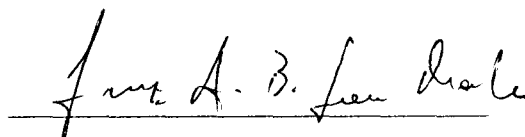


CONTROLABILIDADE E CONTROLABILIDADE LOCAL DE SISTEMAS DE CONTROLE

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Richard Manuel Mamani Troncoso e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 23 de novembro de 1995

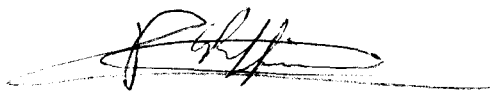


Prof. Dr. Luiz A. B. San Martin
Orientador

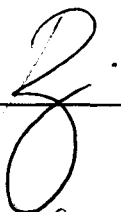
Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (UNICAMP), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

DEZEMBRO – 1995

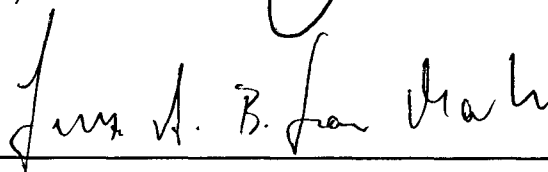
Tese de Mestrado defendida e aprovada em de de 199
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a).



Prof (a). Dr (a).



Prof (a). Dr (a).

À Estefania, Antonio e Edwing

Agradeço

- Ao Prof. Luiz San Martin pela orientação e pelo apoio constante.
- Ao Pedro J.C. pelo apoio moral.
- À UNICAMP pela oportunidade e fundamentalmente à CAPES pelo suporte financeiro.
- Ao Flávio e a Marlucia pela ajuda na digitação deste trabalho.
- Aos meus pais pela vontade em esperarme.

INTRODUÇÃO

A teoria geométrica do controle foi desenvolvida por, entre outros, H. J. Sussmann (c.f. [13], [14], [15]) e C. Lobry [5] que deram um tratamento geométrico a conceitos clássicos tais como o de controlabilidade, acessibilidade e controlabilidade local. Esses conceitos desempenham um papel central na teoria dos sistemas lineares, para os quais o critério de Kalman dá uma resposta simples para a sua ocorrência ou não. Segundo esse critério certos sistemas lineares (por exemplo, aqueles em que os coeficientes são independentes do tempo e os controles ilimitados), são ao mesmo tempo controláveis, acessíveis e localmente controláveis. O correspondente ao critério de Kalman para sistemas não lineares gerais, é a condição do posto da álgebra de Lie. Dessa forma, é natural perguntar sob quais condições a condição do posto (ou a acessibilidade) é equivalente à controlabilidade ou à controlabilidade local. Uma resposta a isso é dada em [14] para sistemas de controle invariantes em grupos de Lie, onde se mostra que a controlabilidade global é equivalente à acessibilidade no caso de grupos compactos. Um teorema de controlabilidade semelhante é apresentado em [5] para sistemas de controle definidos por campos de vetores que deixam invariante uma medida finita, e em particular para campos de vetores com divergência nula numa variedade Riemanniana compacta. A questão da controlabilidade local é tratada por exemplo em [16] onde se dá uma condição suficiente para que um sistema seja localmente controlável em tempo pequeno a partir de um ponto dado. Essa condição envolve necessariamente a acessibilidade do sistema.

O objetivo dessa dissertação é fazer uma exposição desses trabalhos, olhando condições nas quais se tem equivalência entre acessibilidade e controlabilidade ou controlabilidade local. Como será visto ao longo do desenvolvimento, a questão no caso de sistemas invariantes num grupo de Lie se reduz a saber sob que condições um certo subsemigrupo é um subgrupo de Lie. Para obter controlabilidade local em tempos pequenos, usa-se a condição de controlabilidade de Hermes, que é suficiente mas não necessária.

Esse trabalho é organizado como segue:

O capítulo 0 contém os resultados essenciais da teoria de integrabilidade de distribuições que fundamentalmente dizem que as órbitas de uma família de campos de vetores são subvariedades imersas quase-regulares. Esse resultado, devido a P. Stefan e H.J. Sussmann [9], [11], [15], permite que se considere as órbitas como espaço ambiente e assumir que o sistema é transitivo.

O capítulo I trata da questão da equivalência entre as propriedades de acessibilidade e controlabilidade para sistemas invariantes num grupo de Lie compacto. Além disso, se caracteriza a propriedade em termos de colchetes de Lie, no caso analítico (condição do posto da álgebra de Lie). Ao mesmo tempo se apresenta a relação entre as órbitas positivas e o conjunto dos pontos atingíveis assim como se introduz o conceito de controlabilidade aproximada, que está relacionado ao teorema de Lobry, que permite provar de maneira alternativa a controlabilidade num grupo compacto.

No capítulo II o objetivo é desenvolver o formalismo das séries exponenciais de Lie num conjunto finito de indeterminadas $\Sigma = \{X_0, \dots, X_m\}$ e fornecer uma representação do semigrupo de controle no grupo de ditas séries exponenciais. Por intermédio dessa representação, as séries exponenciais servem para descrever o comportamento assintótico, em tempos pequenos, das trajetórias dos sistemas de controle. Em outras palavras, as séries exponenciais fornecem “variações” dos controles. Essas variações serão utilizadas posteriormente no teorema de controlabilidade local.

O capítulo III é a parte central dessa dissertação pois é onde se formula a condição de controlabilidade local segundo Hermes, que envolve a condição do posto da álgebra de Lie assim como subespaços gerados por sucessivos colchetes de Lie dos campos de vetores. Se os subespaços gerados por colchetes que envolvem uma quantidade par de vezes o campo de vetores em que aparece o controle são neutralizados pelos subespaços gerados por tais colchetes em que os campos aparecem uma quantidade ímpar de vezes, então se tem controlabilidade local. Na demonstração desse fato se usa o formalismo desenvolvido no capítulo II para famílias do tipo $\Sigma = \{X_0, X_1\}$. Concretamente, o que se faz é estudar acessibilidade no grupo “de Lie” das séries exponenciais. Esse estudo é feito por aproximação dos grupos de Lie nilpotentes das séries formais truncadas. Acessibilidade nesses grupos de

Lie permite mostrar que a condição de Hermes é suficiente para a controlabilidade local em tempo pequeno. Como mencionado anteriormente, essa condição não é necessária. Para mostrar isso, é apresentado um exemplo no qual a condição de Hermes não é satisfeita e no entanto tem-se controlabilidade local. Se apresenta ainda como aplicação uma demonstração alternativa do teorema clássico que garante que se o sistema linearizado é controlável então o sistema, propriamente dito, é localmente controlável.

ÍNDICE

Introdução

Capítulo 0	1
0.1. Distribuições: Integrabilidade e alguns resultados fundamentais	1
0.2. Folheações	5
0.3. Órbitas de famílias de campos vetoriais	8
Capítulo I: Sistemas de Controle	15
1.1. Acessibilidade	15
1.2. Controlabilidade global	25
1.3. Controlabilidade aproximada	32
1.4. Projeção de um sistema invariante definido num grupo de Lie G no espaço onde ele atua	39
1.5. Sobre o levantamento de Sistemas	44
1.6. Condições necessárias e suficientes para controlabilidade de um sis- tema invariante num grupo de Lie	47
Capítulo II: Formalismo das Séries Exponenciais de Lie	60
2.1. Desenvolvimento exponencial e aproximação nilpotente	60
2.2. Controles normais	80
2.3. Propriedades assintóticas das series exponenciais de Lie	87
Capítulo III: Controlabilidade Local	95
3.1. Formulação de conjectura de Hermes	95
3.2. Sobre a recíproca de conjectura	114
Bibliografia	141

CAPÍTULO 0

Neste capítulo apresentamos os resultados preliminares à análise das propriedades de acessibilidade e controlabilidade. Essencialmente o teorema de Sussman-Stefan que permite olhar as variedades integrais de uma determinada distribuição como as folhas de uma folheação com singularidades, e reciprocamente para uma folheação com singularidades é possível encontrar uma distribuição tal que as folhas sejam suas variedades integrais.

O desenvolvimento é feito de uma maneira resumida, isto é, só enunciamos os resultados e definimos os conceitos necessários como os de distribuições, órbitas de famílias de campos de vetores, órbitas positivas. Posteriormente, no capítulo I, os conceitos de acessibilidade assim como controlabilidade serão introduzidos. A teoria das órbitas foi desenvolvida em analogia à de um campo local ou global. Assim, iniciamos com um comentário sobre esse exemplo.

0.1. Distribuições: Integrabilidade e alguns resultados fundamentais.

Neste parágrafo se introduz uma generalização de um campo vetorial, que é dada pela noção de distribuição que pode ser olhada como um campo de subespaços do espaço tangente em cada um de seus pontos.

Como integrar um campo é encontrar suas curvas integrais, analogamente quando se integra uma distribuição é encontrar em cada um de seus pontos o que se chama uma variedade integral.

Os objetos que formam parte deste conceito basicamente são

M : uma variedade diferenciável (Paracompacta).

$\chi(M)$: uma família de campos vetoriais.

$T_p M$: o espaço tangente em $p \in M$.

Definição 0.1.1. Uma distribuição definida em M , é uma aplicação que faz corresponder a cada ponto $p \in M$, um subespaço de $T_p M$.

Se denotamos por Δ a distribuição, então:

$$\begin{aligned}\Delta : M &\longrightarrow \varphi \\ p &\longrightarrow \Delta(p)\end{aligned}$$

onde $\varphi = \{E_p \subset T_p M : p \in M, E_p \text{ subespaço}\}$ e $\Delta(p) \subset T_p M$.

Observação. Não existe restrição quanto à $\dim \Delta(p)$. Ela pode variar de um a outro ponto e nesse caso a distribuição é dita singular.

Definição 0.1.2. Uma distribuição Δ se diz diferenciável ou C^∞ em p , se existem campos locais $X_0, \dots, X_k$ definidos nas vizinhanças de p tal que

- i) $\Delta(p) = \langle X_0(p), \dots, X_k(p) \rangle$
- ii) Os campos são tangentes a Δ (isto é $X(m) \in \Delta(m)$, para cada $m \in \text{dom } X$).

Δ é diferenciável ou C^∞ se o for em todos seus pontos.

Exemplo 0.1.3. (1) Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ globalmente definido e pomos $\varphi = \{\langle X(m) \rangle \subseteq T_m M : m \in M\}$, então $\Delta(p) = \{\lambda X(p) : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq T_p M$ define uma distribuição C^∞
(2) $M = \mathbb{R}^2$

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} \{(u, v) \in T_{(x,y)} \mathbb{R}^2 : v = 0\} & \text{no I, III, IV quadrantes.} \\ T_{(x,y)} \mathbb{R}^2, & \text{no II quadrante menos na fronteira.} \end{cases}$$

(3) Em $\mathbb{R}^3$ define-se

$$\Delta((x, y, z)) = \{(u, v, w) \in T_{(x,y,z)} \mathbb{R}^3 : w = 0\}.$$

Na realidade ela define uma folheação como será visto adiante. Os campos $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ definem o referencial canônico em $T_{(x,y,z)} \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$

$$\Delta((x, y, z)) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial}{\partial y}(x, y, z) \right\rangle.$$

Voltando ao exemplo 0.1.3 (1) para o campo X , existe o fluxo local $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \longrightarrow M$, que satisfaz:

- i) $\phi(0, p) = p$, para cada $p \in V$

ii) $\frac{d}{dt}\phi(t, p) = X(\phi(t, p)).$

Convencionamos em por $\phi(t, \cdot) = X_t$ e a cada fluxo ϕ , associamos a família de difeomorfismos $(X_t)_t$. Denotemos por G_X o grupo local a 1-parâmetro. Na realidade não é grupo, pois nem sempre é definido a composta de dois de seus elementos. Também pode-se observar que $M = \bigcup_{\phi \in G_X} \text{dom} \phi$ pois X é global, isto induz a pensar numa relação de equivalência definida em M .

$$p \sim q \text{ se e somente se existe } g \in G_X \text{ tal que } y = g(x)$$

Cada classe de equivalência é chamada órbita. Assim,

$$G_X(p) = \{g(p) : g \in G_X\}$$

denota a órbita por p .

A distribuição no exemplo 0.1.3 (1), geometricamente é definida como a reta tangente à curva integral de X , que passa por p num tempo $t = 0$, assim obtém-se duas propriedades

i) $\Delta(p) = T_p G_X(p)$

ii) $G_X(p)$ é uma subvariedade conexa de dimensão 1.

As propriedades i) e ii) são as que tomamos como um modelo para generalizar o conceito de curva integral ao de variedade integral.

Definição 0.1.4. Uma subvariedade $N \subset M$ é dita variedade integral da distribuição Δ se

i) $\Delta(p) = T_p N$, para cada $p \in N$

ii) N é conexa

N é dita variedade integral maximal se satisfaz i) e ii) e além do mais é máxima no sentido da inclusão.

Como uma motivação para integrabilidade de distribuições temos na integrabilidade de um campo, pois segundo teoremas de existência e unicidade em E.D.O., para cada $p \in \text{dom } X$, (global ou local) existe uma única curva integral maximal que passa por p . É nesse sentido que dizemos que a distribuição associada a X é integrável.

Definição 0.1.5. Uma distribuição Δ é dita integrável ou que tem a propriedade de variedades integrais, se por cada $p \in M$, passa uma variedade integral.

As distribuições definidas nos itens (1), (2) e (3) do exemplo 0.1.3 são integráveis. Também convém definir uma propriedade que é satisfeita pela distribuição definida no exemplo em menção, esta é

$$(dX_t)_p(\Delta(p)) \subseteq \Delta(X_t(p))$$

e segue-se $(dX_t)_p(\Delta(p)) = \Delta(X_t(p))$ (tomar $-t$ na inclusão acima)

Com efeito, $w \in (dX_t)_p(\Delta(p))$, então $w = (dX_t)_p(\lambda X(p)) = \lambda X(X_t(p))$. Por tanto

$$(dX_t)_p(\Delta(p)) \subseteq \Delta(X_t(p)).$$

Pode-se dizer que X preserva a distribuição de tal exemplo.

Definição 0.1.6. (1) Um campo de vetores definido localmente em U é dito que preserva a distribuição Δ se

$$(dX_t)_p(\Delta(p)) \subseteq \Delta(X_t(p)), \text{ para cada } p \in U, \text{ cada } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } X_t(p) \text{ é definida.}$$

(2) Um campo X é dito característico se preserva a distribuição e é tangente a ela no $\text{dom } X$.

(3) Uma distribuição Δ é dita característica em p ou invariante por difeomorfismos, se existem campos característicos $X^1, \dots, X^k$ definidos nas vizinhanças de p , tal que $\Delta(p) = \langle X^1(p), \dots, X^k(p) \rangle$. Δ é característica se for em todo $p \in M$.

Uma questão interessante é decidir quando que uma distribuição é integrável ou dar alguma caracterização de integrabilidade, pois a integrabilidade assegura uma decomposição na variedade M , o qual como será olhado forma uma folheação.

Teorema 0.1.7. Uma distribuição Δ é integrável se e somente se é característica.

Prova. Veja [9], [11] e [15].

Observação. Para olhar a integrabilidade da distribuição Δ , o teorema precedente sugere que a distribuição seja diferenciável e essencialmente satisfaça (1) da definição 0.1.6 para os campos locais que garantem a diferenciabilidade da distribuição. Isto reduz-se a integrar campos o que nem sempre é possível, pois em geral a existência e unicidade do fluxo é assegurada, mas não a forma como ele são encontrados.

A idéia é caracterizar em termos de configurações de colchetes de Lie como por exemplo no teorema de Frobenius.

Em analogia com as curvas integrais maximais de um campo de vetores, existe o seguinte teorema para distribuições.

Teorema 0.1.8. Seja Δ uma distribuição característica e $p \in M$, então existe uma única variedade integral maximal $N(p)$ de Δ que passa por p .

Prova. Veja [9], [11] e [15].

Observação. O teorema precedente permite decompor a variedade M em variedades integrais maximais. A relação de equivalência correspondente, é $x \sim y$ se e somente se $N(x) = N(y)$.

No exemplo inicial, as curvas integrais maximais formam uma decomposição de M em órbitas que servem de modelo para generalizar o conceito de órbita de uma família de campos de vetores.

0.2 Folheações.

Se introduz este conceito, pois no seguinte parágrafo se estudará as órbitas de famílias de campos de vetores, que generalizam o exemplo 0.1.3 (1). O estudo da diferenciabilidade da relação de equivalência correspondente motiva a introdução do conceito de folheação.

Definição 0.2.1. Um subconjunto $L \subseteq M$ é dito uma k -folha de M , se existe uma estrutura diferenciável σ sobre L tal que:

- i) (L, σ) é uma subvariedade conexa imersa k -dimensional de M .
- ii) Se N é um espaço topológico localmente conexo e $f : N \longrightarrow M$ uma função contínua tal que $f(N) \subseteq L$, então $f : N \longrightarrow (L, \sigma)$ é contínua.

Implicitamente a definição acima contém a definição de subvariedade quasi-regular.

Definição 0.2.2. Uma subvariedade imersa (L, σ) de M é dita quasi-regular se satisfaz a condição (ii) na Definição 0.2.1.

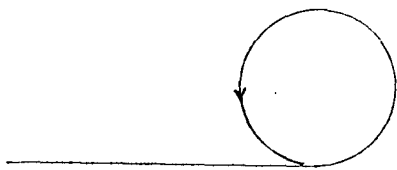
Observação. Nem toda subvariedade conexa é quasi-regular

Exemplo 0.2.2. Seja $\varphi : (-\infty, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ a imersão definida por

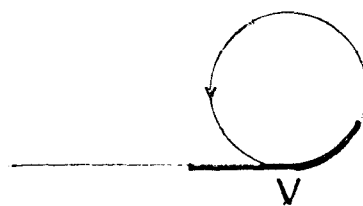
$$\varphi(t) = \begin{cases} (t + \frac{\pi}{2}, -1), & -\infty < t \leq -\frac{\pi}{2} \\ (\cos t, \sin t), & -\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

O par (L, φ) define uma subvariedade imersa, conexa que não é quase regular (veja figura (a)). De fato, para $N = (-\varepsilon - \frac{\pi}{2}, \varepsilon - \frac{\pi}{2})$ definamos a aplicação contínua $\psi : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $\psi(t) = (\cos t, \sin t)$.

Mas $\psi : N \rightarrow (L, \varphi)$ não é contínua. Pois se tomamos o aberto V (na figura (b)) obtemos que $\psi^{-1}(V) = [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \delta) \subset N$ não é aberto em N e portanto segue a conclusão.



(a)



(b)

Mas toda subvariedade mergulhada e quasi-regular

Definição 0.2.3. Uma folheação diferenciável (com singularidades) é uma relação de equivalência “ $\sim$ ” em M que satisfaz

- i) As classes de equivalência são subvariedades imersas conexas de M . Denotemos por $C(p)$ a classe de p .
- ii) Para cada $p \in M$, existe um aberto $U \ni p$ e uma carta coordenada $\varphi : V \times W \rightarrow U$ onde V e W são abertos centrados na origem de $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^{n-k}$ respectivamente, satisfazendo as seguintes propriedades.
 - a) $\dim C(p) = k$
 - b) $\varphi(0, 0) = p$
 - c) para cada $(v, w) \in V \times W$, $\varphi(v, w) \simeq \varphi(0, w)$
 - d) A aplicação $\varphi_0 : V \rightarrow C(p)$ definida por

$$v \rightarrow \varphi(v, 0)$$

é um difeomorfismo de V sobre um aberto de $C(p)$

e) para cada $w \in W, \varphi_w : V \longrightarrow C(p)$ definida por

$$v \longrightarrow \varphi(v, w) \in C(\varphi(0, w))$$

é diferenciável em relação à estrutura intrínseca de $C(\varphi(0, w))$.

Exemplo 0.2.4. (1) Em $M = \mathbb{R}^3$ define-se folhas por

$$C(0, 0, z_0) = \{(x, y, z_0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$$

(2) As órbitas no exemplo 0.1.3 (1)

(3) Uma folheação com singularidades é dada no exemplo 2 se o campo X tiver singularidades.

(4) As órbitas de uma família de campos de vetores definem uma folheação como será visto no parágrafo seguinte.

Proposição 0.2.5. Dada uma folheação em M , então as folhas são subvariedades quasi-regulares.

Prova. Veja [11] e [15].

Como caso particular tem-se que as órbitas de uma família de campos de vetores são quasi-regulares como será assinalado. Além do mais a cada distribuição característica se associa uma folheação.

Proposição 0.2.6. Dado uma distribuição Δ característica, então as variedades integrais maximais formam uma folheação.

Prova. Veja [11] e [15].

Cada folha $C(p)$ é vista como um subconjunto de M . No entanto em alguns casos é necessário considerar a diferenciabilidade em relação à estrutura intrínseca de $C(p)$, por exemplo, no caso de órbitas definidas por campos invariantes num grupo de Lie G , onde $G_\Sigma(1)$ é um subgrupo de Lie. O seguinte lema garante a diferenciabilidade em relação à estrutura intrínseca da subvariedade.

Lema 0.2.7. Seja L uma subvariedade quasi-regular de M . Se $\psi : N \longrightarrow M$ é diferenciável com $\psi(N) \subseteq L$, N uma variedade, então $\psi : N \longrightarrow L$ é diferenciável na estrutura intrínseca de L .

Prova. Veja [11] e [15].

Também tem-se o problema recíproco, isto é, se fosse possível folhear uma variedade, quão longe estão as folhas de serem variedades integrais de alguma distribuição?

Teorema 0.2.8. Dado uma folheação “ $\sim$ ”, então as folhas são variedades integrais de uma única distribuição característica.

Prova. Veja [11] e [15].

Ressaltamos esses resultados, pois serão aplicados às órbitas de uma família de campos de vetores.

Observação. As órbitas de um campo de vetores formam uma folheação, como decorre da proposição 0.2.6 aplicada às curvas integrais.

Se o campo tiver uma singularidade p , então $\{p\}$ é a variedade integral 0-dimensional, e temos que a folheação tem singularidade, onde por singularidade entende-se a não homogeneidade nas dimensões das folhas.

0.3 Órbitas de Famílias de Campos Vetoriais.

Ao invés das órbitas de um único campo vetorial X , consideramos aqui uma família Σ de campos vetoriais. A família Σ pode ser formada por campos locais ou globais. No caso local assume-se a condição $\bigcup_{X \in \Sigma} \text{dom } X = M$, para assim poder gerar uma distribuição ao longo de toda variedade.

Seja $(X^1, \dots, X^k) \subseteq \Sigma$ uma sub-família, denotemos $\xi = (X^1, \dots, X^k)$ e $T = (t_1, \dots, t_k)$, então é possível definir um difeomorfismo local

$$\xi_T = X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_k}^k, \quad \xi_T(p) = X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\dots X_{t_k}^k(p) \dots))$$

onde se assume que a composta dos $X_{t_i}^i$ faz sentido. Nesse caso $\xi_T(p)$ é definido para cada (T, p) num aberto de $\mathbb{R}^k \times M$, ou seja pode-se olhar ξ como uma aplicação

$$\xi : U \subset \mathbb{R}^k \times M \longrightarrow M.$$

Denotando por G_X o grupo dos difeomorfismos locais gerado por $X_t, X \in \Sigma$, tem-se

$$G_\Sigma = \left\langle \bigcup_{X \in \Sigma} G_X \right\rangle = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_k}^k : X^i \in \Sigma, t_i \in \mathbb{R}\}.$$

Na realidade G_Σ não é em geral um grupo, pois “o” nem sempre é definida. Os elementos de G_Σ são da forma ξ_T , para algum $\xi = (X^1, \dots, X^k) \subseteq \Sigma, T \in \mathbb{R}^k$. Com essa notação o produto em G_Σ é dado da seguinte maneira.

Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, então $\alpha \cdot \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n)$ denota o produto dos multi-índice e $\hat{\alpha} = (\alpha_m, \dots, \alpha_1)$. Assim,

$$\xi_T \cdot \eta_{T'} = (\xi \eta)_{TT'} \quad \text{e} \quad (\xi_T)^{-1} = \hat{\xi}_{-T}$$

denota a operação de G_Σ .

A partir de Σ se define em M uma relação de equivalência “ $\sim$ ”. Para que ela esteja bem definida deve-se supor $\bigcup_{\phi \in G_\Sigma} \text{dom } \phi = M$, o que decorre de supor $\bigcup_{X \in \Sigma} \text{dom } X = M$. A relação é

$$p \sim q \text{ se e somente se existe } \phi \in G_\Sigma \text{ tal que } q = \phi(p).$$

Assim, temos uma decomposição de M em classes de equivalências chamadas órbitas da família Σ de campos de vetores. A órbita por p é dada por

$$G_\Sigma(p) = \{X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\dots X_{t_k}^k(p) \dots)) : X^i \in \Sigma, t_i \in \mathbb{R}\}.$$

Para olhar a diferenciabilidade de “ $\sim$ ”, temos que encontrar uma distribuição Δ , tal que as órbitas sejam as variedades integrais maximais de Δ . O teorema de Sussman responde positivamente isto.

Por enquanto, seja $p \in M, \xi = (X^1, \dots, X^k) \subseteq \Sigma$ e denote por $\Omega_{\xi,p} = \{T \in \mathbb{R}^k : \xi_T(p) \text{ esteja definido}\} \subseteq \mathbb{R}^k$, pode-se ver que $0 \in \Omega_{\xi,p}$. Definamos a função

$$\begin{aligned} \rho_{\xi;p} : \Omega_{\xi,p} \subseteq \mathbb{R}^k &\longrightarrow M \\ T &\longrightarrow \xi_T(p) = X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\dots X_{t_k}^k(p) \dots)). \end{aligned}$$

Isto permitirá tornar $G_\Sigma(p)$ num espaço topológico com a topologia forte que é a topologia $\mathcal{T}_p$ em que os $\rho_{\xi,p}$ são contínuas. Com essa topologia as órbitas são conexas desde que os $\Omega_{\xi,p}$ sejam conexos, o que é possível tomando $\Omega_{\xi,p}$ suficientemente pequeno.

É claro que

$$G_{\Sigma}(p) = \bigcup_{\xi, T} \rho_{\xi, p}(\Omega_{\xi, p}), \quad (\text{definição de órbitas}).$$

Acontece que a topologia $\mathcal{T}_p$ para $G_{\Sigma}(p)$ pode depender de pontos p . Se mostra que não depende. Seja $p \sim q$, então $G_{\Sigma}(p) = G_{\Sigma}(q)$ e é suficiente mostrar que $i : (G_{\Sigma}(p), \mathcal{T}_p) \longrightarrow (G_{\Sigma}(q), \mathcal{T}_q)$ é contínua. Ele decorre da definição $\mathcal{T}_p, \mathcal{T}_q$ (veja [15]).

Seja Σ uma família de campos. Então associamos outra família de campos

$$\tilde{\Sigma} = \{(dg)_{\star} \circ X \circ g^{-1} : g \in G_{\Sigma}, X \in \Sigma\},$$

assim $Z \in \tilde{\Sigma}$ se e somente se $Z = (dg)_{\star} \circ X \circ g^{-1}, g \in G_{\Sigma}, X \in \Sigma$. O fluxo desse elemento é dado por:

$$Z_t(p) = g(X_t(g^{-1}(p))).$$

com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_t(p) &= (dg)_{X_t(g^{-1}(p))} \left(\frac{d}{dt} X_t(g^{-1}(p)) \right) = (dg)_{X_t(g^{-1}(p))} (X(X_t(g^{-1}(p)))) \\ &= (dg)_{\star} X g^{-1}.g(X_t(g^{-1}(p))) = Z(Z_t(p)). \end{aligned}$$

Agora, com $\tilde{\Sigma}$ geramos a distribuição

$$\Delta_{\Sigma}(p) = \text{ger}\{Z(p) \in T_p M : Z \in \tilde{\Sigma}, p \in \text{dom} Z\}.$$

É claro que $\Delta(p) \subseteq \Delta_{\Sigma}(p)$, onde Δ é a distribuição gerada por Σ , logo

$$G_{\tilde{\Sigma}}(p) \subseteq G_{\Sigma}(p)$$

Teorema 0.3.1. (Stefan-Sussman). Seja Σ uma família de campos locais definidos em M . Então

- i) As órbitas, são as variedades integrais maximais de Δ_{Σ}
- ii) A distribuição Δ_{Σ} é característica
- iii) A relação de equivalência que induzem as órbitas é uma folheação com singularidades

iv) As órbitas são subvariedades imersas quasi-regulares

Prova. i) e ii) é o teorema de Sussman (veja [9] e [15])

iii) segue-se da proposição 0.2.6 usando ii)

iv) segue-se de proposição 0.2.5 usando iii)

■

O estudo das órbitas $G_\Sigma(p)$ é o estudo da distribuição $p \longrightarrow \Delta_\Sigma(p)$ dada pelo teorema 0.3.1. Para calcular $\Delta_\Sigma(p)$, precisa-se conhecer os grupos a 1-parâmetro dos campos de Σ o qual se reduz a um problema de integrabilidade de campos. Como nem sempre é possível obter expressões para os fluxos dos campos, é conveniente expressar $\Delta_\Sigma(p)$ em termos de colchetes de Lie avaliados em p

Definição 0.3.2 Um espaço vetorial g sobre um corpo K é dito uma álgebra de Lie se existe uma função

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : g \times g &\longrightarrow g \\ (x, y) &\longrightarrow [x, y] \end{aligned}$$

para cada $x, y \in g$ tal que

i) $[\cdot, \cdot]$ é bilinear

ii) $[x, y] = -[y, x]$

iii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, cada $x, y, z \in G$

Exemplo 0.3.3 (1) $\chi(M)$ com a operação de colchete de Lie.

(2) Qualquer álgebra associativa g , induz uma álgebra de Lie com a operação $[x, y] = xy - yx$.

(3) $M(n)$, o conjunto das matrizes $n \times n$, antisimétricas com traço nulo

(4) Para um espaço vetorial V define-se uma álgebra de Lie abeliana $[x, y] = 0$ para cada $x, y \in V \dots$ etc.

Com a álgebra de Lie $AL(\Sigma)$ gerada por Σ , pode-se gerar uma distribuição Δ

$$p \longrightarrow AL(\Sigma)(p).$$

Deve-se observar que o cálculo de $AL(\Sigma)(p)$ envolve só calcular colchetes e avaliar em p e portanto envolve apenas derivadas de campos de vetores em p . Se $AL(\Sigma)(p) = \Delta_\Sigma(p)$ para cada $p \in M$, temos que o problema de integrar campos passa a um dual de derivar

campos. Por enquanto temos que $AL(\Sigma)(p) \subseteq \Delta_\Sigma(p)$ para cada $p \in M$. De fato, para os campos X e Y tangentes a Δ_Σ ,

$$[X, Y](p) = \left. \frac{d}{dt}(X_{-t})_*(Y(X_t(p))) \right|_{t=0}$$

e como Δ_Σ é característica, temos $(X_{-t})_*(Y(X_t(p))) \in \Delta_\Sigma(p)$. Mas $\Delta_\Sigma(p) \subseteq T_p M$ é fechado, portanto $[X, Y](p) \in \Delta_\Sigma(p)$, para cada $p \in M$. Portanto

$$AL(\Sigma)(p) \subseteq \Delta_\Sigma(p).$$

Uma condição para que $\Delta_\Sigma(p) = \Delta(p) = AL(\Sigma)(p)$ é

Proposição 0.3.4 $\Delta_\Sigma = \Delta$ se e somente se Δ é integrável.

Prova. Se $\Delta_\Sigma = \Delta$, então a integrabilidade de Δ_Σ implica a de Δ . Reciprocamente por ser Δ integrável e subdistribuição de Δ_Σ , as variedades integrais maximais de Δ estão contidas nas órbitas. Para a inclusão contrária, seja $p \in M$, então $G_\Sigma(p) \subseteq N(p)$ já que Σ é tangente à Δ . ■

Como a igualdade $AL(\Sigma)(p) = \Delta_\Sigma(p)$ se reduz a um problema de integrabilidade de $p \longrightarrow AL(\Sigma)(p)$, damos dois critérios para a integrabilidade dessa última distribuição.

Proposição 0.3.5. Suponha que os campos de Σ são globais em M e que $AL(\Sigma)$ é de dimensão finita (como espaço vetorial). Então $p \longrightarrow AL(\Sigma)(p)$ é integrável.

Prova. Veja [9].

Proposição 0.3.6. Suponha que os campos de Σ são analíticos e globalmente definidos, então $AL(\Sigma)(p) = \Delta_\Sigma(p)$.

Prova. Veja [9].

O conjunto

$$S_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_k}^k : X^i \in \Sigma, t_i \geq 0\}$$

é o semigrupo de difeomorfismo locais gerado por Σ . O que o diferencia de G_Σ é a não existência de inversas já que, em geral, $X_{-t} \notin S_\Sigma$.

Análogo ao caso de órbitas temos

$$S_{\Sigma}(p) = \{X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\cdots X_{t_k}^k(p)\cdots)) : X^i \in \Sigma, t_i \geq 0\}.$$

Este conjunto é básico no estudo do sistemas de controle e é denominado órbita positiva por p .

Também é conveniente introduzir a notação

$$\mathbf{S}_{\Sigma}(p, T) = \{X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\cdots X_{t_k}^k(p)\cdots)) : X^i \in \Sigma, \sum_{j=1}^k t_j \leq T, t_i > 0\}$$

como sendo o conjunto de pontos atingíveis num tempo menor ou igual a T . Paralelamente temos que

$$S_{\Sigma}(p, T) = \{X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\cdots X_{t_k}^k(p)\cdots)) : X^i \in \Sigma, \sum_{i=1}^k t_i = T, t_i > 0\}$$

denota o conjunto de pontos atingíveis num tempo exatamente igual a T . Por tanto, $y \in \mathbf{S}_{\Sigma}(p, T)$ se e só se $y = X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\cdots X_{t_k}^k(p)\cdots))$, para algum subconjunto $\xi = (X^1, \dots, X^k) \subseteq \Sigma, S = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k$ e $\|S\| \leq T$. Tal elemento no que segue é denotado por $y = \xi_S(p)$.

Observação. Pode-se caracterizar $S_{\Sigma}(p)$ em termos de curvas. $y \in S_{\Sigma}(p)$ se e somente se existe uma curva $\alpha : [0, T] \rightarrow M$, uma partição $a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k = b$ e campos $X^1, \dots, X^k$ em Σ satisfazendo $\alpha|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$ é uma curva integral de $X^i, i = 1, \dots, k$. Com efeito, se $y \in S_{\Sigma}(p)$ se e só se $y = X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\cdots X_{t_k}^k(p)\cdots)), t_i \geq 0$. Baseado nisto, definamos a curva

$$\alpha(t) = \begin{cases} X_t^k(p) & 0 \leq t \leq t_k \\ X_{t-t_k}^{k-1}(X_{t_k}^k(p)) & t_k < t \leq t_k + t_{k-1} \\ \vdots & \vdots \\ X_{t-(t_2+\cdots+t_k)}^1(X_{t_2}^2(\cdots X_{t_k}^k(p)\cdots)) & t_k + \cdots + t_2 < t \leq t_k + \cdots + t_1 \end{cases}$$

■

cujo ponto final é

$$y = \alpha(t_1 + \cdots + t_2).$$

Essa observação sugere a definição de curva integral de uma família Σ de campos vetoriais.

Definição 0.3.7. Se Σ é um subconjunto de $\chi(M)$, então uma curva integral de Σ é uma aplicação contínua α de um intervalo $[a, b]$ a valores em M tais que existem $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = b$, e elementos $X^1, \dots, X^k$ de Σ com a propriedade que $\alpha|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$ é uma curva integral de X^i , para cada $i = 1, 2, \dots, k$.

CAPÍTULO I

SISTEMAS DE CONTROLE

Neste capítulo estudaremos sistemas de controle definidos sobre uma variedade diferenciável, mais especificamente sobre um grupo de Lie ou um espaço homogêneo. O propósito fundamental é fazer notar o interesse em estudar sistemas de controle sobre um grupo de Lie G , pois um sistema definido em G pode ser levado num sistema definido numa variedade M , desde que encontremos alguma maneira de projetar o sistema em G num sistema definido em M .

Isto é, conhecendo critérios de acessibilidade, controlabilidade para sistemas definidos em G pode-se tirar conclusões sobre as mesmas propriedades em M , desde que os sistemas estejam relacionados de alguma forma, como ocorre com a ação de um grupo de Lie G sobre uma variedade M . Sendo que neste caso, tais propriedades são induzidas desde que a ação seja transitiva, isto é, se M é um espaço homogêneo de G .

Dessa forma, é natural pensar quando um sistema invariante num grupo de Lie G é controlável. Supondo acessibilidade como uma hipótese para obter controlabilidade, o problema se reduz a decidir quando acessibilidade implica em controlabilidade.

1.1. Acessibilidade.

No Capítulo 0 definimos as órbitas positivas e foi mencionado o interesse em se estudar o comportamento topológico de $S_{\Sigma}(x)$. Nesta seção, procuramos condições para que $\text{int } S_{\Sigma}(x)$ seja não vazio. Como será visto, a propriedade de acessibilidade pode em alguns casos ser caracterizada por relações entre colchetes de Lie, como por exemplo, no caso analítico. Para este estudo consideramos uma variedade paracompacta M , uma família de campos $\Sigma \subseteq \mathcal{X}(M)$, que chamaremos por sistema e uma distribuição Δ .

No caso em que Σ seja analítica, globalmente definida como será na maior parte dos casos, temos que

$$x \longrightarrow AL(\Sigma)(x) \tag{1}$$

define uma distribuição integrável, logo as órbitas $G_{\Sigma}(x)$ em cada ponto são as variedades integrais maximais da distribuição acima. Para ter compatibilidade no desenvolvimento,

se supõe que a distribuição definida em (1) é integrável independente do sistema ser analítico ou não.

Definição 1.1.1. Dado um sistema $\Sigma \subseteq \mathcal{X}(M)$. Se diz que ele tem a propriedade de acessibilidade em x se o $\text{int } S_\Sigma(x) \neq \emptyset$, na topologia de M . Ele é acessível se o for em todos os seus pontos.

Para o estudo de acessibilidade tem-se que o sistema pode ser analítico ou C^∞ . Mas aqui se estudará o caso analítico para obter uma caracterização em termos algébricos. Pois neste caso o problema se reduz a calcular $AL(\Sigma)$ e avaliar no ponto desejado e comparar com seu espaço tangente nesse ponto. Em poucas palavras tudo se resume a calcular derivadas de campos.

Proposição 1.1.2. Sejam $\Sigma \subseteq \mathcal{X}(M)$, $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ uma curva integral de Σ tal que $\alpha(t) = x$ para algum $t \in [a, b]$. Então $\alpha(s) \in G_\Sigma(x)$, para cada $s \in [a, b]$.

Prova. Como α é curva integral de Σ , existem $t_0 = a < t_1 < \dots < t_k = b$ e campos $X^1, \dots, X^k$ em Σ tal que $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é uma curva integral de X^i e como $t \in [t_{i-1}, t_i]$ para algum i , então $\alpha : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow M$ é uma curva integral de X^i com $\alpha(t) = x \in G_\Sigma(x)$. Daí que é suficiente provar para $\Sigma = \{X\}$, pois tomando extremos dos sub intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ e aplicando novamente o processo obtemos o resultado.

Para cada variedade integral maximal S define-se o conjunto

$$J(S) = \{s \in [a, b] : \alpha(s) \in S\}.$$

Se concluirmos que $J(S)$ é aberto e fechado, segue-se da conexidade que $J(S) = [a, b]$ para alguma variedade integral maximal S .

i) $J(S)$ é aberto na topologia relativa de $[a, b]$. Pois, $s \in J(S)$ se e só se $\alpha(s) \in S$, logo segundo existência e unicidade de soluções existe um $\gamma > 0$ tal que $\alpha((s - \gamma, s + \gamma)) \subset S$, daí, temos $(s - \gamma, s + \gamma) \cap [a, b] \subseteq J(S)$, e portanto $J(S)$ é aberto em $[a, b]$.

ii) $J(S)$ é fechado. De fato, seja $\tau_n \rightarrow \tau$, $\tau_n \in J(S)$, então $\alpha(\tau_n) \in S$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue-se que $\alpha(\tau) \in S$, caso contrário $\alpha(\tau) \in S'$ alguma variedade integral S' . Olhando como na prova de (i), temos que $\alpha(\tau_n) \in S'$ para infinitos valores de n o que mostra que $S' = S$ já que duas variedades integrais ou coincidem ou são disjuntas. Consequentemente, $J(S)$ é conexo e portanto $J(S) = [a, b]$ para alguma variedade integral maximal

e como $\alpha(t) = x \in G_\Sigma(x)$ então $\alpha(s) \in G_\Sigma(x)$ para cada $s \in [a, b]$. ■

Sempre vale $S_\Sigma(x) \subseteq G_\Sigma(x)$ e se deseja saber sob que condições obtém-se a igualdade

$$S_\Sigma(x) = G_\Sigma(x).$$

O Teorema de Chow dá resposta a isto, desde que Σ satisfaça uma propriedade de simetria.

Definição 1.1.3. Uma família Σ é dita simétrica se para cada $X \in \Sigma$ se tem que $-X \in \Sigma$.

Uma maneira equivalente de caracterizar pontos de uma mesma órbita é dado por: $y \in G_\Sigma(x)$ equivale a encontrar uma curva integral $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ de Σ tal que $\alpha(a) = x, \alpha(b) = y$.

Para obter a igualdade $S_\Sigma(x) = G_\Sigma(x)$ precisa-se encontrar uma curva integral $\beta : [0, T] \rightarrow M$ de Σ tal que $\beta(0) = x, \beta(T) = y$ e o teorema de Chow garante isto. Seu enunciado é.

Teorema 1.1.4 (Chow). Seja $\Sigma \subseteq \mathcal{X}(M)$ simétrico, $x \in M$. Então a cada $y \in G_\Sigma(x)$, existe uma curva integral $\alpha : [0, T] \rightarrow M$ de $\Sigma, T \geq 0$ tal que $\alpha(0) = x$, e $\alpha(T) = y$.

Prova. Veja [10].

Uma caracterização de acessibilidade é dada agora.

Teorema 1.1.5. Seja M uma variedade analítica n -dimensional, $\Sigma \subseteq \mathcal{X}(M)$ família de campos vetoriais completos e analíticos sobre M . Então $\text{int } S_\Sigma(x) \neq \emptyset$ se e somente se $\dim AL(\Sigma)(x) = n$.

Mais ainda, caso se verifique qualquer das implicações acima obtém-se

$$\overline{\text{int } S_\Sigma(x, t)} = \overline{S_\Sigma(x, t)} \quad \text{para cada } t > 0$$

assim $\text{int } S_\Sigma(x, t) \neq \emptyset$.

Prova. Suponha que $\dim AL(\Sigma)(x) < n$, então de $\dim AL(\Sigma)(x) = \dim G_\Sigma(x) < n$ obtemos que $\text{int } G_\Sigma(x) = \emptyset$, já que $G_\Sigma(x)$ é subvariedade e portanto seu interior é não vazio se e só se sua dimensão coincide com a da variedade. Assim,

$$\text{int } S_\Sigma(x) \subset \text{int } G_\Sigma(x) = \emptyset$$

o que mostra que a condição é necessária.

Observamos que a recíproca é imediata no caso de sistemas simétricos. De fato, suponhamos que $\dim AL(\Sigma)(x) = n$ e como $T_y G_\Sigma(x) = AL(\Sigma)(y)$ para cada $y \in G_\Sigma(x)$, então $\dim G_\Sigma(x) = n$, logo $G_\Sigma(x)$ é uma subvariedade conexa e aberta. Mas pelo Teorema de Chow, $S_\Sigma(x) = G_\Sigma(x)$, pois o sistema é simétrico e daí que $\text{int } S_\Sigma(x) \neq \emptyset$.

Essa observação será utilizada para a recíproca no caso geral, simetrizando uma família Σ tomando $\pm\Sigma$. Daí que, se $\dim AL(\pm\Sigma)(x) = n$, obtemos que a órbita em x

$$G_{\pm\Sigma}(x) = S_{\pm\Sigma}(x)$$

é aberta. Portanto, supondo que $\dim AL(\pm\Sigma)(x) = n$, mostraremos que $\overline{\text{int } S_\Sigma(x, t)} = S_\Sigma(x, t)$ para $t > 0$ e obteremos como consequência que $\text{int } S_\Sigma(x, t) \neq \emptyset$.

Um primeiro passo é encontrar uma aplicação $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow M$ tal que em quase todo $T \in \mathbb{R}^k$ tenhamos que posto $(dF)_T = n$ (para isto será usada a hipótese de que o sistema é analítico).

