Sobre o Produto Tensorial não Abeliano de Grupos

Irene Naomi Nakaoka

Prof.Dr. Noraí Romeu Rocco
Orientador

IMECC-UNICAMP

Campinas, agosto de 1994

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. **Irene Naomi Nakaoka** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 31 de agosto de 1994

Prof. Dr. Noraí Romeu Rocco

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

À minha mãe, Luiza.

ÍNDICE

Introdução

O produto tensorial não abeliano de grupos G e H, da maneira como foi introduzido por R. Brown e J.L. Loday [4, 5], generaliza o produto tensorial usual $\dfrac{G}{G'} \otimes_{\mathbb{Z}} \dfrac{H}{H'}$ dos grupos abelianizados, uma vez que leva em conta ações de G sobre H e de H sobre G. Especificamente, sejam G e H grupos munidos de uma ação $(g, h) \mapsto g^h$ de H sobre G e uma ação $(h, g) \mapsto h^g$ de G sobre H, de tal forma que para todo $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$,

$$g^{(h^{g_1})} = g^{g_1^{-1}hg_1} \quad \text{e} \quad h^{(g^{h_1})} = h^{h_1^{-1}gh_1}, \tag{1}$$

onde G e H atuam sobre si mesmo por conjugação. O *produto tensorial não abeliano* $G \otimes H$ dos grupos G e H é o grupo gerado por todos os símbolos $g \otimes h, g \in G, h \in H$, sujeito às relações

$$\begin{aligned} gg_1 \otimes h &= (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \\ g \otimes hh_1 &= (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}) \end{aligned}$$

para todo $g, g_1 \in G,\ h, h_1 \in H$.

Em particular, como a ação por conjugação de um grupo G sobre si mesmo satisfaz (1), o *quadrado tensorial* $G \otimes G$ de um grupo G é sempre definido.

A introdução deste conceito deve-se originalmente a razões topológicas, já que o quadrado tensorial de um grupo G, acima definido, aparece no estudo da homotopia de um espaço, [4]. Além disso, outros invariantes importantes do grupo argumento G, tais como o multiplicador de Schur e o quadrado exterior não abeliano, também aparecem como seções de $G \otimes G$.

O objetivo deste trabalho é estudar este produto tensorial, destacando a maioria dos principais resultados conhecidos sobre o assunto bem como computando o quadrado tensorial para certas classes de grupos.

Os resultados gerais sobre o produto tensorial não abeliano de grupos G e H está incluído no Capítulo II. Aí também provamos o teorema de G.J. Ellis [8] sobre a finitude de $G \otimes H$ com G e H finitos, e calculamos o quadrado tensorial do grupo metacíclico finito geral quando este é produto semidireto de dois grupos cíclicos. Esse cálculo engloba resultados de R. Brown, D.L. Johson, E.F. Robertson [3] e D.L. Johnson [11].

Uma das questões levantadas em [3] faz referência ao controle do número mínimo de geradores de $G \otimes G$ em função do correspondente número $d(G)$. Para um grupo livre G de posto 2 tem-se ([3]) que $d(G \otimes G)$ é infinito enumerável.

No capítulo 3 estudamos esta questão para grupos nilpotentes de classe 2, exibindo o resultado de M. Bacon [1] que dá uma estimativa para $d(G \otimes G)$ em função de $d(G)$. Esta cota é, em certo sentido a melhor possível, pois é atingida para o quadrado tensorial não abeliano do grupo nilpotente livre de classe 2 a n geradores $\mathcal{H}_n = \dfrac{F_n}{\gamma_3(F_n)}$.

Concluímos nosso trabalho calculando o quadrado tensorial não abeliano de certas classes de p-grupos 2-gerados de classe 2, conforme M. Bacon e L.C. Kappe [2].

Deixo o meu agradecimento a todos aqueles que contribuiram direta ou indiretamente na elaboração deste trabalho, em especial, ao Prof. Noraí R. Rocco pelo incentivo e orientação.

CAPÍTULO I

O objetivo deste capítulo é introduzir os conceitos e propriedades da Teoria de Grupos necessários neste trabalho. Muitos dos resultados aqui apresentados terão suas demonstrações omitidas e como referências citamos [9], [16] e [18] para as seções 1 e 2, [10] para a seção 3, [17] para as seções 4, 5 e 6 e [20] para a seção 7.

1. Subgrupos Comutadores e Subgrupo de Frattini

Sejam $x_1, x_2, \ldots$ elementos de um grupo. O *conjugado* de x_1 por x_2 é

$$x_1^{x_2} := x_2^{-1} x_1 x_2.$$

e o comutador de x_1 e x_2 (nesta ordem) é

$$[x_1, x_2] := x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 \ (= x_1^{-1} x_1^{x_2}).$$

Para $n \geq 2$ o *comutador simples de peso* n é definido indutivamente pelas regras

$$[x_1, \ldots, x_n] := [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n] \quad \text{e} \quad [x_1] := x_1.$$

A seguir daremos algumas identidades de comutadores cujas verificações são imediatas.

Proposição 1.1. Sejam x, y, z elementos de um grupo. Então

(i) $[x, y] = [y, x]^{-1} = [x, y^{-1}]^{-y} = [x^{-1}, y]^{-x}$

(ii) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$; $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$

(iii) $[x, y]^z = [x, y][x, y, z] = [x^z, y^z]$

(iv) $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$ (identidade de Hall-Witt).

Proposição 1.2. Sejam x, y elementos de um grupo G e suponhamos que $[x, y]$ comuta com x e y. Então para todo $n \in \mathbb{Z}$,

(i) $[x, y^n] = [x^n, y] = [x, y]^n$

(ii) $(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}}$.

Sejam X, Y subconjuntos não vazios de um grupo G. O *subgrupo comutador* de X e Y é

$$[X, Y] := < \{[x, y] \ ; \ x \in X, y \in Y\} >$$

i.e., o subgrupo de G gerado por todos os comutadores $[x, y]$, com x em X e y em Y. Como $[x, y] = [y, x]^{-1}$ temos $[X, Y] = [Y, X]$.

Proposição 1.3. Se M e N são subgrupos normais de um grupo G então $[M, N]$ também é normal.

Demonstração. Segue da definição de $[M, N]$ e da Proposição 1.1 (iii).

O subgrupo comutador $[G, G]$ de um grupo G é chamado o *grupo derivado* de G e é denotado por G'. Tal grupo tem a seguinte propriedade:

Proposição 1.4. O grupo quociente G/G' é abeliano. Além disso, se N é um subgrupo normal de G tal que G/N é abeliano então $N \supseteq G'$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [9].

Sejam G um grupo e X o conjunto de todos os subgrupos maximais de G. Definimos um subgrupo $\phi(G)$, chamado o *subgrupo de Frattini de* G, da seguinte forma:

$$\phi(G) = \begin{cases} \bigcap\limits_{M \in X} & \text{se} \quad X \neq \emptyset \\ G & \text{se} \quad X = \emptyset \end{cases}$$

Definição 1.5. Um elemento x de um grupo G é dito um *gerador supérfluo* de G se sempre que um subconjunto T de G satisfaz $G = < T, x >$ então $G = < T >$.

Teorema 1.6. Se G é um grupo não trivial e S é o conjunto de todos os geradores supérfluos de G então $S = \phi(G)$.

Proposição 1.7. Se G é um p-grupo finito então $\phi(G) = G'G^p$ onde $G^p =< x^p; x \in G >$. Além disso, $G/\phi(G)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, cuja dimensão, $d(G)$, é o número mínimo de geradores de G.

Teorema 1.8. (Teorema de Base de Burnside). Se G é um p-grupo finito, quaisquer dois conjuntos mínimos de geradores de G tem o mesmo número de elementos. Além disso, se $x \notin \phi(G)$ então $\{x\}$ pode ser estendido a um conjunto mínimo de geradores de G.

2. Grupos Nilpotentes

Definição 2.1. Um grupo G é dito *nilpotente* se tem uma série

$$1 = G_0 < G_1 < \ldots < G_n = G \tag{2.1}$$

tal que

(i) $G_i \trianglelefteq G$, $i = 0, 1, \ldots, n$

(ii) $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Tal série (2.1) é chamada *série central* de G. A *classe de nilpotência* de um grupo nilpotente $G, cl(G)$, é o comprimento da menor série central de G.

Definimos uma série de subgrupos de um grupo G pelas regras

$$\gamma_1(G) = G \quad , \quad \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$$

A série

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \ldots \geq \gamma_i(G) \geq \ldots \tag{2.2}$$

é claramente central e é dita a *série central inferior* do grupo G. Também podemos definir a série central superior

$$1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \ldots \leq Z_i(G) \leq \ldots \tag{2.3}$$

da seguinte forma:

$$Z_0(G) = 1 \quad , \quad Z_1(G) = Z(G)$$

e, para $i \geq 1$, $Z_{i+1}(G)$ é aquele subgrupo de G para o qual $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$. Os adjetivos *inferior* e *superior* das séries acima são justificados pela:

Proposição 2.2. Seja $G = A_i \geq A_2 \geq \ldots \geq A_{n+1} = 1$ uma série central de G. Então

(i) $\gamma_i(G) \leq A_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n+1$

(ii) $A_{n+1-i} \leq Z_i(G) \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n$.

A demonstração é por indução sobre i. Como conseqüência temos o:

Corolário 2.3. Em um grupo nilpotente G as séries centrais inferior e superior têm comprimento finito. Além disso, ambas as séries têm o mesmo comprimento e este número é a classe de nilpotência de G.

Observemos que pela Proposição 2.2, G é um grupo nilpotente de classe 2 se e somente se $G' \leq Z(G)$. A seguir citaremos alguns resultados sobre grupos nilpotentes, cujas demonstrações são encontradas em [18, Capítulo 6].

Proposição 2.4. Seja G um grupo nilpotente de classe c. Então todos os subgrupos e grupos quocientes de G são nilpotentes e suas classes de nilpotência são no máximo c.

Proposição 2.5. Um produto direto de um número finito de grupos nilpotentes é nilpotente.

Proposição 2.6. Todo p-grupo finito é nilpotente.

Proposição 2.7. Seja G um grupo nilpotente e H um subgrupo próprio. Então $H \neq N_G(H)$.

Proposição 2.8. Um grupo finito G é nilpotente se e somente se é o produto direto de seus subgrupos de Sylow.

3. Grupos Livres

Nesta seção introduzimos os conceitos de grupo livre e apresentação de um grupo bem como algumas de suas propriedades, cujas demonstrações podem ser encontradas em [10].

Definição 3.1. Um grupo F é dito *livre* sobre um subconjunto $X \subseteq F$ se, para qualquer grupo G e qualquer função $\theta : X \to G$, existe um único homomorfismo $\theta' : F \to G$ tal que

$$x\theta' = x\theta \tag{3.1}$$

para todo $x \in X$. O cardinal $|X|$ é chamado o *posto* de F.

Há outras formas de expressar a propriedade (3.1). Por exemplo, podemos dizer que θ' estende θ ou, denotando por $i : X \to F$ a inclusão de X em F, que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\theta"'] & F \arrow[dl, "\theta'"] \\ G & \end{tikzcd}$$

é comutativo, i.e., $i\theta' = \theta$. Observemos que a composição de funções é feita da esquerda para a direita.

Substituindo a palavra "grupo" por "grupo abeliano" nos dois lugares em que ela aparece obtemos o conceito de grupo *abeliano livre*.

Proposição 3.2. (i) Se F é livre sobre X então X gera F;
(ii) Grupos livres de mesmo posto são isomorfos;
(iii) Grupos livres de postos diferentes não são isomorfos.

Este resultado garante que o posto de um grupo está bem definido.

Teorema 3.3. Existe um grupo livre de qualquer posto.

Denotaremos por e o elemento neutro de um grupo e por $F(X)$ o grupo livre sobre X. Do ponto de vista combinatório, o grupo livre $F(X)$ pode ser caracterizado por

Teorema 3.4. Um grupo F é livre sobre X se e somente se

(i) X gera F e

(ii) não existe relação não trivial entre os elementos de X, i.e., se $n \in \mathbb{N}$, $x = x_1 \dots x_n$ onde para todo i, $x_i \in X$ ou $x_i^{-1} \in X$, e $x_i x_{i+1} \neq e$ para todo i com $1 \leq i \leq n-1$, então $x \neq e$.

Teorema 3.5. **(Nielsen-Schreier)** Todo subgrupo de um grupo livre é livre. Além disso, se F é um grupo livre de posto r finito e H um subgrupo de F tal que $[F : H] = g$ é finito então o posto de H é igual a $(r-1)g + 1$.

Proposição 3.6. Todo grupo é uma imagem homomórfica de algum grupo livre.

Seja G um grupo e $\phi : F(X) \rightarrow G$ um epimorfismo de um grupo livre $F = F(X)$ sobre G. Temos então $G \cong F/N$ onde N é o núcleo de ϕ. Agora seja $R \subseteq F$ um conjunto que gera N como subgrupo normal de F, i.e., $< R >^F = N$. Observemos que X e R determinam G (a menos de isomorfismo). Assim escrevemos $G =< X \mid R >$ e chamamos este par uma *apresentação livre*, ou simplesmente apresentação, do grupo G. Os elementos de X são denominados *geradores* e os de R *relatores*. Dizemos que G é *finitamente apresentado* se existe uma apresentação $G =< X|R >$ onde X e R são finitos. Quando $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ é comum escrevermos $G =< x_1, \dots, x_n \mid r_1 = e, \dots, r_m = e >$. Neste caso chamamos $r_i = e$, $1 \leq i \leq m$, de *relações definidoras* para G.

Exemplo. O grupo diedral de grau n, D_n, tem apresentação

$$D_n \cong < x, y \mid x^2 = e,\ y^n = e,\ y^x = y^{-1} > .$$

Proposição 3.7. Se G, H, K são grupos e $\alpha : G \rightarrow H$, $\beta : G \rightarrow K$ são homomorfismos com α sobrejetora e tais que $Nuc(\alpha) \subseteq Nuc(\beta)$ então existe um homomorfismo $\gamma : H \rightarrow K$ tal que $\alpha\gamma = \beta$

$$
\begin{tikzcd}
Nuc\ \beta \arrow[dr, tail] & & H \arrow[dd, "\gamma"] \\
& G \arrow[ur, two heads, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\
Nuc\ \alpha \arrow[uu, tail] \arrow[ur, tail] & & K
\end{tikzcd}
$$

Teorema 3.8. **(Teste de Substituição)** Sejam G um grupo com apresentação $< X|R >, H$ um grupo e $\theta : X \rightarrow H$ uma função. Então θ se estende a um homomorfismo $\theta' : G \rightarrow H$ se, e somente se, θ é consistente com todas as relações definidoras para G, i.e., se para todo $x \in X$ e todo $r \in R$, o resultado da substituição de x por $x\theta$ em r dá a identidade de H.

Proposição 3.9. Se G e H são grupos com apresentações $< X \mid R >$ e $< Y \mid S >$ respectivamente, então o produto direto $G \times H$ tem a apresentação

$$< X, Y \mid R, S, [X, Y] >$$

Definição 3.10. Sejam $G =< X \mid R >$ e $H =< Y \mid S >$ duas apresentações. O grupo $< X, Y \mid R, S >$ é chamado o *produto livre* de G e H e é denotado por $G * H$.

Proposição 3.11. Seja $G * H$ o produto livre de dois grupos não triviais. Então o subgrupo comutador $[G, H]$ de $G * H$ é normal. Além disso, $[G, H]$ é um grupo livre sobre o conjunto

$$\{[g, h] \mid g \in G,\ h \in H,\ g, h \neq e\}$$

4. Seqüências Exatas

Uma seqüência de homomorfismos de grupos

$$\ldots G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

é *exata em* G_i se $Imf_{i-1} = Nucf_i$. A seqüência é dita *exata* quando for exata em cada G_i. Em particular

(a) $1 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ é exata se e somente se α é injetora

(b) $B \xrightarrow{\beta} C \to 1$ é exata se e somente se β é sobrejetora

(c) $1 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 1$ é exata se e somente se α é injetora, β sobrejetora e β induz um isomorfismo de $B/Im\alpha$ sobre C.

Uma seqüência exata do tipo (c) é dita *extensão* de A por C.

Definição 4.1. Uma extensão $1 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 1$ *"splits"** se existe um homomorfismo $\gamma : C \to B$ tal que $\gamma\beta = Id_C$.

Definição 4.2. Uma extensão $1 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 1$ é *central* se $Im\alpha$ é um subgrupo central de B.

Definição 4.3. Seja G um grupo. Dizemos que um subgrupo H de G tem *complemento* K em G se $H \cap K = \{e\}$ e $HK = G$ onde $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$.

Proposição 4.4. Seja $1 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 1$ uma extensão. Então

(i) esta seqüência "splits" se e somente $Nuc\beta$ tem um complemento em B;

(ii) existe um homomorfismo $\rho : B \to A$ tal que $\alpha\rho = Id_A$ se e somente se $Nuc\beta$ tem um complemento normal em B. Neste caso, B é isomorfo ao produto direto de C e A.

5. Multiplicador de Schur

Definição 5.1. Seja G um grupo com apresentação $< X|R >$. O *multiplicador de Schur* de G é definido por

$$M(G) = \frac{F' \cap \overline{R}}{[F, \overline{R}]}$$

* A tradução comumente usada para o termo "splits" é "cinde". Preferimos manter o termo original em inglês.

onde $\overline{R}$ denota o fêcho normal de R em $F = F(X)$.

Proposição 5.2. (i) $M(G)$ depende apenas de G e não da apresentação $< X|R >$ para G;
(ii) Se G é um grupo finito então $M(G)$ é finito também.

6. Produtos Tensoriais de Módulos

Ao longo desta seção R será um anel com identidade e, não necessariamente comutativo.

Definição 6.1. Um grupo abeliano (aditivo) M é um *R-módulo à esquerda* se existe uma função $R \times M \to M$, denotada $(r, m) \mapsto r.m$, satisfazendo

(i) $r.(m + m') = r.m + r.m'$

(ii) $(r + r').m = r.m + r'.m$

(iii) $(rr').m = r(r'.m)$

(iv) $e.m = m$

para todo $m, m' \in M$, $r, r' \in R$.

Definição 6.2. Uma função $f : M \to N$ entre R-módulos à esquerda M e N é um *R-homomorfismo* se

$$(m + m')f = (m)f + (m')f \quad \text{e} \quad (r.m)f = r.((m)f)$$

para todo $m, m' \in M$ e $r \in R$.

Exemplo. Se $R = \mathbb{Z}$ então R-módulo = grupo abeliano enquanto $\mathbb{Z}$-homomorfismo = homomorfismo de grupos.

De modo análogo definimos um R-módulo à direita e um R-homomorfismo entre R-módulos à direita. Se R é também comutativo, todo R-módulo à direita M pode ser considerado um R-módulo à esquerda definindo $r.m = m.r$ para todo $m \in M$ e $r \in R$.

Neste caso, diremos simplesmente que M é um R-módulo.

Definição 6.3. Se M é um R-módulo à direita, N um R-módulo à esquerda e G um grupo abeliano aditivo então uma *função R-biaditiva* é uma aplicação $f : M \times N \to G$ satisfazendo

(i) $(m + m', n)f = (m, n)f + (m', n)f$

(ii) $(m, n + n')f = (m, n)f + (m, n')f$

(iii) $(m.r, n)f = (m, r.n)f$

para todo $m, m' \in M, n, n' \in N$ e $r \in R$.

Sejam M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. Definimos um produto tensorial de M e N da seguinte forma:

Definição 6.4. Um *produto tensorial* de M e N é um grupo abeliano T junto com uma função R-biaditiva φ tais que, para todo grupo abeliano G e toda função R-biaditiva $f : M \times N \to G$, existe um único homomorfismo $\tilde{f} : T \to G$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & T \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Teorema 6.5. Se (T_1, φ_1) e (T_2, φ_2) representam o produto tensorial de M e N então T_1 e T_2 são isomorfos.

Demonstração. Sejam $\tilde{\varphi}_1 : T_2 \to T_1, \tilde{\varphi}_2 : T_1 \to T_2$ os homomorfismos tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & T_2 \arrow[dl, dashed, "\tilde{\varphi}_1"] \\ T_1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & T_1 \arrow[dl, dashed, "\tilde{\varphi}_2"] \\ T_2 & \end{tikzcd}$$

são comutativos. Notemos que $\varphi_1\tilde{\varphi}_2\tilde{\varphi}_1 = \varphi_2\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1$, i.e., $\tilde{\varphi}_2\tilde{\varphi}_1$ é um homomorfismo que faz o seguinte diagrama

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & T_1 \arrow[dl, dashed, "\tilde{\varphi}_2\tilde{\varphi}_1"] \\
T_1 &
\end{tikzcd}
$$

comutar. Mas a aplicação identidade $Id_{T_1} : T_1 \to T_1$ também tem essa propriedade. Pela unicidade devemos ter $\tilde{\varphi}_2\tilde{\varphi}_1 = Id_{T_1}$. De modo análogo provamos que $\tilde{\varphi}_2\tilde{\varphi}_1 = Id_{T_2}$ e portanto que $\tilde{\varphi}_1$ é um isomorfismo. ■

Desse resultado concluímos que o produto tensorial de M e N, se existe, é único a menos de isomorfismo. Neste caso, o produto tensorial de M e N é denotado por $M \otimes_R N$.

Teorema 6.6. O produto tensorial de um R-módulo à direita M e um R-módulo à esquerda N existe.

Demonstração. Seja F o grupo abeliano livre sobre $M \times N$ e seja S o subgrupo de F gerado por todos os elementos das seguintes três formas:

$$
\begin{gathered}
(m + m', n) - (m, n) - (m', n) \\
(m, n + n') - (m, n) - (m, n') \\
(m.r, n) - (m, r.n)
\end{gathered}
$$

Definimos $M \otimes_R N = F/S$ e denotamos cada elemento $(m, n) + S \in F/S$ por $m \otimes n$. Seja $\varphi : M \times N \to M \otimes_R N$ uma aplicação dada por $(m, n)\varphi = m \otimes n$. É fácil verificar que φ é uma função R-biaditiva.

Agora sejam G um grupo abeliano e $f : M \times N \to G$ uma função R-biaditiva.

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\
G &
\end{tikzcd}
$$

Como F é livre sobre $M \times N$ existe um único homomorfismo $f' : F \to G$ estendendo f. Sendo f R-biaditiva temos $S \subset Nucf'$. Segue então da Proposição 3.7 que existe um

$$\begin{tikzcd}
Nuc\, f' \arrow[dr] & & F/S \arrow[dd, dashed, "\tilde{f}"] \\
& F \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "f'"'] & \\
S \arrow[uu] \arrow[ur] & & G
\end{tikzcd}$$

homomorfismo $\tilde{f} : F/S \to G$ tal que $\pi\tilde{f} = f'$ onde $\pi : F \to F/S$ é a projeção natural. Notemos que $(m \otimes n)\tilde{f} = (m, n)f$ para todo $m \in M$, $n \in N$. Assim $\varphi\tilde{f} = f$. Além disso, $\tilde{f}$ está unicamente determinado por f já que o conjunto de todos os elementos da forma $m \otimes n$ gera $M \otimes_R N$. ■

Desse teorema concluímos que $M \otimes_R N$ é o grupo abeliano gerado por todos os símbolos $m \otimes n$ com $m \in M$ e $n \in N$ satisfazendo as relações

$$\begin{aligned}
(m + m') \otimes n &= m \otimes n + m' \otimes n \\
m \otimes (n + n') &= m \otimes n + m \otimes n' \\
m.r \otimes n &= m \otimes r.n
\end{aligned}$$

para todo $m, m' \in M, n, n' \in N$ e $r \in R$. Daí concluímos que se O_M, O_N são *identidades* de M e N respectivamente, então $O_M \otimes n = m \otimes O_N$ é a identidade de $M \otimes_R N$.

Proposição 6.7. Se R é comutativo e M e N são R-módulos então $M \otimes_R N$ é um R-módulo com $(m \otimes n).r = m.r \otimes n = m \otimes n.r$.

Demonstração. Fixemos $r \in R$. A aplicação $f_r : M \times N \to M \otimes_R N, (m, n) \mapsto m \otimes n.r$ é claramente R-biaditiva. Segue da definição de produto tensorial que existe um único homomorfismo $\tilde{f}_r : M \otimes_R N \to M \otimes_R N$ tal que $\varphi\tilde{f}_r = f_r$ onde φ é a função definida no Teorema 6.6. Observemos que $(m \otimes n)\tilde{f}_r = m \otimes n.r$ para todo $m \in M, n \in N$. É fácil verificar que a aplicação

$$\begin{aligned}
M \otimes_R N \times R &\to M \otimes_R N \\
(m \otimes n, r) &\mapsto (m \otimes n).r = (m \otimes n)\tilde{f}_r
\end{aligned}$$

satisfaz os axiomas de módulo à direita. Além disso, em $M \otimes_R N$ vale

$$(m \otimes n).r = m \otimes n.r = m \otimes r.n = m.r \otimes n$$

para todo $m \in M, n \in N$ e $r \in R$. ■

Segue deste resultado que se M e N são grupos abelianos finitamente gerados com M ou N finito então $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ é finito.

