s]$. Por outro lado, como μ é uma medida de Radon, $\mu(\partial B_\rho(x)) = 0$ para quase todo $\rho \in [r, s]$, do teorema 1 de [24, Seção 1.9] segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_\rho(x)} (\rho_n * \mu) dy = \mu(B_\rho(x))$$

para quase todo $\rho \in [r, s]$. Além disso, $\|\rho_n * \mu\|_{L^1(B_\rho(x))} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, fazendo n tender ao infinito em (2.38) e usando o Teorema da Convergência Dominada concluímos (2.36). ■

Corolário 2.48. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $w \in L^1(\Omega)$ tais que $-\Delta w = \mu$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dado $x \in \Omega$, temos que*

$$\frac{1}{2\pi} \liminf_{r \rightarrow 0^+} \mu(B_r(x)) \leq \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x, r)}{\log(1/r)} \leq \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x, r)}{\log(1/r)} \leq \frac{1}{2\pi} \limsup_{r \rightarrow 0^+} \mu(B_r(x)).$$

Demonstração. Por (2.36), dado $0 < s < \rho_0(x)$, obtemos

$$\frac{1}{2\pi} \inf_{0 < \rho < s} \mu(B_\rho(x)) \log\left(\frac{s}{r}\right) \leq \bar{w}(x, r) - \bar{w}(x, s) \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < \rho < s} \mu(B_\rho(x)) \log\left(\frac{s}{r}\right). \quad (2.39)$$

Dividindo (2.39) por $\log(1/r)$ e fazendo $r \rightarrow 0^+$,

$$\frac{1}{2\pi} \inf_{0 < \rho < s} \mu(B_\rho(x)) \leq \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x, r)}{\log(1/r)} \leq \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x, r)}{\log(1/r)} \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < \rho < s} \mu(B_\rho(x)).$$

Por fim, fazendo $s \rightarrow 0^+$, segue a conclusão desejada. ■

Se $\Delta w \in L^1(\Omega)$ temos que Δw é absolutamente contínua em relação à Medida de Lebesgue. Logo obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.49. *Seja $w \in L^1(\Omega)$ tal que $\Delta w \in L^1(\Omega)$. Dado $x \in \Omega$, temos que*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x, r)}{\log(1/r)} = 0.$$

Observemos que a solução u do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = a\delta_0 & \text{em } B_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases},$$

por unicidade de soluções, é radial. Pelo corolário 2.48 temos que dado $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que se $|x| < r$ então

$$\frac{a - \epsilon}{2\pi} \log \frac{1}{|x|} \leq u(x) \leq \frac{a + \epsilon}{2\pi} \log \frac{1}{|x|},$$

ou seja, próxima da origem, u comporta-se como $\frac{a}{2\pi} \log \frac{1}{|x|}$. Provido dos lemas e corolário acima demonstramos o ponto central desta seção.

Demonstração do teorema 2.20. Para melhor organizar as ideias separemos a demonstração em quatro passos:

- i) Visto que μ é uma boa-medida se, e somente se, μ^+ é uma boa-medida e $\mu(\{x\}) \leq 4\pi$ para todo $x \in \Omega$ se, e somente se, $\mu^+(\{x\}) \leq 4\pi$ para todo $x \in \Omega$, basta provar o resultado somente para medidas não negativas.
- ii) Suponhamos que exista $\epsilon > 0$ tal que $\mu(\{x\}) \leq 4\pi - \epsilon$ para todo $x \in \Omega$. Seja para cada $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ satisfazendo $0 \leq \xi_n \leq 1$ e $\xi_n = 1$ em $\bar{\Omega}_{1/n}$. Seja, ainda, u_n a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde $\mu_n = \xi_n \mu$. Pelo corolário do Teorema de Brezis e Merle temos que $e^{u_n} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Por outro lado, próxima da fronteira u_n é harmônica, logo, existe $\delta > 0$ tal que u_n é limitada em $\Omega \setminus \Omega_\delta$. Portanto, $e^{u_n} \in L^1(\Omega)$ e, conseqüentemente, $\mu_n + e^{u_n} - 1$ é uma boa-medida. Como $\mu_n \leq \mu_n + e^{u_n} - 1$, pelo teorema 2.13 segue que $\mu_n \in \mathcal{G}$. Por fim, pela convergência $\mu_n \rightarrow \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e pelo teorema 2.14 concluímos que $\mu \in \mathcal{G}$.

- iii) Agora, geralmente, suponhamos que $\mu(\{x\}) \leq 4\pi$ para todo $x \in \Omega$. Sejam $x_1, \dots, x_k \in \Omega$ tais que $\mu(\{x_i\}) \geq 2\pi$. Notemos que temos uma quantidade finita de x_i , pois μ é uma medida de Radon. Dado $\alpha < 1$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\alpha\mu(\{x\}) \leq 4\pi - \epsilon$ para todo $x \in \Omega$. De fato, $\alpha\mu(\{x_i\}) \leq 4\pi - 4\pi(1 - \alpha)$ para todo $1 \leq i \leq k$ e $\alpha\mu(\{x\}) \leq 2\pi$ para todo $x \in \Omega \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$. Pela parte anterior temos que $\alpha\mu \in \mathcal{G}$. Por fim, como pelo teorema 2.14, \mathcal{G} é fechado; e $\alpha\mu \rightarrow \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ se $\alpha \rightarrow 1^-$, obtemos que $\mu \in \mathcal{G}$.

iv) Reciprocamente, seja μ tal que $\mu(\{x_0\}) > 4\pi$ para algum $x_0 \in \Omega$ e (2.11) tenha solução. Seja $4\pi < a < \mu(\{x_0\})$. Como $a\delta_{x_0} \leq \mu$ temos pelo teorema 2.13 que $a\delta_{x_0}$ é uma boa-medida. Sejam v a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v + e^v - 1 = a\delta_{x_0} & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.40)$$

e w solução de

$$\begin{cases} -\Delta w = a\delta_{x_0} & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Pelo corolário 2.49 temos que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{v}(x_0, r) - \bar{w}(x_0, r)}{\log(1/r)} = 0.$$

Por outro lado, pelo corolário 2.48,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(x_0, r)}{\log(1/r)} = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0^+} a\delta_{x_0}(B_r(x_0)) = \frac{a}{2\pi} > 2.$$

Logo

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{v}(x_0, r)}{\log(1/r)} = \frac{a}{2\pi} > 2.$$

Portanto, dado $2 < b < \frac{a}{2\pi}$ existe $r_0 > 0$ tal que

$$\frac{\bar{v}(x_0, r)}{\log(1/r)} \geq b$$

para todo $r < r_0$. Tomando $\delta < r_0$ e usando a desigualdade de Jensen obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta(x_0)} e^v dx &= \int_0^\delta \int_{\partial B_\rho(x_0)} e^v d\sigma d\rho = 2\pi \int_0^\delta \rho \int_{\partial B_\rho(x_0)} e^v d\sigma d\rho \\ &\geq 2\pi \int_0^\delta \rho e^{\int_{\partial B_\rho(x_0)} v dx} d\rho \geq 2\pi \int_0^\delta \rho^{1-b} d\rho = \left. \frac{2\pi \rho^{2-b}}{(2-b)} \right|_0^\delta = \infty, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois sendo v solução de (2.40), $e^v \in L^1(\Omega)$. ■

De modo geral, os cálculos acima nos permitem inferir que dado $\lambda > 0$,

$$\begin{cases} -\Delta u + e^{\lambda u} - 1 = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem uma solução se, e somente se, $\mu(\{x\}) \leq 4\pi/\lambda$ para todo $x \in \Omega$.

2.4 Compacidade em $W^{1,p}(\Omega)$

Antes da asserção sobre compacidade, apresentamos uma proposição de Brezis e Ponce dado em [19], proposição 1.2, que permite considerar o laplaciano de funções estendidas identicamente nula a todo espaço e também comparar a sua norma com a do laplaciano da função original. No decorrer desta seção a dimensão do espaço é maior do que ou igual a dois.

Definição 2.50. *A extensão identicamente nula fora de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, denotada por \bar{f} , é dada por*

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}. \quad (2.41)$$

Proposição 2.51. *Seja $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Se u é a solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

então $\Delta \bar{u} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|\Delta \bar{u}\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} \leq 2\|\Delta u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

O lema a seguir é amplamente conhecido dentro da literatura matemática e a demonstração dada é obtida sem alterações de [16]. Através dele, “aproximamos” funções cujo o laplaciano é uma medida de Radon por funções que possuem derivadas fracas L^2 -integráveis no interior de Ω .

Lema 2.52. *Seja $u \in L^1(\Omega)$ tal que $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$. Então, para todo $k > 0$*

$$T_k(u) \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$$

e, dado $\Omega' \Subset \Omega$, existe $C > 0$, independente de k e u , satisfazendo

$$\int_{\Omega'} |\nabla T_k(u)|^2 dx \leq k \left(\int_{\Omega} |\Delta u| + C \int_{\Omega} |u| dx \right). \quad (2.42)$$

Demonstração. Dado $\omega \Subset \Omega$, se $0 < \epsilon < \text{dist}(\omega, \partial\Omega)$ e $u_\epsilon = \rho_{1/\epsilon} * u$ temos que $T_k(u_\epsilon) \in H^1(\omega)$ e

$$\nabla T_k(u_\epsilon) = \nabla u_\epsilon \chi_{[|u_\epsilon| \leq k]} = (\rho_{1/\epsilon} * \nabla u) \chi_{[|u_\epsilon| \leq \epsilon]}$$

em $\mathcal{D}'(\omega)$. Portanto, se $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ é tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ em Ω e $\varphi \equiv 1$ em Ω' , tomando $0 < \epsilon < \text{dist}(\text{supt } \varphi, \partial\Omega)$ e integrando por partes temos que

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \varphi |\nabla T_k(u_\epsilon)|^2 dx &= \int_{\Omega} \varphi \nabla T_k(u_\epsilon) \cdot \nabla u_\epsilon dx \\ &= - \int_{\Omega} \varphi T_k(u_\epsilon) \Delta u_\epsilon dx - \int_{\Omega} T_k(u_\epsilon) \nabla u_\epsilon \cdot \nabla \varphi dx. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T_k(u_\epsilon) \nabla u_\epsilon \cdot \nabla \varphi dx &= - \int_{\Omega} u_\epsilon \nabla T_k(u_\epsilon) \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} u_\epsilon T_k(u_\epsilon) \Delta \varphi dx \\ &= - \int_{\Omega} T_k(u_\epsilon) \nabla T_k(u_\epsilon) \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} u_\epsilon T_k(u_\epsilon) \Delta \varphi dx \\ &= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla [|T_k(u_\epsilon)|^2] \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} u_\epsilon T_k(u_\epsilon) \Delta \varphi dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T_k(u_\epsilon)|^2 \Delta \varphi dx - \int_{\Omega} u_\epsilon T_k(u_\epsilon) \Delta \varphi dx \\ &= - \int_{\Omega} T_k(u_\epsilon) \left(u_\epsilon - \frac{1}{2} T_k(u_\epsilon) \right) \Delta \varphi dx \geq -k \int_{\Omega} |u_\epsilon| |\Delta \varphi| dx, \end{aligned}$$

por (2.43) obtemos que

$$\int_{\Omega'} |\nabla T_k(u_\epsilon)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla T_k(u_\epsilon)|^2 \varphi dx \leq k \left(\int_{\text{supt } \varphi} |\Delta u_\epsilon| dx + \|\Delta \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\text{supt } \varphi} |u_\epsilon| dx \right).$$

Sendo $\Delta u_\epsilon = \rho_{1/\epsilon} * \Delta u$ em $\text{supt } \varphi$, pela Desigualdade de Young,

$$\int_{\Omega'} |\nabla T_k(u_\epsilon)|^2 dx \leq k \left(\int_{\text{supt } \varphi} |\Delta u| dx + \|\Delta \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\text{supt } \varphi} |u| dx \right).$$

Portanto, fazendo ϵ tender a zero na equação acima, pelo Lema de Fatou obtemos a desigualdade (2.42). ■

Proposição 2.53. *Sejam $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$, e (ρ_n) uma sequência regularizante radial. Dado $\omega \Subset \Omega$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\rho_n * \Delta u \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega)$ e*

$$\Delta(\rho_n * u) = \rho_n * \Delta u \quad \text{em } \mathcal{D}'(\omega).$$

Demonstração. Sejam $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega)$ e $n_0 > 1/d(\omega, \partial\Omega)$. Se $n \geq n_0$ temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(\rho_n * \Delta u) dx &= \int_{\Omega} \varphi(x) \int_{\Omega} \rho_n(x-y) \Delta u(y) dx = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \varphi(x) \rho_n(y-x) dx \Delta u(y) \\ &= \int_{\Omega} u(y) \Delta_y \int_{B_{1/n}(y)} \varphi(x) \rho_n(y-x) dx dy = \int_{\Omega} u(y) \Delta_y \int_{B_{1/n}} \varphi(y-x) \rho_n(x) dx dy \\ &= \int_{\Omega} u(y) \int_{B_{1/n}} \Delta \varphi(y-x) \rho_n(x) dx dy = \int_{\Omega} u(y) \int_{B_{1/n}(y)} \Delta \varphi(x) \rho_n(y-x) dx dy \\ &= \int_{\Omega} \Delta \varphi(x) \int_{\Omega} u(y) \rho_n(x-y) dy dx = \int_{\Omega} (\rho_n * u) \Delta \varphi dx, \end{aligned}$$

ou seja, $\Delta(\rho_n * u) = \rho_n * \Delta u$ em $\mathcal{D}'(\omega)$. ■

Por fim, exibimos o resultado de compacidade em $W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração do Teorema 2.22. Sem perda de generalidade podemos supor que $1 < p < N/(N-1)$. Como u_n resolve

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (2.44)$$

onde $\mu_n = -\Delta u_n$, pelo teorema 2.1 temos que a sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada nesse espaço. Mas $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, logo existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dada a extensão \bar{u}_n de u_n , temos que $\bar{u}_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, pois $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Pela proposição 2.51,

$$\|\Delta \bar{u}_{n_k}\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)} \leq 2 \|\mu_{n_k}\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq C.$$

Sejam $w_{k,j} = \rho_k * \bar{u}_{n_j}$ e $R > 0$ tal que $\Omega \Subset B_R$. Pela proposição 2.53 existe $k_0 \in \mathbb{N}$, independente de j , tal que

$$\begin{cases} -\Delta w_{k,j} = \rho_k * \Delta \bar{u}_{n_j} & \text{em } B_R \\ w_{k,j} = 0 & \text{sobre } \partial B_R \end{cases}, \quad (2.45)$$

se $k \geq k_0$. Fixemos $\epsilon > 0$. Como $\Delta(w_{k,j} - w_{k,i}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, pelo lema 2.52 temos que $T_\epsilon(w_{k,j} - w_{k,i}) \in H_0^1(B_R)$. Assim, podemos usar a equação (2.45) com $w_{k,i}$, $w_{k,j}$ e a função teste $T_\epsilon(w_{k,i} - w_{k,j})$ obtendo

$$\int_{B_R} T'_\epsilon(w_{k,i} - w_{k,j}) |\nabla w_{k,i} - \nabla w_{k,j}|^2 dx = \int_{B_R} T_\epsilon(w_{k,i} - w_{k,j}) d(\rho_k * (\Delta \bar{u}_{n_i} - \Delta \bar{u}_{n_j})). \quad (2.46)$$

Em um primeiro passo, demonstramos que dado $\epsilon > 0$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $i, j, k > k_1$ então $\|\nabla w_{k,i} - \nabla w_{k,j}\|_{L^1(B_R)} \leq \epsilon$. Para tal, escrevamos

$$\int_{B_R} |\nabla w_{k,i} - \nabla w_{k,j}| dx = \int_{D_{i,j,k,\epsilon}} |\nabla w_{k,i} - \nabla w_{k,j}| dx + \int_{B_R \setminus D_{i,j,k,\epsilon}} |\nabla w_{k,i} - \nabla w_{k,j}| dx,$$

onde $D_{i,j,k,\epsilon} = \{x \in B_R; |w_{k,i} - w_{k,j}| \leq \epsilon\}$. Por um lado, usando a Desigualdade de Hölder, (2.46) e a limitação de (Δu_n) ,

$$\int_{D_{i,j,k,\epsilon}} |\nabla w_{k,i} - \nabla w_{k,j}| dx \leq |B_R|^{1/2} \left(\int_{D_{i,j,k,\epsilon}} |\nabla w_{k,i} - \nabla w_{k,j}|^2 \right)^{1/2} = C\epsilon^{1/2}. \quad (2.47)$$

Por outro lado,

$$\int_{B_R \setminus D_{i,j,k,\epsilon}} |\nabla w_{k,i} - \nabla w_{k,j}| dx \leq \|\nabla w_{k,i} - \nabla w_{k,j}\|_{L^p(B_R)} |x \in B_R; |w_{k,i} - w_{k,j}| \geq \epsilon|^{p-1}. \quad (2.48)$$

Vejamos que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $j, k \geq k_1$ então $\|w_{k,j} - \bar{u}_{n_j}\|_{L^1(B_R)} \leq \epsilon^2$. De fato, como

$$\|w_{k,j} - \bar{u}_j\|_{L^1(B_R)} = \|\rho_k * \bar{u}_{n_j} - \bar{u}_{n_j}\|_{L^1(B_R)} \leq \sup_{|y| \leq 1/k} \|\tau_y \bar{u}_{n_j} - \bar{u}_{n_j}\|_{L^1(B_R)},$$

onde $\tau_y \bar{u}_{n_j}(x) = \bar{u}_{n_j}(x - y)$, pela continuidade da translação, veja, por exemplo, lema 15.8 de [38], existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $|y| < 1/k_2$ então $\|\tau_y \bar{u} - \bar{u}\|_{L^1(B_R)} \leq \epsilon^2/3$. Além disso, pela convergência $\bar{u}_{n_j} \rightarrow \bar{u}$ em $L^1(B_R)$ existe $k_3 \in \mathbb{N}$ tal que se $j \geq k_3$ então $\|\bar{u}_{n_j} - \bar{u}\|_{L^1(B_R)} \leq \epsilon^2/3$. Tomando $k_1 = \max\{k_0, k_2, k_3\}$ temos que

$$\begin{aligned} \|w_{k,j} - \bar{u}_{n_j}\|_{L^1(B_R)} &\leq \sup_{|y| \leq 1/k} \left(\|\tau_y \bar{u}_{n_j} - \tau_y \bar{u}\|_{L^1(B_R)} + \|\tau_y \bar{u} - \bar{u}\|_{L^1(B_R)} + \|\bar{u}_{n_j} - \bar{u}\|_{L^1(B_R)} \right) \\ &\leq 2\|\bar{u}_{n_j} - \bar{u}\|_{L^1(B_R)} + \sup_{|y| \leq 1/k} \|\tau_y \bar{u} - \bar{u}\|_{L^1(B_R)} \leq \epsilon^2, \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, $\|w_{k,j} - w_{k,i}\|_{L^1(B_R)} \leq 5\epsilon^2/3$, desde que $i, j, k \geq k_1$. Logo usando a Desigualdade de Chebyshev obtemos que

$$|x \in B_R; |w_{k,i} - w_{k,j}| \geq \epsilon| \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{B_R} |w_{k,j} - w_{k,i}| dx \leq \frac{5\epsilon}{3}.$$