A construção de F é feita da seguinte maneira, $S_{\pm\Sigma}(x) = G_{\pm\Sigma}(x)$ é aberto e $y \in S_{\pm\Sigma}(x)$ se e só se $y = X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\cdots X_{t_k}^k(x)\cdots))$, para algum $\xi = (X^1, \dots, X^k) \subseteq \pm\Sigma, T = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$. Para ξ, x fixos definimos a aplicação $\rho_{\xi, x} : \mathbb{R}^k \longrightarrow M$ por $\rho_{\xi, x}(T) = \xi_T(x)$, que é analítica por serem analíticos os campos de vetores. Considerando a bola $B[0, N]$ centrada em zero e de raio N , tem-se que $A_{\xi, N} = \rho_{\xi, x}(B[0, N])$ é compacto. Logo fazendo variar ξ, N temos que

$$S_{\pm\Sigma}(x) = \bigcup_{\xi, N} A_{\xi, N} = G_{\pm\Sigma}(x).$$

Portanto, pelo teorema de Baire obtemos que $\text{int } A_{\xi, N} \neq \emptyset$ para algum ξ, N . Fixando ξ , definimos a aplicação procurada $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow M$ por $F(T) = \xi_T(x)$ e temos que $\text{int } F(\mathbb{R}^k) \neq \emptyset$, pois $A_{\xi, N} \subset F(\mathbb{R}^k)$. Como a aplicação F é analítica, pelo Teorema de Sard temos que o conjunto dos valores regulares é denso, daí que existe $T \in \mathbb{R}^k$ tal que o posto $(dF)_T = n$. Agora a idéia é estender a densidade de valores regulares ao de pontos regulares, aqui é onde usamos fortemente o fato da analiticidade de F . Para isto seja o conjunto

$$\Lambda^\# = \{T \in \mathbb{R}^k : \text{posto } (dF)_T < n\}.$$

Veja que $\text{int } \Lambda^\# = \emptyset$, caso contrário se teria um aberto $U \subset \Lambda^\#$, daí que para $T \in U$ o posto $(dF)_T = n_0 < n$ e como U é aberto, $\mathbb{R}^k$ conexo e $T \longrightarrow (dF)_T$ analítica se teria

então que posto $(dF)_T = n_0$ para todo $T \in \mathbb{R}^k$ (por prolongamento analítico). Assim $\mathbb{R}^k - \Lambda^\# = \Lambda$ é denso em $\mathbb{R}^k$.

Agora provaremos que $\overline{\text{int } S_\Sigma(x, t)} = S_\Sigma(x, t)$ para todo $t > 0$. Para isso, veja que $y \in S_\Sigma(x, t)$ se e só se para algum $\eta = (Y^1, \dots, Y^m) \subset \Sigma, S' \in \mathbb{R}_+^m$ tem-se

$$y = \eta_S(x) = Y_{s_1}^1(Y_{s_2}^2(\dots Y_{s_m}^m(x) \dots)), \quad \|S\| \leq t.$$

Pode-se supor que $\|S\| < t$, pois $\overline{\bigcup\{S'_\Sigma(x, s) : 0 \leq s < t\}} = S_\Sigma(x, t)$. Seja U um aberto definido por

$$U = \Lambda \cap \{\tau \in \mathbb{R}^k : \|\tau\| < t - \|S\|\} \cap \{\tau \in \mathbb{R}^k : \tau^1, \dots, \tau^k > 0\}.$$

Afirmamos que $0 \in \bar{U}$. De fato, como Λ é denso em $\mathbb{R}^k$, é possível tomar uma seqüência $\tau_n \in \Lambda$ com $\tau_n^i > 0$ (isto é, com todas suas coordenadas positivas) e $\|\tau_n\| < t - \|S\|$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 0$. Por outro lado temos que $(dF)_T$ tem posto n para todo $T \in U$, pois $U \subset \Lambda$. logo F é uma aplicação aberta e conseqüentemente, $F(U)$ é aberto em M . Como $0 \in \bar{U}$, se tem que $x = F(0) \in \overline{F(U)}$. Lembrando que

$$y = \eta_S(x) = Y_{s_1}^1(Y_{s_2}^2(\dots Y_{s_m}^m(x) \dots)), \quad \|S\| \leq t.$$

se tem que $x \in \text{dom } \eta_S$ e portanto existe um aberto $V \subset \text{dom } \eta_S \cap F(U)$ tal que $x \in \bar{V}$. Seja ϕ a restrição de η_S a V , então é possível compor ϕ com a restrição da F à $F^{-1}(V)$. Seja agora

$$W = \phi(F(F^{-1}(V))).$$

Como $x \in \bar{V}$ e η_S é um difeomorfismo local, se tem que $y \in \bar{W}$. Por outro lado, temos que W é atingível desde x num tempo $\|S\| + \|\tau\|$, mais ainda $\|S\| + \|\tau\| < t$ e daí que $W \subset \text{int } S_\Sigma(x, t)$ e portanto $\bar{W} \subset \overline{\text{int } S_\Sigma(x, t)}$. Como $y \in \bar{W}$, isso conclui a demonstração do teorema. ■

Observação. Neste teorema, a analiticidade foi essencial para assegurar que $F(U)$ é um aberto e também para se ter densidade de pontos regulares em $\mathbb{R}^k$ que não ocorre no caso C^∞ .

O teorema anterior é sobre o conjunto dos pontos atingíveis em um tempo menor ou igual a T . Adiante provaremos um resultado semelhante para o conjunto dos pontos atingíveis num tempo exatamente T . Antes porém, é conveniente que se faça os seguintes comentários sobre o significado geométrico de $AL(\Sigma)(x)$. Sabemos, no caso analítico, que

a aplicação $x \longrightarrow AL(\Sigma)(x)$ é uma distribuição integrável e que suas variedades integrais maximais são dadas por $G_\Sigma(x)$. Por essa razão, $AL(\Sigma)(x)$ é definido como o conjunto de vetores que são direções limites de curvas σ que passam por x e estão inteiramente contidas em $G_\Sigma(x)$. Por exemplo,

i) para a curva definida por $\alpha(t) = X_t(x)$ temos que $\left. \frac{d}{dt} X_t(x) \right|_{t=0} = X(x) \in AL(\Sigma)(x)$ e também é claro, $X_t(x) \in G_\Sigma(x)$ para todo t .

ii) para a curva definida por $\sigma(t^2) = X_{-t}(Y_{-t}(X_t(Y_t(x))))$ temos que $\left. \frac{d}{dt} (X_{-t}(Y_{-t}(X_t(Y_t(x)))) \right|_{t=0} = [X, Y](x)$, e da mesma forma, os colchete sucessivos $X^i(x), [X^i, X^j](x), [X^i, [X^j, X^k]](x), \dots, [X^i, \dots, [X^r, X^s] \dots](x)$, que estão em $AL(\Sigma)(x)$, são direções limites de curvas em $G_\Sigma(x)$.

Para olhar o conjunto dos pontos atingíveis em tempo T exato, consideramos o conjunto de direções limites $AL_0(\Sigma)(x)$ de curvas atingíveis a partir de x num tempo nulo, isto é, curvas que são percorridas em t unidades adiante e em $-t$ unidades de regresso. Como no caso do colchete de dois campos acima, os candidatos a serem elementos desse conjunto são os colchetes de qualquer ordem. Mais ainda, $\alpha(t) = X_{-t}^i X_t^j(x)$ é uma curva em $G_\Sigma(x)$ do tipo que se deseja e

$$\alpha'(0) = (X^j - X^i)(x) \in AL(\Sigma)(x).$$

Logo $AL_0(\Sigma)$ deve ser formado pela álgebra derivada $AL'(\Sigma)$ e combinações lineares das diferenças de elementos em $AL(\Sigma)$. Isto é definimos $AL_0(\Sigma)$ como o subespaço gerado pelos seguintes elementos

$$i) [X^i, X^j], [X^i, [X^j, X^k]], \dots$$

$$ii) \alpha_1 X^1 + \dots + \alpha_k X^k \text{ tal que } \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0 \text{ e } X^1, \dots, X^k \in \Sigma.$$

É claro que $AL_0(\Sigma)$ é um ideal de $AL(\Sigma)$ já que contém todos os colchetes de seus elementos. Dito de outra maneira,

$$\begin{aligned} AL(\Sigma) &= V(\Sigma) \oplus AL'(\Sigma) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i X^i + Y : Y \in AL'(\Sigma), X^i \in \Sigma \right\} \\ AL_0(\Sigma) &= \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i X^i + Y : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0, Y \in AL'(\Sigma), X^i \in \Sigma \right\}. \end{aligned}$$

Observe que $w \in AL(\Sigma)$ pode ser escrito como

$$w = \sum_{i=1}^k \alpha_i X^i + Y, \quad Y \in AL'(\Sigma).$$

Daí que definindo $\beta = \sum_{i=1}^k \alpha_i$, pode-se escrever $\alpha_i = \beta - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_k)$ para qualquer $i = 1, \dots, k$, obtendo portanto que

$$w = \alpha_1 X^1 + \dots + \alpha_{i-1} X^{i-1} + \alpha_{i+1} X^{i+1} + \dots + \alpha_k X^k + Y \\ + (\beta - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_k)) X^i$$

de onde se tira para qualquer i que

$$w = \beta X^i + \sum_{j=1}^k \alpha_j (X^j - X^i) + Y, \quad Y \in AL'(\Sigma).$$

Consideramos agora o quociente $Q(\Sigma) = AL(\Sigma)/AL_0(\Sigma)$. Como

$$w + AL_0(\Sigma) = \sum_{j=1}^k \alpha_j (X^j - X^i) + \beta X^i + Y + AL_0(\Sigma) = \beta X^i + Y + AL_0(\Sigma) \\ = \beta X^i + AL_0(\Sigma)$$

para se determinar a dimensão do quociente, o problema fica em decidir se $X^i \in AL_0(\Sigma)$ ou $X^i \notin AL_0(\Sigma)$ para algum i . Se $X^i \in AL_0(\Sigma)$, temos que $\dim Q(\Sigma) = \dim AL(\Sigma)/AL_0(\Sigma) = 0$ e se $X^i \notin AL_0(\Sigma)$, então $\dim Q(\Sigma) = 1$. Pode-se dizer também de maneira equivalente que $\text{codim } AL_0(\Sigma) = 0$ se e só se $X^i \in AL_0(\Sigma)$ para algum i . Disto concluímos que $\text{codim } AL_0(\Sigma) = 0$ ou 1. Analogamente para os subespaços $AL_0(\Sigma)(x) \subset AL(\Sigma)(x)$ temos que $\text{codim } AL_0(\Sigma)(x) = 0$ ou 1. Agora, como $AL_0(\Sigma) \subset AL(\Sigma)$ é um ideal em particular é uma subálgebra, então a aplicação $x \rightarrow AL_0(\Sigma)(x)$ define uma sub-distribuição de $x \rightarrow AL(\Sigma)(x)$ que é integrável. As variedades integrais dessa distribuição são de codimensão zero ou um nas variedades integrais de $AL(\Sigma)$. Por essa razão, fazemos a seguinte discussão sobre variedades produtos.

Para $M \times \mathbb{R}$ a variedade produto, tomemos $T_{(x,\gamma)}(M \times \mathbb{R}) \simeq T_x M \oplus \mathbb{R}$, logo definamos um campo nela a partir dos campos $X : M \rightarrow TM$, $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$X \oplus Y : M \times \mathbb{R} \rightarrow T(M \times \mathbb{R}) \\ (x, y) \rightarrow (X(x), Y(y))$$

de onde se verifica facilmente

$$[X \oplus Y, X' \oplus Y'] = [X, X'] \oplus [Y, Y'].$$

Como um campo canônico em $\mathbb{R}$ é $\frac{\partial}{\partial t} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por $\frac{\partial}{\partial t} f = f'$, consideremos a família $\Sigma^\# = \{X \oplus \frac{\partial}{\partial t} : X \in \Sigma\}$ para depois gerar a álgebra de Lie

$$AL(\Sigma^\#) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \widetilde{X}_i + \widetilde{Y} : \widetilde{X}_i \in \Sigma^\#, \widetilde{Y} \in AL'(\Sigma^\#) \right\}.$$

Se $\widetilde{X}_i \in \Sigma^\#$, então $\widetilde{X}_i = X_i \oplus \frac{\partial}{\partial t}$ e como nós queremos determinar $AL(\Sigma^\#)$ em termos de $X, Y, Z, \frac{\partial}{\partial t}$ supomos que $\widetilde{W} = [\widetilde{X}, [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]]$. Depois de fazer substituições obtemos

$$\begin{aligned} \widetilde{X} &= X \oplus \frac{\partial}{\partial t}, \quad \widetilde{Y} = Y \oplus \frac{\partial}{\partial t}, \quad \widetilde{Z} = Z \oplus \frac{\partial}{\partial t} \\ [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}] &= [Y \oplus \frac{\partial}{\partial t}, Z \oplus \frac{\partial}{\partial t}] = [Y, Z] \oplus [\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}] = [Y, Z] \oplus 0 \\ [\widetilde{X}, [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]] &= [X \oplus \frac{\partial}{\partial t}, [Y, Z] \oplus 0] = [X, [Y, Z]] \oplus 0 \end{aligned}$$

assim

$$AL(\Sigma^\#) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i (X_i \oplus \frac{\partial}{\partial t}) + Y \oplus 0 : X_i \in \Sigma, Y \in AL'(\Sigma) \right\}.$$

No Teorema anterior foi dado uma caracterização para se ter $\text{int} S_\Sigma(x) \neq \emptyset$. Agora, vai se caracterizar quando $\text{int} S_\Sigma(x, T) \neq \emptyset, T > 0$ onde

$$S_\Sigma(x, T) = \left\{ X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\cdots X_{t_k}^k(x) \cdots)) : t_i > 0, X^i \in \Sigma, \sum_{i=1}^k t_i = T \right\}.$$

Em termos da álgebra de Lie (ideal) $AL_0(\Sigma)$ avaliado em x , o resultado é

Teorema 1.1.6. Seja M uma variedade analítica n -dimensional, e seja Σ uma família de campos vetoriais completos e analíticos sobre M , $x \in M, T > 0$.

Então $\text{int} S_\Sigma(x, T) \neq \emptyset$ se e somente se $\dim AL_0(\Sigma)(x) = n$. Mais ainda, neste caso o $\text{int} S_\Sigma(x, T)$ é denso em $S_\Sigma(x, T)$.

Prova. Para mostrar a equivalência mostramos as seguintes equivalências:

$$\text{i) } \text{int} S_{\Sigma^\#}(x, 0) \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{int} S_\Sigma(x, T) \neq \emptyset.$$

ii) $\text{int } S_{\Sigma^\#}(x, 0) \neq \emptyset \Leftrightarrow \dim AL(\Sigma^\#)(x, 0) = n + 1$.

iii) $\dim AL(\Sigma^\#)(x, 0) = n + 1 \Leftrightarrow \dim AL_0(\Sigma)(x) = n$.

Démonstramos i) e iii) pois ii) é válido pelo Teorema 1.1.5.

i) Suponhamos que $\text{int } S_{\Sigma^\#}(x, 0) \neq \emptyset$, pelo Teorema 1.1.5 $\dim AL(\Sigma^\#)(x, 0) = n + 1$, isso implica que $\text{int } S_{\Sigma^\#}((x, 0), t) \neq \emptyset$ para $t > 0$. Tomemos $V \times W \subseteq S_{\Sigma^\#}((x, 0), t)$ aberto básico e para cada $s \in W$ seja o conjunto $V \times \{s\} \subseteq S_{\Sigma^\#}((x, 0), t)$, logo se $v \in V$, então $(v, s) \in V \times \{s\} \subseteq S_{\Sigma^\#}((x, 0), t)$ daí que existe $\alpha : [0, r] \rightarrow M \times \mathbb{R}$ curva integral de $\Sigma^\#$ com $\alpha(0) = (x, 0), \alpha(r) = (v, s)$. Como existe uma correspondência 1 – 1 entre curvas integrais de Σ e $\Sigma^\#$ (i.e. para a curva integral β de Σ o fazemos corresponder uma curva integral α de $\Sigma^\#$ definida por $\alpha(\tau) = (\beta(\tau), \tau)$) e por uma avaliação em $\tau = 0$ e $\tau = r$ obtemos $\beta(0) = x, \beta(r) = v, r = s$ isto quer dizer que $v \in S_\Sigma(x, s)$, daí $V \subseteq S_\Sigma(x, s)$.

Mas, nós procuramos mostrar que $\text{int } S_\Sigma(x, T) \neq \emptyset$ e para isto via uma aplicação introduzimos um aberto não vazio no conjunto $\text{int } S_\Sigma(x, T)$. Seja $X \in \Sigma$ e $\{X_t\}_{t \geq 0}$ o grupo local a 1-parâmetro de tal maneira que $\text{dom } X \subseteq V$ (é possível fazendo $\text{dom } X$ suficientemente pequeno) neste caso definamos uma aplicação $G : \Omega \rightarrow M, \quad \Omega = \text{dom } X$ por $G(y) = X_{T-s}(y)$, qual é um difeomorfismo local.

Se $y \in V$, então $y = \xi_\tau(x), \|\tau\| = s, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_p), \tau_i > 0$ daí que

$$G(V) = \{X_{T-s}(v) : v \in V\} = \{X_{T-s}(\xi_\tau(x)) : \dots\} \subseteq S_\Sigma(x, T)$$

pois $T - s + \|\tau\| = T - s + s = T$, logo $G(V)$ é aberto e $G(V) \neq \emptyset$. Portanto $\text{int } S_\Sigma(x, T) \neq \emptyset$.

Reciprocamente suponhamos que $\text{int } S_\Sigma(x, T) \neq \emptyset$, então existe um aberto V não nulo, $V \subseteq S_\Sigma(x, T)$. A idéia é introduzir um aberto via uma aplicação aberta, e para isso seja $X \in \Sigma$ e $(X_t)_t$ o grupo a 1-parâmetro associado. Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} F : V \times \mathbb{R} &\longrightarrow M \times \mathbb{R} \\ (v, t) &\longrightarrow (X_t(v), T + t). \end{aligned}$$

O fato que X_t é um difeomorfismo local, implica que o posto de $(dF)_{(v,t)}$ é $n + 1$, para cada $(v, t) \in V \times \mathbb{R}$ (é suficiente calcular $(dF)_{(v,t)}$). Logo F é uma aplicação aberta em $V \times \mathbb{R}$, mas $V \times (0, \infty) \subset V \times \mathbb{R}$ é aberto, então $F(V \times (0, \infty)) \subset M \times \mathbb{R}$ é aberto.

Afirmamos que: $F(V \times (0, \infty)) \subseteq S_{\Sigma^\#}(x, 0)$. De fato, se $\alpha \in F(V \times (0, \infty))$, então $\alpha = F(v, t) = (X_t(v), T + t), v \in V, t > 0$ e como $v \in V \subseteq S_\Sigma(x, T)$ temos que $v =$

$\xi_s(x)$, $s = (s_1, \dots, s_k)$, $\|s\| = T$, mas existe uma correspondência 1 - 1 entre curvas integrais de Σ e $\Sigma^\#$, logo os elementos de $S_{\Sigma^\#}((x, 0))$ são de forma

$$(X_t(v), T + t) = (X_t(\xi_s(x)), T + t), \quad \xi_s(x) = X_{s_1}^1(X_{s_2}^2(\dots X_{s_k}^k(x) \dots))$$

com $t + \|s\| = t + T$ daí que $\alpha \in S_{\Sigma^\#}(x, 0)$. Portanto $\text{int } S_{\Sigma^\#}(x, 0) \neq \emptyset$.

iii) Suponha que $\dim AL(\Sigma^\#)(x, 0) = n + 1$, para obter $\dim AL_0(\Sigma)(x) = n$ é suficiente mostrar que $T_x M \subset AL_0(\Sigma)(x)$. Seja $v \in T_x M$, então $(v, 0) \in T_{(x, 0)}(M \times \mathbb{R})$ e como $\dim AL(\Sigma^\#)(x, 0) = n + 1$, temos que $AL(\Sigma^\#)(x, 0) = T_{(x, 0)}(M \times \mathbb{R}) = T_x M \oplus \mathbb{R}$ daí $(v, 0) \in AL(\Sigma^\#)(x, 0)$. Logo existem campos $X_1, \dots, X_p \in \Sigma$, $Y \in AL'(\Sigma)$ tais que

$$\begin{aligned} (v, 0) &= \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i (X_i \oplus \frac{\partial}{\partial t}) + Y \oplus 0 \right) (x, 0) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (X_i \oplus \frac{\partial}{\partial t})(x, 0) + (Y \oplus 0)(x, 0) \\ &= \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i X_i(x) + Y(x), \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{\partial}{\partial t}(0) \right). \end{aligned}$$

Assim obtemos

$$v = \sum_{i=1}^p \lambda_i X_i(x) + Y(x) = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i X_i + Y \right)(x) \text{ e } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 0$$

daí que $v \in AL_0(\Sigma)(x)$. Portanto $\dim AL_0(\Sigma)(x) = n$.

Para a recíproca suponha que $\dim AL_0(\Sigma)(x) = n$, então $AL_0(\Sigma)(x) = T_x M$. mostremos que

$$T_{(x, 0)}(M \times \mathbb{R}) \subseteq AL(\Sigma^\#)(x, 0)$$

por meio de $(v, 0) \in AL(\Sigma^\#)(x, 0)$ e $(0, \frac{\partial}{\partial t})(x, 0) \in AL(\Sigma^\#)(x, 0)$. De fato, como $v \in T_x M$ então $(v, 0) \in T_{(x, 0)}(M \times \mathbb{R})$, mas $AL_0(\Sigma)(x) = T_x M$ e daí para

$$v \in AL_0(\Sigma)(x) \text{ temos que } v = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i X_i + Y \right)(x), \sum_{i=1}^p \lambda_i = 0, Y \in AL'(\Sigma).$$

Mas

$$\begin{aligned} (v, 0) &= \left(\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i X_i + Y \right) \oplus \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{\partial}{\partial t} \right) (x, 0) = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i X_i \oplus \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{\partial}{\partial t} + Y \oplus \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{\partial}{\partial t} \right) (x, 0) \\ &= \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i (X_i \oplus \frac{\partial}{\partial t}) + Y \oplus 0 \right) (x, 0) \end{aligned}$$

logo $(v, 0) \in AL(\Sigma^\#)(x, 0)$. Agora mostramos que $\left(0, \frac{\partial}{\partial t}\right)(x, 0) \in AL(\Sigma^\#)(x, 0)$ e para isto seja $X \oplus \frac{\partial}{\partial t} \in \Sigma^\#$, então

$$(X \oplus \frac{\partial}{\partial t})(x, 0) \in \Sigma^\#(x, 0) \subset AL(\Sigma^\#)(x, 0) \text{ e } (X \oplus 0)(x, 0) \in AL(\Sigma^\#)(x, 0).$$

Por tanto $T_{(x,0)}(M \times \mathbb{R}) \subseteq AL(\Sigma^\#)(x, 0)$.

Finalmente mostramos que $\text{int } \overline{S_\Sigma(x, T)} = S_\Sigma(x, T)$. Para isto temos que mostrar que para cada $y \in S_\Sigma(x, T)$ existe uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $y_n \rightarrow y$ e $y_n \in \text{int } S_\Sigma(x, T)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato, seja $y \in S_\Sigma(x, T)$, então $y = \xi_\tau(x)$, $\xi = (X^1, \dots, X^m)$, $\tau = (t_1, \dots, t_m)$, $t_i > 0$, $\|\tau\| = T$ ou seja $y = X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\dots X_{t_m}^m(x) \dots))$.

A idéia é aproxima-la por uma sequência de pontos atingíveis. Como $t_m > 0$, então existe uma sequência $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $s_k \in (0, t_m)$, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $s_k \rightarrow 0$; mas $s_k > 0$ daí que $\text{int } S_\Sigma(x, s_k) \neq \emptyset$. Logo existe um aberto U_k , $x_k \in U_k \subset S_\Sigma(x, s_k)$ tal que $x_k = \eta_{\tau'}(x)$ e $\|\tau'\| = s_k$.

Definamos uma sequência $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ por $y_k = \xi_{\tau_k}(x_k)$, onde $\tau_k = (t_1, \dots, t_m - s_k)$. Então $y_k = X_{t_1}^1(\dots X_{t_{m-1}}^{m-1}(X_{t_m - s_k}^m(x_k)))$, mas $x_k = \eta_{\tau'}(x)$, logo obtemos que $y_k = \xi_{\tau_k}(\eta_{\tau'}(x))$, $\|\tau_k\| + \|\tau'\| = T$; segundo a forma de y_k , tem-se que $y_k \in S_\Sigma(x, T)$, para $k \in \mathbb{N}$. Mas queremos que $y_k \in \text{int } S_\Sigma(x, T)$ e para isto usamos o fato de ser $\xi_{\tau_k}(\cdot)$ um difeomorfismo local, ou seja $\xi_{\tau_k}(U_k) \subseteq S_\Sigma(x, T)$ e é aberto, pois

$$\begin{aligned} \xi_{\tau_k}(U_k) &= \{\xi_{\tau_k}(w) : w \in U_k\} = \{\xi_{\tau_k}(w) : w = \eta_s(x), \|\tau_k\| + \|s\| = T\} \\ &= \{\xi_{\tau_k}^i(\eta_s(x)) : \|\tau_k\| + \|s\| = T\} \end{aligned}$$

é claro que $y_k \rightarrow y$ pela continuidade de ξ desde que $\tau_k \rightarrow T$ ■

1.2. Controlabilidade global.

Neste parágrafo definimos o que é um sistema de controle ao invés de simplesmente ter uma família Σ de campos. Também estabelecemos relações entre órbitas positivas induzidas por Σ e conjunto de pontos atingíveis seguindo trajetórias definidas por um sistema de controle.

De maneira geral, consideremos um espaço de medida Ω e seja

$$F(\Omega) = \{u : I \rightarrow \Omega : I \text{ intervalo fechado}\}$$

e introduzimos uma operação $\#$ em $F(\Omega)$ que o torne um semigrupo. A operação é a concatenação. Sejam $u : [a, b] \rightarrow \Omega$ e $v : [c, d] \rightarrow \Omega$, então $u\#v : [a, b + d - c] \rightarrow \Omega$ é

definido por

$$u \# v = \begin{cases} u(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ v(t + c - b) & \text{se } b < t \leq b + d - c \end{cases}$$

Com essa operação $(F(\Omega), \#)$ torna-se um semigrupo, já que a associatividade de $\#$ pode ser verificada de maneira imediata.

Fazemos $\mathbb{R}$ atuar em $F(\Omega)$ por translações, isto é, para $u : [a, b] \longrightarrow \Omega$ e $\tau \in \mathbb{R}$ definimos

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times F(\Omega) &\longrightarrow F(\Omega) \\ (\tau, u) &\longrightarrow \tau u : [a - \tau, b - \tau] \longrightarrow \Omega \end{aligned}$$

onde, $(\tau u)(t) = u(t + \tau)$ para $t \in [a, b]$. Daí temos que φ define uma ação de $\mathbb{R}$ em $F(\Omega)$ e para cada $\tau \in \mathbb{R}$, a translação no tempo τ

$$\varphi_\tau : F(\Omega) \longrightarrow F(\Omega)$$

é um automorfismo do semigrupo $F(\Omega)$.

Definição 1.2.1. Um semigrupo de controle $S(\Omega)$ é um subsemigrupo de $F(\Omega)$ tal que:

- i) Todos elementos $u \in S(\Omega)$ são mensuráveis.
- ii) Se $u \in S(\Omega)$ e K é qualquer sub intervalo fechado de $\text{dom} u$, então $u|_K$ está em $S(\Omega)$
- iii) $S(\Omega)$ é invariante sob translações do tempo. Dessa forma, as translações no tempo induzem automorfismos do semigrupo $S(\Omega)$.

Os exemplos mais conhecidos de semigrupos de controle são

– $PC(\Omega)$ funções constantes por pedaços.

Se $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach e $\Omega \subset \mathcal{B}$, toma-se a σ -álgebra de Borel sobre $\mathcal{B}$.

– $L^1(\Omega) = \{u : J \longrightarrow \Omega : u \in L^1(J; \mathcal{B})\}$

– $L^\infty(\Omega) = \{u : J \longrightarrow \Omega : \text{mensurável e limitada}\}.$

Agora define-se o que se chama um sistema de controle.

Definição 1.2.2. Dado um semigrupo de controle $S(\Omega)$, um sistema de controle tendo $S(\Omega)$ como conjunto de controles admissíveis é uma variedade diferenciável (C^∞ ou C^w) paracompacta, conexa M chamado espaço de estados, munido com uma família $\Sigma = \{F_u : u \in \Omega\}$ de campos vetoriais (C^∞ ou C^w) parametrizados por Ω satisfazendo

- i) A correspondência $u \longrightarrow F_u$ é continuamente diferenciável (para a topologia canônica dos campos vetoriais).
- ii) Para cada $u \in S(\Omega)$ e $x_0 \in M$, existe uma única curva absolutamente contínua $x : [a, b] \rightarrow M$ tal que $x(a) = x_0$ e $\dot{x}(t) = F_{u(t)}(x(t))$ para quase todo $t \in [a, b]$.

O sistema definido acima induz uma ação de $S(\Omega)$ sobre M . Ou seja, existe uma aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : S(\Omega) \times M &\longrightarrow M \\ (u, x) &\longrightarrow \hat{x}(b) \end{aligned}$$

onde $\text{dom } u = [a, b]$ e $\hat{x}$ é a curva absolutamente contínua do item ii). Se para cada $u \in S(\Omega)$ a aplicação $\varphi(u, \cdot) : M \longrightarrow M$ é um difeomorfismo, então

$$\begin{aligned} \rho : S(\Omega) &\longrightarrow \text{Diff}(M) \\ u &\longrightarrow \varphi(u, \cdot) \end{aligned}$$

é uma representação de $S(\Omega)$. Como caso particular, temos que se $S(\Omega) = PC(\Omega)$ e todo $F_u : M \longrightarrow TM$ são completos, então

$$\rho(PC(\Omega)) \subseteq \text{Diff}(M)$$

é o sub-semigrupo gerado pelos grupos a 1-parâmetro.

Da definição acima pode-se dizer grosseiramente que um sistema de controle é uma terna $(M, \Sigma_\Omega, \Omega)$ formada por uma variedade M como acima, uma família Σ_Ω de campos parametrizados por Ω e um conjunto Ω onde os controles ou elementos do semigrupo $S(\Omega)$ assumem valores.

Os elementos desta terna estão ligados por uma equação de evolução, onde cada elemento do semigrupo de controle induz uma única solução absolutamente contínua. Para o que temos previsto, nossos controles estão definidos nos intervalos positivos. Em geral, tomaremos Ω como subconjunto de $\mathbb{R}^m$ e satisfazendo, de acordo com a circunstância do problema, alguma condição extra como localmente conexo por caminhos ou $Aff(\Omega) = \mathbb{R}^m$, onde $Aff(\Omega)$ significa o espaço afin gerado por Ω .

A lei que governa nossos objetos é uma aplicação contínua

$$F : M \times \Omega \longrightarrow TM$$

onde para todo $u \in \Omega$, $F(\cdot, u) : M \rightarrow TM$ é um campo vetorial. Ela dá lugar a uma equação de evolução

$$F(x(t), u(t)) = \dot{x}(t), \quad u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \quad x(0) = x_0.$$

Daí que tem-se uma correspondência entre o semigrupo de controle $S(\Omega)$ e o conjunto de trajetórias que no instante $t = 0$ partem de um ponto fixado $x(0) = x_0$. Como se toma tempos positivos, os domínios dos controles serão da forma (i) $[0, \infty)$ e $[0, T]$ com T fixo ou (ii) $[0, T]$ onde para cada elemento do semigrupo controle o tempo final $T = T(u)$ pode ser distinto.

No caso (i) pode-se topologizar $S(\Omega)$ desde que esse semigrupo seja formado por funções contínuas por pedaços ou mais geralmente por funções mensuráveis e Lebesgue integráveis. Logo as topologias associadas a elas são a topologia da convergência uniforme sobre partes compactas (no caso $[0, \infty)$) e a topologia da convergência fraca no espaço L_2 (no caso $[0, T]$) onde T é fixo para cada controle.

No caso (ii) também se tomará, mais adiante a topologia induzida por um mergulho de $S(\Omega)$ numa álgebra de séries de potência formais.

Em todo caso, a cada $u \in S(\Omega)$ corresponde uma única solução $x : [0, \delta) \rightarrow M$ com $x(0) = x_0$ já que os controles são definidos a partir de 0. Para ter compatibilidade com os controles, se eles foram definidos no $[0, \infty)$, e a equação diferencial associada, deve-se ter o mesmo domínio para a solução e controle.

A notação $t \rightarrow \pi(x_0, u, t)$, para $u \in S(\Omega)$ será usada para indicar a solução com condição inicial x_0 da equação definida pelo controle $u \in S(\Omega)$.

De maneira análoga às órbitas positivas no caso de famílias de campos, temos a seguinte definição.

Definição 1.2.3. Um ponto $y \in M$ é dito atingível desde $x \in M$ num tempo $t \geq 0$, se existe $u \in S(\Omega)$ tal que $\pi(x, u, t) = y$.

O controle $u \in S(\Omega)$ é utilizado como guia ou condutor para se atingir um ponto a partir de uma condição inicial x . Fixando um ponto $x \in M$ considera-se os pontos que são atingíveis a partir de x num tempo t , até um tempo t ou atingíveis num tempo arbitrário. Isto será denotado assim

$A(x, t)$: Conjunto de pontos atingíveis a partir de x num tempo t .

$A(x, T) = \bigcup_{t \leq T} A(x, t)$: Conjunto de pontos atingíveis a partir de x até um tempo T .

$\mathbf{A}(x) = \bigcup_{t \geq 0} \mathbf{A}(x, t)$: Conjunto de pontos atingíveis a partir de x .

Como na seção anterior, se introduz também a definição

Definição 1.2.4. O sistema $(M, \Sigma_\Omega, \Omega)$ é dito acessível (controlável) desde um ponto x , se $\text{int } \mathbf{A}(x) \neq \emptyset$ ($\mathbf{A}(x) = M$). Logo o sistema $(M, \Sigma_\Omega, \Omega)$ é dito acessível (controlável), se for acessível (controlável) em cada ponto $x \in M$.

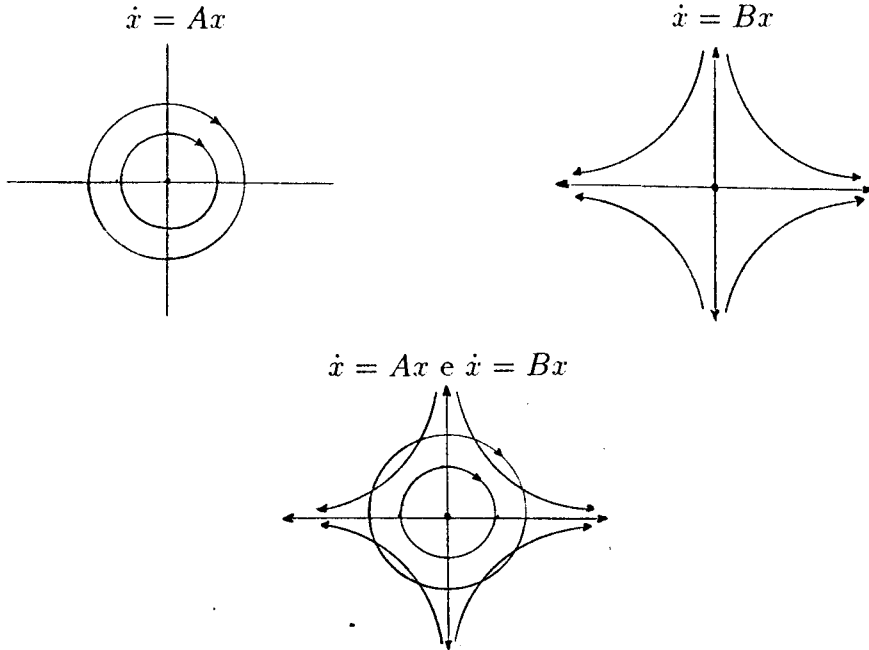
Exemplo 1.2.5. Seja $M = \mathbb{R}^2$ e considere os sistemas lineares

$$\dot{x} = Ax \quad \text{e} \quad \dot{x} = Bx, \quad \text{onde} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como cada matriz determina um campo linear, então para as matrizes A, B sejam $\tilde{X}, \tilde{Y}$ os campos correspondentes definidos por $\tilde{X}(x) = A.x$, $\tilde{Y}(x) = B.x$. Tomando $\Sigma = \{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$ temos que os fluxos estão dados por

$$\tilde{X}_t(x, y) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \cos t + y \sin t, -x \sin t + y \cos t)$$

$$\tilde{Y}_t(x, y) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (xe^t, ye^{-t})$$



Assim, $S_\Sigma(x, y) = \mathbb{R}^2$ e a família de campos é controlável a partir de $(x, y) \neq (0, 0)$. ■

A aplicação $F : M \times \Omega \longrightarrow TM$ define uma família de campos parametrizados por Ω , isto é $\Sigma_\Omega = \{F(\cdot, \alpha) : \alpha \in \Omega\}$, o qual, por sua vez define a distribuição $x \longrightarrow AL(\Sigma_\Omega)(x)$. Supondo sua integrabilidade, tem-se que as variedades integrais maximais são as órbitas de Σ_Ω . Convém relacionar as órbitas positivas dessa família de campos de vetores com o conjunto dos pontos atingíveis por trajetórias do sistema de controle definido por F .

Proposição 1.2.6.

- i) $S_{\Sigma_\Omega}(x, t) \subseteq A(x, t)$.
- ii) $S_{\Sigma_\Omega}(x) \subseteq \mathbf{A}(x)$.
- iii) $\mathbf{A}(x) \subseteq G_{\Sigma_\Omega}(x)$.

Prova. i) $y \in S_{\Sigma_\Omega}(x, t)$ se e só se $y = X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\cdots X_{t_k}^k(x) \cdots))$, onde $t_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^k t_i = t$.

Mas $X^i \in \Sigma_\Omega$, então $X^i = F(\cdot, \alpha_i)$ para algum $\alpha_i \in \Omega, i = 1, \dots, k$. Como se procura um controle $u \in S(\Omega)$ tal que $\pi(x, u, t) = y$ tomamos a trajetória

$$\alpha(s) = \begin{cases} X_s^k(x) & 0 \leq s \leq t_k = \tau_1 \\ X_{s-t_k}^{k-1}(X_{t_k}^k(x)) & \tau_1 = t_k < s \leq t_k + t_{k-1} = \tau_2 \\ \vdots & \\ X_{s-(t_k+\dots+t_2)}^1(X_{t_2}^2(\cdots X_{t_k}^k(x) \cdots)) & \tau_{k-1} = t_k + \cdots + t_2 < s \leq t_k + \cdots + t_1 = \tau_k \end{cases}$$

que é solução de F associada ao controle u definido por

$$u(t) = \begin{cases} \alpha_1 & , \quad 0 \leq s \leq t_k = \tau_1 \\ \alpha_2 & , \quad \tau_1 = t_k < s \leq t_k + t_{k-1} = \tau_2 \\ \vdots & \\ \alpha_k & , \quad \tau_{k-1} = t_k + \cdots + t_2 < s \leq t_k + \cdots + t_1 = \tau_k \end{cases}$$

ii) $S_{\Sigma_\Omega}(x) = \bigcup_{t \geq 0} S_{\Sigma_\Omega}(x, t) \subseteq \bigcup_{t \geq 0} A(x, t) = \mathbf{A}(x)$.

iii) $y \in A(x)$ se e só se $y = \pi(x, u, t)$ para algum $u \in S(\Omega)$, $t \geq 0$ e segue-se que isto é análogo a proposição 1.1.2. ■

Com as notações anteriores, e por uma aplicação do Teorema 1.1.5 para sistemas de controle definidas numa variedade analítica, temos

Teorema 1.2.7. Seja Σ_Ω uma família de campos analíticos e completos, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, localmente conexo por caminhos, $S(\Omega)$ o semigrupo formado pelas funções mensuráveis e limitadas a valores em Ω . Então $\mathbf{A}(x) \subseteq G_{\Sigma_\Omega}(x)$, para cada $x \in M$. Mais ainda para cada $T > 0$ tem-se $\overline{\text{int } \mathbf{A}(x, T)} = \overline{\mathbf{A}(x, T)}$ (na topologia intrínseca de $G_{\Sigma_\Omega}(x)$).

Prova. Para cada $x \in M$ temos que $\mathbf{A}(x) \subseteq G_{\Sigma_\Omega}(x)$ (proposição 1.2.6 (iii)). Para mostrar a segunda parte temos que $G_{\Sigma_\Omega}(x)$ é uma subvariedade quasi-regular (teorema 0.3.1 (iv)).

Se denotamos por $P(\Omega)$ o conjunto dos controles constantes por partes, então $\overline{P(\Omega)} = S(\Omega)$. Daí que para relacionar a densidade nos conjuntos $A(x, t)$ e $S_{\Sigma_\Omega}(x, t)$ definimos uma aplicação contínua $\varphi : S(\Omega) \rightarrow M$ por $\varphi(u) = \pi(x, u, t)$ e que restrito a $G_{\Sigma_\Omega}(x)$ também é contínua ($G_{\Sigma_\Omega}(x)$ é quase-regular). Por tanto

$$\overline{A(x, t)} = \overline{S_{\Sigma_\Omega}(x, t)}. \quad (1)$$

Isso significa que $\text{int } S_{\Sigma_\Omega}(x) \neq \emptyset$. Pelo teorema 1.1.5 segue que

$$\overline{\text{int } S_{\Sigma_\Omega}(x, T)} = \overline{S_{\Sigma_\Omega}(x, T)} \quad (2)$$

mas, de (1) obtém-se

$$S_{\Sigma_\Omega}(x, t) \subseteq A(x, t) \subseteq \overline{S_{\Sigma_\Omega}(x, t)}$$

daí que

$$\text{int } S_{\Sigma_\Omega}(x, T) \subseteq \text{int } \mathbf{A}(x, T) \subseteq \mathbf{A}(x, T) \subseteq \overline{S_{\Sigma_\Omega}(x, T)} \quad (3)$$

tomando o fecho em relação à estrutura intrínseca em (3) e usando (2), obtemos o desejado. ■

Corolário 1.2.8. O sistema tem a propriedade de acessibilidade desde x se e só se $\dim AL(\Sigma_\Omega)(x) = n$. Neste caso, $\text{int } \mathbf{A}(x, T) \neq \emptyset$, para $T > 0$.

Prova. Suponha que $\dim AL(\Sigma_\Omega)(x) < n$. Como $S_{\Sigma_\Omega}(x) \subseteq \mathbf{A}(x) \subseteq G_{\Sigma_\Omega}(x)$ segue-se que $\text{int } G_{\Sigma_\Omega}(x) = \emptyset$ e assim $\text{int } \mathbf{A}(x) = \emptyset$, o que contradiz a propriedade de acessibilidade. Reciprocamente, se $\dim AL(\Sigma_\Omega)(x) = n$, pelo Teorema 1.1.5 temos que $\text{int } S_{\Sigma_\Omega}(x) \neq \emptyset$ em M . Mais ainda $\text{int } S_{\Sigma_\Omega}(x, T) \neq \emptyset$ para cada $T > 0$ e pelo fato de se ter $S_{\Sigma_\Omega}(x, T) \subseteq \mathbf{A}(x, T)$ obtém-se o desejado. ■

Exemplo 1.2.9. A hipótese de analiticidade tem sido fundamental até agora. Seja $M = \mathbb{R}^2$ e os seguintes sistemas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, u) & \dot{x} &= f_2(x, y, u) \\ \dot{y} &= g_1(x, y, u) & \dot{y} &= g_2(x, y, u) \end{aligned}$$

onde $f_1 = f_2 = 1$, $g_1 = 0$, $g_2((x, y), u) = u\varphi(x)$ e φ é definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ 1, & x > 2 \\ \text{uma função } C^\infty & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

No primeiro sistema temos $\dot{x} = 1$ e $\dot{y} = 0$ então $x = t + c_1$, e $y = c_2$. Isto é

$$(x(t), y(t)) = (t + c_1, c_2) = (t, 0) + (c_1, c_2).$$

Mas $\mathbf{A}(0, 0) = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}^+\}$ segue-se que $\text{int } \mathbf{A}(0, 0) = \emptyset$.

No segundo sistema e para cada intervalo de definição de φ temos

i) $\dot{x} = 1$ e $\dot{y} = 0$ então $x = t + c_1$ e $y = c_2$, isto é

$$(x(t), y(t)) = (t, 0) + (c_1, c_2) \quad -\infty < t < 1$$

ii) $x(t) = t + c$ e $y = \int_0^t u(s)\varphi(s)ds$, $1 \leq s \leq t \leq 2$

iii) $x(t) = t + c_1$ e $y = t + c_2$, logo a trajetória é

$$(x(t), y(t)) = t(1, 1) + (c_1, c_2), x > 2.$$

Em uma vizinhança de 0 ambos sistemas coincidem, mas para o segundo tem-se que $\text{int } \mathbf{A}(0, 0) \neq \emptyset$. Acontece que este sistema não é analítico. Pois se fosse analítico, então $\varphi(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$ e por tanto os sistemas seriam os mesmos.

Como pode-se observar a hipótese de analiticidade é importante pois pode acontecer que se tenha dois sistemas que localmente sejam iguais mas não globalmente.

1.3. Controlabilidade aproximada.

Se introduz este conceito porque às vezes se apresentam casos onde não se tem controlabilidade mas tem-se algo que aproxima no sentido que o fecho do conjunto dos pontos atingíveis desde um ponto dado é a variedade toda. Isto é um enfraquecimento do conceito de controlabilidade, pois controlabilidade implica controlabilidade aproximada, mas

a recíproca não é necessariamente verdadeira.

Definição 1.3.1. O sistema $(M, \Sigma_\Omega, \Omega)$ é dito aproximadamente controlável desde x se

$$\overline{A(x)} = M.$$

No caso que a família de campos não é proveniente de um sistema de controle como foi definido, tem-se um conceito análogo utilizando-se as órbitas positivas. Neste caso a família Σ é aproximadamente controlável a partir de x se $\overline{S_{\Sigma_\Omega}(x)} = M$.

Observaremos por meio de um exemplo que controlabilidade aproximada não necessariamente implica controlabilidade.

Exemplo 1.3.2. Seja $T^2 = S^1 \times S^1 \simeq \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ o 2-toro. Consideremos em $\mathbb{R}^2$ a medida induzida pela forma volume $dx \wedge dy$. Se $H : T^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação C^∞ , o campo de vetores

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

é um campo Hamiltoniano e daí que preserva a forma volume.