Sejam M, N e G R-módulos onde R é um anel comutativo com identidade. Uma função $f : M \times N \to G$ é dita *R-bilinear* se f é R-biaditiva e

$$(m,n)f.r = (m.r,n)f = (m,n.r)f$$

para todo $m \in M, n \in N$ e $r \in R$.

Se R é comutativo e M e N são R-módulos é fácil verificar que a aplicação $\varphi : M \times N \to M \otimes_R N$, $(m,n) \mapsto m \otimes n$ é R-bilinear. Além disso, o R-módulo $M \otimes_R N$ e φ resolvem o seguinte problema: Dados qualquer R-módulo G e qualquer função R-bilinear $f : M \times N \to G$, existe um único R-homomorfismo $\tilde{f} : M \otimes_R N \to G$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Proposição 6.8. Se p e q são números primos entre si então $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_q$ é um grupo trivial.

Demonstração. Isso segue do fato que

$$p(a \otimes b) = pa \otimes b = 0 \otimes b \quad \text{e}$$

$$q(a \otimes b) = a \otimes qb = a \otimes 0$$

para todo $a \in \mathbb{Z}_p$ e $b \in \mathbb{Z}_q$. ■

Notemos que este resultado também vale se A e B são $\mathbb{Z}$-módulos finitos com $mdc(|A|, |B|) = 1$.

7. O Funtor Quadrático de Whitehead

Nesta seção definiremos o funtor quadrático de Whitehead Γ e veremos algumas de suas propriedades.

Definição 7.1. Dado um grupo abeliano (aditivo) $A, \Gamma A$ é o grupo gerado por todos os símbolos γa com $a \in A$ satisfazendo as relações

$$\begin{aligned} \gamma(-a) &= \gamma a ; & (7.1) \\ \gamma(a+b+c)+\gamma a+\gamma b+\gamma c &= \gamma(a+b)+\gamma(b+c)+\gamma(c+a) & (7.2) \end{aligned}$$

para todos os elementos $a, b, c \in A$.

Segue de (7.2) com $a = b = c = 0$ que $\gamma 0$ é o elemento neutro de ΓA. Assim fazendo $c = 0$ em (7.2) obtemos

$$\gamma a + \gamma b = \gamma b + \gamma a$$

e portanto ΓA é um grupo abeliano. Agora fazendo $b = a$ e $c = -a$ em (7.2) e usando (7.1) obtemos

$$\gamma(2a) = 4\gamma a \tag{7.3}$$

Seja

$$W(a,b) = \gamma(a+b) - \gamma a - \gamma b \tag{7.4}$$

Como A e ΓA são grupos abelianos segue que $W(a,b) = W(b,a)$. Além disso,

$$W(a,a) = \gamma(2a) - 2\gamma a = 2\gamma a \tag{7.5}$$

É fácil verificar que a relação (7.2) é equivalente a

$$W(a, b+c) = W(a,b) + W(a,c) \tag{7.6}$$

Mais geralmente, vale

$$W(\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} W(a_i, b_j) \tag{7.7}$$

para todo $n, m \in I\!N^*$ e $a_i, b_j \in A, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

Proposição 7.2. Para todo $n \in I\!N^*$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$ temos

$$\gamma(a_1 + \ldots + a_n) = \sum_{i=1}^{n} \gamma a_i + \sum_{i<j} W(a_i, a_j) \tag{7.8}$$

Demonstração. (por indução sobre $n \geq 1$). Se $n = 1$ a identidade (7.8) é trivial. Suponhamos então $n > 1$ e que (7.8) é satisfeito para quaisquer r elementos de A com $r < n$. Agora sejam $a_1, \ldots, a_n \in A$. Então

$$\begin{aligned}
\gamma(a_1 + \ldots + a_n) &= \gamma(\sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n) \\
&= \gamma(\sum_{i=1}^{n-1} a_i) + \gamma a_n + W(\sum_{i=1}^{n-1} a_i, a_n) && \text{(por (7.4))} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \gamma a_i + \sum_{i<j<n} W(a_i, a_j) + \gamma a_n + W(\sum_{i=1}^{n-1} a_i, a_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \gamma a_i + \sum_{i<j<n} W(a_i, a_j) + \sum_{i=1}^{n-1} W(a_i, a_n) && \text{(por (7.7))} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \gamma a_i + \sum_{i<j} W(a_i, a_j) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Segue deste resultado e de (7.5) que

$$\gamma(na) = n\gamma a + \frac{(n-1)n}{2} W(a, a) = n^2 \gamma a \tag{7.9}$$

Proposição 7.3. Se A é um grupo abeliano livre de posto n e $\{a_1, \ldots, a_n\}$ é um conjunto de geradores livres para A então ΓA é abeliano livre sobre o conjunto

$$\{\gamma a_i, W(a_j\ ,\ a_k) \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j < k \leq n\}$$

Demonstração. Seja G o grupo abeliano livre sobre

$$X = \{g_i\ ,\ g_{jk} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq i < j \leq n\}$$

Consideremos $\phi : G \to \Gamma A$ o homomorfismo estendendo a aplicação $X \to \Gamma A$, definida por $g_i \mapsto \gamma a_i, g_{jk} \mapsto W(a_j, a_k)$. Vamos mostrar que G e ΓA são isomorfos construindo uma inversa para ϕ. Sendo A um grupo abeliano livre sobre $\{a_1, \ldots, a_n\}$ cada elemento $a \in A$ tem uma única expressão da forma $a = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ com $x_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$. Definimos uma aplicação $\theta : \{\gamma a \mid a \in A\} \to G$ pondo

$$(\gamma a)\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 g_i + \sum_{j<k} x_j x_k g_{jk}$$

Obviamente $(\gamma a)\theta = (\gamma(-a))\theta$ para todo $a \in A$. Agora sejam

$$a = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i, \; b = \sum_{i=1}^{n} y_i a_i, \; c = \sum_{i=1}^{n} z_i a_i$$

elementos de A. Uma vez que

$$\begin{aligned}
(x_i + y_i + z_i)^2 &= (x_i + y_i)^2 + 2x_i z_i + 2y_i z_i + z_i^2 \\
(x_j + y_j + z_j)(x_k + y_k + z_k) &= (x_j + y_j)(x_k + y_k) + x_j z_k + y_j z_k + x_k z_j + y_k z_j
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
(\gamma(a+b+c)\theta + (\gamma a)\theta + (\gamma b)\theta + (\gamma c)\theta &= \sum_{i=1}^{n}[(x_i + y_i)^2 + 2x_i z_i + 2y_i z_i + z_i^2] g_i \\
&+ \sum_{j<k}[(x_j + y_j)(x_k + y_k) + x_j z_k + y_j z_k + \\
&+ x_k z_j + y_k z_j] g_{jk} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 g_i \\
&+ \sum_{j<k} x_j x_k g_{jk} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 g_i + \\
&+ \sum_{j<k} y_j y_k g_{jk} + \sum_{i=1}^{n} z_i^2 g_i + \sum_{j<k} z_j z_k g_{jk} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 g_i + \sum_{j<k}(x_j + y_j)(x_k + y_k) g_{jk} \\
&+ \sum_{i=1}^{n}(x_i + z_i)^2 g_i + \sum_{j<k}(x_j + z_j)(x_k + z_k) g_{jk} \\
&+ \sum_{i=1}^{n}(y_i + z_i)^2 + \sum_{j<k}(y_j + z_j)(y_k + z_k) g_{jk} \\
&= (\gamma(a+b))\theta + (\gamma(b+c))\theta + (\gamma(c+a))\theta
\end{aligned}$$

Logo θ é consistente com as relações (7.1) e (7.2). Segue então do Teste de Substituição (Proposição 3.8) que existe um homomorfismo $\theta' : \Gamma A \to G$ estendendo θ. Obviamente

$$\begin{aligned} (\gamma a_i)\theta' &= g_i \qquad i = 1, \ldots, n \\ (W(a_j, a_k))\theta' &= g_{jk} \qquad 1 \leq j < k \leq n \end{aligned}$$

Logo $\phi\theta' = Id$. Agora de (7.8) e (7.9)

$$\begin{aligned} \gamma(\sum_{i=1}^{n} x_i a_i) &= \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i a_i) + \sum_{j<k} W(x_j a_j, x_k a_j) = \\ &= \sum x_i^2 \gamma a_i + \sum_{j<k} x_j x_k W(a_j, a_k) \end{aligned}$$

e assim vemos que $\theta'\phi = Id$. Portanto, ΓA e G são isomorfos. ∎

Deste resultado concluímos que se A é um grupo abeliano livre de posto n então ΓA é abeliano livre de posto $n(n+1)/2$. Observamos que a proposição anterior ainda continua válida para A um grupo abeliano de posto infinito e a demonstração deste fato segue exatamente os passos da do caso finito.

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de grupos abelianos. Sejam X o conjunto de todos os símbolos γa com $a \in A$, F o grupo livre sobre X e R o conjunto de todas as relações do tipo (7.1) e (7.2). Consideremos $\beta : F \to \Gamma B$ o (único) homomorfismo estendendo a correspondência $\gamma a \mapsto \gamma(af)$. Como $< R >^F \subset Nuc\pi$, onde $\pi : F \to F/ < R >^F$ é a projeção natural, segue da Proposição 3.7

$$\begin{tikzcd}
Nuc\,\beta \arrow[dr] & & \Gamma A \cong F/ < R >^F \arrow[dd, dashed, "\tilde{f}"] \\
& F \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\
< R >^F \arrow[uu] \arrow[ur] & & \Gamma B
\end{tikzcd}$$

que existe um homomorfismo $\tilde{f} : \Gamma A \to \Gamma B$ tal que $(\gamma a)\tilde{f} = \gamma(af)$ para todo $a \in A$. Dizemos que $\tilde{f}$ é o *homomorfismo induzido* por f. Segue de (7.4) que

$$(W(a,b))\tilde{f} = W(af, bf)$$

para todo $a, b \in A$. É óbvio que se f é sobrejetora então $\tilde{f}$ é sobrejetora. Também, $A = B$ e $f = Id_A$ implica $\tilde{f} = Id_{\Gamma A}$. Além disso, se $g : B \to C$ é um homomorfismo de grupos abelianos e $\tilde{g} : \Gamma B \to \Gamma C$ o homomorfismo induzido por g é claro que o homomorfismo $\tilde{f}\tilde{g} : \Gamma A \to \Gamma C$ é induzido por $fg : A \to C$. Assim, segue que se $f : A \to B$ é um isomorfismo então $\tilde{f} : \Gamma A \to \Gamma B$ também é.

Sejam $\tilde{f} : \Gamma A \to \Gamma B$ o homomorfismo induzido por $f : A \to B, \{a_i\} \subset A$ um conjunto gerador de A e $\{r_\lambda\} \subset Nucf$ um conjunto que gera $Nucf$. Então

$$(\gamma(r_\lambda))\tilde{f} = 0 \quad \text{e} \quad (W(a_i, r_\lambda))\tilde{f} = W((a_i)f, (r_\lambda)f) = 0$$

Lema 7.4. Seja Γ_0 o subgrupo de ΓA gerado pelos elementos

$$\gamma(r_\lambda)\ ,\ W(a_i, r_\lambda) \tag{7.10}$$

para todos os valores de λ, i. Então para todo $a \in A$ e $r \in Nucf$

$$\gamma(a + r) - \gamma(a) \in \Gamma_0 \tag{7.11}$$

Demonstração. Se $r = r_{\lambda_1} + \ldots + r_{\lambda_p}$ temos de (7.8) que

$$\gamma(r) = \sum \gamma(r_{\lambda_j}) + \sum_{k<\ell} W(r_{\lambda_k}, r_{\lambda_\ell})$$

Cada elemento r_{λ_k} é uma soma de geradores no conjunto $\{a_i\}$. Segue então de (7.7) que cada $W(r_{\lambda_k}, r_{\lambda_\ell})$ é uma soma de elementos da forma $W(a_i, r_{\lambda_\ell})$ e portanto que $\gamma(r) \in \Gamma_0$. Se $a = a_{i_1} + \ldots + a_{i_q}$ então por (7.7)

$$W(a, r) = \sum_r \sum_\ell W(a_{i_r}, r_{\lambda_\ell}) \in \Gamma_0$$

Assim, de (7.4)

$$\gamma(a + r) - \gamma a = W(a, r) + \gamma(r) \in \Gamma_0. \quad \blacksquare$$

Teorema 7.5. Se $f : A \to B$ é um epimorfismo então $Nuc\tilde{f}$ é gerado pelos elementos (7.10).

Demonstração. Seja $\Gamma^* = \Gamma A / \Gamma_0$ e seja $\overline{\alpha} \in \Gamma^*$ a classe lateral de $\alpha \in \Gamma A$. Como $\Gamma_0 \subseteq Nuc\tilde{f}$ segue da Proposição 3.7 que $\tilde{f}$ induz um homomorfismo $f^* : \Gamma^* \to \Gamma B$

$$
\begin{tikzcd}
Nuc\,\tilde{f} \arrow[dr] & & \Gamma A/\Gamma_0 \arrow[dd, dashed, "f^*"] \\
& \Gamma A \arrow[ur, two heads] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & \\
\Gamma_0 \arrow[uu] \arrow[ur] & & \Gamma B
\end{tikzcd}
$$

dado por

$$(\overline{\gamma a})f^* = (\gamma a)\tilde{f} = \gamma(af) \tag{7.12}$$

É fácil ver que $Nuc(f^*) = \dfrac{Nuc\tilde{f}}{\Gamma_0}$. Assim basta provarmos que f^* é injetora. Como $Imf = B$, para cada $b \in B$ existe $(b)u \in A$ tal que $(bu)f = b$. Temos então para todo $a \in A$ que $((af)u - a)f = 0$. Escrevendo $(a)v = (af)u - a \in Nucf$ obtemos

$$(af)u = a + (a)v \qquad (a \in A)$$

Portanto de (7.11) segue que

$$\overline{\gamma((af)u)} = \overline{\gamma(a + (a)v)} = \overline{\gamma a} \tag{7.13}$$

para todo $a \in A$. Analogamente

$$\overline{\gamma((-b)u)} = \gamma(-(b)u) = \overline{\gamma(bu)} \tag{7.14}$$

e

$$\overline{\gamma((b_1 + \ldots + b_n)u)} = \overline{\gamma((b_1)u + \ldots + (b_n)u)} \tag{7.15}$$

para todo $b, b_1, \ldots, b_n \in B$. Seja $g : \{\gamma b \mid b \in B\} \to \Gamma^*$ uma função dada por

$$(\gamma b)g = \overline{\gamma(bu)} \tag{7.16}$$

Segue de (7.14), (7.15) e Proposição 3.8 que g se estende a um homomorfismo $g' : \Gamma B \to \Gamma^*$. Temos de (7.12), (7.16) e (7.13) que

$$(\overline{\gamma a})f^*g' = (\gamma(af))g' = \overline{\gamma((af)u)} = \overline{\gamma a}$$

Logo $f^* g' = Id_{\Gamma^*}$, donde f^* é injetora. ∎

Teorema 7.6. Seja B um grupo abeliano com apresentação $< \{a_i\} \mid \{r_\lambda\} >$. Então ΓB tem a apresentação $< X \mid Y \cup Z >$ onde

$$\begin{aligned} X &= \{\gamma(a_i)\} \cup \{W(a_j, a_k),\ j < k\} \\ Y &= \{[x,y] \mid x, y \in X,\ x \neq y\} \\ Z &= \{\gamma(r_\lambda)\} \cup \{W(a_i, r_\lambda)\} \end{aligned}$$

Demonstração. Sejam A o grupo abeliano livre sobre $\{a_i\}$ e $\tilde{f} : \Gamma A \to \Gamma B$ o homomorfismo induzido pela projeção natural $f : A \to B$. Segue da Proposição 7.3 que ΓA tem apresentação $< X \mid Y >$. Do Teorema 7.5 temos $Nuc\tilde{f} =< Z > \subseteq \Gamma A$. Logo $\Gamma^* \cong \dfrac{< X \mid Y >}{< Z >} \cong < X \mid Y \cup Z >$. Também é óbvio que o monomorfismo $f^* : \Gamma^* \to \Gamma B$ dado por (7.12) é também sobrejetor. Daí temos $\Gamma B \cong < X \mid Y \cup Z >$. ∎

Este resultado é importante pois fornece uma apresentação para ΓB a partir de uma conhecida para B. Assim podemos ter uma apresentação mais "enxuta" para ΓB do que aquela implícita na sua definição. Além disso, garante que se B é um grupo abeliano finitamente apresentado então ΓB também é.

Do Teorema 7.6 e das identidades (7.9) e (7.7) temos o seguinte resultado.

Corolário 7.7. $\Gamma \mathbb{Z}_n \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_n, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}_{2n}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

Proposição 7.8. Sejam A e B grupos abelianos. Então

$$\Gamma(A \oplus B) \cong \Gamma A \oplus \Gamma B \oplus (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$$

Demonstração. Consideremos a correspondência

$$\gamma'(a+b) \mapsto \gamma a + \gamma b + a \otimes b$$

onde $\gamma a \in \Gamma A, \gamma b \in \Gamma B$ e $\gamma'(a+b) \in \Gamma(A \oplus B)$ significa o mesmo que γa na Definição 7.1. É fácil ver que esta correspondência é consistente com todas as relações definidoras para $\Gamma(A \oplus B)$ e portanto se estende a um homomorfismo $f : \Gamma(A \oplus B) \to \Gamma A \oplus \Gamma B \oplus (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$.

Agora de (7.7) segue que um homomorfismo $g : \Gamma A \oplus \Gamma B \oplus A \otimes_{\mathbb{Z}} B \to \Gamma(A \oplus B)$ está definido pelas correspondências

$$\begin{aligned} \gamma a &\mapsto \gamma' a \\ \gamma b &\mapsto \gamma' b \\ a \otimes b &\mapsto W'(a, b) \end{aligned}$$

onde $a \in A, b \in B$. Claramente $fg = Id$ e $gf = Id$. Logo f é um isomorfismo. ∎

Corolário 7.9. Sejam $A_1, \ldots, A_n$ grupos abelianos. Então

$$\begin{aligned} \Gamma(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n) &\cong \Gamma A_1 \oplus \ldots \oplus \Gamma A_n \oplus (A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} A_2) \oplus [(A_1 \oplus A_2) \otimes_{\mathbb{Z}} A_3] \oplus \ldots \oplus \\ &\oplus [(A_1 \oplus \ldots \oplus A_{n-1}) \otimes_{\mathbb{Z}} A_n]. \end{aligned}$$

Corolário 7.10. Se A é um grupo abeliano finito então ΓA também é.

Demonstração. O grupo A, sendo abeliano finito, pode ser decomposto em uma soma direta de grupos cíclicos finitos $A \cong A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. A finitude de ΓA segue dos Corolários 7.9, 7.7 e do fato que o produto tensorial de $\mathbb{Z}$-módulos finitos é finito. ∎

CAPíTULO II

O Produto Tensorial Não Abeliano de Grupos

8. Definição e Resultados Preliminares

Uma ação de um grupo G sobre um grupo H é um homomorfismo $\theta : G \to Aut(H)$. Escrevemos $(h)g\theta$ como h^g, representando assim uma ação à direita de H. Se θ é o homomorfismo trivial então dizemos que G age trivialmente sobre H ou que H é G-trivial.

Sejam G e H dois grupos munidos com uma ação de G sobre H e de H sobre G. Suponhamos que cada um desses grupos atue sobre si mesmo por conjugação, i.e., para $g, x \in G$ e $h, y \in H, g^x = x^{-1}gx$ e $h^y = y^{-1}hy$. Dessa forma temos uma ação do produto livre $G * H$ sobre G e H. Vamos dizer que as ações de G sobre H e de H sobre G são *compatíveis* se: para todo $g, g_1 \in G, h, h_1 \in H$

$$g^{(h^{g_1})} = g^{g_1^{-1}hg_1} := ((g^{g_1^{-1}})^h)^{g_1} \tag{8.1}$$

$$h^{(g^{h_1})} = h^{h_1^{-1}gh_1} := ((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1} \tag{8.2}$$

Se G e H atuam um sobre o outro compativelmente, o produto tensorial (não abeliano) de G e H, como introduzido por R. Brown e J.L. Loday em [4,5] é definido como o grupo gerado por todos os símbolos $g \otimes h, g \in G, h \in H$ satisfazendo as relações

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \tag{8.3}$$

$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}) \tag{8.4}$$

para todo $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$. Tal grupo é denotado por $G \otimes H$.

Notemos que as relações (8.3) e (8.4) têm a forma das identidades de comutadores quando $g \otimes h$ é substituído por $[a, b]$ e as ações por conjugação.

Uma vez que a ação por conjugação de um grupo G sobre si mesmo satisfaz (8.1) e (8.2), o *quadrado tensorial* não abeliano $G \otimes G$ de um grupo G pode sempre ser definido.

Observação: Fazendo $g_1 = e$ em (8.3) e $h_1 = e$ em (8.4) vemos que $g \otimes e = e \otimes h$, onde $g \in G$ e $h \in H$, é o elemento neutro de $G \otimes H$.

Exemplo: Sejam $G =< a \mid a^2 >$ e $H =< b \mid b^3 >$. Suponhamos que H age trivialmente sobre G e que G age sobre H por $h^g = h^{-1}, h \in H, g \in G$. Obviamente essas ações são compatíveis. Da definição de $G \otimes H$ e da observação anterior $G \otimes H$ é gerado por $\{a \otimes b, a \otimes b^2\}$. Mas, por (8.4)

$$a \otimes b^2 = (a \otimes b)(a^b \otimes b^b) = (a \otimes b)(a \otimes b) = (a \otimes b)^2$$

Logo $G \otimes H =< a \otimes b >$. Também temos

$$e \otimes b = a^2 \otimes b = (a^a \otimes b^a)(a \otimes b) = (a \otimes b^2)(a \otimes b) = (a \otimes b)^3.$$

É fácil verificar que a aplicação $G \otimes H \to \mathbb{Z}_3, a \otimes b \mapsto \bar{1}$ é um isomorfismo. ∎

Definição 8.1. Seja L um grupo. Uma função $\phi : G \times H \to L$ é chamada uma *biderivação* se para todo $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$

$$(gg_1, h)\phi = (g^{g_1}, h^{g_1})\phi \cdot (g_1, h)\phi$$
$$(g, hh_1)\phi = (g, h_1)\phi \cdot (g^{h_1}, h^{h_1})\phi$$

Claramente uma biderivação $\phi : G \times H \to L$ determina um único homomorfismo $\phi^* : G \otimes H \to L$ tal que $(g \otimes h)\phi^* = (g, h)\phi$ (Proposição 3.8).

A seguir veremos alguns resultados obtidos por R. Brown e J. L. Loday [5].

Proposição 8.2. Os grupos G e H atuam sobre $G \otimes H$ de modo que

$$(g_1 \otimes h)^g = g_1^g \otimes h^g \ , \ (g \otimes h_1)^h = g^h \otimes h_1^h$$

para todo $g, g_1 \in G, h, h_1 \in H$. Conseqüentemente temos uma ação de $G * H$ sobre $G \otimes H$ dada por

$$(g \otimes h)^p = g^p \otimes h^p$$

onde $g \in G, h \in H$ e $p \in G * H$.

Demonstração. Para cada $g \in G$ consideremos a função $\phi_g : G \times H \to G \otimes H$ tal que $(g_1, h)\phi = g_1^g \otimes h^g$ com $g_1 \in G, h \in H$. Afirmamos que ϕ_g é uma biderivação, $\forall g \in G$. De fato, se $g \in G$ então para todo $g_1, g_2 \in G$ e $h, h_1 \in H$ temos

$$
\begin{aligned}
(g_1 \otimes hh_1)\phi_g &= g_1^g \otimes (hh_1)^g \\
&= g_1^g \otimes h^g h_1^g \\
&= (g_1^g \otimes h_1^g)[(g_1^g)^{h_1^g} \otimes (h^g)^{h_1^g}] && \text{(por (8.4))} \\
&= (g_1^g \otimes h_1^g)[(g_1^g)^{g^{-1}h_1 g} \otimes h_1^{-g} h^g h_1^g] && \text{(por (8.1))} \\
&= (g_1^g \otimes h_1^g)(g_1^{h_1 g} \otimes h^{h_1 g}) \\
&= (g_1, h_1)\phi_g (g_1^{h_1} \otimes h^{h_1})\phi_g
\end{aligned}
$$

e similarmente

$$(g_1 g_2, h)\phi_g = (g_1^{g_2}, h^{g_2})\phi g(g_2, h)\phi g$$

Logo ϕ_g é uma biderivação e assim determina um único homomorfismo de grupos $\alpha_g : G \otimes H \to G \otimes H$ tal que $(g_1 \otimes h)\alpha_g = (g_1^g \otimes h^g)$ para todo $g_1 \in G, h \in H$. É claro que α_g é um automorfismo de $G \otimes H$ uma vez que $\alpha_g \alpha_{g^{-1}} = \alpha_{g^{-1}} \alpha_g = Id_{G \otimes H}$. Como obviamente

$$
\begin{aligned}
\alpha : G &\to Aut\ G \otimes H \\
g &\mapsto \alpha_g
\end{aligned}
$$

é um homomorfismo de grupos, temos uma ação de G sobre $G \otimes H$ tal que

$$(g_1 \otimes h)^g = g_1^g \otimes h^g.$$

O outro caso é provado de forma análoga. ■

Proposição 8.3. Suponhamos que $\alpha : G \to A, \beta : H \to B$ sejam homomorfismos de grupos, A, B atuem compativelmente um sobre o outro e que α e β preservem as ações, no seguinte sentido:

$$(h^g)\beta = (h\beta)^{g\alpha} \ , \ (g^h)\alpha = (g\alpha)^{h\beta}$$

para todo $g \in G, h \in H$. Então existe um único homomorfismo

$$\alpha \otimes \beta : G \otimes H \to A \otimes B$$

tal que $(g \otimes h)(\alpha \otimes \beta) = g\alpha \otimes h\beta$ para todo $g \in G, h \in H$. Além disso, se α e β são sobrejetoras então $\alpha \otimes \beta$ também é.