Assim, pelas desigualdades (2.47) e (2.48),

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |\nabla w_{k,i} - \nabla w_{k,j}| dx &= \int_{D_{i,j,k,\epsilon}} |\nabla w_{k,i} - \nabla w_{k,j}| dx + \int_{B_R \setminus D_{i,j,k,\epsilon}} |\nabla w_{k,i} - \nabla w_{k,j}| dx \\ &\leq C\epsilon^{1/2} + 2K3^{(1-p)/p} (5\epsilon)^{(p-1)/p}, \end{aligned}$$

se $i, j, k \geq k_1$, onde $K = \sup \{ \|\nabla w_{k,l}\|_{L^p(B_R)}, k, l \in \mathbb{N} \}$. Observando que $i, j \geq k_1$, $\nabla w_{k,i} = \rho_k * \nabla \bar{u}_{n_i}$ vemos que existe \bar{k} tal que se $\bar{k} \geq k_1$, então

$$\|\nabla w_{\bar{k},i} - \nabla \bar{u}_{n_i}\|_{L^1(B_R)} \leq \epsilon \quad \text{e} \quad \|\nabla w_{\bar{k},j} - \nabla \bar{u}_{n_j}\|_{L^1(B_R)} \leq \epsilon.$$

Portanto, também segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |\nabla \bar{u}_{n_i} - \nabla \bar{u}_{n_j}| dx &\leq \int_{B_R} |\nabla \bar{u}_{n_i} - \nabla w_{\bar{k},i}| dx + \int_{B_R} |\nabla w_{\bar{k},i} - \nabla w_{\bar{k},j}| dx + \int_{B_R} |\nabla \bar{u}_{n_j} - \nabla w_{\bar{k},j}| dx \\ &= 2\epsilon + C\epsilon^{1/2} + 2K3^{(1-p)/p} (5\epsilon)^{(p-1)/p}, \end{aligned}$$

para $i, j \geq k_1$, ou seja, $(\nabla \bar{u}_{n_j})$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(B_R)$. Além disso, $\nabla u_{n_j} \xrightarrow{*} \nabla u$ em $L^1(\Omega)$, conseqüentemente, $\nabla u_{n_k} \rightarrow \nabla u$ em $L^1(\Omega)$. Para concluir que $\nabla u_{n_k} \rightarrow \nabla u$ em $L^p(\Omega)$, usamos interpolação. Dado $p \leq q < N/(N-1)$, como acima, (u_{n_k}) é limitada em $W^{1,q}(\Omega)$. Portanto, por interpolação

$$\|\nabla u_{n_k} - \nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u_{n_k} - \nabla u\|_{L^1(\Omega)}^\lambda \|\nabla u_{n_k} - \nabla u\|_{L^q(\Omega)}^{(1-\lambda)},$$

onde $\frac{1}{q} = \lambda + \frac{1-\lambda}{q}$, logo $\nabla u_{n_k} \rightarrow \nabla u$ em $L^p(\Omega)$. Por fim, notemos que se começamos com subsequência qualquer de (u_n) obtemos uma subsequência dessa que converge em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para u . Assim, $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Pelo método da diagonal de Cantor conseguimos uma sequência que converge em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo $1 \leq p < N/(N-1)$.

Corolário 2.54. *Seja $(u_n) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ tal que $\Delta u_n \in \mathcal{M}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e (Δu_n) é limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$. Então existem uma subsequência (u_{n_k}) e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que $u_{n_k} \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo $1 \leq p < N/(N-1)$.*

2.5 Decomposição de Medidas

Teorema 2.55. *Sejam μ uma medida de Radon finita num espaço mensurável X e Z uma coleção de subconjuntos mensuráveis de X satisfazendo*

1. Z é fechado por interseções e uniões contáveis;
2. Se $A' \subset A$ com $A \in Z$ e A' mensurável então $A' \in Z$.

Então existe uma única decomposição em medidas de Radon

$$\mu = \mu_1 + \mu_2,$$

tal que $\mu_1(A) = 0$ para todo $A \in Z$ e μ_2 se anula fora de um conjunto de Z .

Demonstração. Suponhamos que μ seja positiva. Note que

$$s = \sup \{\mu(A); A \in Z\} \leq \mu(X) < \infty.$$

Sejam A_n uma coleção de elementos de Z tal que $\mu(A_n) \rightarrow s$ e $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Definamos $\mu_1 = \mu|_{X \setminus A}$ e $\mu_2 = \mu|_A$. Como μ_1 e μ_2 são restrições de medidas de Radon em conjuntos mensuráveis de medida finita, segue que também as são. Se $\mu_1(B) = \mu(B \cap (X \setminus A)) > 0$ para algum elemento de Z então

$$\mu(B \cup A) = \mu(B \cap (X \setminus A)) + \mu(A) > \mu(A) = s,$$

o que é uma contradição. E, evidentemente, μ_2 se anula fora de um conjunto de Z . No caso em que μ é uma medida de Radon com sinal, via decomposição de Jordan escrevamos μ como a diferença $\nu - \omega$ de duas medidas positivas. Em seguida, usamos a parte anterior para fazer a decomposição de cada uma delas $\mu_1 = \nu_1 - \omega_1$ e $\mu_2 = \nu_2 - \omega_2$. Logo $\mu = \mu_1 + \mu_2$, μ_1 se anula em conjuntos de Z , pois tanto ν_1 quanto ω_1 se anula. Além disso, existem A_1 e A_2 em Z tais que ν_2 e ω_2 se anulam fora destes, respectivamente. Assim, μ_2 se anula fora de $A = A_1 \cup A_2 \in Z$. Por fim, suponhamos que

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = \nu_1 + \nu_2,$$

onde μ_1, μ_2, ν_1 e ν_2 satisfazem as condições do teorema sendo A e B os conjuntos de Z tais que μ_2 e ν_2 se anulam fora, respectivamente. É claro que $\mu_1(E) = \nu_1(E)$ para todo $E \in Z$. Se E é um conjunto mensurável qualquer de X , temos que

$$\begin{aligned} \mu_1(E) &= \mu_1(E \cap (X \setminus A)) + \mu_1(E \cap A) = \mu_1(E \cap (X \setminus A)) \\ &= \mu_1(E \cap (X \setminus A) \cap (X \setminus B)) + \mu_1(E \cap (X \setminus A) \cap B) \\ &= \mu_1(E \cap (X \setminus A) \cap (X \setminus B)) = \mu(E \cap (X \setminus A) \cap (X \setminus B)), \end{aligned}$$

pois pelo item (2) do enunciado do teorema temos que $E \cap A$ e $E \cap (X \setminus A) \cap B \in Z$. De modo análogo, $\nu_1(E) = \mu(E \cap (X \setminus A) \cap (X \setminus B))$. Portanto, $\mu_1 = \nu_1$ e, conseqüentemente, $\mu_2 = \nu_2$. ■

Uma Equação Semilinear Singular com Medida

Visamos, agora, formular uma variante do Teorema de Vázquez para a equação semilinear elíptica singular

$$\begin{cases} -\Delta u + |x|^{-\alpha}(e^u - 1) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $\alpha > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira suave que contém a origem.

Notamos que se $\alpha = 0$ recaímos na equação abordada no capítulo precedente. Já se $\alpha < 0$, $|\cdot|^{-\alpha}$ é limitada em Ω , logo com mínimas alterações recuperamos a mesma conclusão do teorema 2.20.

Dado $0 < \alpha < 2$, suponhamos que (3.1) tenha uma solução u com $\Omega = B_1$ e $\mu = c\delta_0$, onde $c > 0$ e δ_0 é a medida de Dirac no ponto 0. Formalmente, esperamos que numa vizinhança da origem a solução de (3.1) comporte-se como a solução fundamental multiplicada pela constante c . Portanto, se para algum $\epsilon > 0$,

$$\int_{B_\epsilon(0)} |x|^{-\alpha} e^{\frac{c}{2\pi} \log \frac{1}{|x|}} dx = \int_{B_\epsilon(0)} |x|^{-\alpha - \frac{c}{2\pi}} dx < \infty,$$

temos que $c < 2\pi(2 - \alpha)$. Por este procedimento inferimos um teorema de existência de solução para (3.1).

Teorema 3.1. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $0 < \alpha < 2$. Então o problema (3.1) possui uma única solução se, e somente se, $\mu(\{0\}) \leq 2\pi(2 - \alpha)$ e $\mu(\{x\}) \leq 4\pi$ para todo $x \in \Omega$ tal que $x \neq 0$.*

Nesta direção, reescrevemos o corolário do Teorema de Brezis e Merle.

Corolário 3.2. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $u \in L^1(\Omega)$ solução de*

$$-\Delta u = \mu \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Sejam também $r > 0$, $0 < \alpha < 2$ e $0 < \epsilon < 2\pi(2 - \alpha)$ satisfazendo

$$|\mu|(B_r(x) \cap \Omega) \leq 2\pi(2 - \alpha) - \epsilon \quad \forall x \in \Omega.$$

Então, dados $p \in [1, \frac{4\pi}{2\pi(2-\alpha)-\epsilon})$ e $\Omega' \Subset \Omega$ existe $C = C(\|u\|_{L^1(\Omega)}, \alpha, \epsilon, p, r, \Omega', \Omega)$ tal que

$$e^u \in L^p(\Omega') \quad \text{e} \quad \|e^u\|_{L^p(\Omega')} \leq C.$$

No caso em que $\alpha \geq 2$, a situação é bem mais delicada, pois $|x|^{-\alpha} \notin L^1(\Omega)$. Contudo, ainda asseguramos uma das asserções do teorema 3.1.

Teorema 3.3. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $\alpha \geq 2$. Se (3.1) tem solução então $\mu(\{0\}) = 0$ e $\mu(\{x\}) \leq 4\pi$ para todo $x \in \Omega$ tal que $x \neq 0$.*

Embora apresentamos novos resultados relacionados ao problema (3.1), as técnicas são as mesmas empregadas na seção anterior e apenas as adaptamos à atual situação.

3.1 Caso $0 < \alpha < 2$

Demonstração do teorema 3.1. As linhas gerais da prova seguem as do Teorema de Vázquez, detalhamos as nuances apenas nos itens *ii*) e *iv*).

- ii) Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $0 < \epsilon < \epsilon_0$, onde ϵ_0 é determinado a seguir, tais que $\mu(\{0\}) \leq 2\pi(2 - \alpha) - \epsilon$ e $\mu(\{x\}) \leq 4\pi - \epsilon$ para todo $x \neq 0$. Cubramos $\bar{\Omega}$ por uma família finita de bolas $(B_{r_i}(x_i))_{i=1}^k$ que satisfaça $x_1 = 0$ e $\mu(B_{r_1}(x_1) \cap \Omega) \leq 2\pi(2 - \alpha) - \epsilon/2$; $0 \notin \overline{B_{r_i}(x_i)}$ e $\mu(B_{r_i}(x_i) \cap \Omega) \leq 4\pi - \epsilon/2$ para $i \neq 1$. Sejam $\mu_i = \mu \llcorner (B_{r_i}(x_i) \cap \Omega)$ e u_i a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_i = \mu_i & \text{em } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Pela Desigualdade de Hölder, $|x|^{-\alpha}e^{u_i} \in L^1(\Omega)$, uma vez que

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{2\pi(2 - \alpha) - \epsilon/2}{4\pi} > 1$$

para $\epsilon < 2\left(\frac{8\pi}{\alpha} - 2\pi\alpha\right)$. Tomemos, então, $\epsilon_0 = 2\left(\frac{8\pi}{\alpha} - 2\pi\alpha\right)$, o qual é positivo, pois $\alpha < 2$. Como $\mu_1 \leq \mu + |x|^{-\alpha}(e^{u_1} - 1)$, segue pelo teorema 2.13 que μ_1 é uma boa-medida. Por outro lado, para $i \neq 1$, $|x|^{-\alpha}$ é limitada em $B_{r_i}(x_i)$. Aplicando o teorema 2.17 obtemos que $|x|^{-\alpha}e^{u_i} \in L^1(\Omega)$, assim, $\mu_i \in \mathcal{G}$ para $i \neq 1$. Mas $\mu \leq \sup\{\mu_i; 1 \leq i \leq k\}$. Portanto, pelos corolário 2.31 e teorema 2.13 concluímos que μ é uma boa-medida.

- iv) Reciprocamente, seja μ tal que $\mu(\{0\}) > 2\pi(2 - \alpha)$ e (3.1) tenha solução. Tomemos $2\pi(2 - \alpha) < a < \mu(\{0\})$. Como $a\delta_0 \leq \mu$, pelo teorema 2.13 temos que $a\delta_0$ é uma boa-medida. Sejam v e w as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta v + |x|^{-\alpha}(e^v - 1) = a\delta_0 & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

e

$$\begin{cases} -\Delta w = a\delta_0 & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

respectivamente. Pelo corolário 2.49,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{v}(0, r) - \bar{w}(0, r)}{\log(1/r)} = 0.$$

Por outro lado, pelo corolário 2.48,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{w}(0, r)}{\log(1/r)} = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0^+} a\delta_0(B_r(0)) = \frac{a}{2\pi} > \frac{2\pi(2 - \alpha)}{2\pi}.$$

Logo

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{v}(0, r)}{\log(1/r)} = \frac{a}{2\pi} > \frac{2\pi(2-\alpha)}{2\pi} = 2 - \alpha.$$

Assim, dado $2 - \alpha < b < a/2\pi$ existe $r_0 > 0$ tal que

$$\frac{\bar{v}(0, r)}{\log(1/r)} \geq b$$

para todo $0 < r < r_0$. Portanto, se $\delta < r_0$ pela Desigualdade de Jensen temos que

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta(0)} |x|^{-\alpha} e^v dx &\geq \int_0^\delta \int_{\partial B_\rho(0)} \rho^{-\alpha} e^v d\sigma d\rho = \int_0^\delta 2\pi \rho^{1-\alpha} \int_{\partial B_\rho(0)} e^v d\sigma d\rho \\ &\geq 2\pi \int_0^\delta \rho^{1-\alpha} e^{\int_{\partial B_\rho(0)} v d\sigma} d\rho \geq 2\pi \int_0^\delta \rho^{1-b-\alpha} d\rho = \infty, \end{aligned}$$

pois, $1-b-\alpha < 1-(2-\alpha)-\alpha < -1$, o que contradiz o fato de que $|x|^{-\alpha} e^v \in L^1(\Omega)$. Por fim, se $\mu(\{x\}) > 4\pi$ para algum $x \neq 0$ e u é a solução de (3.1), como acima, segue que $e^u \notin L^1(B_r(x))$, para $r > 0$ suficientemente pequeno. Mas $|x|^{-\alpha}$ é limitada em $B_r(x)$ se $0 \notin \overline{B_r(x)}$, conseqüentemente, $|x|^{-\alpha}(e^u - 1) \notin L^1(\Omega)$, obtendo novamente uma contradição. ■

Se $0 < \alpha < 2$ e $v \in L^{2/\alpha}(\Omega)$ - fraco então $v \in L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < 2/\alpha$. Logo se $v \in L^{2/\alpha}(\Omega)$ - fraco, com os mesmos argumentos acima,

$$\begin{cases} -\Delta u + v(e^u - 1) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução se $\mu(\{x\}) \leq 2\pi(2-\alpha)$ para todo $x \in \Omega$. Além disso, facilmente vemos que o resultado é somente de suficiência, pois se $v = 0$ o problema acima tem solução para qualquer medida de Radon.

Corolário 3.4. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $0 < \alpha < 2$. Então a medida reduzida de μ para (3.1) é dada por*

$$\mu^* = \bar{\mu} + \min\{a_0, 2\pi(2-\alpha)\}\delta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \min\{a_i, 4\pi\}\delta_{p_i},$$

onde $\mu = \bar{\mu} + a_0\delta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i\delta_{p_i}$ e $\bar{\mu}(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

3.2 Caso $\alpha \geq 2$

Proposição 3.5. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $\alpha \geq 2$. Se (3.1) tem uma solução então $\mu(\{0\}) = 0$ e $\mu(\{x\}) \leq 4\pi$ para todo $x \in \Omega$ tal que $x \neq 0$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mu(\{0\}) > 0$ e que (3.1) tenha solução. Se $0 < \beta < \mu(\{0\})$, pelo teorema 2.13,

$$\begin{cases} -\Delta v + |x|^{-\alpha}(e^v - 1) = \beta\delta_0 & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

também tem uma solução v . Dado $B_r(0) \Subset \Omega$, seja

$$w = \frac{\beta}{2\pi} \log \frac{r}{|x|}.$$

Como $v \geq 0$ em Ω e $w = 0$ em $\partial B_r(0)$, pelo teorema 2.23 temos que $v \geq w$ qtp em $B_r(0)$. Portanto, existe $r_0 < r$ tal que $e^v \geq e^w \geq 2$ qtp em $B_{r_0}(0)$, logo

$$\frac{1}{|x|^\alpha}(e^v - 1) \geq \frac{1}{|x|^\alpha}(e^w - 1) \geq \frac{1}{|x|^\alpha} \notin L^1(B_{r_0}(0)),$$

o que é uma contradição. Se $x \neq 0$ e $\mu(\{x\}) > 4\pi$ procedemos como na parte *iv)* do teorema acima para extrair uma contradição. ■

Corolário 3.6. *Sejam $p \in \Omega$ e $v \in W^{1,1}(\Omega)$ tais que*

$$\begin{cases} -\Delta v \leq c_1\delta_p & \text{em } \Omega \\ v \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Se $c_1 \leq 4\pi$ então

$$\begin{cases} -\Delta u + e^v(e^u - 1) = c_2\delta_p & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

tem solução se $c_2 \leq 4\pi - c_1$

Demonstração. Definamos $w = \frac{c_1}{2\pi} \log \frac{d}{|x-p|}$, onde $d = \text{diam } \Omega$. Logo

$$-\Delta(v - w) \leq 0 \quad \text{em } \Omega$$

e $v - w \leq 0$ sobre $\partial\Omega$. Pelo teorema 2.23, $v \leq w$ qtp em Ω , assim,

$$e^v \leq e^w = \frac{d^{c_1/2\pi}}{|x-p|^{c_1/2\pi}} \quad \text{qtp em } \Omega.$$

Portanto, $e^v \in L^q(\Omega)$ se $q < 4\pi/c_1$. Da observação posterior ao teorema 3.1, segue que (3.3) é solúvel se $c_2 \leq 4\pi - c_1$. ■

Soluções Limites para uma Equação Semilinear com Não
Linearidade Exponencial

O cerne deste capítulo encontra-se no estudo do Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (4.1)$$

onde Ω é um domínio limitado e suave de \mathbb{R}^2 . No próximo, dedicamo-nos à dimensões superiores. Convém explicitar o que entendemos como uma solução de (4.1). De forma geral, se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, não decrescente tal que $g(0) = 0$, u é solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (4.2)$$

se $u \in L^1(\Omega)$, diferentemente do primeiro capítulo, $g(u) \in L^1(\Omega)$ e

$$-\int_{\Omega} u \Delta \xi dx + \int_{\Omega} g(u) \xi dx = \int_{\Omega} \xi d\mu$$

para toda $\xi \in \mathcal{C}_0^2(\bar{\Omega})$. Dada uma não linearidade é útil discernir as medidas para qual (4.2) tem solução.

