GRAU TOPOLÓGICO E APLICAÇÕES

Aloisio José Freiria Neves

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

Campinas, fevereiro de 1976.

Para Lourdiney

Agradecimento

Agradeço ao Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes pelo apoio e incentivo recebidos.

Agradeço tambem ao Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira que me ouviu em seminários.

ÍNDICE

Introdução V

Capítulo I - Preliminares e Teoremas de Ponto fixo de Brouwer e de Schauder 1

Capítulo II - O Grau de Brouwer e o Grau de Leray-Schauder 13

O Grau de Brouwer 13

O Grau de Leray-Schauder 27

Capítulo III - Campos de vetores Compactos Diferenciáveis e Campos de Vetores Compactos Ímpares 38

Campos de Vetores Compactos Diferenciáveis 38

Campos de Vetores Compactos Ímpares 47

Capítulo IV - Um teorema Global para um problema não linear de auto valores 58

Bibliografia - 68

INTRODUÇÃO

Nosso propósito neste trabalho é desenvolver detalhadamente a teoria do Grau, dando na medida do possivel algumas aplicações. Para isto dividimos o texto em 4 capítulos.

O capítulo I, é puramente preparatório; ele contem resultados de aproximação de funções contínuas, um teorema de extensão de J. Dugundji e o teorema de Brown-Sard o qual demonstramos num caso particular de funções que são definidas e tomam valores no R^n.

No capítulo II tratamos do Grau de Brouwer, do Grau de Leray-Schauder e suas propriedades. Sendo que o Grau de Brouwer é baseado no número algébrico de zeros e o Grau de Leray-Schauder é uma extensão do Grau de Brouwer para campos de vetores compactos definidos em espaços vetoriais normados arbitrários. Colocamos algumas aplicações tais como: Demonstração do teorema do ponto fixo de Brouwer, enunciado no capítulo I, Teorema de Poincaré-Brouwer, do qual tiramos como colorário, que todo campo de vetores tangentes a S^{2n} se anula em pelo menos um ponto e o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder.

O capítulo III pode ser encarado como uma complementação do capítulo II, onde trabalhamos com campos de vetores compactos diferenciáveis ou ímpares. Demonstramos o teorema de Borsuk, referente a pontos antípodas, e damos algumas das mais importantes aplicações deste teorema, em particular o teorema da Invariança do Domínio.

Finalmente, no capítulo IV, nós usamos os resultados dos capítulos precedentes, para investigar a estrutura do

CAPÍTULO I

PRELIMINARES E TEOREMAS DE PONTO FIXO DE BROUWER E DE SCHAUDER

Um espaço topológico X tem a propriedade do ponto fixo (p.p.f.) se toda função contínua de X em X tem um ponto fixo.

Exemplos: Os intervalos fechados de R, diferentes do vazio, tem a p.p.f.. O círculo S^1 não tem a p.p.f..

Lema 1.1: Apropriedade do ponto fixo é uma propriedade topológica, isto é, se X tem a p.p.f. então todo espaço homeomorfo a X tambem a terá.

Demonstração:

Imediata.

Seja X um espaço topológico e A um subconjunto de X. Dizemos que A é retrato de X se existe $f:X \to A$ contínua tal que $f/_A = id_A$. Neste caso f é chamada retração sobre A.

Teorema 1.2: (J.Dugundji) Seja F um subconjunto fechado de um espaço métrico X e C um subconjunto convexo de algum espaço vetorial topologico localmente convexo E. Então toda função contínua $f: F \to C$ admite uma extensão contínua $\bar{f}:X \to C$.

Demonstração:

Referências |4| e |5| .

Observação: Durante todo este trabalho os espaços vetoriais serão sempre sobre o corpo dos Reais R ou sobre os Complexos C e indicaremos por B a bola unitária com centro na origem de um dado espaço vetorial normado.

Corolário 1.3: Seja E um espaço vetorial normado e $\emptyset \neq A \subset E$ fechado e convexo. Então A é retrato de E.

Demonstração:

Basta notar que a aplicação id:A → A admite extensão f:E → A pelo teorema (1.2) ⊥

Lema 1.4: Se X é um espaço topológico com a p.p.f.. Então todo retrato de X tambem tem a p.p.f.

Demonstração:

Se A é retrato de X, existe f:X → A contínua tal que $f/_A = id_A$, e se g:A → A é contínua, consideramos a composta gof:X → A, que tem um ponto fixo x pela hipótese, então $x \in A$ e g(x)=x. ⊥

Lema 1.5: Sejam E um espaço vetorial normado, X um subconjunto de E e f_0:X → E uma aplicação tal que $(id-f_0)(X)$ é fechado em E. Suponhamos que exista uma sequência de funções (f_j), f_j:X → E, convergindo uniformemente para f_0, tais que, cada f_j $(j \geq 1)$ tem um ponto fixo. Então f_0 tambem tem um ponto fixo.

Demonstração:

Seja $g_j = id-f_j$, é claro que f_j tem ponto fixo se, e somente se $0 \in g_j(X)$. Por hipótese temos que g_j converge uniformemente para g_0, isto é, dado $\varepsilon>0$ arbitrário, existe N tal que, para $j \geq N$ temos $\| g_j(x)-g_0(x)\| < \varepsilon$ para todo x de X, ou seja

$g_j(X) \subset g_0(X) + \varepsilon B$ para $j \geq N$

Como $0 \in g_j(X)$ para $j \geq 1$ temos que $0 \in g_0(X)+\varepsilon B$ qualquer que seja ε, então $0 \in \overline{g_0(X)} = g_0(X)$ ⊥

Seja E um espaço vetorial normado e X um conjunto diferente do vazio. Nós denotaremos por $B(X,E)$ o conjunto de todas as funções limitadas de X em E. Colocando, para $f \in B(X,E)$,

$$\| f \| = \sup_{x \in X} \| f(x) \|$$

temos que $B(X,E)$ é um espaço vetorial normado completo, se E for completo.