Demonstração. Consideremos a função $\phi : G \times H \to A \otimes B$ dada por $(g,h)\phi = g\alpha \otimes h\beta$. Para todo $g_1, g_2 \in G$ e $h \in H$ temos

$$\begin{aligned}
(g_1g_2,h)\phi &= (g_1g_2)\alpha \otimes h\beta \\
&= (g_1)\alpha(g_2)\alpha \otimes h\beta \\
&= ((g_1)\alpha^{(g_2)\alpha} \otimes (h\beta)^{(g_2)\alpha})((g_2)\alpha \otimes h\beta) \qquad \text{(por (8.3))} \\
&= ((g_1^{g_2})\alpha \otimes (h^{g_2})\beta)((g_2)\alpha \otimes h\beta) \\
&= (g_1^{g_2}, h^{g_2})\phi(g_2,h)\phi
\end{aligned}$$

e similarmente, $(g, h_1h_2)\phi = (g,h_2)\phi(g^{h_2}, h_1^{h_2})\phi$, $\forall g \in G$, $\forall h_1, h_2 \in H$. Logo ϕ é uma biderivação e assim determina um único homomorfismo $\alpha \otimes \beta : G \otimes H \to A \otimes B$ tal que $(g \otimes h)(\alpha \otimes \beta) = g\alpha \otimes h\beta, \forall g \in G, \forall h \in H$.

Se α e β são sobrejetoras então dados $a \in A$ e $b \in B$ existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que $g\alpha = a$ e $h\beta = b$. Daí $(g \otimes h)(\alpha \otimes \beta) = a \otimes b$ provando que $\alpha \otimes \beta$ é sobrejetora também. ∎

Proposição 8.4. Existe um único isomorfismo

$$\nu : G \otimes H \to H \otimes G \tag{8.5}$$

tal que $(g \otimes h)\nu = (h \otimes g)^{-1}$ para todo $g \in G, h \in H$.

Demonstração. É fácil ver que a função $\phi : G \times H \to A \otimes G$ dada por $(g,h)\phi = (h \otimes g)^{-1}$ é uma biderivação e portanto determina um único homomorfismo do tipo (8.5). Da mesma forma existe um homomorfismo $\mu : H \otimes G \to G \otimes H$ tal que $(h \otimes g)\mu = (g \otimes h)^{-1}$ para todo $h \in H, g \in G$. Obviamente $\mu\nu = Id_{H \otimes G}$ e $\nu\mu = Id_{G \otimes H}$ e portanto ν é um isomorfismo. ∎

Proposição 8.5. Para todo $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$ temos

(a) $(g^{-1} \otimes h)^g = (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h^{-1})^h$;

(b) $(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{[g,h]} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h} = (g_1 \otimes h_1)^{h^{-g}h}$;

(c) $(g^{-1}g^h) \otimes h_1 = (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1}$;

(d) $g_1 \otimes h^{-g}h = (g \otimes h)^{-g_1}(g \otimes h)$;

(e) $[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] = g^{-1}g^h \otimes h_1^{-g_1}h_1$.

Demonstração. **(a)** Segue do fato que

$$e \otimes h = g^{-1}g \otimes h = (g^{-1} \otimes h)^g(g \otimes h)$$

e

$$g \otimes e = g \otimes h^{-1}h = (g \otimes h)(g \otimes h^{-1})^h$$

para todo $g \in G$ e $h \in H$.

(b) Sejam $u, v \in G, x, y \in H$. Expandindo $uv \otimes xy$ primeiro por (8.3) e depois por (8.4) temos

$$uv \otimes xy = (u \otimes y)^v(u \otimes x)^{yv}(v \otimes y)(v \otimes x)^y.$$

Agora, desenvolvendo $uv \otimes xy$ por (8.4) e depois por (8.3) obtemos

$$uv \otimes xy = (u \otimes y)^v(v \otimes y)(u \otimes x)^{vy}(v \otimes x)^y.$$

Segue dessas duas últimas identidades que

$$(u \otimes x)^{yv}(v \otimes y) = (v \otimes y)(u \otimes x)^{vy}. \tag{8.6}$$

Fazendo $u = g_1^{g^{-1}h^{-1}}, v = g, x = g_1^{g^{-1}h^{-1}}$ e $y = h$ em (8.6) obtemos

$$(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g \otimes h)(g_1^{g^{-1}h^{-1}} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}})^{gh}$$

i.e.,

$$(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh}$$

Agora por (8.2)

$$(g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh} = g_1^{g^{-1}h^{-1}gh} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}gh} = g_1^{g^{-1}g^h} \otimes h_1^{g^{-1}g^h} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h}.$$

Similarmente $(g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh} = (g_1 \otimes h_1)^{h^{-g}h}$. Logo

$$(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h} = (g_1 \otimes h_1)^{h^{-g}h}$$

(c) $$\begin{aligned} (g^{-1}g^h)\otimes h_1 &= (g^{-h^{-1}}g\otimes h_1^{h^{-1}})^h \\ &= (g^{-h^{-1}}\otimes h_1^{h^{-1}})^{gh}(g\otimes hh_1h^{-1})^h && \text{(por (8.3))} \\ &= (g^{-1}\otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g\otimes h^{-1})^h(g\otimes hh_1) && \text{(por (8.4))} \\ &= (g\otimes h_1)^{-[g,h]}(g\otimes h)^{-1}(g\otimes h_1)(g\otimes h)^{h_1} && \text{(por (a))} \\ &= (g\otimes h)^{-1}(g\otimes h)^{h_1} && \text{(por (b))} \end{aligned}$$

(d) é provado de modo análogo a (c)

(e) $$\begin{aligned} [g\otimes h, g_1\otimes h_1] &= (g\otimes h)^{-1}(g_1\otimes h_1)^{-1}(g\otimes h)(g_1\otimes h_1) \\ &= (g\otimes h)^{-1}(g\otimes h)^{h_1^{-g_1}h_1} && \text{(por (b))} \\ &= (g^{-1}g^h)\otimes h^{-g_1}h_1 \end{aligned}$$

Definição 8.6. Um *módulo cruzado* é um homomorfismo de grupos $\mu : M \to P$ junto com uma ação de P sobre M satisfazendo as seguintes condições

$$\begin{aligned} (MC1)\ (m^p)\mu &= p^{-1}(m)\mu p\ ,\ p\in P, m\in M \\ (MC2)\ (m_1)^{(m)\mu} &= m^{-1}m_1m\ ,\ m, m_1\in M \end{aligned}$$

Proposição 8.7. **(a)** Existem homomorfismos de grupos $\lambda : G\otimes H \to G, \lambda' : G\otimes H \to H$ tais que $(g\otimes h)\lambda = g^{-1}g^h$, $(g\otimes h)\lambda' = h^{-g}h$;

(b) Os homomorfismos λ, λ' com as ações dadas na Proposição 8.2 são módulos cruzados;

(c) Se $g\in G, h\in H, t\in G\otimes H$ então

$$\begin{aligned} t\lambda\otimes h &= t^{-1}t^h \\ g\otimes t\lambda' &= t^{-g}t; \end{aligned}$$

(d) $t\lambda\otimes t_1\lambda' = [t, t_1]$ para todo $t, t_1\in G\otimes H$;

(e) As ações de G sobre $Nuc\lambda'$ e de H sobre $Nuc\lambda$ são triviais.

Demonstração. **(a)** Seja $\alpha : G\times H \to G$ tal que $(g, h)\alpha = g^{-1}g^h$. Para todo $g, g_1\in G$ e $h, h_1\in H$ temos

$$(gg_1, h)\alpha = (gg_1)^{-1}(gg_1)^h = (g^{g_1})^{-1}(g^h)^{g_1}g_1^{-1}g_1^h = (g^{g_1})^{-1}(g^{g_1})^{h^{g_1}}g_1^{-1}g_1^h = (g^{g_1}, h^{g_1})\alpha(g_1, h)\alpha$$

Analogamente

$$(g, hh_1)\alpha = (g, h_1)\alpha(g^{h_1}, h^{h_1})\alpha.$$

Assim α determina um homomorfismo $\lambda : G \otimes H \to G$ tal que $(g \otimes h)\lambda = g^{-1}g^h, g \in G$, $h \in H$. O outro caso é análogo.

(b) Como λ é um homomorfismo de grupos é suficiente provarmos que λ satisfaz $(MC1)$ e $(MC2)$ para todos os geradores de $G \otimes H$. Sejam então $t_1 = g_1 \otimes h \in G \otimes H$ e $g \in G$. Temos por (8.1)

$$(t^g)\lambda = (g_1^g \otimes h^g)\lambda = (g_1^g)^{-1}(g_1^g)^{h^g} = g_1^{-g}g_1^{hg} = (g_1^{-1}g_1^h)^g = g^{-1}(t)\lambda g$$

Logo λ satisfaz $(MC1)$. A condição $(MC2)$ segue direto da Proposição 8.5 (b). De modo análogo provamos que λ é um módulo cruzado.

(c) e (d) são conseqüências imediatas da Proposição 8.5.

(e) Se $t \in Nuc\lambda'$ e $g \in G$ então por (c) $e_{G\otimes H} = g \otimes t\lambda' = t^{-g}t$, i.e., $t^g = t$. Logo $Nuc\lambda'$ é G-trivial. Analogamente, $Nuc\lambda$ é H-trivial. ■

Veremos a seguir que se G e H são grupos, cada um atuando trivialmente sobre o outro então $G \otimes H$ é o produto tensorial (usual) dos grupos abelianizados.

Proposição 8.8. Se G atua trivialmente sobre H e H atua trivialmente sobre G então

$$G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$$

Demonstração. Observemos que pela Proposição 8.5 (e) $G \otimes H$ é um grupo abeliano. Além disso, sendo H G-trivial

$$(g \otimes h)\lambda' = h^{-g}h = h^{-1}h = e\ , \quad \forall g \in G,\ \forall h \in H$$

e como λ' é um homomorfismo temos $Nuc(\lambda') = G \otimes H$. Conseqüentemente G age trivialmente sobre $G \otimes H$ (Proposição 8.7 (e)). Da mesma forma a ação de H sobre $G \otimes H$ é trivial. Definimos

$$\begin{aligned} \theta : G^{ab} \times H^{ab} &\to G \otimes H \\ (\overline{g}, \overline{h}) &\mapsto g \otimes h \end{aligned}$$

onde $\overline{g} = G'g$ e $\overline{h} = H'h$. Se $g, x \in G$ e $h, y \in H$ são tais que $\overline{g} = \overline{x}$ e $\overline{h} = \overline{y}$ então existem $c \in G'$ e $d \in H'$ de tal forma que $g = cx$ e $h = dy$. Daí

$$g \otimes h = cx \otimes dy = (c \otimes d)(x \otimes d)(c \otimes y)(x \otimes y) \tag{8.7}$$

Agora, é fácil verificar que

$$[g_1, g_2] \otimes h_1 = g_1 \otimes [h_1, h_2] = e$$

para todo $g_1, g_2 \in G$ e $h_1, h_2 \in H$ e conseqüentemente que $c \otimes d = x \otimes d = c \otimes y = e$. Assim, de (8.7), $g \otimes h = x \otimes y$. Logo θ é uma função bem definida e como as ações de G e H sobre $G \otimes H$ são triviais temos que θ é uma função $\mathbb{Z}$-bilinear. Agora sejam A um $\mathbb{Z}$-módulo e $f : G^{ab} \times H^{ab} \to A$ uma função $\mathbb{Z}$-bilinear. É fácil verificar que a função $\tilde{f} : G \otimes H \to A$ definida por $(g \otimes h)\tilde{f} = (\overline{g}, \overline{h})f$ é um $\mathbb{Z}$-homomorfismo estendendo f. Assim, pela unicidade de produto tensorial de módulos temos $G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$.

9. O Quadrado Tensorial Não Abeliano de um Grupo

Aqui vamos nos restringir ao quadrado tensorial não abeliano de grupos. Os resultados apresentados nesta seção são de R. Brown, D.L. Johnson e E.F. Robertson [3].

Consideremos um grupo G atuando sobre si mesmo por conjugação. Claramente a função comutador $G \times G \to G, (g, h) \mapsto [g, h]$ induz um homomorfismo de grupos $k : G \otimes G \to G$ tal que $(g \otimes h)k = [g, h]$ para todo $g, h \in G$. Escrevemos $J_2(G)$ para $Nuck$. O resultado seguinte é uma conseqüência imediata da Proposição 8.7.

Proposição 9.1. **(a)** $J_2(G)$ é um subgrupo central de $G \otimes G$
(b) G age trivialmente sobre $J_2(G)$.

Lema 9.2. Para todo $g \in G, c \in G'$

$$cg \otimes cg = g \otimes g \ , \ gc \otimes gc = g \otimes g.$$

Demonstração. Primeiro observemos que todo elemento de G' é um produto finito de comutadores. Se $g \in G$ e c é um comutador simples, digamos, $c = [x, y]$ então por (8.3), (8.4) e Proposições 9.1 e 8.5, temos

$$\begin{aligned}
[x,y]g \otimes [x,y]g &= ([x,y] \otimes g)^g ([x,y] \otimes [x,y])^{g^2} (g \otimes g)(g \otimes [x,y])^g \\
&= (g \otimes g)([x,y] \otimes g)(g \otimes [x,y])]^g \\
&= (g \otimes g)[(x \otimes y)^{-1}(x \otimes y)^g (x \otimes y)^{-g}(x \otimes y)]^g \\
&= g \otimes g
\end{aligned}$$

Em geral, se c é um produto de comutadores, digamos, $c = [x_1, y_1] \dots [x_n, y_n]$ então por indução obtemos

$$cg \otimes cg = [x_1, y_1] \dots [x_n, y_n]g \otimes [x_1, y_1] \dots [x_n, y_n]g = g \otimes g$$

De modo análogo, $gc \otimes gc = g \otimes g$ ∎

Proposição 9.3. Seguindo a notação de 7.1, existe um homomorfismo bem definido

$$\psi : \Gamma(G^{ab}) \to G \otimes G$$

tal que $(\gamma\overline{g})\psi = g \otimes g$ onde $\overline{g}$ denota a classe lateral de g módulo G'.

Demonstração. Seja $\varphi : X \to G \otimes G$ dada por $(\gamma\overline{g})\varphi = g \otimes g$ onde $X = \{\gamma\overline{g}; g \in G\}$. Notemos que se $g_1, g_2 \in G$ são tais que $\overline{g}_1 = \overline{g}_2$ então $g_1 = cg_2$ para algum $c \in G'$. Daí, pelo Lema anterior

$$(\gamma\overline{g}_1)\varphi = g_1 \otimes g_1 = cg_2 \otimes cg_2 = g_2 \otimes g_2 = (\gamma\overline{g}_2)\varphi$$

Logo φ está bem definida. Resta verificarmos que φ é consistente com as relações definidoras (7.1) e (7.2) de $\Gamma(G^{ab})$. Pelas Proposições 9.1 e 8.5 (a) temos para todo $g \in G$ que

$$(\gamma(\overline{g^{-1}}))\varphi = g^{-1} \otimes g^{-1} = (g^{-1} \otimes g^{-1})^g = (g \otimes g^{-1})^{-1} = (g \otimes g)^{g^{-1}} = g \otimes g = (\gamma\overline{g})\varphi$$

e portanto φ é consistente com a relação (7.1). Além disso, para todo $a, b, c \in G$

$$\begin{aligned}
(\gamma(\overline{abc}))\varphi(\gamma\overline{a})\varphi(\gamma\overline{b})\varphi(\gamma\overline{c})\varphi &= (abc \otimes abc)(a \otimes a)(b \otimes b)(c \otimes c) \\
&= (ab \otimes c)^c (ab \otimes ab)(c \otimes bc)(c \otimes a)^{bc}(a \otimes a) \\
&\quad (b \otimes b)(c \otimes c) \qquad \text{(por (8.3) e (8.4))}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a\otimes c)^{bc}(b\otimes c)^{c}(ab\otimes ab)(c\otimes c)(c\otimes b)^{c}\\
&\quad (c\otimes a)^{bc}(a\otimes a)(b\otimes b)(c\otimes c)\\
&= (ab\otimes ab)(a\otimes c)^{bc}(b\otimes c)^{c}(b\otimes b)^{c^2}(c\otimes c)\\
&\quad (c\otimes b)^{c}(c\otimes a)^{bc}(a\otimes a)(c\otimes c)\\
&= (ab\otimes ab)(a\otimes c)^{bc}(bc\otimes bc)(c\otimes a)^{bc}(a\otimes a)\\
&\quad (c\otimes c) \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(por (8.3) e (8.4))}\\
&= (ab\otimes ab)(bc\otimes bc)[(a\otimes c)^{c}(a\otimes a)^{c^2}(c\otimes c)(c\otimes a)^{c}]^{b^c}\\
&= (ab\otimes ab)(bc\otimes bc)(ac\otimes ac)\\
&= (\gamma\overline{ab})\varphi(\gamma\overline{bc})\varphi(\gamma\overline{ac})\varphi
\end{aligned}
$$

Logo, φ é consistente também com a relação (7.2) e portanto existe um homomorfismo $\psi : \Gamma(G^{ab}) \to G\otimes G$ estendendo φ. ■

É óbvio que $Im\psi \subseteq J_2(G)$ e como $J_2(G)$ é um subgrupo central de $G\otimes G$ temos que $Im\psi$ é normal em $G\otimes G$. Assim podemos pensar no grupo quociente $G\otimes G/Im\psi$. Chamamos este grupo de *quadrado exterior* de G e o denotamos por $G\wedge G$. Como $Im\psi \subseteq J_2(G)$, pela Proposição 3.7, existe um homomorfismo $k' : G\wedge G \to G'$ tal que $\rho k' = k$ onde $\rho : G\otimes G \to G\otimes G/Im\psi = G\wedge G$ é a projeção natural. Os resultados de [14] mostram que o núcleo de k' é isomorfo ao multiplicador de Schur $M(G)$.

Sejam $i : J_2(G) \to G\otimes G$ a inclusão e $\beta = i\rho\alpha^{-1}$ onde α é o isomorfismo de $M(G)$ sobre $Nuc(k')$. Então temos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas e extensões centrais como colunas

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Gamma(G^{ab}) & \xrightarrow{\psi} & J_2(G) & \xrightarrow{\beta} & M(G) & \to & 1\\
=\downarrow & & i\downarrow & & \downarrow\alpha & & \\
\Gamma(G^{ab}) & \xrightarrow{\psi} & G\otimes G & \xrightarrow{\rho} & G\wedge G & \to & 1\\
 & & k\downarrow & & \downarrow k' & & \\
 & & G' & \overrightarrow{=} & G' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & &
\end{array}
\qquad (\mathrm{I})
$$

Segue deste diagrama o seguinte resultado:

Proposição 9.4. Se G é um grupo finito (p-grupo finito, p primo) então $G \otimes G$ também é finito (p-grupo finito).

Demonstração. Se G é um grupo finito então $M(G)$ e $\Gamma(G^{ab})$ também são. Segue então da primeira linha do diagrama (I) que $J_2(G)$ é finito e como G' também é finito, concluímos da penúltima coluna de (I) que $G \otimes G$ é um grupo finito. Similarmente, se G é um p-grupo finito então $G \otimes G$ também é. ∎

Na seção 11 veremos que esse resultado vale também para o caso mais geral, ou seja, se G e H são grupos (ou p-grupos) finitos então $G \otimes H$ também é. Agora vejamos como fica o quadrado tensorial não abeliano de um grupo livre.

Proposição 9.5. Se G é um grupo livre então $G \otimes G$ é isomorfo ao produto direto $G' \times \Gamma(G^{ab})$.

Demonstração. Primeiro notemos que pela Proposição 8.3 existe um epimorfismo $\phi : G \otimes G \to G^{ab} \otimes G^{ab}$ tal que $g_1 \otimes g_2 \mapsto \overline{g}_1 \otimes \overline{g}_2$, onde $\overline{g} = G'g$. Seja $\varphi = \psi\phi$. Sendo G um grupo livre, G^{ab} e $G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}$ são abelianos livres. Se $\{\overline{g}_i\}$ é uma base para G^{ab} então $Y = \{\overline{g}_i \otimes \overline{g}_j, (\overline{g}_k \otimes \overline{g}_\ell)(\overline{g}_\ell \otimes \overline{g}_k) \mid i \leq j, k < \ell\}$ é uma base para $G^{ab} \otimes G^{ab}$. Agora

$$(\gamma\overline{g}_i)\varphi = \overline{g}_i \otimes \overline{g}_i \in Y \quad \text{e} \quad (W(\overline{g}_j, \overline{g}_k))\varphi = (\overline{g}_j \otimes \overline{g}_k)(\overline{g}_k \otimes \overline{g}_j) \in Y$$

para todo i, j, k com $j < k$. Vemos então que φ é um monomorfismo e conseqüentemente que ψ é injetora. Logo $Im\psi \cong \Gamma(G^{ab})$. Sendo G' livre também temos que a penúltima coluna do diagrama (I) "splits". De fato, seja X uma base livre para G'. Como $k : G \otimes G \to G'$ é sobrejetora, para cada $x \in X$ existe $g_x \in G \otimes G$ tal que $(g_x)k = x$. Definimos uma função $\theta : X \to G \otimes G$ pondo $x\theta = g_x$. Sendo G' livre sobre X, θ se estende a um homomorfismo $\theta' : G' \to G \otimes G$. É claro que $\theta' k = Id_{G'}$. Logo a extensão

$$1 \to J_2(G) \xrightarrow{i} G \otimes G \xrightarrow{k} G' \to 1$$

"splits". Assim, pela Proposição 4.4, $J_2(G) = Nuck$ tem complemento C em $G \otimes G$ e como $J_2(G) \leq Z(G \otimes G), C$ é normal em $G \otimes G$. Daí

$$G \otimes G \cong G' \times Nuck = G' \times Im\psi \cong G' \times \Gamma(G^{ab}) \quad \blacksquare$$

Notemos que se G é livre de posto finito $n \geq 2$ então G' é livre de posto infinito enumerável e $\Gamma(G^{ab})$ é abeliano livre de posto $n(n+1)/2$ (Proposição 7.3). Se G é livre de posto 1 então $G \otimes G \cong \mathbb{Z}$.

Proposição 9.6. Se G é um grupo no qual G' tem complemento cíclico C então $G \otimes G$ é isomorfo ao produto direto $(G \wedge G) \times C$.

Demonstração. Seja $C = < x >$. A projeção natural $G \rightarrow G^{ab}$ leva C isomorficamente a G^{ab}. Com efeito, se $c_1, c_2 \in C$ são tais que $G'c_1 = G'c_2$ então $c_1 c_2^{-1} = g$ para algum $g \in G'$. Logo devemos ter $c_1 = c_2$ pois caso contrário $C \cap G = \{e\}$ contrariando o fato de C ser complemento de G'. É óbvio que a projeção $G \rightarrow G^{ab}$ leva C sobre G^{ab}, já que $G = G'C$. Assim podemos escrever $C = G^{ab}$. A seqüência exata

$$\Gamma(C) \xrightarrow{\psi} G \otimes G \xrightarrow{\rho} G \wedge G \rightarrow 1$$

mostra que $Nuc\rho = Im\psi$ é gerado por $x \otimes x$. Temos então que a função canônica

$$\xi : G \otimes G \rightarrow C \otimes C \cong C$$

leva $Nuc\rho$ sobre $C \otimes C$. Além disso, a restrição de ξ a $Nuc\rho$, $\xi \mid_{Nuc\rho}$, é um isomorfismo. De fato, se $C = < x >$ é infinito então $Nuc\rho = < x \otimes x >$ também é. Além disso, C e $Nuc\rho$ são grupos livres de posto 1 e portanto isomorfos. Se C é um grupo finito e n é a ordem de x então $x \otimes x$ tem ordem no máximo n já que $(x \otimes x)^n = x \otimes x^n$. Logo $\mid Nuc\rho \mid \ \leq \ \mid C \otimes C \mid \ = \ \mid C \mid$ e como $\xi \mid_{Nuc\rho}$ é sobrejetora temos $Nuc\rho \cong C \otimes C \cong C$. Assim $\xi \mid_{Nuc\rho}$ é um isomorfismo e portanto existe uma retração

$$\alpha = \xi(\xi \mid_{Nuc\rho})^{-1} : G \otimes G \rightarrow Nuc\rho,$$

cujo núcleo é $Nuc\xi$. Mas $Nuc\xi \cong G \wedge G$ e então

$$G \otimes G \cong Nuc\alpha \times Nuc\rho \cong (G \wedge G) \times C \quad \blacksquare$$

10. Propriedades

Nesta seção veremos algumas propriedades de produtos tensoriais não abelianos de grupos. Os dois primeiros resultados serão úteis na prova da finitude do produto tensorial de grupos finitos sendo o primeiro deles de G.J. Ellis [7] e o segundo de D. Guin [6].