Definição 4.1. *Uma medida de Radon μ é uma boa-medida se (4.2) tem solução. O conjunto de boas-medidas é denotado por $\mathcal{G}(g)$.*

Observamos que o conjunto de boas-medidas depende da não linearidade. Se $g(t) = e^t - 1$, simplesmente escrevemos \mathcal{G} no lugar de $\mathcal{G}(g)$ e pelo Teorema de Vázquez temos que \mathcal{G} possui uma pequena quantidade de medidas que é bem descrito pelo teorema. Além disso, Brezis e Strauss em [20], teorema 1, provaram que toda função em $L^1(\Omega)$ é uma boa-medida.

Teorema 4.2 (Teorema de Brezis e Strauss). *Dada $f \in L^1(\Omega)$, a equação*

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem uma única solução.

Sejam (ρ_n) uma sequência regularizante, $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ positiva e g também convexa. Em [15], Brezis, Marcus e Ponce mostraram que as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + g(u_n) = \rho_n * \mu & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

convergem em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu^* & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde μ^* é a medida reduzida de μ , isto é, a maior boa-medida de (4.2) menor do que ou igual a μ . Como $\rho_n * \mu \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, naturalmente, perguntamo-nos sobre a possibilidade de substituir a sequência $(\rho_n * \mu)$ por uma sequência qualquer de funções suaves (ou até mesmo de medidas), $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$, tal que

$$\mu_n \xrightarrow{*} \mu \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega).$$

Em geral, a resposta é negativa. No exemplo 4.1 de [15], com $N \geq 3$, $q \geq \frac{N}{N-2}$ e $g(t) = (t^+)^q$, os autores construíram uma sequência de funções $(f_n) \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ não negativas tal que $f_n \xrightarrow{*} 1$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + g(u_n) = f_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

convergem em $L^1(\Omega)$ para a função nula. Por outro lado, pelo teorema de Brezis e Strauss a medida reduzida de uma função integrável é ela mesma. Contudo, surpreendentemente, a conclusão é verdadeira em dimensão 2 quando g é exponencial. Esta é a nossa maior contribuição dentro deste texto.

Teorema 4.3. *Seja $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ positiva tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Se u_n é solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{u_n} - 1 = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

então (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu^* & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (4.4)$$

Devido ao Teorema de Vázquez, a medida reduzida de μ é distinta de μ apenas nos conjuntos unitários em que esta é maior do que 4π . Como os conjuntos unitários têm massa unitária pelo conteúdo de Hausdorff de dimensão zero, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 4.4. *Seja $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ positiva tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ com $\mu \leq 4\pi\mathcal{H}_\infty^0$. Se u_n é solução de (4.3) então (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Se a sequência (μ_n) possui sinal, o teorema 4.3 não é mais assegurado. Embora, restabelecemo-o com a condição $\mu_n^+ \xrightarrow{*} \mu^+$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ adicionada, que é relativamente geral. Por exemplo, uma importante classe de sequências de medidas de Radon enquadra-se nesta condição. Dadas $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e uma sequência regularizante (ρ_n) , $\rho_n * \mu \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e, como

$$\rho_n * \mu \leq (\rho_n * \mu)^+ \leq \rho_n * \mu^+,$$

também temos que $(\rho_n * \mu)^+ \xrightarrow{*} \mu^+$ em $\mathcal{M}(\Omega)$.

Teorema 4.5. *Seja $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ e $\mu_n^+ \xrightarrow{*} \mu^+$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Se u_n é solução de (4.3), então (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de (4.4).*

Em geral, se (μ_n) tem sinal, a sequência (u_n) não converge em $L^1(\Omega)$ e em caso de convergência não é possível relacionar o limite fraco-estrela de (μ_n) com a medida que aparece em (4.4).

Proposição 4.6. *Existe uma sequência $(\mu_n) \subset \mathcal{C}_c^\infty(B_1)$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} 0$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e a sequência (u_n) de soluções de (4.3) converge para a solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = -4\pi\delta_0 & \text{em } B_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases}.$$

Inspirados pelo exemplo acima, procuramos determinar todas medidas que podem aparecer em (4.4) no caso de uma sequência de medidas de Radon com sinal, façanha realizada via duas proposições simétricas.

Teorema 4.7. *Sejam $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e u_n solução de (4.3). Se (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para u então existem $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ com $c_i \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ e $r_1, \dots, r_m \in \Omega$ tais que*

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu^* - \sum_{i=1}^m c_i \delta_{r_i} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Teorema 4.8. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ com $c_i \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ e $r_1, \dots, r_m \in \Omega$. Então existe uma sequência $(\mu_n) \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e as soluções de (4.3) convergem em $L^1(\Omega)$ para a solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu^* - \sum_{i=1}^m c_i \delta_{r_i} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Por fim, notamos que o mesmo procedimento nos conduz a respostas análogas para a Equação Escalar de Chern-Simons

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u(e^u - 1) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

O presente capítulo constitui o coração da tese, no qual expressamos a sua maior originalidade, e é composto basicamente de resultados inéditos. Além disso, a teoria desenvolvida para o estudo da (4.1) através de aproximação do dado inicial é satisfatoriamente completa.

4.1 Limite Reduzido

Dada $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, usamos o teorema 2.55 para decompor μ numa soma de medidas em que a primeira não se concentra em pontos e a segunda é parte puramente atômica de μ , isto é, escrevemos

$$\mu = \bar{\mu} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_{p_i},$$

onde $p_i \in \Omega$ para todo $i \in \mathbb{N}$, $\bar{\mu}(\{x\}) = 0$ para cada $x \in \Omega$ e $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$. Doravante, salvo menção ao contrário, usamos esta decomposição para μ . Por essa fórmula e pelo teorema de Vázquez fazemos uma releitura da medida reduzida de μ ,

$$\mu^* = \bar{\mu} + \sum_{i=1}^{\infty} \min \{a_i, 4\pi\} \delta_{p_i}.$$

Servimos dessa expressão para μ^* para demonstrar o teorema 4.3.

Antes de avançar na direção deste objetivo, introduzimos uma outra medida que está intimamente relacionada com a medida reduzida. Sejam g como na introdução deste capítulo, $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ com sinal (ou positiva) tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e u_n a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + g(u_n) = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (4.5)$$

Se (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para u , pelo teorema 1.1 de Marcus e Ponce [30] temos que existe uma medida $\mu^\# \in \mathcal{M}(\Omega)$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu^\# & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (4.6)$$

Munidos desse resultado os autores fizeram a seguinte definição.

Definição 4.9. *Sejam $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e u_n solução de (4.5). Se existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para u e u resolve (4.6), dizemos que $\mu^\#$ é o limite reduzido de (μ_n) associada a g .*

Se $g(t) = e^t - 1$, simplesmente, dizemos que $\mu^\#$ é o limite reduzido de (μ_n) , isto é, sem explicitar a dependência da não linearidade. Ainda, dada uma sequência

$(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ positiva tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, do teorema 4.3 provém alguns corolários imediatos.

1. (μ_n) tem limite reduzido, e este é dado por $\mu^\# = \bar{\mu} + \sum_{i=1}^{\infty} \min\{a_i, 4\pi\} \delta_{p_i}$.
2. A medida reduzida de μ e o limite reduzido de (μ_n) coincidem;
3. O limite reduzido depende apenas do limite fraco-estrela da sequência e não da sequência.

Proposição 4.10. *Seja $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Então existe uma subsequência (μ_{n_k}) de (μ_n) que tem limite reduzido.*

Demonstração. Pela proposição 2.6,

$$\|\Delta u_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq 2\|\mu_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)},$$

ou seja, (Δu_n) é limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$. Pelo teorema 2.1, (u_n) é limitada em $W^{1,1}(\Omega)$, consequentemente, por compacidade existe uma subsequência (u_{n_k}) que converge em $L^1(\Omega)$. ■

Em dimensão 2, se a não linearidade é uma potência, o único limite reduzido de uma sequência (μ_n) é o seu limite fraco-estrela, conforme vemos a seguir. Em particular, com $g(t) = |t|^{p-1}t$, o limite reduzido de qualquer sequência (μ_n) associada a g positiva depende apenas do seu limite fraco-estrela. De fato, $\mu^\# = \mu$. Entretanto, no caso da exponencial, se o limite reduzido de uma sequência existe, ele nem sempre é igual ao seu limite-fraco.

Proposição 4.11. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ positiva tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Seja também u_n a única solução não negativa de*

$$\begin{cases} -\Delta u_n + |u_n|^{p-1}u_n = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (4.7)$$

Então existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para u e u resolve (4.7) com μ no lugar de μ_n .

Demonstração. Pelos teorema 2.1 e proposição 2.6, (u_n) é limitada em $W^{1,q}(\Omega)$ para todo $1 \leq q < 2$. Como $W^{1,q}(\Omega)$ está compactamente contido em $L^s(\Omega)$ para todo $1 \leq s < q^*$, e q^* tende ao infinito, quando $q \rightarrow 2^-$, existem uma subsequência (u_{n_k}) e $u \in L^1(\Omega)$ tais que u_{n_k} converge em $L^p(\Omega)$ para u . Logo $|u_{n_k}|^{p-1}u_{n_k} \rightarrow |u|^{p-1}u$ em $L^1(\Omega)$. Portanto, u é solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + |u|^{p-1}u = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (4.8)$$

Tomando uma subsequência qualquer de (u_n) , pelo argumento aplicado acima existe uma subsequência desta que converge para a solução de (4.8), como a solução de (4.8) é única, concluímos que toda a sequência (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para u . ■

Quando a não linearidade é exponencial e a sequência (μ_n) , mesmo possuindo sinal, tem limite reduzido, este é dado por μ menos uma soma finita de medidas de Dirac. Antes lembramos o conceito de suporte de uma medida.

Definição 4.12. O suporte de uma medida $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ é $\Omega \setminus N$, onde N é a união de todos os abertos de Ω que têm medida nula.

Proposição 4.13. Sejam $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ e $\mu_n^+ \xrightarrow{*} \nu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e u_n a solução de (4.3). Então existem uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) , $b_1, \dots, b_l \in \mathbb{R}$ e $q_1, \dots, q_l \in \Omega$ tais que (u_{n_k}) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu - \sum_{i=1}^l b_i \delta_{q_i} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (4.9)$$

onde $q_1, \dots, q_l \in \{x \in \Omega; \nu(\{x\}) \geq 4\pi\}$.

Demonstração. Observamos que pela proposição 4.10 existem uma subsequência (u_{n_k}) e $u \in L^1(\Omega)$ tais que (u_{n_k}) converge em $L^1(\Omega)$ para u . Além disso, pela proposição 2.6 a sequência $(e^{u_n} - 1)$ é limitada. Passando a uma subsequência, denotada da mesma forma, podemos supor ainda que

$$e^{u_{n_k}} - 1 \xrightarrow{*} e^u - 1 + \tau \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega) \quad \text{e} \quad u_{n_k} \rightarrow u \quad \text{qtp em } \Omega. \quad (4.10)$$

Assim, u satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu - \tau & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Portanto resta provar que $b_1, \dots, b_l \in \mathbb{R}$ e $q_1, \dots, q_l \in \Omega$ tais que $\tau = \sum_{i=1}^l b_i \delta_{q_i}$. Para tal provemos que τ é concentrada em A , onde

$$A = \{x \in \Omega; \nu(\{x\}) \geq 4\pi\}.$$

Dado $y \in \Omega \setminus A$, $\nu(\{y\}) \leq 4\pi - \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$. Pela regularidade externa da medida de Radon ν , existe um aberto $U \subset \Omega$ tal que $y \in U$ e $\nu(U) \leq 4\pi - \epsilon/2$. Seja $r > 0$ de modo que $B_r(y) \subset U$, logo $\nu(B_r(y)) \leq \nu(U) \leq 4\pi - \epsilon/2$. Se $\varphi \in C_c^\infty(B_r(y))$ é tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi = 1$ em $B_{r/2}(y)$, pela convergência fraca-estrela $\mu_n^+ \xrightarrow{*} \nu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_r(y)} \varphi d\mu_{n_k}^+ \leq \int_{B_r(y)} \varphi d\nu + \frac{\epsilon}{4} \leq 4\pi - \frac{\epsilon}{4},$$

se $k \geq k_0$, assim, para tais k temos que

$$\int_{B_{r/2}(y)} d\mu_{n_k}^+ \leq \int_{B_r(y)} \varphi d\mu_{n_k}^+ \leq 4\pi - \frac{\epsilon}{4}.$$

Como $u_{n_k} \in W^{1,p}(B_{r/2}(y))$ pela proposição 2.2, temos que $u_{n_k} \in L^1(\partial B_{r/2}(y))$. Novamente pelo teorema 2.1 e pela Fórmula de Poisson para o disco existe solução U_{n_k} de

$$\begin{cases} -\Delta U_{n_k} = \mu_{n_k}^+ & \text{em } B_{r/2}(y) \\ U_{n_k} = u_{n_k} & \text{sobre } \partial B_{r/2}(y) \end{cases}.$$

Além disso, pelo teorema 2.17, $e^{U_{n_k}} \in L^1(B_{r/2}(y))$ e pela proposição 2.5 temos que $U_{n_k} \geq u_{n_k}$, logo U_{n_k} é uma supersolução de

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u}_{n_k} + e^{\bar{u}_{n_k}} - 1 = \mu_{n_k}^+ & \text{em } B_{r/2}(y) \\ \bar{u}_{n_k} = u_{n_k} & \text{sobre } \partial B_{r/2}(y) \end{cases}. \quad (4.11)$$

Por (4.11) u_{n_k} é uma subsolução. Portanto, pelo teorema 2.3, existe solução \bar{u}_{n_k} de (4.11). Pelo Corolário 2.46, $e^{U_{n_k}}$ é uniformemente limitada em $L^p(B_{r/3}(y))$ para algum $p > 1$, mas

$$u_{n_k} \leq \bar{u}_{n_k} \leq U_{n_k} \quad \text{em } B_{r/3}(y),$$

logo $e^{u_{n_k}}$ também o é. Por (4.10) e pelo Teorema de Egorov,

$$e^{u_{n_k}} - 1 \rightarrow e^u - 1 \quad \text{em } L^1(B_{r/3}(y)).$$

Portanto, τ tem suporte em A . Por fim, sendo ν uma medida de Radon temos que A é finito e, conseqüentemente, existem $b_1, \dots, b_l \in \mathbb{R}$ e $q_1, \dots, q_l \in \Omega$ tais que $\tau = \sum_{i=1}^l b_i \delta_{q_i}$. ■

Corolário 4.14. *Sejam $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ e $\mu_n^+ \xrightarrow{*} \mu^+$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e u_n a solução de (4.5). Então existem uma subsequência (u_{n_k}) e $b_{j_1}, \dots, b_{j_l} \in \mathbb{R}$ tais que (u_{n_k}) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \bar{\mu} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\#} \delta_{p_i} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (4.12)$$

onde $a_{j_k}^{\#} = a_{j_k} - b_{j_k}$ se $k \in \{1, \dots, l\}$ e $a_i^{\#} = a_i$ caso contrário.

Demonstração. Basta lembrar que a medida $\tau \in \mathcal{M}(\Omega)$ da proposição 4.13 está concentrada no conjunto em que $\mu^+ \geq 4\pi$ e este, está contido naquele em que $\mu \geq 4\pi$, logo $\{q_1, \dots, q_l\}$ é um subconjunto de $\{p_i; n \in \mathbb{N}\}$. ■

Ainda se $g(t) = e^t - 1$ também podemos elidir a hipótese de positividade da sequência (μ_n) do teorema 7.1 de Marcus e Ponce em [30] enunciado a seguir.

Teorema 4.15. *Seja $(\mu_n) \subset \mathcal{G}(g)$ positiva tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Se $\mu^{\#}$ é o limite reduzido de (μ_n) associado a g então*

$$\mu^{\#} \leq \mu^* \leq \mu.$$

Proposição 4.16. *Seja $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Se $\mu^{\#}$ é o limite reduzido de (μ_n) então*

$$\mu^{\#} \leq \mu.$$

Demonstração. Seja u_n a solução de (4.3). Como (μ_n) é limitada, pelos teorema 2.1 e proposição 2.6 existem $u \in L^1(\Omega)$ e uma subsequência (u_{n_k}) tais que (u_{n_k}) converge em $L^1(\Omega)$ para u e

$$e^{u_{n_k}} - 1 \xrightarrow{*} e^u - 1 + \tau \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega). \quad (4.13)$$

Passando a uma outra subsequência, se necessário, podemos supor também que (u_{n_k}) converge para u qtp em Ω . Como (u_{n_k}) é uma subsequência de (u_n) temos que u satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu^\# & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Logo $\mu^\# = \mu - \tau$. Assim, resta provar que $\tau \geq 0$. Pela proposição 4.13, existem $b_1, \dots, b_l \in \mathbb{R}$ e $q_1, \dots, q_l \in \Omega$ tais que

$$\tau = \sum_{i=1}^l b_i \delta_{q_i}.$$

Fixado $i \in \{1, \dots, l\}$, sejam $\varphi_m \in \mathcal{C}_c^\infty(B_{1/m}(q_i))$ tal que $0 \leq \varphi_m \leq 1$ e $\varphi_m(q_i) = 1$. Por (4.13),

$$b_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_m(e^{u_{n_k}} - 1) dx - \int_{\Omega} \varphi_m(e^u - 1). \quad (4.14)$$

Por outro lado, como $e^{u_{n_k}} - 1 \geq -1$ em Ω segue que

$$\int_{\Omega} \varphi_m(e^{u_{n_k}} - 1) dx \geq - \int_{\Omega} \varphi_m dx \geq -|\text{supt } \varphi_m|,$$

e por (4.14) obtemos que

$$b_i \geq -|\text{supt } \varphi_m| + \int_{\Omega} \varphi_m(e^u - 1) dx.$$

Fazendo m tender ao infinito segue que $b_i \geq 0$. Sendo $i = 1, \dots, l$ arbitrário, $\tau \geq 0$. Portanto, $\mu^\# \leq \mu$. ■

Observamos que a motriz da prova é a limitação inferior da não linearidade. Além disso, como μ^* é a maior boa-medida menor do que ou igual a μ também concluímos uma desigualdade mais forte.