Seja X um espaço topológico compacto e E um espaço vetorial normado. Então nós denotaremos por $C(X,E)$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas de X em E. É fácil ver que $C(X,E)$ é um subespaço fechado de $B(X,E)$, logo $C(X,E)$ é de Banach se E for completo.

Uma aplicação $f:\bar{\Omega} \to R^m$, onde $\Omega \subset R^n$ é aberto, é dita ser de classe C^∞, se existir uma vizinhança aberta U de $\bar{\Omega}$ e uma aplicação $\bar{f}:U \to R^m$, de classe C^∞, tal que $\bar{f}/_{\bar{\Omega}}=f$.

<u>Lema 1.6</u>: Seja $\Omega \subset R^n$ aberto e limitado. Então $C^\infty(\bar{\Omega},R^m)$ é denso em $C(\bar{\Omega},R^m)$.

<u>Demonstração</u>:

Seja $f \in C(\bar{\Omega},R^m)$ pelo teorema (1.2) existe uma extensão $\bar{f}:R^n \to R^m$ de f contínua.

Temos de mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $f_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega},R^m)$ tal que $\| f_\varepsilon - f \| = \sup_{x \in \Omega} |f_\varepsilon(x)-f(x)| < \varepsilon$.

Definimos $w:R^n \to R_+$ por:

$$w(x) = \begin{cases} \alpha_0 \exp(|x|^2-1)^{-1} & \text{se} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{se} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

onde $\propto_0$ é uma constante tal que $\int_{R^n} w(x)dx = 1$. temos que $w \in C^\infty(R^n, R_+)$.

Como $\bar{f}: R^n \to R^m$ é contínua, $\bar{f}$ é uniformemente contínua em toda vizinhança compacta de $\bar{\Omega}$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$|y-x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\bar{f}(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad (1.7)$$

para $x \in \bar{\Omega}$ e y pertencendo a uma vizinhança compacta U de $\bar{\Omega}$ tal que $x + \delta B \subset U$.

Colocamos $w_\delta: R^n \to R_+$ dada por $w_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} w(\frac{x}{\delta})$ temos $w_\delta \in C^\infty(R^n, R_+)$, $\int_{R^n} w_\delta(x)dx = 1$ (por mudança de variável) e o suporte de w_δ é $\{x \in R^n \ / \ |x| \leq \delta\} = \delta\bar{B}$.

A função $f_\varepsilon: R^n \to R^m$ dada por

$$f_\varepsilon(x) = \int_{R^n} w_\delta(x-y)\bar{f}(y)dy$$

satisfaz as condições da função procurada, pois $f_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega}, R^m)$ (regra de Leibniz) e se $x \in \bar{\Omega}$

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{R^n} w_\delta(x-y)\bar{f}(y)dy - f(x)\int_{R^n} w_\delta(x-y)dy =$$

$$= \int_{x+\delta\bar{B}} w_\delta(x-y)(\bar{f}(y) - f(x))dy \quad \text{então}$$

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_{x+\delta\bar{B}} w_\delta(x-y) \max_{y \in (x+\delta\bar{B})} |\bar{f}(y) - f(x)| dy =$$

$$= \max_{y \in (x+\delta\bar{B})} |\bar{f}(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{(por (1.7)), isto é,} \quad \| f - f\| < \varepsilon \ \perp$$

Seja $U \subset R^n$ aberto e $f: U \to R^m$ diferenciável. Dizemos que $x \in U$ é um ponto regular de f se $f'(x): R^n \to R^m$ é sobrejetora. Caso contrário x é um ponto crítico (def). Um ponto $y \in R^m$ é chamado valor crítico de f se $f^{-1}(y)$ contem pelo menos um ponto crítico. Caso contrário y é um valor regular (de f). Observe que todo $y\in R^m - f(U)$ é um valor regular de f.

Teorema 1.8: (Brown-Sard) Seja $U\subset R^n$ um aberto e $f:U\to R^m$ de classe C^∞. Então o conjunto dos valores críticos de f tem medida (Lebesgue) zero em R^m.

Demonstraremos um caso particular deste teorema que é considerar $f:U\to R^n$ e mostrar que $f(\mathbb{B})$ tem medida zero em R^n, onde $\mathbb{B} = \{x\in U \ / \ \det f'(x) = 0\}$

Demonstração:

O resultado é claro se f for linear, porque se $\det f \neq 0$ temos $f(\mathbb{B}) = \emptyset$ e se $\det f = 0$ temos $\mathbb{B}=U$ e $f(\mathbb{B})$ está contido em algum subespaço próprio de R^n que tem medida nula.

Se f não é linear, mostraremos que o "volume" de $f(\mathbb{B})$ é arbitrariamente pequeno.

Seja $V\subset U$ um cubo arbitrário de diagonal Δ, dividimos V em N^n sub cubos V_k de diagonal $\frac{\Delta}{N}$. Se $V_k\cap\mathbb{B}\neq\emptyset$ nós aproximaremos f por sua derivada em algum ponto dessa intersecção e desprezaremos V_k se $V_k\cap\mathbb{B} = \emptyset$. Mais precisamente dado $\varepsilon > 0$, como f' é uniformemente contínua em V, encontramos $\delta>0$ tal que se x e y estão em V e $|x-y|\leq\delta$ temos $\|f'(x)-f'(y)\|<\varepsilon$. Daí, dividindo V em sub cubos V_k de diagonal δ, e pela desigualdade do valor médio temos, para x e y em V_k

$$|f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)| \leq |y-x| \sup_{0<t<1}\| f'(x+t(y-x)) - f'(x)\| <$$
$$< \varepsilon|y-x| \leq \varepsilon\delta \qquad (1.9)$$

Para $x \in \mathbb{B} \cap V_k$ consideramos a transformação linear

$L_x(y) = f(x) + f'(x)(y-x)$

L_x leva V_k dentro de algum sub espaço próprio Π_x do R^n e (1.9) implica que a distância de $f(y)$, para y em V_k, a Π_x é menor que $\varepsilon\delta$.