Proposição 10.1. Sejam duas extensões centrais

$$1 \longrightarrow M \xrightarrow{i_1} G \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow 1$$
$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i_2} H \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 1$$

tais que G e H são grupos cada um atuando compativelmente sobre o outro, A e B também, α, β são homomorfismos que preservam as ações com $Nuc\alpha, Nuc\beta$ atuando trivialmente sobre H, G respectivamente. Então existe uma seqüência exata

$$(G \otimes N) \times (M \otimes H) \xrightarrow{\tilde{\theta}} G \otimes H \xrightarrow{\alpha\otimes\beta} A \otimes B \longrightarrow 1$$

na qual $Im\tilde{\theta}$ é central em $G \otimes H$.

Demonstração. Pela Proposição 8.3, α e β induzem o epimorfismo

$$\begin{aligned} \alpha \otimes \beta : G \otimes H &\longrightarrow A \otimes B \\ g \otimes h &\longmapsto g\alpha \otimes h\beta \end{aligned}$$

A partir das ações de G sobre H e de H sobre G definimos ações de G sobre N e de N sobre G da seguinte forma: N age sobre G por

$$g^n := g^{ni_2} = g \ , \quad g \in G, n \in N \tag{10.1}$$

e como $(ni_2)^g \in Nuc\beta = Imi_2$ para todo $n \in N$ e $g \in G$, G age sobre N por

$$n^g := ((ni_2)^g)i_2^{-1} \tag{10.2}$$

onde i_2^{-1} é o homomorfismo inverso de $i_2 : N \longrightarrow Imi_2$. É fácil verificar que (10.1) e (10.2) são ações. Para todo $g, g_1 \in G$ e $n, n_1 \in N$ temos

$$g_1^{n^g} = g_1^{(n^g)i_2} = g_1^{((ni_2)^g)i_2^{-1}i_2} = g_1^{g^{-1}(ni_2)g} = g_1^{g^{-1}ng}$$

e

$$
\begin{aligned}
n_1^{g^n} &= ((n_1 i_2)^{g^n}) i_2{}^{-1} = ((n_1 i_2)^{g^{ni_2}}) i_2^{-1} = ((n_1 i_2)^{(ni_2)^{-1} g (ni_2)}) i_2^{-1} = \\
&= ((ni_2)^{-1} ((n_1^{n^{-1}}) i_2)^g (ni_2)) i_2^{-1} = (((n_1^{n^{-1}}) i_2)^g i_2^{-1})^n = n_1^{n^{-1} gn}
\end{aligned}
$$

Logo as ações (10.1) e (10.2) são compatíveis e assim podemos pensar no produto tensorial (não abeliano) $G \otimes N$. Da mesma forma $M \otimes H$ está definido. Agora definimos

$$
\begin{aligned}
\theta : X &\rightarrow G \otimes H \\
(g \otimes n, e) &\mapsto g \otimes ni_2 \\
(e, m \otimes h) &\mapsto mi_1 \otimes h
\end{aligned}
$$

onde $X = \{(g \otimes n, e), (e, m \otimes h); g \in G, n \in N, m \in M, h \in H\}$. Queremos mostrar que existe um homomorfismo $\tilde{\theta} : (G \otimes N) \times (M \otimes H) \rightarrow G \otimes H$ estendendo θ. Para isso devemos provar que θ é consistente com as seguintes relações:

(i) $(g \otimes n, e)(e, m \otimes h) = (e, m \otimes h)(g \otimes n, e)$

(ii) $(g_1 g \otimes n, e) = (g_1^g \otimes n^g, e)(g \otimes n, e)$

(iii) $(g \otimes n_1 n, e) = (g \otimes n, e)(g^n \otimes n_1^n, e)$

(iv) $(e, m_1 m \otimes h) = (e, m_1^m \otimes h^m)(e, m \otimes h)$

(v) $(e, m \otimes h_1 h) = (e, m \otimes h)(e, m^h \otimes h_1^h)$.

para todo $g, g_1 \in G, n, n_1 \in N, m, m_1 \in M, h, h_1 \in H$.

(i) Pela Proposição 8.5 (b) e hipótese

$$
\begin{aligned}
(g \otimes n, e)\theta (e, m \otimes h)\theta &= (g \otimes ni_2)(mi_1 \otimes h) \\
&= (mi_1 \otimes h)(g \otimes ni_2)^{(mi_1)^{-1}(mi_1)^h} \\
&= (mi_1 \otimes h)(g \otimes ni_2) \\
&= (e, m \otimes h)\theta (g \otimes n, e)\theta
\end{aligned}
$$

(ii) Por (8.3) e (10.2) temos

$$
\begin{aligned}
(g_1 g \otimes n, e)\theta &= g_1 g \otimes ni_2 = (g_1^g \otimes (ni_2)^g)(g \otimes ni_2) \\
&= (g_1^g \otimes (n^g) i_2)(g \otimes ni_2) \\
&= (g_1^g \otimes n^g, e)\theta (g \otimes n, e)\theta
\end{aligned}
$$

(iii), (iv) e **(iv)** são análogos. Agora mostraremos que $Im\tilde{\theta} = Nuc(\alpha \otimes \beta)$. Notemos que para todo $g \in G, n \in N, m \in M$ e $h \in H$

$$(g \otimes n, m \otimes h)\tilde{\theta}(\alpha \otimes \beta) = e$$

e conseqüentemente $Im\tilde{\theta} \leq Nuc(\alpha \otimes \beta)$. Além disso, como $Imi_2 = Nuc\beta$ atua trivialmente sobre G temos para todo $g, g_1 \in G, h_1 \in H, n \in N$

$$\begin{aligned}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes n, e)\tilde{\theta} &= (g_1 \otimes h_1)(g \otimes ni_2) = (g \otimes ni_2)(g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^{ni_2}} \\ &= (g \otimes ni_2)(g_1 \otimes h_1) = (g \otimes n, e)\tilde{\theta}(g_2 \otimes h_1)\end{aligned}$$

e similarmente

$$(g_1 \otimes h_1)(e, m \otimes h)\tilde{\theta} = (e, m \otimes h)\tilde{\theta}(g_1 \otimes h_1)$$

para todo $g_1 \in G, h, h_1 \in H, m \in M$. Conseqüentemente $Im\tilde{\theta}$ é central em $G \otimes H$ e, em particular, normal em $G \otimes H$. Assim, basta mostrarmos que a função induzida

$$\mu : (G \otimes H)/Im\tilde{\theta} \to A \otimes B$$

é um isomorfismo e isso é feito construindo um homomorfismo inverso para μ. Para cada $a \in A, b \in B$ escolhamos $a' \in G, b' \in H$ tais que $(a')\alpha = a$ e $(b')\beta = b$. Definamos

$$\begin{aligned}\nu' : A \times B &\longrightarrow (G \otimes H)/Im\tilde{\theta} \\ (a, b) &\mapsto (a' \otimes b')\pi\end{aligned} \tag{10.3}$$

onde $\pi : G \otimes H \to G \otimes H/Im\tilde{\theta}$ é a projeção natural. Devemos mostrar que (10.3) independe da escolha de a' e b'. Sejam então $g \in G, h \in H$ tais que $g\alpha = (a')\alpha = a$ e $h\beta = (b')\beta = b$. Como $a'g^{-1} \in Nuc\alpha, b'h^{-1} \in Nuc\beta$ existem $x \in Nuc\alpha, y \in Nuc\beta$ tais que $a' = xg, b' = yh$ e então

$$(a' \otimes b')\pi = (xg \otimes yh)\pi = ((x \otimes h)^g (x \otimes y)^{hg} (g \otimes h)(g \otimes y)^h)\pi$$

Uma vez que $(x^{hg})\alpha = (x\alpha)^{h\beta} = e$, i.e., $x^{hg} \in Nuc\alpha = Imi_1$ e como $x^g = x \in Imi_1$ e $y^h \in Imi_2$ segue que $(a' \otimes b')\pi = (g \otimes h)\pi$. Logo ν' é uma função bem definida. Agora sejam $a, a_1 \in A, b, b_1 \in B$. Como α, β preservam as ações,

$$(a_1^a, b^a)\nu'(a, b)\nu' = (((a_1')^{a'} \otimes (b')^{a'})(a' \otimes b'))\pi = (a_1'a' \otimes b')\pi = (a_1 a,\ b)\nu'.$$

Analogamente

$$(a,b)\nu'(a^b,b_1^b)\nu' = (a,b_1b)\nu'$$

Logo ν' é uma biderivação. O homomorfismo $\nu : A \otimes B \to (G \otimes H)/Im\tilde{\theta}$ claramente satisfaz $\nu\mu = Id_{A\otimes B}$. Além disso, se $g \in G, h \in H$ então

$$((Im\tilde{\theta}(g \otimes h))\mu\nu = (g\alpha \otimes h\beta)\nu = (g \otimes h)\pi = (Im\tilde{\theta})(g \otimes h)$$

e portanto μ é um isomorfismo. ∎

Em particular, dada uma extensão central

$$1 \to A \xrightarrow{inc} K \xrightarrow{\nu} G \to 1$$

existe uma seqüência exata

$$(A \otimes K) \times (K \otimes A) \xrightarrow{i} K \otimes K \xrightarrow{\nu\otimes\nu} G \otimes G \to 1$$

na qual Imi é central.

Sejam G um grupo e $\mathbb{Z}G$ o anel de grupo de G sobre $\mathbb{Z}$. Um elemento típico de $\mathbb{Z}G$ tem a forma $\sum_{g\in G} x_g g$ onde os $x_g \in \mathbb{Z}$ e apenas um número finito deles é diferente de zero. Consideremos o seguinte homomorfismo de anéis, chamado de aplicação de aumento

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathbb{Z}G &\to \mathbb{Z} \\ \sum_{g\in G} x_g g &\mapsto \sum_{g\in G} x_g \end{aligned}$$

O núcleo deste homomorfismo é dito o *ideal de aumento* de G e é denotado por $I(G)$. É fácil vermos que $I(G)$ é gerado como $\mathbb{Z}$-módulo pelo conjunto $\{g - e; g \in G \setminus \{e\}\}$. Também $I(G)$ (como ideal de $\mathbb{Z}G$) é um $\mathbb{Z}G$-módulo.

Se A é um grupo abeliano com uma ação de G, façamos $r = \sum x_g g \in \mathbb{Z}G$ operar sobre um elemento $a \in A$ por

$$a.\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{g\in G} x_g a^g$$

Facilmente se verifica que para todo $a, b \in A$ e $r, s \in \mathbb{Z}G$

$$(a+b).r = a.r + b.r,\ a.(r+s) = a.r + a.s,\ a.(rs) = (a.r).s,\ a.e = a$$

de modo que A é um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita.

Proposição 10.2. Sejam A e G dois grupos com A abeliano e G A-trivial. Então

$$A \otimes G \cong A \otimes_{\mathbb{Z}G} I(G)$$

Demonstração. Vamos denotar o elemento $a \otimes (g - e) \in A \otimes_{\mathbb{Z}G} I(G)$ por $a \otimes' (g - e)$ a fim de evitarmos confusão. Em $A \otimes G$ consideraremos A um grupo multiplicativo e em $A \otimes_{\mathbb{Z}G} I(G)$ aditivo. Sendo G A-trivial temos pela Proposição 8.7 (b) que $A \otimes G$ é um grupo abeliano. Definamos

$$\begin{aligned} \varphi : A \otimes G &\rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}G} I(G) \\ a \otimes g &\mapsto a \otimes' (g - e) \end{aligned}$$

Devemos verificar que φ é consistente com as relações definidoras de $A \otimes G$. Sejam $a \in A$ e $g_1, g_2 \in G$. Então

$$\begin{aligned} (a \otimes g_1 g_2)\varphi &= a \otimes' (g_1 g_2 - e) \\ &= a \otimes' [(g_1 - e)g_2 + (g_2 - e)] \\ &= a \otimes' g_2.(g_1 - e)^{g_2} + a \otimes' (g_2 - e) \\ &= a.g_2 \otimes' (g_1 - e)^{g_2} + a \otimes' (g_2 - e) \\ &= a^{g_2} \otimes' (g_1^g - e) + a \otimes' (g_2 - e) \\ &= (a^{g_2} \otimes g_1^{g_2})\varphi + (a \otimes g_2)\varphi \end{aligned}$$

Também se $a, b \in A$ e $g \in G$

$$(ab \otimes g)\varphi = (a + b) \otimes' (g - e) = a \otimes' (g - e) + b \otimes' (g - e) = (a^b \otimes g^b)\varphi + (b \otimes g)\varphi$$

uma vez que A é abeliano e G é A-trivial. Logo φ é um homomorfismo. A inversa deve ser

$$\begin{aligned} \varphi' : A \otimes_{\mathbb{Z}G} I(G) &\rightarrow A \otimes G \\ a \otimes' \sum_{g \in G} x_g g &\mapsto \prod_{g \in G} (a \otimes g)^{x_g} \end{aligned}$$

Vamos mostrar que φ' é consistente com as seguintes relações:

(i) $(a+b)\otimes u = a\otimes u + b\otimes u,\ \forall a,b\in A,\ \forall u\in I(G)$

(ii) $a\otimes(u+v) = a\otimes u + a\otimes v,\ \forall a\in A,\ \forall u,v\in I(G)$

(iii) $a.r\otimes u = a\otimes r.u\quad \forall a\in A,\ \forall u\in I(G),\ \forall r\in \mathbb{Z}G.$

(i) Sejam $a,b\in A,\ u=\sum_{g\in G} x_g g\in I(G)$. Então

$$\begin{aligned}((a+b)\otimes' u)\varphi' &= \prod_{g\in G}(ab\otimes g)^{x_g}\\ &= \prod_{g\in G}[(a\otimes g)(b\otimes g)]^{x_g}\\ &= \prod_{g\in G}(a\otimes g)^{x_g}\prod_{g\in G}(b\otimes g)^{x_g}\\ &= (a\otimes' u)\varphi'(b\otimes' u)\varphi'.\end{aligned}$$

(ii) é análogo a (i).

(iii) Sejam $a\in A, u=\sum_{g\in G} x_g g\in I(G), r=\sum_{g_1\in G} y_{g_1}g_1\in \mathbb{Z}G$. Então

$$\begin{aligned}(a.r\otimes' u)\varphi' &= (\sum_{g_1\in G} y_{g_1}a^{g_1}\otimes \sum_{g\in G} x_g g)\varphi'\\ &= \prod_{g\in G}(\prod_{g_1\in G}((a^{g_1})^{y_{g_1}}\otimes g)^{x_g}\\ &= \prod_{g\in G}\prod_{g_1\in G}(a^{g_1}\otimes g)^{x_g y_{g_1}}\\ &= \prod_{g_1\in G}\prod_{g\in G}[(a\otimes g^{g_1^{-1}})^{g_1}]^{x_g y_{g_1}}\\ &= \prod_{g_1\in G}\prod_{g\in G}[(a\otimes g_1)^{-1}(a\otimes g_1 g)]^{x_g y_{g_1}} \qquad \text{(Por (8.4) e Proposição 8.7 (a))}\\ &= \prod_{g_1\in G}\prod_{g\in G}(a\otimes g_1)^{-x_g y_{g_1}}\prod_{g_1\in G}\prod_{g\in G}(a\otimes g_1 g)^{x_g y_{g_1}}\\ &= \prod_{g_1\in G}(a\otimes g_1)^{-y_{g_1}\sum x_g}\prod_{g_1\in G}\prod_{g\in G}(a\otimes g_1 g)^{x_g y_{g_1}}\\ &= \prod_{g_1\in G}\prod_{g\in G}(a\otimes g_1 g)^{x_g y_{g_1}} \qquad \text{(pois } \sum_{g\in G} x_g = 0)\\ &= \prod_{g_2\in G}(a\otimes g_2)^{z_{g_2}}\end{aligned}$$

onde $z_{g_2} = \sum_{g_1 g = g_2} y_{g_1} x_g$. Agora como $r.u = \sum z_{g_2} g_2$ temos que

$$(a \otimes' r.u)\varphi' = \prod_{g_2 \in G} (a \otimes g_2)^{z_{g_2}} = (a.r \otimes' u)\varphi'$$

Logo φ' é um homomorfismo e é claro que $\varphi\varphi' = Id$. Se $u = \sum_{g \in G} x_g g \in I(G)$ então $\sum_{g \in G} x_g = 0$ e daí $u = \sum_{g \in G} x_g(g - e)$. Assim, se $a \in A$

$$(a \otimes u)\varphi'\varphi = (\prod_{g \in G} (a \otimes g)^{x_g})\varphi = \sum_{g \in G} x_g (a \otimes' (g - e)) = a \otimes u$$

Portanto, φ é um isomorfismo e a prova está completa. ∎

R. Brown, D.L. Johnson e E.F. Robertson [3] provaram que sob certas condições favoráveis, o produto tensorial não-abeliano se distribui sobre produtos diretos.

Proposição 10.3. Sejam A, B, C grupos com ações dadas de A sobre B e C e de B e C sobre A. Suponhamos que essas últimas ações

(a) comutem: $a^{bc} = a^{cb}$, de modo que $B \times C$ atue sobre A;

(b) induzam a ação trivial de B sobre $A \otimes C$: $(a \otimes c)^b = a \otimes c$ e

(c) induzam a ação trivial de C sobre $A \otimes B$: $(a \otimes b)^c = a \otimes b$, para todo $a \in A$, $b \in B, c \in C$. Então

$$A \otimes (B \times C) \cong (A \otimes B) \times (A \otimes C)$$

Demonstração. Notemos que (b) e (c) induzem uma ação de $B \times C$ sobre $(A \otimes B) \times (A \otimes C)$ tal que

$$(a \otimes b_1, a_1 \otimes c_1)^{(b,c)} = ((a \otimes b_1)^b, (a_1 \otimes c_1)^c)$$

Seja $X = \{a \otimes (b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$ e definamos

$$\begin{aligned} \theta : X &\longrightarrow (A \otimes B) \times (A \otimes C) \\ a \otimes (b, c) &\longmapsto (a \otimes b, a \otimes c) \end{aligned}$$

Verificaremos que θ é consistente com as relações definidoras (8.3) e (8.4) de $A\otimes(B\times C)$. Por (8.3)

$$\begin{aligned}(a_1a\otimes(b,c))\theta &= (a_1a\otimes b, a_1a\otimes c)\\ &= (a_1^a\otimes b^a, a_1^a\otimes c^a)(a\otimes b, a\otimes c)\\ &= ((a_1\otimes(b,c))^a)\theta(a\otimes(b,c))\theta\end{aligned}$$

e por (8.4)

$$\begin{aligned}(a\otimes(b_1,c_1)(b,c))\theta &= (a\otimes(b_1b,c_1c))\theta\\ &= (a\otimes b_1b, a\otimes c_1c)\\ &= (a\otimes b, a\otimes c)((a\otimes b_1)^b,(a\otimes c_1)^c)\\ &= (a\otimes b, a\otimes c)(a\otimes b_1, a\otimes c_1)^{(b,c)}\\ &= (a\otimes(b,c))\theta((a\otimes(b_1,c_1))^{(b,c)})\theta\end{aligned}$$

Logo existe um homomorfismo $\alpha: A\otimes(B\times C)\to(A\otimes B)\times(A\otimes C)$ estendendo θ. A função inversa de α deve ser

$$\begin{aligned}\beta:(A\otimes B)\times(A\otimes C) &\to A\otimes(B\times C)\\ (a\otimes b,e) &\mapsto a\otimes(b,e)\\ (e,a\otimes c) &\mapsto a\otimes(e,c)\end{aligned}$$

Devemos verificar que

(i) β é consistente com as relações (8.3) e (8.4)

(ii) as imagens sob β de $a\otimes b$ e $a_1\otimes c$ comutam

(iii) $\alpha\beta$ e $\beta\alpha$ são funções identidades.

Para todo $a_1,a\in A, b\in B$ e $c\in C$

$$\begin{aligned}(a_1a\otimes b,e)\beta &= a_1a\otimes(b,e) = (a_1\otimes(b,e))^a(a\otimes(b,e))\\ &= ((a_1\otimes b)^a,e)\beta(a\otimes b,e)\beta\end{aligned}$$

e analogamente $(e,a_1a\otimes c)\beta=(e,(a_1\otimes c)^a)\beta(e,a\otimes c)\beta$. Por (8.4)

$$\begin{aligned}(a\otimes b_1b,e)\beta &= a\otimes(b_1b,e) = a\otimes(b_1,e)(b,e)\\ &= (a\otimes(b,e))(a\otimes(b_1,e))^{(b,e)}\end{aligned}$$

enquanto

$$(a \otimes b, e)\beta((a \otimes b_1)^b, e)\beta = (a \otimes (b,e))(a^b \otimes (b_1^b, e))$$

como exigido, e similarmente para $(e, a \otimes c_1 c)$. Verifiquemos (ii)

$$\begin{aligned}
(a \otimes b, e)\beta(e, a \otimes c)\beta &= (a \otimes (b,e))(a_1 \otimes (e,c)) \\
&= (a_1 \otimes (e,c))(a \otimes (b,e))^{(e,c)^{-a}(e,c)} && \text{(por 8.5(b))} \\
&= (a_1 \otimes (e,c))(a \otimes (b,e)) && \text{(por (c))} \\
&= (e, a_1 \otimes c)\beta(a \otimes b, e)\beta.
\end{aligned}$$

Agora como

$$(a \otimes b, a \otimes c)\beta = a \otimes (e,c)(b,e) = a \otimes (b,c)$$

segue que $\alpha\beta = Id$. Que $\beta\alpha = Id$ é óbvio e assim α é um isomorfismo, como queríamos. ■

Deste resultado e da Proposição 8.4 obtemos que

$$(B \times C) \otimes A \cong (B \otimes A) \times (C \otimes A)$$

Sejam G e H grupos com cada um atuando trivialmente sobre o outro e sobre si mesmo por conjugação, de modo que $G \otimes H, H \otimes G$ são produtos tensoriais usuais (Proposição 8.10). Nestas condições temos

Proposição 10.4.

$$(G \times H) \otimes (G \times H) = (G \otimes G) \times (G \otimes H) \times (H \otimes G) \times (H \otimes H)$$

Demonstração. Uma vez que G atua trivialmente sobre H temos $H \otimes H$ G-trivial. Também $G \otimes H$ é G-trivial (pois é um produto tensorial usual) e como as ações de G e H sobre H comutam segue da Proposição 10.3 que existe um isomorfismo

$$\alpha : (G \times H) \otimes H \to (G \otimes H) \times (H \otimes H)$$

Notemos que α é tal que $(x^g)\alpha = (x\alpha)^g$ para todo $x \in (G \times H) \otimes H$ e $g \in G$ e como $(G \otimes H) \times (H \otimes H)$ é G-trivial $(G \times H) \otimes H$ também é. Similarmente, H atua trivialmente sobre $H \otimes G, G \otimes G$ e $(G \times H) \otimes G$. Assim, pelas Proposições 10.3 e 8.4

$$\begin{aligned}(G \times H) \otimes (G \times H) &\cong ((G \times H) \otimes G) \times ((G \times H) \otimes H) \\ &\cong (G \otimes (G \times H)) \times (H \otimes (G \times H)) \\ &\cong (G \otimes G) \times (G \otimes H) \times (H \otimes G) \times (H \otimes H) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Se K é um grupo nilpotente finito então segue das Proposições 2.8, 10.4 e 6.8 que $K \otimes K$ é o produto direto dos quadrados tensoriais dos subgrupos de Sylow de K e portanto nilpotente. Veremos a seguir que se G é um grupo nilpotente então $G \otimes G$ também é.