Para obter um sistema Hamiltoniano tomamos as seguintes funções

$$H_1(x, y) = \cos 2\pi x \cdot \sin 2\pi y$$

$$H_2(x, y) = \sin 2\pi x \cdot \cos 2\pi y$$

$$H_3(x, y) = \cos 2\pi y$$

$H_4(x, y) = H_4(x)$ uma função C^∞ não nula dependendo só de x e com suporte contido no intervalo $\frac{5}{8} \leq x \leq \frac{7}{8}$.

$H_5(x, y) = H_5(y)$ uma função C^∞ não nula com suporte contido no intervalo $\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{4}$ e $\frac{dH_5}{dy} \left(\frac{1}{2} \right) \neq 0$.

Sejam os campos $X^i = X_{H_i}, i = 1, \dots, 5$ e tomemos o sistema

$$\Sigma = \{-X^1, \pm X^2, \pm X^3, \pm X^4, \pm X^5\}.$$

Afirmamos que Σ é transitivo em T^2 . De fato,

$X^4(x, y) = -\frac{dH_4}{dx}(x) \frac{\partial}{\partial y}$ e portanto suas trajetórias são pontos (se tiver singularidades)

ou círculos do tipo $\{x\} \times S^1$. Mas H_4 é não nula, logo, existe um $x' \in [\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$ tal que

$\frac{dH_4}{dx}(x') \neq 0$ e por tanto o círculo $\{x'\} \times S^1$ é uma trajetória de X^4 . Quer dizer que X^4

pode ser utilizado para ligar os círculos $S^1 \times \{y\}$.

$X^3(x, y) = -2\pi \sin 2\pi y \frac{\partial}{\partial x}$. Por tanto, se $y \neq 0$ ou $\frac{1}{2}$ as trajetórias de X^3 são círculos

do tipo $S^1 \times \{y\}$. $\{X^4, X^3\}$ é portanto transitivo fora dos círculos $S^1 \times \{\frac{1}{2}\}$ e $S^1 \times \{0\}$.

Porém $X^5(x, \frac{1}{2}) = \frac{dH_5}{dy}(\frac{1}{2}) \frac{\partial}{\partial x}$ e por tanto $\pm X^5$ é transitivo em $S^1 \times \{\frac{1}{2}\}$. Além do mais

em $y = 0$, $X^1(x, 0) = 2\pi \cos 2\pi x \frac{\partial}{\partial x}$ e $X^2(x, 0) = 2\pi \sin 2\pi x \frac{\partial}{\partial x}$, por tanto $\{X^1, \pm X^2\}$ é transitivo em $S^1 \times \{0\}$. Conclui-se que Σ é transitivo.

Por outro lado Σ não é controlável, pois o conjunto

$$C = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$$

é invariante por trajetórias negativas. Essa invariancia é porque X^3, X^4 e X^5 se anulam em C e a única maneira de entrar em C é usando as trajetórias de X^1 .

No entanto Σ é aproximadamente controlável a partir de $T^2 - C$ e $\overline{T^2 - C} = T^2$ ■

Tendo-se definido controlabilidade aproximada, se deseja agora dar condições sob as quais obtém-se controlabilidade aproximada assim como, quando a controlabilidade aproximada implica controlabilidade num sistema induzido por uma família Σ de campos vetoriais.

Proposição 1.3.3. Se Σ é aproximadamente controlável e $-\Sigma$ é acessível, então Σ é controlável.

Prova. Será suficiente mostrar que $M \subseteq S_\Sigma(x)$ para cada $x \in M$. Para isso sejam $x, y \in M$. Então pela acessibilidade de $-\Sigma$ temos que $\text{int} S_{-\Sigma}(y) \neq \emptyset$ e $\overline{S_{-\Sigma}(y)} = M$ pela controlabilidade aproximada, disto segue-se que

$$(\text{int} S_{-\Sigma}(y)) \cap S_\Sigma(x) \neq \emptyset$$

e tomando $w \in (\text{int} S_{-\Sigma}(y)) \cap S_\Sigma(x)$ temos

$$w = X_{-t_1}^1(X_{-t_2}^2(\cdots X_{-t_k}^k(y)\cdots)) = Y_{s_1}^1(Y_{s_2}^2(\cdots Y_{s_y}^y(x)\cdots)), \quad t_i \geq 0, s_i \geq 0$$

por tanto $y \in S_\Sigma(x)$, isto é $M \subseteq S_\Sigma(x)$. ■

A recíproca é evidente pois controlabilidade implica controlabilidade aproximada, e acessibilidade para $-\Sigma$. Logo, dizer que Σ controlável é o mesmo que dizer que Σ é aproximadamente controlável e $-\Sigma$ acessível.

O propósito agora é demonstrar um teorema devido a Lobry que dá uma resposta parcial de quando acessibilidade implica controlabilidade. Esse resultado será utilizado no caso de grupos de Lie conexos e compactos para mostrar que acessibilidade implica controlabilidade.

A ferramenta básica para esse resultado, é a existência de uma medida de probabilidade que seja invariante pelos grupos a 1-parâmetro da família Σ , o qual garante a existência de pontos que são retornáveis para qualquer aberto que tomamos na variedade. Esses pontos são chamados recorrentes. As questões são

- a) Como usar os pontos recorrentes para se obter controlabilidade e
- b) Como assegurar a existência de pontos recorrentes, o suficiente como para poder aplicar a parte (a).

Definição 1.3.4. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que uma transformação $T : X \longrightarrow X$ preserva medida se

- i) T é mensurável e
- ii) $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Como nosso espaço ambiente é uma variedade M , a σ -álgebra que tomaremos será a dos borelianos $B(M)$ gerado pela topologia de M . Numa versão probabilística o teorema de Poincaré assegura que quase todo ponto é recorrente.

Teorema de Recorrência. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T : X \longrightarrow X$ uma transformação que preserva medida. Então para $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) > 0$, existe $B \subset A$ com $\mu(B) = \mu(A)$ tal que se $x \in B$, existe uma sequência de inteiros $k_n \longrightarrow \infty$ com $T^{k_n}(x) \in A$.

Prova. Veja [6]. ■

Seja Σ uma família de campos completos. Esta condição é necessária para poder definir o conceito de campos que preservam medida.

Definição 1.3.5. Seja X um campo completo em M e μ uma medida de probabilidade definida sobre os borelianos $B(M)$ de M . Se diz que X preserva μ ou que μ é invariante por X se os difeomorfismos X_t preservam medida μ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Agora veremos como usar a ideia de ponto recorrente. Antes definimos o que vem a ser ponto recorrente.

Definição 1.3.6. Seja X um campo completo em M . Um ponto $x \in M$ é um ponto recorrente para X se para cada vizinhança aberta $U \ni x$, a trajetória $X_t(x)$ retorna a U em tempo positivo e negativo, isto é, se existem $t_1, t_2 > 0$ tal que $X_{t_1}(x) \in U$ e $X_{-t_2}(x) \in U$.

Se tomamos vizinhanças suficientemente pequenas que contém x pode-se obter sequências $t_n \rightarrow \infty, s_n \rightarrow -\infty$ tal que $X_{t_n}(x) \rightarrow x$ e $X_{s_n}(x) \rightarrow x$.

Para a família Σ denotaremos por R_X o conjunto de pontos recorrentes de X onde $X \in \Sigma$. Pensando no Teorema de Lobry, o seguinte lema facilita sua demonstração.

Lema 1.3.7. Suponha que Σ é transitivo e se tenha que para cada $X \in \Sigma, \bar{R}_X = M$. Seja U um subconjunto aberto invariante por trajetórias positivas ou seja $S_\Sigma(x) \subseteq U$, para cada $x \in U$. Então U é denso em M .

Prova. Pela transitividade de Σ temos $G_\Sigma(x) = M$, para cada $x \in M$. Também temos que $G_{\pm\Sigma}(x) = M$ e como $\pm\Sigma$ é simétrico, pelo teorema de Chow obtém-se $S_{\pm\Sigma}(x) = M$. Portanto o que pretendemos mostrar é

$$S_\Sigma(\bar{U}) \subseteq \bar{U} \quad \text{e} \quad S_{-\Sigma}(\bar{U}) \subseteq \bar{U}$$

o que implica que $\bar{U} = M$ e daí que U é denso (veja que $S_{\pm\Sigma}(x) \subseteq \bar{U}$).

i) $S_\Sigma(\bar{U}) \subseteq \bar{U}$. Isso decorre da invariância de U . De fato, tomando $y \in S_\Sigma(\bar{U})$ e $V \ni y$ uma vizinhança demonstramos que $V \cap U \neq \emptyset$.

$y \in S_\Sigma(\bar{U})$ se e só se $y = X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\cdots X_{t_k}^k(x)\cdots))$ para algum $x \in \bar{U}$. Então,

$$x = X_{-t_k}^k(X_{-t_{k-1}}^{k-1}(\cdots X_{-t_1}^1(y)\cdots)) \quad \text{e daí} \quad x \in X_{-t_k}^k(\cdots X_{-t_1}^1(V)\cdots).$$

Como $x \in \bar{U}$, obtemos que

$$U \cap X_{-t_k}^k(\cdots X_{-t_1}^1(V) \cdots) \neq \emptyset$$

logo

$$\emptyset \neq X_{t_1}^1(\cdots X_{t_k}^k(U) \cdots) \cap V \subseteq U \cap V$$

pela invariança de U .

ii) $S_{-\Sigma}(\bar{U}) \subseteq \bar{U}$. Para isso suponha que $S_{-\Sigma}(\bar{U}) \not\subseteq \bar{U}$, então existe $y \in S_{-\Sigma}(\bar{U})$ com $y \notin \bar{U}$. Se $y \in S_{-\Sigma}(\bar{U})$, então $y = X_{-t_1}^1(X_{-t_2}^2(\cdots X_{-t_k}^k(x) \cdots))$, $x \in \bar{U}$. Daí que é possível encontrar $\tilde{x} \in \bar{U}$, um campo $X \in \Sigma$, um aberto V tais que $V \cap \bar{U} = \emptyset$ e $X_{-t_0}(\tilde{x}) \in V$ para algum $t_0 > 0$.

Com efeito, como $y = X_{-t_1}^1(X_{-t_2}^2(\cdots X_{-t_k}^k(x) \cdots))$ só fica ver que acontece com os $X_{-t_i}^i$. Ou seja $X_{-t_k}^k(x) \notin \bar{U}$ ou $X_{-t_k}^k(x) \in \bar{U}$, no primeiro caso termina e no segundo caso é ver se $X_{-t_{k-1}}^{k-1}(X_{-t_k}^k(x))$ esta ou não em $\bar{U}$, assim continua o processo.

Por outro lado de $\bar{R}_X = M$ segue-se que $R_X \cap X_{t_0}(V) \cap U \neq \emptyset$, pois $\tilde{x} = X_{t_0}(X_{-t_0}(\tilde{x})) \in X_{t_0}(V)$ e como $\tilde{x} \in \bar{U}$, então $X_{t_0}(V) \cap U \neq \emptyset$ logo pela densidade de R_X temos o que desejamos. Daí que existe $y \in R_X$ e $y \in X_{t_0}(V) \cap U$ no primeiro caso permite encontrar um $T > 0$ tal que $X_T(y) \in X_{t_0}(V)$, $T > t_0$ e daí usando a segunda parte obtém-se que $X_{T-t_0}(y) \in V$. Por outro lado $T - t_0 > 0$ e $\bar{U}$ é invariante pelas trajetórias positivas, logo $X_{T-t_0}(y) \in \bar{U}$. Por tanto $X_{T-t_0}(y) \in \bar{U} \cap V$ é uma contradição. ■

Como uma aplicação do Lema 1.3.7 e supondo M conexo temos.

Teorema 1.3.8. (Lobry) Seja Σ uma família de campos satisfazendo as seguintes condições

- (1) $\Sigma, -\Sigma$ acessíveis
- (2) $\bar{R}_X = M$, para cada $X \in \Sigma$.

Então Σ é controlável.

Prova. Como Σ é acessível, obtém-se que $\text{int } S_\Sigma(x) \neq \emptyset$, para cada $x \in M$. Segundo o Teorema 1.1.5 caso analítico ou não, tem-se que $\dim AL(\Sigma)(x) = \dim M$, para $x \in M$ e como $x \longrightarrow AL(\Sigma)(x)$ é involutivo, pelo Teorema de Frobenius ele é integrável. Isso garante que $G_\Sigma(x)$ é uma variedade integral maximal aberta para cada $x \in M$. Se mostramos que $G_\Sigma(x)$ é fechado da conexidade de M segue-se que $G_\Sigma(x) = M$.

De fato, ele decorre de que as órbitas $G_\Sigma(y)$ formam uma folheação, logo elas são disjuntas e como $G_\Sigma(y)$ é aberta, então $(G_\Sigma(x))^C$ é aberto pois é união de variedades integrais maximais abertas. Por tanto $G_\Sigma(x)$ é fechado. Disto pode-se concluir que Σ é transitivo.

O único que falta verificar é a existência de um conjunto aberto invariante por trajetórias, e para isso consideremos $U = \text{int} S_\Sigma(x)$, então provemos que $S_\Sigma(U) \subseteq U$.

De fato, se $y \in S_\Sigma(w)$, $w \in U = \text{int} S_\Sigma(x)$, segue-se que $y = X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\cdots X_{t_k}^k(w) \cdots))$. Como $w \in U$, então $y \in X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\cdots X_{t_k}^k(U) \cdots))$ qual é aberto, mas $X_{t_1}^1(X_{t_2}^2(\cdots X_{t_k}^k(U) \cdots)) \subseteq U$. Por tanto $S_\Sigma(w) \subseteq U$, para cada $w \in U$.

Aplicando o Lema 1.3.7 ao conjunto $U = S_\Sigma(x)$, obtém-se

$$\overline{U} = \overline{\text{int} S_\Sigma(x)} = M$$

o que mostra que Σ é aproximadamente controlável, e como $-\Sigma$ é acessível, se conclui que Σ é controlável (Proposição 1.3.3.) ■

Observação. A hipótese do Teorema 1.3.8 pode ser enfraquecida tirando acessibilidade e supondo só $\overline{R}_X = M$ e transitividade de Σ , mas só se obtém controlabilidade aproximada, veja [8].

Agora vamos ao problema de existência de pontos recorrentes e para isso seja μ uma medida de probabilidade definida na σ -álgebra de borel B_M , Σ uma família de campos completos que preservam a medida μ . Então se $X \in \Sigma$ a aplicação $X_t : M \longrightarrow M$ é um difeomorfismo global. Em particular $X_{\pm 1} : M \longrightarrow M$ são transformações preservando μ e segue-se do Teorema de Recorrência que quase todo ponto $x \in M$ é recorrente de $X_{\pm 1}$.

Se denotamos por R_1 o conjunto de pontos recorrente de X_1 e por R_2 o conjunto de pontos recorrente de X_{-1} , obtemos que $\mu(R_1^c) = 0$ e $\mu(R_2^c) = 0$ (pois, quase todo ponto é recorrente) então $\mu(R_1) = 1 = \mu(R_2)$. Mas $R_1 \cap R_2 = M - (R_1^c \cup R_2^c)$ e daí segue-se que $\mu(R_1 \cap R_2) = 1$. Quer dizer que o conjunto de pontos recorrente de $X_{\pm 1}$ é $R_1 \cap R_2$ que está em R_X e daí que $\mu(R_X) = 1$. Se tomamos o conjunto $\eta = U\{V : V \text{ aberto, } \mu(V) = 0, V \subset M\}$, então $\mu(\eta) = 0$. Como $\text{supp} \mu = \eta^c$ e como desejamos que $\overline{R}_X = M$ supomos que $\text{supp} \mu = \eta^c = M$, então $\eta = \phi$ a qual quer dizer que $\mu(U) > 0$, para cada aberto $U \neq \phi$. Da igualdade $R_X \cup R_X^c = M$, segue-se que $\mu(R_X^c) = 0$ ou seja que R_X^c não é aberto mais ainda $\text{int} R_X^c = \phi$, mas isto significa que $\overline{R}_X = M$. Tudo isto é resumido em

Proposição 1.3.9. Se Σ é uma família de campos completos que preservam uma medida de probabilidade μ definida sobre os borelianos de M e $\text{supp} \mu = M$. Então $\overline{R}_X = M$ para cada $X \in \Sigma$.

1.4. Projeção de um sistema de controle definido num grupo de Lie G no espaço onde ele atua.

Nesta e nas demais seções se estudará sistemas invariantes definidos num grupo de Lie G . Esse estudo pode ser usado para induzir propriedades de acessibilidade, controlabilidade em outras variedades, desde que estejam relacionadas com o grupo G . Nos referimos neste caso a ação de G sobre uma variedade M , mas também olhamos que o sistema em G é projetado num sistema definido em M e as órbitas positivas em G são projetados em órbitas positivas no espaço M .

Os objetos que intervêm são:

G : um grupo de Lie

Σ : uma família de campos invariantes à direita em G . Em particular

$$\Sigma = (X^0, X^1, \dots, X^m)$$

Ω subconjunto do $\mathbb{R}^m$ onde o semigrupo controle $S(\Omega)$ assume valores.

A dinâmica do sistema de controle (G, Σ, Ω) é fornecida pela equação de evolução

$$\dot{x}(t) = X^0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) X^i(x(t)), \quad u \in S(\Omega). \quad (1)$$

Este sistema (1) pode se projetar num sistema definido em M , se existir uma ação de G sobre M . De fato,

Se $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ é uma ação, então ela satisfaz

$$\text{i) } \varphi(1, x) = x$$

$$\text{ii) } \varphi(g_1 \cdot g_2, x) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, x))$$

Para a ação φ , existe um homomorfismo infinitesimal

$$\begin{aligned} \lambda : T_1 G &\longrightarrow \chi(M) \\ X &\longrightarrow \lambda(X) \end{aligned}$$

onde

$$\lambda(X)(p) = \left. \frac{d}{dt} (\varphi(\exp tX, p)) \right|_{t=0} = (d\varphi_p)_1(X(1)).$$

Conclui-se que a família $\Sigma = (X^0, \dots, X^m)$ é projetada numa família $\tilde{\Sigma} = (\tilde{X}^0, \tilde{X}^1, \dots, \tilde{X}^m)$, onde $\tilde{X}^i = \lambda(X^i)$. Logo em M temos o seguinte sistema de controle

$$\dot{x}(t) = \tilde{X}^0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) \tilde{X}^i(x(t)), \quad \tilde{X}^i = \lambda(X^i), \quad i = 0, 1, \dots, m$$

Antes de estudar o sistema de controle (G, Σ, Ω) , o fazemos para Σ_Ω e temos a seguinte situação a determinar

- i) Σ_Ω acessível implica $\tilde{\Sigma}_\Omega$ acessível ?
- ii) Σ_Ω controlável implica $\tilde{\Sigma}_\Omega$ controlável ?
- iii) $\tilde{\Sigma}_\Omega$ acessível implica Σ_Ω acessível ?
- iv) $\tilde{\Sigma}_\Omega$ controlável implica Σ_Ω controlável ?

Se conseguirmos condições que respondam positivamente i), ii), iii), ou iv) se chega a que o problema de estudar controlabilidade em M se reduz a estudar controlabilidade em G . Por isso, um dos fatos interessantes é determinar sob que condições um sistema invariante definido num grupo de Lie G é controlável.

Segundo o roteiro que pensamos, calculamos as órbitas de $\Sigma = (X^0, X^1, \dots, X^m)$ definidas em G . Sabemos que o grupo de difeomorfismos é

$$G_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_k}^k : t_i \in \mathbb{R}, X^i \in \Sigma\}.$$

Logo devemos explicitar cada difeomorfismo. Dado $X \in \Sigma$, sabemos que $t \rightarrow \exp(tX) = X_t(1)$ é a curva integral que passa por 1 onde $\{X_t\}_t$ é o grupo a 1-parâmetro. Como nós procuramos $X_t(x)$, definimos a curva $\alpha(t) = R_x(\exp tX) = (\exp tX)x$, a qual como se sabe, é uma curva integral que passa por x , isto é

$$\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t)).$$

Veja que $\alpha(0) = x$ e $X_0(x) = x$, e como ambas são curvas integrais maximais, pela unicidade temos

$$\begin{aligned} X_t(x) &= R_x(\exp(tX)) \\ &= \exp(tX).x = L_{\exp(tX)}(x). \end{aligned}$$

Segue que o difeomorfismo é dado por

$$X_t = L_{\exp(tX)}.$$

Aqui é claro que $L_g : G \longrightarrow G$ com $L_g(x) = gx$ é um difeomorfismo, logo

$$G_\Sigma = \{L_{\exp t_1 X^1} L_{\exp t_2 X^2} \cdots L_{\exp t_k X^k} : t_i \in \mathbb{R}, X^i \in \Sigma\}$$

e tomando a órbita que passe por 1 temos

$$G_\Sigma(1) = \{\exp t_1 X^1 \cdots \exp t_k X^k : t_i \in \mathbb{R}, X^i \in \Sigma\}$$

Proposição 1.4.1. $G_\Sigma(1)$ é um subgrupo de Lie conexo.

Prova. De fato, como Σ é uma família de campos invariantes, $AL(\Sigma)$ a álgebra de Lie gerada por Σ é uma subálgebra da álgebra de Lie de G . Então pelo Teorema de correspondência existe um único subgrupo de Lie conexo H tal que $T_1 H \simeq AL(\Sigma)$.

Por outro lado, $G_\Sigma(1)$ é a órbita que passa por 1 e para que $G_\Sigma(1)$ seja variedade integral maximal da distribuição $\Delta : G \longrightarrow \varphi$ definida por

$$g \longrightarrow AL(\Sigma)(g)$$

temos que verificar a integrabilidade de Δ , o qual é uma aplicação do teorema de Frobenius, mas isto é só olhar

- i) $\dim AL(\Sigma)(g) = cte$, para cada $g \in G$.
- ii) $g \longrightarrow AL(\Sigma)(g)$ é involutivo.

Com efeito, para mostrar i) definimos outra distribuição $\tilde{\Delta} : G \longrightarrow \varphi$ definida por

$$x \longrightarrow (dR_x)_1(AL\Sigma(1))$$

e mostremos que $\tilde{\Delta} = \Delta$. Isto é feito por inclusões.

Se $w \in \Delta(g)$, então $w = X(g)$, com $X \in AL(\Sigma)$ e por ser invariante temos que $w = X(R_1(g)) = (dR_g)_1(X(1))$, e como $X(1) \in AL(\Sigma)(1)$ segue-se que $w \in \tilde{\Delta}(g)$. Por tanto $\Delta(g) \subset \tilde{\Delta}(g)$. Reciprocamente, se $w \in \tilde{\Delta}(g)$, então $w = (dR_g)_1(X(1)) = X(g)$, $X \in AL(\Sigma)$ assim $w \in \Delta(g)$. Por tanto $\tilde{\Delta}(g) \subset \Delta(g)$, finalmente concluímos que $\dim AL(\Sigma)(g) = cte$. A parte (ii) segue-se da definição de $AL(\Sigma)$.

De i) e ii) temos que $AL(\Sigma)(x) = \Delta_\Sigma(x)$, então $G_\Sigma(1)$ é variedade integral maximal da distribuição $x \longrightarrow AL(\Sigma)(x)$. Pode-se facilmente olhar que $G_\Sigma(1)$ é um grupo no sentido algébrico, caso contrário se mostra

$$G_\Sigma(1) = G_\Sigma(1)g$$

qualquer que sejam os casos tem-se que a operação

$$\cdot : G_\Sigma(1) \times G_\Sigma(1) \longrightarrow G$$

é diferenciável; como $G_\Sigma(1)$ é subvariedade quasi-regular por ser folha de uma folheação temos que $\cdot : G_\Sigma(1) \times G_\Sigma(1) \longrightarrow G_\Sigma(1)$ é diferenciável, portanto $G_\Sigma(1)$ é um subgrupo de Lie conexo. Mais ainda $T_1G_\Sigma(1) = AL(\Sigma)(1) \simeq AL(\Sigma)$, segue-se da unicidade que $H = G_\Sigma(1)$ ■

Além do mais pode-se identificar $G_\Sigma(1)$ com G_Σ por meio da aplicação $\psi : G_\Sigma(1) \longrightarrow G_\Sigma$, definida por $\psi(g) = L_g$. Isto é, ψ é um isomorfismo de grupos de Lie. Agora qualquer órbita num ponto x é dado por

$$\begin{aligned} G_\Sigma(x) &= \{L_g(x) : g \in G_\Sigma(1)\} = \{gx : g \in G_\Sigma(1)\} \\ G_\Sigma(x) &= G_\Sigma(1).x = R_x(G_\Sigma(1)). \end{aligned}$$

Da mesma forma, para semigrupos temos

$$S_\Sigma = \{L_{\exp t_1 X^1} \dots \exp t_k X^k : t_i \geq 0, X^i \in \Sigma\}.$$

A órbita positiva através de $g \in G$, é dada por

$$S_\Sigma(g) = S_\Sigma(1).g = R_g(S_\Sigma(1)).$$

Em particular para $g = 1$ temos que

$$S_\Sigma(1) = \{\exp t_1 X^1 \dots \exp t_k X^k : t_i \geq 0, X^i \in \Sigma\}$$

é um semigrupo. Portanto podemos concluir que estudar órbitas positivas em qualquer ponto, se reduz a estudar o semigrupo $S_\Sigma(1)$, pois $S_\Sigma(g)$ é simplesmente uma translação.

Projeção das órbitas no grupo de Lie G sobre órbitas na variedade M

Antes queremos olhar como é o grupo a 1-parâmetro de $\lambda(X)$ em M . Consideremos a

órbita

$$G_\Sigma(1) = \{\exp t_1 X^1 \dots \exp t_k X^k : t_i \in \mathbb{R}, X^i \in \Sigma\}.$$

Se $X \in \Sigma$, então $\lambda(X) \in \tilde{\Sigma}$, onde $\lambda(X)(x) = (d\varphi_x)_1(X(1)) = \tilde{X}(x)$ e o fluxo associado é dado por $\tilde{X}_t(x) = \varphi(\exp tX, x)$ como pode-se observar

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\tilde{X}_t(x)) &= \left. \frac{d}{ds} \left(\varphi(\exp sX, \tilde{X}_t(x)) \right) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \left(\varphi(\exp sX, \exp tX, x) \right) \right|_{s=0} \\ &= (d\varphi_x)_{\exp sX, \exp tX} \left(\left. \frac{d}{ds} R_{\exp tX}(\exp sX) \right|_{s=0} \right) \\ &= (d\varphi_x)_{\exp tX}(X(\exp tX)) = \frac{d}{dt} \tilde{X}_t(x) = \frac{d}{dt} (\varphi_x(\exp tX)). \end{aligned}$$

Agora queremos olhar como se projetam as órbitas e para isto consideramos a ação $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ e para cada $x \in M$ denotamos por $\varphi_x : G \longrightarrow M$ a função definida por $\varphi_x(g) = \varphi(g, x)$. Por um cálculo obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_x(G_\Sigma(1)) &= \{\varphi_x(\exp t_1 X^1 \dots \exp t_k X^k) : t_i \in \mathbb{R}, X^i \in \Sigma\} \\ &= \{\varphi(\exp t_1 X^1, \varphi(\exp t_2 X^2, \dots, \varphi(\exp t_k X^k, x) \dots)) : t_i \in \mathbb{R}, X^i \in \Sigma\} \\ &= \{\tilde{X}_{t_1}^1(\tilde{X}_{t_2}^2(\dots \tilde{X}_{t_k}^k(x) \dots)) : t_i \in \mathbb{R}, \tilde{X}^i \in \tilde{\Sigma}\} \end{aligned}$$

Enunciamos isto como um lema.

Lema 1.4.2. Seja φ uma ação de G sobre M , então $\varphi_x(G_\Sigma(1)) = G_{\tilde{\Sigma}}(x)$, para cada $x \in M$. Em particular $\varphi_x(S_\Sigma(1)) = S_{\tilde{\Sigma}}(x)$.

Prova. Foi feita acima.

Agora responde-se às perguntas (i) e (ii).

Para o caso (i) suponhamos que Σ tem a propriedade de acessibilidade, logo $\text{int } S_\Sigma(1) \neq \emptyset$. Como queremos olhar em M e no ponto x , usamos a igualdade $\varphi_x(S_\Sigma(1)) = S_{\tilde{\Sigma}}(x)$ e supomos que em x a aplicação $\varphi_x : G \longrightarrow M$ seja uma aplicação aberta, então

$$\varphi_x(\text{int } S_\Sigma(1)) \subseteq \text{int } \varphi_x(S_\Sigma(1)) = \text{int } S_{\tilde{\Sigma}}(x)$$

logo, $\tilde{\Sigma}$ tem a propriedade de acessibilidade em x . Isto é

Proposição 1.4.3. Se $\varphi_x : G \longrightarrow M$ é aberta e Σ tem a propriedade de acessibilidade, então $\tilde{\Sigma}$ tem a propriedade de acessibilidade em x .

Prova. Foi feita acima.

Observação. Dizer que φ_x é aberta é o mesmo que dizer que $\text{int } G_{\tilde{\Sigma}}(x) \neq \emptyset$. Por tanto $\text{int } G_{\tilde{\Sigma}}(x) \neq \emptyset$ fornece acessibilidade em x .

Para responder (ii) suponhamos que Σ é controlável, logo $S_{\Sigma}(1) = G$. Como queremos olhar a controlabilidade em M , então a aplicação que envolve os dois espaços é

$$\varphi_x : G \longrightarrow M.$$

Mas, $\varphi_x(S_{\Sigma}(1)) = S_{\tilde{\Sigma}}(x)$, então deve ocorrer que $S_{\tilde{\Sigma}}(x) = M$, e ele é dado se φ_x for sobre, pois neste caso $\varphi_x(G) = M = S_{\tilde{\Sigma}}(x)$.

Dizer que φ_x é sobre é o mesmo que dizer que a ação é transitiva. De fato, para cada $y \in M$, existe $g \in G$ tal que $\varphi_x(g) = \varphi(g, x) = y$, isto é $y \simeq x$. Para $y, z \in M$ é claro que $y \simeq z$ por transitividade. Em resumo,

Proposição 1.4.4. Se Σ é controlável e φ transitiva, então $\tilde{\Sigma}$ é controlável.

Prova. Foi feita acima.

1.5. Sobre o levantamento de sistemas.

Na seção anterior estudamos onde podemos induzir as propriedades de acessibilidade e controlabilidade definidos num grupo de Lie G . Agora se verá o problema de levantar sistemas. Para isto seja M uma variedade diferenciável e $\tilde{\Sigma} = (\tilde{X}^0, \tilde{X}^1, \dots, \tilde{X}^m)$ uma família de campos definindo o seguinte sistema sobre M

$$\dot{x}(t) = \tilde{X}^0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) \tilde{X}^i(x(t)) \quad , \quad u = (u_1, \dots, u_m).$$

Ao contrário da construção anterior, a questão aqui é saber quando esse sistema é obtido por um sistema invariante num grupo de Lie.

Uma resposta é dada pelo Teorema de Palais, cujo enunciado é

Teorema 1.5.1. (Palais). Seja Σ uma família de campos globalmente definidos. Suponha que $\dim AL(\Sigma) < \infty$ e que os campos sejam completos. Então existe um grupo de Lie

conexo G e uma ação de G em M de tal forma que os campos de Σ são induzidos por esta ação.

Prova. Veja [4] .

Nestas condições, seja $\Sigma = (X^0, X^1, \dots, X^m)$ a família que se projeta em $\tilde{\Sigma}$ por meio do homomorfismo infinitesimal $\lambda : T_1 G \longrightarrow \chi(M)$. Em G tem-se o sistema

$$\dot{x}(t) = X^0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) X^i(x(t))$$

e como pode-se observar o problema se reduz ao (1.4). Tudo o que foi feito até agora é para o sistema Σ , mas interessa mais os conjuntos $\mathbf{A}(g), g \in G$.

No caso de um sistema invariante definido num grupo de Lie G ocorre uma situação especial nas trajetórias $\pi(g, u, t)$, pois elas são definidas para cada $t > 0$. O problema agora é decidir quando

$$\mathbf{A}(g) = G.$$

Se $y \in \mathbf{A}(g)$ então existe um controle $u \in S(\Omega)$ e um tempo $T > 0$ tal que $y = \pi(g, u, T)$ e a relação entre as curvas

$$t \longrightarrow \pi(g, u, t) \quad \text{e} \quad t \longrightarrow \alpha(t) = \pi(e, u, t).g = R_g(\pi(e, u, t))$$

é dado no seguinte lema.

Lema 1.5.2. Para cada $g \in G$ tem-se $\alpha(t) = R_g(\pi(1, u, t)) = \pi(g, u, t)$

Prova. Como $\alpha(0) = g = \pi(g, u, 0)$, é suficiente verificar que α seja uma solução para o controle dado, logo pela unicidade obtém-se o resultado. Isto é para $\alpha(t) = R_g(\pi(1, u, t))$, temos

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= (dR_g)_{\pi(1, u, t)} \left(\frac{d}{dt} \pi(1, u, t) \right) \\ &= (dR_g)_{\pi(1, u, t)} (X_0(\pi(1, u, t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) (dR_g)_{\pi(1, u, t)} X_i(\pi(1, u, t))) \end{aligned}$$

e como $(dR_g)_{\pi(1, u, t)} (X_i(\pi(1, u, t))) = X_i(R_g \pi(1, u, t))$, então obtém-se

$$\dot{\alpha}(t) = X_0(\alpha(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t)X_i(\alpha(t)) \quad \blacksquare$$

Como consequência do Lema anterior temos

Lema 1.5.3. Para cada $g \in G$, verificam-se as seguintes expressões

$$\mathbf{A}(g) = R_g(\mathbf{A}(1)) = \mathbf{A}(1).g$$

$$\mathbf{A}(g, T) = R_g(\mathbf{A}(1, T)) = \mathbf{A}(1, T).g$$

$$A(g, T) = R_g(A(1, T)) = A(1, T).g$$

Prova. É uma aplicação imediata do Lema 1.5.2. \(\blacksquare\)

Concluimos que é suficiente trabalhar nos conjuntos $\mathbf{A}(1), \mathbf{A}(1, T), A(1, T)$ pois os outros são obtidos por translação.

Observação. Pela relação entre $S_{\Sigma_\Omega}(1)$ e $\mathbf{A}(1)$ é fácil ver que se a família Σ_Ω é acessível (respectivamente controlável), então o sistema definido por Σ é acessível (respectivamente controlável). Pois $S_{\Sigma_\Omega}(1) \subseteq \mathbf{A}(1)$ (Proposição 1.2.6), daí que se temos uma ação $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ e um sistema (G, Σ, Ω) definido em G , então temos um sistema $(M, \tilde{\Sigma}, \Omega)$ definido em M e dependendo de se a relação $\varphi_x(A(g)) = A(\varphi(g, x))$ seja válida tem-se acessibilidade (controlabilidade) desde que φ_x seja aberta (sobrejetora). Mais ainda é suficiente ter $S_{\Sigma_\Omega}(1) = G$ e transitividade de φ para obter $\mathbf{A}(\varphi(1, x)) = M$.

Conclusão. Para induzir controlabilidade de um sistema definido em G na variedade M onde G atua, a ação tem que ser transitiva, por tanto a variedade onde G atua tem que ser homogênea.

Exemplo 1.5.4. Considere o grupo de Lie $SO(n)$ e a ação φ definida por

$$\begin{aligned} \varphi : SO(n) \times S^{n-1} &\longrightarrow S^{n-1} \\ (A, x) &\longrightarrow A.x. \end{aligned}$$

Se Σ é uma família invariante definida em $SO(n)$ e $\tilde{\Sigma}$ é a família projetada em S^{n-1} , então a controlabilidade de Σ é suficiente para a controlabilidade de $\tilde{\Sigma}$.

Por um resultado que será mostrado mais adiante, a seguinte afirmação faz sentido. Se Σ é invariante e $\dim AL(\Sigma)(g) = \dim G$, então Σ é controlável.

Pode-se observar que a ação φ é transitiva e como é conhecido o grupo de isotrofia em 1 pode ser identificado com $SO(n-1)$, logo tem-se que

$$S^{n-1} \simeq SO(n)/SO(n-1).$$

Isto pode ser generalizado para um espaço homogêneo G/H , pois a ação $\varphi : (G/H) \times G \longrightarrow G/H$ é transitiva. Mas temos que supor que G seja compacto e conexo, Σ invariante e $AL(\Sigma) = T_1G$, então Σ é controlável em G , consequentemente pela transitividade de φ tem-se $\tilde{\Sigma}$ é controlável.

1.6. Condições necessárias e suficientes para controlabilidade de um sistema invariante num grupo de Lie.

Nos parágrafos anteriores o que se fez foi dar condições sobre a ação, para projetar um sistema acessível (controlável) num sistema acessível (controlável) na variedade onde G atua. Agora não assumiremos controlabilidade em G , mas encontraremos condições para que um sistema invariante em G seja controlável.

Seja o sistema de controle (G, Σ, Ω) dado anteriormente e determinado por

$$\dot{x}(t) = X^0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) X^i(x(t)), u \in S(\Omega)$$

que descreve a dinâmica do sistema. Aqui o semi-grupo controle $S(\Omega)$ será das funções mensuráveis e limitadas localmente; para assim poder obter igualdade das álgebras de Lie

$$AL(\Sigma) = AL(\Sigma_\Omega)$$

onde $\Sigma_\Omega = \{X^0 + \sum_{i=1}^m u_i X^i : u = (u_1, \dots, u_m) \in \Omega\}$ e neste caso $G_{\Sigma_\Omega}(1) = G_\Sigma(1)$ desde que $\Omega = \mathbb{R}^m$ ou $Aff\Omega = \mathbb{R}^m$. Para A(1) se procura um espaço ambiente que tenha propriedades boas, nos referimos a $G_\Sigma(1)$. Como $AL(\Sigma) \subseteq T_1G$ é uma sub-álgebra de Lie, o teorema da correspondência entre sub-álgebras de Lie e subgrupos de Lie conexos permite, encontrar um único subgrupo de Lie conexo $H \subset G$ tal que $T_1H \simeq AL(\Sigma)$. A ferramenta que permite um relacionamento de H com $G_\Sigma(1)$ é a distribuição

$$g \longrightarrow AL(\Sigma)(g) \tag{2}$$

tal como será mostrado tem H como variedade integral maximal que passa por 1.

Proposição 1.6.1. Seja o sistema invariante (G, Σ, Ω) sobre G , então $A(1) \subset H$.

Prova. O único passo interessante é mostrar que H é uma subvariedade integral maximal da distribuição definida em (2). Lembremos que

$$AL(\Sigma)(g) = (dR_g)_1(AL(\Sigma)).$$

Como foi mostrado na Proposição 1.4.1 essa distribuição é integrável, logo existe uma única subvariedade integral maximal $G_\Sigma(1) \ni 1$. Se mostramos que $G_\Sigma(1) = H$, a conclusão decorre do Teorema 1.2.7. Para verificar isso é suficiente provar.

i) H é uma subvariedade integral da distribuição definida em (2).

Com efeito, seja $g \in H$ e $R_g : H \longrightarrow H$ a translação, logo sua diferencial é

$$(dR_g)_1 : T_1H \longrightarrow T_gH$$

então

$$(dR_g)_1(T_1H) = (dR_g)_1(AL(\Sigma)) = T_gH$$

daí que

$$AL(\Sigma)(g) = T_gH, \quad \text{para cada } g \in H.$$

ii) H é maximal. De fato, $G_\Sigma(1)$ é um subgrupo de Lie conexo de G (Proposição 1.4.1) e como $G_\Sigma(1)$ é uma subvariedade integral maximal que passa por 1, segue-se que

$$T_1G_\Sigma(1) = AL(\Sigma)(1) = (dR_1)_1(AL(\Sigma)) = AL(\Sigma)$$

e por se ter a mesma álgebra de Lie, da unicidade temos $G_\Sigma(1) = H$. ■

Denotemos por $S(\Omega)_T$ o semigrupo controle formado pelas funções localmente limitadas

$$u : [0, T] \longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^m,$$

com T fixo.

Proposição 1.6.2. Seja (G, Σ, Ω) um sistema invariante. Então a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : S(\Omega)_T \times [0, T] &\longrightarrow G \\ (u, t) &\longrightarrow \pi(g, u, t) \end{aligned} .$$

é contínua para cada $g \in G$ e $T \geq 0$, se em $S(\Omega)_T$ é dada a topologia da convergência fraca.

Prova. Veja [12] e [14]. A ideia da prova é mostrar em primeiro lugar para grupos de matrizes e daí identificar a álgebra de Lie com uma álgebra de matrizes (teorema de Ado). Usando o Teorema de Lie para ter um isomorfismo local de grupos de Lie a questão se reduz a comutar diagramas localmente. $\blacksquare$

Proposição 1.6.3. Seja (G, Σ, Ω) um sistema invariante, então

- (i) $\mathbf{A}(1, T), \mathbf{A}(1), A(1, T)$ são conexos por caminhos $\forall T \geq 0$.
- (ii) Para o sistema (1) temos que: $\mathbf{A}(1, T), A(1, T)$ são compactos.

Prova. Veja [14].

O espaço ambiente de $\mathbf{A}(1)$ pode ser considerado como sendo H que na realidade é $H = G_\Sigma(1)$, pois $g \longrightarrow AL(\Sigma)(g)$ é integrável.

Agora mostramos um análogo ao fato que $S_{\Sigma_\Omega}(1)$ é um semigrupo, ou seja esta propriedade também é satisfeita para $\mathbf{A}(1)$.

Proposição 1.6.4.. Seja (G, Σ, Ω) um sistema de controle invariante. Então $\mathbf{A}(1)$ é um semigrupo.

Prova. Com efeito dado $g_1, g_2 \in \mathbf{A}(1)$, então $g_1 = \pi(1, u, t_1)$, $g_2 = \pi(1, v, t_2)$, para se verificar que $g_2 \cdot g_1 \in \mathbf{A}(1)$ procuramos um controle w e um tempo $T > 0$ tal que $\pi(1, w, T) = g_2 g_1$.

Definamos o controle

$$w(\tau) = \begin{cases} u(\tau), & 0 \leq \tau \leq t_1 \\ v(\tau - t_1), & t_1 < \tau \end{cases}$$

se $\pi(1, w, \tau)$ é a trajetória correspondente ao controle procurado, então para $\tau > t_1$ temos:

$$\pi(1, w, \tau) = \alpha(\tau) = R_{g_1}(\pi(1, v, \tau - t_1)).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
& X_0(\alpha(\tau)) + \sum_{i=1}^m w_i(\tau) X_i(\alpha(\tau)) = \\
&= X_0(R_{g_1}(\pi(1, v, \tau - t_1))) + \sum_{i=1}^m v_i(\tau - t_1) X_i(R_{g_1}(\pi(1, v, \tau - t_1))) \\
&= (dR_{g_1})_{\pi(1, v, \tau - t_1)}(X_0(\pi(1, v, \tau - t_1))) + \sum_{i=1}^m v_i(\tau - t_1) (dR_{g_1})_{\pi(1, v, \tau - t_1)}(X_i(\pi(1, v, \tau - t_1))) \\
&= (dR_{g_1})_{\pi(1, v, \tau - t_1)} \left(\frac{d}{d\tau} \pi(1, v, \tau - t_1) \right) = \frac{d}{d\tau} (R_{g_1}(\pi(1, v, \tau - t_1))) = \dot{\alpha}(\tau).
\end{aligned}$$

Assim $\alpha(\cdot)$ é uma solução e satisfaz $\alpha(t_1 + t_2) = \pi(1, w, t_1 + t_2) = R_{g_1}(\pi(1, v, t_2)) = g_2 g_1$ e portanto $\mathbf{A}(1)$ é um semigrupo. ■

Pode acontecer, em alguns casos, que $\mathbf{A}(1)$ seja um subgrupo de G .

Proposição 1.6.5. Seja (G, Σ, Ω) um sistema de controle invariante. Se $\mathbf{A}(1)$ é um subgrupo de G , então $\mathbf{A}(1) = G_\Sigma(1)$.

Prova. Pela Proposição 1.2.6 $S_\Sigma(1) \subset \mathbf{A}(1)$. Mas $\text{int } S_\Sigma(1) \neq \emptyset$ em $G_\Sigma(1)$ por tanto $\mathbf{A}(1)$ tem interior não vazio em $G_\Sigma(1)$. Seja $g \in \text{int } \mathbf{A}(1)$. Então $g^{-1}\mathbf{A}(1)$ é uma vizinhança da identidade em $G_\Sigma(1)$ que está contida em $\mathbf{A}(1)$, já que $\mathbf{A}(1)$ é um grupo. Portanto $\mathbf{A}(1)$ é um subgrupo de $G_\Sigma(1)$ que contém uma vizinhança da identidade. Como $G_\Sigma(1)$ é conexo, isso garante que $\mathbf{A}(1) = G_\Sigma(1)$. ■

Para cada $u \in S(\Omega)$, associamos a equação diferencial definida em (1)

$$\dot{x}(t) = X^0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) X^i(x(t))$$

se olhamos X^0 , o qual não é perturbado, pode-se definir um tipo de simetria.

Definição 1.6.6. O sistema descrito por (1) é dito

- a) *Simétrico*: se $X_0 \equiv 0$
- b) *Não Simétrico*: caso contrário

Um sistema é simétrico se e só se $X_0(g) = 0$ para algum $g \in G$. Pois, se

$$X^0(g) = (dR_g)_1(X^0(1)) = 0$$

obtemos que $X^0(1) = 0$.

No caso de sistemas invariantes simétricos se garante que a inversa de $g \in \mathbf{A}(1)$ também está em $\mathbf{A}(1)$, isto é $g^{-1} \in \mathbf{A}(1)$, com o que $\mathbf{A}(1)$ é um subgrupo.