Chamando $M = \sup_{x \in V} \| f'(x) \|$ temos novamente pela desigualdade do valor médio que

$$|f(x)-f(y)| \leq |y-x| \sup_{0<t<1} \| f'(x+t(y-x)) \| \leq M|y-x| \leq M\delta$$

Portanto $f(V_k)$ esta contido numa região cujo volume é $K_n(2\varepsilon\delta)(M\delta)^{n-1}$ onde K_n é uma constante que depende da dimensão, isto é, depende de n. Observe que $f(V_k)$ esta contido entre duas "fatias" paralelas de uma esfera.

Como temos N^n sub cubos V_k o volume total de todos os $f(V_k)$ é no máximo

$$N^n K_n(2\varepsilon\delta)(M\delta)^{n-1} = 2K_n M^{n-1}\delta^n N^n \varepsilon = \mathcal{R}\varepsilon ,$$

mas $\delta = \frac{\Delta}{N}$ logo $\mathcal{R} = 2K_n M^{n-1}\Delta^n$, isto é, $\mathcal{R}$ independe de δ e N. Para completar a prova basta observar que $\mathbb{B}$ admite cobertura enumerável por cubos $\perp$

<u>Proposição 1.10</u>: Seja $\Omega \subset R^n$ aberto e limitado. Então $C_r^\infty(\bar{\Omega},R^m)$ é denso em $C(\bar{\Omega},R^m)$, onde $C_r^\infty(\bar{\Omega},R^m)$ denota o conjunto de todas as funções de classe C^∞ de $\bar{\Omega}$ em R^m que possuem o zero como valor regular.

<u>Demonstração</u>:

Dado $\varepsilon>0$ e $f \in C(\bar{\Omega},R^m)$, pelo lema (1.6), existe $f_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega},R^m)$ tal que $\| f_\varepsilon - f \| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pelo teorema de Sard o conjunto dos valores regulares de f_ε é denso em R^m, logo existe $y_\varepsilon \in R^m$, valor regular de f_ε, tal que $|y_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto $g_\varepsilon = f_\varepsilon - y_\varepsilon : \bar{\Omega} \to R^m$ é de classe C^∞ e tem o 0 como valor regular, pois

$g_\varepsilon^{-1}(0) = (f_\varepsilon - y_\varepsilon)^{-1}(0) = f_\varepsilon^{-1}(y_\varepsilon)$ e

$\| g_\varepsilon - f\| = \| (f_\varepsilon - y_\varepsilon) - f\| \leq \| f_\varepsilon - f \| + |y_\varepsilon| < \varepsilon$, que completa a prova da proposição. $\perp$

Teorema 1.11: (Ponto fixo de Brouwer) Todo subconjunto não vazio, compacto e convexo de um espaço vetorial normado de dimensão finita tem a propriedade do ponto fixo.

Demonstração:

Vide (2.9).

Este teorema não vale para espaços vetoriais normados em geral (dimensão infinita). Seja E o espaço de Hilbert das sequências de quadrado somável, isto é, E é o conjunto das sequências $x = (x_j)$ de números reais tais que $\| x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty$

Seja $s: E \to E$ a transformação linear $s(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ e $c: \bar{B} \to E$ dada por $c(x) = \frac{1}{2}(1 - \| x\|^2, 0, 0, \dots)$ temos s e c contínuas logo $f = s + c$ é contínua, $f: \bar{B} \to \bar{B}$ porque se $x \in \bar{B}$ ($\| x\| \leq 1$) temos

$$\| f(x)\|^2 = \| (\tfrac{1}{2}(1 - \| x\|^2), x_1, x_2, \dots)\|^2 = \frac{1}{4}(1 - \| x\|^2)^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots =$$

$$= \frac{1}{4}(1 - \| x\|^2)^2 + \| x\|^2 = \frac{1}{4}(1 + \| x\|^2)^2 \leq 1$$

e f não tem ponto fixo, pois se $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \bar{B}$ e $f(x) = x$, isto é, $(\frac{1}{2}(1 - \| x\|^2), x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$ temos

$\frac{1}{2}(1-\|x\|^2)=x_1=x_2=x_3=\ldots$, dai para $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \leq 1$ devemos ter $0=x_1=x_2=x_3=\ldots$, ou seja $x=0$, mas $f(0)=(\frac{1}{2},0,0,0,\ldots)$ que é uma contradição.

Para obtermos um teorema de ponto fixo em espaços vetoriais normados de dimensão infinita, faremos uma restrição na classe das funções, consideraremos as funções compactas, isto é:

Se X e Y são espaços topológicos. Uma aplicação $f:X \to Y$ é compacta se é contínua e se $f(X)$ é relativamente compacto em Y. No caso especial em que X e Y são espaços vetoriais normados e f é linear, f é dita compacta se a imagem da bola unitária tiver fecho compacto.

Sejam X um conjunto, E um espaço vetorial e $f:X \to E$ uma aplicação. Dizemos que f é de dimensão finita se $f(X)$ estiver contido num sub espaço de E de dimensão finita.

Nós usaremos as seguintes notações:

$K(X,E) = \{f:X \to E \ / \ f \text{ é compacta}\}$ e

$FK(X,E) = \{f:X \to E \ / \ f \text{ é compacta de dimensão finita}\}$,

é imediato que

$FK(X,E) \subset K(X,E) \subset B(X,E)$

Mostraremos que toda função compacta pode ser aproximada por funções compactas de dimensão finita.

<u>Lema 1.12</u>: Seja E um espaço vetorial normado e $K \subset E$ compacto.

Então para todo $\varepsilon > 0$ existe uma aplicação contínua de dimensão finita $p_\varepsilon : K \to E$ tal que $\| p_\varepsilon(x) - x \| \leq \varepsilon$ para todo $x \in E$ e ainda mais $p_\varepsilon(K) \subset co(K)$. Onde $co(K)$ denota o fecho convexo de K em E, isto é, a intersecção de todos os subconjuntos convexos de E que contem K. Logicamente $co(K)$ é um conjunto convexo.