Corolário 4.17. *Seja $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Se $\mu^\#$ é o limite reduzido de (μ_n) então*

$$\mu^\# \leq \mu^*.$$

Ao reunir o corolário 4.17 com a proposição 4.13 também garantimos que o limite reduzido de uma sequência (μ_n) tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ é μ^* menos um decréscimo **não negativo** de medidas de Dirac.

Demonstração do teorema 4.7. Pela proposição 4.13, existem $q_1, \dots, q_l \in \Omega$ satisfazendo

$$\mu^\# = \mu - \sum_{i=1}^l b_i \delta_{q_i}.$$

Como μ é uma medida de Radon, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_i < 4\pi$ para $i \geq k$. Logo

$$\mu^\# = \mu^\star + \sum_{i=1}^k (a_i - 4\pi)^+ \delta_{p_i} - \sum_{i=1}^l b_i \delta_{q_i} = \mu^\star - \sum_{i=1}^m c_i \delta_{r_i},$$

onde para os k primeiros c_i 's temos que $c_i = b_{j_s} - (4\pi - a_i)^+$ se $p_i = q_{j_s}$ para algum $q_{j_s} \in \{q_1, \dots, q_l\}$ e $c_i = -(4\pi - a_i)^+$ caso contrário e $r_i = p_i$; já para os $m - k$ índices restantes consideramos os pontos $q_{j_{k+1}}, \dots, q_{j_m}$ que não aparecem em $\{p_i; n \in \mathbb{N}\}$ e definimos $c_i = b_{j_i}$ e $r_i = q_{j_i}$. Por fim, pelo corolário 4.17 obtemos que todos os coeficientes c_i 's são não negativos. ■

Notemos que como $c_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, para $i \in \{1, \dots, k\}$ temos que $a_i \leq 4\pi$ se nenhum elemento de $\{q_1, \dots, q_l\}$ é igual a p_i ; e $b_{j_s} \geq (a_i - 4\pi)^+$ quando $q_{j_s} = p_i$.

Em termos de limite reduzido rescrevemos o teorema anterior.

Corolário 4.18. *Seja $(\mu_n) \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Se $\mu^\#$ é limite reduzido de (μ_n) então existem $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ com $c_i \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ e $r_1, \dots, r_m \in \Omega$ tais que*

$$\mu^\# = \mu^\star - \sum_{i=1}^m c_i \delta_{r_i}.$$

4.2 Prova do Teorema Principal

Um elemento fundamental empregado em diferentes ocasiões é o Princípio do Máximo Inverso obtido por Dupaigne e Ponce em [22], teorema 3. Por meio deste, minoramos os valores do limite reduzido em determinados conjuntos unitários.

Proposição 4.19 (Princípio do Máximo Inverso). *Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$. Se $u \geq 0$ qtp em Ω , então*

$$(-\Delta u)_c \geq 0.$$

A seguir, exibimos a demonstração do principal resultado do texto.

Demonstração do Teorema 4.3. Pelo corolário 4.14 existem uma subsequência (u_{n_k}) , $b_{j_1}, \dots, b_{j_l} \in \mathbb{R}$ e $p_{j_1}, \dots, p_{j_l} \in \{x \in \Omega; \mu(\{x\}) \geq 4\pi\}$ tais que (u_{n_k}) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \bar{\mu} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\#} \delta_{p_i} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde $a_{j_k}^{\#} = a_{j_k} - b_{j_k}$ para $k \in \{1, \dots, l\}$ e $a_i^{\#} = a_i$ se $i \notin \{j_1, \dots, j_l\}$. Logo, a fim de calcular $\{a_i^{\#}; n \in \mathbb{N}\}$, basta focarmo-nos em j_1, \dots, j_l . Para cada $i \in \{1, \dots, l\}$, seja v_{n_k} a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v_{n_k} + e^{v_{n_k}} - 1 = \alpha \mu_{n_k} & \text{em } \Omega \\ v_{n_k} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (4.15)$$

onde $0 < \alpha < 4\pi/a_{j_i}$. A existência de v_{n_k} provém do teorema 2.3, pois u_{n_k} é uma supersolução de (4.15) e 0 uma subsolução. Pela proposição 4.13, existe uma subsequência $(v_{n_{k_j}})$ convergindo em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v + e^v - 1 = \nu_{\alpha} & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde $\nu_{\alpha} = \alpha\mu - \tau$ e τ é uma medida de Radon concentrada em $\{x \in \Omega; \alpha\mu(\{x\}) \geq 4\pi\}$. Como $\alpha\mu(\{p_{j_i}\}) < 4\pi$, $\tau(\{p_{j_i}\}) = 0$ e, então, $\nu_{\alpha}(\{p_{j_i}\}) = \alpha\mu(\{p_{j_i}\}) = \alpha a_{j_i}$. Mas pela proposição 2.5,

$$v_{n_{k_j}} \leq u_{n_{k_j}} \quad \text{qtp em } \Omega,$$

de onde $v \leq u$ qtp em Ω . Logo pela proposição 4.19,

$$\alpha a_{j_i} = (-\Delta v)_c(\{p_{j_i}\}) \leq (-\Delta u)_c(\{p_{j_i}\}) = a_{j_i}^{\#}.$$

Sendo $0 < \alpha < 4\pi/a_{j_i}$ arbitrário, concluímos que $a_{j_i}^{\#} \geq 4\pi$. Por outro lado, pelo teorema 2.20 também temos que $a_{j_i}^{\#} \leq 4\pi$, conseqüentemente, $a_{j_i}^{\#} = 4\pi$. Por fim, observamos que se iniciamos com uma subsequência qualquer de (u_n) obtemos uma subsequência desta que converge para a solução de (4.4), por unicidade de solução de (4.1) concluímos que (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para u , onde u é solução de (4.4). ■

4.3 Medidas de Radon com Sinal

O bom comportamento apresentado com sequências de medidas positivas não é mais verificado se as permitimos possuir sinal. Contudo no teorema 4.5, reavemos o teorema 4.3 via um acréscimo de hipótese. A priori, melhoramos o lema 2.36.

Lema 4.20. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $f \in L^1(\Omega)$. Então*

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.16)$$

tem solução se, e somente se, (4.16) tem solução com dados iniciais (μ^+, f^+) e $(-\mu^-, -f^-)$.

Demonstração. Sejam $g(t) = (e^t - 1)^+$. Pelo lema 2.36 temos que

$$\begin{cases} -\Delta v + g(v) = \mu^+ & \text{em } \Omega \\ v = f^+ & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução. Como pela proposição 2.5 $v \geq 0$ qtp em Ω , segue que v é solução de (4.16) com (μ^+, f^+) como dado inicial. Para exibir a solução associado a $(-\mu^-, -f^-)$, procedamos analogamente. Consideremos a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v + (1 - e^{-v})^+ = (\mu^-)^* & \text{em } \Omega \\ v = f^- & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Notemos que $-u$ é supersolução de

$$\begin{cases} -\Delta w + (1 - e^{-w})^+ = -\mu & \text{em } \Omega \\ w = -f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e a solução do problema acima com $(-\mu^+, -f^+)$ é uma subsolução. Assim com os mesmos argumentos acima, $(\mu^-)^* = \mu^-$. Sendo $v \geq 0$ qtp em Ω , obtemos que $-v$ é solução de (4.16) com $(-\mu^-, -f^-)$ como dado inicial. Finalmente, se (4.16) com (μ^+, f^+) e $(-\mu^-, -f^-)$, têm soluções u e v , respectivamente; então u e v são supersolução e subsolução de (4.16), respectivamente. Como pela proposição 2.5, $v \leq u$ qtp em Ω , pelo teorema 2.3 concluímos que (4.16) tem solução. ■

Demonstração do teorema 4.5. Seja u_n a solução de (4.3). Pelo corolário 4.14, existem $b_{j_1}, \dots, b_{j_l} \in \mathbb{R}$, $p_{j_1}, \dots, p_{j_l} \in \{x \in \Omega; \mu^+(\{x\}) \geq 4\pi\}$ e uma subsequência (u_{n_k}) tal que (u_{n_k}) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \bar{\mu} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\#} \delta_{p_i} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde $a_{j_k}^{\#} = a_{j_k} - b_{j_k}$ para $k \in \{1, \dots, l\}$ e $a_i^{\#} = a_i$ caso contrário; e

$$e^{u_{n_k}} - 1 \xrightarrow{*} e^u - 1 + \sum_{i=1}^l b_{j_i} \delta_{p_{j_i}} \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega).$$

Devido à caracterização

$$\mu^+(\{x\}) = \sup \{\mu(F); F \subset \{x\}\}$$

temos que se $\mu^+(\{x\}) \geq 4\pi$ então $\mu(\{x\}) = \mu^+(\{x\})$ e $\mu(\{x\}) < 4\pi$ se, e somente se, $\mu^+(\{x\}) < 4\pi$. Logo, para $i \notin \{j_1, \dots, j_l\}$, $a_i^{\#} = a_i < 4\pi$ e, conseqüentemente, $a_i^{\#} = \min \{a_i, 4\pi\}$. Também, $\mu(\{p_{j_i}\}) = \mu^+(\{p_{j_i}\}) = a_{j_i}$ para $i \in \{1, \dots, l\}$. Seja $u_{n_k}^+$ a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_{n_k}^+ + e^{u_{n_k}^+} - 1 = \mu_{n_k}^+ & \text{em } \Omega \\ u_{n_k}^+ = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.17)$$

dada pelo lema 4.20. Pelo teorema 4.3, $(u_{n_k}^+)$ converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u^+ + e^{u^+} - 1 = (\mu^+)^* & \text{em } \Omega \\ u^+ = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Ainda, seja $\tau \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que

$$e^{u_{n_k}^+} - 1 \xrightarrow{*} e^{u^+} - 1 + \tau \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega).$$

Como pela proposição 2.5 temos que $u_{n_k} \leq u_{n_k}^+$ qtp em Ω , $e^u - 1 + \sum_{i=1}^l b_{j_i} \delta_{p_{j_i}} \leq e^{u^+} - 1 + \tau$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Portanto, para $i \in \{1, \dots, l\}$,

$$a_{j_i}^{\#} = \mu(\{p_{j_i}\}) - b_{j_i} \geq \mu^+(\{p_{j_i}\}) - \tau(\{p_{j_i}\}) = (\mu^+)^*(\{p_{j_i}\}) = 4\pi,$$

pois $\mu^+(\{p_{j_i}\}) = \mu(\{p_{j_i}\}) \geq 4\pi$. Por outro lado, pelo teorema 2.20, $a_{j_i}^{\#} \leq 4\pi$. Logo $a_{j_i}^{\#} = 4\pi$ e $a_{j_i}^{\#} = \min \{a_{j_i}, 4\pi\}$. Por fim, como na argumentação final do teorema 4.3 concluímos que toda a sequência (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de (4.4). ■

Novamente, na linguagem de limite reduzido reescrevemos o teorema acima.

Corolário 4.21. *Seja $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ e $\mu_n^+ \xrightarrow{*} \mu^+$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Então (μ_n) tem limite reduzido e*

$$\mu^\# = \bar{\mu} + \sum_{i=1}^{\infty} \min \{a_i, 4\pi\} \delta_{p_i}.$$

Em seguida, produzimos um interessante exemplo de uma sequência (μ_n) de medidas com sinal tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, $\mu \geq 0$ e tem limite reduzido $\mu^\#$, mas $\mu^\# \neq \mu^*$.

Demonstração da proposição 4.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, seja

$$\mu_{n,\epsilon} = 8\pi\rho_{1/\epsilon}(x) - 8\pi\rho_n(x - (1/n, 0)),$$

onde ρ é um regularizador. Fixado n , ao fazer ϵ tender a 0 obtemos que $\mu_{n,\epsilon} \xrightarrow{*} 8\pi\delta_0 - 8\pi\rho_n(x - (1/n, 0))$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Pelo teorema 4.5, $(u_{n,\epsilon})$ converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{u_n} - 1 = \nu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde $\nu_n = 4\pi\delta_0 - 8\pi\rho_n(x - (1/n, 0))$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ escolhamos $\epsilon_n > 0$ satisfazendo

$$\|u_{n,\epsilon_n} - u_n\|_{L^1(\Omega)} \leq 1/n.$$

Por outro lado, pelo lema logo a seguir, (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = -4\pi\delta_0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (4.18)$$

Portanto, (u_{n,ϵ_n}) converge em $L^1(\Omega)$ para u . Assim, basta tomar $\mu_n = \mu_{n,\epsilon_n}$. ■

Os dois próximos lemas, sendo o primeiro já utilizado acima, são essencialmente a demonstração do teorema 4.8. Em suma, em ambos determinamos o limite reduzido de uma sequência de medidas em que cada elemento é uma diferença de outras duas. No primeiro, o fator aditivo da diferença é uma medida fixa, enquanto no segundo fixamos o subtraendo.

Lema 4.22. *Seja $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(\Omega)$, onde $\mu_n = \tau - \nu_n$ com $\nu_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\nu_n \xrightarrow{*} \nu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Se $\tau(\{x\}) \leq 4\pi$ para todo $x \in \Omega$ então (μ_n) tem limite reduzido e*

$$(\tau - \nu)^\# = \tau - \nu.$$

Demonstração. Seja u_n a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{u_n} - 1 = \tau - \nu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Como $((\tau - \nu_n)^+)$ é limitada, existe uma subsequência $((\tau - \nu_{n_k})^+)$ tal que $(\tau - \nu_{n_k})^+ \xrightarrow{*} \kappa$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Pela proposição 4.13, existe uma subsequência de (u_{n_k}) , denotada da mesma forma, que converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \tau - \nu - \lambda & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde $\lambda = \sum_{i=1}^l b_i q_i$ e $q_i \in \{x \in \Omega; \kappa(\{x\}) \geq 4\pi\}$. Seja v_n a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v_n + e^{v_n} - 1 = \tau^+ - \nu_n & \text{em } \Omega \\ v_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (4.19)$$

Note que $\tau^+ - \nu_n \leq \tau^+$ e $\tau^+(\{x\}) \leq 4\pi$, logo pelos teoremas 2.13 e 2.20, existe v_n . Similarmente à demonstração do teorema 4.3, obtemos que v_n converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v + e^v - 1 = \tau^+ - \nu & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Como $e^{v_n} - 1 \xrightarrow{*} e^v - 1$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e $u_{n_k} \leq v_{n_k}$ qtp em Ω ,

$$e^u - 1 + \sum_{i=1}^l b_i \delta q_i \leq e^v - 1.$$

Em particular, $b_i \leq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, l\}$, isto é, $\lambda \leq 0$. Por outro lado, pela proposição 4.16 também temos que $\lambda \geq 0$, logo $\lambda = 0$. Portanto, (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para u e $\mu^\# = \tau - \nu$. ■

No próximo, usamos o teorema 4.8 de [15], do qual temos a propriedade aditiva na operação de tomar medidas reduzida quando as medidas são mutuamente singulares.

Teorema 4.23. *Se $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$ são mutuamente singulares então*

$$(\mu_1 + \mu_2)^* = \mu_1^* + \mu_2^*.$$

Lema 4.24. *Seja $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$, onde $\mu_n = \nu_n - \tau$ com $\tau \geq 0$, $\tau(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \Omega$ e $\nu_n \xrightarrow{*} \nu$ e $\nu_n^+ \xrightarrow{*} \nu^+$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Então (μ_n) tem limite reduzido e*

$$(\nu - \tau)^\# = \nu^* - \tau.$$

Demonstração. Seja u_n a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{u_n} - 1 = \nu_n - \tau & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Como $((\nu_n - \tau)^+)$ é limitada, existem $\kappa \in \mathcal{M}(\Omega)$ e uma subsequência $((\nu_{n_k} - \tau)^+)$ tal que $(\nu_n - \tau)^+ \xrightarrow{*} \kappa$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Pela proposição 4.13, existe uma subsequência de (u_{n_k}) tal que (u_{n_k}) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \nu - \tau - \lambda & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde $\lambda = \sum_{i=1}^l b_i \delta_{q_i}$ e $q_i \in \{x \in \Omega, \kappa(\{x\}) \geq 4\pi\}$. Notemos que sendo $(\nu_n - \tau)^+ \leq \nu_n^+$, segue que $\kappa \leq \nu^+$. Se $p \in \Omega$ é tal que $\nu^+(\{p\}) < 4\pi$ então $\lambda(\{p\}) = 0$ e, conseqüentemente, $(\nu^* - \tau)(\{p\}) \leq (\nu - \tau - \lambda)(\{p\})$. Como na decomposição para μ , escrevamos

$$\nu = \bar{\nu} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_{p_i},$$

com $\bar{\nu}(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \Omega$ e $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$. Se $\nu^+(\{x\}) \geq 4\pi$ para algum $x \in \Omega$, temos que $x = p_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$ e $\nu^+(\{p_i\}) = \nu(\{p_i\}) = a_i$. Fixemos um tal i . Sejam $\alpha < 4\pi/a_i$ e a solução v_n de

$$\begin{cases} -\Delta v_n + e^{v_n} - 1 = \alpha v_n - \tau & \text{em } \Omega \\ v_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Novamente pela proposição 4.13, existem uma subsequência $(v_{n_{k_j}})$ e $\chi \in \mathcal{M}(\Omega)$ tais que $(v_{n_{k_j}})$ converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v + e^v - 1 = \alpha\nu - \tau - \chi & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde χ é uma medida concentrada num subconjunto de $\{x \in \Omega; \alpha\nu^+(\{x\}) \geq 4\pi\}$. Pela proposição 2.5, $v_{n_{k_j}} \leq u_{n_{k_j}}$ qtp em Ω e, conseqüentemente, $v \leq u$, qtp em Ω . Portanto, pela proposição 4.19,

$$\alpha a_i = (-\Delta v)_c(\{p_i\}) \leq (-\Delta u)_c(\{p_i\}) = (\nu - \lambda)(\{p_i\}),$$

pois $\chi(\{p_i\}) = 0$. Como $\alpha < 4\pi/a_i$ é arbitrário, segue $(\nu^* - \tau)(\{p_i\}) = 4\pi \leq (\nu - \tau - \lambda)(\{p_i\})$. Logo $\nu^* - \tau \leq \nu - \tau - \lambda$ em Ω . Por outro lado, usando a hipótese $\tau(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \Omega$, pelos teoremas 2.20 e 4.23 obtemos que

$$(\nu - \tau)^* = \left((\bar{\nu} - \tau) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_{p_i} \right)^* = \bar{\nu} - \tau + \sum_{i=1}^{\infty} \min \{a_i, 4\pi\} \delta_{p_i} = \nu^* - \tau.$$

Pelo corolário 4.17 segue que $\nu - \tau - \lambda \leq \nu^* - \tau$ e, conseqüentemente, $\nu - \tau - \lambda = \nu^* - \tau$. Portanto, (μ_n) tem $\nu^* - \tau$ como limite reduzido. ■

A proposição 4.6 explicita-nos a necessidade ds hipótese $\nu_n^+ \xrightarrow{*} \nu^+$ no lema acima. Em posse dos dois últimos lemas, extraímos uma espécie de recíproca do teorema 4.7. De fato, trata-se de uma generalização do exemplo contido na proposição 4.6.