Teorema 1.6.7. Seja (G, Σ, Ω) um sistema invariante simétrico sobre G , então $\mathbf{A}(1) = G_\Sigma(1)$. Além do mais para cada $T > 0$, $A(1, T) = \mathbf{A}(1) = G_\Sigma(1)$.

Prova. A prova consta de 2 partes

1) $A(1, T) = \mathbf{A}(1)$ e

2) $\mathbf{A}(1) = G_\Sigma(1)$

Para o caso (2) é suficiente mostrar que $\mathbf{A}(1)$ é um subgrupo de G , em virtude proposição 1.6.5. Seja $g \in \mathbf{A}(1) = \bigcup_{t \geq 0} A(1, t)$, então existe um controle $u \in S(\Omega)$ e um tempo $t > 0$ tal que $\pi(1, u, t) = g$. Para que $g^{-1} \in \mathbf{A}(1)$, temos que construir um controle $v \in S(\Omega)$ que conduza 1 em g^{-1} num tempo $T > 0$, isto é $\pi(1, v, T) = g^{-1}$. Para isto consideremos o controle definido por:

$$v(s) = \begin{cases} -u(t-s) & , \quad 0 \leq s \leq t \\ u(s) & , \quad s > t. \end{cases}$$

Tem-se que $v \in S(\Omega)$, pois v foi definido a partir de u . Para olhar a trajetória correspondente, só consideramos para $0 \leq s \leq t$. No caso $s > t$ é trivial, pois é a correspondente a u . Um candidato à trajetória correspondente a v em $0 \leq s \leq t$ é dado por $f(s) = \pi(1, u, t-s)$. De fato

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m -u_i(t-s)X^i(\pi(1, u, t-s)) &= -\sum_{i=1}^m u_i(w)X^i(\pi(1, u, w)) , \quad w = t-s \\ &= -\frac{d\pi}{dw}(1, u, w) = \frac{d\pi}{dw}(1, u, w) \cdot \frac{dw}{ds} = \frac{d\pi}{ds}(1, u, t-s). \end{aligned}$$

Por tanto $f(\cdot)$ é trajetória associada ao controle v em $0 \leq s \leq t$, isto é

$$\dot{f}(s) = \sum_{i=1}^m v_i(s)X_i(f(s)).$$

Para $s = 0$, temos que $f(0) = \pi(1, u, t) = g$ e por ter a mesma condição inicial com a trajetória $\alpha(\cdot)$ definida por $\alpha(s) = \pi(1, v, s).g = R_g(\pi(1, v, s))$ correspondente a v obtém-se que $\alpha(s) = f(s)$. Avaliando em $s = t$ consegue-se $\pi(1, v, t).g = 1$, por conseguinte $\pi(1, v, t) = g^{-1}$.

Para mostrar (1) será suficiente que $\mathbf{A}(1) \subseteq A(1, T)$, para cada $T > 0$. Para isso, seja $g \in \mathbf{A}(1) = \bigcup_{t \geq 0} \mathbf{A}(1, t)$, então existe $t > 0$, um controle $u \in S(\Omega)$ tal que $g = \pi(1, u, t)$. Procurar que $g \in A(1, T)$ é encontrar um controle $v \in S(\Omega)$ satisfazendo $\pi(1, v, T) = g$. Isto é para $s > 0$ definimos

$$v(\tau) = \frac{t}{s} u\left(\frac{\tau t}{s}\right) \quad \text{onde} \quad v_i(\tau) = \frac{t}{s} u_i\left(\frac{\tau t}{s}\right), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

dependendo de s tem-se aumento ou diminuição de velocidade, independente disto, um candidato para sua trajetória é dado por

$$\alpha(\tau) = \pi(1, v, \tau) = \pi(1, u, \frac{\tau t}{s})$$

com efeito

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m v_i(\tau) X_i(\pi(1, v, \tau)) &= \sum_{i=1}^m \frac{t}{s} u_i\left(\frac{\tau t}{s}\right) X_i(\pi(1, u, \frac{\tau t}{s})) = \frac{t}{s} \sum_{i=1}^m u_i(w) X_i(\pi(1, u, w)) \\ &= \frac{t}{s} \frac{d\pi}{dw}(1, u, w) = \frac{d\pi}{dw}(1, u, w) \cdot \frac{dw}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \pi(1, u, \frac{\tau t}{s}) = \dot{\alpha}(\tau) \end{aligned}$$

onde $w = \frac{\tau t}{s}$.

Além do mais $\pi(1, v, 0) = \pi(1, u, 0) = 1$ e $\pi(1, v, s) = \pi(1, u, t) = g$. Como s foi escolhido arbitrário e $g = \pi(1, u, t) = \pi(1, v, s) \in A(1, s)$ para cada $s > 0$, então $\mathbf{A}(1) \subseteq A(1, s)$ e

$$\mathbf{A}(1) = A(1, T) = G_{\Sigma}(1). \quad \blacksquare$$

O lema a seguir será utilizado na demonstração do teorema abaixo e que permitirá dar uma caracterização de controlabilidade no caso não simétrico.

Lema 1.6.8. Seja (G, Σ, Ω) um sistema invariante. Se

$$\overline{\mathbf{A}(1)} = G_{\Sigma}(1), \text{ então } \mathbf{A}(1) = G_{\Sigma}(1)$$

Prova. Pela conexidade de $G_{\Sigma}(1)$, é suficiente encontrar uma vizinhança $\tilde{V} \ni 1$ tal que $\tilde{V} \subseteq \mathbf{A}(1)$. Como $\text{int } \mathbf{A}(1) \neq \emptyset$ na topologia de $G_{\Sigma}(1)$, então temos que, se $g \in \text{int } \mathbf{A}(1)$,

existe um conjunto aberto V (topologia de $G_\Sigma(1)$) tal que $g \in V \subset \text{int } (\mathbf{A}(1))$, mas $\psi : G \longrightarrow G$ definido por $\varphi(h) = h^{-1}$ e restrito a $G_\Sigma(1)$ é um difeomorfismo, pois $G_\Sigma(1)$ é quasi-regular, então $W = \psi(V) = \{h^{-1} : h \in V\}$ é aberto em $G_\Sigma(1)$ e pela densidade temos que $W \cap \mathbf{A}(1) \neq \emptyset$. Isto é, existe $h \in W \cap \mathbf{A}(1)$ e pela translação restrita a $G_\Sigma(1)$ temos que Vh aberto em $G_\Sigma(1)$.

Além do mais $Vh \subset \mathbf{A}(1)$, ($\mathbf{A}(1)$ é semigrupo). Como $h \in W$ segue-se que $h^{-1} \in V$ e assim $1 \in Vh = \tilde{V}$. O resultado segue então do fato de $G_\Sigma(1)$ ser grupo de Lie conexo e por tanto é gerado por qualquer vizinhança da identidade. ■

Como foi visto no caso simétrico as conclusões $\mathbf{A}(1) = G_\Sigma(1)$ e $A(1, T) = \mathbf{A}(1)$ para cada $T > 0$, são satisfeitos. Mas em uma situação geral, podem ser mantidos parcialmente, isto é, na segunda parte só assegura a existência de um tempo $T > 0$, tal que todo ponto de $\mathbf{A}(1)$ pode ser atingido até um tempo T , assim temos.

Teorema 1.6.9. Seja (G, Σ, Ω) sistema de controle invariante. Suponhamos que $G_\Sigma(1)$ é compacto. Então

- (i) $\mathbf{A}(1) = G_\Sigma(1)$
- (ii) existe $T > 0$ tal que $\mathbf{A}(1, T) = \mathbf{A}(1)$

Prova. Pelo Teorema 1.2.7 $\text{int } \mathbf{A}(1) \neq \emptyset$ (na topologia intrínseca de $G_\Sigma(1)$). Por tanto pelo Lema 1.6.8 será suficiente mostrar que $\overline{\mathbf{A}(1)} = G_\Sigma(1)$. De fato, como $\mathbf{A}(1)$ é um semigrupo, então $\overline{\mathbf{A}(1)} = H$ (na topologia de $G_\Sigma(1)$) é um semigrupo.

Afirmamos que H é um grupo. De fato, como H é semigrupo só falta ver que para cada $h \in H$ deve-se ter $h^{-1} \in H$. Se $h \in H$ então para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $h^n \in H$, (H semigrupo) logo temos $(h^n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em H e como $G_\Sigma(1)$ é compacto, $(h^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência $(h^{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente, isto é, $h^{n(k)} \longrightarrow g$, para algum $g \in G_\Sigma(1)$.

Notemos que é possível a escolha da subsequência $(n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ estritamente crescente ($n(k) < n(k+1)$ para cada $k \in \mathbb{N}$). Pelo fato de H ser fechado tem-se $g \in H$. Se $k \rightarrow \infty$ temos $h^{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} h^{n(k+1)-n(k)-1}$, pois $\lim_{k \rightarrow \infty} h^{n(k+1)-n(k)} = 1$. O fato que $n(k+1) - n(k) > 0$ garante que $h_k = h^{n(k+1)-n(k)-1} \in H$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e $h^{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k$. Como H é fechado, segue-se que $h^{-1} \in H$. Por outro lado $\text{int } \mathbf{A}(1) \neq \emptyset$ na topologia de $G_\Sigma(1)$, (Teorema 1.2.7) então existe um aberto não vazio U tal que $U \subseteq \mathbf{A}(1)$ e como $\mathbf{A}(1) \subseteq H$, $U \subseteq H$ é aberto (topologia de $G_\Sigma(1)$). Tomando $g \in U$ e sendo H subgrupo, existe

$g^{-1} \in H$. Daí que a translação $R_{g^{-1}} : G_{\Sigma}(1) \longrightarrow G_{\Sigma}(1)$ é um difeomorfismo, pois $G_{\Sigma}(1)$ é quasi-regular. Portanto $R_{g^{-1}}(U) = Ug^{-1}$ é um aberto em $G_{\Sigma}(1)$ e mais ainda $1 \in Ug^{-1}$.

Por ser H subgrupo $Ug^{-1} \subset H$. Mas H é fechado, daí que H é um subgrupo de Lie conexo de $G_{\Sigma}(1)$. Finalmente $H = G_{\Sigma}(1)$.

Agora mostramos (ii). Tem-se

$$G_{\Sigma}(1) = \mathbf{A}(1) = \bigcup_{t \geq 0} \text{int } \mathbf{A}(1, t)$$

De fato, seja $W(t) = \text{int } \mathbf{A}(1, t)$, logo $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ é uma sequencia crescente, pois para $t_1 < t_2$ tem-se $W(t_1) \subseteq W(t_2)$, então $\bigcup_{t \geq 0} \text{int } \mathbf{A}(1, t) \subseteq G_{\Sigma}(1)$ é evidente. Para o recíproco

$G_{\Sigma}(1) \subseteq \bigcup_{t \geq 0} W(t)$, tomamos $g \in G_{\Sigma}(1) = \mathbf{A}(1)$, então $g \in \mathbf{A}(1, t)$ para algum $t \geq 0$. Se

consideramos $W(t') \neq \emptyset$, pode-se escolher $h \in W(t')$ e como $h^{-1} \in \mathbf{A}(1)$ segue-se que $h^{-1} \in \mathbf{A}(1, t'')$ para algum $t'' > 0$. Logo tem-se que $g \in \mathbf{A}(1, t)$, $h \in W(t')$, $h^{-1} \in \mathbf{A}(1, t'')$. Mas $g = 1.g = h.h^{-1}.g$ e daí que $g \in W(t')h^{-1}g$. Mas $W(t')h^{-1}g$ é aberto pois $W(t')$ é aberto.

Afirmamos que $W(t')h^{-1}.g \subset W(t + t' + t'')$. De fato,

$$W(t')h^{-1}g \subseteq W(t')\mathbf{A}(1, t'')\mathbf{A}(1, t) \subseteq \mathbf{A}(1, t')\mathbf{A}(1, t'')\mathbf{A}(1, t) \subseteq \mathbf{A}(1, t + t' + t'')$$

e como $W(t')$ é aberto, $W(t')\mathbf{A}(1, t'')\mathbf{A}(1, t) = W(t')B$ é aberto, onde $B = \mathbf{A}(1, t'')\mathbf{A}(1, t)$ pois $W(t').B = \bigcup_{b \in B} W(t').b$ e $W(t').b$ é aberto. Finalmente de $W(t')B \subset \mathbf{A}(1, t + t' + t'')$ obtemos que $W(t')B \subseteq W(t + t' + t'')$. Mas $W(t')h^{-1}.g \subset W(t + t' + t'')$, logo $g \in W(t + t' + t'')$. Por tanto $G_{\Sigma}(1) = \bigcup_{t \geq 0} W(t)$.

Como $G_{\Sigma}(1)$ é compacto obtém-se $G_{\Sigma}(1) = \bigcup_{i=1}^k W(t_i)$ e pela ordenação da inclusão, existe um $T > 0$ tal que $G_{\Sigma}(1) = W(T)$ e como $G_{\Sigma}(1) = W(T) \subseteq \mathbf{A}(1, T) \subseteq G_{\Sigma}(1)$, conclui-se que

$$\mathbf{A}(1, T) = G_{\Sigma}(1) \quad \text{para algum } T > 0. \quad \blacksquare$$

Observação. Lembrando as conclusões no caso simétrico e agora no caso não simétrico com $G_{\Sigma}(1)$ compacto temos que só é possível recuperar o fato

1) $\mathbf{A}(1) \subseteq G_{\Sigma}(1)$ é um subgrupo.

Mas o fato

2) $\mathbf{A}(1, T) = \mathbf{A}(1)$ para cada $T > 0$.

não se verifica necessariamente como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 1.6.10. Considere o grupo de Lie $SO(3) = \{A \in M(3, \mathbb{R}) : AA^T = I, \det A > 0\}$, um cálculo fácil garante que

$$T_1SO(3) = \{A \in M(3, \mathbb{R}) : A + A^T = 0\}.$$

Daí pode-se concluir que A tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$$

Seja $\beta = \{K_1, K_2, K_3\}$ uma base de $T_1SO(3)$, onde

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como pode-se verificar facilmente, tem-se $[K_1, K_2] = K_3$, $[K_3, K_1] = K_2$, $[K_2, K_3] = K_1$. Tomemos K_1 , K_2 e o sistema definido por

$$\dot{x}(t) = (K_1 + uK_2)x(t).$$

Se u é um controle e $t \rightarrow x(t)$ a trajetória correspondente com $x(0) = 1$, então

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \dot{x}_{13} \\ \dot{x}_{21} & \dot{x}_{22} & \dot{x}_{23} \\ \dot{x}_{31} & \dot{x}_{32} & \dot{x}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21} + ux_{31} & x_{22} + ux_{32} & x_{23} + ux_{33} \\ -x_{11} & -x_{12} & -x_{13} \\ -ux_{11} & -ux_{12} & -ux_{13} \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\dot{x}_{12} = x_{22} + ux_{32} \tag{1}$$

$$\dot{x}_{32} = -ux_{12} \tag{2}$$

multiplicando (1) por x_{12} e (2) por x_{32} e somando, obtém-se

$$x_{12}\dot{x}_{12} + x_{32}\dot{x}_{32} = x_{12}x_{22}, \text{ então } \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x_{12}^2 + x_{32}^2) = x_{12}x_{22}$$

como $x_{12}^2(0) + x_{32}^2(0) = 0$, pois $x(0) = 1$; consegue-se

$$(x_{12}^2 + x_{32}^2)(t) = 2 \int_0^t x_{22}(\tau) x_{12}(\tau) d\tau$$

o fato de que $x(t) \in SO(3)$ acarreta que $|x_{ij}| \leq 1$ e daí

$$(x_{12}^2 + x_{32}^2)(t) \leq 2t. \quad (3)$$

Consideremos um elemento $(a_{ij}) \in SO(3)$, com $a_{12}^2 + a_{32}^2 = 1$.

Afirmamos que (a_{ij}) não pode ser atingido desde 1 num tempo estritamente menor que $1/2$ unidades de t . De fato, como $SO(3)$ é compacto e conexo, então o sistema é controlável (Teorema 1.6.11). Seja $(x_{ij})(t)$ a trajetória que liga 1 com (a_{ij}) e suponha que é atingido num tempo estritamente menor que $1/2$, por (3) obtemos que $(x_{12}^2 + x_{32}^2)(t) < 1$ e $(x_{ij})(T) = (a_{ij})$ com $T < 1/2$, mas $a_{12}^2 + a_{32}^2 = 1$. Por tanto a afirmação é verdadeira.

Quanto à questão de controlabilidade isto é, $\mathbf{A}(1) = G$, temos até agora que

- $\mathbf{A}(1)$ é um semigrupo
- $\mathbf{A}(1) \subseteq G_\Sigma(1) = H$
- Se $\mathbf{A}(1)$ é um subgrupo, então $\mathbf{A}(1) = G_\Sigma(1)$
- No caso simétrico, $\mathbf{A}(1) = G_\Sigma(1)$
- No caso não simétrico, $\mathbf{A}(1) = G_\Sigma(1)$ desde que $G_\Sigma(1)$ é compacto.

Dessas informações se tira o seguinte teorema.

Teorema 1.6.11. Seja (G, Σ, Ω) um sistema invariante.

- a) Se o sistema é controlável, então G é conexo e $AL(\Sigma) = T_1G$.
- b) Se G é compacto ou se o sistema é simétrico, então G conexo e $AL(\Sigma) = T_1G$ implica que o sistema é controlável.

Prova. a) Se (G, Σ, Ω) é controlável, então $\mathbf{A}(1) = G$ e como $\mathbf{A}(1) \subseteq G_\Sigma(1) \subseteq G$, segue-se que $G_\Sigma(1) = G$, e assim G é conexo e $T_1G = AL(\Sigma)$.

b) Suponhamos que G é compacto, e como G é conexo e $AL(\Sigma) = T_1G$, o subgrupo de Lie conexo associado é G , então $G = G_\Sigma(1)$, e pelo Teorema 1.6.9 (i) temos $\mathbf{A}(1) = G_\Sigma(1) = G$, logo $\mathbf{A}(g) = G$ para cada $g \in G$. Isto é, o sistema é controlável.

Agora devemos supor que o sistema é simétrico. Neste caso pelo Teorema 1.6.7 temos $\mathbf{A}(1) = G_\Sigma(1)$ e pelo argumento usado em b) temos $\mathbf{A}(1) = G_\Sigma(1) = G$ e portanto

$\mathbf{A}(g) = G$ para todo $g \in G$. ■

Note que nas proposições anteriores a hipótese de ser $G_\Sigma(1)$ compacto ou (G, Σ, Ω) simétrico é para assegurar que $\mathbf{A}(1)$ é um subgrupo de $G_\Sigma(1)$. Mas com a hipótese assumida de ser $\mathbf{A}(1)$ subgrupo de $G_\Sigma(1)$, pode-se ter uma caracterização de controlabilidade.

Teorema 1.6.12. O sistema (G, Σ, Ω) é controlável se e só se as seguintes condições se verificam simultaneamente.

- (i) $\mathbf{A}(1)$ é um subgrupo de G .
- (ii) G é conexo.
- (iii) $AL(\Sigma) \simeq T_1G$.

Prova. É uma reformulação do teorema 1.6.11. ■

A condição (iii) pelo fato de os campos serem analíticos se reduz a

$$AL(\Sigma) \simeq T_1G \text{ se e só se } \text{int } S_\Sigma(1) \neq \emptyset.$$

Concluimos que controlabilidade é equivalente à propriedade de acessibilidade, desde que G for conexo e

- a) (G, Σ, Ω) é simétrico ou
- b) G é compacto.

Quando a) e b) não se verificam, acessibilidade mais conexidade não necessariamente implicam controlabilidade. Como o mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 1.6.13. Seja $G = Sl(2, \mathbb{R})$ o grupo de Lie fechado das matrizes de determinante um. Este grupo é conexo mas não compacto e sua álgebra de Lie é

$$T_1G = \{A \in M(2, \mathbb{R}) : \text{tr } A = 0\}$$

onde tr indica o traço de matriz. Para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Sigma = \{A, B\}$$

obtemos que $AL(\Sigma) = \langle A, B, [A, B] \rangle$, $A, B \in M(2, \mathbb{R})$ e traço $A = \text{traço } B = 0$. Portanto, por um cálculo de colchetes se mostra que A, B geram $T_1Sl(2, \mathbb{R})$.

Consideremos o seguinte sistema invariante

$$\dot{x}(t) = (A + uB)x(t).$$

Para um controle $u \in S(\Omega)$, seja $x(t) = \pi(1, u, t)$ a trajetória correspondente com $x(0) = 1$ e vejamos que propriedade satisfaz. Como

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{21} & \dot{x}_{22} \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11} + ux_{21} & x_{12} + ux_{22} \\ -x_{21} + ux_{11} & x_{22} + ux_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

considerando as entradas $\dot{x}_{11}, \dot{x}_{21}$ obtemos um sistema

$$\dot{x}_{11} = x_{11} + ux_{21} \tag{1}$$

$$\dot{x}_{21} = -x_{21} + ux_{11}. \tag{2}$$

Logo, multiplicando (1) por x_{11} e (2) por $-x_{21}$ e somando obtemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x_{11}^2 - x_{21}^2) = x_{11}^2 + x_{21}^2$$

isto é, $f(t) = x_{11}^2(t) - x_{21}^2(t)$ é não decrescente ($f'(t) \geq 0$). Como $x(0) = I$, então $x_{11}(0) = 1$, $x_{21}(0) = 0$. Mas $f(0) = 1$ daí que $f(t) \geq 1$ para todo $t \geq 0$, isto é

$$x_{11}^2 - x_{21}^2 \geq 1. \tag{3}$$

Assim todo elemento atingido desde a identidade $1 \in Sl(2, \mathbb{R})$ satisfaz a propriedade (3). Propomos um candidato

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det C = 1, \quad \text{logo } C \in Sl(2, \mathbb{R}). \quad \text{Como } c_{11}^2 = 1, c_{21}^2 = \frac{1}{4}, \text{ então}$$

$c_{11}^2 - c_{21}^2 = \frac{3}{4} < 1$ o que contradiz (3), por tanto c não pode ser atingido desde 1. Isto é

$$\mathbf{A}(1) \subsetneq Sl(2, \mathbb{R})$$

e o sistema não é controlável.

Observação. O Teorema 1.6.11 pode ser provado de uma forma alternativa usando o teorema 1.3.8 (Lobry). Assumindo as hipóteses do Teorema 1.6.11, G compacto, conexo e $AL(\Sigma) = T_1G$, vemos que a última condição fornece acessibilidade de Σ e $-\Sigma$.

Para obter a condição $\overline{R}_X = M$, para cada $X \in \Sigma$. Utilizamos a compacidade de G a qual implica que existe uma medida finita μ invariante a esquerda e por normalização obtém-se o que se chama a medida de Haar, que é uma medida de probabilidade (veja [6]).

Mas para $X \in \Sigma$ o fluxo é dado por

$$X_t(g) = L_{\exp tX}(g) = (\exp tX).g.$$

Logo μ é invariante por $X \in \Sigma$ e $\text{supp } \mu = M$, pois μ provém de uma forma volume. Daí que $\overline{R}_X = M$ (Proposição 1.3.9). Portanto, pelo Teorema 1.3.8, Σ é controlável, isto é, $S_\Sigma(g) = G$, para cada $g \in G$. Assumindo que o semigrupo controle toma valores em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ e que $Aff(\Omega) = \mathbb{R}^m$ temos

$$AL(\Sigma_\Omega) = AL(\Sigma) = T_1G$$

onde $\Sigma_\Omega = \{X_0 + \sum_{i=1}^m u_i X_i : u = (u_1, \dots, u_m) \in \Omega\}$ e segundo o Teorema 1.2.7 tem-se $G = S_{\Sigma_\Omega}(g) \subseteq \mathbf{A}(g)$, portanto $\mathbf{A}(g) = G$. ■

Evidentemente o teorema 1.6.11 pode ser colocado também num contexto de famílias de campos invariantes em G .

CAPÍTULO II

FORMALISMO DAS SERIES EXPONENCIAIS DE LIE

Neste capítulo desenvolve-se o formalismo de séries exponenciais de Lie que foi introduzido por K.T. Chen [2] e utilizado por H.J. Sussman [16], [17] para resolver um problema de controlabilidade local (conjectura de Hermes).

Seja Σ um conjunto finito de indeterminadas, $\hat{A}(\Sigma)$ a álgebra das séries de potências formais não comutativa e $\hat{A}L(\Sigma) \subset \hat{A}(\Sigma)$ a álgebra de Lie constituída por somas formais de elementos de $AL(\Sigma)$.

Provaremos aqui a existência de um monomorfismo (Ser) do semigrupo de controle U_m em $\hat{A}(\Sigma)$. Isto nos permite estudar o comportamento assintótico, na vizinhança de um ponto, das trajetórias do sistema de controle

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) F_i(x(t))$$

onde $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ e $F_0, \dots, F_m$ são campos definidos na variedade M .

2.1. Desenvolvimento exponencial e aproximação nilpotente

O semigrupo U_m que usaremos será

$$U_m = \{u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m : u \text{ mensurável e Lebesgue-integrável}\}$$

onde T não sempre é fixo, daí que denotamos por $T(u) = T$ o tempo terminal correspondente a $u \in U_m$. Para se ter compatibilidade com sistemas invariantes a direita (cap I) modificamos a ordem da operação de U_m .

Para $u, v \in U_m$ define-se

$$(u \# v)(t) = \begin{cases} v(t) & 0 \leq t \leq T(v) \\ u(t - T(v)) & T(v) < t \leq T(v) + T(u). \end{cases}$$

Em vista do nosso objetivo, que é o de relacionar U_m com sistemas de controle,

- Procuramos um espaço ambiente para representar U_m e
- Uma aplicação Ser: $U_m \longrightarrow \text{Espaço ambiente}$

de tal forma que o espaço ambiente estabeleça uma ponte entre U_m e sua representação dada por um sistema de controle.

Por isso introduzimos uma família de indeterminadas $\Sigma = (X_0, \dots, X_m)$ e construímos o espaço ambiente de maneira formal. Como Σ é uma família de objetos, pode-se gerar um espaço vetorial V i.e.

$$V = \mathbb{R}.X_0 \oplus \mathbb{R}.X_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}.X_m$$

e consideramos o produto tensorial $V \otimes V$ (i.e. $V \otimes V = \mathcal{F}(V \times V)/R(V \times V)$ onde $\mathcal{F}(V \times V)$ é o espaço vetorial livre gerado por $V \times V$ e $R(V \times V) \subseteq \mathcal{F}(V \times V)$ o subespaço gerado pelos elementos abaixo.

$$\begin{aligned} (u, v_1 + v_2) - (u, v_1) - (u, v_2) & \quad u, v_1, v_2 \in V \\ (u_1 + u_2, v) - (u_1, v) - (u_2, v) & \quad u_1, u_2, v \in V \\ (\alpha u, v) - \alpha(u, v) & \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ (u, \beta v) - \beta(u, v) & \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim, tomamos produto tensorial $\overbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}^{k\text{-vezes}}$ e denotemos este produto por $L_k = V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ que é um espaço vetorial. Daí obtém-se a álgebra tensorial $A(\Sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus L_k$ o qual é a álgebra livre associativa gerada por Σ , satisfazendo a propriedade de ser uma álgebra graduada. Isto é

- i) L_k é subespaço de $A(\Sigma)$, para cada $k \in \mathbb{N}$.
- ii) $L_k \cdot L_p \subseteq L_{k+p}$ para cada $k, p \in \mathbb{N}$.

Agora explicitamos um elemento de $A(\Sigma)$, i.e. para $Y \in A(\Sigma)$ temos que $Y = \sum_{k=0}^{\infty} W_k$, onde $W_k \in L_k$ e $W_k = 0$ exceto para um número finito de valores de k . Então $W_k = \sum_{|I|=k} \alpha_I X_I$ e

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|I|=k} \alpha_I X_I = \sum_I \alpha_I X_I$$

onde $X_I = X_{i_1} \otimes \dots \otimes X_{i_k}$, $I = (i_1, \dots, i_k)$ e $|I| = k$ (comprimento de I). Por simplicidade de notação escrevemos $X_{i_1} \otimes \dots \otimes X_{i_k} = X_{i_1} \dots X_{i_k}$.

O produto em $A(\Sigma)$ é dado nos elementos da base, isto é para $X_I, X_J \in A(\Sigma)$ com $I = (i_1, \dots, i_k)$, $J = (j_1, \dots, j_s)$ definimos por

$$X_I X_J = X_{I \times J}$$

onde $I \times J = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_s)$.

Na verdade $A(\Sigma)$ pode ser pensado como sendo o anel de polinômios nas indeterminadas $\Sigma = (X_0, \dots, X_m)$. Para $Y \in A(\Sigma)$ o grau total de Y (respectivamente grau parcial de Y em relação a X_i) é definido como o maior grau do monômio com coeficiente não nulo que aparece em Y (respectivamente o maior grau em relação a X_i do monômio com coeficiente não nulo que aparece em Y). Tais graus serão denotados por $\partial(Y), \partial_i(Y)$ respectivamente.

Queremos mergulhar U_m , através de uma aplicação $u \longrightarrow Ser(u)$. Para isso consideramos, ao invés de $A(\Sigma)$, que é uma álgebra de polinômios, a álgebra das series formais

$$\hat{A}(\Sigma) = \{\sum a_I X_I : a_I \in \mathbb{R}\}$$

cujas operações são induzidas das de $A(\Sigma)$ definindo componente a componente. Assim o produto em $\hat{A}(\Sigma)$ é dado para $Y = \sum a_I X_I$ e $Z = \sum b_J X_J$, por $YZ = (\sum a_I X_I) (\sum b_J X_J) = \sum c_K X_K$, onde $c_K = \sum_{|I|+|J|=|K|} a_I b_J$.

Definiremos adiante uma aplicação

$$Ser : U_m \longrightarrow \hat{A}(\Sigma)$$

de tal modo que seja um homomorfismo de semigrupos, e que permitirá olhar $Ser(U_m)$ como um sub-semigrupo de $\hat{A}(\Sigma)$. Dessa forma, um sistema de controle será olhado como uma série exponencial de Lie.

Para $u \in U_m$ e $u = (u_1, \dots, u_m)$ definimos em $\hat{A}(\Sigma)$, uma equação diferencial formal

$$\dot{Y}(t) = (X_0 + \sum_{i=1}^m u_i(t) X_i) Y(t). \quad (1)$$

Antes de estudá-la, definamos uma solução de (1) com condição inicial.

Definição 2.1.1. Uma solução de (1) que passa por Z em $t = 0$ é uma aplicação

$$Y : [0, T(u)] \longrightarrow \hat{A}(\Sigma)$$

tal que:

- i) $Y(0) = Z$
- ii) $Y(0)$ satisfaz a equação diferencial para cada componente da série.

Explicitamente os itens (i), (ii) podem ser dados componente a componente. Sejam

$$Y(t) = \sum y_I(t)X_I \quad , Z = \sum z_I X_I \quad , \quad Y(0) = Z$$

como na definição. Agora olhamos (i) componente a componente. Para isso seja $Y(0) = Z$ então $z_I = y_I(0)$ para cada $I = (i_1, \dots, i_k)$.

Na condição (ii) derivamos a solução de (1) e obtemos

$$\dot{Y} = \sum \dot{y}_I(t)X_I \tag{2}$$

logo substituindo $Y(\cdot)$ na equação (1) temos que

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= (X_0 + \sum_{i=1}^m u_i(t)X_i) \sum_J y_J(t)X_J \\ \dot{Y}(t) &= \sum_J y_J(t)X_0X_J + \sum_{i=1}^m \sum_J u_i(t)y_J(t)X_iX_J \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_J u_i(t)y_J(t)X_iX_J = \sum_{\{i\} \times J} u_i(t)y_J(t)X_iX_J \end{aligned} \tag{3}$$

onde colocamos $u_0(t) = 1$.

Para que (1), (2) e (3) sejam compatíveis deve acontecer que $I = \{i\} \times J$, onde $0 \leq i \leq m$. Logo

$$\dot{y}_I(t) = u_i(t)y_J(t) \quad \text{desde que} \quad I = \{i\} \times J.$$

Agora suponha que $Z = 1 = \sum z_I X_I$, com $I = \phi$ é a condição inicial. Constrói-se uma solução recursivamente como segue: $y_\phi = z_\phi = 1$ e para $I = (i_1, \dots, i_k) \neq \phi$ temos

$$y_{\{i\} \times J}(t) = \int_0^t u_i(\tau)y_J(\tau)d\tau$$

$$y_I(t) = y_{\{i_1\} \times J_{k-1}}(t) = \int_0^t u_{i_1}(\tau_1)y_{J_{k-1}}(\tau_1)d\tau_1$$

$$y_{J_{k-1}}(\tau_1) = y_{\{i_2\} \times J_{k-2}}(\tau_1) = \int_0^{\tau_1} u_{i_2}(\tau_2)y_{J_{k-2}}(\tau_2)d\tau_2$$

$$\begin{aligned}
y_{J_{k-2}}(\tau_2) &= y_{\{i_3\} \times J_{k-3}}(\tau_2) = \int_0^{\tau_2} u_{i_3}(\tau_3) y_{J_{k-3}}(\tau_3) d\tau_3 \\
&\vdots \\
y_I(t) &= \int_0^t \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1) u_{i_2}(\tau_2) \dots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k d\tau_{k-1} \dots d\tau_1 \quad I = (i_1, \dots, i_k).
\end{aligned}$$

Essa última integral múltipla é escrita de forma abreviada como

$$y_I(t) = \int_0^t u_I \quad , \text{ para } I \neq \phi.$$

Assim a solução que passa por 1 é dada por

$$Y(t) = \sum \left(\int_0^t u_I \right) X_I$$

onde $\int_0^t u_I = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1) \dots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \dots d\tau_1$, se $I = (i_1, \dots, i_k) \neq \phi$.

Como pode ser visto, ela pode ser calculada recursivamente partindo de um valor inicial. Pela construção ela existe e é única. Logo temos uma aplicação bem definida

$$\begin{aligned}
Ser : U_m &\longrightarrow \hat{A}(\Sigma) \\
u &\longrightarrow Ser(u) = Y(T(u))
\end{aligned}$$

onde $Y : [0, T(u)] \longrightarrow \hat{A}(\Sigma)$ é a solução associada ao controle u com $Y(0) = 1$.

Proposição 2.1.2. A aplicação $Ser : U_m \longrightarrow \hat{A}(\Sigma)$ é injetora e satisfaz.

$$Ser(u \# v) = Ser(u) \cdot Ser(v)$$

para $u, v \in U_m$.

Prova. Sejam $u, v \in U_m$. Para $u \in U_m$, $Ser(u) = Y(T(u))$, onde $Y(\cdot)$ é a solução de (1) i.e.

$$\dot{Y}(t) = (X_0 + \sum_{i=1}^m u_i X_i) Y(t)$$

definida em $0 \leq t \leq T(u)$, com condição inicial $Y(0) = 1$. Se tomamos a curva $\alpha(t) = Y(t) Ser(v)$ facilmente pode ser verificado que é uma solução da equação (1) com condição inicial $Ser(v)$, pois $\alpha(0) = Ser(v)$.

Por outro lado para $u \# v \in U_m$ tomemos $Ser(u \# v)$, então $Ser(u \# v) = Y_1(T(u \# v))$ onde $Y_1(\cdot)$ é uma solução de

$$\dot{Y}(t) = (X_0 + \sum_{i=1}^m (u \# v)_i X_i) Y(t) \quad (*)$$

definida em $0 \leq t \leq T(u) + T(v)$ e com condição inicial $Y_1(0) = 1$, mas

$$(u \# v)(t) = \begin{cases} v(t), & 0 \leq t < T(v) \\ u(t - T(v)), & T(v) < t \leq T(v) + T(u). \end{cases}$$

Se tomamos a curva $\beta(t) = Y_1(t + T(v))$ com $0 \leq t \leq T(u)$, pela definição do controle $u \# v$ temos que ela é uma solução da equação (*) em $T(v) < t \leq T(v) + T(u)$ e como $\beta(0) = Y_1(T(v)) = Ser(v) = \alpha(0)$ da unicidade segue-se que

$$Y_1(t + T(v)) = Y(t) \cdot Ser(v)$$

onde $0 \leq t \leq T(u)$. Em particular para $t = T(u)$ temos

$$Ser(u \# v) = Ser(u) \cdot Ser(v).$$

Para a injetividade considere $Ser(u) = Ser(v)$ $u, v \in U_m$, $Ser(u) = Y(T(u))$ onde $Y(\cdot)$ é uma solução da equação

$$\dot{Y}(t) = (X_0 + \sum_{i=1}^m u_i X_i) Y(t).$$

Mas $Y(t) = \sum_I y_I(t) X_I$ é determinado pelas equações $y_I(0) = 1$, se $I = \phi$ e

$$y_I(t) = \int_0^t u_i(\tau) y_J(\tau) d\tau, \quad I = \{i\} \times J \text{ se } I \neq \phi.$$

Para $I = (0)$, temos $\int_0^T u_0(t) dt = T$ que é o coeficiente de X_0 . Isto significa que T pode ser recuperado a partir de $Ser(u)$. Se $1 \leq i \leq m$ e $k \geq 0$, segue-se que o coeficiente de $X_i X_0^k$ em $Ser(u)$ é

$$y_I(T) = \frac{1}{k!} \int_0^T t^k u_i(t) dt.$$

Pois $X_i X_0^k$ corresponde ao multi-índice $I = (i, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k\text{-vezes}})$ daí que

$$\begin{aligned} y_I(T) &= \int_0^T \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_k} u_i(\tau_1) u_0(\tau_2) \dots u_0(\tau_{k+1}) d\tau_{k+1} \dots d\tau_1 \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^T t^k u_i(t) dt. \end{aligned}$$

Igualmente para $Ser(v) = \tilde{Y}(T(v))$ temos que

$$\tilde{y}_I(T) = \frac{1}{k!} \int_0^T t^k v_i(t) dt, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}$$

e como $Ser(u) = Ser(v)$, segue-se de se igualar termos que

$$\int_0^T t^k (u_i(t) - v_i(t)) dt = 0, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Mas, isso acarreta que

$$\int_0^T f(t)(u_i(t) - v_i(t)) dt = 0, \text{ para cada } f \in C_c[0, T]. \quad (*)$$

De fato, se $P[0, T]$ denota o espaço dos polinômios, da densidade obtemos que $f = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n, p_n \in P[0, T]$, na norma $\|\cdot\|_\infty$ e isto a sua vez garante que

$$\left| \int_0^T f(t)(u_i(t) - v_i(t)) dt \right| \leq \|f - p_n\|_\infty \|u_i - v_i\|_{L^1}.$$

Logo, tomando o limite obtemos (*). Por tanto, $u_i \equiv v_i, i = 1, 2, \dots, m$ (veja [1], Lema IV.2). Essencialmente temos $u \equiv v$. ■

Observação. A Proposição 2.1.2 permite mergulhar U_m em $\hat{A}(\Sigma)$ como um sub-semigrupo. Por razões que serão vistas mais adiante ainda pode-se melhorar o mergulho $Ser(U_m) \subseteq \hat{A}(\Sigma)$ para $Ser(U_m) \subseteq \hat{G}(\Sigma)$, onde $\hat{G}(\Sigma)$ será definido logo mais (grupo das séries exponenciais de Lie). Isto será mostrado através de uma aproximação por grupos de Lie nilpotentes $G^N(\Sigma)$ que dão como limite projetivo $\hat{G}(\Sigma)$.

Queremos expressar $Ser(U_m)$ como o conjunto de pontos atingíveis a partir de 1 do sistema definido acima, mas definido no grupo $\hat{G}(\Sigma)$ que na realidade não é um grupo de Lie. Para tal seja $N \in \mathbb{N}$ e consideremos o conjunto $A^N(\Sigma)$, que é uma álgebra nilpotente livre associativa obtida da seguinte maneira.

Se $Y \in \hat{A}(\Sigma)$ então $Y = \sum y_I X_I$, logo definamos uma aplicação τ_N chamada truncamento que em cada um dos casos abaixo é a mesma, isto é

$$\tau^N : \hat{A}(\Sigma) \longrightarrow A^N(\Sigma)$$

$$\tau^N : A(\Sigma) \longrightarrow A^N(\Sigma) \quad \tau^N(Y) = \sum_{|I| \leq N} y_I X_I$$

$$\tau^N : AL(\Sigma) \longrightarrow AL^N(\Sigma) .$$

Em $A^N(\Sigma)$ serão considerados elementos da forma $Y = \sum_{|I| \leq N} y_I X_I$, como pode-se observar $A^N(\Sigma)$ tem estrutura de subespaço vetorial mas não de subálgebra, embora podemos torná-lo em uma álgebra. Para isto introduzimos o produto induzido de $\hat{A}(\Sigma)$ com uma pequena variação.

Isto é para $X_I, X_J \in A^N(\Sigma)$, temos que $|I| \leq N, |J| \leq N, I = (i_1, \dots, i_k), J = (j_1, \dots, j_s)$. Quando efetuamos o produto $X_I \cdot X_J$ temos duas situações a determinar: $|I| + |J| \leq N$ ou $|I| + |J| > N$. No primeiro caso o produto é o mesmo, mas no segundo caso definimos $X_I \cdot X_J = 0$; concretamente $X_I = 0$ se $|I| > N$. Disto segue-se que $A^N(\Sigma)$ é uma álgebra nilpotente associativa de ordem $N + 1$.

Para poder olhar, como o sistema de equações definido em $\hat{A}(\Sigma)$ se transforma em uma equação de evolução definida em $A^N(\Sigma)$, se apresenta outra forma de obter $A^N(\Sigma)$.

Seja o conjunto $I^N(\Sigma) = \{Y \in \hat{A}(\Sigma) : Y = \sum_{|I| > N} Y_I X_I\}$. Como pode ser verificado ele é claramente um ideal. Daí que $\hat{A}(\Sigma)/I^N(\Sigma)$ é uma álgebra.

Se $\pi : \hat{A}(\Sigma) \longrightarrow \hat{A}(\Sigma)/I^N(\Sigma)$ é a projeção e $Y = \sum_I y_I X_I = \sum_{|I| \leq N} y_I X_I + \sum_{|I| > N} y_I X_I$, então

$$\pi(Y) = Y + I^N(\Sigma) = \sum_{|I| \leq N} y_I X_I + I^N(\Sigma) = \sum_{|I| \leq N} y_I (X_I + I^N(\Sigma)).$$

Como $\ker \pi = I^N(\Sigma) = \ker(\tau^N)$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}(\Sigma) & \xrightarrow{\tau^N} & A^N(\Sigma) \\ \pi \downarrow & \nearrow \sigma & \\ \hat{A}(\Sigma)/I^N(\Sigma) & & \end{array}$$

Logo $\hat{A}(\Sigma)/I^N(\Sigma) \simeq A^N(\Sigma)$. Do isomorfismo acima podemos concluir para $Y \in \hat{A}(\Sigma)$ ou $Y \in A(\Sigma)$ com $Y = \sum y_I X_I$, que $\tau^N(Y) = \sum_{|I| \leq N} y_I X_I$ e por facilidade de notação convencionaremos em denotar tal elemento por $Y_N = \tau^N(Y) = \sum_{|I| \leq N} y_I X_I$.

Em particular para $Ser(u) \in \hat{A}(\Sigma)$, por ser uma solução correspondente ao controle u obtém-se $\tau^N(Ser(u)) = \tau^N(S(T(u))) = S_N(T(u)) = Ser_N(u) = (Ser(u))_N$. Com este

truncamento o sistema definido em $\hat{A}(\Sigma)$

$$\dot{Y}(t) = (X_0 + \sum_{i=1}^m u_i(t)X_i)Y(t)$$

pode ser projetado para $A^N(\Sigma)$ mediante a aplicação π ou o truncamento τ^N ; daí que é possível obter uma equação de evolução definida em $A^N(\Sigma)$. Isto é

$$\dot{Y}(t) = X_0Y(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)X_iY(t) .$$

Como num espaço vetorial de dimensão finita um campo é só uma aplicação dele nele mesmo temos que

$$\begin{aligned} F_i : A^N(\Sigma) &\longrightarrow A^N(\Sigma) \\ Y &\longrightarrow X_iY \end{aligned}$$

define um campo em $A^N(\Sigma)$. Aparece uma pergunta natural: Qual é o fluxo de F_i ? Uma resposta a isto é dada propondo, por analogia com as álgebras de matrizes um candidato do tipo $X_t(Y) = e^{tX_i}Y$. Mas isto só faz sentido desde que a exponencial e esteja bem definida em $\hat{A}(\Sigma)$.

Se tal fato ocorre, um cálculo direto, demonstra que

$$\text{i) } \frac{dX_t}{dt}(Y) = (e^{tX_i}X_i)Y = X_i(e^{tX_i}Y) = F_i(X_t(Y))$$

$$\text{ii) } X_0(Y) = Y.$$

Tal como o fluxo está definido segue-se que os campos F_i são completos.

Como foi visto, existe a necessidade de definir $\exp$ e sua inversa $\log$; isso será feito adiante. Para isso será necessário alguma topologia sobre o espaço ambiente para poder falar de convergência no sentido de estar a série bem definida.

Para poder medir a proximidade entre duas séries de potências formais introduzimos um conceito que será chamado a ordem de uma série de potência. Para isto fixamos a série $Y = \sum_I y_I X_I$.

Definição 2.1.3. (1) A ordem $\omega(Y)$ de um elemento $Y = \sum_I y_I X_I \in \hat{A}(\Sigma)$ é definida como sendo o menor grau dos monômios com coeficiente não nulo que aparece na série. E se convencionamos em por $\omega(Y) = +\infty$, se $Y = 0$.

(2) A ordem parcial $\omega_i(Y)$ de $Y \in \hat{A}(\Sigma)$ em relação à indeterminada X_i , é o menor grau parcial em relação a X_i dos monômios que aparecem na série. Também se convencionamos em por $\omega_i(Y) = +\infty$, se Y não contém X_i .