Demonstração:

Como K é compacto podemos cobrí-lo com um número finito de bolas de raio ε, isto é, existem elementos $x_1, \ldots, x_m$ de K tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} (x_j + \varepsilon B)$$

Definimos, para cada j, a aplicação $r_j : E \to R_+$ dada por $r_j(x) = \max\{ 0, \varepsilon - \| x - x_j \| \}$ temos que r_j é contínua e para todo $x \in K$ existe j, $1 \leq j \leq m$, tal que $r_j(x) > 0$, logo podemos definir $g_j : K \to [0, 1]$ por

$$g_j(x) = \frac{r_j(x)}{\sum_{j=1}^{m} r_j(x)}$$

e é fácil ver que g_j é contínua, $\sum_{j=1}^{m} g_j(x) = 1$ e $g_j(x) > 0$ se, e somente se $x \in (x_j + \varepsilon B)$.

Definimos $p_\varepsilon : K \to E$ por $p_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{m} g_j(x) x_j$,

temos p_ε contínua e de dimensão finita, pois $p_\varepsilon(K)$ esta contido no sub espaço gerado por $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Mostraremos que $\| p_\varepsilon(x) - x \| \leq \varepsilon$ para $x \in K$, isto é:

$$\| p_\varepsilon(x) - x \| = \| g_1(x) x_1 + \ldots + g_m(x) x_m - x \| =$$

$$= \| g_1(x)(x_1 - x) + g_2(x)(x_2 - x) + \ldots + g_m(x)(x_m - x) - x + (\sum_{j=1}^{m} g_j(x)) x \| \leq$$

$\leq g_1(x)\| x_1-x\| + g_2(x)\| x_2-x\| + \ldots + g_m(x)\| x_m-x\| \leq \varepsilon$ pois $g_j(x)=0$ se $x \notin (x_j+\varepsilon B)$.

Resta mostrar que $p_\varepsilon(K) \subset co(K)$. Para isto basta observar que $co(K)$ pode ser expresso diretamente em termos dos elementos de K, isto é, seja $F = \{ y_1,\ldots,y_n\} \subset K$ e $\sigma(F) = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \ / \ \lambda_i > 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$

então $co(K) = \bigcup \{ \sigma(F) \ / \ F \subset K$ é finito$\}$ e é imediato que este conjunto contem $p_\varepsilon(K)$ (Vide |5| - pág. 411). $\perp$

Observação: A aplicação $p_\varepsilon : K \to E$ é uma aproximação não linear de dimensão finita da id_K. Algumas vezes chamada de Schauder--projection.

<u>Proposição 1.13</u>: Seja X um espaço topológico e E um espaço vetorial normado. Então $K(X,E) \subset \overline{FK(X,E)}$

(isto é, toda função compacta pode ser aproximada por funções compactas de dimensão finita).

<u>Demonstração</u>:

Seja $f \in K(X,E)$ então $\overline{f(X)}$ é compacto, pelo lema anterior (1.12) existe $p_\varepsilon : \overline{f(X)} \to E$ tal que $\| p_\varepsilon(y)-y\| \leq \varepsilon$ para $y \in \overline{f(X)}$ (ε arbitrário). Colocamos $f_\varepsilon : X \to E$ dada por $f_\varepsilon = p_\varepsilon o f$, daí temos $f_\varepsilon \in FK(X,E)$ e $\| f_\varepsilon(x)-f(x)\| = \| p_\varepsilon(f(x))-f(x)\| \leq \varepsilon$ que completa a prova. $\perp$

<u>Corolário 1.14</u>: Para toda função f de $K(X,E)$ existe uma sequência (f_j) de funções compactas de dimensão finita convergindo para f e satisfazendo $f_j(X) \subset co(\overline{f(X)})$ para todo $j \in \mathbb{N}$

<u>Demonstração</u>:

Basta observar que f_ε definida na proposição acima satisfaz $f_\varepsilon(X) \subset co(\overline{f(X)})$, pois

$f_\varepsilon(X) = p_\varepsilon(f(X)) \subset p_\varepsilon(\overline{f(X)}) \subset co(\overline{f(X)})$.

Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que uma aplicação contínua $f:X \to Y$ é aberta, se leva aberto em aberto; é fechada, se leva fechado em fechado; e é própria, se a imagem inversa de conjunto compacto é compacto.

<u>Lema 1.15</u>: Sejam X e Y espaços métricos. Então toda aplicação própria $f:X \to Y$ é fechada.

<u>Demonstração</u>:

Seja F um subconjunto fechado de X, temos de mostrar que f(F) é fechado em Y. Seja (y_j) sequência em f(F) convergindo para $y \in Y$, temos então que para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $x_j \in F$ tal que $f(x_j)=y_j$ e como $K = \{ y_j \ / \ j \in \mathbb{N}\} \cup \{ y \}$ é compacto, $f^{-1}(K)$ tambem será compacto. Daí exite uma sub sequência (x_k) de (x_j) convergindo para $x \in F$ (F contem todos os seus pontos de acumulação) e $f(x)=y$, pois f é contínua, logo $y \in f(F)$, isto é, f(F) é fechado em Y. $\perp$

Seja E um espaço vetorial normado e X um subconjunto de E. Dizemos que $f:X \to E$ é um campo de vetores compacto se id-f é compacta.

<u>Lema 1.16</u>: Seja E um espaço vetorial normado e X um subconjunto fechado de E. Então todo campo de vetores compacto $f:X \to E$ é próprio, daí fechado.

<u>Demonstração</u>:

Seja $K \subset E$ compacto e $A=f^{-1}(K)$, temos que A é fechado em X e daí fechado em E. Fazendo g=id-f, vem que $\overline{g(A)}$

é compacto e é fácil ver que

$$A \subset K + g(A) \subset K + \overline{g(A)}$$

e $K + \overline{g(A)}$ é compacto (soma de 2 compactos), logo A é compacto de E e portanto compacto de X.