Demonstração do teorema 4.8. Lembremos a nossa decomposição usual para μ , $\mu = \bar{\mu} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_{p_i}$. Acrescentando coeficientes nulos e reordenando-os podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_{p_i} = \sum_{i=1}^{\infty} a'_i \delta_{q_i} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^m c_i \delta_{r_i} = \sum_{i=1}^{\infty} c'_i \delta_{q_i},$$

onde os k primeiros q_i 's são os r_i 's que aparecem em $\{p_i; n \in \mathbb{N}\}$, os $m - k$ q_i 's seguintes são os r_i 's que não pertencem a $\{p_i; n \in \mathbb{N}\}$ e, por fim, reordenamos de forma natural os p_i 's que não estão em $\{r_1, \dots, r_m\}$. Definamos

$$\mu_{n,\epsilon} = \rho_{1/\epsilon} * \bar{\mu} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \rho_{1/\epsilon}(x - q_i) - \sum_{i=1}^m d_i \rho_{2n}(x - q_i + (1/n)e_1),$$

onde

$$b_i = \begin{cases} a'_i + c'_i & a'_i \geq 4\pi \\ 4\pi + c'_i & a'_i < 4\pi \end{cases} \quad \text{e} \quad d_i = \begin{cases} c'_i & a'_i \geq 4\pi \\ 4\pi - a'_i + c'_i & a'_i < 4\pi \end{cases},$$

para $i = 1, \dots, m$, e $b_i = a'_i$ se $i > m$. Notemos que sendo $\mu_{n,\epsilon}(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \Omega$, $\mu_{n,\epsilon} \in \mathcal{G}$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$. Seja, então, $u_{n,\epsilon}$ a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_{n,\epsilon} + e^{u_{n,\epsilon}} - 1 = \mu_{n,\epsilon} & \text{em } \Omega \\ u_{n,\epsilon} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Como $d_i \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, m\}$, dada uma sequência (ϵ_k) que converge para 0^+ , ao aplicar o lema 4.24, obtemos que, quando k tender ao infinito, (u_{n,ϵ_k}) convergirá em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{u_n} - 1 = \bar{\mu} + \sum_{i=1}^{\infty} \min\{b_i, 4\pi\} \delta_{q_i} - \sum_{i=1}^m d_i \rho_{2n}(x - q_i + (1/n)e_1) & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $u_{n,\epsilon_{k_n}}$ de forma que

$$\|u_{n,\epsilon_{k_n}} - u_n\| \leq 1/n.$$

Usando o lema 4.22, (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \bar{\mu} + \sum_{i=1}^{\infty} \min\{b_i, 4\pi\} \delta_{q_i} - \sum_{i=1}^m d_i \delta_{q_i} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Mas pelas definições de b_i e de d_i , temos que $\min\{b_i, 4\pi\} = 4\pi$ e $4\pi - d_i = \min\{4\pi, a'_i\} - c'_i$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Como $\mu^* = \bar{\mu} + \sum_{i=1}^{\infty} \min\{a'_i, 4\pi\} \delta_{q_i}$,

$$\bar{\mu} + \sum_{i=1}^m (4\pi - d_i) \delta_{q_i} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \min\{b_i, 4\pi\} \delta_{q_i} = \mu^* - \sum_{i=1}^m c'_i \delta_{q_i} = \mu^* - \sum_{i=1}^m c_i \delta_{r_i}.$$

Portanto, tomando $\mu_n = \mu_{n,\epsilon_{k_n}}$, o resultado segue. ■

Ainda continuamos na nossa tarefa de codificar as asserções usando o conceito de limite reduzido.

Corolário 4.25. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ com $c_i \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ e $r_1, \dots, r_m \in \Omega$. Então existe uma sequência $(\mu_n) \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, (μ_n) tem limite reduzido e*

$$\mu^\# = \mu^* - \sum_{i=1}^m c_i \delta_{r_i}.$$

As proposições 4.6 e 4.8 nos permitem, dada $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, obter todos limites reduzidos de sequências de boas-medidas que convergem fraco-estrela para μ .

Definição 4.26. *Dizemos que ν é um limite reduzido associado a μ se existe uma sequência $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e (μ_n) tem ν como limite reduzido.*

Corolário 4.27. *Seja $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Então ν é um limite reduzido associado a μ se, e somente se, existe $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ com $c_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, e $r_1, \dots, r_m \in \Omega$ satisfazendo*

$$\nu = \mu^* - \sum_{i=1}^m c_i \delta_{r_i}.$$

A não concentração de μ em conjuntos unitários e a não negatividade de u implicam que o limite reduzido é necessariamente igual ao limite-fraco da sequência.

Corolário 4.28. *Sejam $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e u_n a solução de (4.3). Suponhamos ainda que (μ_n) tem limite reduzido e que (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para u . Se $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \Omega$ e $u \geq 0$ qtp em Ω então $\mu^\# = \mu$.*

Demonstração. Pelo corolário 4.27 temos que existem $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ com $c_i \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ e $r_1, \dots, r_m \in \Omega$ tais que

$$\mu^\# = \mu^* - \sum_{i=1}^m c_i \delta_{r_i} = \mu - \sum_{i=1}^m c_i \delta_{r_i},$$

pois $\mu = \mu^*$. Como $u \geq 0$, pela proposição 4.19 segue que $-c_i = (-\Delta u)_c(\{p_i\}) \geq 0$. Portanto, $c_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, ou seja, $\mu^\# = \mu$. ■

Encerramos a seção, construindo um exemplo de uma sequência $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ que não admite limite reduzido.

Exemplo 4.29. *Seja (μ_n) a sequência definida por*

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_{n,\epsilon_n}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases},$$

onde μ_{n,ϵ_n} vem da proposição 4.6. É imediato que $\mu_n \xrightarrow{*} 0$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Contudo, se u_n é solução de (4.3) temos que (u_{2n}) e (u_{2n-1}) convergem para as soluções de (4.1), com $\mu = -4\pi\delta_0$ e $\mu = 0$, respectivamente.

4.4 Equação Escalar de Chern-Simons

A plenitude dos resultados para a equação semilinear com não linearidade exponencial é transladada para a Equação Escalar de Chern-Simons

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u(e^u - 1) = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (4.20)$$

As demonstrações são basicamente as mesmas, nas quais substituímos o Teorema de Vázquez pela sua versão para (4.20) dada por Lin, Ponce e Yang em [29], proposição B.1.

Teorema 4.30. *Seja $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Então (4.20) tem solução se, e somente se,*

$$\mu(\{x\}) \leq 2\pi \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Do teorema acima segue que a medida reduzida de μ associada a (4.20) é

$$\mu^* = \bar{\mu} + \sum_{i=1}^{\infty} \min\{a_i, 2\pi\} \delta_{p_i}.$$

Nesta seção, a palavra boa-medida e o conjunto \mathcal{G} são reservados para as medidas de Radon tais que o problema (4.20) tem solução e para o conjunto destas medidas, respectivamente.

Teorema 4.31. *Sejam $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ positiva tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e u_n a solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{u_n}(e^{u_n} - 1) = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (4.21)$$

Então (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u(e^u - 1) = \mu^* & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (4.22)$$

Teorema 4.32. *Sejam $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ e $\mu_n^+ \xrightarrow{*} \mu^+$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, e u_n a solução de (4.21). Então (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de (4.22).*

Teorema 4.33. *Sejam $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, e u_n a solução de (4.21). Se (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para u , então existem $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ tais que $c_i \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ e $r_1, \dots, r_m \in \Omega$ tais que*

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u(e^u - 1) = \mu^* - \sum_{i=1}^m c_i \delta_{r_i} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Teorema 4.34. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, c_1, \dots, c_m com $c_i \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, m\}$, e $r_1, \dots, r_m \in \Omega$. Então existe uma sequência $(\mu_n) \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, e as soluções de (4.21) convergem em $L^1(\Omega)$ para a solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u(e^u - 1) = \mu^* - \sum_{i=1}^m c_i \delta_{r_i} & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Soluções Limites para uma Equação Semilinear com não
Linearidade Exponencial em dimensão ≥ 3

No atual estágio, somos levados a nos questionar se as conclusões do capítulo anterior são peculiares ou não à bidimensionalidade do espaço. Usando a medida de Hausdorff, escrevemos a equivalência estabelecida no Teorema de Vázquez de outra forma, $\mu \leq 4\pi\mathcal{H}^0$. Assim, uma possível extensão deste teorema para dimensões superiores é: $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ é uma boa-medida se, e somente se, $\mu(A) \leq 4\pi\mathcal{H}^{N-2}(A)$ para todo boreliano $A \subset \Omega$, reforçada pelo teorema 1 de Bartolucci, Leoni, Orsina e Ponce dado em [4].

Teorema 5.1. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$. Se $\mu(A) \leq 4\pi\mathcal{H}^{N-2}(A)$ para todo boreliano $A \subset \Omega$ então μ é uma boa-medida para*

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u - 1 = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (5.1)$$

Mas Ponce em [35] encontrou conjuntos não retificáveis F tais que $0 < \mathcal{H}^{N-2}(F) < \infty$ e $\nu = \alpha\mathcal{H}^{N-2} \llcorner F$ é uma boa-medida para todo $\alpha > 0$, o que mostra

a dificuldade de determinar as boas-medidas para $N \geq 3$. A mesma ressurge na caracterização de limites reduzidos. Por exemplo, as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{u_n} - 1 = \rho_n * \mu & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (5.2)$$

onde $\mu = \alpha \mathcal{H}^{N-2} \llcorner F$, converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de (5.1). Em outras palavras, o limite reduzido de $(\rho_n * \mu)$ é igual ao seu limite-fraco e $\mu^\# = \alpha \mathcal{H}^{N-2} \llcorner F$, para todo $\alpha > 0$. Isso reflete na impossibilidade de generalização da proposição 4.13 para dimensões superiores, da qual presumimos a forma do limite reduzido.

Dissuadidos de calcular o limite reduzido de forma geral, em dimensões superiores ou igual a três, passamos a procurar condições a fim de que o limite reduzido de uma sequência de boas-medidas seja igual ao seu limite-fraco.

Ainda no plano, ao fortalecer a exigência de que $\mu \leq 4\pi \mathcal{H}_\infty^0$ por $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \Omega$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\mu_n(B_r(x)) \leq \epsilon,$$

para todos $n \geq n_0$ e r suficientemente pequeno. Então se o diâmetro fosse uma medida exterior teríamos que (μ_n) seria equidifusa em relação ao diâmetro. Em dimensão superior, a alteração do diâmetro por \mathcal{H}_∞^{N-2} mostrou-se apropriada. No restante deste capítulo, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$, e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ é positiva.

Definição 5.2. *Dada uma sequência $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(\Omega)$, dizemos que (μ_n) é equidifusa em relação a uma medida exterior T se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ satisfazendo*

$$\mu_n(E) \leq \epsilon$$

para todos boreliano $E \subset \Omega$ tal que $T(E) < \delta$ e $n \in \mathbb{N}$.

A equidifusidade é suficiente para garantir que (μ_n) possui limite reduzido igual a μ , quando a sequência é não crescente.

Teorema 5.3. *Seja $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ não crescente tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Se (μ_n) é equidifusa em relação à \mathcal{H}_∞^{N-2} e $\mu \leq 4\pi \mathcal{H}_\infty^{N-2}$ então (μ_n) tem limite reduzido e $\mu^\# = \mu$.*

Em um primeiro esforço de extensão do corolário 4.4, esperávamos que somente a alteração da medida \mathcal{H}_∞^0 por \mathcal{H}_∞^{N-2} , bastasse para recuperá-lo. Contudo com um exemplo, elucidamos a sua insuficiência.

Teorema 5.4. *Existe $(\mu_n) \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ positiva tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ com $\mu \neq 0$, (μ_n) tem limite reduzido $\mu^\# = 0$ e $\mu(E) = 0$ para todo boreliano E tal que $\mathcal{H}^s(E) = 0$ para algum $s < N$.*

Pelo teorema 5.1, μ é uma boa-medida, assim neste exemplo, a medida reduzida de μ é distinta do limite reduzido de (μ_n) . Também se consideramos a sequência $(\rho_n * \mu)$, pelo teorema 4.11 de [15] temos que o limite reduzido desta sequência é μ , logo os limites reduzidos de (μ_n) e de $(\rho_n * \mu)$ são diferentes.

Inferimos que a mudança da bidimensionalidade para dimensões superiores nos acarreta uma grande alteração do estado da arte. Ganhamos um enriquecimento do quadro e, conseqüentemente, um aumento do nível de dificuldade. Reunindo o exposto nesta introdução, obtemos que nenhum dos itens 1. a 3. após a definição 4.9 da seção 4.1 mantém-se válido para $N \geq 3$, isto é,

1. Podem existir conjuntos borelianos $F \subset \Omega$ e sequências $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ de boas-medidas tais que (μ_n) tem limite reduzido $\mu^\# = \alpha \mathcal{H}^{N-2} \lfloor F$, para todo $\alpha > 0$;
2. A medida reduzida e o limite reduzido nem sempre coincidem;
3. O limite reduzido também depende da sequência em questão.

Entretanto, duas questões fundamentais permanecem-se abertas: a condição de monotocidade é essencial no teorema 5.3? A segunda é ainda mais delicada: qual é a forma do limite reduzido de uma sequência em geral que o possui? A dependência intrínseca do limite reduzido pela sequência e não apenas do limite-fraco engrandece a resposta e aumenta consideravelmente sua complexidade.

5.1 Prova do Teorema Principal

A prova do teorema 5.3 é dividido em etapas, o que permite focalizar os detalhes e obter resultados em si mesmos interessantes.

Lema 5.5. *Seja $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n = \nu_n + \tau_n$, $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ e $\tau_n \rightarrow 0$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Suponhamos, ainda, que a solução v_n de*

$$\begin{cases} -\Delta v_n + e^{v_n} - 1 = \nu_n & \text{em } \Omega \\ v_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

converja em $L^1(\Omega)$ para a solução de (5.1). Então u_n também converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de (5.1).

Demonstração. Pela proposição 2.24 existe C independente de n tal que

$$\|v_n - u_n\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|\tau_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como (v_n) converge em $L^1(\Omega)$ para u , onde u resolve (5.1), e $\|\tau_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \rightarrow 0$ concluímos que (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para u . ■

Lema 5.6. *Sejam $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e u_n a solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{u_n} - 1 = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde existe $\epsilon > 0$ tal que $\mu_n(\Omega \cap B_r(x)) \leq 2N\omega_N(1 - \epsilon)r^{N-2}$ para todo $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$. Então (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de (5.1).

Demonstração. Como (μ_n) é limitada, pelo teorema 2.1 existem uma subsequência (u_{n_k}) e $u \in L^1(\Omega)$ tais que (u_{n_k}) converge em $L^1(\Omega)$ e qtp em Ω para u . Seja $v_k \in L^1(\Omega)$ a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v_k = \mu_{n_k} & \text{em } \Omega \\ v_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Como $\|\mu_{n_k}\|_{N/2} \leq 2N\omega_N(1 - \epsilon)$, usando o teorema 2.19 com $\alpha < 2N\omega_N\epsilon \leq 2N\omega_N - \|\mu_{n_k}\|_{N/2}$ obtemos que, para algum $p > 1$, $e^{v_k} \in L^p(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} e^{pv_k} \leq C_p \tag{5.3}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, pela proposição 2.5, $u_{n_k} \leq v_k$ qtp em Ω . Logo de (5.3) segue que

$$\|e^{u_{n_k}}\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p.$$

Como (u_{n_k}) converge qtp em Ω para u , pelo Teorema de Egorov temos que $(e^{u_{n_k}})$ converge em $L^1(\Omega)$ para e^u . Portanto, u é solução de (5.1). ■

Com a junção dos dois lemas acima produzimos a situação que estabelecemos no teorema 5.3.

Corolário 5.7. *Sejam $(\mu_n) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n = \nu_n + \tau_n$ e $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, onde $\nu_n(\Omega \cap B_r(x)) \leq 2N\omega_N r^{N-2}$ para todo $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ e $\tau_n \rightarrow 0$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Seja, ainda, u_n a solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{u_n} - 1 = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.4)$$

Então (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de (5.1).

Demonstração. Sejam $\alpha < 1$ e v_n^α a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v_n^\alpha + e^{v_n^\alpha} - 1 = \alpha\nu_n + \alpha\tau_n & \text{em } \Omega \\ v_n^\alpha = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Notemos que v_n^α existe devido ao teorema 2.13, pois $\alpha\mu_n \leq \mu_n$. Pelos lemas 5.5 e 5.6, (v_n^α) converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v^\alpha + e^{v^\alpha} - 1 = \alpha\mu & \text{em } \Omega \\ v^\alpha = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Pelo teorema 2.14 μ é uma boa-medida. Seja u a solução de (5.1). Da proposição 2.24 segue que

$$\|v^\alpha - u\|_{L^1(\Omega)} \leq (1 - \alpha)\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)},$$

isto é, v^α converge a u em $L^1(\Omega)$ quando $\alpha \rightarrow 1^-$. Por outro lado, também pela proposição 2.24,

$$\|u_n - v_n^\alpha\|_{L^1(\Omega)} \leq (1 - \alpha)\|\nu_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + (1 - \alpha)\|\tau_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq (1 - \alpha)C.$$

Portanto, (u_n) converge em $L^1(\Omega)$ para u . ■

Lema 5.8. *Seja $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Então para todo fechado $F \subset \Omega$ temos que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F).$$

Demonstração. Lembremos que $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ se μ é uma medida de Radon no sentido usual em $\bar{\Omega}$ tal que $\mu(\partial\Omega) = 0$. Como $\bar{F} \subset F \cup \partial\Omega$, temos que $\nu(\bar{F}) = \nu(F)$ para toda $\nu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Logo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\bar{F}) \leq \mu(\bar{F}) = \mu(F). \quad \blacksquare$$

Um passo crucial na demonstração do teorema 5.3 que permite cair no corolário 5.7 é a extensão do Lema 2 de [4]. Elaborada por Ponce exclusivamente para o uso neste texto.