Convém ressaltar duas propriedades de ordem de um elemento (Da mesma forma para ω_i). Isto é, para $Y, Z \in \hat{A}(\Sigma)$ tem-se

- i) $\omega(Y.Z) \geq \omega(Y) + \omega(Z)$ e
- ii) $\omega(Y + Z) \geq \min\{\omega(Y), \omega(Z)\}$.

Com efeito,

i) É só observar se o anel no qual se define $\hat{A}(\Sigma)$ é um domínio de integridade ou não. Se for um domínio de integridade tem-se da definição de grau que $\omega(Y.Z) = \omega(Y) + \omega(Z)$. Se não for domínio, então pode acontecer que o produto dos coeficientes dos monômios que definem as ordens sejam nulos, daí que teríamos que tomar o grau do monômio seguinte com coeficiente não nulo, logo $\omega(Y.Z) \geq \omega(Y) + \omega(Z)$.

ii) Para Y e Z temos que $\omega(Y) = \omega(Z)$ ou $\omega(Y) \neq \omega(Z)$. Se $\omega(Y) = \omega(Z)$, ao tomar $Y + Z$, pode acontecer que os coeficientes dos monômios que definem as ordens sejam opostos, neste caso $\omega(Y + Z) \geq \min\{\omega(Y), \omega(Z)\}$. Se $\omega(Y) \neq \omega(Z)$, supomos $\omega(Y) < \omega(Z)$. Logo ao se tomar $Y + Z$, o coeficiente que define $\omega(Y)$ não sofre alteração e como é menor tem-se a conclusão. ■

A Definição 2.1.3 fornece uma topologia para $\hat{A}(\Sigma)$ por meio de uma valorização que é definida pela seguinte aplicação $|\cdot| : \hat{A}(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$|Y| = \begin{cases} 0, & Y = 0 \\ 2^{-k}, & \omega(Y) = k \end{cases}$$

que define um valor absoluto, pois satisfaz as propriedades:

- i) $|Y| \geq 0$, $|Y| = 0$ se e só se $Y = 0$
- ii) $|Y.Z| \leq |Y|.|Z|$
- iii) $|Y + Z| \leq |Y| + |Z|$.

Com efeito,

- i) decorre da definição
- ii) decorre da propriedade $\omega(Y.Z) \geq \omega(Y) + \omega(Z)$
- iii) decorre da propriedade $\omega(Y + Z) \geq \min\{\omega(Y), \omega(Z)\}$. ■

Mais ainda este valor absoluto define uma métrica que é chamada a métrica da valorização e portanto $(\hat{A}(\Sigma), |\cdot|)$ é uma álgebra topológica.

Para definir uma série das séries de potências formais, consideremos $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}$ e para $Y \in \hat{A}(\Sigma)$ seja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k Y^k. \quad (4)$$

Para decidir a convergência da série definida em (4) usamos o critério de Cauchy, pois $\hat{A}(\Sigma)$ é completa na métrica definida pela valorização (veja [19]). Daí que a série definida em (4) converge se e só se $|Y^k| \rightarrow 0$, se e só se $\omega(Y^k) \rightarrow \infty$ se e só se $\omega(Y) \geq 1$.

Por tanto:

Se $\omega(Y) \geq 1$, então (4) faz sentido, pois Y não tem termo constante e portanto em cada grau aparece só uma soma finita.

Se $\omega(Y) = 0$, então (4) não faz sentido em geral. O coeficiente problema é o do termo constante que é da forma $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$ (envolvendo os a_k) que pode ou não convergir.

Um caso particular disto é quando consideramos as sequências $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definidas por $a_k = \frac{1}{k!}$ e $b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ respectivamente que definem, evidentemente, a exponencial e o logaritmo. Para $\omega(Y) \geq 1$ é possível definir $\exp$ e $\log$.

Definição 2.1.4. Se $Y \in \hat{A}(\Sigma)$ e $\omega(Y) \geq 1$, então

$$\exp Y = e^Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Y^k \quad \text{e} \quad \log(1 + Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} Y^k.$$

Para olhar $\exp$ e $\log$ como aplicações definidas em algum domínio, consideremos o conjunto $\hat{A}_0(\Sigma) = \{Y \in \hat{A}(\Sigma) : \omega(Y) \geq 1\}$, então $\exp$ e $\log$ são apresentadas como segue.

$$\exp : \hat{A}_0(\Sigma) \longrightarrow 1 + \hat{A}_0(\Sigma) \quad \text{e} \quad \log : 1 + \hat{A}_0(\Sigma) \longrightarrow \hat{A}_0(\Sigma).$$

Como $\exp \circ \log : 1 + \hat{A}_0(\Sigma) \longrightarrow 1 + \hat{A}_0(\Sigma)$ e $\log \circ \exp : \hat{A}_0(\Sigma) \longrightarrow \hat{A}_0(\Sigma)$ a proposição abaixo diz que eles são inversas uma da outra.

Proposição 2.1.5. Para cada $Y', Y \in \hat{A}(\Sigma)$ se verifica

$$\exp \log Y' = Y' \text{ se } \omega(Y' - 1) \geq 1 \text{ e } \log \exp Y = Y \text{ se } \omega(Y) \geq 1.$$

Prova. É um cálculo direto igual que no caso de exponencial e logaritmo de matrizes. ■

Por outro lado as álgebras livres associativas, $A(\Sigma)$, $A^N(\Sigma)$ induzem um produto de Lie

$$[Y, Z] = YZ - ZY$$

e com essa operação $A_L(\Sigma)$, $A_L^N(\Sigma)$ são as álgebras de Lie associadas a $A(\Sigma)$ e $A^N(\Sigma)$ respectivamente. Então introduzimos as notações

$AL(\Sigma)$: é a sub-álgebra de Lie de $A_L(\Sigma)$ gerada por Σ .

$AL^N(\Sigma)$: é a sub-álgebra de Lie de $A_L^N(\Sigma)$ gerada por Σ .

Definição 2.1.6. Um elemento $Y \in A(\Sigma)$ é dito de Lie, se $Y \in AL(\Sigma)$.

Observação. $A(\Sigma)$ é a álgebra envelopante universal de $AL(\Sigma)$ (veja [3]) e a álgebra $\hat{A}(\Sigma)$ também é livre associativa, e tem um análogo no sentido de Lie.

$$\hat{A}L(\Sigma) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} P_k : \text{onde } P_k \text{ é um polinômio de Lie homogêneo} \right\}.$$

Se chama polinômio de Lie os elementos de $AL(\Sigma)$ ou $AL^N(\Sigma)$. O conjunto $\hat{A}L(\Sigma)$ têm uma estrutura de álgebra de Lie pois ele é constituído de somas formais de elementos de $AL(\Sigma)$.

Definição. 2.1.7. Os elementos de $\hat{A}L(\Sigma)$ serão chamados de séries de Lie.

Seja $Y \in \hat{A}_0(\Sigma)$ e $Z \in \hat{A}_0(\Sigma)$ então faz sentido escrever $\exp Y \cdot \exp Z$. Além do mais $\exp Y \cdot \exp Z$ se expressa como uma exponencial de um elemento Lie. De fato,

Proposição 2.1.8. Dado Y, Z em $\hat{A}(\Sigma)$ com $\omega(Y) \geq 1, \omega(Z) \geq 1$. Então

$$\exp Y \cdot \exp Z = \exp(CH(Y, Z))$$

onde $CH(Y, Z)$ é dado pela fórmula de Campbell-Hausdorff, que é uma série envolvendo colchetes de Y e Z e cujos primeiros termos são

$$CH(Y, Z) = Y + Z + \frac{1}{2}[Y, Z] + \frac{1}{12}[Y, [Y, Z]] - \frac{1}{12}[Z, [Z, Y]] + \dots$$

Prova. Veja [3]. ■

Como consequência da fórmula de Campbell - Hausdorff, assumindo $Y, Z \in \hat{A}_0(\Sigma)$ e $[Y, Z] = 0$ obtém-se as seguintes duas propriedades.

- i) $\exp Y \cdot \exp Z = \exp(Y + Z)$
- ii) $\log((1 + Y)(1 + Z)) = \log(1 + Y) + \log(1 + Z)$

De fato, usando para (i) a Proposição 2.1.8 obtemos

$$\exp Y \cdot \exp Z = \exp\left(Y + Z + \frac{1}{2}[Y, Z] + \frac{1}{12}[Y, [Y, Z]] - \frac{1}{12}[Z, [Z, Y]] + \dots\right)$$

e pelo fato de ter $[Y, Z] = 0$, obtemos $\exp Y \cdot \exp Z = \exp(Y + Z)$. Para mostrar (ii) tomamos $Y, Z \in A_0(\Sigma)$, pois isto permite definir $\log$.

Se $\log(1 + Y) = W_1$, então $1 + Y = e^{W_1}$ e se $\log(1 + Z) = W_2$, então $1 + Z = e^{W_2}$ logo substituindo e aplicando a Proposição 2.1.8, obtemos

$$\begin{aligned} \log((1 + Y)(1 + Z)) &= \log(e^{W_1} e^{W_2}) = \log(e^{W_1 + W_2 + \frac{1}{2}[W_1, W_2] + \dots}) \\ &= W_1 + W_2 + \frac{1}{2}[W_1, W_2] + \dots \\ &= \log(1 + Y) + \log(1 + Z) + \frac{1}{2}[\log(1 + Y), \log(1 + Z)] + \dots \end{aligned}$$

mas $[Y, Z] = 0$, então $[W_1, W_2] = 0$ (é só usar a definição de colchete e o desenvolvimento de W_1, W_2). Por tanto

$$\log((1 + Y)(1 + Z)) = \log(1 + Y) + \log(1 + Z). \quad \blacksquare$$

Agora, podemos explicitar a imagem do mergulho $Ser : U_m \longrightarrow \hat{A}(\Sigma)$. Define-se os seguintes conjuntos.

$$\hat{G}(\Sigma) = \{Y \in \hat{A}(\Sigma) : \log Y \in \hat{A}L(\Sigma)\} \quad \text{e} \quad G^N(\Sigma) = \{Y \in A^N(\Sigma) : \log Y \in AL^N(\Sigma)\}$$

Proposição 2.1.9. Os conjuntos $\hat{G}(\Sigma)$ e $G^N(\Sigma)$ são grupos.

Prova. É só usar a fórmula de Campbell-Hausdorff:

i) Sejam $P, Q \in \hat{G}(\Sigma)$, então $\log P, \log Q \in \hat{A}L(\Sigma)$. Mas $\log(P.Q) = \log(e^{\log P}.e^{\log Q}) = \log e^R = R \in \hat{A}L(\Sigma)$, onde R é dado pela fórmula de Campbell-Hausdorff que é uma soma de colchetes de Lie e portanto $R \in \hat{A}L(\Sigma)$.

Daí que $PQ \in \hat{G}(\Sigma)$.

ii) $1 \in \hat{G}(\Sigma)$, pois $\log 1 = 0 \in \hat{A}L(\Sigma)$.

iii) Para cada $P \in \hat{G}(\Sigma)$, existe $Q \in \hat{G}(\Sigma)$ tal que $P.Q = Q.P = 1$. Para mostrar isto tomamos $Q = e^{-\log P}$. Então

$$\log P.Q = e^{-\log P}.e^{\log P} = e^0 = 1$$

pois $[-\log P, \log P] = 0$.

O caso $G^N(\Sigma)$ é análogo. ■

Os grupos $\hat{G}(\Sigma)$ e $G^N(\Sigma)$ são os grupos das séries exponenciais de Lie e grupo de Lie nilpotente respectivamente.

Para $N \in \mathbb{N}$ consideremos o grupo $G^N(\Sigma)$ e a álgebra $A^N(\Sigma)$ truncados. Essas são aproximações nilpotentes de $\hat{G}(\Sigma)$ e $\hat{A}(\Sigma)$ respectivamente. Como $\dim A^N(\Sigma) < \infty$, se obtém uma representação injetora

$$\varphi : A^N(\Sigma) \longrightarrow \text{End}(A^N(\Sigma))$$

definida por $\varphi(P) = T_p$, onde $T_p(Y) = P.Y$. Como φ é um homomorfismo e $G^N(\Sigma)$ é um grupo, então $\varphi(G^N(\Sigma))$ é um grupo. Mas $\text{End}(A^N(\Sigma)) \simeq M(n, \mathbb{R})$ para $n = \dim A^N(\Sigma)$ e pelo fato de $\varphi(G^N(\Sigma))$ ser grupo temos que $\varphi(G^N(\Sigma)) \subseteq GL(n, \mathbb{R}) \simeq \text{Inv}(\text{End}(A^N(\Sigma)))$.

Notemos que se demonstramos que $G^N(\Sigma)$ é fechado, então $\varphi(G^N(\Sigma))$ é um sub-grupo de Lie. Tomemos então uma sequência $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $Y_n \in G^N(\Sigma)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e

$Y_n \longrightarrow Y$. Como $Y_n \in G^N(\Sigma)$ temos que $\log Y_n = W_n \in AL^N(\Sigma)$, logo pela continuidade do log obtemos

$$\log Y = \log(\lim Y_n) = \lim(\log Y_n) \in AL^N(\Sigma).$$

Notemos que a última parte decorre de $AL^N(\Sigma)$ ser fechado por ser subespaço de $A^N(\Sigma)$, que é de dimensão finita. Além do mais $G^N(\Sigma)$ é simplesmente conexo. Pois isto decorre de observar que a aplicação

$$\exp : AL^N(\Sigma) \longrightarrow G^N(\Sigma)$$

é um difeomorfismo e como $AL^N(\Sigma)$ é simplesmente conexo, $G^N(\Sigma)$ o é.

Assim $G^N(\Sigma)$ pode ser identificado com um subgrupo de Lie simplesmente conexo de $GL(n, \mathbb{R})$.

Proposição 2.1.10. Para cada $N \in \mathbb{N}$, $G^N(\Sigma)$ pode ser mergulhado em $GL(n, \mathbb{R})$ como um subgrupo de Lie, simplesmente conexo, onde $n = \dim A^N(\Sigma)$.

Prova. Foi feita acima.

Agora se demonstra como a aplicação truncamento transforma a equação definida em $\hat{A}(\Sigma)$ numa equação de evolução definida em $A^N(\Sigma)$. Além do mais o semigrupo controle em $A^N(\Sigma)$, pode ser visto como o conjunto de pontos atingíveis a partir de 1 do sistema de controle definido por uma equação de evolução em $A^N(\Sigma)$.

Proposição 2.1.11 a) Para cada $N \in \mathbb{N}$, a equação

$$\dot{Y}(t) = (X_0 + \sum_{i=1}^m u_i(t) X_i) Y(t)$$

considerada como uma equação de evolução sobre $A^N(\Sigma)$, define o seguinte sistema de controle

$$\dot{Y}(t) = F_0(Y(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) F_i(Y(t))$$

onde

$$F_i : A^N(\Sigma) \longrightarrow A^N(\Sigma) \quad \text{e} \quad F_i(Y) = X_i Y, \quad i = 0, \dots, m$$

b) A álgebra de Lie $AL(F)$ gerada pelos F_i , onde $F = (F_0, \dots, F_m)$ é isomorfa a $AL^N(\Sigma)$.

c) A variedade integral maximal da distribuição $Y \longrightarrow AL(F)(Y)$ que passa por 1 é $G^N(\Sigma)$ que é um grupo de Lie conexo. Em particular o conjunto atingível desde 1 está contido em $G^N(\Sigma)$.

Prova. a) Para cada $N \in \mathbb{N}$, $A^N(\Sigma)$ é uma álgebra nilpotente livre associativa. Como $\dim A^N(\Sigma) < \infty$, então a equação no enunciado transforma-se numa equação de evolução

$$\dot{Y}(t) = F_0(Y(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) F_i(Y(t))$$

onde

$$\begin{aligned} F_i : A^N(\Sigma) &\longrightarrow A^N(\Sigma) \\ Y &\longrightarrow X_i Y \end{aligned}$$

é um campo vetorial, pois $A^N(\Sigma)$ é um espaço vetorial de dimensão finita e um campo vetorial definido nele é qualquer aplicação nele mesmo.

b) Seja $AL(F)$ a álgebra de Lie livre gerada por $F = (F_0, \dots, F_m)$. Para cada $P \in AL^N(\Sigma)$ a aplicação

$$\begin{aligned} F^P : A^N(\Sigma) &\longrightarrow A^N(\Sigma) \\ Y &\longrightarrow PY \end{aligned}$$

é um campo vetorial. Logo a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \varphi : AL^N(\Sigma) &\longrightarrow AL(F) \\ P &\longrightarrow F^{-P} \end{aligned}$$

define um isomorfismo de álgebras de Lie.

i) φ é injetora, pois $\varphi(P) = \varphi(Q)$ se e só se $F^{-P} = F^{-Q}$, que avaliadas em 1 fornece $P = Q$.

ii) φ é sobrejetora, pois $\varphi(X_i) = -F_i$ pela definição da aplicação φ . Mas $F_i(Y) = X_i Y$ e como $F = (F_0, \dots, F_m)$ gera $AL(F)$ e por ter que $\Sigma = (X_0, \dots, X_m)$ gera $AL^N \Sigma$ têm-se que φ é sobrejetora.

iii) $\varphi([P, Q]) = [\varphi(P), \varphi(Q)]$. De fato, $[F^P, F^Q] = F^{-[P, Q]}$. Pois

$$\begin{aligned} [F^P, F^Q](Y) &= (dF^Q)_Y(F^P(Y)) - (dF^P)_Y(F^Q(Y)) \\ &= F^Q(F^P(Y)) - F^P(F^Q(Y)) \\ &= Q(P(Y)) - P(Q(Y)) = [Q, P]Y \\ &= F^{-[P, Q]}(Y). \end{aligned}$$

Por tanto

$$[F^P, F^Q] = F^{-[P,Q]} \text{ para cada } P, Q \in AL^N(\Sigma).$$

A partir dessa igualdade, se tem

$$\varphi([P, Q] = F^{-[P,Q]} = [F^P, F^Q] = [\varphi(P), \varphi(Q)].$$

c) Como os campos F_i são globais e por b), $\dim AL(F) < \infty$, segue-se da Proposição 0.3.5 que a distribuição

$$Y \longrightarrow AL(F)(Y)$$

é integrável. Por tanto, segue-se da Proposição 0.3.6 que as órbitas da família $F_\Sigma = \{F_0 + \sum_{i=1}^m u_i F_i : u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m\}$ são as variedades integrais da distribuição

$$\Delta_{F_\Sigma}(Y) = AL(F)(Y)$$

definida como o subespaço das direções limites em Y de curvas α que passam por Y e estão contidas em $G_{F_\Sigma}(Y)$. Agora provamos que

$$G^N(\Sigma) = G_{F_\Sigma}(1).$$

De fato, a inclusão $G_{F_\Sigma}(1) \subseteq G^N(\Sigma)$, decorre de calcular a órbita no ponto 1. Isto é se $V \in AL(F)$, então $V = F^{-P}$, para algum $P \in AL^N(\Sigma)$, logo o fluxo de V é dado por

$$F_t^{-P}(Q) = e^{-tP}Q$$

tomando $Q = 1$, obtemos

$$F_t^{-P}(1) = e^{-tP} \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Em particular os campos do conjunto F_Σ são da forma F^{-P} , $P \in AL^N(\Sigma)$. Logo a órbita de $Q = 1$ é

$$G_{F_\Sigma}(1) = \{e^{t_1 P_1} \dots e^{t_k P_k} : t_i \in \mathbb{R}, P_i \in F_\Sigma\}$$

e por uma aplicação da fórmula de Campbell-Hausdorff chega-se a que

$$G_{F_\Sigma}(1) \subseteq G^N(\Sigma).$$

De fato,

$$Z \in G_{F_\Sigma}(1) \text{ se e só se } Z = e^{t_1 P_1} \dots e^{t_k P_k} = e^{R(t_1, \dots, t_k, P_1, \dots, P_k)}$$

onde $R(t_1, \dots, t_k, P_1, \dots, P_k) \in AL^N(\Sigma)$ (Proposição 2.1.8).

Para mostrar a inclusão recíproca $G^N(\Sigma) \subseteq G_{F_\Sigma}(1)$ tomemos $Y \in G^N(\Sigma)$, então $Y = e^W$ para algum $W \in AL^N(\Sigma)$ e pelo isomorfismo de álgebras temos que

$$F^W : A^N(\Sigma) \rightarrow A^N(\Sigma)$$

é um campo vetorial onde o fluxo é dado por

$$F_t^W(1) = e^{tW}.$$

Além do mais, pela completude de F^W para $t = 1$ obtemos que $Y = e^W = F_1^W(1) \in G_{F_\Sigma}(1)$.

Por tanto

$$G^N(\Sigma) = G_{F_\Sigma}(1) . \quad \blacksquare$$

Pelo item a) dessa Proposição temos um sistema de controle em $A^N(\Sigma)$, em particular $A(1) \subseteq G^N(\Sigma)$, pois $A(1) = Ser_N(U_m)$ onde $A(1)$ é o conjunto de pontos atingíveis a partir de 1.

Corolário 2.1.12. Para cada $u \in U_m$, $Ser(u) \in \hat{G}(\Sigma)$.

Prova. Para cada $N \in \mathbb{N}$ tem-se pela Proposição 2.1.11 que $Ser_N(u) \in G^N(\Sigma)$, pois $Ser_N(u) = S_N(T(u))$ onde $S_N(\cdot)$ é uma solução correspondente ao controle u que parte de 1 na equação de evolução. Portanto

$$Ser(u) \in \tilde{G}(\Sigma) \quad \blacksquare$$

Observações:

1) Na Proposição 2.1.10 foi mostrado que $G^N(\Sigma)$ é um grupo de Lie. Sua álgebra de Lie é $T_1 G^N(\Sigma) = AL^N(\Sigma)$. De fato, se $W \in T_1 G^N(\Sigma)$, então existe $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G^N(\Sigma)$ tal que $\alpha(0) = 1$ $\dot{\alpha}(0) = W$. Como $\alpha(t) \in G^N(\Sigma)$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, então $\log \alpha(t) = W(t) \in AL^N(\Sigma)$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Isto quer dizer que $\alpha(t) = e^{W(t)}$, com $W(t) \in AL^N(\Sigma)$, derivando esta igualdade e avaliando em $t = 0$, obtemos que $\dot{\alpha}(0) = \dot{W}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W(t) - W(0)}{t}$. Mas $\frac{W(t) - W(0)}{t} \in AL^N(\Sigma)$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) - \{0\}$ e como $AL^N(\Sigma) \subseteq A^N(\Sigma)$ é subespaço fechado, $(\dim A^N(\Sigma) < \infty)$ então $W \in AL^N(\Sigma)$.

2) $G^N(\Sigma)$ é um grupo de Lie nilpotente.

De fato, pois $T_1 G^N(\Sigma) = AL^N(\Sigma)$ é nilpotente.

3) Os campos F_i em $A^N(\Sigma)$ definidos por, $F_i(Y) = X_i Y, i = 0, \dots, m$ são tangentes a $G^N(\Sigma)$. Isto é consequência de que os F_i são invariantes a direita, pois

$$\begin{aligned} (dR_Y)_1(F_i(Z)) &= R_Y(F_i) = R_Y(X_i Z) = X_i(ZY) \\ &= F_i(R_Y(Z)) \end{aligned}$$

pela linearidade de F_i . Como

$$(dR_Y)_1 : T_1 G^N(\Sigma) \longrightarrow T_Y G^N(\Sigma),$$

a invariança a direita de F_i acarreta que

$$F_i(Y) = (dR_Y)_1(F_i(1)) \in T_Y G^N(\Sigma)$$

e os F_i são tangentes a $G^N(\Sigma)$. Isto é $F_i : G^N(\Sigma) \longrightarrow AL^N(\Sigma)$

4) Pela observação anterior podemos restringir nosso sistema de controle a $G^N(\Sigma)$. Isto é

$$\dot{Y}(t) = \tilde{F}_0(Y(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) \tilde{F}_i(Y(t))$$

onde os $\tilde{F}_i = F_i|_{G^N(\Sigma)}$ são bem definidos. Denotemos por $\tilde{F} = (\tilde{F}_0, \dots, \tilde{F}_m)$ a família de campos tangentes F_i . Então $AL(\tilde{F}) \simeq AL(F)$ e como $AL(F) \simeq AL^N(\Sigma)$,

$$AL(\tilde{F}) \simeq AL^N(\Sigma).$$

Observemos que

$$R_Y : G^N(\Sigma) \longrightarrow G^N(\Sigma)$$

é um difeomorfismo. Daí segue-se que

$$(dR_Y)_1 : T_1 G^N(\Sigma) \longrightarrow T_Y G^N(\Sigma)$$

é um isomorfismo. Usamos isto para definir a distribuição dada por

$$Y \longrightarrow AL^N(\Sigma)(Y) = (dR_Y)_1(AL^N(\Sigma)(1))$$

a qual é integrável como segue da invariança de R_Y e por uma aplicação do teorema de Fröbenius como foi feito na Proposição 1.4.1. Notemos que

$$\tilde{F}_\Sigma = \{ \tilde{F}_0 + \sum_{i=1}^m u_i \tilde{F}_i : u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m \}$$

e pela definição de órbita temos que

$$G^N(\Sigma) = G_{\tilde{F}_\Sigma}(1) = G_{F_\Sigma}(1)$$

é a única órbita, que é por sua vez a variedade integral maximal da distribuição definida acima. Por ser $G^N(\Sigma)$ variedade integral, temos que $\dim G^N(\Sigma) = \dim AL(\tilde{F})(Y) = \dim AL^N(\Sigma)(Y)$ para cada $Y \in G^N(\Sigma)$.

Se denotamos por $A(Y)$ o conjunto de pontos que pode-se atingir a partir de Y pelo sistema restrito a $G^N(\Sigma)$, então o Corolário 1.2.8 garante que $\text{int}A(1) \neq \emptyset$. Também lembramos que $Ser_N : U_m \rightarrow A^N(\Sigma)$ é um homomorfismo e $Ser_N(U_m) \subseteq G^N(\Sigma)$ (Proposição 2.1.11) e mais ainda denotamos a imagem de U_m sob Ser_N por

$$S^N(\Sigma) = Ser_N(U_m)$$

que representa o conjunto de pontos atingíveis desde $1 \in G^N(\Sigma)$. Logo

$$\text{int}A(1) = \text{int}S^N(\Sigma) \neq \emptyset$$

pois $S^N(\Sigma) = A(1)$, mais ainda o Teorema 1.2.7 diz

$$\emptyset \neq \text{int} S^N(\Sigma) \subseteq S^N(\Sigma) \subseteq \overline{\text{int} S^N(\Sigma)}$$

5) De maneira mais geral suponhamos que o semigrupo controle $U_m(\Omega)$ toma valores num subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Queremos olhar sob que condições pode-se obter a mesma conclusão que a obtida em 4). Como $Ser : U_m(\Omega) \rightarrow \hat{A}(\Sigma)$, denotemos o conjunto atingível a partir de 1 por

$$S(\Sigma, \Omega) = Ser(U_m(\Omega)),$$

isto é o sub-semigrupo sobre o qual $U_m(\Omega)$ é mergulhado em $\hat{A}(\Sigma)$.

Um fato que não fizemos notar anteriormente e que fazemos agora é desenvolvido no que segue. Se $u \in U_m(\Omega)$, então $u : [0, T(u)] \rightarrow \Omega$. Considerando a restrição $u^t = u|_{[0, t]} :$

$[0, t] \longrightarrow \Omega$, $0 \leq t \leq T(u)$, também se olha que $u^t \in U_m(\Omega)$ para cada $t \in [0, T(u)]$ e como

$$Ser(u) = S(T(u))$$

onde $S : [0, T(u)] \longrightarrow \hat{A}(\Sigma)$ é uma solução associada a u , então $Ser(u^t) = S(t)$ para cada $t \in [0, T(u)]$.

Assim

$$t \longrightarrow Ser(u^t)$$

representa a solução associada ao controle u . De onde convém pensar que $S(\Sigma, \Omega)$ denota o conjunto atingível a partir de 1 seguindo trajetórias de equações diferenciais em $\hat{A}(\Sigma)$. Em vista do nosso objetivo, consideramos a aplicação truncamento τ^N que transforma o sistema definido em $\hat{A}(\Sigma)$ num sistema de controle definido em $A^N(\Sigma)$ obtendo-se

$$S^N(\Sigma, \Omega) = Ser_N(U_m(\Omega))$$

como o conjunto atingível do sistema de controle definido em $A^N(\Sigma)$.

Assim isto dá lugar a uma aproximação nilpotente para $S(\Sigma, \Omega)$. Por uma restrição análogo à observação (4) obtém-se

$$\dim G^N(\Sigma) = \dim AL(F)(Y) = \dim AL^N(\Sigma)(Y) \text{ para cada } Y \in G^N(\Sigma)$$

Pelo resultado de acessibilidade como na observação (4) obtém-se

$$\phi \neq \text{int } S^N(\Sigma, \Omega) \subseteq S^N(\Sigma, \Omega) \subseteq \overline{\text{int } S^N(\Sigma, \Omega)}$$

desde que $Aff(\Omega) = \mathbb{R}^m$. Esta condição é necessária para garantir que $AL(F) = AL(F_\Omega)$ onde $F_\Omega = \{F_0 + \sum_{i=1}^m u_i F_i : u = (u_1, \dots, u_m) \in \Omega\}$ como veremos adiante.

2.2. Controles normais.

O objetivo deste parágrafo é introduzir uma certa classe de controles denominados normais, que relacionam o posto de uma certa aplicação a ser definida com a $\dim G^N(\Sigma)$ para assim poder aplicar o teorema da função implícita, para garantir que certos pontos pertencem ao interior de $S^N(\Sigma, \Omega)$. Isso será utilizado no próximo capítulo na análise da controlabilidade local.

Dado $D = \{\gamma^1, \dots, \gamma^k\}$, dizer que $Aff(D) = \mathbb{R}^m$ é o mesmo dizer que todo elemento de $\mathbb{R}^m$ é obtido como uma combinação linear afim de elementos de D , ou seja

$$Aff(D) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma^i : \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Para cada $W \in Aff(D)$ temos que $W = \sum_{i=1}^m \lambda_i \gamma_i$ e $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Dito de outra forma,

$$W = \gamma^i + \lambda_1(\gamma^1 - \gamma^i) + \dots + \lambda_{i-1}(\gamma^{i-1} - \gamma^i) + \lambda_{i+1}(\gamma^{i+1} - \gamma^i) + \dots + \lambda_k(\gamma^k - \gamma^i)$$

$$W = \gamma^i + \sum_{j=1}^k \lambda_j(\gamma^j - \gamma^i) \quad , i = 1, \dots, k.$$

Dado um conjunto ordenado $D = \{\gamma^1, \dots, \gamma^k\} \subset \Omega$ definimos uma aplicação $Q : \mathbb{R}_+^k \rightarrow U_m(\Omega)$ por

$$T \longrightarrow \{D, T\}$$

que a cada $T \in \mathbb{R}_+^k$ faz corresponder um controle $\{D, T\} \in U_m(\Omega)$ da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} \{D, T\}(\tau) &= \gamma^1 & 0 \leq \tau \leq t_1 \\ \{D, T\}(\tau) &= \gamma^2 & t_1 < \tau \leq t_1 + t_2 \\ \{D, T\}(\tau) &= \gamma^3 & t_1 + t_2 < \tau \leq t_1 + t_2 + t_3 \\ &\vdots & \\ \{D, T\}(\tau) &= \gamma^k & t_1 + \dots + t_{k-1} < \tau \leq t_1 + \dots + t_k. \end{aligned}$$

Essa construção define, para subconjuntos $D \subset \Omega$ de k elementos, um controle em $U_m(\Omega)$ com exatamente k pontos de descontinuidade. Adiante será necessário considerar também controles determinados por D com mais pontos de descontinuidade. Por isso introduzimos a

Definição 2.2.1. A família $D = \{\gamma^1, \dots, \gamma^k\}$ é dita periódica de período r se a aplicação $i \longrightarrow \gamma^i, i \in \{1, \dots, k\}$ é de período r . Isto é $\gamma^i = \gamma^j$ se $i = pr + j$ para $1 \leq j \leq r$.

Uma família D de r elementos se estende a uma família $\hat{D}$ de $k \geq r$ elementos. O controle $\{\hat{D}, T\}, T \in \mathbb{R}_+^k$ construído acima será denotado por $\{D, T\}$.

Definição 2.2.2. Um controle $u \in U_m(\Omega)$ é chamado um D -controle se é da forma $\{D, T\}$ para algum k e algum $T \in \mathbb{R}_+^k$.

O conjunto dos controles da forma $\{D, T\}$ será denotado por $U_m(\Omega)_{cp}$. Considerando a álgebra $\hat{A}(\Sigma)$ e a equação nela definida anteriormente, queremos conhecer como é $Ser(\{D, T\}) = S(T(u)) \in \hat{G}(\Sigma)$. Antes explicitamos a equação de evolução para os controles $\{D, T\}$.

Para o controle $\{D, T\}$ definido por $\{D, T\}(\tau) = \gamma^i$ se $t_1 + \dots + t_{i-1} < t \leq t_1 + \dots + t_i$, temos que a equação se transforma em

$$\dot{Y}(t) = (X_0 + \sum_{j=1}^m \{D, T\}_j(t) X_j) Y(t)$$

como $\{D, T\}(t) = \gamma^i = (\gamma_1^i, \dots, \gamma_m^i)$, então a equação acima toma a forma

$$\dot{Y}(t) = (X_0 + \sum_{j=1}^m \gamma_j^i X_j) Y(t).$$

Se denotamos por $X^i(D) = X_0 + \sum_{j=1}^m \gamma_j^i X_j$, $i = 1, 2, \dots, k$ obtém-se finalmente que nossa equação é dada por

$$\dot{Y}(t) = X^i(D) Y(t) \quad , t_1 + \dots + t_{i-1} < t \leq t_1 + \dots + t_i$$

e como $X^i(D) \in AL^N(\Sigma)$, então ela determina um campo vetorial definido por

$$F^{X^i(D)}(Y) = X^i(D) Y \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Logo a decomposição do intervalo $[0, t_1 + \dots + t_k]$ determina em cada sub-intervalo uma equação diferencial, como é explicitado abaixo.

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= F^{X^1(D)}(Y(t)) & 0 < t \leq t_1 \\ \dot{Y}(t) &= F^{X^2(D)}(Y(t)) & t_1 < t \leq t_1 + t_2 \\ &\vdots \\ \dot{Y}(t) &= F^{X^k(D)}(Y(t)) & t_1 + \dots + t_{k-1} < t \leq t_1 + \dots + t_k. \end{aligned}$$

O fluxo do campo genérico $F^{X^i(D)}$ é dado por

$$F_t^{X^i(D)}(Q) = e^{tX^i(D)} Q \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Agora calculamos a trajetória controle

$$Ser_N(\{D, T\}^t) = \begin{cases} e^{tX^1(D)} & 0 \leq t \leq t_1 \\ e^{(t-t_1)X^2(D)} e^{t_1X^1(D)} & t_1 < t \leq t_1 + t_2 \\ e^{(t-(t_1+t_2))X^3(D)} e^{t_2X^2(D)} e^{t_1X^1(D)} & t_1 + t_2 < t \leq t_1 + t_2 + t_3 \\ \vdots & \\ e^{(t-(t_1+\dots+t_{k-1}))X^k(D)} \dots e^{t_1X^1(D)} & t_1 + \dots + t_{k-1} < t \leq t_1 + \dots + t_k. \end{cases}$$

Logo

$$Ser_N(\{D, T\}) = Ser_N(\{D, T\}^{t_1+\dots+t_k}) = e^{t_k X^k(D)} e^{t_{k-1} X^{k-1}(D)} \dots e^{t_1 X^1(D)}$$

onde $T = (t_1, \dots, t_k)$. Essa expressão define de maneira natural uma aplicação

$$\begin{aligned} V_{k,D}^N : \mathbb{R}^k &\longrightarrow A^N(\Sigma) \\ V_{k,D}^N(T) &= e^{t_k X^k(D)} e^{t_{k-1} X^{k-1}(D)} \dots e^{t_1 X^1(D)} \quad \text{se } T = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

Pela forma dos elementos de $G^N(\Sigma)$ e pelo fato de que $X^i(D) \in AL^N(\Sigma)$ e por uma aplicação da fórmula de Campbell-Hausdorff consegue-se que

$$V_{k,D}^N : \mathbb{R}^k \longrightarrow G^N(\Sigma). \quad (1)$$

Também é claro que se restringimos $V_{k,D}^N|_{\mathbb{R}_+^k}$ temos que

$$V_{k,D}^N(\mathbb{R}_+^k) \subseteq S^N(\Sigma, D)$$

e daí

$$V_{k,D}^N(T) = Ser_N(\{D, T\}) \quad \text{se } T \in \mathbb{R}_+^k.$$

Usamos (1) para dar uma definição.

Definição 2.2.3. Um D -controle $\{D, T^0\}, T^0 \in \mathbb{R}_+^k$ é chamado N -normal se $dV_{k,D}^N$ tem posto igual a $\dim G^N(\Sigma)$ em T^0 e todas componentes de T^0 são estritamente positivas.

Antes de mostrar a existência dos D -controles normais $\{D, T\}$ damos um lema que relaciona a álgebra de Lie nilpotente $AL^N(\Sigma)$ e a álgebra de Lie gerada por $X^i(D), i = 1, \dots, k$ o qual é denotada por $AL(D)$.

Lema 2.2.4. Se $Aff(D) = \mathbb{R}^m$, então $AL(D) = AL^N(\Sigma)$.

Prova. Para $\gamma^i = (\gamma_1^i, \dots, \gamma_m^i)$ consideremos

$$X^i(D) = X_0 + \sum_{j=1}^m \gamma_j^i X_j \in AL^N(\Sigma) \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

então

$$AL(D) \subseteq AL^N(\Sigma).$$

Para a inclusão recíproca é suficiente conseguir que $X_i \in AL(D)$ para cada $i = 0, 1, \dots, m$. Para isso mostraremos abaixo que dado $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ com $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ tal que

$$X_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j X_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i X^i(D). \quad (2)$$

A inclusão decorre daí, pois se $\beta = 0$, então $X_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i X^i(D) \in AL(D)$ e para $\beta = e_i$, onde e_i é elemento de $\mathbb{R}^m$ com 1 no lugar i -ésimo e 0 nos demais, obtém-se

$$X_0 + X_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i X^i(D) \quad j = 1, \dots, m$$

como X_0 e $X_0 + X_j \in AL(D)$ $j = 1, 2, \dots, m$ temos que

$$AL^N(\Sigma) \subseteq AL(D).$$

Para obter (2) usamos a hipótese e igualamos coordenadas para conseguir

$$\beta_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma_j^i \quad j = 1, 2, \dots, m$$

avaliando no lado esquerdo obtemos:

$$\begin{aligned} X_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j X_j &= X_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma_j^i X_j = X_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=1}^m \gamma_j^i X_j, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i X^i(D). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Como consequência deste lema, a prova de que $AL(F) = AL(F_D)$ é uma repetição. Agora mostramos a existência de D -controles normais.

Proposição 2.2.5. Para cada $N \in \mathbb{N}$, e cada D tal que $Aff(D) = \mathbb{R}^m$. Existe um D -controle N -normal $\{D, T^0\}$.

Prova. A idéia da demonstração é escolher $k \in \mathbb{N}$ e um $T \in \mathbb{R}^k$ tal que o posto $(dV_{k,D}^N)_T = \bar{P}$ seja o maior possível, e então construir uma subvariedade M de $G^N(\Sigma)$ tal que $\dim M = \bar{P}$, (teorema da função implícita) com a propriedade que todos campos vetoriais na algebra $AL(\tilde{F})$ são tangentes a M e concluir que $\dim M = \bar{P}$.

Seja $AL(D)$ a álgebra Lie gerada por $X^i(D)$ $i = 1, 2, \dots, k$. Segundo o Lema 2.2.4 temos $AL(D) = AL^N(\Sigma)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{R}^k$, a aplicação $V_{k,D}^N$ é definida como antes. Denotemos por $P(k, T) = \text{posto}(dV_{k,D}^N)_T$. Como $\dim G^N(\Sigma) < \infty$ é possível fazer a escolha de um posto máximo $\bar{P}$. Isto é

$$\bar{P} = P(k, T_0) = \max\{P(k, T) : k \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{R}^k\}.$$

Então, existe uma vizinhança $V \ni T^0$ tal que $P(k, T) = \bar{P}$ para cada $T \in V$, e por uma aplicação do teorema da função implícita existe uma vizinhança $U \ni T^0$ que é levada por $V_{k,D}^N$ numa subvariedade $\bar{P}$ -dimensional $M \subseteq G^N(\Sigma)$ com posto $\bar{P}$ na vizinhança U .

Para cada i , os $X^i(D)$ determinam campos vetoriais $F^{X^i(D)}$ em $G^N(\Sigma)$, definidos por $F^{X^i(D)}(Y) = X^i(D)Y$. Se denotamos por

$$\Sigma_D = (F^{X^1(D)}, \dots, F^{X^k(D)}),$$

então a álgebra de Lie gerada por Σ_D é $AL(\Sigma_D)$.

Afirmção 1. $G_i = F^{X^i(D)}$ é tangente a M , $i = 1, 2, \dots, k$.

De fato, caso contrário existe i tal que G_i não é tangente a M . Quer dizer que existe $S \in M$ tal que $G_i(S) \notin T_S M$.

A suposição de ser $i \longrightarrow \gamma^i$ periódico implica que $i \longrightarrow X^i(D)$ e $i \longrightarrow G_i$ sejam periódicos no caso em que $i > k$. Como $M = V_{k,D}^N(U)$ e $S \in M$, então existe $T' \in U$ tal que $V_{k,D}^N(T') = S$. Denotemos por $\emptyset$ a sequência de $i - (k + 1)$ zeros, então a aplicação definida por

$$\alpha(t) = V_{i,D}^N(T', \emptyset, t)$$

é uma curva tal que $\dot{\alpha}(0) = G_i(S)$, pois da definição de $V_{i,D}^N$ obtém-se

$$\alpha(\tau) = e^{\tau X^i(D)} S \quad (3)$$

assim $\dot{\alpha}(0) = G_i(S)$. Pode-se também olhar que (3) define o fluxo de G_i que passa por S . De maneira quase-análoga, a aplicação φ definida por

$$\varphi(T) = V_{i,D}^N(T, \emptyset, 0)$$

é exatamente $V_{k,D}^N$, pois é só considerar

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{i-k-1} \times \mathbb{R} \\ T &\longrightarrow (T, \emptyset, 0) \end{aligned}$$

e segundo a definição obtém-se

$$V_{k,D}^N(T) = V_{i,D}^N(\psi(T))$$

mas

$$(d\psi)_T(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{i-k-1} \times \mathbb{R} \quad (4)$$

aplicando $(dV_{i,D}^N)_{(T,\emptyset,0)}$ em (4) obtém-se

$$(dV_{k,D}^N)_T(\mathbb{R}^k) \subseteq (dV_{i,D}^N)_{(T,\emptyset,0)}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{i-k-1} \times \mathbb{R}).$$

Para $T = T'$ e usando o fato que $V_{k,D}^N$ é um difeomorfismo obtém-se

$$T_{T'}M \subseteq (dV_{i,D}^N)_{(T',\emptyset,0)}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{i-k-1} \times \mathbb{R}), S = V_{k,D}^N(T')$$

como $G_i(S) = \dot{\alpha}(0) \notin T_sM$, então

$$\text{posto } (dV_{i,D}^N)_{(T',\emptyset,0)} \geq \overline{P} + 1. \quad (5)$$

Caso contrário contradiz a que $\dot{\alpha}(0) \notin T_sM$. Logo (5) contradiz a maximalidade de $\overline{P} = P(k, T^0)$. Portanto todos os G_i são tangentes a M .

Assim $AL(\Sigma_D)$ é tangente a M . ■

Afirmção 2. $\dim G^N(\Sigma) = \overline{P}$.

De fato, a aplicação

$$X^i(D) \longrightarrow F^{-X^i(D)}$$

dá um isomorfismo de $AL^N(\Sigma) = AL(D)$ sobre $AL(\Sigma_D)$, então $\dim AL(D) = \dim AL(\Sigma_D)$. Mas $AL(\Sigma_D) \subseteq AL(F) \simeq AL^N(\Sigma)$, logo $\dim AL(\Sigma_D) = \dim AL(F)$. Portanto

$$AL(\Sigma_D) = AL(F).$$

Pela Proposição 2.1.11 tem-se que $Y \longrightarrow AL(F)(Y)$ é integrável com $G^N(\Sigma)$ a variedade integral maximal que passa por 1, segue-se que

$$T_Y G^N(\Sigma) = AL(F)(Y) = AL(\Sigma_D)(Y) \subseteq T_Y M, \text{ para cada } Y \in G^N(\Sigma)$$

como a inclusão recíproca é imediata pelo fato do que M é uma subvariedade de $G^N(\Sigma)$ obtém-se que

$$T_Y G^N(\Sigma) = T_Y M.$$

Em particular para $Y = S$ obtemos

$$\dim G^N(\Sigma) = \overline{P}.$$

Isto quer dizer que o posto de $(dV_{k,D}^N)_T$ é igual a $\dim G^N(\Sigma)$ para algum $T \in \mathbb{R}^k$. O fato de $V_{k,D}^N$ ser analítica e seguindo como na demonstração do Teorema 1.1.5 obtém-se que existe $T^0 \in \mathbb{R}_+^k$ tal que o posto $(dV_{k,D}^N)_{T^0} = \dim G^N(\Sigma)$. ■

2.3. Propriedades assintóticas das séries exponenciais de Lie.

Neste parágrafo se trabalha com campos vetoriais definidos sobre uma variedade diferenciável M que determinam um sistema de controle sobre M . O que se faz simplesmente é trocar as indeterminadas pelos campos vetoriais usando uma aplicação avaliação.