Lema 10.5. Seja N um subgrupo normal de um grupo G e consideremos ações de G sobre N e de N sobre G por conjugação. Então:

Demonstração. Sendo N e G' subgrupos normais de G é fácil ver que todo elemento de $[N, G'] \otimes G'$ se escreve como um produto de elementos da forma $[n, g'] \otimes [g_1, g_2]$ com $n \in N, g' \in G', g_1, g_2 \in G$. Segue então da Proposição 8.5 (e) que

$$[N, G'] \otimes G' \subseteq [N \otimes G', G \otimes G]$$

e como obviamente vale a inclusão contrária temos o resultado desejado. $\blacksquare$

Proposição 10.6. Se G é um grupo nilpotente então $G \otimes G$ é nilpotente e

$$c\ell(G \otimes G) = c\ell(G') \quad \text{ou} \quad c\ell(G') + 1.$$

Demonstração. Seja $c = c\ell(G')$ e consideremos a série central inferior de $G \otimes G$

$$G \otimes G = \gamma_1(G \otimes G) \geq \gamma_2(G \otimes G) \geq \ldots \geq \gamma_i(G \otimes G) \geq \ldots$$

Temos pelo lema anterior que

$$\gamma_2(G \otimes G) = [G \otimes G, G \otimes G] = \gamma_1(G') \otimes G'$$

Daí

$$\gamma_3(G \otimes G) = [\gamma_1(G') \otimes G', G \otimes G] = \gamma_2(G') \otimes G'$$

e por indução

$$\gamma_i(G \otimes G) = \gamma_{i-1}(G') \otimes G'$$

Como $\gamma_{c+1}(G') = \{e\}$ devemos ter $c\ell(G \otimes G) \leq c\ell(G') + 1$. Agora veremos que $c\ell(G \otimes G) \geq c\ell(G')$. Para isso, consideremos a aplicação $\phi : \gamma_{c-1}(G') \times G' \to \gamma_c(G')$ dada por $(a,b)\phi = [a,b], a \in \gamma_{c-1}(G'), b \in G'$. Obviamente ϕ é uma biderivação sobrejetora e, assim, o homomorfismo $\phi^* : \gamma_{c-1}(G') \otimes G' \to \gamma_c(G')$ induzido por ϕ também é sobrejetor. Como $\gamma_c(G') \neq \{e\}$ segue que $\gamma_c(G \otimes G) \neq \{e\}$ e portanto que $c\ell(G \otimes G) \geq c\ell(G')$. Uma vez que

$$c\ell(G') \leq c\ell(G \otimes G) \leq c\ell(G') + 1$$

temos o que queríamos. ∎

11. A Finitude do Produto Tensorial Não Abeliano de Grupos Finitos

G.J. Ellis [8] provou que o produto tensorial não abeliano de grupos (ou p-grupos) finitos é finito (ou p-grupo). Ele primeiramente demonstra este resultado para o caso especial em que G e H são subgrupos normais finitos de algum grupo M, onde cada um deles atua sobre o outro por conjugação em M. Esta demonstração usa duas seqüências exatas de R. Brown e J.L. Loday ([5], Teoremas 2.12 e 4.5), a saber

$$\to H_3(GH/G) \oplus H_3(GH/H) \to V \to H_2(GH) \to$$

e

$$\Gamma(G \cap H/[G,H]) \to G \otimes H \to G \wedge H \to 1$$

onde V é o núcleo da função comutador $G \wedge H \to [G,H], g \wedge h \mapsto [g,h]$. A finitude de $G \otimes H$, neste caso, segue do fato que a homologia de um grupo finito é finito (veja [17], Capítulo 10) e do Corolário 7.10. No caso em que G e H são p-grupos finitos a prova é similar. Isso também pode ser obtido a partir de um grupo introduzido por N.R. Rocco em [15], a saber

$$\mathcal{V}(G) := \langle G, G^\varphi \mid [g_1, g_2^\varphi]^{g_3} = [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^\varphi] = [g_1, g_2^\varphi]^{g_3^\varphi}, \ \forall g_1, g_2, g_3 \in G \rangle$$

onde G, G^φ são grupos isomorfos por $\varphi : g \mapsto g^\varphi$, $\forall g \in G$. Aqui denotamos $(g)\varphi$ por g^φ. Em [15], N.R. Rocco obteve o seguinte resultado: "Seja G um π-grupo finito (π um conjunto de primos), nilpotente finito ou solúvel de grau finito. Então $\mathcal{V}(G)$ é também um π-grupo finito, nilpotente ou solúvel de grau finito". E mais, que o subgrupo $[G, G^\varphi]$

de $\mathcal{V}(G)$ é isomorfo ao quadrado tensorial não abeliano $G \otimes G$. Também no caso em que G e H são subgrupos normais de um grupo M, com cada um deles atuando sobre o outro por conjugação em M tem-se $G \otimes H \cong [G, H^{\varphi}] \leq \mathcal{V}(M)$. Daí, se G e H são grupos (ou p-grupos) finitos então $G \otimes H$ também é, já que podemos supor M finito (ou p-grupo finito). Agora vamos ver a prova da finitude de $G \otimes H$ para o caso geral.

Teorema 11.1. Se G e H são grupos finitos então $G \otimes H$ também é. Se, além disso, G e H são p-grupos então $G \otimes H$ também é.

Demonstração. Sejam G e H grupos finitos e seja N o subgrupo do produto semi-direto $G \times H$ gerado pelos elementos $(g^{-1}g^h, h^{-1}h^g)$ com $g \in G, h \in H$.

Afirmação 1. N é um subgrupo normal de $G \ltimes H$. De fato, sejam $g, x \in G$ e $h, y \in H$. Então temos que

$$\begin{aligned}
(g^{-1}g^h, h^{-1}h^g)^{(x,e)} &= (x^{-1}, e)(g^{-1}g^h, h^{-1}h^g)(x, e) \\
&= ((g^{-1}g^h)^x, (h^{-1}h^g)^x) \\
&= ((g^x)^{-1}(g^x)^{h^x}, (h^x)^{-1}(h^x)^{g^x}) \in N
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(g^{-1}g^h, h^{-1}h^g)^{(e,y)} &= (e, y^{-1})(g^{-1}g^h, h^{-1}h^g)(e, y) \\
&= \left(g^{-1}g^h, y^{-g^{-1}g^h}h^{-1}h^g y\right) \\
&= \left(g^{-1}g^h, y(y^{-g^{-1}g^h})^y(h^{-1}h^g)^y\right) \\
&= \left(g^{-1}g^h(g^{-1}g^h)^{-y}(g^{-1}g^h)^y, yy^{-(g^{-1}g^h)^y}(h^{-1}h^g)^y\right) \\
&= \left(g^{-1}g^h(g^{-1}g^h)^{-y}, y^{((g^{-1}g^h)^y)^{-1}}y^{-1}\right)\left((g^{-1}g^h)^y, (h^{-1}h^g)^y\right)
\end{aligned}$$

Agora como

$$y^{((g^{-1}g^h)^y)^{-1}}y^{-1} = y^{y^{-1}(g^{-1}g^h)^{-1}y}y^{-1} = y^{-1}y^{(g^{-1}g^h)^{-1}}yy^{-1} = y^{-1}y^{(g^{-1}g^h)}$$

segue que $(g^{-1}g^h, h^{-1}h^g)^{(e,y)} \in N$. Assim $(g^{-1}g^h, h^{-1}h^g)^{(x,y)} \in N$ uma vez que $(x, y) = (x, e)(e, y)$. Logo N é normal em $G \ltimes H$.

Seja $S = \dfrac{G \ltimes H}{N}$ e denotemos a classe lateral (à direita) de (g, h) por $(\overline{g.h})$.

Afirmação 2. Existe uma ação de S sobre G e H dada por

$$g_1^{\overline{(g,h)}} = g_1^{gh} \quad \text{e} \quad h_1^{\overline{(g,h)}} = h_1^{gh}$$

para todo $g, g_1 \in G, h, h_1 \in H$. De fato, para cada $g \in G, h \in H$ a função

$$\begin{aligned} \theta_{(g,h)} : G &\to G \\ g_1 &\mapsto g_1^{gh} \end{aligned}$$

é claramente um automorfismo de G. Definamos

$$\begin{aligned} \theta : S &\to Aut(G) \\ \overline{(g,h)} &\mapsto \theta_{(g,h)} \end{aligned}$$

Se $g, g' \in G, h, h' \in H$ são tais que $\overline{(g,h)} = \overline{(g',h')}$ então $(g,h) = n.(g',h')$ para algum $n \in N$. Agora como

$$g_1^{x^{-1}x^y y^{-1} y^x} = g_1$$

para todo $g_1, x \in G$ e $y \in H$ concluímos que $\theta_{(g,h)} = \theta_{(g',h')}$, ou seja, θ está bem definida. Claramente θ é um homomorfismo de grupos.

Afirmação 3. Os homomorfismos

$$\begin{aligned} \mu : G &\to S \\ g &\mapsto \overline{(g,e)} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \nu : H &\to S \\ h &\mapsto \overline{(e,h)} \end{aligned}$$

são módulos cruzados. De fato. Sejam $g, x \in G$ e $y \in H$. Temos que

$$(g,e)^{(x,y)} = (x^{-1}, y^{-x^{-1}})(g,e)(x,y) = (g^x, y^{-g^x}y) = (g^x(g^x)^{-y}, y^{-1}y^{(g^x)^{-1}})(g^{xy}, e)$$

e como $(g^x(g^x)^{-y}, y^{-1}y^{(g^x)^{-1}}) \in N$ segue que

$$(g^{\overline{(x,y)}})\mu = \overline{(g^{xy}, e)} = \overline{(x,y)}^{-1}(g)\mu\overline{(x,y)}$$

Claramente $g^{x\mu} = x^{-1}gx$ e portanto μ é um módulo cruzado. A prova para ν é análoga.

Para todo $h \in H$ e $x \in Nuc\mu$

$$h^x = h^{\overline{(x,e)}} = h^{x\mu} = h$$

Logo $Nuc\mu$ atua trivialmente sobre H. Similarmente, a ação de $Nuc\nu$ sobre G é trivial. Além disso, para todo $g \in G$ e $x \in Nuc\mu$

$$g^x = g^{\overline{(x,e)}} = g^{x\mu} = g$$

ou seja, $Nuc\mu$ é central em G. Analogamente $Nuc\nu$ é central em H. Dessa forma, as extensões

$$1 \to Nuc\mu \to G \to Im\mu \to 1$$

$$1 \to Nuc\nu \to H \to Im\nu \to 1$$

são centrais. Para cada $g \in G, h \in H$

$$(g^h)\mu = (g^{h\nu})\mu = (g^{\overline{(e,h)}})\mu = (g\mu)^{\overline{(e,h)}} = (g\mu)^{h\nu}$$

e

$$(h^g)\nu = (h^{g\mu})\nu = (n\nu)^{g\mu},$$

ou seja, μ e ν preservam as ações.

Assim, pela Proposição 10.1 existe uma seqüência exata

$$(G \otimes Nuc\nu) \times (Nuc\mu \otimes H) \to G \otimes H \to Im\mu \otimes Im\nu \to 1.$$

Agora, como μ e ν são módulos cruzados segue que $Im\mu$ e $Im\nu$ são subgrupos normais de S. Assim, $Im\mu \otimes Im\nu$ é finito. Pela Proposição 10.2, $G \otimes Nuc\nu \cong I(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} Nuc\nu$, o qual é finito pois $I(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} Nuc\nu$ é um grupo abeliano finitamente gerado de torção. Da mesma forma, $Nuc\mu \otimes H$ é finito. Segue então da seqüência anterior que $G \otimes H$ é um grupo finito. Se G e H são também p-grupos então $I(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} Nuc\nu, Nuc\mu \otimes_{\mathbb{Z}G} I(H)$ e $Im\mu \otimes Im\nu$ são p-grupos e conseqüentemente $G \otimes H$ também. ■

12. O Quadrado Tensorial não Abeliano de um Grupo Metacíclico

Seja G o grupo metacíclico gerado por x e y sujeito às relações definidoras

$$y^n = e \ , \ x^m = e \ , \ y^x = y^\ell \tag{12.1}$$

onde $\ell, m, n \in I\!N$ e

$$\ell^m \equiv 1 (mod n) \tag{12.2}$$

Neste caso, temos que

$$G = \{x^i y^j; 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1\} \tag{12.3}$$

com $|G| = mn$. Nosso objetivo aqui é o cálculo de $G \otimes G$, mas antes disso veremos uma série de resultados a respeito de G e $G \otimes G$.

Lema 12.1. Para todo $p, q \in I\!N$

$$x^{-p} y^q x^p = y^{q\ell^p} \ , \ y^{-q} x^p y^q = x^p y^{q(1-\ell^p)}.$$

Demonstração. A primeira identidade é provada aplicando o princípio da indução sobre p (mantendo q fixo) e usando (12.1), enquanto que a outra é uma conseqüência direta da primeira. ∎

Lema 12.2. $G \otimes G$ é um grupo abeliano.

Demonstração. Do lema anterior segue que G' é um grupo cíclico, pois para todo $p, q, r, s \in I\!N$

$$[x^p y^q, x^r y^s] = y^{-q}(x^{-p} y^s x^p)^{-1}(x^{-r} y^q x^r) y^s = y^{-q}(y^{s\ell^p})^{-1} y^{q\ell^r} y^s \in < y >$$

Dessa forma temos que o grupo quociente $(G \otimes G)/J_2(G) \cong Imk \leq G'$ é cíclico. Se $(G \otimes G)/J_2(G) =< J_2(G)t >$ e u, v são elementos de $G \otimes G$ então u, v se escrevem na forma $u = at^i$, $v = bt^j$ com $a, b \in J_2(G)$ e $i, j \in Z\!\!Z$. Daí como $J_2(G)$ é central em $G \otimes G$ (Proposição 9.1 (a)) temos $G \otimes G$ um grupo abeliano. ∎

Notemos que sendo $J_2(G)$ G-trivial (Proposição 9.1 (b)) ambos x e y fixam $x \otimes x, y \otimes y, (x \otimes y)(y \otimes x)$.

Lema 12.3. $(y \otimes y)^{2(\ell-1)} = e$ e se n é um número ímpar então $(y \otimes y)^{\ell-1} = e$.
Demonstração. Por (12.1) e Proposição 8.5 (e)

$$(y \otimes y)^{(\ell-1)^2} = y^{\ell-1} \otimes y^{\ell-1} = [y,x] \otimes [y,x] = [y \otimes x, y \otimes x] = e$$

e como x fixa $y \otimes y$

$$y \otimes y = (y \otimes y)^x = y^x \otimes y^x = y^\ell \otimes y^\ell = (y \otimes y)^{\ell^2}$$

ou seja, $(y \otimes y)^{\ell^2-1} = e$. Assim, $(y \otimes y)^\alpha = e$ onde $\alpha = mdc(\ell^2 - 1, (\ell-1)^2)$. Como

$$\alpha = \begin{cases} 2(\ell-1) & \text{se } \ell \text{ é ímpar} \\ (\ell-1) & \text{se } \ell \text{ é par} \end{cases}$$

temos $(y \otimes y)^{2(\ell-1)} = e$. Agora, se n é um número ímpar então $(y \otimes y)^{\ell-1} = e$ pois $(y \otimes y)^n = y^n \otimes y = e$. ■

Lema 12.4. Se n é um número ímpar então

$$(x \otimes y)^y = x \otimes y \quad \text{e} \quad (x \otimes y)^x = (x \otimes y)^\ell$$

e se n é par

$$(x \otimes y)^y = (x \otimes y)a \quad \text{e} \quad (x \otimes y)^x = (x \otimes y)^\ell a^{(\ell-1)/2}$$

onde $a = (y \otimes y)^{\ell-1}$.
Demonstração. Suponhamos que n seja ímpar. Pelos Lemas 12.1 e 12.3

$$(x \otimes y)^y = x^y \otimes y = xy^{1-\ell} \otimes y = (x \otimes y)^{y^{1-\ell}}(y^{1-\ell} \otimes y) = (x \otimes y)^{y^{1-\ell}}$$

Daí obtemos que $(x \otimes y)^{y^\ell} = x \otimes y$. Como ℓ é coprimo com $|y| = n$, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $\alpha\ell + \beta n = 1$ e então

$$(x \otimes y)^{y^1} = (x \otimes y)^{y^{\alpha\ell+\beta n}} = (x \otimes y)^{y^{\alpha\ell}} = x \otimes y$$

Logo $(x \otimes y)^y = x \otimes y$ e, por (12.1),

$$(x \otimes y)^x = x \otimes y^\ell = (x \otimes y)(x \otimes y^{\ell-1})^y = \prod_{k=0}^{\ell-1}(x \otimes y)^{y^k} = (x \otimes y)^\ell$$

Agora suponhamos n par. Pelos Lemas 12.1 e 12.3,

$$(x \otimes y)^y = xy^{1-\ell} \otimes y = (x \otimes y)^{y^{1-\ell}}(y \otimes y)^{1-\ell}$$

ou seja, $(x \otimes y)^{y^\ell} = (x \otimes y)(y \otimes y)^{\ell-1}$. Daí como $\ell^m \equiv 1(mod n)$ e $y^n = e$ temos $y = y^{\ell^m}$ e então a ação de $y = (y^\ell)^{\ell^{m-1}}$ multiplica $x \otimes y$ por $a^{\ell^{m-1}}$, i.e., $(x \otimes y)^y = (x \otimes y)a^{\ell^{m-1}}$. Sendo n par, (12.2) implica ℓ ímpar e como $a^2 = e$ temos $a^{\ell^{m-1}} = a$. Logo $(x \otimes y)^y = (x \otimes y)a$ e, por (12.1),

$$(x \otimes y)^x = x \otimes y^\ell = \prod_{k=0}^{\ell-1}(x \otimes y)^{y^k} = \prod_{k=0}^{\ell-1}(x \otimes y)a^k = (x \otimes y)^\ell a^{(\ell-1)/2} \blacksquare$$

Observemos que aplicando o automorfismo ν da Proposição 8.6 nas identidades do Lema 12.4 obtemos

$$\begin{array}{llll} (y \otimes x)^y = y \otimes x & \text{e} \quad (y \otimes x)^x = (y \otimes x)^\ell & \text{se } n & \text{é ímpar} \\ (y \otimes x)^y = (y \otimes x)a & \text{e} \quad (y \otimes x)^x = (y \otimes x)^\ell a^{(\ell-1)/2} & \text{se } n & \text{é par.} \end{array}$$

Lema 12.5. Para todo $p, q \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$x^p \otimes y^q = \begin{cases} (x \otimes y)^{q \bullet p} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ (x \otimes y)^{q \bullet p}a^r & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} ; \quad y^q \otimes x^p = \begin{cases} (y \otimes x)^{q \bullet p} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ (y \otimes x)^{q \bullet p}a^r & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

onde $q \bullet p = q(1 + \ell + \ldots + \ell^{p-1})$ e $r = (pq(q-2) + q \bullet p)/2$.

Demonstração. Aplicando (8.3) $p-1$ vezes a $x^p \otimes y^q$ temos

$$x^p \otimes y^q = (x \otimes y^q)^{x^{p-1}}(x \otimes y^q)^{x^{p-2}} \ldots (x \otimes y^q)^x(x \otimes y^q) \tag{12.4}$$

Agora usando (8.4) $q-1$ vezes em $x \otimes y^q$ obtemos

$$x \otimes y^q = (x \otimes y)(x \otimes y)^y \ldots (x \otimes y)^{y^{q-1}} \tag{12.5}$$

Se n é ímpar temos pelo Lema 12.4 que $x \otimes y^q = (x \otimes y)^q$. Esta identidade, substituída em (12.5) nos dá $x^p \otimes y^q = (x \otimes y)^{q \bullet p}$. Se n é par então de (12.5) e Lema 12.4 temos

$$x \otimes y^q = (x \otimes y)^q a^{q(q-1)/2}$$

Substituindo esta última identidade em (12.4) obtemos

$$x^p \otimes y^q = \prod_{k=0}^{p-1}((x \otimes y)^{x^k})^q a^{pq(q-1)/2}$$

Mas, pelo Lema 12.4

$$(x \otimes y)^{x^k} = ((x \otimes y)^{\ell} a^{(\ell-1)/2})^{x^{k-1}} = \ldots = (x \otimes y)^{\ell^k} a^{r_k},$$

onde $r_k = (\ell^{k-1} + \ldots + \ell + 1)(\ell - 1)/2 = (\ell^k - 1)/2$. Assim

$$x^p \otimes y^q = \prod_{k=0}^{p-1} (x \otimes y)^{\ell^k q} a^{q r_k} a^{pq(q-1)/2} = (x \otimes y)^{q \bullet p} a^r$$

onde

$$\begin{aligned} r &= pq(q-1)/2 + \sum_{k=0}^{p-1} q(\ell^k - 1)/2 = pq(q-1)/2 + (q \bullet p - pq)/2 = \\ &= (pq(q-2) + q \bullet p)/2. \end{aligned}$$

As demais identidades são obtidas aplicando-se o automorfismo ν da Proposição 8.6 às primeiras. ∎

Lema 12.6. Sejam $p, q, r, s \in \mathbb{N}$. Então

$$x^p y^q \otimes x^r y^s = \begin{cases} (x \otimes x)^{pr} (y \otimes y)^{qs} (x \otimes y)^{s \bullet p} (y \otimes x)^{q \bullet r}, & \text{se} \quad n \quad \text{é impar} \qquad (12.6) \\ (x \otimes x)^{pr} (y \otimes y)^{qs} (x \otimes y)^{s \bullet p} (y \otimes x)^{q \bullet r} a^t, & \text{se} \quad n \quad \text{é par} \qquad (12.7) \end{cases}$$

onde

$$t = qs(p + r) + [ps(s-2) + rq(q-2) + s \bullet p + q \bullet r]/2$$

Demonstração. Suponhamos n par. De (8.3), (8.4) e Lema 12.5

$$\begin{aligned} x^p y^q \otimes x^r y^s &= (x^p \otimes y^s)^{y^q} (x^p \otimes x^r)^{y^{s+q}} (y^q \otimes y^s)(y^q \otimes x^r)^{y^s} \\ &= (x \otimes x)^{pr} (y \otimes y)^{qs} ((x \otimes y)^{s \bullet p} a^i)^{y^q} ((y \otimes x)^{q \bullet r} a^j)^{y^s} \end{aligned}$$

onde $i = (ps(s-2) + s \bullet p)/2$ e $j = (rq(q-2) + q \bullet r)/2$. Como

$$(x \otimes y)^{y^q} = (x \otimes y) a^q, (y \otimes x)^{y^s} = (y \otimes x) a^s \quad \text{e} \quad q(s \bullet p) + s(q \bullet r) \equiv qs(p + r) (mod\ 2)$$

temos

$$x^p y^q \otimes x^r y^s = (x \otimes x)^{pr} (y \otimes y)^{qs} (x \otimes y)^{s \bullet p} (y \otimes x)^{q \bullet r} a^t$$

onde

$$t = qs(p + r) + i + j = qs(p + r) + \frac{1}{2}[ps(s-2) + rq(q-2) + s \bullet p + q \bullet r].$$

A demonstração para o caso n ímpar é análoga. ∎

Temos por este resultado que $G \otimes G$ é gerado por $x \otimes x, y \otimes y, x \otimes y$ e $(x \otimes y)(y \otimes x)$, independente de n ser par ou ímpar.

Agora vamos nos restringir ao caso n ímpar. Como y fixa cada um dos geradores de $G \otimes G$, y atua trivialmente sobre $G \otimes G$. Fazendo $p = 1, q = 0, r = m$ e $s = n$ em (12.6) obtemos $(x \otimes y)^n = e$ e colocando $p = m, q = 0$ e $s = 1$ em (12.6) obtemos $(x \otimes y)^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}} = e$. De modo análogo concluímos que

$$(y \otimes x)^n = (y \otimes x)^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}} = e$$

Do Lema 12.1

$$x \otimes x = (x \otimes x)^y = xy^{1-\ell} \otimes xy^{1-\ell} = (y \otimes y)^{(1-\ell)^2}(x \otimes x)(x \otimes y)^{1-\ell}(y \otimes x)^{1-\ell},$$

que é equivalente a

$$(y \otimes y)^{\ell-1} = e = [(x \otimes y)(y \otimes x)]^{\ell-1}$$

Assim, se $\rho_1 = m$, $\rho_2 = mdc(n, \ell - 1)$, $\rho_3 = mdc(n, \ell - 1, 1 + \ell + \ldots + \ell^{m-1})$, $\rho_4 = mdc(n, 1 + \ell + \ldots + \ell^{m-1})$ e se a, b, c, d são os geradores de $\mathbb{Z}\rho_1, \mathbb{Z}\rho_2, \mathbb{Z}\rho_3, \mathbb{Z}\rho_4$ respectivamente, então a aplicação

$$\begin{aligned} \theta' : \mathbb{Z}\rho_1 \times \mathbb{Z}\rho_2 \times \mathbb{Z}\rho_3 \times \mathbb{Z}\rho_4 &\rightarrow G \otimes G, \\ a &\mapsto x \otimes x \\ b &\mapsto y \otimes y \\ c &\mapsto (x \otimes y)(y \otimes x) \\ d &\mapsto x \otimes y \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos.

Proposição 12.7. (R. Brown, D.L. Johnson e E.F. Robertson, [3]) θ' é um isomorfismo.