Lema 5.9. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $s \in \mathbb{R}_+$. Dados $\beta \in \mathbb{R}_+$ e $\delta \in (0, \infty]$, existe um aberto $A \subset \mathbb{R}^N$ tal que*

$$\mu \llcorner A \leq \beta \mathcal{H}_\delta^s \quad e \quad \beta \mathcal{H}_\delta^s(\mathbb{R}^N \setminus A) < \mu(\mathbb{R}^N \setminus A).$$

Demonstração. Se a desigualdade $\mu \leq \beta \mathcal{H}_\delta^s$ não é assegurada então existe $B_0 \subset \mathbb{R}^N$ satisfazendo

$$\beta \mathcal{H}_\delta^s(B_0) < \mu(B_0).$$

Suponhamos por indução que tenhamos construído conjuntos borelianos disjuntos B_0, \dots, B_n . Se a desigualdade

$$\mu \llcorner \mathbb{R}^N \setminus \cup_{k=0}^n B_k \leq \beta \mathcal{H}_\delta^s$$

é assegurada então tomamos $B_{n+1} = \emptyset$, caso contrário, existe $B_{n+1} \subset \mathbb{R}^N \setminus \cup_{k=0}^n B_k$ tal que

$$\beta \mathcal{H}_\delta^s(B_{n+1}) < \mu(B_{n+1}).$$

Como \mathcal{H}_δ^s é uma medida exterior e os conjuntos B_k são disjuntos,

$$\beta \mathcal{H}_\delta^s \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k \right) \leq \beta \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(B_k) < \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) = \mu \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k \right).$$

A conclusão do lema segue com $A = \mathbb{R}^N \setminus \cup_{k=0}^{\infty} B_k$ se temos

$$\mu \llcorner \mathbb{R}^N \setminus \cup_{k=0}^{\infty} B_k \leq \beta \mathcal{H}_\delta^s.$$

A fim de ter esta propriedade, refinemos a escolha dos conjuntos B_k . Para tal, para todo $n \in \mathbb{N}$, sejam

$$\epsilon_n = \sup \left\{ \mu(E); E \subset \mathbb{R}^N \setminus \cup_{k=0}^n B_k \text{ é um boreliano e } \beta \mathcal{H}_\delta^s(E) < \mu(E) \right\}$$

e $B_{n+1} \subset \mathbb{R}^N \setminus \cup_{k=0}^n B_k$ satisfazendo

$$\mu(B_{n+1}) \geq \frac{\epsilon_n}{2};$$

e como μ é uma medida de Radon, podemos tomar B_{n+1} sendo um compacto. Suponhamos por contradição que

$$\mu \lfloor_{\mathbb{R}^N \setminus \cup_{k=0}^{\infty} B_k} \leq \beta \mathcal{H}_{\delta}^s$$

não é verificada, logo existe $C \subset \mathbb{R}^N \setminus \cup_{k=0}^{\infty} B_k$ tal que

$$\beta \mathcal{H}_{\delta}^s(C) < \mu(C).$$

Em particular, $\mu(C) > 0$ e C é um conjunto admissível na definição dos números ϵ_n , consequentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $\epsilon_n \geq \mu(C)$. Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_{k+1}) = 2\mu(\cup_{k=0}^{\infty} B_{k+1}) \leq 2\mu(\mathbb{R}^N) < \infty.$$

Portanto, (ϵ_n) converge para zero, o que é uma contradição, pois esta é limitada inferiormente por $\mu(C)$. ■

Demonstração do teorema 5.3. Inicialmente, suponhamos que exista $\epsilon > 0$ tal que

$$\mu \leq (4\pi - \epsilon) \mathcal{H}_{\infty}^{N-2}.$$

Definamos uma sequência (A_i) de abertos de Ω . Seja A_1 dado pelo lema anterior tal que

$$\mu_1 \lfloor_{A_1} \leq 4\pi \mathcal{H}_{\infty}^{N-2} \quad \text{e} \quad 4\pi \mathcal{H}_{\infty}^{N-2}(\mathbb{R}^N \setminus A_1) < \mu_1(\mathbb{R}^N \setminus A_1).$$

Definidos (A_i) para $1 \leq i \leq n$, obtemos A_{n+1} aplicando o lema anterior para $\mu_{n+1} \lfloor_{\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^n A_i}$. Logo A_{n+1} satisfaz

$$\mu_{n+1} \lfloor_{A_{n+1} \setminus \cup_{i=1}^n A_i} \leq 4\pi \mathcal{H}_{\infty}^{N-2} \quad \text{e} \quad 4\pi \mathcal{H}_{\infty}^{N-2}(\mathbb{R}^N \setminus A_{n+1}) < \mu_{n+1}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^{n+1} A_i).$$

Sendo (μ_n) não crescente, $\mu_{n+1} \lfloor_{\cup_{i=1}^{n+1} A_i} \leq 4\pi \mathcal{H}_{\infty}^{N-2}$. Ainda notemos que se $m < n$ temos que

$$4\pi \mathcal{H}_{\infty}^{N-2}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^n A_i) \leq \mu_n(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^n A_i) \leq \mu_n(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^m A_i).$$

Logo pelo lema 5.8, para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} 4\pi \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_\infty^{N-2}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^n A_i) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^m A_i) \leq \mu(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^m A_i) \\ &\leq (4\pi - \epsilon) \mathcal{H}_\infty^{N-2}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^m A_i). \end{aligned}$$

Portanto,

$$4\pi \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_\infty^{N-2}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^n A_i) \leq (4\pi - \epsilon) \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_\infty^{N-2}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^n A_i)$$

e, conseqüentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_\infty^{N-2}(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^n A_i) = 0.$$

Assim, como (μ_n) é equidifusa em relação a \mathcal{H}_∞^{N-2} , temos que $\mu_n(\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^n A_i) \rightarrow 0$. Escrevendo $\mu_n = \mu_n \lfloor_{\cup_{i=1}^n A_i} + \mu_n \lfloor_{\mathbb{R}^N \setminus \cup_{i=1}^n A_i}$, pelo corolário 5.7 concluímos o resultado. Por fim, se apenas $\mu \leq 4\pi \mathcal{H}_\infty^{N-2}$, procedemos de forma análoga à demonstração do corolário 5.7. ■

5.2 Um interessante exemplo

Para produzir o propalado exemplo em que $\mu^\# \neq \mu^*$ fazemos uso do corolário 3 de [4], dado a seguir, e dos dois lemas subsequentes.

Corolário 5.10. *Sejam $\mu = \alpha(x) \mathcal{H}^{N-2} \lfloor E$, onde $E \subset \Omega$ é um subconjunto $(N-2)$ -retificável e α uma função $\mathcal{H}^{N-2} \lfloor E$ integrável. Então*

$$\mu^* = \min \{ \alpha, 4\pi \} \mathcal{H}^{N-2} \lfloor E.$$

Lema 5.11. *Sejam $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e (ρ_n) uma seqüência regularizante radial. Se (n_k) é uma subseqüência dos números naturais então*

$$\rho_{n_k} * \mu_k \xrightarrow{*} \mu \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega).$$

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, utilizando o Teorema de Fubini segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \varphi d(\rho_{n_k} * \mu_k) - \int_\Omega \varphi d\mu \right| &= \left| \int_\Omega \varphi(x) \left(\int_\Omega \rho_{n_k}(x-y) d\mu_k(y) \right) dx - \int_\Omega \varphi d\mu \right| \\ &= \left| \int_\Omega (\rho_{n_k} * \varphi) d\mu_k - \int_\Omega \varphi d\mu \right| \\ &\leq \|\rho_{n_k} * \varphi - \varphi\|_{L^1(\Omega)} \|\mu_k\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + \left| \int_\Omega \varphi d\mu_k - \int_\Omega \varphi d\mu \right|. \end{aligned}$$

Como $(\rho_{n_k} * \varphi)$ converge uniformemente a φ e (μ_k) é limitada, o resultado segue. ■

Em um primeiro instante para obter o teorema central da seção, construímos uma sequência (τ_n) de medidas de Radon tal que $\tau_n \xrightarrow{*} 1$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Dados $n \in \mathbb{N}$ e um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, sejam $C_\alpha = [\alpha_1/n, (\alpha_1 + 1)/n) \times \dots \times [\alpha_N/n, (\alpha_N + 1)/n)$ e $|\alpha| = \#\{\alpha; C_\alpha \in \Omega\}$. Notemos que $\mathbb{R}^n = \dot{\cup}_{\alpha \in \mathbb{N}^N} C_\alpha$. Para cada C_α , tomemos o seu centro: x_α e

$$S_\alpha^r = \{x \in \mathbb{R}^N; |x - x_\alpha| = r \text{ e } x_N = 0\},$$

onde $r = 1/4n^{(N+1)(N-2)}$. Com tais notação, definimos

$$\tau_n = |\Omega| \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^N \\ C_\alpha \in \Omega}} \frac{1}{\omega_{N-1} |\alpha| r^{N-2}} d(\mathcal{H}^{N-2} \llcorner S_\alpha^r),$$

Lema 5.12. *Dada a sequência (τ_n) acima, temos que $\tau_n \xrightarrow{*} 1$ em $\mathcal{M}(\Omega)$.*

Demonstração. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, sejam $P_n = \{C_\alpha; C_\alpha \in \Omega\}$ e a soma de Riemann de φ em relação a P_n

$$S_n = \sum_{C_\alpha \in P_n} \varphi(x_\alpha) \text{vol}(C_\alpha) = \sum_{C_\alpha \in P_n} \varphi(x_\alpha) \frac{1}{n^N} = \frac{|\alpha|}{n^N} \sum_{C_\alpha \in P_n} \frac{\varphi(x_\alpha)}{\omega_{N-1} |\alpha| r^{N-2}} \mathcal{H}^{N-2} \llcorner S_\alpha^r(C_\alpha).$$

Dado $\epsilon > 0$, pela continuidade uniforme de φ , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \epsilon$, se $x, y \in C_\alpha$ para algum $C_\alpha \in P_n$ e $n \geq n_0$. Além disso, sendo $|\alpha|/n^N$ a soma de Riemann de 1 em relação a partição P_n também podemos tomar n_0 de forma que $||\Omega| - |\alpha|/n^N| \leq \epsilon$ se $n \geq n_0$. Logo

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \varphi d\tau_n - S_n \right| &\leq \left| |\Omega| - \frac{|\alpha|}{n^N} \right| \sum_{C_\alpha \in P_n} \int_\Omega \frac{\varphi(x_\alpha)}{\omega_{N-1} |\alpha| r^{N-2}} \mathcal{H}^{N-2} \llcorner S_\alpha^r + |\Omega| \sum_{C_\alpha \in P_n} \int_\Omega \frac{|\varphi - \varphi(x_\alpha)|}{\omega_{N-1} |\alpha| r^{N-2}} d(\mathcal{H}^{N-2} \llcorner S_\alpha^r) \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \left| |\Omega| - \frac{|\alpha|}{n^N} \right| + |\Omega| \sum_{C_\alpha \in P_n} \int_\Omega \frac{|\varphi - \varphi(x_\alpha)|}{\omega_{N-1} |\alpha| r^{N-2}} d(\mathcal{H}^{N-2} \llcorner S_\alpha^r) \\ &\leq \epsilon (\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} + |\Omega|), \end{aligned}$$

se $n \geq n_0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_\Omega \varphi dx$ segue que

$$\int_\Omega \varphi d\tau_n \rightarrow \int_\Omega \varphi dx.$$

Portanto, $\tau_n \xrightarrow{*} 1$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. ■

Demonstração do teorema 5.4. Seja $(\nu_k) \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, dada por $\nu_k = \rho_k * \tau_n$, onde (ρ_k) é uma sequência regularizante e (τ_n) é a sequência acima definida. Seja, ainda, $u_{n,k}$ a

solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_{n,k} + e^{u_{n,k}} - 1 = \nu_k & \text{em } \Omega \\ u_{n,k} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (5.5)$$

Pelo teorema 4.11 de [15] temos que, quando k tende ao infinito, $(u_{n,k})$ converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{u_n} - 1 = \tau_n^* & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, tomemos k_n suficientemente grande de forma que $\text{supt}(\rho_{k_n} * \tau_n) \subset \Omega$ e

$$\|u_{n,k_n} - u_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Por outro lado, pelo corolário 5.10, existe n_0 tal que

$$\tau_n^* = \sum_{C_\alpha \in P_n} 4\pi d(\mathcal{H}^{N-2} \lfloor S_\alpha^r)$$

para $n \geq n_0$. Logo

$$\|\tau_n^*\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq 4\pi \sum_{C_\alpha \in P_n} \mathcal{H}^{N-2} \lfloor S_\alpha^r(C_\alpha) = 4\pi|\alpha|\omega_{N-1}r^{N-2} = \frac{|\alpha|}{n^N} \frac{\pi\omega_{N-1}}{4^{N-3}n}.$$

Mas, como já vimos na demonstração do lema 5.12 que $|\alpha|/n^N \rightarrow |\Omega|$, $\|\tau_n^*\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \rightarrow 0$. Portanto, pela proposição 2.24, (u_n) converge a 0 em $L^1(\Omega)$. Assim, se $\mu_n = \nu_{n,k_n}$, pelo lema 5.11 temos que $\mu_n \xrightarrow{*} 1$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e (u_{n,k_n}) converge em $L^1(\Omega)$ para 0. ■

Soluções Limites para o Sistema de Chern-Simons

No artigo [29], Lin, Ponce e Yang estudaram e desenvolveram importantes resultados concernentes ao sistema não linear elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u + e^v(e^u - 1) = \mu \\ -\Delta v + e^u(e^v - 1) = \nu \end{cases} \text{ em } \mathbb{R}^2,$$

sendo μ e ν medidas de Radon. Se $\mu = -4\pi \sum_{i=1}^n \delta_{p_i}$ e $\nu = -4\pi \sum_{i=1}^m \delta_{p_i}$, o sistema ganha o significado físico descrito na introdução. As soluções com tais medidas são obtidas da passagem ao limite das soluções em conjuntos limitados de \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{cases} -\Delta u + e^v(e^u - 1) = \mu \\ -\Delta v + e^u(e^v - 1) = \nu \\ u = v = 0 \end{cases} \text{ em } \Omega, \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (6.1)$$

onde Ω é um domínio limitado com fronteira suave de \mathbb{R}^2 . Assim, constituindo-se um importante passo, o estudo de (6.1). O principal resultado de existência para (6.1) provém do teorema 7.1 de [29].

Teorema 6.1. *Sejam $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Então (6.1) tem uma solução se, e somente se, $\mu(\{x\}) + \nu(\{x\}) \leq 4\pi$.*

Dentro do espírito do capítulo 4, estamos interessados quando (6.1) não tem solução. Aproximamos μ e ν por sequências de medidas (μ_n) e (ν_n) , respectivamente, na topologia fraca-estrela em $\mathcal{M}(\Omega)$, tais que (6.1) tem solução com (μ_n, ν_n) como dado, e as soluções convergem em $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$. O cerne do atual capítulo é mostrar que o limite também satisfaz o sistema (6.1) com medidas $\mu^\#$ e $\nu^\#$, as quais determinamos completamente. Ao longo deste, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e medida de Radon, salvo menção ao contrário, restringe-se àquelas que são positivas.

Teorema 6.2. *Sejam $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ tais que $\mu(\{x\}), \nu(\{x\}) \leq 4\pi$ para todo $x \in \Omega$. Sejam também $(\mu_n), (\nu_n) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ tais que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ e $\nu_n \xrightarrow{*} \nu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e*

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{\nu_n}(e^{u_n} - 1) = \mu_n & \text{em } \Omega \\ -\Delta v_n + e^{u_n}(e^{\nu_n} - 1) = \nu_n & \\ u_n = v_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.2)$$

tem solução $(u_n, v_n) \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $((u_n, v_n))$ converge para (u, v) em $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ então (u, v) resolve

$$\begin{cases} -\Delta u + e^v(e^u - 1) = \mu^\# & \text{em } \Omega \\ -\Delta v + e^u(e^v - 1) = \nu^\# & \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (6.3)$$

onde $\mu^\#$ e $\nu^\#$ são medidas de Radon tais que $\mu - \mu^\#$ e $\nu - \nu^\#$ têm suporte num conjunto finito S tal que para todo $x \in S$,

$$\begin{aligned} \mu^\#(\{x\}) &= \min \left\{ \mu(\{x\}), 2\pi + \frac{\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})}{2} \right\}, \\ \nu^\#(\{x\}) &= \min \left\{ \nu(\{x\}), 2\pi + \frac{\nu(\{x\}) - \mu(\{x\})}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Apresentamos duas demonstrações. Na primeira, vemos que u_n, v_n explodem nas vizinhanças de pontos em que as medidas μ e ν tem massa estritamente positiva. Mais precisamente, provamos que se $0 < \mu(\{x\}) < 4\pi$ então dado $M > 0$ existem $r > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$u_n \geq M \quad \text{em } B_r(x),$$

se $n \geq n_0$. Este fenômeno nos conduz ao resultado. Mas ser estritamente menor do que 4π é necessário. Para contornar tal dificuldade lançamos mão de uma segunda

demonstração. Contudo devido à geometria da sequência de soluções obtida na anterior, preferimos expor as duas abordagens. Além disso, esperamos reproduzir o comportamento de explosão em alguns casos em que os valores das medidas μ e ν em conjuntos unitários ultrapassam 4π .

Destaquemos alguns pontos relevantes.

Observação 6.3. *Dada uma sequência de soluções de (6.2), sem a hipótese de que convergem, pela proposição 2.6 e pelo teorema 2.1 extraímos uma subsequência que converge em $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$. Mas devido à falta de conhecimento de unicidade do sistema (6.1), não concluímos que toda a sequência converge.*

O próximo corolário recupera o teorema 6.1.

Corolário 6.4. *Sejam $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ tais que $\mu(\{x\}) + \nu(\{x\}) \leq 4\pi$ para todo $x \in \Omega$. Dadas sequências $(\mu_n), (\nu_n) \subset \mathcal{M}(\Omega)$, (u_n, v_n) e (u, v) como no teorema 6.2, temos que (u, v) satisfaz o Sistema de Chern-Simons com (μ, ν) como dado.*

O valor 4π tem um papel de destaque em nossas técnicas. Para assegurar que a solução limite satisfaz o sistema de Chern-Simons (6.3) com medidas que diferem de μ e de ν em conjuntos finitos, não precisamos da hipótese sobre valores de μ e ν em conjuntos unitários. Mas sem essa restrição, não somos mais capazes de explicitar $\mu^\#, \nu^\#$. Contudo alguns fatos nos levam a conjecturar a mesma expressão para $\mu^\#(\{x\})$ e $\nu^\#(\{x\})$ quando $|\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})| \leq 4\pi$. Entre eles, a forma linear no caso conhecido e a igualdade

$$\mu^\#(\{x\}) + \nu^\#(\{x\}) = 4\pi$$

quando $\mu(\{x\}) + \nu(\{x\}) \geq 4\pi$, obtida sem nenhuma limitação superior para $\mu(\{x\})$ e $\nu(\{x\})$.

A fim de facilitar a linguagem, conforme feito na equação semilinear do capítulo 4, distinguimos as medidas que (6.1) admite uma solução.