O objetivo aqui é dar estimativas para a diferença entre o valor da propagação de uma função $\phi \in C^\infty(M)$ ao longo de uma trajetória controle $\pi(F, u, x_0, \cdot)$ e uma série formal denotada $Ser(u)(F)(\phi)(x_0)$ construída a partir de ϕ e o sistema de controle. Essa série é aproximada por polinômios $Ser_N(u)(F)(\phi)(x_0)$. No caso em que os campos são analíticos a variação $|\phi(\pi(F, u, x_0, t)) - Ser_N(u^t)(F)(\phi)(x_0)|$ é suficientemente pequena sobre partes compactas, o que dá lugar a uma convergência uniforme.

De maneira precisa, dado uma família de campos vetoriais C^∞ , $F = (F_0, \dots, F_m)$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Consideremos o sistema de controle (M, F, Ω) com semigrupo controle $U_m(\Omega)$ definida pela equação de evolução

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) F_i(x(t)) \quad , \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in \Omega . \quad (1)$$

Como anteriormente definiu-se $\hat{A}(\Sigma)$, $A(\Sigma)$, $A^N(\Sigma)$ os quais estão relacionadas por meio da aplicação truncção τ^N , que liga $\hat{A}(\Sigma)$ com $A^N(\Sigma)$ e $A(\Sigma)$ com $A^N(\Sigma)$, onde $\Sigma = (X_0, \dots, X_m)$. Agora temos $F = (F_0, \dots, F_m)$ e as mesmas álgebras $\hat{A}(F)$, $A(F)$, $A^N(F)$ os quais estão relacionadas por uma aplicação avaliação

$$Ev(F) : \hat{A}(\Sigma) \longrightarrow \hat{A}(F)$$

onde para $X_I = X_{i_1} \dots X_{i_k}$, $F_I = F_{i_1} \dots F_{i_k}$ e $I = (i_1, \dots, i_k)$.

$$Ev(F)(\sum y_I X_I) = \sum y_I F_I .$$

A aplicação Ev se estende a

$$Ser(u) = \sum \left(\int_0^{T(u)} u_I \right) X_I.$$

Distinguimos os casos truncado e não truncado.

Caso I. No caso não truncado obtém-se

$$Ev(F)(Ser(u)) = Ser(u)(F) = \sum \left(\int_0^{T(u)} u_I \right) F_I$$

o que representa uma série formal de operadores diferenciais parciais no sentido em que se tomarmos uma parte finita de somandos, ele é um operador diferencial. Agora para cada $\phi \in C^\infty(M)$, obtemos que

$$Ev(F)(Ser(u))(\phi) = Ser(u)(F)(\phi) = \sum \left(\int_0^{T(u)} u_I \right) (F_I \phi)$$

é uma série formal de funções C^∞ sobre M .

Caso II. Quando truncamos com τ^N , obtemos

$$\tau^N(Ser(u)) = Ser_N(u) = \sum_{|I| \leq N} \left(\int_0^{T(u)} u_I \right) X_I.$$

Logo

$$Ev(F)(Ser_N(u)) = Ser_N(u)(F) = \sum_{|I| \leq N} \left(\int_0^{T(u)} u_I \right) F_I$$

representa um operador diferencial, pois é uma soma finita de operadores diferenciais.

Para cada $\phi \in C^\infty(M)$,

$$Ev(F)(Ser_N(u))(\phi) = Ser_N(u)(F)(\phi) = \sum_{|I| \leq N} \left(\int_0^{T(u)} u_I \right) (F_I \phi)$$

o que é uma função C^∞ definida sobre M .

Com essas notações calculamos agora a diferença que nos interessa. Para $x_0 \in M$ e $u \in U_m(\Omega)$ convencionamos denotar por $\pi(F, u, x_0, \cdot)$ a trajetória $x(\cdot)$ associada ao controle u tal que $x(0) = x_0$.

Para $\phi \in C^\infty(M)$ pomos $\alpha(t) = \phi(\pi(F, u, x_0, t))$ que é a propagação de ϕ ao longo de $t \longrightarrow \pi(F, u, x_0, t)$.

Derivando α e aplicando o teorema fundamental do cálculo, temos

$$\phi(\pi(F, u, x_0, t)) = \phi(x_0) + \sum_{i=0}^m \int_0^t u_i(s) (F_i \phi)(\pi(F, u, x_0, s)) ds, \quad u_0 = 1 \quad (2)$$

Tomando $F_i \phi$ no lugar de ϕ em (2), obtém-se

$$(F_i \phi)(\pi(F, u, x_0, s)) = (F_i \phi)(x_0) + \sum_{j=0}^m \int_0^s u_j(\tau) F_j (F_i \phi)(\pi(F, u, x_0, \tau)) d\tau \quad (3)$$

e substituindo em (2), obtém-se

$$\begin{aligned} \phi(\pi(F, u, x_0, t)) &= \phi(x_0) + \sum_{i=0}^m \left(\int_0^t u_i(s) ds \right) (F_i \phi)(x_0) \\ &\quad + \sum_{i,j}^m \int_0^t \int_0^s u_i(s) u_j(\tau) (F_j F_i \phi)(\pi(F, u, x_0, \tau)) d\tau ds. \end{aligned}$$

Repetindo esse procedimento sucessivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \phi(\pi(F, u, x_0, t)) &= \phi(x_0) + \sum_{i=0}^m \left(\int_0^t u_i(s) ds \right) (F_i \phi)(x_0) \\ &\quad + \sum_{i,j}^m \left(\int_0^t \int_0^s u_i(s) u_j(\tau) d\tau ds \right) (F_j F_i \phi)(x_0) \\ &\quad + \sum_{i,j,k}^m \int_0^t \int_0^s \int_0^\tau u_i(s) u_j(\tau) u_k(\sigma) (F_k F_j F_i \phi)(\pi(F, u, x_0, \sigma)) d\sigma d\tau ds \\ &= \sum_{|I|=0}^m \left(\int_0^t u_i \right) (F_i \phi)(x_0) + \sum_{|I|=1}^m \left(\int_0^t u_I \right) (F_I \phi)(x_0) + \dots \\ &\quad + \sum_{|I|=N} \left(\int_0^t u_I \right) (F_I \phi)(x_0) \\ &\quad + \sum_{|I|=N+1} \int_0^t \int_0^{\tau_{N+1}} \dots \int_0^{\tau_2} u_{i_{N+1}}(\tau_{N+1}) \dots u_{i_2}(\tau_2) u_{i_1}(\tau_1) \\ &\quad (F_{i_1}, \dots, F_{i_{N+1}} \phi)(\pi(F, u, x_0, \tau_1)) d\tau_1 \dots d\tau_{N+1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\phi(\pi(F, u, x_0, t)) - Ser_N(u^t)(F)(\phi)(x_0) = \sum_{|I|=N+1} R^I(u^t, F, \phi)(x_0) \quad (4)$$

onde

$$R^I(u^t, F, \phi)(x_0) = \int_0^t \int_0^{\tau_k} \dots \int_0^{\tau_2} u_{i_k}(\tau_k) \dots u_{i_1}(\tau_1) (F_I \phi)(\pi(F, u, x_0, \tau_1)) d\tau_1 \dots d\tau_k$$

$$R_N(u^t, F, \phi) = \sum_{|I|=N+1} R^I(u^t, F, \phi)(x_0) \quad I = (i_1, \dots, i_k). \quad (5)$$

Na realidade, estimar a diferença em (4) é estimar o resto (5) i.e.

$$|R_N(u^t, F, \phi)| \leq \sum_{|I|=N+1} |R^I(u^t, F, \phi)|.$$

Logo estimar a soma acima se reduz a estimar cada componente, isto é

$$|R^I(u^t, F, \phi)(x_0)| \leq \int_0^t \int_0^{\tau_k} \dots \int_0^{\tau_2} |u_{i_k}(\tau_k)| \dots |u_{i_1}(\tau_1)| |(F_I \phi)(\pi(F, u, x_0, \tau_1))| d\tau_1 \dots d\tau_k.$$

Finalmente o problema se reduz a estimar $|(F_I \phi)(\pi(F, u, x_0, \tau_1))|$. Para tal fato assume-se a existência de um compacto K que contém x_0 para que sobre o qual $F_I \phi$ seja limitada. Uma maneira de fazer a escolha de controles com tempos finais limitados por um número positivo tal que em qualquer ponto do compacto K estejam definidas suas trajetórias associadas até um tempo fixo é dado pelo seguinte Lema.

Lema 2.3.1. Dado um compacto $K \subseteq M$ e $A > 0$, então existe um tempo $\tau(K, A) > 0$ tal que $\pi(F, u, x_0, t)$ é definido para cada $x_0 \in K$, cada $t \in [0, T(u)]$ desde que $u \in U_m(\Omega)$ satisfaz:

- i) $\|u(t)\| \leq A$, $0 \leq t \leq T(u)$
- ii) $T(u) \leq \tau(K, A)$.

Mais ainda se $U_{m,A}(\Omega)$ denota o conjunto dos controles $u \in U_m(\Omega)$ satisfazendo i) e ii), então o conjunto

$$K^{A,T} = \{\pi(F, u, x_0, t) : x_0 \in K, 0 \leq t \leq T(u) \leq T, u \in U_{m,A}\}$$

é compacto, desde que $T \leq \tau(K, A)$.

Prova. Aplicando o Teorema da dependência contínua para cada $x_0 \in K$, existe um aberto $U \ni x_0$ e um tempo $T_{x_0} > 0$ tal que $t \longrightarrow \pi(F, u, x, t)$ é definido para cada $x \in U$, e cada $u \in U_m(\Omega)$, onde $0 \leq t \leq T(u) \leq T_{x_0}$. Pela compacidade de K encontramos um número finito de abertos $U_i \ni x_i$ e $T_{x_i} > 0$ tal que $t \longrightarrow \pi(F, u, x_i, t)$ é definido em $U_i, u \in U_m(\Omega), 0 \leq t \leq T(u) \leq T_{x_i}, i = 0, \dots, n$. Tomando $T(K) = \min_{1 \leq i \leq n} \{T_{x_i}\}$ obtemos que $t \longrightarrow \pi(F, u, x_0, t)$ é definido, para cada $x_0 \in K$, cada $t \in [0, T(u)]$ e $T(u) \leq T(K)$.

Restringindo os controles u a satisfazer, $\|u(t)\| \leq A, 0 \leq t \leq T(u), T(u) \leq \tau(K, A)$, onde $\tau(K, A) = \min\{T(K), A\}$ obtemos o desejado.

Na segunda parte tomamos $U_{m,A}(\Omega, T) \subset L_2([0, T])$, onde $U_{m,A}(\Omega, T)$ é convexo fechado e limitado na topologia fraca de $L_2([0, T])$ e segue-se que $U_{m,A}(\Omega, T)$ é fracamente compacto. Agora consideremos a aplicação definida na proposição 1.6.2 e disto segue-se que $K^{A,T}$ é compacto pelo fato de ser imagem de $U_{m,A}(\Omega, T)$. ■

Proposição 2.3.2. Considere o sistema de controle (1), com $\Sigma = (F_0, \dots, F_m)$ campos vetoriais C^∞ sobre uma variedade M . Seja $K \subseteq M$ um compacto, $A > 0, \phi \in C^\infty(M)$. Então para cada inteiro positivo N , existe uma constante D_N dependendo de ϕ, A, K, N , mas não de u , tal que

$$|\phi(\pi(F, u, T(u), x_0)) - Ser_N(u)(F)(\phi)(x_0)| \leq D_N T(u)^{N+1}$$

para cada $x_0 \in K$, e cada $u \in U_{m,A}$, tal que $T(u) \leq \tau(K, A)$

Prova. Para cada $N \in \mathbb{N}$ consideremos (5) e por uma limitação obtemos

$$|R^I(u^t, F, \phi)(x_0)| \leq \int_0^t \int_0^{\tau_{N+1}} \dots \int_0^{\tau_2} |u_{i_{N+1}}(\tau_{N+1})| \dots |u_{i_1}(\tau_1)| |(F_I \phi)(\pi(F, u, x_0, \tau_1))| d\tau_1 \dots d\tau_{N+1}.$$

Olhando a desigualdade acima, precisa-se dar uma limitação para $F_I \phi(\pi(F, u, x_0, \tau_1))$. Como K é compacto e $A > 0$ segundo o Lema 2.3.1 existe $\tau(K, A) > 0$ tal que $K^{A,T} = \{\pi(F, u, x_0, t) : x_0 \in K, 0 \leq t \leq T(u) \leq T, u \in U_{m,A}\}$ é compacto desde que $T \leq \tau(K, A)$. Logo $F_I \phi|_{K^{A,T}}$ é limitada para cada I com $|I| = N + 1$, e daí que existe $C_{N,I}$ tal que $|(F_I \phi)(x)| \leq C_{N,I}$, para cada $x \in K^{A,T}$ e $|I| = N + 1$. Na realidade como a quantidade dos I de comprimento $N + 1$ é finito, pode-se escolher um C_N tal que $|(F_I \phi)(x)| \leq C_N$ para cada $x \in K^{A,T}$ e cada I com $|I| = N + 1$, segue-se de $u \in U_{m,A}$ que

$$|u_{i_j}(\tau_j)| \leq A \text{ para cada } j = 1, 2, \dots, N + 1.$$

Substituindo isto na desigualdade acima obtém-se

$$|R^I(u^t, F, \phi)(x_0)| \leq A^{N+1} \int_0^t \int_0^{\tau_{N+1}} \dots \int_0^{\tau_2} |(F_I \phi)(\pi(F, u, x_0, \tau_1))| d\tau_1 \dots d\tau_{N+1}$$

e pela existência do C_N que limita $(F_I \phi)(\pi(F, u, x_0, \tau))$ segue-se

$$|R^I(u^t, F, \phi)(x_0)| \leq A^{N+1} C_N \frac{t^{N+1}}{(N+1)!}.$$

e tomando $B = \max\{1, A\}$ obtemos

$$|R^I(u^t, F, \phi)(x_0)| \leq C_N \frac{B^{N+1}}{(N+1)!} [T(u)]^{N+1}.$$

Finalmente fazendo a somatória sobre os I tal que $|I| = N+1$ obtém-se

$$|R_N(u^t, F, \phi)(x_0)| \leq \sum_{|I|=N+1} C_N \frac{B^{N+1}}{(N+1)!} [T(u)]^{N+1} (m+1)^{N+1},$$

pois I tem $(m+1)^{N+1}$ escolhas se $|I| = N+1$. Por tanto

$$|R_N(u^t, F, \phi)(x_0)| \leq D_N [T(u)]^{N+1}, \text{ onde } D_N = C_N \frac{B^{N+1}}{(N+1)!} (m+1)^{N+1}$$

para cada $x_0 \in K$, cada $u \in U_{m,A}$, $T(u) \leq T$, $0 \leq t \leq T(u)$. ■

Como pode-se observar na estimativa acima, para poder obter convergência uniforme de $Ser_N(u)(F)(\phi)$ precisamos que a cota C_N que aparece na demonstração não dependa de N . Pela hipótese de analiticidade sobre a família F , a variedade M e as funções $\phi \in C^\omega(M)$ consegue-se o que desejamos. Iniciamos isto com um lema prévio.

Lema 2.3.3. Sejam $F = (F_0, \dots, F_m)$ uma família de campos vetoriais reais analíticos sobre uma variedade analítica M , e seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ analítica. Pomos K compacto. Então existe uma constante $C > 0$ tal que a estimativa

$$|(F_I \phi)(x)| \leq \gamma! C^\gamma$$

vale para cada $x \in K$, $\gamma \in \mathbb{Z}^+$, e toda escolha dos índices $i_1, \dots, i_m$, $0 \leq i_j \leq m$, $I = (i_1, \dots, i_\gamma)$.

Prova. Veja [16].

Proposição 2.3.4. Considere o sistema de controle

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) F_i(x(t)), u = (u_1, \dots, u_m)$$

Assumamos que:

1) M é uma variedade real analítica, $F = (F_0, \dots, F_m)$ campos reais analíticos.

- 2) A um real positivo.
- 3) $K \subseteq M$, compacto.
- 4) $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ analítica.

Então existe um tempo $T > 0$ tal que para cada $x \in K$, e cada $u \in U_{m,A}$ para o qual $T(u) \leq T$ se tem:

- (a) $t \longrightarrow \pi(F, u, x, t)$ é definida para $0 \leq t \leq T(u)$
- (b) $Ser_N(u^t)(F)(\phi) \xrightarrow{\text{unif}} \phi(\pi(F, u, t, \cdot))$ sobre K , $u \in U_{m,A}$, $T(u) \leq T$

Prova. (b) Como $A > 0$, $K \subseteq M$ compacto, existe $\tau(K, A) > 0$ para o qual se cumpre (i) e (ii) no Lema 2.3.1. Mais ainda o conjunto

$$K^{A,T'} = \{\pi(F, u, x_0, t) : x_0 \in K, 0 \leq t \leq T(u) \leq T', u \in U_{m,A}\}$$

é compacto desde que $T' \leq \tau(K, A)$.

Tomando $Ser_N(u^t)(F)(\phi)$ para ser a N -ésima soma parcial de $Ser(u^t)(F)(\phi)$ e como

$$|\phi(\pi(F, u, x_0, t)) - Ser_N(u^t)(F)(\phi)(x_0)| = |R_N(u^t, F, \phi)(x_0)|$$

onde

$$R_N(u^t, F, \phi)(x) = \sum_{|I|=N+1} R^I(u^t, F, \phi)(x) \quad e \quad (2)$$

$$\begin{aligned} |R^I(u^t, F, \phi)(x)| &\leq A^{N+1} \int_0^t \int_0^{\tau_{N+1}} \dots \int_0^{\tau_2} |(F_I \phi)(\pi(F, u, x, t))| d\tau_1 \dots d\tau_{N+1} \\ &\leq A^{N+1} \sup\{|(F_I \phi)(\pi(F, u, x, \tau))|\} \frac{t^{N+1}}{(N+1)!} \\ &= \frac{(At)^{N+1}}{(N+1)!} \sup\{|(F_I \phi)(\pi(F, u, x, \tau))|\} \end{aligned} \quad (3)$$

disto, por uma majoração em (2) e substituindo (3) obtemos

$$R_N(u^t, F, \phi)(x) \leq \frac{(At)^{N+1}}{(N+1)!} (m+1)^{N+1} \sup\{|(F_I \phi)(\pi(F, u, x, \tau))|\} \quad (4)$$

onde $(m+1)^{N+1}$ denota o número de combinações possíveis dos $I = (i_1, \dots, i_{N+1})$. Aqui o supremo é tomado sobre todos $x \in K$, $u \in U_{m,A}$, $T(u) \leq T'$, logo pelo Lema 2.3.3 existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|(F_I \phi)(x)| \leq C^{N+1} (N+1)!$$

para cada $x \in K^{A,T'}$, $I = (i_1, \dots, i_k)$, $|I| = N + 1$. Nestas condições $\pi(F, u, x, t) \in K^{A,T'}$ e em particular obtém-se

$$\sup\{|(F_I \phi)(\pi(F, u, x, \tau))|\} \leq C^{N+1}(N + 1)! \quad (5)$$

substituindo (5) em (4) obtemos

$$|R_N(u^t, F, \phi)(x)| \leq [CAT'(m + 1)]^{N+1}$$

para cada $u \in U_{m,A}$, com $T(u) \leq T'$, $0 \leq t \leq T(u)$, $|I| = N + 1$. Finalmente é possível fazer a escolha de um $T \leq T'$ tal que $CAT(m + 1) < 1$ e nestas condições a desigualdade

$$|\phi(\pi(F, u, x, t)) - Ser_N(u)(F)(\phi)(x)| \leq [CAT(m + 1)]^{N+1}$$

dá a convergência uniforme sobre K , desde que $N \longrightarrow \infty$

(a) o mesmo T acima satisfaz para a primeira parte. ■

CAPÍTULO III

CONTROLABILIDADE LOCAL

Neste capítulo introduzimos o conceito de controlabilidade local para um tempo suficientemente pequeno (CLTP) a partir de um ponto dado. Este conceito induz a estudar condições suficientes para que um sistema tenha tal propriedade. Uma delas é a que se conhece como a condição de controlabilidade local segundo Hermes (CCLH).

Usamos como ferramenta o formalismo exponencial desenvolvido no Capítulo II (com $\Sigma = (X_0, X_1)$) para estudar variações de controle, o que fornece controlabilidade local no ponto em menção. Isto é, trajetórias do sistema (2) (abaixo) são aproximadas pelas trajetórias do sistema formal em $G^N(\Sigma)$ definida por

$$\dot{Y}(t) = H_0(Y(t)) + u(t)H_1(Y(t)), \quad |u| \leq A$$

onde $H_0(Y) = X_0Y$ e $H_1(Y) = X_1Y$.

3.1 Formulação da conjectura de Hermes.

Para a formulação da conjectura precisamos de alguns conceitos preliminares e fixar o tipo de sistema de controle com a qual trabalharemos.

Seja o sistema de controle

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t)F_i(x(t)), \quad \Omega = B([0, A]) \subseteq \mathbb{R}^m \quad (1)$$

A idéia de (CLTP) a partir de um ponto x_0 é poder mover-se a partir de x_0 em todas direções, seguindo trajetórias correspondentes a controles dados.

Definição 3.1.1. Um sistema de controle (M, Σ, Ω) , definido em (1) é dito localmente controlável em um tempo suficientemente pequeno (CLTP) a partir de x_0 , se $\mathbf{A}(x_0, t)$ contém uma vizinhança de x_0 para cada $t > 0$.

Para nosso caso específico consideremos o sistema

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + u(t)F_1(x(t)) \quad |u(t)| \leq A \quad (2)$$

Em analogia com pontos de equilíbrio de um campo vetorial, definiremos ponto de equilíbrio do sistema descrito acima.

Definição 3.1.2 Um ponto $x_0 \in M$ é dito um ponto de equilíbrio do sistema de controle (M, Σ, Ω) ($\Omega = B[0, A]$) definido por (2), se existir $u \in \mathbb{R}, |u| \leq A$ tal que $F_0(x_0) + uF_1(x_0) = 0$

Definição 3.1.3. Um ponto $x_0 \in M$ é dito um ponto regular de equilíbrio do sistema de controle (M, Σ, Ω) , definido por (2), se existir $u \in \mathbb{R}, |u| < A$ tal que $F_0(x_0) + uF_1(x_0) = 0$.

Observação.

- i) Se $x_0 \in M$ é ponto de equilíbrio (ponto singular) de F_0 , então x_0 é ponto de equilíbrio do sistema de controle (M, Σ, Ω) . Pois basta tomar $u = 0$.
- ii) Exceto no caso trivial em que $\mathbf{A}(x_0, t) = \{x_0\}$, para todo $t > 0$, o escalar u nas definições 3.1.2, 3.1.3 é único. De fato, suponhamos que existam $u, v \in \mathbb{R}, |u| < A, |v| < A$, satisfazendo

$$F_0(x_0) + uF_1(x_0) = 0 \text{ e } F_0(x_0) + vF_1(x_0) = 0, \text{ então } uF_1(x_0) = vF_1(x_0)$$

Ocorre que:

$$F_1(x_0) = 0 \text{ ou } F_1(x_0) \neq 0$$

Se $F_1(x_0) = 0$, então $F_0(x_0) = 0$ e para cada controle u , a trajetória associada satisfaz $\pi(F, u, x_0, t) = x_0$. Logo, $\mathbf{A}(x_0, t) = \{x_0\}$, para cada $t > 0$.

Se $F_1(x_0) \neq 0$, então $u = v$.

- iii) A recíproca nem sempre é verdadeira, mas é possível transformar nosso sistema original em outro sistema na qual o ponto que foi de equilíbrio do sistema, é agora um ponto de equilíbrio do campo não perturbado no sistema transformado.

Com efeito, consideremos

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + u(t)F_1(x(t)) , \quad |u(t)| \leq A$$

como nosso sistema original e seja x_0 um ponto de equilíbrio deste sistema, então existe um escalar $\bar{u} \in \mathbb{R}, |\bar{u}| \leq A$ tal que

$$F_0(x_0) + \bar{u}F_1(x_0) = 0$$

Considerando os campos $\tilde{F} = F_0 + \bar{u}F_1$, $G = F_1$ formamos um novo sistema

$$\dot{x}(t) = \tilde{F}(x(t)) + v(t)G(x(t)) \quad , \quad |v(t)| \leq \beta \quad (3)$$

onde $v(t) = u(t) - \bar{u}$. Neste caso $\tilde{F}(x_0) = 0$. Então pode-se dizer que x_0 é ponto de equilíbrio de $\tilde{F}$. Agora para ter algo de compatibilidade do novo sistema e o original, e para que não seja isolada do sistema original procuramos uma relação entre suas trajetórias. Isto é, entre A e β .

Lema 3.1.4 (a) Cada trajetória do sistema (3) é uma trajetória do sistema (2) desde que $\beta \leq A - |\bar{u}|$

(b) (CLTP) a partir de x_0 no sistema (3) implica (CLTP) desde x_0 no sistema (1).

Prova. a) Seja $x(\cdot)$ uma trajetória associada ao controle v no sistema (3), então

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{F}(x(t)) + v(t)G(x(t)) \quad |v(t)| \leq \beta \\ \dot{x}(t) &= F_0(x(t)) + (v(t) + \bar{u})F_1(x(t)) \end{aligned}$$

$x(\cdot)$ será uma trajetória do sistema (2) desde que nós encontremos um controle associado a dita trajetória. Para $u(t) = v(t) + \bar{u}$ temos

$$|u(t)| \leq |v(t)| + |\bar{u}| \leq \beta + |\bar{u}| \leq A.$$

Conclui-se que:

Se $\beta \leq A - |\bar{u}|$, a parte (a) é satisfeita.

(b) Se temos que $\beta \leq A - |\bar{u}|$, por (a) toda trajetória de (3) é uma trajetória de (2), então $\mathbf{A}_3(x_0, t) \subseteq \mathbf{A}_2(x_0, t)$ para cada $t > 0$.

Ao supor que (3) é CLTP desde x_0 a conclusão segue da inclusão precedente. ■

A espécie de reciprocidade apresentada na observação (iii) é respondida pelo Lema 3.1.4 em outro sistema. Na realidade o que fazemos é uma translação no conjunto onde os controles assumem valores.

Seja $AL(F)$ a álgebra de Lie gerada por $F = \{F_0, F_1\}$. Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, considera-se o subespaço $AL_k(F) \subseteq AL(F)$ gerado pelos colchetes que contém F_1 no máximo k -vezes

Por exemplo

se $k = 0$, então $AL_0(F) = \{\lambda F_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$

se $k = 1$, então $AL_1(F)$ é gerado por $F_0, F_1, [F_0, F_1], (ad F_0)^j(F_1), j \geq 0$.

Assim obtém-se uma cadeia $AL_1(F) \subseteq AL_2(F) \subseteq \dots \subseteq AL_k(F) \subseteq \dots$ de subespaços vetoriais e com estas convenções formulamos a CCLH.

O sistema de controle (M, Σ, Ω) definido por (2) satisfaz a condição de controlabilidade local segundo Hermes (CCLH) em x_0 se as seguintes condições são satisfeitas

(CCLH1) x_0 é um ponto regular de equilíbrio.

(CCLH2) $\dim AL(F)(x_0) = \dim T_{x_0}M$ (condição de posto da álgebra de Lie).

(CCLH3) A sequência crescente de subespaços $\{AL_k(F_0 + uF_1, F_1) : k = 0, 1, \dots\}$ satisfaz

$$AL_k(F_0 + uF_1, F_1)(x_0) = AL_{k+1}(F_0 + uF_1, F_1)(x_0)$$

desde que k é ímpar

A conjectura de Hermes.

Uma condição suficiente para CLTP a partir de x_0 é que o sistema (2) satisfaça CCLH em x_0 .

Isto provaremos adiante.

Observação

- i) (CLTP) a partir de x_0 é uma propriedade local. Como interessa $A(x_0, t)$ para t suficientemente pequeno, pode-se supor que $M = \mathbb{R}^n$ ou M subvariedade aberta do $\mathbb{R}^n$ e tomar $x_0 = 0$.
- ii) no caso (i) é possível considerar $F_0(0) = 0$. Isto é, o ponto $x_0 = 0$ é de equilíbrio de F_0 , e será de equilíbrio do nosso sistema transformado (tomar $\bar{u} = 0$)
- iii) o sistema (2) é transformado em

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + u(t)F_1(x(t)) \quad |u(t)| \leq 1 \quad (4)$$

pois é suficiente trocar F_1 por AF_1 no sistema (2).

- iv) Se o sistema (2) satisfaz CCLH em x_0 , então o sistema (3) satisfaz CCLH em x_0 .
Com efeito, CCLH1 é satisfeito pela observação (i) da definição 3.1.3, CCLH2, CCLH3 decorre do cálculo dos colchetes $[F_0 + \bar{u}F_1, F_1] = [F_0, F_1]$ e assim sucessivamente. Em particular o sistema (4) satisfaz CCLH em 0.

No que segue consideraremos um caso particular da álgebra associativa livre e lemas relacionados com ele que permitem de alguma forma provar a conjectura. Ou seja, trabalhamos com $A(\Sigma), A^N(\Sigma)$, onde $\Sigma = (X_0, X_1)$. Se $Y \in A(\Sigma)$, então $Y = \sum y_I X_I$ é um polinômio nas indeterminadas X_0, X_1 . Assim é natural falar do grau total e parcial em X_1 denotado por $\partial Y, \partial_1 Y$ respectivamente (veja seção 2.1). Como uma ilustração temos que, se $Y = X_0^4 X_1^4 + X_0 X_1 X_0 X_1^4$, então $\partial Y = 8, \partial_1 Y = 5$

De maneira análoga pode-se considerar a ordem w definida no capítulo II, e w_1 ordem parcial relativa a X_1 (veja seção 2.1). Ainda por propriedades de ordem tem-se $w(Y_1 Y_2) \geq w(Y_1) + w(Y_2)$ e $w_1(Y_1 Y_2) \geq w_1(Y_1) + w_1(Y_2)$ no caso em que a álgebra de série de potências formais for definida num anel arbitrário, mas tem-se igualdade se o anel fosse um domínio de integridade (veja [19]).

Definição 3.1.5. Um elemento $Y \in G^N(\Sigma)$ é dito distinguido se existe $p \in \mathbb{N}, T^0 \in \mathbb{R}^p$, com coordenadas estritamente positivas tal que o D -controle $\{D, T^0\}$ é N -normal e $\text{Ser}_N(\{D, T^0\}) = Y$.

Observação

- i) a existência de elementos distinguidos é garantida pela proposição 2.2.5 desde que $\text{Aff}(D) = \mathbb{R}$ (neste caso $D = \{-1, 1\}$). Assim $\text{Ser}_N(\{D, T^0\})$ é distinguido para cada D -controle $\{D, T^0\}$ N -normal.
- ii) Seja Y distinguido e $\tilde{Y} = \text{Ser}_N(\{D, T\}).Y$, para algum D -controle. Se $\tilde{Y} \in G^N(\Sigma)$, então $\tilde{Y}$ é distinguido.

Com efeito, existe $k \in \mathbb{N}, T^0 \in \mathbb{R}_+^k$ tal que o D -controle $\{D, T^0\}$ é N -normal e $Y = \text{Ser}_N(\{D, T^0\})$, logo

$$\tilde{Y} = \text{Ser}_N(\{D, T\}). \text{Ser}_N(\{D, T^0\}) \\ \tilde{Y} = e^{s_p X^p(D)} \dots e^{s_1 X^1(D)} . e^{t_k X^k(D)} \dots e^{t_1 X^1(D)}$$

mas

$$V_{k+p,D}^N((t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_p)) = e^{s_p X^p(D)} \dots e^{s_1 X^1(D)}. \text{Ser}_N(\{D, T\})$$

logo

$$(dV_{k+p,D}^N)_{(t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_p)} = (dL_{\text{Ser}_N(\{D, T\})})_* \circ (dV_{k,D}^N)_{(t_1, \dots, t_k)}$$

como posto $(dV_{k,D}^N)_{(t_1, \dots, t_k)} = \dim G^N(\Sigma)$, segue-se que o posto $(dV_{k+p,D}^N)_{(t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_p)} = \dim G^N(\Sigma)$.

Assim o D -controle N -normal satisfazendo as condições é

$$\{D, \tilde{T}\} = \{D, T\} \# \{D, T^0\}, \quad \tilde{T} = (t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_p).$$

Lema 3.1.6 Para cada D -controle $\{D, T^0\}$ N -normal, existe um aberto $U \ni \text{Ser}_N(\{D, T^0\})$ e um difeomorfismo $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que $\text{Ser}_N(\{D, \psi(Y')\}) = Y'$ para cada $Y' \in U$ e $\psi(\text{Ser}_N(\{D, T^0\})) = T^0$, $T^0 \in \mathbb{R}^p$

Prova. Como $Y = \text{Ser}_N(\{D, T^0\}) = V_{p,D}^N(T^0)$ e posto $(dV_{p,D}^N)_{T^0} = \dim G^N(\Sigma)$, então pelo teorema da função implícita existe um aberto $V \ni T_0$, $V \subset \mathbb{R}_+^p$ tal que $V_{p,D}^N : V \rightarrow G^N(\Sigma)$ é um difeomorfismo. Logo é só tomar $U = V_{p,D}^N(V)$, $\psi = (V_{p,D}^N)^{-1}$. Assim

$$\text{Ser}_N(\{D, \psi(Y')\}) = V_{p,D}^N(\psi(Y')) = Y' \quad \text{para cada} \quad Y' \in U. \quad \blacksquare$$

O lema precedente mostra que é possível atingir vizinhanças de elementos distinguidos.

Consideraremos agora elementos distinguidos especiais. Para o caso $\Sigma = (X_0, X_1)$ definimos um automorfismo $\lambda : A^N(\Sigma) \rightarrow A^N(\Sigma)$ pondo $\lambda(X_0) = X_0$, $\lambda(X_1) = -X_1$ e estendendo de maneira única. Dizemos que um elemento $Z \in A^N(\Sigma)$ é par ou invariante sob λ se é combinação linear de monômios que contém X_1 um número par de vezes, isto é: $\lambda(Z) = Z$. Caso contrário Z é ímpar. Assim cada $Z \in A^N(\Sigma)$ pode ser escrito como $Z = Z_{\text{par}} + Z_{\text{ímpar}}$.

Cada elemento $Y = \text{Ser}_N(\{D, T^0\}) \in G^N(\Sigma)$ pode ser olhado como $Y = e^Z$ (fórmula de Campbell-Hausdorff), onde $Z \in AL^N(\Sigma)$.

Lema 3.1.7 Seja $Y \in G^N(\Sigma)$ distinguido tal que $Y = \text{Ser}_N(\{D, T\})$ e $T \in \mathbb{R}_+^k$, então $\lambda(Y) = \text{Ser}_N(\{D, (0, T)\})$.

Prova. Seja $T = (t_1, \dots, t_k)$, $Y = \text{Ser}_N(\{D, T\}) = V_{k,D}^N(T) = e^{t_k X^k(D)} \dots e^{t_1 X^1(D)}$. É necessário comparar $\lambda(Y)$ e $\text{Ser}_N(\{D, (0, T)\})$.

Como $X^i(D) = X_0 + (-1)^{i-1} X_1$ para $i = 1, 2, \dots, k$ (veja seção 2.2, no caso que $\Sigma = (X_0, X_1)$, $D = \{-1, 1\}$) temos que

$$Y = e^{t_k(X_0 + (-1)^{k-1} X_1)} \dots e^{t_2(X_0 - X_1)} e^{t_1(X_0 + X_1)}$$

e por uma aplicação do autormorfismo λ obtém-se

$$\lambda(Y) = e^{t_k(X_0 + (-1)^k X_1)} \dots e^{t_2(X_0 + X_1)} e^{t_1(X_0 - X_1)} \quad *$$

por outro lado tem-se

$$\text{Ser}_N(\{D, (0, T)\}) = V_{k+1,D}^N(0, t_1, \dots, t_k) \quad , \quad D = \{1, -1\} \quad \text{e}$$

$$\{D, (0, T)\}(\tau) = 1 \quad , \quad \tau = 0$$

$$\{D, (0, T)\}(\tau) = -1 \quad , \quad 0 < \tau < t_1$$

$$\vdots$$

$$\{D, (0, T)\}(\tau) = (-1)^k \quad , \quad t_1 + \dots + t_{k-1} < \tau < t_1 + \dots + t_k$$

logo

$$\text{Ser}_N(\{D, (0, T)\}) = e^{t_k(X_0 + (-1)^k X_1)} \dots e^{t_1(X_0 - X_1)} \quad **$$

De (*) e (**) temos

$$\lambda(Y) = \text{Ser}_N(\{D, (0, T)\}) \quad \blacksquare$$

Observação. Se Y é distinguido, então $Y.\lambda(Y)$ é distinguido pela observação (ii) da Definição 3.1.5.

Seja $Y = \text{Ser}_N(\{D, T\}) = e^Z$ distinguido, o seguinte lema permite encontrar Y distinguido com Z par, e daí atingir vizinhanças de elementos distinguidos pares.

Lema 3.1.8. Existe um elemento distinguido $Y = e^Z$ tal que Z é par.

Prova. Tomemos um elemento distinguido $Y_1 = e^{Z^1}$. Se Z^1 é par não há nada a mostrar. Caso contrário, se constrói $Y = e^Z$, com Z par, por indução da seguinte forma: pela observação do Lema 3.1.6 $Y_2 = \lambda(Y_1)Y_1$ é distinguido, mas $Y_1 = e^{Z^1}$, Z^1 elemento de Lie, e pela decomposição, $Z^1 = Z_{\text{par}}^1 + Z_{\text{impar}}^1$, $\lambda(Z^1) = Z_{\text{par}}^1 - Z_{\text{impar}}^1$ com $Z_{\text{par}}^1, Z_{\text{impar}}^1$ elementos de Lie. Em particular $w(Z_{\text{impar}}^1) \geq 1$.

Por uma aplicação da fórmula do Campbell-Hausdorff a

$$Y_2 = e^{Z_{\text{par}}^1 - Z_{\text{impar}}^1} \cdot e^{Z_{\text{par}}^1 + Z_{\text{impar}}^1}$$

obtemos

$$Y_2 = e^{2Z_{\text{par}}^1 + R^1} \quad *$$

$$\text{onde } R^1 = \frac{1}{2}[Z_{\text{par}}^1 - Z_{\text{impar}}^1, Z_{\text{par}}^1 + Z_{\text{impar}}^1] + \frac{1}{12}[\lambda(Z^1), [\lambda(Z^1), Z^1]] + \dots$$

Como $w(Z_{\text{par}}^1) \geq 1$, $w(Z_{\text{impar}}^1) \geq 1$ obtemos que $w(Z_{\text{par}}^1 \cdot Z_{\text{impar}}^1) \geq 2$. Mas R^1 é soma de produtos $Z_{\text{par}}^1, Z_{\text{impar}}^1$ em que aparecem no mínimo dois desses fatores. Daí segue-se que $w(R^1) \geq 2$.

Além do mais Y_2 é distinguido e $Y_2 = e^{Z^2}$, Z^2 elemento de Lie e pela decomposição $Z^2 = Z_{\text{par}}^2 + Z_{\text{impar}}^2$ e conferindo com (*) obtém-se

$$Z^2 = 2Z_{\text{par}}^1 + R^1$$

de onde se vê que Z_{impar}^2 está contido em R^1 e portanto $w(Z_{\text{impar}}^2) \geq 2$.

Agora, considere $Y_3 = \lambda(Y_2)Y_2$ o qual é distinguido. Também $Y_3 = e^{Z^3}$, onde Z^3 é um elemento de Lie que tem a decomposição $Z^3 = Z_{\text{par}}^3 + Z_{\text{impar}}^3$, onde $Z_{\text{par}}^3, Z_{\text{impar}}^3$ são elementos de Lie. Em particular $w(Z_{\text{par}}^1) \geq 1$.

Por uma aplicação da fórmula do Campbell-Hausdorff,

$$Y_3 = e^{2Z_{\text{par}}^1 + \lambda(R^1)} \cdot e^{2Z_{\text{par}}^1 + R^1}$$

obtemos de maneira análoga a Y_2 , que

$$Y_3 = e^{4Z_{\text{par}}^1 + R^1 + \lambda(R^1) + R^2}$$

onde

$$R^1 + \lambda(R^1) = \frac{1}{2}[[Z_{\text{par}}^1 + Z_{\text{impar}}^1, Z_{\text{par}}^1 - Z_{\text{impar}}^1], -2Z_{\text{par}}^1] + \dots$$

Como $w([Z^1, \lambda(Z^1)]) \geq 2$ e $w(Z_{\text{par}}^1) \geq 1$ obtém-se $w(R^1 + \lambda(R^1)) \geq 3$. Mas R^2 contém colchetes de maior ordem, então $w(R^2) \geq 3$.

Mas $Z_{\text{par}}^3 + Z_{\text{impar}}^3 = 2Z_{\text{par}}^1 + R^1 + \lambda(R^1) + R^2$, significa Z_{impar}^3 está contido em $R^1 + \lambda(R^1) + R^2$ o que mostra $w(Z_{\text{impar}}^3) \geq 3$.

Continuando com esta iteração pode-se conseguir elementos distinguidos $Y_j \in G^N(\Sigma)$ tal que $Y_j = e^{Z^j}$, $Z^j = Z_{\text{par}}^j + Z_{\text{impar}}^j$, onde Z^j é elemento de Lie e $w(Z_{\text{impar}}^j) \geq j$.

Tomando $j = N+1$, consegue-se $Y_{N+1} = e^{Z^{N+1}}$, $Z^{N+1} = Z_{\text{par}}^{N+1} + Z_{\text{impar}}^{N+1}$, $w(Z_{\text{impar}}^{N+1}) \geq N+1$. Isto quer dizer que $Z_{\text{impar}}^{N+1} = 0$ e por conseguinte $Y = Y_{N+1} = e^{Z_{\text{par}}^{N+1}}$, Z_{par}^{N+1} elemento de Lie. ■

Como procura-se CLTP desde x_0 para o sistema (2) a idéia é construir para uma quantidade suficiente de direções $v \in T_{x_0}M$ curvas que realizam v e que sejam trajetórias do sistema dependentes de um parâmetro $\delta > 0$ (pequeno). Em outras palavras, se constrói uma família de controles $u_\delta(\cdot)$ que levem x_0 em y_δ tal que $y_0 = x_0$, y_δ é C^1 em δ e que $\left(\frac{dy_\delta}{d\delta}\right)(0) = v$.

Para isso consideramos o sistema formal em $G^N(\Sigma)$ definido por

$$\dot{Y}(t) = H_0(Y(t)) + u(t)H_1(Y(t)), \quad |u| \leq A. \quad (*)$$

Para ter uma relação deste sistema com (2) devemos definir uma aplicação $\tilde{\psi} : U \subset G^N(\Sigma) \rightarrow M$, U vizinhança de 1 tal que $\tilde{\psi}(1) = x_0$ e $\tilde{\psi}$ aproxima as trajetórias de (*) as trajetórias de (2). Isso é possível se consideramos $AL^N(F)$ (truncado), com $F = (F_0, F_1)$ e se definirmos $Ev : AL^N(\Sigma) \rightarrow AL^N(F)$ por $Ev(X_0) = F_0, Ev(X_1) = F_1$.

O problema se resolve ao conseguirmos atingir uma vizinhança $U \ni 1$ desde 1 ou também se atingirmos desde 1, uma vizinhança U de algum $\tilde{Y} \in G^N(\Sigma)$ tal que $\tilde{\psi}(\tilde{Y}) = x_0$.

Teorema 3.1.9. Se o sistema de controle (M, Σ, Ω) definido por (2) satisfaz a CCLH em x_0 , então (2) é CLTP desde x_0 .

Prova. Pelas observações i), ii), iii), iv) feitas na formulação da conjectura é suficiente supor $M = \mathbb{R}^n$, $x_0 = 0$ e que nosso sistema é dado pela equação (4). Provaremos que ele é CLTP desde 0. A conclusão segue-se do Lema 3.1.4 b).

Afirmção 1. Existe uma sequência $Y_1, \dots, Y_n$ de monômios de Lie em X_0, X_1 tal que os vetores $Ev(Y_1)(0), \dots, Ev(Y_n)(0)$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

Com efeito, por CCLH2 temos que $AL(F)(0) = \mathbb{R}^n$ daí que existem campos $G_1, \dots, G_n$ em $AL(F)$ tal que $G_1(0), \dots, G_n(0)$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$, segue-se que existem monômios de Lie $Y_1, \dots, Y_n$ com $Ev(Y_1) = G_1, \dots, Ev(Y_n) = G_n$.

Dito de outra maneira, existe $E \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcup_{k=0}^E AL_k(F_0, F_1)(0) = \mathbb{R}^n. \quad \square$$

Com a existência dos monômios de Lie $Y_1, \dots, Y_n$ acima é possível considerar os graus $D = \max_{1 \leq i \leq n} \{\partial Y_i\}$, $D_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \{\partial_1 Y_i\}$.