Demonstração. Seja $X = \{x^p y^q \otimes x^r y^s; 0 \leq p, r \leq m - 1, 0 \leq q, s \leq n - 1\}$. Pelo Lema 12.6

$$x^p y^q \otimes x^r y^s = (x \otimes x)^{pr}(y \otimes y)^{qs}(x \otimes y)^{s \bullet p}(y \otimes x)^{q \bullet r}$$

Assim, definimos uma aplicação $\theta : X \longrightarrow \mathbb{Z}\rho_1 \times \mathbb{Z}\rho_2 \times \mathbb{Z}\rho_3 \times \mathbb{Z}\rho_4$ pondo

$$(x^p y^q \otimes x^r y^s)\theta = a^{pr} b^{qs} c^{s \bullet p - q \bullet r} d^{q \bullet r}$$

Vamos provar que θ é consistente com as relações definidoras para $G \otimes G$. Para isso, tomemos

$$g = x^p y^q \ , \ g' = x^r y^s \ , \ h = x^i y^j$$

com $p, r, i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}, q, s, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Pelo Lema 12.1

$$gg' = x^p y^q x^r y^s = x^{p+r} y^{q\ell^r} = x^{p+r} y^{s+q\ell^r}$$

Logo, pelo Lema 12.6

$$gg' \otimes h = (x \otimes x)^{i(p+r)} (y \otimes y)^{j(s+q\ell^r)} (x \otimes y)^{j \bullet (p+r)} (y \otimes x)^{(s+q\ell^r) \bullet i} \tag{12.8}$$

e então

$$(gg' \otimes h)\theta = a^{i(p+r)} b^{j(s+q\ell^r)} c^{j \bullet (p+r) - (s+q\ell^r) \bullet i} d^{(s+q\ell^r) \bullet i} \tag{12.9}$$

Por outro lado, como y fixa $G \otimes G$

$$g^{g'} \otimes h^{g'} = x^p (y^q)^{x^r} \otimes x^i (y^j)^{x^r} = x^p y^{q\ell^r} \otimes x^i y^{j\ell^r}$$

e daí por (12.6)

$$g^{g'} \otimes h^{g'} = (x \otimes x)^{pi} (y \otimes y)^{qj\ell^{2r}} (x \otimes y)^{j\ell^r \bullet p} (y \otimes x)^{q\ell^r \bullet i}$$

Mas como $(\ell - 1) \mid (\ell^{2r} - \ell^r)$ e $(y \otimes y)^{\ell - 1} = \epsilon$ segue que $(y \otimes y)^{\ell^{2r} - \ell^r} = \epsilon$, ou seja, $(y \otimes y)^{\ell^{2r}} = (y \otimes y)^{\ell^r}$. Assim

$$g^{g'} \otimes h^{g'} = (x \otimes x)^{pi} (y \otimes y)^{qj\ell^r} (x \otimes y)^{j\ell^r \bullet p} (y \otimes x)^{q\ell^r \bullet i} \tag{12.10}$$

Aplicando (12.6) a $g' \otimes h$ obtemos

$$g' \otimes h = (x \otimes x)^{ri} (y \otimes y)^{sj} (x \otimes y)^{j \bullet r} (y \otimes x)^{s \bullet i} \tag{12.11}$$

De (12.10) e (12.11) temos que

$$(g^{g'} \otimes h^{g'})\theta (g' \otimes h)\theta = a^{i(p+r)} b^{j(s+q\ell^r)} c^{j\ell^r \bullet p + j \bullet r - (s+q\ell^r) \bullet i} d^{(s+q\ell^r) \bullet i} \tag{12.12}$$

Como

$$j \bullet (p+r) = j(1+\ell+\ldots+\ell^{r-1}) + j(\ell^r+\ldots+\ell^{r+p-1}) = j \bullet r + j\ell^r \bullet p$$

os expoentes de c em (12.9) e (12.12) são iguais e portanto

$$(gg' \otimes h)\theta = (g^{g'} \otimes h^{g'})\theta(g' \otimes h)\theta$$

Aplicando o automorfismo ν da Proposição 8.6 a (12.8), (12.10) e (12.11) vemos que

$$(h \otimes gg')\theta = (h \otimes g')\theta(h^{g'} \otimes g^{g'})\theta$$

Logo θ se estende a um homomorfismo $\tilde{\theta} : G \otimes G \to \mathbb{Z}\rho_1 \times \mathbb{Z}\rho_2 \times \mathbb{Z}\rho_3 \times \mathbb{Z}\rho_4$. É claro que $\theta'\tilde{\theta}$ e $\tilde{\theta}\theta'$ são aplicações identidades e portanto que θ' é um isomorfismo. ∎

Agora suponhamos que o inteiro n que aparece nas relações definidoras para o grupo metacíclico G seja par. Nosso objetivo agora é o cálculo do quadrado tensorial (não abeliano) de G para este caso. Do Lema 12.6 temos as seguintes relações

$$(y \otimes y)^n = e = (x \otimes x)^m \tag{12.13}$$

$$(y \otimes x)^n = e = (x \otimes y)^n \tag{12.14}$$

$$(y \otimes x)^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}} = a^{(\ell-1)m(m-1)/4} = (x \otimes y)^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}} \tag{12.15}$$

De fato. A relação (12.13) segue direto do Lema 12.6. Colocando $p=1$, $q=0$, $r=m$ e $s=n$ em (12.7) obtemos

$$(x \otimes y)^n a^{n(n-2)/2} = e$$

Como $a = (y \otimes y)^{\ell-1}$, ℓ ímpar e $(y \otimes y)^n = e$ segue que $a^{n(n-2)/2} = e$ e, portanto, que $(x \otimes y)^n = e$. De modo análogo provamos que $(y \otimes x)^n = e$. Agora fazendo $s=1$, $p=m$, $q=0$ em (12.7) obtemos

$$e = (x \otimes y)^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}} a^t$$

onde

$$t = \frac{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}-m}{2}.$$

Observemos que se $\ell = 1$ então $t = 0 = (\ell-1)m(m-1)/4$. Suponhamos então $\ell = 2k+1$, com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. É fácil ver que se $m = 1$ ou $m = 2$ então

$$a^t = a^{(\ell-1)m(m-1)/4}.$$

Se $m \geq 3$,

$$\begin{aligned} t &= \frac{\frac{\ell^m-1}{\ell-1} - m}{2} = \frac{(\ell^m - 1) - m(\ell - 1)}{2(\ell - 1)} = \\ &= \frac{(2k+1)^m - 1 - 2km}{4k} = \frac{\sum_{i=0}^{m-2} \binom{m}{i} (2k)^{m-i}}{4k} = \\ &= \sum_{i=0}^{m-3} \binom{m}{i} 2^{m-i-2} k^{m-i-1} + \frac{km(m-1)}{2}, \end{aligned}$$

e como $a^2 = e$ temos

$$a^t = a^{km(m-1)/2} = a^{(\ell-1)m(m-1)/4}.$$

Logo

$$(x \otimes y)^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}} = a^{(\ell-1)m(m-1)/4}.$$

De modo análogo provamos que

$$(y \otimes x)^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}} = a^{(\ell-1)m(m-1)/4}.$$

Como y fixa $x \otimes x$,

$$\begin{aligned} x \otimes x &= (x \otimes x)^y = x^y \otimes x^y = xy^{1-\ell} \otimes xy^{1-\ell} \\ &= (x \otimes y^{1-\ell})^{y^{1-\ell}} (x \otimes x)^{y^{2(1-\ell)}} (y^{1-\ell} \otimes y^{1-\ell}) (y^{1-\ell} \otimes x)^{y^{1-\ell}} \\ &= ((x \otimes y^{1-\ell})(y^{1-\ell} \otimes x))^{y^{1-\ell}} (x \otimes x)(y \otimes y)^{(1-\ell)^2}, \end{aligned}$$

de modo que

$$(x \otimes y^{1-\ell})(y^{1-\ell} \otimes x) = e$$

pelo Lema 12.3. Do Lema 12.5 vemos que esta última identidade é equivalente a

$$(y \otimes x)^{\ell-1} (x \otimes y)^{\ell-1} = e \tag{12.16}$$

De 12.15 e Lema 12.4

$$(x \otimes y)^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}} = ((x \otimes y)^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}})^y = (x \otimes y)^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}} a^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}},$$

ou seja, $a^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}} = e$. Como ℓ é ímpar e $a^2 = e$ segue que $a^m = a^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}} = e$. Assim, se H é o grupo abeliano gerado por X, Y, T, Z, A e sujeito às seguintes relações:

$$\begin{aligned}
&Y^n = e\ ,\ Y^{\ell-1} = A, A^2 = e = A^m, X^m = e,\\
&T^n = e\ ,\ T^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}} = A^{(\ell-1)(m-1)m/4},\\
&Z^{\ell-1} = Z^n = Z^{1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}} = e,
\end{aligned}$$

então a aplicação

$$\begin{aligned}
\varphi' : H &\rightarrow G \otimes G\\
X &\mapsto x \otimes x\\
Y &\mapsto y \otimes y\\
T &\mapsto x \otimes y\\
Z &\mapsto (x \otimes y)(y \otimes x)\\
A &\mapsto a
\end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos.

Proposição 12.8. (D.L. Johnson, [11]) φ' é um isomorfismo de grupos.

Demonstração. Seja $X = \{x^p y^q \otimes x^r y^s; 0 \le p, r \le m-1, 0 \le q, s \le n-1\}$. Pelo Lema 12.6

$$x^p y^q \otimes x^r y^s = (x \otimes x)^{pr} (y \otimes y)^{qs} (x \otimes y)^{s \bullet p} (y \otimes x)^{q \bullet r} a^{qs(p+r)+(ps(s-2)+rq(q-2)+s\bullet p+q\bullet r)/2}$$

Assim, definimos

$$\begin{aligned}
\varphi : X &\rightarrow H\\
x^p y^q \otimes x^r y^s &\mapsto X^{pr} Y^{qs} Z^{q\bullet r} T^{s\bullet p - q\bullet r} A^{qs(p+r)+\frac{1}{2}[ps(s-2)+rq(q-2)+s\bullet p+q\bullet r]}
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que φ é consistente com as relações definidoras para $G \otimes G$. Sejam então

$$g = x^p y^q\ ,\ g' = x^r y^s\ ,\ h = x^i y^j\ ,$$

com $p, r, i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}, q, s, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Uma vez que

$$gg' \otimes h = x^{p+r} y^{s+q\ell^r} \otimes x^i y^j \tag{12.17}$$

temos

$$(gg'\otimes h)\varphi = X^{(p+r)i}Y^{(s+q\ell^r)j}Z^{(s+q\ell^r)\bullet i}T^{j\bullet(p+r)-(s+q\ell^r)\bullet i}A^{\alpha} \tag{12.18}$$

onde $\alpha = (s+q\ell^r)j(p+r+i)+\frac{1}{2}[(p+r)j(j-2)+i(s+q\ell^r)(s+q\ell^r-2)+j\bullet(p+r)+(s+q\ell^r)\bullet i]$.
Pelo Lema 12.1

$$g^{g'}\otimes h^{g'} = x^p y^{q\ell^r+s(1-\ell^p)}\otimes x^i y^{j\ell^r+s(1-\ell^i)} \tag{12.19}$$

Logo

$$(g^{g'}\otimes h^{g'})\varphi(g'\otimes h)\varphi = X^{\beta_1}Y^{\beta_2}Z^{\beta_3}T^{\beta_4}A^{\beta_5} \tag{12.20}$$

onde

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= (p+r)i,\\
\beta_2 &= (q\ell^r+s(1-\ell^p))(j\ell^r+s(1-\ell^i))+sj,\\
\beta_3 &= (q\ell^r+s(1-\ell^p))\bullet i+s\bullet i,\\
\beta_4 &= (j\ell^r+s(1-\ell^i))\bullet p-(q\ell^r+s(1-\ell^p))\bullet i+j\bullet r-s\bullet i,\\
\beta_5 &= (q\ell^r+s(1-\ell^p))(j\ell^r+s(1-\ell^i))(p+i)+sj(r+i)+\\
&+ \frac{1}{2}(p(j\ell^r+s(1-\ell^i))(j\ell^r+s(1-\ell^i)-2)+i(q\ell^r+s(1-\ell^p))(q\ell^r+s(1-\ell^p)-2)+\\
&+ (j\ell^r+s(1-\ell^i))\bullet p+(q\ell^r+s(1-\ell^p))\bullet i+rj(j-2)+\\
&+ is(s-2)+j\bullet r+s\bullet i).
\end{aligned}$$

Como $\ell^k-1=(\ell-1)(1+\ell+\ldots+\ell^{k-1}), \forall k\in I\!N$ e $Z^{\ell-1}=e$ vemos que $Z^{(s+q\ell^r)\bullet i}=Z^{\beta_3}$. Uma vez que $s(1-\ell^i)\bullet p = s(1-\ell^p)\bullet i$ e $j\bullet(p+r)=j\bullet r+j\ell^r\bullet p$ temos

$$T^{j\bullet(p+r)-(s+q\ell^r)\bullet i}=T^{\beta_4}.$$

Assim, resta provarmos que $Y^{(s+q\ell^r)j}A^{\alpha}=Y^{\beta_2}A^{\beta_5}$. Como $Y^{\ell-1}=A, A^2=e$ e ℓ é ímpar

$$Y^{\beta_2}=Y^{qj\ell^{2r}+sj}A^{qsi+sjp}$$

Mas

$$Y^{qj\ell^{2r}}Y^{-qj\ell^r}=Y^{qj\ell^r(\ell^r-1)}=Y^{qj\ell^r(\ell-1)(1+\ell+\ldots+\ell^{r-1})}=A^{qjr}$$

Logo

$$Y^{\beta_2}=Y^{sj+qj\ell^r}A^{qjr+qsi+sjp+sj}$$

Usando as relações definidoras para H e o fato de ℓ ser ímpar mostramos que $A^{\alpha} = A^{\beta_5+qjr+sjp+sj}$ e, portanto, que $Y^{(s+q\ell^r)j}A^{\alpha} = Y^{\beta_2}A^{\beta_5}$. Assim

$$(gg' \otimes h)\varphi = (g^{g'} \otimes h^{g'})\varphi(g' \otimes h)\varphi.$$

Como

$$\begin{aligned} h \otimes gg' &= x^i y^j \otimes x^{p+r} y^{s+q\ell^r} \\ h^{g'} \otimes g^{g'} &= x^i y^{j\ell^r+s(1-\ell^i)} \otimes x^p y^{q\ell^r+s(1-\ell^p)} \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} (h \otimes gg')\varphi &= X^{(p+r)i} Y^{j(s+q\ell^r)} Z^{j\bullet(p+r)} T^{-j\bullet(p+r)+(s+q\ell^r)\bullet i} A^{\alpha} \\ (h \otimes g')\varphi(h^{g'} \otimes g^{g'})\varphi &= X^{\beta_1} Y^{\beta_2} Z^{j\bullet r+(j\ell^r+s(1-\ell^i))\bullet p} T^{-\beta_4} A^{\beta_5} \end{aligned}$$

onde $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_4, \beta_5$ são dadas em 12.18 e 12.20. Já sabemos que

$$\begin{aligned} X^{(p+r)i} &= X^{\beta_1} \\ Y^{j(s+q\ell^r)}A^{\alpha} &= Y^{\beta_2}A^{\beta_5} \\ T^{-j\bullet(p+r)+(s+q\ell^r)\bullet i} &= T^{-\beta_4}. \end{aligned}$$

Assim, basta provarmos que $Z^{j\bullet(p+r)} = Z^{j\bullet r+(j\ell^r+s(1-\ell^i))\bullet p}$. Mas isto segue do fato que $j \bullet (p+r) = j \bullet r + j\ell^r \bullet p$ e $Z^{\ell-1} = \epsilon$. Logo

$$(h \otimes gg')\varphi = (h \otimes g')\varphi(h^{g'} \otimes g^{g'})\varphi.$$

Assim φ se estende a um homomorfismo $\tilde{\varphi} : G \otimes G \to H$. É fácil ver que $\varphi'\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\varphi}\varphi'$ são aplicações identidades. Logo φ' é um isomorfismo. ∎

CAPÍTULO III

Quadrado Tensorial não Abeliano de um Grupo Nilpotente de Classe 2

Seja $d(G)$ o numero mínimo de geradores para um grupo G. Em [3], R. Brown, D.J. Johnson e E.F. Robertson levantam a questão sobre a possibilidade de se obter alguma estimativa geral para $d(G \otimes G)$ quando G é finito. M. Bacon [1] dá uma estimativa para $d(G \otimes G)$ em termos de $d(G)$ no caso em que G é um grupo nilpotente de classe 2 e mostra que para um grupo nilpotente livre de classe 2 tal estimativa é ótima.

O objetivo deste capítulo é exibir este resultado.

13. Resultados Básicos.

Pela Proposição 10.6 temos que se G é um grupo nilpotente de classe 2 então $c\ell(G \otimes G) \leq 2$. O resultado seguinte mostra que, neste caso, $c\ell(G \otimes G) = 1$.

Proposição 13.1. Se G é um grupo nilpotente de classe 2 então $G \otimes G$ é abeliano e $e = [x, y] \otimes [z, w]$ para todo $x, y, z, w \in G$.

Demonstração. Pela Proposição 8.5 (b) temos

$$(x \otimes y)(z \otimes w)(x \otimes y)^{-1} = z^{[x,y]} \otimes w^{[x,y]} = z \otimes w$$

uma vez que G' é central em G, e então $[x \otimes y, z \otimes w] = e$. Logo $G \otimes G$ é abeliano. Agora pela Proposição 8.5 (e)

$$[x \otimes y, z \otimes w] = [x, y] \otimes [z, w]$$

e portanto $[x, y] \otimes [z, w] = e$. ∎

Proposição 13.2. Se G um grupo nilpotente de classe 2 então as relações definidoras para $G \otimes G$ reduzem-se a

$$xx' \otimes y = (x \otimes y)(x' \otimes y)([x, x'] \otimes y)(x \otimes [y, x']) \tag{13.1}$$

$$x \otimes yy' = (x \otimes y)(x \otimes y')(x \otimes [y, y'])([x, y'] \otimes y) \tag{13.2}$$

para todo $x, x', y, y' \in G$.

Demonstração. Sejam x, x', y, y' elementos de G. Pelas relações definidoras para $G \otimes G$ e Proposição 13.1 obtemos

$$\begin{aligned}
xx' \otimes y &= (x^{x'} \otimes y^{x'})(x' \otimes y) \\
&= (x[x,x'] \otimes y[y,x'])(x' \otimes y) \\
&= (x \otimes [y,x'])(x \otimes y)([x,x'] \otimes [y,x'])([x,x'] \otimes y)(x' \otimes y) \\
&= (x \otimes y)(x' \otimes y)([x,x'] \otimes y)(x \otimes [y,x'])
\end{aligned}$$

Analogamente

$$x \otimes yy' = (x \otimes y)(x \otimes y')(x \otimes [y,y'])([x,y'] \otimes y). \quad \blacksquare$$

Corolário 13.3. Se G é um grupo nilpotente de classe 2 então as seguintes relações acontecem para todo $x, y, z \in G$

$$([x,y] \otimes z)(y \otimes [x,z])(x \otimes [z,y]) = e \tag{13.3}$$

$$(x \otimes [y,z])([x,z] \otimes y)([y,x] \otimes z) = e \tag{13.4}$$

$$([x,y] \otimes z) = (z \otimes [x,y])^{-1} \tag{13.5}$$

Demonstração. Sejam x, y, z elementos de G. Pela Proposição 13.2

$$xy \otimes z = (x \otimes z)(y \otimes z)([x,y] \otimes z)(x \otimes [z,y])$$

Por outro lado, como

$$([x,y] \otimes z)^{-1} = ([y,x] \otimes z)^{[x,y]} = [y,x] \otimes z$$

temos

$$\begin{aligned}
xy \otimes z &= yx[x,y] \otimes z = (yx \otimes z)([x,y] \otimes z) \\
&= (y \otimes z)(x \otimes z)([y,x] \otimes z)(y \otimes [z,x])([x,y] \otimes z) && \text{(por (13.1))} \\
&= (x \otimes z)(y \otimes z)(y \otimes [z,x])
\end{aligned}$$

e então igualando os termos das duas expansões para $xy \otimes z$ obtemos a expressão (13.3). De modo análogo provamos que a relação (13.4) está satisfeita. Para derivarmos a relação (13.5) multiplicamos membro a membro (13.3) e (13.4) e usamos o fato que

$$([x,y] \otimes z)^{-1} = ([y,x] \otimes z) \quad \text{e} \quad (x \otimes [z,y])^{-1} = (x \otimes [y,z]) \quad \blacksquare$$

Proposição 13.4. Seja G um grupo nilpotente de classe 2. Então

(a)
$$\prod_{i=1}^{n} x_i \otimes y = \prod_{i=1}^{n}(x_i \otimes y) \prod_{i=2}^{n}\prod_{j=1}^{i-1}(x_i \otimes [y, x_j])$$
para todo $x_1, \ldots, x_n, y \in G$;

(b)
$$x \otimes \prod_{i=1}^{n} y_i = \prod_{i=1}^{n}(x \otimes y_i) \prod_{i=2}^{n}\prod_{j=1}^{i-1}([x, y_j] \otimes y_i)$$
para $x, y_1, \ldots, y_n \in G$;

(c)
$$\prod_{i=1}^{n} x_i \otimes \prod_{j=1}^{m} y_j = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i \otimes y_j) M$$
para todo $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in G$ onde

$$M = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=2}^{m}\prod_{k=1}^{j-1}([x_i, y_k] \otimes y_j) \prod_{i=2}^{n}\prod_{k=1}^{i-1}\prod_{j=1}^{m}(x_i \otimes [y_j, x_k]).$$

Demonstração. A prova de (a) é por indução sobre n. É claro que para $n = 1$ a relação (a) é satisfeita. Seja então $n > 1$ e suponhamos que a afirmação seja verdadeira para o caso $n - 1$. Então para todo $x_1, \ldots, x_n, y \in G$

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} x_i \otimes y &= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i\Big) x_n \otimes y \\
&= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \otimes y\Big)(x_n \otimes y)\Big(\Big[\prod_{i=1}^{n-1} x_i, x_n\Big] \otimes y\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \otimes [y, x_n]\Big) \quad \text{(por (13.1))} \\
&= \prod_{i=1}^{n}(x_i \otimes y) \prod_{i=2}^{n-1}\prod_{j=1}^{i-1}(x_i \otimes [y, x_j])\Big(x_n \otimes \Big[\prod_{i=1}^{n-1} x_i, y\Big]\Big)^{-1} \\
&= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \otimes [y, x_n]\Big)^{-1}\Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \otimes [y, x_n]\Big) \\
&\qquad \text{(pela hipótese de indução e (13.4))} \\
&= \prod_{i=1}^{n}(x_i \otimes y) \prod_{i=2}^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}(x_i \otimes [y, x_j])\Big(x_n \otimes \Big[y, \prod_{i=1}^{n-1} x_i\Big]\Big)
\end{aligned}$$

Mas como G' é central em G

$$x_n \otimes [y, \prod_{i=1}^{n-1} x_i] = x_n \otimes \prod_{i=1}^{n-1}[y, x_i] = \prod_{i=1}^{n-1}(x_n \otimes [y, x_i])$$

e então

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \otimes y = \prod_{i=1}^{n}(x_i \otimes y) \prod_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (x_i \otimes [y, x_j])$$

(b) é provado de modo análogo enquanto (c) é obtido combinando (a) e (b) e usando o fato que

$$x_i \otimes \prod_{j=1}^{m} [y_j, x_k] = \prod_{j=1}^{m} (x_i \otimes [y_j, x_k])$$

Como consequência temos o

Corolário 13.5. Seja G um grupo nilpotente de classe 2. Então para todo $x, y \in G$ e para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$

$$x^n \otimes y^m = (x \otimes y)^{mn} (y \otimes [y, x])^{n\binom{m}{2}} (x \otimes [y, x])^{m\binom{n}{2}}$$

14. Uma Estimativa para $d(G \otimes G)$

Para G um grupo nilpotente de classe 2, o próximo resultado nos dá um conjunto de geradores para $G \otimes G$, além de uma expressão explícita para cada $g \otimes h$ em termos desses geradores. Desse resultado seguirá uma estimativa para $d(G \otimes G)$. Pela Proposição 1.2 temos que se G é um grupo nilpotente de classe 2 então para todo $a, b \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$

$$[a, b^n] = [a^n, b] = [a, b]^n \quad \text{e} \quad (ab)^n = a^n b^n [b, a]^{\binom{n}{2}} \tag{14.1}$$

Tais relações serão muito usadas nesta seção, especialmente na prova da seguinte

Proposição 14.1. Seja G um grupo nilpotente de classe 2 e $G = < x_1, \ldots, x_n >$. Então

$$G \otimes G = < \bigcup_{i=1}^{5} X_i >$$

onde

$X_1 = \{x_i \otimes x_j;\ 1 \leq i, j \leq n\}$, $\quad X_2 = \{x_i \otimes [x_i, x_j];\ 1 \leq i < j \leq n\}$,
$X_3 = \{x_i \otimes [x_j, x_i];\ 1 \leq j < i \leq n\}$, $\quad X_4 = \{x_i \otimes [x_j, x_k];\ 1 \leq i < j < k \leq n\}$,
$X_5 = \{x_i \otimes [x_j, x_k];\ 1 \leq j < i < k \leq n\}$.