<u>Teorema 1.17</u>: (Ponto fixo de Schauder) Seja C um subconjunto fechado e convexo de um espaço vetorial normado. Então toda função compacta $f:C \to C$ tem um ponto fixo.

<u>Demonstração</u>:

Como $f:C \to C$ é compacta, pelo corolário (1.14) existe uma sequência (f_j) de funções compactas de dimensão finita convergindo para f, satisfazendo $f_j(C) \subset co(\overline{f(C)})$ para todo $j \in \mathbb{N}$, mas $co(f(C)) \subset C$ então f_j ($j \in N$) são funções de C em C.

Como $id-f:C \to E$ é um campo de vetores compacto temos que $(id-f)(C)$ é fechado (lema(1.16)), logo, pelo lema (1.5), basta verificar o teorema para funções compactas de dimensão finita $f:C \to C$.

Seja $F \subset E$ um sub espaço de dimensão finita tal que $f(C) \subset F$. Fazendo $X = \overline{co(f(C))}$ temos que X é um subconjunto de F (F é convexo) convexo e compacto (X é fechado e limitado e $F \approx R^n$), ainda mais $X = \overline{co(f(C))} \subset C$ então se $g = f/_X$ temos $g:X \to X$ porque

$$g(X) = f(X) \subset f(C) \subset \overline{co(f(C))} = X$$

daí pelo teorema de ponto fixo de Brouwer g tem ponto fixo, donde concluimos que f tem ponto fixo tambem. $\perp$

CAPÍTULO II

O GRAU DE BROUWER E O GRAU DE LERAY-SCHAUDER

a) O GRAU DE BROUWER

Seja E um espaço vetorial normado de dimensão finita e $\Omega \subset E$ aberto e limitado. Desejamos associar a toda função contínua $f:\bar{\Omega} \to E$ um número inteiro que grosseiramente falando, é uma medida algébrica para o número de zeros de f em $\bar{\Omega}$. Queremos ainda que esse inteiro dependa continuamente de f, isto é, seja invariante por pequenas mudanças na função f, para isto, devemos pedir em primeiro lugar que f não tenha zeros em $\partial\Omega$.

O objetivo fundamental deste capítulo é a construção de tal função.

Definição 2.1: Seja $\Omega \subset R^n$ um aberto limitado e $f \in C_r^\infty(\bar{\Omega}, R^n)$ tal que $0 \notin f(\partial\Omega)$.

Definimos o número algébrico $a(f,\Omega)$ de f em Ω por

$$a(f,\Omega) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \text{sign det } f'(x)$$

onde $a(f,\Omega) = 0$ se $f^{-1}(0) = \emptyset$

Observe que, como $\bar{\Omega}$ é compacto e 0 é valor regular de f, a soma acima é finita.

Lema 2.2: Nas condições da definição (2.1), existe uma vizinhança V do 0 em R^n tal que, todo $y \in V$ é um valor regular de f e

$a(f-y,\Omega) = a(f,\Omega)$

Demonstração:

Observe primeiramente que f é fechada, pois $\bar{\Omega}$ é compacto.

Se $0 \notin f(\bar{\Omega})$ o lema é imediato.

Se $0 \in f(\bar{\Omega})$, $f^{-1}(0)$ é formado por uma quantidade finita de pontos $x_1,\dots,x_m$ escolhemos vizinhanças $U_1,\dots,U_m$ de $x_1,\dots,x_m$ em Ω disjuntas duas a duas, tais que são levadas difeomorficamente por f em $V_1,\dots,V_m$ vizinhanças do 0, então $f/_{U_i}: U_i \to V_i$ é difeomorfismo, logo sign det $f'(x)$ = = sign det $f'(x_i)$ qualquer que seja $x \in U_i$.

Colocamos

$$V = \bigcap_{j=1}^{m} V_j - f(\bar{\Omega} - \bigcup_{j=1}^{m} U_j)$$

temos que V é vizinhança do 0 e se $y \in V$, $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_j$

donde concluimos que y é valor regular de f e

$$a(f-y,\Omega) = \sum_{x \in (f-y)^{-1}(0)} \text{sign det } (f-y)'(x) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign det } f'(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \text{sign det } f'(x_i) = a(f,\Omega). \perp$$

Lema 2.3: Seja $\Omega \subset R^n$ aberto e limitado. Então a aplicação

$$a(.,\Omega): \{f \in C_r^\infty(\bar{\Omega},R^n) \ / \ 0 \notin f(\partial\Omega)\} \longrightarrow Z$$

é localmente constante.

Demonstração:

Seja $f_0 \in C_r^\infty(\bar{\Omega},R^n)$ com $0 \notin f_0(\partial\Omega)$. Mostraremos que para toda função $f_1 \in C_r^\infty(\bar{\Omega},R^n)$ tal que

$\| f_0 - f_1 \| < \text{dist}(0,f_0(\partial\Omega)) > 0$ temos $a(f_0,\Omega) = a(f_1,\Omega)$

isto é, $a(.,\Omega)$ é constante na bola de centro em f_0 e raio $dist(0,f_0(\partial\Omega))$ (observe que nessas condições $0\notin f_1(\partial\Omega)$).

Para todo $\lambda\in [0, 1]$ a aplicação $h: \bar{\Omega}X[0, 1] \to R^n$ definida por $h(x,\lambda)=(1-\lambda)f_0(x) + \lambda f_1(x)$ é de classe C^∞ e $0\notin h(\partial\Omega X[0, 1])$

Pelo lema (2.2) encontramos uma vizinhança V do 0 tal que, todo $y\in V$ é valor regular de f_j e

$$a(f_j-y,\Omega) = a(f_j,\Omega) \qquad j=0,1 \qquad (2.4)$$

daí e pelo teorema de Sard, existe $y\in V$, $|y|<dist(0,h(\partial\Omega X[0,1])$ tal que y é valor regular de h e f_j $(j=0,1)$.