O próximo passo é a escolha de uma base para $AL^N(\Sigma)$ formada por monômios de Lie, mas mantendo sob controle os graus ∂, ∂_1 . Iniciamos isto separando o conjunto de monômios como segue: para cada i, j denotemos por $\text{Mon}(i, j)$ o conjunto dos monômios de Lie β em X_0, X_1 tal que $\partial(\beta) = i, \partial_1(\beta) = j$, isto é

$$\begin{aligned} \text{Mon}(1, 0) &= \{X_0\} & \text{Mon}(1, 1) &= \{X_1\} \\ \text{Mon}(i, j) &= \bigcup_{\substack{i_1+i_2=i \\ j_1+j_2=j}} \{[A, B] : A \in \text{Mon}(i_1, j_1), B \in \text{Mon}(i_2, j_2)\} \end{aligned}$$

Para o espaço vetorial $E_{ij} = \langle \text{Mon}(i, j) \rangle$ gerado por $\text{Mon}(i, j)$ fixamos uma base $\beta_{ij} = \{\beta_{ijk} : 1 \leq k \leq \tilde{k}(i, j)\}$ com a qual trabalharemos.

Para cada $j \leq E$ temos, $AL_{j-1}(F_0, F_1)(0) \subseteq AL_j(F_0, F_1)(0)$. Então é possível completar $AL_{j-1}(F_0, F_1)(0)$ com $Ev(\beta_{ijk})(0)$ com i, k apropriados para obter

$$AL_j(F_0, F_1)(0) = \langle AL_{j-1}(F_0, F_1)(0) \cup \{Ev(\beta_{ijk})(0) : (i, k) \in a(j)\} \rangle$$

onde

$$a(j) = \{(i, k) : AL_j(F_0, F_1)(0) = \langle AL_{j-1}(F_0, F_1)(0) \cup \{Ev(\beta_{ijk})(0)\} \rangle\}.$$

Se denotamos por $F = \max\{\partial(\beta_{ijk}) : j \leq E \text{ e } (i, k) \in a(j)\}$ então para cada $j \geq 0$ todo elemento de $AL_j(F_0, F_1)(0)$ é uma combinação linear dos $Ev(\beta_{isk})(0)$ satisfazendo $i \leq F, s \leq j, s \leq E$. Pois $\bigcup_{k \leq j-1} \langle \text{Mon}(i, k) \rangle$ e os de complemento $Ev(\beta_{isk})(0)$ geram $AL_{j-1}(F_0, F_1)(0)$ para $(i, k) \in a(j)$, $i \leq F, s \leq j, s \leq E$.

Por uma razão que esclareceremos adiante escolhemos $Q \in \mathbb{N}, Q > F$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que $D + QD_1 < N$. Para este $N \in \mathbb{N}$ consideramos $AL^N(\Sigma)$ a álgebra de Lie livre nilpotente de ordem $N + 1$. Temos que $AL^N(\Sigma) = \langle \bigcup_{i \leq N} \text{Mon}(i, j) \rangle$, então cada $Z \in AL^N(\Sigma)$ tem uma representação única

$$Z = \sum_{i \leq N} \sum_{j \leq i} \sum_k z_{ijk} \beta_{ijk} \quad (5)$$

Agora o Lema 3.1.8 garante que existe um elemento distinguido Y tal que $Y = e^Z$, com $Z \in AL^N(\Sigma)$ par. Segue-se que existe um $q \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{R}^q$ com coordenadas estritamente positivas tal que

$$\text{Ser}_N(\{D, T\}) = Y$$

onde $\{D, T\}$ é N -normal (i.e. Y é atingível desde 1 num tempo $\|T\| = \sum_{i=1}^q t_i$).

Como $Z \in AL^N(\Sigma)$ é par, segue-se de (5) que

$$Z = \sum_{i \leq N} \sum_{j \leq i}^p \sum_k z_{ijk} \beta_{ijk}. \quad (6)$$

onde Σ^p percorre os valores pares de j .

Uma aplicação do Lema 3.1.6 ao D -controle $\{D, T\}$ N -normal assegura a existência de um aberto $U \ni Y$ contido em $G^N(\Sigma)$ e um difeomorfismo

$$\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}_+^2$$

tal que $\text{Ser}_N(\{D, \psi(Y')\}) = Y'$, para $Y' \in U$ e $\psi(Y) = T$.

Isto significa que o sistema definido em $G^N(\Sigma)$ tem a propriedade de acessibilidade, pois nós conseguimos um aberto $U \ni Y$ tal que $U \subseteq S^N(\Sigma, \Omega) = \text{Ser}_N(U_m(\Omega))$.

Para $i \leq N, j \leq i, k \leq \bar{k}(i, j), j$ — par, por CCLH3 obtém-se que $AL_j(F_0, F_1)(0) = AL_{j-1}(F_0, F_1)(0)$, então $Ev(\beta_{ijk})(0) \in AL_{j-1}(F_0, F_1)(0)$ com i, j, k com acima. Segue-se de (5) que existem coeficientes ξ_{ijk}^{abc} tal que

$$Ev(\beta_{ijk})(0) + \sum_{abc} \xi_{ijk}^{abc} Ev(\beta_{abc})(0) = 0 \quad (7)$$

onde a soma percorre sobre $a \leq F, b < j, c \leq \bar{k}(a, b)$.

No que segue construímos uma família de controles dependentes de parâmetros ε, ρ perturbando o elemento de Lie par Z .

Para $a \leq F, b < j, b \leq E, c \leq \bar{k}(a, b), i \leq N, j \leq i, k \leq \bar{k}(i, j)$ associamos uma família de números reais $\varepsilon = \{\varepsilon_{ijk}^{abc}\}$ e $\rho = \{\rho_i : i = 1, \dots, n\}$ e definimos

$$Z^1(\varepsilon, \rho) = Z + \sum_{ijk} \sum_{abc} \xi_{ijk}^{abc} \varepsilon_{ijk}^{abc} \beta_{abc} + \sum_{i=1}^n \rho_i Y_i$$

$$Y'(\varepsilon, \rho) = e^{Z^1(\varepsilon, \rho)}.$$

Temos que $Z^1(0, 0) = Z$, $Y'(0, 0) = Y = e^Z$. Pode-se ver ε, ρ como k -uplas e considerar a norma de máximo $|\varepsilon| = \max\{|\varepsilon_{ijk}^{abc}|\}$, $|\rho| = \max\{|\rho_i|\}$. Assim, pela continuidade de $Y'(\cdot)$, existe $\alpha > 0$ tal que:

$$Y'(\varepsilon, \rho) \in U, \quad \text{desde que} \quad |\varepsilon| \leq \alpha, \quad |\rho| \leq \alpha. \quad (8)$$

Para ε, ρ satisfazendo (8) definimos controles dependentes dos parâmetros ε, ρ por

$$u_{\varepsilon, \rho} = \{D, \psi(Y'(\varepsilon, \rho))\}$$

e neste caso temos que

$$\text{Ser}_N(u_{\varepsilon, \rho}) = \text{Ser}_N(\{D, \psi(Y'(\varepsilon, \rho))\}) = Y'(\varepsilon, \rho)$$

ou seja

$$\text{Ser}_N(u_{\varepsilon, \rho}) = \varepsilon^{Z^1(\varepsilon, \rho)}$$

Quer dizer conseguimos atingir a partir de $1 \in G^N(\Sigma)$ pontos que são exponenciais da perturbação de Z (par).

No que segue procuramos controles que dependem de δ , onde $0 < \delta \leq 1$ é um parâmetro que altera o tempo final. Nos referimos aos controles

$$u_{\varepsilon, \rho}^\delta = \delta^Q \{D, \delta \psi(Y'(\varepsilon, \rho))\}.$$

Nos interessa o comportamento desses controles sob Ser_N .

Para $\delta > 0$, seja $A_\delta : AL^N(\Sigma) \longrightarrow AL^N(\Sigma)$ o automorfismo definido por $A_\delta(X_0) = \delta X_0, A_\delta(X_1) = \delta^{Q+1} X_1$. Como $G^N(\Sigma)$ é simplesmente conexo e $T_1 G^N(\Sigma) = AL^N(\Sigma)$, pela teoria de Lie, existe um único automorfismo $\varphi_\delta : G^N(\Sigma) \longrightarrow G^N(\Sigma)$ tal que $(d\varphi_\delta)_1 = A_\delta$ (veja [18]) e como φ_δ é automorfismo, segue-se que $\exp \circ d\varphi_\delta = \varphi_\delta \circ \exp$.

Seja o sistema de controle definido em $A^N(\Sigma)$ que se restringe a $G^N(\Sigma)$ (observação (3) da seção 2.1)

$$\dot{Y}(t) = H_0(Y(t)) + u H_1(Y(t)) \quad |u| \leq 1 \quad *$$

onde $H_0(Y) = X_0 Y, H_1(Y) = X_1 Y$.

Temos que $(d\varphi_\delta)_1(H_0)(1) = (\delta H_0)(1), (d\varphi_\delta)_1(H_1)(1) = (\delta^{Q+1} H_1)(1)$ e portanto H_0 e $\delta H_0, H_1$ e $\delta^{Q+1} H_1$ são φ_δ -relacionados. Para uma trajetória $Y(\cdot)$ de (*), $Z(t) = \varphi_\delta(Y(t))$ é uma trajetória do sistema

$$\dot{\tilde{Y}}(t) = \delta H_0(\tilde{Y}(t)) + u \cdot \delta^{Q+1} H_1(\tilde{Y}(t)) \quad |u| \leq 1.$$

Se consideramos $\tilde{Z}(t) = \varphi_\delta(Y(t/\delta))$ tem-se que essa é uma trajetória de $(*)$, isto é

$$\dot{\tilde{Z}}(t) = H_0(\tilde{Z}(t)) + \delta^Q u H_1(\tilde{Z}(t))$$

que é associado ao controle $v(t) = \delta^Q u(t/\delta)$. Agora aplicando φ_δ a $\text{Ser}_N(u_{\varepsilon,\rho}) = e^{Z^1(\varepsilon,\rho)}$ e usando a relação $\exp \circ (d\varphi_\delta)_1 = \varphi_\delta \circ \exp$, obtemos

$$\varphi_\delta(\text{Ser}_N(u_{\varepsilon,\rho})) = e^{Z^\delta(\varepsilon,\rho)}$$

onde $Z^\delta(\varepsilon, \rho) = (d\varphi_\delta)_1(Z^1(\varepsilon, \rho)) = A_\delta(Z^1(\varepsilon, \rho))$.

Explicitando $A_\delta(Z^1(\varepsilon, \rho))$ temos que

$$Z^\delta(\varepsilon, \rho) = Z_\delta^1(\varepsilon) + Z_\delta^2(\rho)$$

onde

$$\begin{aligned} Z_\delta^1(\varepsilon) &= \sum_{ijk} (z_{ijk} \delta^{i+Q} \beta_{ijk} + \sum_{abc} \delta^{a+Q} \xi_{ijk}^{abc} \varepsilon_{ijk}^{abc} \beta_{abc}) \\ Z_\delta^2(\rho) &= \sum_{i=1}^n \delta^{d(i)} \rho_i Y_i, \quad d(i) = \partial(Y_i) + Q \partial_1(Y_i). \end{aligned} \tag{9}$$

Como $\text{Ser}_N(U_m(\Omega)) \subseteq G^N(\Sigma)$, o automorfismo pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \varphi_\delta : \text{Ser}_N(U_m(\Omega)) &\longrightarrow \text{Ser}_N(U_m(\Omega)) \\ \varphi_\delta(\text{Ser}_N(u_{\varepsilon,\rho})) &= \text{Ser}_N(u_{\varepsilon,\rho}^\delta) \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \varphi_\delta : U_m(\Omega) &\longrightarrow U_m(\Omega) \\ \varphi_\delta(u_{\varepsilon,\rho})(t) &= u_{\varepsilon,\rho}^\delta(t) = \delta^Q u_{\varepsilon,\rho}(t/\delta). \end{aligned}$$

Pela unicidade das soluções deve-se ter

$$\text{Ser}_N(u_{\varepsilon,\rho}^\delta) = \varphi_\delta(\text{Ser}_N(u_{\varepsilon,\rho})).$$

Como conclusão, temos:

- i) multiplicar cada t_i por δ equivale a multiplicar X_0, X_1 por δ
- ii) multiplicar o controle por δ^Q equivale a multiplicar X_1 or δ^Q .

A transformação φ_δ transforma trajetórias de $(*)$ em trajetórias δ -dependentes, por tanto os pontos atingíveis dependem de δ .

Por (7), para cada ijk , a soma $\sum_{abc}$ percorre sobre os índices $a \leq F, b < j$. Então para cada abc nessa soma temos

$$i + Qj - (a + Qb) \geq i - a + Q \geq 1 \quad \text{pois } j - b \geq 1, Q > F.$$

Esta é a razão da escolha de Q .

Como queremos usar a Afirmação 1, definimos os parâmetros $\varepsilon(\delta)$ por

$$\varepsilon(\delta) = \{\varepsilon_{ijk}^{abc}(\delta)\}, \quad \varepsilon_{ijk}^{abc}(\delta) = \delta^{i+Q_j-a-Q_b} z_{ijk}.$$

Pode-se observar que $\varepsilon_{ijk}^{abc}(\delta) \longrightarrow 0$ se $\delta \longrightarrow 0$ para cada a, b, c, i, j, k . Isto dá lugar a

$$\begin{aligned} Z_\delta^1(\varepsilon(\delta)) &= \sum_{ijk} \left(z_{ijk} \delta^{i+Q_j} \beta_{ijk} + \sum_{abc} \delta^{a+Q_b} \xi_{ijk}^{abc} \delta^{i+Q_j-a-Q_b} z_{ijk} \beta_{abc} \right) \\ &= \sum_{ijk} z_{ijk} \delta^{i+Q_j} \left(\beta_{ijk} + \sum_{abc} \xi_{ijk}^{abc} \beta_{abc} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Por outro lado, de $\partial(Y_i) \leq D, \partial_1(Y_i) \leq D_1, D + QD_1 < N$ obtém-se

$$d(i) = \partial(Y_i) + Q\partial_1(Y_i) < N.$$

O que justifica a escolha do N . Agora considerando a bola unitária fechada $B_n \subseteq \mathbb{R}^n$ e pelo fato acima, é possível definir

$$\rho(\delta, y) = (\rho_1(\delta, y), \dots, \rho_n(\delta, y)) \quad , \quad \rho_i(\delta, y) = \delta^{N-d(i)} y_i$$

para cada $y = (y_1, \dots, y_n) \in B_n$, que converge uniformemente a 0 em B_n (Pois para cada $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta < \varepsilon^{1/N-d(i)}$). Usando (9) e $\rho(\delta, y)$ obtemos

$$Z_\delta^2(\rho(\delta, y)) = \delta^N \left(\sum_{i=1}^n y_i Y_i \right).$$

Dado $\alpha > 0$, existe $\bar{\delta} > 0$ tal que $|\varepsilon(\delta)| \leq \alpha$ e $|\rho(\delta, y)| \leq \alpha$ para $0 < \delta \leq \bar{\delta}, y \in B_n$ (o que decorre da convergência uniforme de ρ e continuidade de $\varepsilon(\cdot)$).

Com isto conseguimos controles dependendo de um parâmetro $\delta > 0, y \in B_n$ definidos por

$$v_{\delta, y} = u_{\varepsilon(\delta), \rho(\delta, y)}^\delta.$$

Como $\text{Ser}_N(u_{\varepsilon, \rho}^\delta) = e^{Z_\delta(\varepsilon, \rho)}$, então

$$\begin{aligned} \text{Ser}_N(v_{\delta, y}) &= \text{Ser}_N(u_{\varepsilon(\delta), \rho(\delta, y)}^\delta) = \exp(Z_\delta^1(\varepsilon(\delta)) + Z_\delta^2(\rho(\delta, y))) \\ &= \exp(\delta^N \sum_{i=1}^n y_i Y_i + Z_\delta^1(\varepsilon(\delta))) \end{aligned} \quad (11)$$

e desenvolvendo a exponencial obtemos

$$\text{Ser}_N(v_{\delta, y}) = 1 + \delta^N \left(\sum_{i=1}^n y_i Y_i \right) + \beta(\delta, y)$$

onde $\beta(\delta, y)$ é uma soma de termos que envolvem

- i) potências do $Z_\delta^1(\varepsilon(\delta))$
- ii) um produto de fatores $\delta^N \left(\sum_{i=1}^n y_i Y_i \right), Z_\delta^1(\varepsilon(\delta))$ contendo ao menos dois fatores dos quais um deles é do primeiro tipo.

Por (7) obtém-se $Ev(Z_\delta^1(\varepsilon(\delta)))(0) = 0$. Segue que cada potência $(Ev(Z_\delta^1(\varepsilon(\delta))))^m(0) = 0$. Observamos também que cada produto do tipo (ii) contém ao menos um fator δ^{N+1} , onde δ^N é tirado de $\delta^N \left(\sum_{i=1}^n y_i Y_i \right)$ e δ de $Z_\delta^1(\varepsilon(\delta))$ por ser um elemento de Lie. Nestes termos temos

$$\text{Ser}_N(v_{\delta,y}) = 1 + \delta^N \left(\sum_{i=1}^n y_i Y_i \right) + W_1 + \delta^{N+1} W_2$$

W_1 contém somas de elementos do tipo (i)

W_2 contém somas de elementos do tipo (ii)

ambos dependentes de δ, y . Além do mais, temos que $Ev(W_1)(0) = 0$.

Como $M = \mathbb{R}^N$, cada função a valores em $\mathbb{R}^N$ é determinado por suas funções coordenadas, já que estas distinguem os pontos. Portanto conhecer $\phi(\pi(F, v_{\delta,y}, T(v_{\delta,y}), 0))$ para cada $\phi \in C^\infty(M)$ é determinar $\pi(F, v_{\delta,y}, T(v_{\delta,y}), 0)$. Aqui é onde usamos o comportamento assintótico destas trajetórias. Denotamos por $\pi^*(\delta, y) = \pi(F, v_{\delta,y}, T(v_{\delta,y}), 0)$, logo para uma função $\phi \in C^\infty$ definida em uma vizinhança de 0, da equação (4) da seção 2.3 obtém-se

$$\phi(\pi^*(\delta, y)) = Ev(\text{Ser}_N(v_{\delta,y}))(\phi)(0) + R_N(v_{\delta,y}, F, \phi)(0)$$

mas

$$Ev(\text{Ser}_N(v_{\delta,y}))(\phi)(0) = \phi(0) + \delta^N \left(\sum_{i=1}^n y_i (G_i \phi)(0) \right) + (Ev(W_1)\phi)(0) + \delta^{N+1} (Ev(W_2)\phi)(0)$$

logo

$$\phi(\pi^*(\delta, y)) = \phi(0) + \delta^N \left(\sum_{i=1}^N y_i (G_i \phi)(0) \right) + \delta^{N+1} (Ev(W_2)\phi)(0) + R_N(v_{\delta,y}, F, \phi)(0)$$

como $R_N(v_{\delta,y}, F, \phi)(0)$ contém δ^{N+1} como fator, segue-se que

$$\phi(\pi^*(\delta, y)) = \phi(0) + \delta^N \left(\sum_{i=1}^n y_i G_i(0) \cdot \phi \right) + 0(\delta^{N+1})$$

onde

$$0(\delta^{N+1}) = \delta^{N+1} (Ev(W_2)\phi)(0) + R_N(v_{\delta,y}, F, \phi)(0).$$

Denotando por $0(\delta) = T(v_{\delta,y}) = \delta T(u_{\epsilon,\rho})$ disto segue que $0(\delta^{N+1}) \longrightarrow 0$, se $\delta \rightarrow 0$.

Em particular se tomamos $\phi = P_j$ a j -ésima projeção obtemos

$$P_j(\pi^*(\delta, y)) = \delta^N \left(\sum_{i=1}^n y_i G_i(0) \cdot P_j \right) + P_j(0(\delta^{N+1})) \quad *$$

mas $G_i(0) \cdot P_j = P_j(G_i(0))$, então (*) toma a forma

$$P_j(\pi^*(\delta, y)) = \delta^N \left(\sum_{i=1}^n y_i P_j(G_i(0)) \right) + P_j(0(\delta^{N+1})).$$

Assim,

$$\pi^*(\delta, y) = \delta^N \left(\sum_{i=1}^n y_i G_i(0) \right) + 0(\delta^{N+1}).$$

Seja agora a transformação linear $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $L(y) = L((y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n y_i G_i(0)$, qual é inversível com inversa $P = L^{-1}$, i.e. $(P(G_i(0)) = L^{-1}(G_i(0)) = e_i)$. Sendo $B_n \subseteq \mathbb{R}^n$ a bola unitária, para $x \in P^{-1}(B_n)$ define-se a aplicação

$$\sigma(t, x) = \pi^*(t^{1/N}, P(x))$$

$\sigma(t, x)$ é atingível a partir de 0, através do controle $v_{t^{1/N}, P(x)}$. Como $\pi^*(\delta, y) = \delta^N L(y) + 0(\delta^{N+1})$ segue-se que

$$\sigma(t, x) = tx + 0((t^{1/N})^{N+1})$$

isto é

$$\sigma(t, x) = tx + 0(t)$$

onde $0(t) = 0((t^{1/N})^{N+1})$.

Pela continuidade de P , existe uma bola fechada $B \ni 0$ tal que $P(B) \subseteq B_n$ e nesta bola B definimos as aplicações

$$\beta_t : B \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \beta_t(x) = \frac{1}{t} \sigma(t, x)$$

que como pode ser visto facilmente, convergem uniformemente para id_B quando $t \rightarrow 0$ (pois $\|\beta_t(x) - id_B(x)\| = \frac{1}{t} \|0(t)\| \rightarrow 0$ se $t \rightarrow 0$). Além do mais, cada $\beta_t(B)$ é compacto.

Afirmção 2. $\beta_t(B)$ contém uma vizinhança de 0 para t suficientemente pequeno.

Com efeito, temos que $\beta_t(B) = B + 0(t)/t$ é simplesmente uma translação de B centrado em $0(t)/t$. Como $\beta_t(B) \rightarrow B$ quando $t \rightarrow 0$ (pois $0(t)/t \rightarrow 0$) concluí-se que $\beta_t(B)$ contém uma vizinhança de 0. $\square$

Afirmção 3. O conjunto $C_t = \{\sigma(t, x) : x \in B\}$ contém uma vizinhança de 0 se t for suficientemente pequeno.

Com efeito, isso decorre da igualdade $C_t = t\beta_t(B)$, pois pela Afirmção 2, $\beta_t(B)$ contém uma vizinhança de 0 para $t \rightarrow 0$ e se definimos $\lambda_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\lambda_t(x) = tx$, que é uma homotetia, então $\lambda_t(\beta_t(B)) = C_t$ contém uma vizinhança de 0. $\square$

Como nosso propósito é provar que $\mathbf{A}(0, s)$ contém uma vizinhança de 0 para cada $s > 0$, temos a

Afirmção 4. $C_t \subseteq \mathbf{A}(0, t^{1/N}\bar{\tau})$, para t suficientemente pequeno, onde $\bar{\tau}$ é a cota superior dos tempos $T(\{D, \psi(Y^1(\varepsilon, \rho))\})$ para $|\varepsilon| \leq \alpha$, $|\rho| \leq \alpha$.

Com efeito, seja $z \in C_t$, então $z = \sigma(t, x)$, $x \in B$, mas $\sigma(t, x) = \pi^*(t^{1/N}, P(x))$, segue-se que z é atingível desde 0 em um tempo $T(v_{\delta, y})$, onde $\delta = t^{1/N}$, $y = P(x)$.

Lembrando o controle $u_{\varepsilon, \rho} = \{D, \psi(Y'(\varepsilon, \rho))\}$, seu tempo terminal é $T(u_{\varepsilon, \rho}) = \|\psi(Y'(\varepsilon, \rho))\|$, onde $\|\cdot\|$ é a norma da soma, mas $|\varepsilon| \leq \alpha$, $|\rho| \leq \alpha$ e pela continuidade de $\psi(Y'(\cdot))$ e da norma $\|\cdot\|$ temos que $\|\psi(Y'(\varepsilon, \rho))\|$ é limitada. Seja $\bar{\tau} = \max\{\|\psi(Y'(\varepsilon, \rho))\| : |\varepsilon| \leq \alpha, |\rho| \leq \alpha\}$. De $T(v_{\delta, y}) = \delta.T(u_{\varepsilon(\delta), \rho(\delta, y)})$ obtemos que $T(v_{\delta, y}) \leq \delta\bar{\tau}$ desde que $|\varepsilon(\delta)| \leq \alpha$ e $|\rho(\delta, y)| \leq \alpha$.

Isso significa que z é atingível desde 0 em um tempo $T(v_{t^{1/N}, y})$, mas $T(v_{t^{1/N}, y}) \leq t^{1/N}\bar{\tau}$, daí temos que $z \in \mathbf{A}(0, t^{1/N}\bar{\tau})$ ou seja

$$C_t \subseteq \mathbf{A}(0, t^{1/N}\bar{\tau})$$

$\square$

Concluimos que para $s > 0$ é possível encontrar $t > 0$ tal que $t^{1/N}\bar{\tau} \leq s$, qual implica que $C_t \subseteq \mathbf{A}(0, s)$.

Como, pela afirmação anterior C_t contém uma vizinhança de 0, isso conclui a prova.

■

3.2. Sobre a recíproca da Conjetura

Uma vez provada a conjectura, aparece uma pergunta de se a recíproca é verdadeira ou não. Sob condições de analiticidade sobre o sistema, pôde-se recuperar parcialmente a condição de controlabilidade de Hermes, mas não totalmente, como será mostrado com um contra exemplo.

Considere o sistema de controle (M, F, Ω) determinado por:

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + u(t)F_1(x(t)) , \quad |u(t)| \leq A. \quad (1)$$

As seguintes proposições demonstradas posteriormente dão uma resposta parcial a CCLH em x_0 .

Proposição 3.2.1. Sejam F_0, F_1 , campos vetoriais reais e analíticos.

Se o sistema (M, F, Ω) definido por (1) é CLTP desde x_0 , então verifica (CCLH1) em x_0 .

Proposição 3.2.2. Sejam F_0, F_1 , campos vetoriais reais e analíticos.

Se o sistema (M, F, Ω) definido por (1) é CLTP desde x_0 , então verifica (CCLH2) em x_0 .

Como pode-se ver, falta decidir se (CCLH3) é condição necessária para CLTP. Equivalentemente isto é formulado por:

Se (CCLH3) não verifica em x_0 , então não é CLTP desde x_0 .

O não cumprimento de (CCLH3) em x_0 significa

$$AL_k(F_0, F_1)(x_0) \subsetneq AL_{k+1}(F_0, F_1)(x_0) \quad \text{para algum } k\text{-ímpar.}$$

Iniciamos a análise supondo que $k = 1$ e

$$[F_1, [F_0, F_1]](x_0) \notin AL_1(F_0, F_1)(x_0) \quad (2)$$

Proposição 3.2.3. Sejam F_0, F_1 campos vetoriais reais analíticos. Se o sistema (M, F, Ω) definido por (1) satisfaz (2), então (1) não é CLTP desde x_0 .

Observemos que as proposições 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 dizem que se o sistema (M, F, Ω) determinado por (1) é (CLTP) desde x_0 , então (CCLH1), (CCLH2) verificam e $[F_1, [F_0, F_1]](x_0) \in AL_1(F_0, F_1)(x_0)$. Mas, a proposição 3.2.3 não cobre toda a condição (CCLH3), são muitos colchetes a mais. Tomando ainda $k = 1$, (CCLH3) diz que

$$AL_1(F_0, F_1)(x_0) = AL_2(F_0, F_1)(x_0). \quad (3)$$

Uma inclusão estrita em (3) ocorre se

$$[F_1, [F_0, F_1]](x_0) \in AL_1(F_0, F_1)(x_0) \quad (4)$$

não for satisfeita e neste caso o sistema (M, F, Ω) não é CLTP desde x_0 . (Proposição 3.2.3). Supondo que (4) se verifica, o próximo caso será se

$$[F_0, [F_1, [F_0, F_1]]](x_0) \in AL_1(F_0, F_1)(x_0) \quad (5)$$

não for satisfeita.

O seguinte lema dá condições suficientes para obter (5)

Lema 3.2.4. Se $F_0(x_0) = 0$ e se (4) for satisfeito, então (5) é verificado.

Prova. Por (4), obtém-se que $[F_1, [F_0, F_1]](x_0) = G(x_0)$ para algum $G \in AL_1(F_0, F_1)$ e por um cálculo do colchete

$$[F_0, G - [F_1, [F_0, F_1]]](x_0)$$

obtém-se

$$[F_0, [F_1, [F_0, F_1]]](x_0) = [F_0, G](x_0) \in AL_1(F_0, F_1)(x_0) \quad \blacksquare$$

Lema 3.2.5. Se (4) for satisfeito e o sistema (M, F, Ω) definido por (1) for CLTP desde x_0 , então (5) é verificado.

Prova. Como (1) é CLTP em x_0 , pela Proposição 3.2.1 x_0 é ponto de equilíbrio do sistema (1). Pelas transformações feitas em 3.1 pode-se supor $F_0(x_0) = 0$ e do Lema 3.2.4 obtemos a conclusão. ■

O Lema 3.2.5 não permite violar a condição (5), mas a próxima possibilidade será se

$$[F_1, [F_0, [F_0, [F_0, F_1]]]](x_0) \in AL_1(F_0, F_1)(x_0) \quad (6)$$

não for satisfeita.

Observação. Se a condição (4) for satisfeita e violamos (5), então do Lema 3.2.5 conclui-se que o sistema (M, F, Ω) não é CLTP desde x_0 .

Em analogia com a Proposição 3.2.3 e a observação, uma próxima afirmação é

“Afirmação”. Sejam F_0, F_1 campos vetoriais reais analíticos.

Se o sistema (M, F, Ω) definido por (1) satisfaz (4) e (5), mas (6) não for satisfeito, então (1) não é CLTP desde x_0 .

Mas essa “Afirmação” não vale como mostra o exemplo que será apresentado. Portanto, se CCLH em x_0 for uma condição necessária assim como suficiente para CLTP desde x_0 , teríamos que o sistema (M, F, Ω) não é CLTP em x_0 , desde que (6) não for satisfeito o que é um absurdo pelo

Exemplo 3.2.6 Considere $M = \mathbb{R}^3$, com coordenadas x, y, z e o sistema

$$3.2.7a \quad \dot{x} = u$$

$$3.2.7b \quad \dot{y} = x$$

$$3.2.7c \quad \dot{z} = x^3 + y^2$$

com controle restrito $u, |u| \leq 1$. Assim

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = x \cdot \frac{\partial}{\partial y} + (x^3 + y^2) \frac{\partial}{\partial z} + u \frac{\partial}{\partial x}.$$

Colocando $F_0 = x \cdot \frac{\partial}{\partial y} + (x^3 + y^2) \frac{\partial}{\partial z}$ e $F_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, obtém-se

$$\dot{w}(t) = F_0(w(t)) + u(t)F_1(w(t)) \quad |u(t)| \leq 1$$

Os colchetes apresentados abaixo são os que interessam por dois motivos. Um deles para satisfazer a hipóteses da “Afirmção” e outro por gerar os elementos de $A^4(\Sigma)$, a álgebra livre nilpotente associativa, onde $\Sigma = (X_0, X_1)$.

$$\begin{aligned} [F_1, F_0] &= \frac{\partial}{\partial y} + 3x^2 \frac{\partial}{\partial z} & [F_0, [F_1, F_0]] &= -2y \frac{\partial}{\partial z} \\ [F_1, [F_1, F_0]] &= 6x \frac{\partial}{\partial z} & [F_0, [F_0, [F_1, F_0]]] &= -2x \frac{\partial}{\partial z} \\ [F_0, [F_1, [F_1, F_0]]] &= 0 & [F_0, [F_0, [F_0, [F_1, F_0]]]] &= 0 \\ [F_1, [F_1, [F_1, F_0]]] &= 6 \frac{\partial}{\partial z} & [F_1, [F_0, [F_0, [F_1, F_0]]]] &= -2 \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{7}$$

Suponhamos que $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, logo $AL_1(F)(0) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle$ e as hipóteses da “Afirmção” são cumpridas. Eles decorrem de (7).

Para $N = 4$ e $D = \{1, -1\}$, segue-se da Proposição 2.2.5 que existe um D -controle 4-normal $\{D, T_0\}$, e assim um elemento distinguido $Y = \text{Ser}_4(\{D, T_0\})$. Pelo Lema 3.1.8, é possível encontrar um elemento distinguido $Y \in G^4(\Sigma)$ tal que $Y = e^{Z_0}, Z_0$ par.

Como $Y = \text{Ser}_4(\{D, T_0\})$ é como acima, com $T_0 \in \mathbb{R}_+^k$, isso significa que Y é atingido desde 1 num tempo $\|T_0\|$ e pelo lema 3.1.6, existe uma vizinhança $W \ni Y$ em $G^4(\Sigma)$ e uma função diferenciável $\psi : W \longrightarrow \mathbb{R}_+^k$ tal que

$$\text{Ser}_4(\{D, \psi(Y')\}) = Y' \tag{8}$$

para cada $Y' \in W$ e $\psi(Y) = T_0$.

Pelo fato de ser Z_0 par, obtém-se

$$Z_0 = \sum_{i \leq 4} \sum_{j \leq i}^p \sum z_{ijk} \beta_{ijk}$$

onde j percorre valores pares.

Afirmção 1.

$$Z_0 = \lambda_0 X_0 + \lambda_1 [X_1, [X_0, X_1]] + \lambda_3 [X_1, [X_0, [X_0, X_1]]]. \quad (9)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sum_k z_{00k} \beta_{00k} + \sum_k z_{10k} \beta_{10k} + \sum_k z_{20k} \beta_{20k} + \sum_k z_{22k} \beta_{22k} + \sum_k z_{30k} \beta_{30k} \\ &+ \sum_k z_{32k} \beta_{32k} + \sum_k z_{40k} \beta_{40k} + \sum_k z_{42k} \beta_{42k} + \sum_k z_{44k} \beta_{44k}. \end{aligned}$$

mas, temos que

$$\begin{array}{lll} \beta_{00k} = cte & \beta_{22k} = 0 & \beta_{40k} = 0 \\ \beta_{10k} = X_0 & \beta_{30k} = 0 & \beta_{42k} = [X_1, [X_0, [X_0, X_1]]] \\ \beta_{20k} = 0 & \beta_{32k} = [X_1, [X_0, X_1]] & \beta_{44k} = 0. \end{array} \quad \square$$

E por uma avaliação da aplicação Ev a Z_0 resulta

$$Ev(Z_0) = Z_0(F) = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 [F_1, [F_0, F_1]] + \lambda_2 [F_1, [F_0, [F_0, F_1]]],$$

que pelos colchetes em (7) e avaliados em 0, obtém-se

$$Ev(Z_0)(0) = Z_0(F)(0) = 0. \quad (10)$$

Agora queremos construir pontos atingíveis suficientemente próximos de $Y = e^{Z_0}$. Antes construiremos controles suficientemente próximos de $\{D, T_0\}$.

Afirmção 2. Seja $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \varepsilon > 0, \{D, T_0\}$ 4-normal. Então existe uma família de controles u_β , dependendo do parâmetro β tal que

$$\text{Ser}_4(u_\beta) = e^{Z(\beta)}, \text{ se } |\beta| \leq \varepsilon, \quad u_0 = \{D, T_0\}.$$

onde

$$Z(\beta) = Z_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 [X_1, X_0] + \beta_3 [X_1, [X_1, [X_1, X_0]]]$$

Com efeito. De (8) obtém-se $\text{Ser}_4(\{D, \psi(Y')\}) = Y'$ para cada $Y' \in W, \psi(Y) = T_0$. Se definimos $Y'(\beta) = e^{Z(\beta)}$, $Y'(0) = Y$ onde $Z(\beta)$ é como acima, então por continuidade em $\beta = 0$ para $W \ni Y$, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$Y'(\beta) \in W, \text{ sempre que } |\beta| \leq \alpha.$$

Para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno ($\varepsilon < \alpha$) $Y'(\beta) \in W$, se $|\beta| \leq \varepsilon$. Isto permite definir uma família de controles

$$u_\beta = \{D, \psi(Y'(\beta))\}, \text{ onde } Y'(\beta) \in W$$

assim

$$\begin{aligned} \text{Ser}_4(u_\beta) &= \text{Ser}_4(\{D, \psi(Y'(\beta))\}) = Y'(\beta) = e^{Z(\beta)} \\ \text{Ser}_4(u_\beta) &= e^{Z(\beta)} \end{aligned}$$

□

Afirmção 3. Para cada $\beta, |\beta| \leq \varepsilon$, tem-se $T(u_\beta) = cte$ (coeficiente de X_0 em $Z(\beta)$).

Com efeito, veja que

$$\text{Ser}_4(u_\beta) = e^{t_k(\beta)(X_0 + (-1)^{k-1} X_1)} \dots e^{t_2(\beta)(X_0 - X_1)} e^{t_1(\beta)(X_0 + X_1)}.$$

Por outro lado

$$\text{Ser}_4(u_\beta) = e^{Z(\beta)}.$$

Assim desenvolvendo as exponenciais e comparando-as, tem-se que

$$T(u_\beta) = \lambda_0 = cte.$$

□

Como os $T(u_\beta) = T$ para cada β , podemos reduzir o intervalo de definição dos controles. Para $0 < \delta \leq 1$ definamos

$$u_\beta^\delta = u_\beta\left(\frac{t}{\delta}\right), \quad 0 \leq t \leq \delta T. \quad (11)$$

Avaliando Ser_4 no controle definido em (11), obtemos

$$\text{Ser}_4(u_\beta^\delta) = e^{Z_\delta(\beta)}$$

onde

$$\begin{aligned} Z_\delta(\beta) &= Z_0^\delta + \delta\beta_1 X_1 + \delta^2\beta_2[X_1, X_0] + \delta^4\beta_3[X_1, [X_1, [X_1, X_0]]] \\ Z_0^\delta &= \delta\lambda_0 X_0 + \delta^3\lambda_1[X_1, [X_0, X_1]] + \delta^4\lambda_2[X_1, [X_0, [X_0, X_1]]] \end{aligned}$$

e a afirmação decorre da equivalência entre multiplicar os tempos t_i por δ e multiplicar os X_0, X_1 por δ ou de aplicar o automorfismo A_δ a $Z(\beta)$ como na demonstração do Teorema 3.1.9, isto é $A_\delta(Z(\beta)) = Z_\delta(\beta)$.

Se vê que Z_0^δ é combinação linear com coeficientes dependentes de δ . Por uma aplicação de Ev como em (10) e uma avaliação em 0 dá

$$\begin{aligned} Ev(Z_0^\delta)(0) &= \delta\lambda_0 F_0(0) + \delta^3\lambda_1[F_1, [F_0, F_1]](0) + \delta^4\lambda_2[F_1, [F_0, [F_0, F_1]]](0) \\ &= 0 \quad (\text{usar (7)}). \end{aligned}$$

Como no Teorema 3.1.9. Seja B a bola de raio ε , centrado na origem e contido em $\mathbb{R}^3$. Definimos o seguinte controle para uniformizar os coeficientes de $Z_\delta(\beta)$.

Para $y = (y_1, y_2, y_3) \in B$ e $0 < \delta < 1$ define-se o controle

$$v_{\delta,y} = u_{\beta(\delta,y)}^\delta, \quad \text{onde} \quad \beta(\delta,y) = (y_1\delta^3, y_2\delta^2, y_3\delta) \quad (12)$$

ao definir o controle em (11) é claro que $T(u_\beta^\delta) = \delta T$, em particular $T(v_{\delta,y}) = \delta T$ e por uma avaliação de $\text{Ser}_4 : U_m(\Omega) \longrightarrow G^4(\Sigma)$ obtém-se

$$\text{Ser}_4(u_{\delta,y}) = e^{Z_\delta(\beta(\delta,y))}$$

onde $Z_\delta(\beta(\delta,y)) = Z_0^\delta + \delta^4(y_1 X_1 + y_2[X_1, X_0] + y_3[X_1, [X_1, [X_1, X_0]]])$. Mais ainda obtém-se

$$e^{Z_\delta(\beta(\delta,y))} = \text{Ser}_4(v_{\delta,y}) = 1 + \delta^4(y_1 X_1 + y_2[X_1, X_0] + y_3[X_1, [X_1, [X_1, X_0]]]) + Y$$

onde Y é uma soma de uma função $0(\delta^5)$ e de uma soma de potências de Z_0^δ e produtos de $Z_0^\delta, \delta^4 \left(\sum_{i=1}^3 y_i v_i \right)$.

Usando a igualdade na demonstração da Proposição 2.3.6 e avaliando $\text{Ser}_4(v_{\delta,y})$ por Ev , isto é $Ev(\text{Ser}_4(v_{\delta,y})) = \text{Ser}_4(v_{\delta,y})(F)$ obtemos

$$\phi(\pi(F, v_{\delta,y}, \delta T, 0)) = \phi(0) + \delta^4((y_1 F_1 + y_2[F_1, F_0] + y_3[F_1, [F_1, [F_1, F_0]]])\phi)(0) + 0(\delta^5)$$

onde $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Em particular para $\phi = P_i$ a i -ésima projeção, e como na demonstração do Teorema 3.1.9 obtemos

$$\pi(F, v_{\delta,y}, \delta T, 0) = \delta^4 \left(\sum_{i=1}^3 y_i v_i \right) + 0(\delta^5) \quad *$$

com $v_1 = F_1(0) = \frac{\partial}{\partial x}, v_2 = [F_1, F_0](0) = \frac{\partial}{\partial y}, v_3 = [F_1, [F_1, [F_1, F_0]]](0) = 6 \frac{\partial}{\partial z}$ qual é uma base de $\mathbb{R}^3$. Observe que tudo é feito tomando como referência a demonstração do Teorema 3.1.9 e assim obtém-se que $(*)$ implica CLTP desde 0.

Agora provamos as proposições 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3.

Proposição 3.2.1. Sejam F_0, F_1 campos reais e analíticos.

Se o sistema (M, F, Ω) definido por (1) é CLTP desde x_0 , então verifica CCLH1 em x_0 .

Prova. Como o conceito de CLTP desde x_0 é uma propriedade local, é possível considerar M como um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $x_0 = 0$.

Mostramos que 0 é ponto regular de equilíbrio em duas partes.

- i) 0 é ponto de equilíbrio
- ii) 0 é ponto regular de equilíbrio

i) Suponha que 0 não é ponto de equilíbrio, então obtemos

$$F_0(0) \pm uF_1(0) \neq 0, \text{ se } |u| \leq A. \quad (13)$$

A idéia é encontrar uma $\phi \in C^\infty(M)$, com $\phi(0) = 0$, $\text{grad}\phi \neq 0$ tal que se propaga positivamente ao longo das trajetórias partindo de 0 até um tempo fixo T e daí contradizer CLTP desde 0.

Afirmção 1. Dado $\phi \in C^\infty(M)$ tal que $\phi(0) = 0$, $\text{grad}\phi \neq 0$, então cada vizinhança $U \ni 0$, contém pontos p tal que $\phi(p) < 0$.

Com efeito, caso contrário $\phi(p) \geq 0$ em alguma vizinhança $V \ni 0$, então 0 é ponto crítico e assim $(d\phi)_0 = 0$, o que contradiz $\text{grad}\phi \neq 0$. $\square$

Suponhamos que temos encontrado a ϕ com as propriedades desejadas. Pela hipótese **A**(0, t) contém uma vizinhança $U \ni 0$, para cada $t > 0$. Daí que contradizemos a Afirmção 1. Portanto

0 é ponto de equilíbrio.

Agora procuramos ϕ como acima. Por (13), $F_0(0) \pm AF_1(0) \neq 0$, então o segmento que liga $F_0(0) + AF_1(0)$ com $F_0(0) - AF_1(0)$ não contém 0, caso contrário 0 é ponto de equilíbrio.

Afirmção 2. Existe um funcional $\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lambda(F_0(0) + AF_1(0)) > 0$, $\lambda(F_0(0) - AF_1(0)) > 0$.

Com efeito, consideremos a reta $\mathcal{L}$ que liga $a = F_0(0) - AF_1(0)$ e $b = F_0(0) + AF_1(0)$. Acontece que a reta $\mathcal{L}$ passa ou não pela origem. Se ela passa pela origem 0, então $a = \alpha b$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha < 0$, então 0 seria ponto de equilíbrio, logo necessariamente deve-se ter $\alpha > 0$ e neste caso é possível definir $\lambda(x) = \langle x, b \rangle$. Se a reta $\mathcal{L}$ não passa por 0, projetamos 0 na reta $\mathcal{L}$ cortando num ponto ξ , e definimos o funcional λ por

$$\lambda(x) = \langle x, \xi \rangle$$

por cálculos elementares obtém-se

- i) $\langle \xi, a \rangle = \langle \xi, b \rangle$
ii) $\xi = a - \frac{\langle a, b-a \rangle}{\|b-a\|^2} (b-a)$
iii) $\lambda(a) = \lambda(b) = \|a\|^2 - \frac{\langle a, b-a \rangle^2}{\|b-a\|^2} = \|\xi\|^2 > 0$ □

Afirmção 3. Se $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função regular tal que $\phi(0) = 0$ e $(d\phi)_0 = \lambda$, então para alguma vizinhança $U \ni 0$, existe $\alpha > 0$ fixo tal que $(F_0\phi - AF_1\phi)(x) \geq \alpha$ e $(F_0\phi + AF_1\phi)(x) \geq \alpha$ para cada $x \in U$.

Com efeito, suponhamos que não seja assim, então (em particular) para cada bola $B(0, 1/n)$ existe $x_n \in B(0, 1/n)$ com $(F_0\phi - AF_1\phi)(x_n) < 1/n$ ou $(F_0\phi + AF_1\phi)(x_n) < 1/n$ e como $x_n \longrightarrow 0$, então em qualquer situação, por exemplo no primeiro caso se tem que $(F_0\phi - AF_1\phi)(0) \leq 0$. Portanto $\lambda(F_0(0) - AF_1(0)) \leq 0$, pois

$$\begin{aligned} \lambda(F_0(0) - AF_1(0)) &= (d\phi)_0(F_0(0) - AF_1(0)) = (F_0(0) - AF_1(0)) \cdot \phi \\ &= (F_0\phi - AF_1\phi)(0) \leq 0 \end{aligned}$$

o que contradiz a Afirmção 2. □

A hipótese acima faz sentido, basta considerar $\phi = \lambda$.