Se $g,h \in G$ com $g = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i} \prod_{1\leq j<k\leq n} [x_j,x_k]^{\ell_{jk}}$ e $h = \prod x_i^{m'_i} \prod_{1\leq j<k\leq n} [x_j,x_k]^{\ell'_{jk}}$, onde $m_i, m'_i, \ell_{jk}, \ell'_{jk}$ são números inteiros, então os expoentes de $g\otimes h$, quando expressos como um produto de fatores em $\bigcup_{i=1}^{5} X_i$ são

$$\begin{aligned}
\exp(x_i\otimes x_j) &= m_i m'_j \quad \text{para} \quad x_i\otimes x_j \in X_1,\\
\exp(x_i\otimes [x_i,x_j]) &= m_i\ell'_{ij} - m'_i\ell_{ij} + m_j\binom{m'_i}{2} -\\
&- m'_j\binom{m_i}{2} \quad \text{para} \quad x_i\otimes [x_i,x_j] \in X_2\\
\exp(x_i\otimes [x_j,x_i]) &= m_i\ell'_{ji} - m'_i\ell_{ji} - m_j\binom{m'_i}{2} + m'_j\binom{m_i}{2}\\
&+ m_i m'_i(m'_j - m_j) \quad \text{para} \quad x_i\otimes [x_j,x_i] \in X_3\\
\exp(x_i\otimes [x_j,x_k]) &= m_i\ell'_{jk} - m'_i\ell_{jk} + m'_k\ell_{ij} - m_k\ell'_{ij} -\\
&- m'_i m_j m_k + m_i m'_j m'_k + m_i m'_j m_k -\\
&- m'_i m_j m'_k \quad \text{para} \quad x_i\otimes [x_j,x_k] \in X_4\\
\exp(x_i\otimes [x_j,x_k]) &= m_i\ell'_{jk} - m'_i\ell_{jk} + m_k\ell'_{ji} - m'_k\ell_{ji} + m'_i m'_j m_k -\\
&- m_i m_j m'_k + m_i m'_j m_k - m'_i m_j m'_k - m'_i m_j m_k +\\
&+ m_i m'_j m'_k \quad \text{para} \quad x_i\otimes [x_j,x_k] \in X_5.
\end{aligned}$$

Seja $G =< x_1,\ldots,x_n >$. Como $G' \subseteq Z(G)$ temos para todo i,j com $1\leq i,j\leq n$ e $m_i, m_j \in \mathbb{Z}$ que

$$x_j^{m_j}x_i^{m_i} = x_i^{m_i}[x_i^{m_i}, x_j^{-m_j}]x_j^{m_j} = x_i^{m_i}x_j^{m_j}[x_i^{m_i}, x_j^{-m_j}] = x_i^{m_i}x_j^{m_j}[x_i,x_j]^{-m_i m_j}$$

Dessa forma, se g e h são elementos de G então g,h podem ser escritos como $g = UV$ e $h = U'V'$ onde

$$U = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i}\ , \quad V = \prod_{1\leq j<k\leq n} [x_j,x_k]^{\ell_{jk}}$$
$$U' = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m'_i}\ , \quad V' = \prod_{1\leq j<k\leq n} [x_j,x_k]^{\ell'_{jk}}$$

com $m_i, m'_i, \ell_{ij}, \ell'_{ij} \in \mathbb{Z}$. Assim cada gerador $g\otimes h$ de $G\otimes G$ tem a forma $UV\otimes U'V'$. Como $V, V' \in Z(G)$ temos por (13.1) e (13.2) que

$$UV\otimes U'V' \;=\; (U\otimes U'V')(V\otimes U'V')([U,V]\otimes U'V')(U\otimes [U'V',V])$$

$$
\begin{aligned}
&= (U\otimes U')(U\otimes V')(U\otimes [U',V'])([U,V']\otimes U') \\
&\quad (V\otimes U')(V\otimes V')(V\otimes [U',V'])([V,V']\otimes U') \\
&= (U\otimes U')(U\otimes V')(V\otimes U')(V\otimes V')
\end{aligned}
$$

Agora, pelas Proposições 13.4 e 13.1

$$
\begin{aligned}
V\otimes V' &= \prod_{1\leq j<k\leq n} [x_j,x_k]^{\ell_{jk}} \otimes \prod_{1\leq j<k\leq n} [x_j,x_k]^{\ell'_{jk}} \\
&= \prod_{1\leq j<k\leq n}\ \prod_{1\leq r<n\leq n} ([x_j,x_k]^{\ell_{jk}} \otimes [x_r,x_s]^{\ell'_{rs}}) \\
&= e
\end{aligned}
$$

Expandindo $U\otimes V'$ e $V\otimes U'$ pela Proposição 13.4 e Corolário 13.5 obtemos

$$
\begin{aligned}
U\otimes V' &= \prod_{i=1}^{n}\ \prod_{1\leq j<k\leq n} (x_i\otimes [x_j,x_k])^{m_i\ell'_{jk}} \\
V\otimes U' &= \prod_{i=1}^{n}\ \prod_{1\leq j<k\leq n} ([x_j,x_k]\otimes x_i)^{m'_i\ell_{jk}}
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
(U\otimes V')(V\otimes U') = \prod_{i=1}\ \prod_{1\leq j<k\leq n} (x_i\otimes [x_j,x_k])^{m_i\ell'_{jk}-m'_i\ell_{jk}}
$$

Escrevendo $A_{ijk} = x_i\otimes [x_j,x_k]$ e $\alpha_{ijk} = m_i\ell'_{jk} - m'_i\ell_{jk}$ temos

$$
\begin{aligned}
(U\otimes V')(V\otimes U') &= \prod_{i=1}^{n}\ \prod_{1\leq j<k\leq n} A_{ijk}^{\alpha_{ijk}} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\ \prod_{1<j\leq n} A_{iij}^{\alpha_{iij}} \prod_{j=1}^{n}\ \prod_{j<i\leq n} A_{iji}^{\alpha_{iji}} \prod_{i=1}^{n}\ \prod_{i<j<k\leq n} A_{ijk}^{\alpha_{ijk}} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\ \prod_{\substack{1\leq j<i \\ i<k\leq n}} A_{ijk}^{\alpha_{ijk}} \prod_{i=1}^{n}\ \prod_{1\leq j<k<i} (A_{jik}A_{kji})^{\alpha_{ijk}}
\end{aligned}
$$

já que $A_{ijk} = A_{jik}A_{kji}$ por (13.4) e (13.5). Pela Proposição 13.4, $U\otimes U' = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i}\otimes \prod_{j=1}^{n} x_j^{m'_j} = LM$ onde

$$
L = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i^{m_i}\otimes x_j^{m'_j})
$$

e

$$M=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=2}^{n}\prod_{k=1}^{j-1}([x_i^{m_i},x_k^{m'_k}]\otimes x_j^{m'_j})\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=2}^{n}\prod_{k=1}^{i-1}(x_i^{m_i}\otimes[x_j^{m'_j},x_k^{m_k}])$$

Mas, do Corolário 13.5 temos que

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i\otimes x_j)^{m_im'_j}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_j\otimes[x_j,x_i])^{m_i\binom{m'_j}{2}}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i\otimes[x_j,x_i])^{m'_j\binom{m_i}{2}} \\ &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i\otimes x_j)^{m_im'_j}\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n}(x_i\otimes[x_i,x_j])^{m_j\binom{m'_i}{2}}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i\otimes[x_j,x_i])^{m'_j\binom{m_i}{2}} \\ &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i\otimes x_j)^{m_im'_j}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i\otimes[x_i,x_j])^{m_j\binom{m'_i}{2}-m'_j\binom{m_i}{2}} \end{aligned}$$

Escrevendo $\beta_{ij}=m_j\binom{m'_i}{2}-m'_j\binom{m_i}{2}$ e expandindo L obtemos

$$L=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i\otimes x_j)^{m_im'_j}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i+1}^{n}A_{iij}^{\beta_{ij}}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{i-1}A_{iij}^{\beta_{ij}}$$

Agora, pela Proposição 13.4, (13.6) e Proposição 13.1

$$\begin{aligned} M &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=2}^{n}\prod_{k=1}^{j-1}([x_i,x_k]\otimes x_j)^{m_im'_jm'_k}\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=2}^{n}\prod_{k=1}^{i-1}(x_i\otimes[x_j,x_k])^{m_im_km'_j} \\ &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=2}^{n}\prod_{k=1}^{j-1}(x_j\otimes[x_i,x_k])^{-m_im'_jm'_k}\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=2}^{n}\prod_{k=1}^{i-1}(x_i\otimes[x_j,x_k])^{m_im_km'_j} \\ &= \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=2}^{n}\prod_{k=1}^{i-1}(x_i\otimes[x_j,x_k])^{-m_jm'_im'_k}\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=2}^{n}\prod_{k=1}^{i-1}(x_i\otimes[x_j,x_k])^{m_im_km'_j} \\ &= \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=2}^{n}\prod_{k=1}^{i-1}(x_i\otimes[x_j,x_k])^{m_im_km'_j-m'_im'_km_j} \end{aligned}$$

e se escrevermos $\gamma_{ijk}=m_im_km'_j-m'_im'_km_j$ obtemos

$$\begin{aligned} M &= \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=2}^{n}\prod_{k=1}^{i-1}A_{ijk}^{\gamma_{ijk}}=\prod_{i=2}^{n}\prod_{j=1}^{i-1}A_{iij}^{\gamma_{iij}}\prod_{i=2}^{n}\prod_{k=1}^{i-1}\prod_{j<k}(A_{jik}A_{kji})^{\gamma_{ijk}} \\ & \prod_{i=2}^{n}\prod_{k=1}^{i-1}\prod_{k<j<i}(A_{jik}A_{kji})^{\gamma_{ijk}}\prod_{i=2}^{n}\prod_{k=1}^{i-1}\prod_{i<j\le n}A_{ijk}^{\gamma_{ijk}} \end{aligned}$$

Assim, $g\otimes h=a_1a_2a_3a_4a_5$ onde

$$a_1 = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i\otimes x_j)^{m_im'_j}\ \in<X_1>$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \prod_{i=1}^{n} \prod_{i<j<n} A_{iij}^{\alpha_{iij}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} A_{iij}^{\beta_{ij}} \in < X_2 > \\
a_3 &= \prod_{j=1}^{n} \prod_{j<i\leq n} A_{iji}^{\alpha_{iji}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} A_{iij}^{\beta_{ij}} \prod_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} A_{iij}^{\gamma_{iij}} \in < X_3 > \\
a_4 &= \prod_{i=1}^{n} \prod_{i<j<k\leq n} A_{ijk}^{\alpha_{ijk}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{1\leq j<k<i} A_{jki}^{-\alpha_{ijk}} \prod_{i=2}^{n} \prod_{k=1}^{i-1} \prod_{j<k} A_{jki}^{-\gamma_{ijk}} \prod_{i=2}^{n} \prod_{k=1}^{i-1} \prod_{k<j<i} A_{kji}^{\gamma_{ijk}} \in < X_4 > \\
a_5 &= \prod_{i=1}^{n} \prod_{\substack{1\leq j<i \\ i<k\leq n}} A_{ijk}^{\alpha_{ijk}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{1\leq j<k<i} A_{kji}^{\alpha_{ijk}} \prod_{i=2}^{n} \prod_{k=1}^{i-1} \prod_{j<k} A_{kji}^{\gamma_{ijk}} \prod_{i=2}^{n} \prod_{k=1}^{i-1} \prod_{k<j<i} A_{jki}^{-\gamma_{ijk}} \\
&\quad \prod_{i=2}^{n} \prod_{k=1}^{i-1} \prod_{i<j\leq n} A_{ikj}^{-\gamma_{ijk}} \in < X_5 >
\end{aligned}
$$

Daí segue o resultado. ■

Teorema 14.2. **(M. Bacon [1])** Se G é um grupo nilpotente de classe 2 com $d(G) = n$ então

$$d(G \otimes G) \leq \frac{n(n^2 + 3n - 1)}{3}.$$

Demonstração. Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto gerador para G. Da Proposição 14.1 segue que se $n = 2$ então $G \otimes G$ é gerado pelos elementos

$$x_1 \otimes x_2, x_2 \otimes x_1, x_1 \otimes x_1, x_2 \otimes x_2, x_1 \otimes [x_1, x_2], x_2 \otimes [x_1, x_2].$$

Assim $d(G \otimes G) \leq 6 = \dfrac{2(4 + 6 - 1)}{3}$, como queríamos. Agora seja $n \geq 3$. Também pela Proposição 14.1 temos um conjunto de geradores para $G \otimes G$. O que faremos aqui é contar esses geradores e mostrar que essa soma é $\dfrac{n(n^2 + 3n - 1)}{3}$. Agora vejamos, existem n^2 geradores da forma $x_i \otimes x_j$ e $n(n-1)$ geradores do tipo $x_i \otimes [x_j, x_i], i \neq j$. A princípio há $n(n-1)(n-2)$ geradores da forma $x_i \otimes [x_j, x_k]$ com i, j, k distintos. Mas pela Proposição 8.5

$$x_i \otimes [x_k, x_j] = x_i \otimes [x_j, x_k]^{-1} = (x_i \otimes [x_j, x_k])^{-1}$$

e então podemos supor $j < k$. Além disso, por (13.5),

$$x_i \otimes [x_j, x_k] = (x_j \otimes [x_i, x_k])(x_k \otimes [x_j, x_i])$$

Assim há apenas $2\binom{n}{3} = \dfrac{1}{3}n(n-1)(n-2)$ geradores da forma $x_i \otimes [x_j, x_k]$ e então

$$d(G \otimes G) \leq n^2 + n(n-1) + \frac{1}{3}n(n-1)(n-2) = \frac{1}{3}n(n^2 + 3n - 1) \quad ■$$

Sejam n um inteiro positivo e F_n o grupo livre de posto n. Consideremos o grupo quociente $\mathcal{H}_n = \dfrac{F_n}{\gamma_3(F_n)}$ onde $\gamma_3(F_n) = [F_n', F_n]$. É claro que $d(\mathcal{H}_n) \leq n$. Além disso,

$$\gamma_3(\mathcal{H}_n) = \left[\left[\frac{F_n}{\gamma_3(F_n)}, \frac{F_n}{\gamma_3(F_n)}\right], \frac{F_n}{\gamma_3(F_n)}\right] = \left[\frac{F_n'}{\gamma_3(F_n)}, \frac{F_n}{\gamma_3(F_n)}\right] = \left[\frac{\gamma_3(F_n)}{\gamma_3(F_n)}\right] = \{e\}$$

e como $\mathcal{H}_n' \neq \{e\}$ (pois F_n é livre) temos $\mathcal{H}_n$ um grupo nilpotente de classe 2. Segue daí que se $\mathcal{H}_n =< x_1, \ldots, x_n >$ então $\mathcal{H}_n' \leq Z(\mathcal{H}_n)$ e $\mathcal{H}_n' =< \{[x_j, x_k]; 1 \leq j < k \leq n\} >$. Uma vez que $\mathcal{H}_n' = \left[\dfrac{F_n}{\gamma_3(F_n)}, \dfrac{F_n}{\gamma_3(F_n)}\right] = \dfrac{F_n'}{\gamma_3(F_n)}$ temos $\dfrac{\mathcal{H}_n}{\mathcal{H}_n'} \simeq \dfrac{F_n}{F_n'}$ e portanto $\mathcal{H}_n/\mathcal{H}_n'$ é abeliano livre de posto n. Assim para cada elemento g de $\mathcal{H}_n$ existe um único conjunto de inteiros $\{m_i, \ell_{jk} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < k \leq n\}$ tal que

$$g = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i} \prod_{1 \leq j < k \leq n} [x_j, x_k]^{\ell_{jk}}$$

Veremos a seguir que $d(\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_n) = \dfrac{1}{3}n(n^2 + 3n - 1)$, ou seja, que a estimativa para $d(G \otimes G)$, como dada no Teorema 14.2, não poderia ser melhor.

Teorema 14.3. Para qualquer inteiro $n \geq 2$ o quadrado tensorial de $\mathcal{H}_n$ é abeliano livre, de posto $\dfrac{n(n^2 + 3n - 1)}{3}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{H}_n =< x_1, \ldots, x_n >$. Vamos definir uma função $\theta : \mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n \to \mathbb{Z}^{n^*}$, onde $n^* = \dfrac{1}{3}n(n^2 + 3n - 1)$ e mostrar que θ é uma biderivação e que o homomorfismo "estendendo" θ a $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_n$ é sobrejetor. Daí teremos que $d(\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_n)$ é pelo menos $\dfrac{n(n^2 + 3n - 1)}{3}$ e a igualdade seguirá do Teorema 14.2. Vamos reindexar a soma direta $\mathbb{Z}^{n^*}$ como

$z_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, para n^2 cópias;

$z_{iij}, 1 \leq i < j \leq n$, para $\binom{n}{2}$ cópias;

$z_{iji}, 1 \leq j < i \leq n$, para $\binom{n}{2}$ cópias;

$z_{ijk}, 1 \leq i < j < k \leq n$, para $\binom{n}{3}$ cópias, e

$z_{ijk}, 1 \leq j < i < k \leq n$, para $\binom{n}{3}$ cópias.

Sejam $g, g', h \in \mathcal{H}_n$. Esses três elementos se escrevem na forma $g = ML, h = M'L', g' = NK$ onde

$$M = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i}, \qquad M' = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m'_i}, \qquad N = \prod_{i=1}^{n} x_i^{n_i},$$
$$L = \prod_{1 \le i < j \le n} [x_i, x_j]^{\ell_{ij}}, \quad L' = \prod_{1 \le i < j \le n} [x_i, x_j]^{\ell'_{ij}}, \quad K = \prod_{1 \le i < j \le n} [x_i, x_j]^{k_{ij}}$$

Definirenos a função θ componente a componente de acordo com a Proposição 14.1.. Para $(g, h) \in \mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n$ denotaremos o ij-componente de $(g, h)\theta$ por $z_{ij}(g, h)$. Em correspondência, $z_{iij}, z_{iji}, z_{ijk}$ denotarão os iij, iji, ijk-componentes de $(g, h)\theta$. Definimos então

$$\begin{aligned}
z_{ij}(g,h) &= m_i m_j \\
z_{iij}(g,h) &= m_i \ell'_{ij} - m'_i \ell_{ij} + m_j \binom{m'_i}{2} - m'_j \binom{m_i}{2} \\
z_{iji}(g,h) &= m_i \ell'_{ji} - m'_i \ell_{ji} - m_j \binom{m'_i}{2} + m'_j \binom{m_i}{2} + m_i m'_i (m'_j - m_j) \\
z_{ijk}(g,h) &= m_i \ell'_{jk} - m'_i \ell_{jk} + m'_k \ell_{ij} - m_k \ell'_{ij} - \\
&\quad - m'_i m_j m_k + m_i m'_j m'_k + m_i m'_j m_k - m'_i m_j m'_k \\
z_{ijk}(g,h) &= m_i \ell'_{jk} - m'_i \ell_{jk} + m_k \ell'_{ji} - m'_k \ell_{ji} + m'_i m'_j m_k - \\
&\quad - m_i m_j m'_k + m_i m'_j m_k - m'_i m_j m'_k - m'_i m_j m_k + m_i m'_j m'_k.
\end{aligned}$$

Uma vez que os inteiros $m_i, \ell_{ij}, m'_i, \ell'_{ij}$ são únicos, θ está bem definida. Devemos mostrar que θ é uma biderivação, i.e., que para todo $g, g', h \in G$

$$(gg', h)\theta = (g^{g'}, h^{g'})\theta + (g', h)\theta \quad \text{e} \tag{14.2}$$
$$(g, hg')\theta = (g, g')\theta + (g^{g'}, h^{g'})\theta \tag{14.3}$$

Como

$$\begin{aligned}
M^N &= \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{n_i}\right)^{-1} \left(\prod_{i=1}^{m} x_i^{m_i}\right) \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{n_i}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i} \left[\prod x_i^{m_i}, \prod x_i^{n_i}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \left[x_i^{m_i}, x_j^{n_j}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i} \prod_{1 \le i < j \le n} [x_i, x_j]^{m_i n_j - n_i m_j}
\end{aligned}$$

segue que

$$g^{g'} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i} \prod_{1\le i<j\le n} [x_i, x_j]^{\ell_{ij}+m_in_j-n_im_j};$$

$$h^{g'} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m'_i} \prod_{1\le i<j\le n} [x_i, x_j]^{\ell'_{ij}+m'_in_j-n_im'_j};$$

$$gg' = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i+n_i} \prod_{1\le i<j\le n} [x_i, x_j]^{\ell_{ij}+k_{ij}-n_im_j}$$

e

$$hg' = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m'_i+n_i} \prod_{1\le i<j\le n} [x_i, x_j]^{\ell'_{ij}+k_{ij}-n_im'_j}.$$

A verificação de (14.2) e (14.3) é feita componente a componente. Para componentes da forma z_{ij} isto é óbvio. No caso de componentes da forma z_{iij} e z_{ijj} usamos a definição de θ e o fato que $\binom{a+b}{2} = \binom{a}{2} + \binom{b}{2} + ab$. A verificação para componentes da forma z_{ijk} é direta, embora um pouco trabalhadosa. Temos assim que θ é uma biderivação e portanto θ induz um homomorfismo $\theta^* : \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_n \to \mathbb{Z}^{n^*}$ tal que $(g \otimes h)\theta^* = (g,h)\theta$ para todo $g, h \in \mathcal{H}_n$. É óbvio que $(x_i \otimes x_j) \in X_1$, $(x_i \otimes [x_i, x_j]) \in X_2$, $(x_i \otimes [x_j, x_i]) \in X_3$, $(x_i \otimes [x_j, x_k]) \in X_4$ e $(x_i \otimes [x_j, x_k]) \in X_5$ são levados por θ^* sobre os geradores de $\mathbb{Z}^{n^*}$. Assim θ^* é sobrejetora e portanto

$$d(\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_n) \ge \frac{n(n^2+3n-1)}{3}$$

Do Teorema 14.2 segue que $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_n$ é um grupo abeliano livre de posto $\dfrac{n(n^2+3n-1)}{3}$ ∎

15. O Quadrado Tensorial não Abeliano de um p-Grupo 2-Gerado de Classe 2.

Consideremos os seguintes grupos:

$G_1 = (< c > \times < a >) \rtimes < b >$, onde $[a,b] = c$, $[a,c] = [b,c] = 1$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|c| = p^\gamma$, p um número primo ímpar, α, β, γ inteiros, $\alpha \ge \beta \ge \gamma \ge 1$.

$G_2 = < a > \rtimes < b >$, onde $[a,b] = a^{p^{\alpha-\gamma}}$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|[a,b]| = p^\gamma, \alpha, \beta, \gamma$, $p \in \mathbb{N}$, p um número primo ímpar, $\alpha \ge \beta, \alpha \ge 2\gamma$, $\beta \ge \gamma \ge 1$.

$G_3 = (< c > \times < a >) \rtimes < b >$, onde $[a,b] = a^{p^{\alpha-\gamma}}c$, $[a,b] = a^{-p^{2(\alpha-\gamma)}}c^{-p^{\alpha-\gamma}}$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $|c| = p^{\sigma}|[a,b]| = p^{\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, p$ inteiros, p um número primo ímpar, $\gamma > \sigma \geq 1$ $\alpha + \sigma \geq 2\gamma$, $\alpha \geq \beta$, $\beta \geq \gamma$.