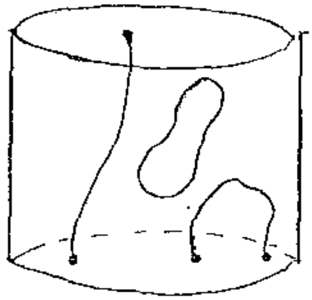
Como

$$h^{-1}(y) = \{(x,\lambda)\in \Omega X[0,1] \;/\; (1-\lambda)f_0(x) + \lambda f_1(x) = y\} =$$

$$= \{(x,\lambda)\in \Omega X[0,1] \;/\; (1-\lambda)(f_0(x)-y) + \lambda(f_1(x)-y) = 0\}$$

temos, trocando f_j por f_j-y, que 0 é valor regular de h e f_j e que $0\notin h(\partial\Omega X[0,1])$ (por causa de (2.4) a troca f_j por f_j-y não alterará a demonstração).

Temos então que $h^{-1}(0)$ é formado de ma quantidade finita de curvas C^∞; $C_1,\ldots,C_m$ (pois $h^{-1}(0)$ é compacto e localmente conexo, portanto admite somente um número finito de componentes conexas) contidas em $\Omega X[0,1]$ e C_k ou é difeomorfa a S^1 ou ao intervalo $[0,1]$ (vide |2| , apêndice). No primeiro



caso temos C_k contida em $\Omega X(0,1)$, porque se C_k contem um ponto do tipo (x_0,j) , $j=0,1$, como $D_xh(x_0,j)=f_j'(x_0)$ é isomorfismo, deveriamos ter pelo teorema das funções implicitas,

$x=x(t)$ para t nas vizinhanças de j e x nas vizinhanças de x_o, que é uma contradição.

Para $C_k=C$ $(k=1,\ldots,m)$ nós definimos uma orientação da seguinte maneira:

Seja $z(s)=(x(s),\lambda(s))$ uma parametrização de C pelo comprimento de arco

$\lambda: I\subset R \to [0,1]$

$x: I\subset R \to R^n$

daí denotando $\frac{d}{ds} = \cdot$ temos

$h'(z)\dot{z} = 0$ $(hoz=0)$ e $|\dot{z}|^2 = 1$

Nós orientamos C pedindo que $\det\begin{pmatrix} h'(z) \\ \dot{z} \end{pmatrix} > 0$, note que $\det\begin{pmatrix} h'(z) \\ \dot{z} \end{pmatrix} \neq 0$ para $z\in C$, porque como $\dot{z} \neq 0$ existem $e_1,\ldots,e_n\in R^{n+1}$ tais que $\{e_1,\ldots,e_n,\dot{z}\}$ é uma base para R^{n+1}. De $h'(z)$ ter posto n vem que $h'(z)e_1,\ldots,h'(z)e_n\in R^n$ são linearmente independentes, pois $h'(z)\dot{z} = 0$. Daí

$$\begin{pmatrix} h'(z) \\ \dot{z} \end{pmatrix} e_1, \ldots, \begin{pmatrix} h'(z) \\ \dot{z} \end{pmatrix} e_n, \begin{pmatrix} h'(z) \\ \dot{z} \end{pmatrix} \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são vetores linearmente independentes de R^{n+1}, isto é,

$\begin{pmatrix} h'(z) \\ \dot{z} \end{pmatrix}$ tem posto máximo $(n+1)$.

Por propriedades dos determinantes é fácil ver que para pontos $z = (x,\lambda)\in C$ temos

$$\dot{\lambda}\det\begin{pmatrix} h'(z) \\ \dot{z}\end{pmatrix} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x,\lambda) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x,\lambda) & \frac{\partial h_1}{\partial \lambda}(x,\lambda)\dot{\lambda} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(x,\lambda) & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(x,\lambda) & \frac{\partial h_n}{\partial \lambda}(x,\lambda)\dot{\lambda} \\ \dot{x}_1 & \cdots & \dot{x}_n & \dot{\lambda}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} D_x h(x,\lambda) & h'(z)\dot{z} \\ \\ \dot{x} & 1 \end{bmatrix} = \det D_x h(x,\lambda)$$

onde $h_1, \ldots, h_n$ são as funções coordenadas de h e $x_1, \ldots, x_n$ são as coordenadas de x, daí

$\text{sign}\ \dot{\lambda} = \text{sign}\ \det D_x h(x,\lambda)$

Seja C uma curva com pontos finais e $(x,j)\in \Omega X\{j\}$ um de seus pontos finais, dizemos que C intercepta $\Omega X\{j\}$ positivamente se $\dot{\lambda}(s_0) > 0$ onde $z(s_0)=(x,j)$ e negativamente se $\dot{\lambda}(s_0) < 0$. Como $\text{sign}\ \dot{\lambda}(s_0) = \text{sign}\ \det D_x h(x,j) = \text{sign}\ \det f'(x)$ temos que $a(f_j,\Omega)$ é igual ao número algébrico de intersecções das curvas C_k, $k=1,\ldots,m$, com $\Omega X\{j\}$.

Para cada curva C_k existem 4 possibilidades:

(i) C_k é uma curva fechada contida em $\Omega X(0,1)$

(ii) C_k tem seus pontos finais no mesmo $\Omega X\{j\}$

(iii) C_k vai de $\Omega X\{0\}$ a $\Omega X\{1\}$

(iv) C_k vai de $\Omega X\{1\}$ a $\Omega X\{0\}$

mas os casos (i) e (ii) não afetam $a(f_j,\Omega)$, logo chegamos a nossa conclusão

$a(f_0,\Omega) = a(f_1,\Omega)$. $\perp$

Para a construção da aplicação O Grau de Brouwer precisamos do seguinte resultado técnico.

Lema 2.5: Sejam E um espaço vetorial normado, X um conjunto e Y um subconjunto de X. Então $\{f\in B(X,E) \ / \ 0 \notin \overline{f(Y)}\}$ é aberto em $B(X,E)$.