Finalmente como $t \longrightarrow \pi(F, u, 0, t)$ é contínua e $\pi(F, u, 0, 0) = 0 \in U$, existe um $T_u > 0$, tal que $\pi(F, u, 0, t) \in U$ para cada $t \in [0, T_u]$, tomando $T = \inf\{T_u : u \in U_m(\Omega)\}$ temos que

$$\pi(F, u, 0, t) \in U, \text{ para cada } 0 \leq t \leq T, u \in U_m(\Omega). \quad (14)$$

Assim, se para $u \in U_m(\Omega)$ $x(\cdot)$ representa a trajetória associada, então $\phi(x(t)) \geq 0$ para cada $0 \leq t \leq T$, pois $|u(t)| \leq A$ e uma aplicação do teorema fundamental do cálculo para $\dot{\alpha}(t) = \frac{d}{dt}\phi(x(t))$ dá

$$\phi(x(t)) = \phi(0) + \int_0^t ((F_0\phi)(x(s)) + u(s)(F_1\phi)(x(s))) ds \geq \int_0^t ((F_0\phi)(x(s)) - A(F_1\phi)(x(s))) ds$$

por (14) e a Afirmção 3 obtém-se $\phi(x(t)) \geq \alpha t \geq 0$.

ii) Até agora temos que $x_0 = 0$ é ponto de equilíbrio, mas falta que seja regular, isto quer dizer que as possibilidades $F_0(0) \pm AF_1(0) = 0$ devem ser excluídas.

Excluir as duas possibilidades acima é equivalente a provar que um sistema (obtido por transformações usuais)

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) + vG(x(t)), \quad 0 \leq v \leq 1 \quad (15)$$

não pode ser CLTP desde 0, se $F(0) = 0$, onde F, G são analíticas.

Afirmção 4. Se $F(0) = 0$, então (15) não é CLTP desde 0.

Com efeito, se for falso temos que o sistema (15) é CLTP desde 0 e $F(0) = 0$. A idéia é a mesma que em (i), encontrar $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ analítica tal que $\phi(0) = 0$, $\text{grad}\phi \neq 0$ e que se propague positivamente ao longo de toda trajetória até um tempo fixo $T > 0$, o qual contradiz que (15) não é CLTP desde 0.

Segue-se que $G(0) \neq 0$, caso contrário $A(0, t) = \{0\}$ para cada $t > 0$, absurdo! pois (15) é CLTP desde 0. Daí que, como $G(0) \neq 0$, existem $\beta_2, \dots, \beta_n$ tal que $\beta = \{G(0), \beta_2, \dots, \beta_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$. Se consideramos escalares $1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, então existe um funcional $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lambda(G(0)) = 1$ e $\lambda(\beta_i) = \alpha_i$, $i = 2, \dots, n$. Como pode-se olhar λ é uma primeira aproximação a nossa ϕ , logo dizemos que existe $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ analítica tal que $\phi(0) = 0$, $(d\phi)_0 = \lambda$, basta tomar $\phi = \lambda$. Como

$$(G\phi)(0) = G(0) \cdot \phi = (d\phi)_0(G(0)) = \lambda(G(0)) = 1$$

para $(\frac{1}{2}, \infty)$ pela continuidade de $G\phi$, existe uma bola $B(0, r) = U, \bar{U}$ compacto tal que $(G\phi)(x) \geq \frac{1}{2}$, para cada $x \in U$.

Por uma aplicação do Lema 2.3.3 aos campos analíticos F e G , à função analítica ϕ e ao compacto $\bar{U}$, existe uma constante $C > 0$ tal que a estimativa

$$|(H_{i_1} \dots H_{i_k} \phi)(x)| \leq C^r r! \quad (16)$$

se verifica para cada escolha $(i_1, \dots, i_r)$, cada $x \in U$ com $H_0 = F$ e $H_1 = G$.

Análoga a (14) pela dependência contínua em relação aos controles, existe um $T > 0$ fixo tal que toda trajetória que parte de 0 permanece em U até um tempo T . Agora mostramos que $\phi(x(t)) \geq 0$, $0 \leq t \leq T$.

Para isso, seja $v : [0, t] \rightarrow [0, 1]$ um controle, $0 \leq t \leq T$ e $x(\cdot) : [0, t] \rightarrow U$ a trajetória correspondente com $x(0) = 0$. Se $\alpha(t) = \phi(x(t))$, derivando, integrando e aplicando o T.F.C. como na prova da Proposição 2.3.2 e o fato que $\phi(0) = 0$ obtemos

$$\phi(x(t)) = \int_0^t (F\phi)(x(s))ds + \int_0^t v(s)(G\phi)(x(s))ds$$

trocando ϕ por $F\phi$ acima, obtém-se

$$(F\phi)(x(s)) = \int_0^s (F^2\phi)(x(\sigma))d\sigma + \int_0^s v(\sigma)(GF\phi)(x(\sigma))d\sigma$$

substituindo no segundo membro de $\phi(x(t))$ obtém-se

$$\phi(x(t)) = \int_0^t \int_0^s (F^2\phi)(x(\sigma))d\sigma ds + \int_0^t \int_0^s v(\sigma)(GF\phi)(x(\sigma))d\sigma ds + \int_0^t v(s)(G\phi)(x(s))ds.$$

trocando novamente ϕ por $F^2\phi$ na equação inicial e por indução obtém-se

$$\phi(x(t)) = \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{m-1}} (F^m\phi)(x(s_m))ds_m \dots ds_1 + \sum_{k=1}^m \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} v(s_k)(GF^{k-1}\phi)(x(s_k))ds_k \dots ds_1$$

como $x(s) \in U$ para cada $s \in [0, T]$, usando (16) obtemos

$$\left| \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{m-1}} (F^m\phi)(x(s_m))ds_m \dots ds_1 \right| \leq (Ct)^m, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (17)$$

Se nós escolhermos $T' > 0$ tal que $CT' < 1$ e $T' < T$, então para $t \leq T'$ (17) satisfaz

$$\int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{m-1}} (F^m\phi)(x(s_m))ds_m \dots ds_1 \longrightarrow 0, \quad \text{se } m \longrightarrow \infty$$

logo

$$\phi(x(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} v(s_k)(GF^{k-1}\phi)(x(s_k))ds_k \dots ds_1, \quad 0 \leq t \leq T'.$$

Fazendo $B_k(t) = \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} v(s_k)(GF^{k-1}\phi)(x(s_k))ds_k \dots ds_1$, $\phi(x(t))$ toma a forma

$$\phi(x(t)) = \int_0^t v(s_1)(G\phi)(x(s_1))ds_1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k(t).$$

Para olhar a convergência da série $\sum_{k=2}^{\infty} B_k(t)$, majoramos por uma série convergente e iniciamos isto com $B_k(t)$

$$|B_k(t)| \leq \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} |v(s_k)| |(GF^{k-1}\phi)| ds_k \dots ds_1$$

usando a relação (16) obtém-se

$$|B_k(t)| \leq C^k k! \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} v(s_k) ds_k \dots ds_1$$

usando a igualdade

$$\int_0^t v(s) \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} ds = \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} v(s_k) ds_k \dots ds_1$$

que é obtida por integração por partes no primeiro membro (tomar $w(s) = (t-s)^{k-1}$, $v(s)ds = dz$ e integrar até esgotar k), obtemos

$$\begin{aligned} |B_k(t)| &\leq C^k k! \int_0^t v(s) \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} ds, \quad s \leq t \\ &\leq k C^k \int_0^t v(s) t^{k-1} ds \\ &\leq C \underbrace{k(Ct)^{k-1}} \int_0^t v(s) ds. \end{aligned}$$

Denotemos $D(t) = \sum_{k=2}^{\infty} B_k(t)$ e pela majoração acima obtemos

$$\begin{aligned} |D(t)| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} |B_k(t)| \leq C \int_0^t v(s) ds \sum_{k=2}^{\infty} k(Ct)^{k-1} \\ |D(t)| &\leq C^2 t \left(\int_0^t v(s) ds \right) \sum_{k=2}^{\infty} k(Ct)^{k-2} \end{aligned}$$

mas interessa mais $\sum_{k=2}^{\infty} k(Ct)^{k-2}$, ela é uma série de potências centrado em $t = 0$ e é possível determinar o raio de convergência onde ela converge uniformemente para uma função contínua. O raio é $r = 1/c$, então a série converge uniformemente em $|t| < 1/c$. Se tomamos T' com $0 < T' < 1/c$, a série converge uniformemente para uma função contínua e por ser definida no compacto $[0, T']$ ela é limitada, logo

$$|D(t)| \leq Bt \int_0^t v(s) ds \quad *$$

para alguma constante fixada B e $0 \leq t \leq T'$. Usando um lado de (*) obtém-se

$$\phi(x(t)) = \int_0^t v(s)(G\phi)(x(s))ds + D(t) \geq \int_0^t v(s)(G\phi)(x(s))ds - Bt \int_0^t v(s)ds, 0 \leq t \leq T'.$$

Também pela continuidade de $G\phi$ que foi mostrado antes de (16) obtemos

$$\int_0^t v(s)(G\phi)(x(s))ds \geq \frac{1}{2} \int_0^t v(s)ds, 0 \leq t \leq T'.$$

Isto dá

$$\phi(x(t)) \geq \left(\frac{1}{2} - Bt\right) \int_0^t v(s)ds, 0 \leq t \leq T'.$$

Se nós pretendemos que $\phi(x(t)) \geq 0$, então deve acontecer que $\frac{1}{2} - Bt \geq 0$, isto é $2Bt \leq 1$, $0 \leq t \leq T'$ e como B é constante, é possível escolher $T'' < T'$ tal que

i) $0 \leq T'' \leq T'$

ii) $2BT'' \leq 1$.

Isto prova que o sistema (15) não é CLTP desde 0 em virtude construção de ϕ com $\phi(0) = 0$, $\text{grad}\phi \neq 0$. Mas isto contradiz a que (15) é CLTP. ■

Proposição 3.2.2. Sejam F_0, F_1 , campos vetoriais reais e analíticos.

Se o sistema (M, F, Ω) definido por (1) é CLTP desde x_0 , então verifica (CCLH2) em x_0 .

Prova. Como (1) é CLTP desde x_0 , $\mathbf{A}(x_0, t)$ contém um aberto U para cada $t > 0$, então $\text{int } A(x_0) \neq \emptyset$ e pelo corolário 1.2.8 tem-se $\dim AL(\Sigma)(x_0) = \dim M$. ■

Finalmente mostramos uma recíproca muito particular de CCLH em x_0 .

Proposição 3.2.3. Sejam F_0, F_1 campos vetoriais reais analíticos.

Se o sistema (M, F, Ω) definido em (1) satisfaz (2), então (1) não é CLTP desde x_0 .

Prova. Como se procura a não CLTP desde x_0 , convém pensar em todas as possibilidades satisfeitas pelo sistema. Assim temos

i) Suponha que algum deles, CCLH1 ou CCLH2 não se satisfaz.

Neste caso a não CLTP desde x_0 segue-se das proposições 3.2.1, 3.2.2.

ii) Suponha que CCLH1 e CCLH2 são verificados e também (2). Nosso sistema (M, Σ, Ω) é dado por

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + uF_1(x(t)) \quad |u| \leq A$$

mas isto induz um outro sistema $(M, \tilde{\Sigma}, \tilde{\Omega})$ dado por

$$\dot{x}(t) = \tilde{F}_0(x(t)) + vF_1(x(t)) \quad |v| \leq \beta$$

onde $\tilde{F} = F_0 + \bar{u}F_1$ e $\tilde{F}(x_0) = 0$ que decorre de assumir CCLH1 em x_0 .

Se mostramos que toda trajetória do sistema inicial é trajetória do sistema transformado, então temos que CLTP desde x_0 no primeiro implica CLTP desde x_0 no segundo.

Assim será suficiente mostrar que o transformado não é CLTP desde x_0 .

Afirmção 1. Dado um controle u , com $|u| \leq A$, então a trajetória correspondente é uma trajetória do sistema transformado para algum controle.

Com efeito, para $|u| \leq A$ consideramos $\alpha(\cdot)$ a trajetória correspondente, então

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= F_0(\alpha(t)) + uF_1(\alpha(t)) \\ &= \tilde{F}(\alpha(t)) + (u - \bar{u})F_1(\alpha(t)) \end{aligned}$$

ele é uma trajetória do sistema transformado se $A + |\bar{u}| \leq \beta$ □

Com isto estamos engrandecendo o conjunto de controles e simetrizando em torno de $\bar{u}$, mas transformações como na observação na formulação da conjectura de Hermes permite-nos considerar M como subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $\bar{u} = 0$, $x_0 = 0$, então mostramos que o sistema

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + uF_1(x(t)) \quad |u| \leq 1$$

com $F_0(0) = 0$, não é CLTP desde x_0 e por uma aplicação do comentário prévio da afirmação temos o desejado.

A idéia da prova é encontrar uma $\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}$, analítica, V aberto contendo 0, $\phi(0) = 0$ tal que cada vizinhança de 0 contém pontos p com $\phi(p) < 0$, além do mais que ϕ se propague positivamente ao longo das trajetórias partindo de 0 até um tempo fixo $T > 0$.

Como $[F_1, [F_0, F_1]](0) \notin AL_1(F_0, F_1)(0)$, em particular $[F_1, [F_0, F_1]](0) \notin \text{ger}\{(AdF_0)^j(F_1)(0) : j = 0, 1, \dots\}$. O ϕ que nós procuramos é dado agora.

Afirmção 2. Existe uma função analítica ϕ definida numa vizinhança $V \ni 0$ satisfazendo $\phi(0) = 0$, $(G\phi)(0) = 0$ para cada $G \in AL_1(F_0, F_1)$, $([F_1, [F_1, F_0]]\phi)(0) = 1$ e $F_1\phi \equiv 0$ sobre V .

Com efeito, pela condição CCLH2 tem-se $\dim AL(\Sigma)(0) = \dim M$ e como $AL_1(F_0, F_1) \subseteq AL(\Sigma)$, então $AL_1(F_0, F_1)(0) \subseteq AL(\Sigma)(0)$. Logo, tomando como partida $[F_1, [F_1, F_0]](0)$ e $F_1(0)$ que são *L.I* (caso contrário $[F_1, [F_1, F_0]](0) \in AL_1(F_0, F_1)(0)$) existem campos $G_2, \dots, G_k$ em $AL_1(F_0, F_1)$ tal que $\beta = \{F_1(0), G_2(0), \dots, G_k(0)\}$ é uma base de $AL_1(F_0, F_1)(0)$. Mas $[F_1, [F_1, F_0]](0) \notin AL_1(F_0, F_1)(0)$, logo $F_1(0), G_2(0), \dots, G_k(0), [F_1, [F_1, F_0]](0)$ são *L.I*. Denotando $G_{k+1} = [F_1, [F_1, F_0]]$ existe um complemento $G_{k+2}, \dots, G_n$ tal que $G_1(0) = F_1(0), G_2(0), \dots, G_k(0), \dots, G_n(0)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

Para cada G_i o fluxo será denotado por ϕ^{G_i} . Logo é possível encontrar um aberto $U = B(0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que a aplicação $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida por

$$\psi(t_1, \dots, t_n) = \phi^{G_1}(t_1, \phi^{G_2}(t_2, \dots, \phi^{G_n}(t_n, 0) \dots))$$

faz sentido. Por convenção tomaremos

$$\phi^{G_1}(t_1)\phi^{G_2}(t_2) \dots \phi^{G_n}(t_n)(0) = \phi^{G_1}(t_1, \phi^{G_2}(t_2, \dots, \phi^{G_n}(t_n, 0) \dots))$$

e por um cálculo direto para $i = 1, 2, \dots, n$ obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \psi(t_1, \dots, t_n) = (d\phi^{G_1}(t_1))_* \circ \dots \circ (d\phi^{G_{i-1}}(t_{i-1}))_*(G_i(\phi^{G_i}(t_i) \dots \phi^{G_1}(t_1)(0))).$$

Uma avaliação em 0 dá

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \psi(0) = G_i(0) \text{ i.e. } (d\psi)_0(e_i) = G_i(0) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Isso significa que posto $(d\psi)_0 = n$. Daí que existe um aberto (denotado com mesma letra U) $U \ni 0$ tal que $\psi : U \longrightarrow \psi(U) = V$ é um difeomorfismo.

A função ϕ que nós procuramos é $\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\phi(p) = t_{k+1}$. Isso faz sentido; pois se $p \in V$, então $p = \psi(t_1, \dots, t_n) = \phi^{G_1}(t_1) \dots \phi^{G_n}(t_n)(0)$ tem representação única. Mais ainda se consideramos $P_{k+1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ a $k+1$ -ésima projeção, para $p = \phi^{G_1}(t_1) \dots \phi^{G_n}(t_n)(0)$ temos $\psi^{-1}(p) = (t_1, \dots, t_n)$ e por uma aplicação de P_{k+1} consegue-se

$$P_{k+1}(\psi^{-1}(p)) = t_{k+1} = \phi(p). \quad (19)$$

Agora fazemos cumprir as condições desejadas.

i) $\phi(0) = 0$, pois $\phi(0) = P_{k+1}(\psi^{-1}(0)) = P_{k+1}(0) = 0$

ii) $(G\phi)(0) = 0$, para cada $G \in AL_1(F_0, F_1)$.

Como $G(0) \in AL_1(F_0, F_1)$ e $\beta = \{G_1(0), \dots, G_k(0)\}$ é uma base tem-se que $G(0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i G_i(0)$. Mas $(G\phi)(0) = G(0) \cdot \phi$, logo

$$G(0) \cdot \phi = (d\phi)_0(G(0)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (d\phi)_0(G_i(0))$$

portanto é suficiente mostrar que $(d\phi)_0(G_i(0)) = 0$ para cada i . Para isto é só derivar (19), obtendo-se

$$(d\phi)_0 = P_{k+1}(d\psi)_0^{-1}$$

como ψ é um difeomorfismo, desde (18) obtemos

$$(d\phi)_0(G_i(0)) = P_{k+1}(e_i) = 0, \text{ pois } i = 1, 2, \dots, k$$

iii) $([F_1, [F_1, F_0]]\phi)(0) = 1$. De fato,

$$\begin{aligned} ([F_1, [F_1, F_0]]\phi)(0) &= G_{k+1}(0)\phi = (d\phi)_0(G_{k+1}(0)) \\ &= P_{k+1}(e_{k+1}) = 1 \end{aligned}$$

iv) $F_1\phi \equiv 0$ sobre V . De fato,

$$(F_1\phi)(p) = G_1(p) \cdot \phi = (d\phi)_p(G_1(p)).$$

Se $p \in V$, então $p = \psi(t_1, \dots, t_n) = \phi^{G_1}(t_1) \dots \phi^{G_n}(t_n)(0)$, daí que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t_1, \dots, t_n) = G_1(\phi^{G_1}(t_1) \dots \phi^{G_n}(t_n)(0)) = G_1(p).$$

Logo

$$G_1(p) \cdot \phi = (d\phi)_p \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \psi(t_1, \dots, t_n) \right) = \frac{\partial}{\partial t_1} (\phi \circ \psi)(t_1, \dots, t_n)$$

mas $\phi = P_{k+1} \circ \psi^{-1}$, ou seja $P_{k+1} = \phi \circ \psi$ sobre V e finalmente obtemos

$$G_1(p) \cdot \phi = \frac{\partial}{\partial t_1} P_{k+1}(t_1, \dots, t_n) = 0$$

□

Como $\phi(p) = t_{k+1}$, é possível encontrar pontos p suficientemente próximos de zero tal que $\phi(p) < 0$.

Agora só falta verificar que ϕ se propaga positivamente ao longo das trajetórias até um tempo fixo $T > 0$. Com os dois fatos contradizemos a CLTP desde 0. Para procurar o $T > 0$, deve-se mostrar que $\text{Ser}(u^t)(F)(\phi)(0) \xrightarrow{\text{unif}} \phi(\pi(F, u, 0, t))$ e olhar isto é analisar os termos da série

$$\text{Ser}(u^t)(F)(0) = \sum_I \left(\int_0^t u_I \right) (F_I \phi)(0) \quad (20)$$

onde todos possíveis termos da série (20) são de 4 tipos:

- 1) termos que correspondem ao multi-índice $I = (i_1, \dots, i_r)$ com $i_1 = 0$ ou $i_r = 1$, sendo da forma $F_I = F_0 F_{i_2} \dots F_{i_r}$ ou $F_I = F_{i_1} F_{i_2} \dots F_1$.
- 2) termos que corresponde ao multi-índice $I = (1, 0, \dots, 0)$, com $|I| = r$ que é da forma $F_I = F_1 F_0^{r-1}$.
- 3) termo que corresponde a $I = (1, 1, 0)$ é da forma $F_I = F_1^2 F_0$.
- 4) termos para os quais se verifica
 - i) o multi-índice $I = (i_1, \dots, i_r)$ contém ao menos dois 1, quer dizer que existe $i_k, i_p, k \neq p$ tal que $i_k = i_p = 1$. Neste caso

$$F_I = F_{i_1} \dots F_{i_{k-1}} F_1 F_{i_{k+1}} \dots F_{i_{p-1}} F_1 F_{i_{p+1}} \dots F_r$$

ii) I começa com 1 e termina com 0. Ou seja se $I = (i_1, \dots, i_r)$, então $F_I = F_1 F_{i_2} \dots F_{i_{r-1}} F_0$.

iii) I , com $|I| \geq 4$.

Para cada um destes tipos, analisamos a contribuição que prestam na série definida em (20).

Tipo 1: são nulos pelo seguinte fato

$$F_I = F_0 F_{i_2} \dots F_{i_r} \text{ ou } F_I = F_{i_1} F_{i_2} \dots F_1$$

$F_I \phi = (F_{i_1} F_{i_2} \dots F_1 \phi) = 0$, mais ainda $(F_I \phi)(0) = 0$. Pois $F_1 \phi \equiv 0$. Para $F_I = F_0 F_{i_2} \dots F_{i_r}$, temos que $F_0(0) = 0$ e $F_0 = \sum_{\alpha} a_{\alpha} D^{\alpha}$, onde os D^{α} são operadores diferenciais canônicos. Logo, por uma avaliação em 0, temos $a_{\alpha}(0) = 0$ para cada α . Portanto

$$F_0(F_{i_2} \dots F_{i_r} \phi)(0) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(0)(D^{\alpha} F_{i_2} \dots F_{i_r} \phi)(0) = 0$$

Tipo 2: são nulos também. Consideremos a igualdade

$$F_1 F_0^k = [F_1, F_0] F_0^{k-1} + F_0 F_1 F_0^{k-1} \quad (*)$$

obtido facilmente a partir do segundo membro e vemos que $(F_0 F_1 F_0^{k-1} \phi)(0) = 0$, pois $F_0(0) = 0$ como no tipo 1.

Consideremos a igualdade

$$[F_1, F_0] F_0^{k-1} = [[F_1, F_0], F_0] F_0^{k-2} + F_0 [F_1, F_0] F_0^{k-2}$$

obtido por desenvolvimento do segundo membro, ou mais diretamente, substituindo em (*) F_1 por $[F_1, F_0]$ e k por $k-1$.

Olhando que $(F_0 [F_1, F_0] F_0^{k-1} \phi)(0) = 0$, pois $F_0(0) = 0$ e substituindo em (*) que temos até agora chega-se a

$$(F_1 F_0^k \phi)(0) = ([[F_1, F_0], F_0] F_0^{k-2} \phi)(0) = 0, \text{ pois } F_0(0) = 0.$$

Usando novamente (*) com $k-2$ e F_1 por $[[F_1, F_0], F_0]$ chega-se a

$$[[F_1, F_0], F_0] F_0^{k-2} = [[[F_1, F_0], F_0], F_0] F_0^{k-3} + F_0 [[F_1, F_0], F_0] F_0^{k-3}.$$

Analogamente consegue-se $(F_0[[F_1, F_0], F_0]F_0^{k-3}\phi)(0) = 0$; substituindo isto na igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}(F_1F_0^k\phi)(0) &= [[[F_1, F_0], F_0], F_0]F_0^{k-3}\phi(0) \\ &= (-1)^3((adF_0)^3F_1F_0^{k-3}\phi)(0)\end{aligned}$$

e por indução obtém-se

$$(F_1F_0^k\phi)(0) = (-1)^k(adF_0)^k(F_1)(\phi)(0).$$

Como ϕ foi definido para satisfazer $\phi(0) = 0$, $(G\phi)(0) = 0$ para cada $G \in AL_1(F_0, F_1)$, então $(-1)^k(adF_0)^k(F_1)(\phi)(0) = 0$, pois $((adF_0)^k(F_1)) \in AL_1(F_0, F_1)$. Assim $(F_1F_0^k\phi)(0) = 0$.

Tipo 3: a contribuição deste tipo é $\frac{1}{2} \int_0^t v(s)^2 ds$.

Neste caso temos

$$F_I = F_1^2 \cdot F_0 \quad \text{e} \quad \int_0^t u_I = \int_0^t \int_0^s \int_0^\sigma u(\tau)u(\sigma)d\tau d\sigma ds, \quad u_0(t) = 1.$$

Logo

$$\left(\int_0^t u_I \right) (F_1^2 F_0 \phi)(0) = \left(\int_0^t \int_0^s u(\sigma) \int_0^\sigma u(\tau) d\tau d\sigma ds \right) (F_1^2 F_0 \phi)(0)$$

por uma integração por partes para $\int_0^s \left(\int_0^\sigma u(\tau) d\tau \right) u(\sigma) d\sigma$ obtemos

$$\int_0^s \left(\int_0^\sigma u(\tau) d\tau \right) u(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2} \left(\int_0^s u(\tau) d\tau \right)^2$$

denotando $v(s) = \left(\int_0^s u(\tau) d\tau \right)$ e substituindo em $\int_0^t u_I$ obtemos

$$\left(\int_0^t \int_0^s \int_0^\sigma u(\tau)u(\sigma)d\tau d\sigma ds \right) (F_1^2 F_0 \phi)(0) = \frac{1}{2} \left(\int_0^t v(s)^2 ds \right) (F_1^2 F_0 \phi)(0).$$

Consideremos a identidade obtida pela definição de colchete

$$F_1^2 F_0 = F_1[F_1, F_0] + F_1 F_0 F_1 = [F_1, [F_1, F_0]] + 2[F_1, F_0]F_1 + F_0 F_1^2$$

e lembramos que $F_0(0) = 0$, $F_1\phi \equiv 0$. Logo aplicando ϕ na identidade acima e avaliando no 0, obtém-se

$$(F_1^2 F_0 \phi)(0) = ([F_1, [F_1, F_0]]\phi)(0) = 1 \quad (\text{pela construção de } \phi)$$

daí que

$$\left(\int_0^t u_I \right) (F_1^2 F_0 \phi)(0) = \frac{1}{2} \int_0^t v(s)^2 ds.$$

Pode-se dizer então que a contribuição do tipo 3 é só $\frac{1}{2} \int_0^t v(s)^2 ds$ e portanto a propagação de ϕ é da forma

$$\phi(\pi(F, u, O, t)) = \frac{1}{2} \int_0^t v(s)^2 ds + B$$

onde B é a soma de todos os termos do tipo 4.

Agora analisamos os termos de B , e para isso denotamos $I = (1, 0_k, 1, J)$ como sendo o termo genérico, onde 0_k é a sequência de k -zeros ($k \geq 0$), J um multi-índice tal que $|J| + k + 2 = |I|$ e $|J| \geq 1$.

Para $J = (j_1, \dots, j_r)$ temos que $I = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k+1}, 1, j_1, \dots, j_r)$, então

$$\begin{aligned} \int_0^t u_I &= \int_0^t \int_0^{s_r} \dots \int_0^{s_1} \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{k+1}} u_{j_r}(s_r) \dots u_{j_1}(s_1) u(\tau_1) 1 \dots 1 u(\tau_{k+2}) d\tau_{k+2} \dots d\tau_1 ds_1 \dots ds_r \\ &= \int_0^t \int_0^{s_r} \dots \int_0^{s_2} u_{j_r}(s_r) \dots u_{j_1}(s_1) \int_0^{s_1} u(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{k+1}} u(\tau_{k+2}) d\tau_{k+2} \dots d\tau_1 ds_1 \dots ds_r \end{aligned}$$

Denotando $W_k(t) = \int_0^t u(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{k+1}} u(\tau_{k+2}) d\tau_{k+2} \dots d\tau_1$, obtemos

$$\int_0^t u_I = \int_0^t \int_0^{s_r} \dots \int_0^{s_2} u_{j_r}(s_r) \dots u_{j_1}(s_1) W_k(s_1) ds_1 \dots ds_r \quad (21)$$

e por uma integração por partes para $\int_0^s (s - \sigma)^k u(\sigma) d\sigma$ obtemos

$$W_k(t) = \frac{1}{k!} \int_0^t u(s) \left(\int_0^s (s - \sigma)^k u(\sigma) d\sigma \right) ds. \quad (22)$$

(a integração é feita até esgotar o k , basta tomar $y = (s - \sigma)^k$ e $dz = u(\sigma) d\sigma$). Para $k = 0$ temos

$$W_0(t) = \int_0^t u(s) \left(\int_0^s u(\sigma) d\sigma \right) ds$$

por uma integração por partes, tomando $w(s) = \int_0^s u(\sigma) d\sigma$, $dw = u(s)ds$, obtemos

$$W_0(t) = \frac{v(t)^2}{2}.$$

Para $k > 0$, por outra integração por partes obtém-se

$$W_k(t) = \frac{v(t)}{k!} \int_0^t (t - \sigma)^k u(\sigma) d\sigma - \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t v(s) \int_0^s (s - \sigma)^{k-1} u(\sigma) d\sigma ds$$

basta tomar

$$y(s) = \int_0^s (s - \sigma)^k u(\sigma) d\sigma, \quad dy = u(s)ds.$$

Novamente, outra integração por partes fornece

$$\int_0^t (t - \sigma)^k u(\sigma) d\sigma = k \int_0^t v(\sigma) (t - \sigma)^{k-1} d\sigma. \quad *$$

Analogamente se $k > 1$, podemos substituir acima k por $k - 1$ e obter

$$\int_0^t (t - \sigma)^{k-1} u(\sigma) d\sigma = (k-1) \int_0^t v(\sigma) (t - \sigma)^{k-2} d\sigma. \quad **$$

Se na penúltima igualdade colocamos $k = 1$, obtém-se

$$\int_0^s (s - \sigma) u(\sigma) d\sigma = \int_0^s v(\sigma) d\sigma$$

substituindo isto em $W_1(t)$ e usando (*) com $k = 1$ obtém-se

$$\begin{aligned} W_1(t) &= v(t) \underbrace{\int_0^t (t - \sigma) u(\sigma) d\sigma}_* - \int_0^t v(s) \int_0^s u(\sigma) d\sigma ds \\ &= v(t) \int_0^t v(s) ds - \int_0^t v(s)^2 ds \end{aligned}$$

usando (*) e (**) em $W_k(t)$, também para $k > 1$ obtém-se

$$W_k(t) = \frac{v(t)}{(k-1)!} \int_0^t v(\sigma)(t-\sigma)^{k-1} d\sigma - \frac{1}{(k-2)!} \int_0^t v(s) \left(\int_0^s v(\sigma)(s-\sigma)^{k-2} d\sigma \right) ds.$$

Tomando a norma L_2 acima, obtém-se

$$|W_k(t)| \leq \frac{|v(t)|}{(k-1)!} \left| \int_0^t v(\sigma)(t-\sigma)^{k-1} d\sigma \right| + \frac{1}{(k-2)!} \left| \int_0^t v(s) \left(\int_0^s v(\sigma)(s-\sigma)^{k-2} ds \right) ds \right|.$$

Para o $t > 0$, podemos considerar o espaço $L_2([0, t])$ e pela desigualdade de Schwartz obtemos

$$\left| \int_0^t v(\sigma)(t-\sigma)^{k-1} d\sigma \right| \leq \frac{t^{k-\frac{1}{2}}}{(2k-1)^{1/2}} |v|_{2,t}$$

e

$$\left| \int_0^t v(s) \left(\int_0^s v(\sigma)(s-\sigma)^{k-2} d\sigma \right) ds \right| \leq \frac{t^{k-1} |v|_{2,t}^2}{(2k-3)^{1/2} (2k-2)^{1/2}}.$$

Um fato essencial na última desigualdade foi $|v|_{2,s} \leq |v|_{2,t}$ se $0 \leq s \leq t$. Agora substituindo as duas desigualdades obtidas tem-se

$$|W_k(t)| \leq |v(t)| \cdot |v|_{2,t} \frac{t^{k-\frac{1}{2}}}{(k-1)!(2k-1)^{1/2}} + \frac{|v|_{2,t}^2 t^{k-1}}{(k-2)!(2k-3)^{1/2} (2k-2)^{1/2}}$$

integrando esta desigualdade obtém-se

$$\int_0^t |W_k(s)| ds \leq \frac{|v|_{2,t}}{(k-1)!(2k-1)^{1/2}} \int_0^t |v(s)| s^{k-\frac{1}{2}} ds + \frac{|v|_{2,t}^2 t^k}{k(k-2)!(2k-3)^{1/2} (2k-2)^{1/2}}. \quad *$$

Mas $\int_0^t |v(s)| s^{k-\frac{1}{2}} ds \leq |v|_{2,t} \frac{t^k}{(2k)^{1/2}}$, logo substituindo em (*) obtém-se

$$\int_0^t |W_k(s)| ds \leq \frac{|v|_{2,t}^2 t^k}{(k-2)!} \left(\frac{1}{(k-1)(2k-1)^{1/2} (2k)^{1/2}} + \frac{1}{k(2k-3)^{1/2} (2k-2)^{1/2}} \right)$$

mais ainda para uma constante F temos

$$\int_0^t |W_k(s)| ds \leq \frac{|v|_{2,t}^2 t^k F}{(k-2)!}. \quad (23)$$

Assim desde (21), (22) e (23) para $k > 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t u_I \right| &\leq \frac{|v|_{2,t}^2 t^k}{(k-2)!} F \int_0^t \int_0^{s_r} \dots \int_0^{s_3} ds_2 \dots ds_r \\ \left| \int_0^t u_I \right| &\leq \frac{t^{k+r-1} F |v|_{2,t}^2}{(r-1)!(k-2)!} \end{aligned}$$

temos duas possibilidades a tratar $k = 1$ e $k = 0$. Se $k = 1$ e convencionando $(-1)! = 1$ obtemos

$$\left| \int_0^t u_I \right| \leq \frac{F \cdot t^r}{(r-1)!} |v|_{2,t}^2.$$

Se $k = 0$ e convencionando $(-2)! = 1$, obtemos

$$\left| \int_0^t u_I \right| \leq \frac{F \cdot t^{r-1}}{(r-1)!} |v|_{2,t}^2. \quad (24)$$

Como F_0, F_1 são analíticas a ϕ também o é, e pela Afirmação 2 é possível encontrar uma bola fechada que contém 0. Logo aplicando o Lema 2.3.3 obtemos que

$$|(F_I \phi)(0)| \leq C^{k+r+2} (k+r+2)!$$

para alguma constante fixa $C > 0$. Com esta limitação e (24) obtemos

$$\left| \left(\int_0^t u_I \right) (F_I \phi)(0) \right| \leq F C^{k+r+2} t^{k+r-1} \frac{(r+k+2)!}{(r-1)!(k-2)!} |v|_{2,t}^2.$$

Lembrando o caso em que $k = 0, 1$ onde supomos que $(k-2)! = 1$ e $(k-1)! = 1$, obtemos

$$\left| \left(\int_0^t u_I \right) (F_I \phi)(0) \right| \leq F C^{k+r+2} t^{k+r-1} \frac{(k+r)!(k+r+2)^5}{k!r!} |v|_{2,t}^2 \quad (25)$$

ele provém de majorar $k+r$.

Como o termo genérico do tipo 4 é $I = (1, 0_k, 1, J)$ onde $J = (j_1, \dots, j_r), 0_k$ com k -zeros; as possibilidades de arranjos de I são as de J . Tomando a soma em (25) obtemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|J|=r} \left(\int_0^t u_I \right) (F_I \phi)(0) \right| &\leq F C^{k+r+2} t^{k+r-1} \frac{(k+r)!(k+r+2)^5}{k!r!} 2^{r-1} |v|_{2,t}^2 \\ \left| \sum_{r \geq 1} \sum_{|J|=r} \left(\int_0^t u_I \right) (F_I \phi)(0) \right| &\leq \sum_{r \geq 1} F C^{k+r+2} t^{k+r-1} \frac{(k+r)!(k+r+2)^5}{k!r!} 2^{r-1} |v|_{2,t}^2 \end{aligned}$$

como só requerimos termos do tipo 4, então deve-se ter $r \geq 1, k \geq 0, k + r \geq 2$. É por aqui onde tomamos a soma

$$\left| \sum_{\substack{k \geq 0 \\ r \geq 1 \\ k+r \geq 2}} \left(\int_0^t u_I \right) (F_I \phi)(0) \right| \leq \sum_{\substack{k \geq 0 \\ r \geq 1 \\ k+r \geq 2}} FC^{k+r+2} t^{k+r-1} \frac{(k+r)!(k+r+2)^5}{k!r!} 2^{r-1} |v|_{2,t}^2.$$

Até agora podemos dizer que a contribuição dos termos do tipo 4 é limitado por

$$\beta = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ r \geq 1 \\ k+r \geq 2}} FC^{k+r+2} (k+r+2)^5 \frac{(k+r)!}{k!r!} 2^{r-1} t^{k+r-1} |v|_{2,t}^2$$

fazendo uma mudança de variável $k + r = \rho$ e por uma desigualdade necessária para a mudança e por ter mais termos consegue-se

$$\begin{aligned} \beta &\leq \sum_{\rho=2}^{\infty} \sum_{k+r=\rho} FC^3 (\rho+2)^5 (2Ct)^{\rho-1} \frac{\rho!}{k!r!} |v|_{2,t}^2 \\ &\leq 2FC^3 |v|_{2,t}^2 \sum_{\rho=2}^{\infty} (\rho+2)^5 (4Ct)^{\rho-1} \left(\frac{1}{2^\rho} \right) \sum_{k+r=\rho} \left(\frac{\rho!}{k!r!} \right). \end{aligned}$$

Mas $k \geq 0$ e $r \geq 1$, então $\sum_{k+r=\rho} \frac{\rho!}{k!r!} = 2^\rho - 1$, logo acima temos

$$\beta \leq 2FC^3 |v|_{2,t}^2 \sum_{\rho=2}^{\infty} (\rho+2)^5 (4Ct)^{\rho-1} = 8FC^4 |v|_{2,t}^2 t \sum_{\rho=2}^{\infty} (\rho+2)^5 (4Ct)^{\rho-2}$$

fazendo uma mudança de variável $\rho - 2 = k$ na série obtemos

$$\beta \leq 8FC^4 |v|_{2,t}^2 t \sum_{k=0}^{\infty} (k+4)^5 (4Ct)^k.$$

Consideramos a série $\sum_{k=0}^{\infty} (k+4)^5 (4C)^k t^k$, onde o raio de convergência é $1/4C$. Em particular a série converge uniformemente para uma função contínua definida no compacto $[0, T], T < 1/4C$; logo ela é limitada por uma constante $\tilde{H}$, assim para alguma constante H temos

$$\beta \leq HT |v|_{2,t}^2$$

por conveniência fazemos a escolha de $T < 1/4C$ com $HT < \frac{1}{2}$ e neste caso $\beta \leq \frac{1}{2}|v|_{2,t}^2$.

Como as contribuições de tipo 1,2 são nulos, só fica olhar a contribuição de tipo 3 que é $\frac{1}{2}|v|_{2,t}^2$ e a contribuição do tipo 4 que é limitado por $\frac{1}{2}|v|_{2,t}^2$. Podemos então dizer que a propagação de ϕ é dado por

$$\phi(\pi(F, u, 0, t)) = \frac{1}{2}|v|_{2,t}^2 + G, \quad \text{onde } |G| \leq \frac{1}{2}|v|_{2,t}^2$$

como $G \geq -\frac{1}{2}|v|_{2,t}^2$, então $\phi(\pi(F, u, 0, t)) \geq 0, 0 \leq t \leq T$. Mas $\phi(0) = 0, \phi(p) < 0$ para p suficientemente próximo de zero, então o sistema não é CLTP desde 0. ■

Agora apresentamos um exemplo que é uma aplicação do teorema 3.1.9

Exemplo 3.2.7. Considere o sistema (M, Σ, Ω) definido em (1), (neste parágrafo)

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + u(t)F_1(x(t)) \quad |u(t)| \leq A \quad *$$

Queremos olhar CLTP desde x_0 . Para isto usamos a linearização de (*) que é dado por

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + vb \quad **$$

onde $\xi = x - x_0$, $v = u - \bar{u}$, $b = F_1(x_0)$, $A = J((d\varphi)_{x_0})$, $\varphi(x) = F_0(x) + \bar{u}F_1(x)$.

Por um cálculo direto, $AL_1(F_0 + \bar{u}F_1, F_1)(x_0) = \langle A^k b : k = 0, 1, \dots \rangle$ desde que $F_0(x_0) + \bar{u}F_1(x_0) = 0$. Pois $[F_0 + \bar{u}F_1, F_1](x_0) = -A.b$, $[F_0 + \bar{u}F_1, [F_0 + \bar{u}F_1, F_1]](x_0) = A^2b, \dots, (-1)^k(ad(F_0 + \bar{u}F_1)^k)(F_1)(x_0) = (-1)^k A^k b$.

Por outro lado em (**) temos que os campos são $G_0(x) = A.x$, $G_1(x) = b$. Interessa $AL(G_0, G_1)(x_0)$, por isso calculamos

$$[G_0, G_1](x_0) = -Ab, [G_0, [G_0, G_1]](x_0) = A^2b, \dots, (adG_0)(G_1)(x_0) = (-1)^k A^k b, \dots$$

Assim $AL(G_0, G_1)(x_0) = \langle A^k b : k = 0, 1, \dots \rangle$ e daí pode-se concluir que

$$AL_1(F_0 + \bar{u}F_1, F_1)(x_0) = AL(G_0, G_1)(x_0).$$

Se assumimos que (**) é controlável em x_0 , então tem-se a propriedade de acessibilidade em x_0 , logo segue-se que

$$AL(G_0, G_1)(x_0) = \mathbb{R}^n, \quad \text{daí} \quad AL_1(F_0 + \bar{u}F_1, F_1)(x_0) = \mathbb{R}^n.$$

Além do mais como $AL_1(F_0 + \bar{u}F_1, F_1) \subseteq \dots \subseteq AL_k(F_0 + \bar{u}F_1, F_1) \subseteq \dots$ temos que

$$AL_{k-1}(F_0 + \bar{u}F_1, F_1)(x_0) = AL_k(F_0 + \bar{u}F_1, F_1)(x_0)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, em particular para k -ímpar. Por conseguinte temos que $(*)$ satisfaz, CCLH1, CCLH2, CCLH3, então pelo Teorema 3.1.9 é CLTP desde x_0 .

Isto pode ser reformulado assim

Proposição 3.2.8 Se x_0 é ponto de equilíbrio de $(*)$ e a linearização é controlável em x_0 , então $(*)$ é CLTP a partir de x_0 .

Bibliografia

- [1] H. Brezis: *Analyse Fonctionnelle*, theorie et applications. 2, Masson, 1987.
- [2] K.T. Chen: Integration of paths, geometric invariants and a Baker-Hausdorff formula, Ann. Math. 65 (1957) 163-178.
- [3] N. Jacobson: *Lie algebras*, Interscience Publishers, New York, London, 1962.
- [4] S. Kobayashi: *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer-Verlag 1972.
- [5] C. Lobry: Controlability of nonlinear systems on compact manifolds, SIAM. J. control, vol. 12, N^o 1 (1974) 1-4.
- [6] R. Mañé: *Introdução à teoria ergódica*, Projeto Euclides, 1983.
- [7] L. San Martin and P.E. Crouch: controlability on principal fibre bundle with compact structure group, Systems & Control Letters 5 (1984) 35-40.
- [8] L. San Martin: Controllability of families of measure preserving vector fields, Systems & Control letters 8 (1987) 459-462.
- [9] L. San Martin: *Notas sobre um curso de "Tópicos de Geometria II"*.
- [10] P. Stefan: Attainable sets are manifolds, School of Mathematics and Computers and Computer Science, UCNW, Bangor. (1974).
- [11] P. Stefan: Accessible sets, orbits and foliations with singularities. Proc. London Math. Soc. (3) 29 (1974) 699-713.
- [12] H.J. Sussman: "The bang-bang" problem for certain control systems in $Gl(n, \mathbb{R}^n)$ SIAM. J. control, vol. 10, N^o 31 (1972) 470-476.
- [13] H.J. Sussman and V. Jurdjevic: controllability of non linear systems, J. Differential Equations, 12 (1972) 95-116.
- [14] H.J. Sussman and V. Jurdjevic: control systems on Lie groups, J. Differential Equations, 12 (1972) 313-329.
- [15] H.J. Sussman: Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. Trans. Amer. Math. Soc. 180 (1973) 171-188.

- [16] H.J. Sussman: Lie brackets and local controllability: a sufficient condition for scalar-input systems SIAM J. control and Optimization 21 (1983) 686-713.
- [17] H.J. Sussman: Controllability Local. SIAM. J. control and Optimization, vol. 25, N^o 1 (1987) 158-194.
- [18] F. Warner: *Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and company, Glenview, Illinois London 1971.
- [19] O. Zariski - P. Samuel: *Commutative Algebra vol II* Springer-Verlag 1960.