Definição 6.5. *Dizemos que um par de medidas (μ, ν) de Radon é um bom-par se (6.1) admite solução. Reservamos a notação \mathcal{G} para o conjunto dos bons-pares de medidas para (6.1).*

Também, desejamos ter uma designação para o par de medidas $(\mu^\#, \nu^\#)$. Para este propósito, adotamos a definição dada por Marcus e Ponce em [30].

Definição 6.6. *Sejam $(\mu_n, \nu_n) \in \mathcal{G}$ e $((u_n, v_n))$ a sequência de soluções de (6.2). Se existe $(u, v) \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ e $v_n \rightarrow v$ em $L^1(\Omega)$, e (u, v) satisfaz (6.1) com $(\mu^\#, \nu^\#)$, dizemos que $(\mu^\#, \nu^\#)$ é o limite reduzido de $((\mu_n, \nu_n))$.*

Por fim, vejamos que a admissão de sinal nas medidas afeta substancialmente nossas conclusões. Por exemplo, seja $((\mu_n, \nu_n)) \subset \mathcal{G}$ uma sequência de medidas de Radon com sinal tal que $\nu_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por unicidade de soluções de

$$\begin{cases} -\Delta v_n + e^{u_n}(e^{v_n} - 1) = 0 & \text{em } \Omega \\ v_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

temos que $v_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, recaímos na equação semilinear,

$$\begin{cases} -\Delta u_n + e^{u_n} - 1 = \mu_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

do capítulo 4. Portanto, se permitimos medidas com sinal, pelo teorema 4.8 não temos uma fórmula fechada para o limite reduzido dependendo apenas de μ e ν .

Vale ressaltar que as técnicas empregadas para o sistema diferem essencialmente das utilizadas no artigo [15], onde o teorema de convergência em L^1 , que nos garante que as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + g(u_n) = \rho_n * \mu & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

convergem para a solução do problema acima com μ^* como dado, é baseado fortemente na convexidade de g . Além disso, é usado em sua demonstração que as medidas na equação acima são as convoluções de μ com uma sequência regularizante, não sendo possível transpô-la para sequências gerais que aproximam μ na topologia fraca-estrela em $\mathcal{M}(\Omega)$.

6.1 Limite Reduzido

Decompomos μ e ν como no teorema 2.55,

$$\mu = \bar{\mu} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_{p_i} \quad \text{e} \quad \nu = \bar{\nu} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \delta_{p_i},$$

com $\bar{\mu}(\{x\}) = \bar{\nu}(\{x\}) = 0$, para todo $x \in \Omega$ e $\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty$. Notemos que adicionando termos nulos podemos supor que os p_i 's em ambas somas são os mesmos.

Ainda inspirados pelo caso escalar, provamos que se $((\mu_n, \nu_n)) \subset \mathcal{G}$ tem limite reduzido, este difere do limite fraco apenas por somas finitas de medidas de Dirac. Relembramos o conceito de suporte de medidas.

Definição 6.7. Dada $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, seja N a união de todos os abertos $U \subset \Omega$ tais que $\mu(U) = 0$. Então $\Omega \setminus N$ é chamado de suporte de μ .

Proposição 6.8. Seja $((\mu_n, \nu_n)) \subset \mathcal{G}$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ e $\nu_n \xrightarrow{*} \nu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ e que (6.2) tenha solução (u_n, v_n) para cada $n \in \mathbb{N}$. Então existem $(u, v) \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ e uma subsequência $((u_{n_k}, v_{n_k}))$ tais que $u_{n_k} \rightarrow u$ e $v_{n_k} \rightarrow v$ em $L^1(\Omega)$ e (u, v) satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u + e^v(e^u - 1) = \mu - \tau_1 & \text{em } \Omega \\ -\Delta v + e^u(e^v - 1) = \nu - \tau_2 & \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (6.4)$$

onde τ_1 e τ_2 são medidas cujos suportes estão contidos em

$$\{x \in \Omega; \mu(\{x\}) + \nu(\{x\}) \geq 4\pi\}.$$

Em particular, existem $k \in \mathbb{N}$, c_i e d_i para $i \in \{1 \leq i, \dots, k\}$, tais que

$$\tau_1 = \sum_{i=1}^k c_i \delta_{p_i} \quad \text{e} \quad \tau_2 = \sum_{i=1}^k d_i \delta_{p_i}.$$

Demonstração. Como $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, temos que (μ_n) é limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$. Pela proposição 2.6,

$$\int_{\Omega} |e^{v_n}(e^{u_n} - 1)| \leq \|\mu_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq C,$$

onde C é independente de n . Pelo teorema 2.1 temos que $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C (\|\mu_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + \|e^{v_n}(e^{u_n} - 1)\|_{L^1(\Omega)}) \leq C.$$

para $1 \leq p < 2$ e $C = C(p, \sup \|\mu_n\|, \Omega)$. Fixado $1 < p < 2$, devido à reflexividade de $W_0^{1,p}(\Omega)$, existe uma subsequência (u_{n_k}) tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pelo Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov, $u_{n_k} \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$. De modo análogo, obtemos $v \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e uma subsequência (v_{n_k}) que converge a v em $L^1(\Omega)$. Passando a subsequências, que, por simplicidade, denotamo-as da mesma forma, podemos supor também que

$$u_{n_k} \rightarrow u \quad \text{e} \quad v_{n_k} \rightarrow v \quad \text{qtp em } \Omega, \quad (6.5)$$

$$e^{v_{n_k}}(e^{u_{n_k}} - 1) \xrightarrow{*} \sigma_1 \quad \text{e} \quad e^{u_{n_k}}(e^{v_{n_k}} - 1) \xrightarrow{*} \sigma_2 \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega). \quad (6.6)$$

Provemos que $\sigma_1 = e^v(e^u - 1) + \tau_1$ e $\sigma_2 = e^u(e^v - 1) + \tau_2$ com suportes de τ_1 e τ_2 contidos em

$$\{x \in \Omega; \mu(\{x\}) + \nu(\{x\}) \geq 4\pi\}.$$

Como os dois casos são similares lidemos apenas com σ_1 . Seja $x \in \Omega \setminus A$, então existem $\epsilon > 0$ e $r > 0$ que satisfazem $B_r(x) \subset \Omega \setminus A$ e

$$\int_{B_r(x)} d(\mu + \nu) \leq 4\pi - 2\epsilon.$$

Como $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, pelo teorema 1 da Seção 1.9 de [24], existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_{r/2}(x)} d(\mu_{n_k} + \nu_{n_k}) \leq 4\pi - \epsilon,$$

se $k \geq k_0$. Sejam U_{n_k} e V_{n_k} as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta U_{n_k} = \mu_{n_k} & \text{em } B_{r/2}(x) \\ U_{n_k} = u_{n_k} & \text{sobre } \partial B_{r/2}(x) \end{cases}$$

e de

$$\begin{cases} -\Delta V_{n_k} = \nu_{n_k} & \text{em } B_{r/2}(x) \\ V_{n_k} = v_{n_k} & \text{sobre } \partial B_{r/2}(x) \end{cases},$$

respectivamente. Notemos que a existência de U_{n_k} e V_{n_k} advém do teorema 2.1 e da fórmula de Poisson. Pela proposição 2.5,

$$u_{n_k} \leq U_{n_k} \quad \text{e} \quad v_{n_k} \leq V_{n_k} \quad \text{qtp em } B_{r/2}(x).$$

Logo

$$0 \leq e^{v_{n_k}}(e^{u_{n_k}} - 1) \leq e^{V_{n_k} + U_{n_k}}. \quad (6.7)$$

Por outro lado, usando o corolário 2.46 temos que existe $p > 1$ tal que $e^{V_{n_k} + U_{n_k}} \in L^p(B_{r/3}(x))$ e

$$\|e^{V_{n_k} + U_{n_k}}\|_{L^p(B_{r/3}(x))} \leq C, \quad (6.8)$$

onde $C = C(\epsilon, r)$. Por (6.7) e (6.8), $e^{v_{n_k}}(e^{u_{n_k}} - 1)$ é limitada em $L^p(B_{r/3}(x))$. E por (6.5) $e^{v_{n_k}}(e^{u_{n_k}} - 1)$ converge qtp em $B_{r/3}(x)$ a $e^v(e^u - 1)$. Pelo Teorema de Egorov concluímos que

$$e^{v_{n_k}}(e^{u_{n_k}} - 1) \rightarrow e^v(e^u - 1) \quad \text{em } L^1(B_{r/3}(x)). \quad (6.9)$$

Portanto, $\tau_1 := \sigma_1 - e^v(e^u - 1) \equiv 0$ em $B_{r/3}(x)$. ■

Pela última proposição concluímos que (u, v) satisfaz o Sistema de Chern-Simons com medidas de Radon dadas por

$$\begin{aligned} \mu^\# &= \mu - \sum_{i=1}^k c_i \delta_{p_i} = \bar{\mu} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^\# \delta_{p_i} \\ \nu^\# &= \nu - \sum_{i=1}^k d_i \delta_{p_i} = \bar{\nu} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i^\# \delta_{p_i}, \end{aligned}$$

onde $a_i^\# = a_i - c_i$ e $b_i^\# = b_i - d_i$ para $1 \leq i \leq k$; e $a_i^\# = a_i$ e $b_i^\# = b_i$ para $i > k$. Portanto, a fim de obter $\mu^\#$ e $\nu^\#$, basta calcular $a_i^\#$ e $b_i^\#$ para $i \in \{1, \dots, k\}$. Doravante, usamos as notações recém introduzidas.

6.2 Comportamento Uniforme

Um dos elementos chave para uma das demonstrações do teorema 6.2 é o comportamento explosivo das soluções u_n em vizinhanças dos pontos em que o limite fraco-estrela de (μ_n) tem concentração, que é estabelecido na seção posterior. Nesta, nos dedicamos a dois lemas bases, no primeiro temos uma estimativa inferior para solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (6.10)$$

onde μ é uma medida de Radon. Enquanto que no segundo, via a desigualdade L^p (2.33) para $g(x, u)$ com g nas hipóteses do lema 2.44 e u solução de

$$-\Delta u + g(x, u) = f \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

obtemos a limitação local uniforme para (u_n) em $L^p(\Omega)$ quando u_n é solução da equação acima com f_n no lugar de f e (f_n) é limitada em $L^p(\Omega)$.

Lema 6.9. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e u solução de (6.10). Dado $\Omega' \Subset \Omega$, existe $C = C(\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}, \Omega', \Omega)$ satisfazendo*

$$u(x) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\mu(B_r(x) \cap \Omega)}{r} dr + C \quad \text{qtp em } \Omega'. \quad (6.11)$$

Demonstração. Dividamos a prova em duas partes:

i) Suponhamos que $\mu = f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ com $f \geq 0$ qtp em Ω . Seja w o potencial Newtoniano de $g = \xi f$, onde $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$ é tal que $\xi = 1$ em Ω' e $0 \leq \xi \leq 1$, isto é,

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \log \frac{1}{|x-y|} g(y) dy,$$

Pela Teoria de Schauder, $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$. Seja, ainda, $\delta = \text{dist}(\text{supt } \xi, \partial\Omega)$, o qual podemos tomar estritamente menor do que 1. Se $x \in \partial\Omega$ temos que

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \log \frac{1}{|x-y|} g(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{supt } \xi} \log \frac{1}{|x-y|} g(y) dy \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\text{supt } \xi} \log \frac{1}{\delta} g(y) dy = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\delta} \|g\|_{L^1(\Omega)} = c(\|g\|_{L^1(\Omega)}, \Omega', \Omega). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Usando o Princípio do Máximo,

$$w - c \leq u \quad \text{em } \Omega. \quad (6.13)$$

Além disso, pela Fórmula da Coárea temos que

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^d \left(\int_{\partial B_r(x)} g(y') d\sigma \right) \log \frac{1}{r} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^d \frac{d}{dr} \left(\int_{B_r(x)} g(y) dy \right) \log \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{d}{dr} \left(\int_{B_r(x)} g(y) dy \right) \log \frac{1}{r} dr + \frac{1}{2\pi} \int_1^d \frac{d}{dr} \left(\int_{B_r(x)} g(y) dy \right) \log \frac{1}{r} dr, \end{aligned} \quad (6.14)$$

onde $d = \text{diam } \Omega$ e estendemos g identicamente nula fora de Ω . Ao minorar os termos através de Integração por Partes, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d}{dr} \left(\int_{B_r(x)} g(y) d\sigma \right) \log \frac{1}{r} dr &= \log \frac{1}{r} \left(\int_{B_r(x)} g(y) dy \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{r} \left(\int_{B_r(x)} g(y) dy \right) dr \\ &= \int_0^1 \frac{1}{r} \left(\int_{B_r(x)} g(y) dy \right) dr, \end{aligned} \quad (6.15)$$

pois

$$\lim_{r \rightarrow 0} \log \frac{1}{r} \int_{B_r(x)} g(y) dy = \lim_{r \rightarrow 0} \left(r^2 \log \frac{1}{r} \right) \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r^2} \int_{B_r(x)} g(y) dy \right) = 0 \cdot \pi g(x) = 0;$$

bem como

$$\begin{aligned} \int_1^d \frac{d}{dr} \left(\int_{B_r(x)} g(y) dy \right) \log \frac{1}{r} dr &= \log \frac{1}{r} \left(\int_{B_r(x)} g(y) dy \right) \Big|_1^d + \int_1^d \frac{1}{r} \left(\int_{B_r(x)} g(y) dy \right) dr \\ &\geq \log \frac{1}{d} \int_{B_d(x)} g(y) dy \geq \log \frac{1}{d} \|g\|_{L^1(\Omega)} \\ &= C(\|f\|_{L^1(\Omega)}, \Omega', \Omega). \end{aligned} \tag{6.16}$$

Portanto, por (6.12)-(6.16) obtém-se (6.11) para todo $x \in \Omega$.

- ii) Passamos ao caso em que $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Sejam $(f_n) \subset C^\infty(\Omega)$ dada por $f_n = \rho_n * \mu$ e u_n a solução de (6.10) com f_n no lugar de μ . Pela parte anterior, existe $C = C(\Omega, \|f_n\|_{L^1(\Omega)}, \Omega', \Omega)$ satisfazendo

$$u_n(x) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{B_r(x) \cap \Omega} f_n(y) dy \right) \frac{1}{r} dr + C \tag{6.17}$$

para todo $x \in \Omega'$. Seja $\delta = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Pela convergência $f_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, dado $x \in \Omega'$, para quase todo $r \in [0, \delta)$ temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(x)} f_n(y) dy = \mu(B_r(x)). \tag{6.18}$$

Pelo teorema 2.1, $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, onde u é solução de (6.10), logo passando a uma subsequência, se necessário, supomos que $u_n \rightarrow u$ qtp em Ω' . Então para tais pontos em Ω' pelas equações (6.17) e (6.18) e pelo Lema de Fatou segue que

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{B_r(x) \cap \Omega} f_n(y) dy \right) \frac{1}{r} dr + C \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \left(\int_{B_r(x) \cap \Omega} f_n(y) dy \right) \frac{1}{r} dr + C \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \frac{\mu(B_r(x))}{r} dr + C \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\mu(B_r(x) \cap \Omega)}{r} dr + C. \end{aligned}$$

Como $f_n = \rho_n * \mu \geq 0$ em Ω é justificável a aplicação do Lema de Fatou. Além disso, lembramos que

$$\|\rho_n * \mu\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\rho_n\|_{L^1(\Omega)} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)},$$

a constante pode ser tomada dependendo apenas de $\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$, Ω' e Ω . ■

Lema 6.10. *Sejam $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Caratheodóry satisfazendo*

- i) $g(x, u) = k(x)h(u)$;
- ii) h é não decrescente e $h(0) = 0$;
- ii) $k \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ e $k \geq m$ qtp em Ω para algum $m > 0$.

e u_n uma solução de

$$-\Delta u_n + g(x, u_n) = f_n \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

onde a sequência (f_n) é limitada em $L^p(\Omega)$ para algum $p > 1$. Então (u_n) é limitada em $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$.

Demonstração. Seja $\Omega' \Subset \Omega$. Pelo lema 2.44, $u_n \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$. Pelo corolário 2.45, $g(x, u_n) \in L^p(\Omega')$ e existe $C > 0$ independente de n tal que

$$\|g(x, u_n)\|_{L^p(\Omega')} \leq C(\|u_n\|_{L^p(\Omega)} + \|f_n\|_{L^p(\Omega)}). \quad (6.19)$$

Agora, dado $\omega \Subset \Omega'$, ao aplicar o teorema 8.17 de [26] e usar (6.19) obtemos $C = C(\omega, \Omega', \Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^\infty(\omega)} &\leq C(\|u_n\|_{L^p(\Omega)} + \|g(x, u_n)\|_{L^p(\Omega')} + \|f_n\|_{L^p(\Omega)}) \\ &\leq C(\|u_n\|_{L^p(\Omega)} + \|f_n\|_{L^p(\Omega)}). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Por outro lado, pelo corolário 2.39 existe $C > 0$ independente de n satisfazendo

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C. \quad (6.21)$$

Portanto, reunindo (6.20) e (6.21) obtemos que

$$\|u_n\|_{L^\infty(\omega)} \leq C,$$

onde C independente de n . ■

6.3 Prova do Teorema Principal

6.3.1 Caso $\mu(\{x\}), \nu(\{x\}) < 4\pi$ para todo $x \in \Omega$.

A fim de facilitar a visualização das etapas que nos conduz à demonstração, particionamo-a. Conforme mencionado na introdução, a hipótese $\mu(\{x\}), \nu(\{x\}) < 4\pi$ é vital no lema a seguir.