Demonstração:

Seja $f\in B(X,E)$ tal que $0\notin \overline{f(Y)}$ então $\varepsilon = \text{dist}(0,f(Y)) > 0$ e para toda função $g\in B(X,E)$ tal que $\|g-f\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ temos para $y\in Y$

$|g(y)| = |f(y) + g(y) - f(y)| \geq |f(y)| - |g(y)-f(y)| \geq$

$\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}$, isto é, $0 \notin \overline{g(Y)}$. $\perp$

No que segue, Z será considerado com a topologia discreta.

Teorema 2.6: Seja E um espaço vetorial normado de dimensão finita. Então para todo aberto limitado $\Omega \subset E$ e todo $y\in E$, existe uma aplicação "O Grau de Brouwer"

$d(.,\Omega,y): \{f\in C(\bar{\Omega},E) \ / \ y\notin f(\partial\Omega)\} \longrightarrow Z$

satisfazendo:

(i) (Normalização) Se $y\in \Omega$ então $d(id,\Omega,y)=1$.

(ii) (Aditividade) Para todo par Ω_1 e Ω_2 de subconjuntos abertos disjuntos de Ω e toda função contínua $f:\bar{\Omega} \to E$ com

$y \notin f(\bar{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ temos

$d(f,\Omega,y) = d(f/_{\bar{\Omega}_1},\Omega_1,y) + d(f/_{\bar{\Omega}_2},\Omega_2,y)$

(iii) (Continuidade) $d(.,\Omega,y)$ é contínua

(iv) (Invariante por translação) $d(f,\Omega,y) = d(f-y,\Omega,0)$ qualquer que seja $f:\bar{\Omega} \to E$ contínua e $y \notin f(\partial\Omega)$.

Demonstração:

É suficiente mostrar a existência da aplicação

$d(.,\Omega,0): \{f \in C(\bar{\Omega},E) \ / \ 0 \notin f(\partial\Omega)\} \longrightarrow Z$

satisfazendo (i), (ii), (iii), porque o caso geral segue simplesmente definindo

$d(f,\Omega,y) = d(f-y,\Omega,0)$

1a. parte: Suponhamos $E=R^n$ e $D= \{f \in C(\bar{\Omega},R^n) \ / \ 0 \notin f(\partial\Omega)\} \cap C_r^{\infty}(\bar{\Omega},R^n)$. Em D temos a aplicação

$a(.,\Omega):D \to Z$ satisfazendo:

1) $a(id,\Omega)=1$ se $0 \in \Omega$

2) $a(f,\Omega) = a(f/_{\bar{\Omega}_1},\Omega_1) + a(f/_{\bar{\Omega}_2},\Omega_2)$ se Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos abertos disjuntos de Ω com $0 \notin f(\bar{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, pois

$$a(f,\Omega) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \text{sign} \det f'(x) = \sum_{x \in (f/_{\bar{\Omega}_1})^{-1}(0)} \text{sign} \det f'/_{\bar{\Omega}_1}(x) +$$

$$+ \sum_{x \in (f/_{\bar{\Omega}_2})^{-1}(0)} \text{sign} \det f'/_{\bar{\Omega}_2}(x) \qquad \text{porque } f^{-1}(0) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$$

3) $a(.,\Omega)$ é continua (lema (2.3)).

Mostraremos que $a(\cdot,\Omega)$ definida em D admite extensão contínua a $\{f\in C(\bar{\Omega},R^n) \,/\, 0 \notin f(\partial\Omega)\}$.

Pelo lema (2.5) temos que $\{f\in C(\bar{\Omega},R^n) \,/\, 0\notin f(\partial\Omega)\}$ é aberto em $C(\bar{\Omega},R^n)$ e daí pela proposição (1.10) D é denso em $\{f\in C(\bar{\Omega},R^n) \,/\, 0\notin f(\partial\Omega)\}$.

Então dada $f\in C(\bar{\Omega},R^n)$ com $0\notin f(\partial\Omega)$, existe sequência de funções (f_j), $f_j\in D$, tal que, $f_j \to f$. Estendemos $a(\cdot,\Omega)$, denotando por $d(\cdot,\Omega,0)$, colocando

$$d(f,\Omega,0) = \lim_{j\to\infty} a(f_j,\Omega)$$

Observe que $(a(f_j,\Omega))$ é finalmente constante, pois se $\varepsilon= \text{dist}(0,f(\partial\Omega))$, tomamos $N\in \mathbb{N}$ tal que para $j>N$ temos $\|f_j-f\| < \frac{\varepsilon}{3}$, daí $\text{dist}(0,f_j(\partial\Omega))> \frac{2}{3}\varepsilon$.

Para i e j maiores que N temos

$$\| f_i-f_j\| = \| f_i-f_j+f-f\| \leq \| f_i-f\| + \| f_j-f\| < \frac{2}{3}\varepsilon, \text{ isto é,}$$

$$\| f_i-f_j\| <\text{dist}(0,f_j(\partial\Omega))$$

daí usando o lema (2.3) vem que $a(f_i,\Omega) = a(f_j,\Omega)$.
Observe ainda que $d(f,\Omega,0)$ independe da sequência (f_j) considerada.