É fácil ver que G_1, G_2, G_3 são p-grupos 2-gerados de classe de nilpotência 2. Nesta seção veremos o cálculo do quadrado tensorial não abeliano de cada um deles. Começaremos com um grupo do tipo G_2, que é um grupo metacíclico. Para este caso, necessitaremos do seguinte lema:

Lema 15.1. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ tais que $2\gamma \leq \alpha$, $\gamma \leq \beta$, e p um número primo ímpar. Para $n \in \mathbb{Z}$ denotamos por $[n]p$ a maior potência de p que divide n. Então

$$(p^{\alpha} - p^{\alpha-\gamma} + 1)^{p^{\beta}} \equiv 1 \bmod p^{\alpha} \tag{15.1}$$

$$\left[\sum_{k=0}^{p^{\beta}-1} (p^{\alpha} - p^{\alpha-\gamma} + 1)^{k}\right]_{p} = \beta, \quad \text{se} \quad \beta \leq \alpha. \tag{15.2}$$

Demonstração. Sejam α, β, γ, $p \in \mathbb{N}$ tais que p é um primo ímpar, $2\gamma \leq \alpha$ e $\gamma \leq \beta$. Como

$$(p^{\alpha} - p^{\alpha-\gamma} + 1)^{p^{\beta}} = 1 + \sum_{j=0}^{p^{\beta}-1} \binom{p^{\beta}}{j} (p^{\alpha} - p^{\alpha-\gamma})^{p^{\beta}-j},$$

para provarmos (15.1), basta mostrarmos que p^{α} divide $\sum_{j=0}^{p^{\beta}-1} \binom{p^{\beta}}{j} (p^{\alpha} - p^{\alpha-\gamma})^{p^{\beta}-j}$. Para $j = 0, 1, \ldots, p^{\beta} - 1$

$$\begin{aligned} \binom{p^{\beta}}{j} (p^{\alpha} - p^{\alpha-\gamma})^{p^{\beta}-j} &= \left(\frac{p^{\beta} \ldots (p^{\beta} - (j-1))}{j!}\right) \sum_{i=0}^{p^{\beta}-j} (-1)^{i} p^{\alpha(p^{\beta}-j-i)+(\alpha-\gamma)i} \\ &= \left(\frac{(p^{\beta} - 1) \ldots (p^{\beta} - (j-1))}{j!}\right) \sum_{i=0}^{p^{\beta}-j} (-1)^{i} p^{\alpha(p^{\beta}-j-i)+(\alpha-\gamma)i+\beta} \end{aligned}$$

Se $0 \leq i < p^{\beta} - j$ é claro que p^{α} divide $p^{\alpha(p^{\beta}-j-i)+(\alpha-\gamma)i+\beta}$. Para $i = p^{\beta} - j$,

$$p^{\alpha(p^{\beta}-j-i)+(\alpha-\gamma)i+\beta} = p^{(\alpha-\gamma)i+\beta}.$$

Como

$$\gamma_i = \gamma_i - \gamma + \gamma = \gamma(i-1) + \gamma \leq \alpha(i-1) + \beta$$

segue que

$$\alpha(i-1)-\gamma_i+\beta\geq 0,$$

ou seja,

$$(\alpha-\gamma)i+\beta\geq\alpha.$$

Assim $p^\alpha|p^{(\alpha-\gamma)i+\beta}$. Concluímos então que p^α divide $\binom{p^\beta}{j}(p^\alpha-p^{\alpha-\gamma})^{p^\beta-j}$ para todo $j\in\{0,1,\ldots,p^\beta-1\}$ e, portanto, que p^α divide $\sum\limits_{j=0}^{p^\beta-1}\binom{p^\beta}{j}(p^\alpha-p^{\alpha-\gamma})^{p^\beta-j}$. Logo

$$(p^\alpha-p^{\alpha-\gamma}+1)^{p^\beta}\equiv 1 \bmod p^\alpha.$$

Agora sejam $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{N}$ tais que $2\gamma\leq\alpha$, $\gamma\leq\beta\leq\alpha$ e $p\geq 3$ um número primo. Vamos provar que (15.2) ocorre. Temos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p^\beta-1}(p^\alpha-p^{\alpha-\gamma}+1)^k &= p^\beta+\sum_{k=1}^{p^\beta-1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}(p^\alpha-p^{\alpha-\gamma})^{k-j}\\ &= p^\beta+x+y,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}x &= \sum_{k=1}^{p^\beta-1}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-j-1}(-1)^i\binom{k}{j}\binom{k-j}{i}p^{\alpha(k-j-i)+(\alpha-\gamma)i}\\ y &= \sum_{k=1}^{p^\beta-1}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}p^{(\alpha-\gamma)(k-j)},\end{aligned}$$

Obviamente $p^\beta|x$ pois, $\alpha(k-j-i)\geq\alpha\geq\beta$ para todo $1\leq k\leq p^\beta-1$, $0\leq j\leq k-1$, $0\leq i\leq k-j-1$. Além disso, não há nenhuma parcela de x igual a $-p^\beta$. Agora

$$\begin{aligned}y &= -\binom{1}{0}p^{\alpha-\gamma}+\sum_{j=0}^{1}(-1)^{2-j}\binom{2}{j}p^{(\alpha-\gamma)(2-j)}+\ldots+\\ &+\sum_{j=0}^{p^\beta-3}(-1)^{p^\beta-2-j}\binom{p^\beta-2}{j}p^{(\alpha-\gamma)(p^\beta-2-j)}+\sum_{j=0}^{p^\beta-2}(-1)^{p^\beta-1-j}\binom{p^\beta-1}{j}p^{(\alpha-\gamma)(p^\beta-1-j)}\\ &= \sum_{\ell=1}^{p^\beta-1}(-1)^\ell p^{\ell(\alpha-\gamma)}\sum_{i=\ell}^{p^\beta-1}\binom{i}{i-\ell}\\ &= \sum_{\ell=1}^{p^\beta-1}(-1)^\ell p^{\ell(\alpha-\gamma)}\binom{p^\beta}{p^\beta-(\ell+1)}\\ &= \sum_{\ell=1}^{p^\beta-2}\left[(-1)^\ell p^{\ell(\alpha-\gamma)}\binom{p^\beta}{p^\beta-(\ell+1)}\right]+p^{(p^\beta-1)(\alpha-\gamma)}.\end{aligned}$$

Temos que p^β divide $\sum_{\ell=1}^{p^\beta-2}\left[(-1)^\ell p^{\ell(\alpha-\gamma)}\binom{p^\beta}{p^\beta-(\ell+1)}\right]$ pois para $1\leq \ell \leq p^\beta-2$,

$$\binom{p^\beta}{p^\beta-(\ell+1)} = z_\ell p^\beta$$

onde $z_\ell = \dfrac{(p^\beta-1)\ldots(p^\beta-\ell)}{(\ell+1)!} \in \mathbb{Z}$. como $p\geq 3$, $\beta\geq 1$, $\alpha-\gamma\geq 1$ temos $(p^\beta-1)(\alpha-\gamma)\geq \beta$, ou seja, p^β dividde $p^{(p^\beta-1)(\alpha-\gamma)}$. Notemos que também não há nenhuma parcela em y igual a $-p^\beta$. Segue assim que β é a maior potência de p que divide

$$\sum_{k=0}^{p^\beta-1}(p^\alpha-p^{\alpha-\gamma}+1)^k = p^\beta+x+y,$$

concluindo a prova. ■

Proposição 15.2 (M. Bacon e L.C. Kappe [2]). Seja $G=<a>\rtimes<b>$, onde $[a,b]=a^{p^{\alpha-\gamma}}, |a|=p^\alpha$, $|b|=p^\beta$, $|[a,b]|=p^\gamma$, p um primo ímpar α,β,γ inteiros, $\alpha\geq\beta$, $\alpha\geq 2\gamma$, $\beta\geq\gamma\geq 1$. Então

$$G\otimes G\cong \mathbb{Z}^2_{p^\beta}\times\mathbb{Z}_{p^{\alpha-\gamma}}\times\mathbb{Z}_{\min\{p^{\alpha-\gamma},p^\beta\}}$$

Demonstração. É claro que G é um grupo metacíclico gerado por a,b, sujeito às relações definidoras

$$a^{p^\alpha}=e,\ b^{p^\beta}=e,\ b^{-1}ab=a^{p^\alpha-p^{\alpha-\gamma}+1}.$$

Pelo Lema 15.1 temos que $(p^\alpha-p^{\alpha-\gamma}+1)^{p^\beta}\equiv 1(\mathrm{mod} p^\alpha)$. Dessa forma, G é um grupo metacíclico do tipo (12.1) com $a=y$, $b=x$, $n=p^\alpha$, $m=p^\beta$ e $\ell=p^\alpha-p^{\alpha-\gamma}+1$. Da Proposição 12.7 temos que

$$G\otimes G\cong\mathbb{Z}_{\rho_1}\times\mathbb{Z}_{\rho_2}\times\mathbb{Z}_{\rho_3}\times\mathbb{Z}_{\rho_4}$$

onde $\rho_1=m$, $\rho_2=mdc(n,\ell-1)$, $\rho_3=mdc(n,\ell-1,1+\ell+\ldots+\ell^{m-1})$, $\rho_4=mdc(n,1+\ell+\ldots,+\ell^{m-1})$. É óbvio que $\rho_1=p^\beta$ e $\rho_2=p^{\alpha-\gamma}$. Vamos calcular ρ_3 e ρ_4 explicitamente. Como

$$1+\ell+\ldots+\ell^{m-1}=\sum_{k=0}^{p^\beta-1}(p^\alpha-p^{\alpha-\gamma}+1)^k$$

e $\alpha \geq \beta$ temos pelo Lema 15.1 que a maior potência de p dividindo $1 + \ell + \ldots + \ell^{m-1}$ é p^β. Assim

$$\rho_3 = mdc(n, \ell - 1, 1 + \ell + \ldots + \ell^{m-1}) = mdc(p^\alpha, p^\alpha - p^{\alpha-\gamma}, p^\beta) = \min\{p^{\alpha-\gamma}, p^\beta\}$$

e

$$\rho_4 = mdc(n, 1 + \ell + \ldots + \ell^{m-1}) = mdc(p^\alpha, p^\beta) = p^\beta.$$

Logo $G \otimes G \cong \mathbb{Z}_{p^\beta}^2 \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha-\gamma}} \times \mathbb{Z}_{\min\{p^{\alpha-\gamma}, p^\beta\}}$. ∎

Da demonstração do Teorema 15.3 temos que se $\mathcal{H}_2 =< x_1, x_2 >, u, v \in \mathcal{H}_2$ com $u = x_1^m x_2^n [x_1, x_2]^\ell$, $v = x_1^{m'} x_2^{n'} [x_1, x_2]^{\ell'}$ então a aplicação $\theta : \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{Z}^6$, definida componente a componente como

$$\begin{aligned}
z_1(u,v) &= z_{11}(u,v) = mm' \\
z_2(u,v) &= z_{22}(u,v) = nn' \\
z_3(u,v) &= z_{12}(u,v) = mn' \\
z_4(u,v) &= z_{21}(u,v) = nm' \\
z_5(u,v) &= z_{112}(u,v) = m\ell' - m'\ell + n\binom{m'}{2} - n'\binom{m}{2} \\
z_6(u,v) &= z_{212}(u,v) = n\ell' - n'\ell - m\binom{n'}{2} + m'\binom{n}{2} + nn'(m' - m)
\end{aligned}$$

é uma biderivação. Faremos uso desta biderivação na determinação do quadrado tensorial não abeliano dos grupos G_1 e G_3.

Proposição 15.3. **(M. Bacon e L.C. Kappe [2])** Seja G um grupo do tipo G_1, isto é, $G \cong (< c > \times < a >) \rtimes < b >$, onde $[a, b] = c$, $[a, c] = [b, c] = \epsilon$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $|c| = p^\gamma$, p um primo ímpar, $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq 1$. Então

$$G \otimes G \cong \mathbb{Z}_{p^\alpha} \times \mathbb{Z}_{p^\beta}^3 \times \mathbb{Z}_{p^\gamma}^2$$

Demonstração. Como G é um grupo nilpotente de classe 2 temos pelas Proposições 13.1 e 14.1 que $G \otimes G$ é um grupo abeliano gerado por

$$a \otimes a,\ b \otimes b,\ a \otimes b,\ b \otimes a,\ a \otimes c,\ c \otimes a$$

Do Lema 13.5 segue que

$$(a \otimes a)^{p^\alpha} = (b \otimes b)^{p^\beta} = (a \otimes c)^{p^\gamma} = (b \otimes c)^{p^\gamma} = (a \otimes b)^{p^\beta} = (b \otimes a)^{p^\beta} = e$$

Assim temos que $G \otimes G$ é uma imagem homomórfica de $L = \mathbb{Z}_{p^\alpha} \times \mathbb{Z}^3_{p^\beta} \times \mathbb{Z}^2_{p^\alpha}$.

Seja $g \in G$ com $g = a^m b^n c^\ell$, onde m, n, ℓ são inteiros módulo $p^\alpha, p^\beta, p^\gamma$, respectivamente. Analogamente para $h = a^{m'} b^{n'} c^{\ell'} \in G$. Sejam z_1 a componente de $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$ em $L = \mathbb{Z}_{p^\alpha} \times \mathbb{Z}^3_{p^\beta} \times \mathbb{Z}^2_{p^\alpha}$, z_2, z_3, z_4 as componentes dos três fatores da forma $\mathbb{Z}_{p^\beta}$, e z_5, z_6 as componentes dos dois fatores da forma $\mathbb{Z}_{p^\gamma}$. Definimos uma função $\varphi : G \times G \to L$ componente a componente como segue:

$$(g,h)\varphi = (z_1(g,h),\ z_2(g,h),\ z_3(g,h),\ z_4(g,h),\ z_5(g,h),\ z_6(g,h))$$

onde

$z_1(g,h) \equiv mm' \pmod{p^\alpha}$, $\quad z_4(g,h) \equiv nm' \pmod{p^\beta}$,

$z_2(g,h) \equiv nn' \pmod{p^\beta}$, $\quad z_5(g,h) \equiv m\ell' - m'\ell + n\binom{m'}{2} - n'\binom{m}{2} \pmod{p^\gamma}$,

$z_3(g,h) \equiv mn' \pmod{p^\beta}$, $\quad z_6(g,h) \equiv n\ell' - n'\ell - m\binom{n'}{2} + m'\binom{n}{2} + nn'(m'-m) \pmod{p^\gamma}$.

Como m, m' são únicos módulo p^α, n, n' únicos módulo p^β, ℓ, ℓ' únicos módulo p^γ e $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ é fácil ver que φ está bem definida. Vamos mostrar que φ é uma biderivação. Observemos que φ é obtida da biderivação θ reduzindo-se z_1 módulo p^α, z_2, z_3, z_4 módulo p^β e z_5, z_6 módulo p^γ. Sabemos que

$$\begin{aligned}(gg', h)\theta &= (g^{g'}, h^{g'})\theta + (g', h)\theta \\ (g, hh')\theta &= (g, h')\theta + (g^{h'}, h^{h'})\theta\end{aligned}$$

acontecem componente a componente para θ como equações em inteiros. Segue então que essas relações estão satisfeitas como congruência módulo qualquer inteiro. Como os módulos dados para $z_1, \ldots, z_6$ são os menores para os quais φ está bem definida temos que φ é uma biderivação. Logo existe um único homomorfismo $\tilde{\varphi} : G \otimes G \to L$ tal que $(g \otimes h)\tilde{\varphi} = (g,h)\varphi$. Como os geradores de $G \otimes G$ são levados sobre os geradores de L

concluímos que $G \otimes G \cong L$. ■

Proposição 15.4. Seja G um grupo do tipo G_3, isto é, $G \cong (< c > \times < a >) \rtimes < b >$, onde $[a, b] = a^{p^{\alpha-\gamma}} c$, $[c, b] = a^{-2(\alpha-\gamma)} c^{-p^{\alpha-\gamma}}, |a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $|c| = p^{\sigma}$, $|[a, b]| = p^{\gamma}$, p um primo ímpar, $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ inteiros, $\gamma > \sigma \geq 1, \alpha + \sigma \geq 2\gamma, \alpha \geq \beta \geq \gamma$. Então

$$G \otimes G \cong \mathbb{Z}_{p^{\alpha-\gamma}} \times \mathbb{Z}^3_{p^{\delta}} \times \mathbb{Z}^2_{p^{\tau}},$$

onde $\delta = \min\{\alpha - \gamma, \beta\}$ e $\tau = \min\{\alpha - \gamma, \sigma\}$.

Demonstração. Sejam $g = a^{m_1} c^{\ell} b^n$, $h = a^{m'_1} c^{\ell'} b^{n'}$ elementos de G. Observemos que m_1, m'_1 são únicos módulo p^{α}, ℓ, ℓ' únicos módulo p^{σ} e n, n' únicos módulo p^{β}. Das relações de G temos que g, h podem ser escritos como

$$g = a^m b^n z^{\ell}\ ,\ h = a^{m'} b^{n'} z^{\ell'},$$

onde $z = [a, b], m = m_1 - \ell p^{\alpha-\gamma}, m' = m'_1 - \ell' p^{\alpha-\gamma}$. Pela Proposição 14.1

$$g \otimes h = (a^m b^n z^{\ell}) \otimes (a^{m'} b^{n'} z^{\ell'}) = (a \otimes a)^{\alpha_1} (b \otimes b)^{\alpha_2} (a \otimes b)^{\alpha_3} (b \otimes a)^{\alpha_4} (a \otimes z)^{\alpha_5} (b \otimes z)^{\alpha_6},$$

onde

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &\equiv (m_1 - \ell p^{\alpha-\gamma})(m'_1 - \ell' p^{\alpha-\gamma}) \bmod |a \otimes a|, \\
\alpha_2 &\equiv nn' \bmod |b \otimes b|, \\
\alpha_3 &\equiv (m_1 - \ell p^{\alpha-\gamma}) n' \bmod |a \otimes b|, \\
\alpha_4 &\equiv n(m'_1 - \ell' p^{\alpha-\gamma}) \bmod |b \otimes a|, \\
\alpha_5 &\equiv (m_1 - \ell p^{\alpha-\gamma})\ell' - (m'_1 - \ell' p^{\alpha-\gamma})\ell + n\binom{m'_1 - \ell' p^{\alpha-\gamma}}{2} - n'\binom{m_1 - \ell p^{\alpha-\gamma}}{2} \bmod |a \otimes z|, \\
\alpha_6 &\equiv n\ell' - n'\ell - (m_1 - \ell p^{\alpha-\gamma})\binom{n'}{2} + (m'_1 - \ell' p^{\alpha-\gamma})\binom{n}{2} + \\
&+ nn'(m'_1 - \ell' p^{\alpha-\gamma} - m_1 - \ell p^{\alpha-\gamma}) \bmod |b \otimes z|.
\end{aligned}$$

Seja $L = \mathbb{Z}_{p^{\alpha-\gamma}} \times \mathbb{Z}^3_{p^{\delta}} \times \mathbb{Z}^2_{p^{\tau}}$, onde $\delta = \min\{\alpha - \gamma, \beta\}$ e $\tau = \min\{\alpha - \gamma, \sigma\}$. Os componentes de L são indexadas como segue: z_1, o componente de $\mathbb{Z}_{p^{\alpha-\gamma}}, z_2, z_3, z_4$, os componentes dos três fatores da forma $\mathbb{Z}_{p^{\delta}}, z_5, z_6$, os componentes dos dois fatores da forma $\mathbb{Z}p^{\tau}$. Definimos uma função $\varphi : G \times G \longrightarrow L$ componente a componente como segue:

$$(g,h)\varphi = (z_1(g,h), z_2(g,h), z_3(g,h), z_4(g,h), z_5(g,h), z_6(g,h)),$$

onde

$$\begin{aligned}
z_1(g,h) &\equiv m_1 m_1' \bmod p^{\alpha-\gamma},\\
z_2(g,h) &\equiv nn' \bmod p^{\delta},\\
z_3(g,h) &\equiv m_1 n' \bmod p^{\delta},\\
z_4(g,h) &\equiv m_1' n \bmod p^{\delta},\\
z_5(g,h) &\equiv m_1\ell' - m_1'\ell + n\binom{m_1'}{2} - n'\binom{m_1}{2} \bmod p^{\tau},\\
z_6(g,h) &\equiv n\ell' - n'\ell - m_1\binom{n_1'}{2} + m_1'\binom{n}{2} + nn'(m_1' - m_1) \bmod p^{\tau}
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que φ está bem definida. Observemos que os componentes $z_1, \ldots, z_6$ são obtidos reduzindo-se os expoentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ (que aparecem na expansão de $g \otimes h$) módulo $p^{\alpha-\gamma}$. Por outro lado, m_1, m_1' são únicos módulo p^{α} e como $\alpha - \gamma < \alpha$ temos $z_1 \equiv m_1 m_1' \bmod p^{\alpha-\gamma}$. Uma vez que n, n' são únicos módulo p^{β} e $\beta \leq \alpha$, as congruências para z_2, z_3, z_4 acontecem módulo p^{δ}. Finalmente, ℓ, ℓ' são determinados módulo p^{σ}, $\sigma < \gamma \leq \beta \leq \alpha$. Assim as congruências para z_5 e z_6 acontecem módulo p^{τ}. Logo φ está bem definida.

Agora provaremos que φ é uma biderivação. Observemos que φ é obtida da biderivação θ reduzindo z_1 módulo $p^{\alpha-\gamma}, z_2, z_3, z_4$ módulo p^{δ}, e z_5, z_6 módulo p^{τ}. Agora

$$\begin{aligned}
(gg', h)\theta &= (g^{g'}, h^{g'}\theta + (g', h)\theta\\
(g, hh')\theta &= (g, h')\theta + (g^{h'}, h^{h'})\theta
\end{aligned}$$

acontecem componente a componente como equações em inteiros. Segue então que eles acontecem como congruências módulo qualquer inteiro. Como os módulos dados para $z_1, \ldots, z_6$ são os menores para os quais φ está bem definida concluímos que φ é uma biderivação. Temos assim que φ induz um homomorfismo $\varphi^* : G \otimes G \longrightarrow L$ tal que $(g \otimes h)\varphi^* = (g,h)\varphi$. Observemos que φ^* leva os geradores de $G \otimes G$ sobre os geradores de L. É fácil ver que φ^* é um isomorfismo e, portanto, que $G \otimes G \cong L$. ∎

ÍNDICE DE NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$n!$	n fatorial
$\binom{m}{n}$	coeficiente binomial
$m.d.c.\ \{a_1, \ldots, a_n\}$	máximo divisor comum de $a_1, \ldots, a_n$
$m.m.c.\{a_1, \ldots, a_n\}$	mínimo múltiplo comum de $a_1, \ldots, a_n$
$a \mid b$	a divide b
$\leq$	é um subgrupo de , menor ou igual que
$<$	é um subgrupo próprio de , estritamente menor que
$\trianglelefteq$	é um subgrupo normal de
$\triangleleft$	é um subgrupo normal próprio de
$\rightarrowtail$	monomorfismo
$\twoheadrightarrow$	epimorfismo
$\cong$	isomorfismo
Id_X	função identidade sobre o conjunto X
Nuc	núcleo de um homomorfismo
Im	imagem de uma função, homomorfismo
e	elemento identidade de G
$[x, y]$	comutador $x^{-1}y^{-1}xy$
$\lvert X \rvert$	cardinalidade do conjunto X
$< X >$	subgrupo de G gerado por $X \subseteq G$
$\overline{R}, < R >^G$	fêcho normal de $R \subseteq G$
$\frac{G}{N}$, G/N	grupo quociente de G por N
G'	grupo derivado de G
G^{ab}	grupo abelianizado, G/G'
$Z(G)$	centro de G
$Aut(G)$	grupo de automorfismo de G
$d(G)$	número mínimo de geradores de G
$G \oplus H$	soma direta de grupos
$G \times H$	produto direto de grupos, produto cartesiano de conjuntos
$G \rtimes H$	produto semidireto de grupos
$G * H$	produto livre de grupos
$G \otimes_R H$	produto tensorial de R-módulos
$G \otimes H$	produto tensorial não abeliano de grupos
$\mathbb{Z}_n$	grupo cíclico de ordem n
D_n	grupo diedral de grau n
Q_{2n}	grupo quaterniônico de ordem $4n$

REFERÊNCIAS

[1] M. Bacon, *On the non-abelian tensor square of a nilpotente group of class 2*, a aparecer.

[2] M. Bacon and L.C. Kappe, *The non-abelian tensor square of a 2-generator p-group of class 2*, Archiv der Mathematik vol. 61 (1993), 506-516.

[3] R. Brown, D.L. Johnson and E.F. Robertson, *Some computation of non-abelian tensor products of groups*, J. Algebra 111 (1987), 177-202.

[4] R. Brown and J.L. Loday, *Excision homotopique en basse dimension*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 298 (1984), 353-356.

[5] R. Brown and J.L. Loday, *Van Kampen theorems for diagrams of spaces*, Topology 26 (1987), 311-335.

[6] D. Guin, *Cohomologie et homologie non abélienne des groupes*, C. R. Acad. Sc. Paris 301 (1985), 337-340.

[7] G.J. Ellis, *"Crossed Modules and Their Higher Dimensional Analogues"*, Ph.D. Thesis, University of Wales, 1984.

[8] G.J. Ellis, *The non-abelian tensor product of finite groups is finite*, J. Algebra 111 (1987), 203-205.

[9] M. Hall Jr., *"The Theory of Groups"*, Macmillan, 1959.

[10] D.L. Johnson, *"Topics in the Theory of Group Presentations"*, London Mathematical Society Lecture Note Series 42, Great Britain, 1980.

[11] D.L. Johnson, *The non-abelian tensor square of a finite split metacyclic group*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 30 (1987), 91-96.

[12] S. Maclane, *"Homology"*, Springer-Verlag, Berlin e New York, 1963.

[13] W. Magnus, Karras e Solitar, *"Combinatorial Group Theory"*, Dover, New York, 1966.

[14] C. Miller, *The second homology of a group*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 588-595.

[15] N.R. Rocco, *On a construction related to the non-abelian tensor square of a group*, Bol. Soc. Brasileira Mat. 22, nº 1 (1991), 63-79.

[16] N.R. Rocco, *"Métodos de Lie em Teoria dos Grupos"*, Atas da 9ª Escola de Álgebra, Brasília, 1987, 129-213.

[17] J.J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, New York, 1979.

[18] J.J. Rotman, *"The Theory of Groups: An Introduction"*, Allyn and Bacon, Boston, Massachusets, 1973.

[19] D.Ya. Trebenko, *Nilpotent groups of class two with two generators, Current analysis and its aplications*, Naukova Dumka, Kiev 228 (1989) 201-208.

[20] J.H.C. Whitehead, *A certain exact sequence*, Ann. of Math. 52 (1950), 51-110.