Lema 6.11. *Se $a_i, b_i < 4\pi$ com $a_i > 0$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Então, dado $M > 0$ existem $s > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $u_n(x) \geq M$ qtp em $B_s(p_i)$ para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração. Provemos, inicialmente, que se w_n é solução de

$$\begin{cases} -\Delta w_n = \mu_n & \text{em } \Omega \\ w_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.22)$$

então (w_n) no lugar de (u_n) satisfaz as conclusões do lema. Sejam $B_r(p_i) \Subset \Omega$ e $M > 0$. Pelo lema 6.9 obtemos $C = C(B_r(p_i), \|\mu_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)}, \Omega) < 0$ satisfazendo

$$w_n(x) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\mu_n(B_r(x) \cap \Omega)}{r} dr + C \quad (6.23)$$

para quase todo $x \in B_r(p_i)$. Como (μ_n) é limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$ podemos supor que a constante independe de n . Pela divergência da integral de $1/r$ no intervalo $[0, \rho_0(p_i)]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_\delta^{\rho_0(p_i)} \frac{1}{r} dr \geq \frac{4\pi}{a_i} (M - C). \quad (6.24)$$

Seja $s < \min\{r, \delta/2\}$. Da convergência $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, segue, ao usar o teorema 1 da Seção 1.9 de [24], que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\inf_{n \geq n_0} \mu_n(B_s(p_i)) \geq \mu(B_s(p_i)) - \frac{a_i}{2} = \bar{\mu}(B_s(p_i)) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \delta_{p_j}(B_s(p_i)) - \frac{a_i}{2} \geq \frac{a_i}{2} \quad (6.25)$$

para $n \geq n_0$. Como $B_s(p_i) \subset B_\xi(x)$ para todo $x \in B_s(p_i)$ e $\xi \geq \delta$ temos por (6.23) - (6.25) que

$$\begin{aligned} w_n(x) &\geq \frac{1}{2\pi} \int_\delta^1 \frac{\mu_n(B_r(x) \cap \Omega)}{r} dr + C \geq \frac{1}{2\pi} \int_\delta^{\rho_0(p_i)} \frac{\mu_n(B_s(p_i))}{r} dr + C \\ &\geq \frac{a_i}{4\pi} \int_\delta^{\rho_0(p_i)} \frac{1}{r} dr + C \geq M \end{aligned} \quad (6.26)$$

para qtp em $B_s(p_i)$ e todo $n \geq n_0$. Por fim, dado $\alpha < \min\{1, (4\pi - b_i)/a_i\}$, seja \bar{u}_n a solução de

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u}_n + e^{v_n}(e^{\bar{u}_n} - 1) = \alpha \mu_n & \text{em } \Omega \\ \bar{u}_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Pela escolha de α , $(\alpha\mu + \nu)(p_i) < 4\pi$, como $\alpha\mu + \nu$ é uma medida de Radon existe $r > 0$ tal que $(\alpha\mu + \nu)(B_r(p_i)) < 4\pi$. Além disso, como $\alpha\mu_n + \nu_n \xrightarrow{*} \alpha\mu + \nu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$ satisfazendo

$$\sup_{n \geq n_1} (\alpha\mu_n + \nu_n)(B_r(p_i)) \leq 4\pi - \epsilon.$$

Portanto pelo corolário 2.46, $e^{v_n}(e^{\bar{u}_n} - 1) \in L^p(B_{r/2}(p_i))$ para algum $p > 1$ e existe $C > 0$ independente de n tal que

$$\|e^{v_n}(e^{\bar{u}_n} - 1)\|_{L^p(B_{r/2}(p_i))} \leq C.$$

Assim, se \bar{w}_n é solução de

$$\begin{cases} -\Delta \bar{w}_n = e^{v_n}(e^{\bar{u}_n} - 1) & \text{em } \Omega \\ \bar{w}_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

do lema 6.10 segue que $(\bar{w}_n)_{n \geq n_1}$ é limitada em $B_{r/3}(p_i)$ por uma constante, digamos, c . Dada a solução w_n de (6.22), com $\alpha\mu_n$ no lugar de μ_n , temos que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ e $s > 0$ tais que se $n_2 \geq n_1$, $s < r/3$ e

$$w_n \geq M + c \quad \text{qtp em } B_s(p_i).$$

Pela unicidade do teorema 2.1, $\bar{u}_n = w_n - \bar{w}_n$ e pela proposição 2.5, $\bar{u}_n \leq u_n$ qtp em Ω para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$u_n \geq \bar{u}_n = w_n - \bar{w}_n \geq w_n - c \geq M \quad \text{qtp em } B_s(p_i)$$

se $n \geq n_2$. ■

Lema 6.12. *Se $0 < a_i$ e $a_i, b_i < 4\pi$ para algum $i \in \mathbb{N}$ então $c_i \geq d_i$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, sejam $s > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ como no lema 6.11 a fim de que $u_n(x) \geq \log 1/\epsilon$ para quase todo $x \in B_s(p_i)$ e $n \geq n_0$. Logo $0 \leq e^{v_n} \leq \epsilon e^{u_n + v_n}$ e, então,

$$(1 - \epsilon)e^{u_n + v_n} \leq e^{u_n + v_n} - e^{v_n} \leq e^{u_n + v_n} \quad \text{qtp em } B_r(p_i). \quad (6.27)$$

Além disso, diminuimos s de forma que se $\rho < s$ então

$$\int_{B_\rho(p_i)} e^v(e^u - 1)dx < \epsilon, \quad (6.28)$$

pelo teorema 1 da Seção 1.9 de [24] temos que

$$d_i \leq d_i + \int_{B_\rho(p_i)} e^u (e^v - 1) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_\rho(p_i)} e^{u_n} (e^{v_n} - 1) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_\rho(p_i)} e^{v_n + u_n} dx. \quad (6.29)$$

Por outro lado, por (6.27), (6.28) e novamente pelo teorema que acabamos de citar,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\overline{B}_\rho(p_i)} e^{v_n + u_n} dx \leq \frac{1}{1 - \epsilon} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\overline{B}_\rho(p_i)} e^{v_n} (e^{u_n} - 1) dx \leq \frac{c_i}{1 - \epsilon} + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}. \quad (6.30)$$

Finalmente, ao reunir (6.29) e (6.30) segue que

$$d_i \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_\rho(p_i)} e^{v_n + u_n} dx \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\overline{B}_\rho(p_i)} e^{v_n + u_n} dx \leq \frac{c_i}{1 - \epsilon} + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}.$$

Sendo $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $d_i \leq c_i$. ■

Corolário 6.13. *Se $0 < a_i, b_i < 4\pi$ para algum $i \in \mathbb{N}$, então $c_i = d_i$.*

Mais uma vez enfatizamos a independência do resultado a seguir em relação a quaisquer limitações superiores de a_i e b_i .

Lema 6.14. *Se $a_i + b_i \geq 4\pi$ para algum $i \in \mathbb{N}$ então $a_i^\# + b_i^\# = 4\pi$.*

Demonstração. Pelo teorema 6.1, $a_i^\# + b_i^\# \leq 4\pi$. Fixado $n \in \mathbb{N}$ temos que $e^{v_n} (e^{u_n} - 1) \leq e^{u_n + v_n}$ e $e^{v_n} (e^{u_n} - 1) \leq e^{u_n + v_n}$. Logo

$$\begin{aligned} -\Delta u_n + e^{v_n + u_n} &\geq -\Delta u_n + e^{v_n} (e^{u_n} - 1) = \mu_n \\ -\Delta v_n + e^{v_n + u_n} &\geq -\Delta v_n + e^{u_n} (e^{v_n} - 1) = \nu_n. \end{aligned}$$

Portanto, somando as equações acima segue que

$$\begin{cases} -\Delta(u_n + v_n) + 2(e^{u_n + v_n} - 1) \geq \mu_n + \nu_n - 2 & \text{em } \Omega \\ u_n + v_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Por outro lado, tomando $\alpha < 4\pi/(a_i + b_i)$ existem $r > 0$, $\epsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $\|\alpha(\mu_n + \nu_n) - 2\|_{\mathcal{M}(B_r(p_i))} \leq 4\pi - \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Sabemos pelo teorema 2.17 que as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta w_n + 2(e^{w_n} - 1) = \alpha(\mu_n + \nu_n) - 2 & \text{em } B_r(p_i) \\ w_n = 0 & \text{sobre } \partial B_r(p_i) \end{cases}$$

convergem em $L^1(B_r(p_i))$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta w + 2(e^w - 1) = \alpha(\mu + \nu) - 2 & \text{em } B_r(p_i) \\ w = 0 & \text{sobre } \partial B_r(p_i) \end{cases}.$$

Pela proposição 2.5, $w_n \leq u_n + v_n$ qtp em $B_r(p_i)$. Portanto, $w \leq u + v$ qtp em $B_r(p_i)$ e, aplicando a proposição 4.19, obtemos que

$$\alpha(a_i + b_i) = (-\Delta w)_c(\{p_i\}) \leq (-\Delta(u + v))_c(\{p_i\}) = a_i^\# + b_i^\#.$$

Sendo $\alpha < 4\pi/(a_i + b_i)$ arbitrário, concluímos que $a_i^\# + b_i^\# \geq 4\pi$. ■

Lema 6.15. *Sejam $a_i, b_i < 4\pi$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$ tais que $a_i + b_i \geq 4\pi$, então*

$$a_i^\# = 2\pi + \frac{a_i - b_i}{2} \quad e \quad b_i^\# = 2\pi + \frac{b_i - a_i}{2}.$$

Demonstração. Se tivéssemos $a_i = 0$ para algum $i \in \mathbb{N}$ teríamos que $a_i + b_i < 4\pi$, o contradiz uma das hipóteses. Portanto, $a_i, b_i > 0$. Logo pelo corolário 6.13, $c_i = d_i = d$. Assim, pela proposição 6.14 obtemos que

$$a_i + b_i - 2d = a_i^\# + b_i^\# = 4\pi,$$

consequentemente, $d = (a_i + b_i)/2 - 2\pi$. ■

Final da demonstração do teorema 6.2. Se $a_i + b_i < 4\pi$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$ então $a_i < 2\pi + (a_i - b_i)/2$ e $b_i < 2\pi + (b_i - a_i)/2$, logo

$$a_i^\# = a_i = \min \left\{ a_i, 2\pi + \frac{a_i - b_i}{2} \right\} \quad e \quad b_i^\# = b_i = \min \left\{ b_i, 2\pi + \frac{b_i - a_i}{2} \right\}.$$

Se $a_i + b_i \geq 4\pi$ temos que $a_i \geq 2\pi + (a_i - b_i)/2$ e $b_i \geq 2\pi + (b_i - a_i)/2$. Assim, basta aplicar o lema 6.15 para obter a expressão da pelo teorema 6.2 para $a_i^\# = \mu^\#(\{p_i\})$ e $b_i^\# = \nu^\#(\{p_i\})$. ■

6.3.2 Caso Geral

Na segunda demonstração do teorema 6.2, por uma fonte distinta concluímos que $c_i = d_i$. Ao contrário da primeira prova, aqui permitimos que as medidas μ e ν assumam o valor 4π em conjuntos unitários. A partir dessa igualdade, repete-se o argumento final da subseção anterior para obter as expressões para $\mu^\#$ e $\nu^\#$.

Proposição 6.16. *Se $a_i, b_i \leq 4\pi$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$ então $c_i = d_i$.*

Demonstração. Sejam τ_1 e τ_2 como na proposição 6.8, ou seja,

$$\begin{aligned} e^{v_{n_k}}(e^{u_{n_k}} - 1) &\stackrel{*}{\rightarrow} e^v(e^u - 1) + \tau_1 \\ e^{u_{n_k}}(e^{v_{n_k}} - 1) &\stackrel{*}{\rightarrow} e^u(e^v - 1) + \tau_2 \end{aligned} \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega). \quad (6.31)$$

Pelo teorema 2.23, $v_{n_k} \geq 0$ qtp em Ω , logo

$$-\Delta u_{n_k} + e^{v_{n_k}}(e^{u_{n_k}} - 1) \geq -\Delta u_{n_k} + e^{u_{n_k}} - 1 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Usando a proposição 2.5, temos que as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u}_{n_k} + e^{\bar{u}_{n_k}} - 1 = \mu_{n_k} & \text{em } \Omega \\ \bar{u}_{n_k} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

satisfazem $u_{n_k} \leq \bar{u}_{n_k}$ qtp em Ω . Pelo teorema 4.3 temos que \bar{u}_{n_k} converge em $L^1(\Omega)$ para a solução de

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} + e^{\bar{u}} - 1 = \mu^* & \text{em } \Omega \\ \bar{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Com um cálculo similar ao da demonstração da proposição 2.26, obtemos que

$$e^{\bar{u}_{n_k}} - 1 \stackrel{*}{\rightarrow} e^{\bar{u}} - 1 + \mu - \mu^* \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega).$$

Por outro lado, sendo $u_{n_k} \leq \bar{u}_{n_k}$ qtp em Ω e a sequência $(e^{\bar{u}_{n_k}})$ limitada pela proposição 2.6, a menos de subsequência, existe $\sigma_1 \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que

$$e^{u_{n_k}} \stackrel{*}{\rightarrow} e^u + \sigma_1 \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega). \quad (6.32)$$

Mas $0 \leq e^{u_{n_k}} \leq e^{\bar{u}_{n_k}}$ qtp em Ω , então

$$0 \leq e^u - 1 + \sigma_1 \leq e^{\bar{u}} - 1 + \mu - \mu^*.$$

Como $\mu(\{p_i\}) = a_i \leq 4\pi$, $\mu(\{p_i\}) = \mu^*(\{p_i\})$. Logo $\sigma_1(\{p_i\}) = 0$. Analogamente,

$$e^{v_{n_k}} \stackrel{*}{\rightarrow} e^v + \sigma_2 \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega), \quad (6.33)$$

com $\sigma_2(\{p_i\}) = 0$. Subtraindo as equações em (6.31),

$$e^{u_{n_k}} - e^{v_{n_k}} \stackrel{*}{\rightarrow} e^u - e^v + \tau_1 - \tau_2 \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega). \quad (6.34)$$

Portanto, por (6.32) - (6.33), $(\tau_1 - \tau_2)(\{p_i\}) = (\sigma_1 - \sigma_2)(\{p_i\})$. Como $\sigma_1(\{p_i\}) = \sigma_2(\{p_i\}) = 0$, segue que $c_i - d_i = \tau_1(\{p_i\}) - \tau_2(\{p_i\}) = 0$. \blacksquare

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. F. *Sobolev Spaces*, 2ª ed., vol. 140 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier Science Ltd., 2003.
- [2] ANCONA, A. Une propriété d'invariance des ensembles absorbants par perturbation d'un opérateur elliptique. *Communications in Partial Differential Equations*, 4 (1979), 321–337.
- [3] BARAS, P., AND PIERRE, M. Singularités éliminables pour des équations semi-linéaires. *Annales de l'Institut Fourier*, 34 (1984), 185–206.
- [4] BARTOLUCCI, D., FABIANA, L., ORSINA, L., AND PONCE, A. C. Semilinear equations with exponential nonlinearity and measure data. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 22 (2005), 799–815.
- [5] BÉNILAN, P., AND BREZIS, H. Nonlinear problems related to the Thomas-Fermi equation. *Journal of Evolution Equations*, 3 (2004), 673–770. Dedicado a Ph. Bénilan.
- [6] BÉNILAN, P., BREZIS, H., AND CRANDALL, M. G. A semilinear equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* 4, 2 (1975), 523–555.

- [7] BOCCARDO, L., AND GALLOUËT, T. Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data. *Journal of Functional Analysis*, 87 (1989), 149–169.
- [8] BOCCARDO, L., GALLOUËT, T., AND ORSINA, L. Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data. *Annales de l'Institut Henri Poincaré Analyse non linéaire*, 13 (1996), 539–551.
- [9] BREZIS, H. *Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson A., 1983.
- [10] BREZIS, H. Nonlinear elliptic equations involving measures. *In: Contributions to Nonlinear Partial Differential Equations* (1983), 82–89.
- [11] BREZIS, H. Semilinear equations in \mathbb{R}^n without conditions at infinity. *Applied Mathematics & Optimization* 12, I (1984), 271–282.
- [12] BREZIS, H. Existence and nonexistence of solutions for some nonlinear elliptic equations. *Journal d'Analyse Mathématique*, 73 (1997), 203–223.
- [13] BREZIS, H., AND BROWDER, F. E. Strongly nonlinear elliptic boundary value problems. *Annali Scuola Normale Superiore Pisa, Classe di Scienze*, 5 (1978), 587–603.
- [14] BREZIS, H., AND MERLE, F. Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions. *Communications in Partial Differential Equations*, 16 (1991), 1223–1253.
- [15] BREZIS, H., MOSHE, M., AND PONCE, A. C. Nonlinear elliptic equations with measures revisited. *Annals of Mathematics Studies*, 163 (2007), 55–110.
- [16] BREZIS, H., AND PONCE, A. C. Remarks on the strong maximum principle. *Differential Integral Equations*, 16 (2003), 1–12.
- [17] BREZIS, H., AND PONCE, A. C. Kato's inequality when $-\Delta u$ is a measure. *Comptes Rendus Mathématique*, 338 (2004), 599–604.
- [18] BREZIS, H., AND PONCE, A. C. Reduced measures on the boundary. *Journal of Functional Analysis*, 229 (2005), 95–120.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [19] BREZIS, H., AND PONCE, A. C. Kato's inequality up to the boundary. *Communications in Contemporary Mathematics*, 10 (2008), 1217–1241.
- [20] BREZIS, H., AND STRAUSS, W. Semilinear second-order elliptic equations in L^1 . *Journal of Mathematical Society of Japan*, 25 (1973), 565–590.
- [21] CHERN, J.-L., CHEN, Z.-Y., TANG, Y.-L. T., AND LIN, C.-S. Uniqueness and structure of solutions to the dirichlet problem for an elliptic system. *Journal of Differential Equations*, 246 (2009), 3704–3714.
- [22] DUPAIGNE, L., AND PONCE, A. C. Singularities of positive supersolutions in elliptic pdes. *Selecta Mathematica*, 10 (2004), 341–358.
- [23] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*, vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2000.
- [24] EVANS, L. C., AND GARIEPY, R. F. *Measure theory and fine proprieties of functions*. CRC Press, 1992.
- [25] FOLLAND, G. B. *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications*, 2^a ed. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [26] GILBARG, D., AND TRUDINGER, N. *Elliptic partial differential equations of second order*. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. Springer-Verlag, 1977.
- [27] HELMS, L. L. *Introduction to potential theory*. Pure & Applied Mathematics Monograph. John Wiley & Sons Inc, 1970.
- [28] KATO, T. Schrödinger operators with singular potentials. *Israel Journal of Mathematics*, 13 (1973), 135–148.
- [29] LIN, C.-S., PONCE, A. C., AND YANG, Y. A system of elliptic equations arising in Chern-Simons field theory. *Journal of Functional Analysis*, 247 (2007), 289–350.
- [30] MARCUS, M., AND PONCE, A. C. Reduced limits for nonlinear equations with measures. *Journal of Functional Analysis*, 258 (2010), 2316–2372.

- [31] MARCUS, M., AND VÉRON, L. The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: the subcritical case. *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, 144 (1998), 201–231.
- [32] MARCUS, M., AND VÉRON, L. The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: the supercritical case. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 77 (1998), 481–524.
- [33] MONTENEGRO, M., AND PONCE, A. C. The sub-supersolution method for weak solution. *Proceedings of American Mathematical Society*, 136 (2008), 2429–2438.
- [34] PONCE, A. C. EDP's elípticas envolvendo medidas. Notas de Curso.
- [35] PONCE, A. C. How to construct good measures. *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications* 63 (2005), 335–348.
- [36] STAMPACCHIA, G. *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*. Séminaires de Mathématiques Supérieures. Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1966.
- [37] VÁZQUEZ, J. L. On a semilinear equation in \mathbb{R}^2 involving bounded measures. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A*, 95 (1983), 181–202.
- [38] WILLEM, M. *Principes d'analyse fonctionnelle*. Nouvelle Bibliothèque Mathématique. Cassini, Paris, 2007.