Para a extensão $d(\cdot,\Omega,0)$ as propriedades (i) e (iii) são trivialmente verificadas e para (ii), se $f\in C(\bar{\Omega},R^n)$ com $0\notin f(\partial\Omega)$ e, Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos abertos disjuntos de Ω tais que $0\notin f(\bar{\Omega}-(\Omega_1\cup \Omega_2))$, consideramos uma sequência (f_j) em D convergindo para f e $N\in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que para $j>N$ temos $\|f_j-f\|<\varepsilon$ onde $\varepsilon=\text{dist}(0,f(\bar{\Omega}-(\Omega_1\cup \Omega_2))$. Assim temos $0\notin f_j(\bar{\Omega}-(\Omega_1\cup \Omega_2))$,

$a(f_j,\Omega) = a(f_j/_{\bar{\Omega}_1},\Omega_1) + a(f_j/_{\bar{\Omega}_2},\Omega_2)$ para $j > N$ e fazendo $j\to\infty$, concluimos que

$$d(f,\Omega,0) = d(f/_{\bar{\Omega}_1},\Omega_1,0) + d(f/_{\bar{\Omega}_2},\Omega_2,0).$$

<u>2a. parte</u>: Seja E espaço vetorial normado sobre R com $n = \dim E$, então existe um isomorfismo topológico $u:E \to R^n$ e podemos definir

$$d(f,\Omega,0) = d(uofou^{-1},u(\Omega),0) \quad \text{se } f\in C(\bar{\Omega},E) \text{ e } 0\notin f(\partial\Omega).$$

Precisamos mostrar que a definição acima independe do isomorfismo u, isto é, se $v:E \to R^n$ é outro isomorfismo, então

$$d(vofov^{-1},v(\Omega),0) = d(uofou^{-1},u(\Omega),0)$$

Para isto, como $vofov^{-1}=(vou^{-1})o(uofou^{-1})o(vou^{-1})^{-1}$ e $vou^{-1}:R^n \to R^n$ é um automorfismo, basta verificar que

$$d(f,\Omega,0) = d(wofow^{-1},w(\Omega),0)$$

onde $f\in C(\bar{\Omega},R^n)$, $0\notin f(\partial\Omega)$ e $w:R^n \to R^n$ é um automorfismo qualquer, e aqui, de acôrdo com a 1a. parte, podemos particularizar e verificar o caso em que $f\in D$, então

$$d(wofow^{-1},w(\Omega),0) = a(wofow^{-1},w(\Omega)) =$$

$$= \sum_{x\in(wofow^{-1})^{-1}(0)} \text{sign det } (wofow^{-1})'(x) = \sum_{y\in f^{-1}(0)} \text{sign det } (wof'(y)ow^{-1}) =$$

$$= \sum_{y\in f^{-1}(0)} \text{sign det } f'(y) = a(f,\Omega) = d(f,\Omega,0)$$

onde $y = w^{-1}(x)$, observe que $x\epsilon\ (wofow^{-1})^{-1}(0)$ é equivalente a $w^{-1}(x)\epsilon\ f^{-1}(0)$.

As propriedades (i), (ii), e (iii) podem ser justificadas sem nenhuma dificuldade.

3a. parte: Seja E espaço vetorial normado sobre C com $n \doteq \dim E$, então E é topologicamente isomorfo a C^n, logo, como na 2a. parte, basta mostrar que $d(.,\Omega,0)$ pode ser definido para $E=C^n$ e $f\epsilon C(\bar{\Omega},C^n)$ com $0\notin f(\partial\Omega)$, de modo que

$$d(f,\Omega,0) = d(uofou^{-1},u(\Omega),0)$$

qualquer que seja o automorfismo $u:C^n \to C^n$.

Para isto, seja h o homeomorfismo canônico de C^n para R^{2n}, isto é,

$$h(x+iy) = (x,y)$$

onde consideramos $C^n=R^n+iR^n$

Nós definimos para todo $f\epsilon C(\bar{\Omega},C^n)$ com $0\notin f(\partial\Omega)$

$$d(f,\Omega,0) = d(hofoh^{-1},h(\Omega),0)$$

com esta definição temos que:

$$d(f,\Omega,0) = d(uofou^{-1},u(\Omega),0)$$

se $u:C^n \to C^n$ é um automorfismo, pois, pela 2a. parte, sabemos que $d(hofoh^{-1},h(\Omega),0)$ não se altera por conjugação por automorfismos do R^{2n}, logo

$$d(uofou^{-1},u(\Omega),0) = d(houofou^{-1}oh^{-1},\ h(u(\Omega)),\ 0) =$$

$$= d((houoh^{-1})\ o\ (hofoh^{-1})\ o\ (houoh^{-1})^{-1},(houoh^{-1})(h(\Omega)),0)=$$

$$= d(hofoh^{-1},\ h(\Omega),\ 0) = d(f,\Omega,0).$$

Note ainda que a definição acima não depende do particular h considerado, as propriedades (i), (ii) e (iii) decorrem sem muito trabalho e isto completa a prova.$\perp$

Corolário 2.7: O Grau de Brouwer tem as seguintes propriedades:

(v) (Excisão) Para todo subconjunto aberto Ω_1 de Ω e toda função $f\in C(\bar{\Omega},E)$ com $y\notin f(\bar{\Omega}-\Omega_1)$ temos

$d(f,\Omega,y) = d(f, \Omega_1,y)$

onde $d(f,\Omega_1,y) = d(f/_{\bar{\Omega}_1},\Omega_1,y)$

(vi) (Propriedade da Solução) Se $d(f,\Omega,y) \neq 0$ então $f(\Omega)$ é vizinhança de y em E.

(vii) (Dependência dos valores no bordo) Se f e g são funções contínuas de $\bar{\Omega}$ em E tais que $f/_{\partial\Omega} = g/_{\partial\Omega}$ e $y \notin f(\partial\Omega)$ então

$d(f,\Omega,y) = d(g,\Omega,y)$

(viii) (Dependência da componente conexa) Se $f\in C(\bar{\Omega},E)$, então $d(f,\Omega,\cdot)$ é constante nas componentes de $E-f(\partial\Omega)$

(ix) (Invariante por homotopia) Seja $\emptyset\neq I\subset R$ intervalo compacto. Então para toda função contínua $h:\bar{\Omega}XI \to E$ e toda curva contínua $y(.):I \to E$ tal que $y(\lambda)\notin h(\partial\Omega,\lambda)$ qualquer que seja $\lambda\in I$, $d(h(.,\lambda), \Omega, y(\lambda))$ independe de $\lambda\in I$.

Demonstração:

(v) Observe primeiramente que $d(f,\emptyset,y) = 0$

para isto, basta colocar em (ii), $\Omega=\Omega_1=\Omega_2=\emptyset$. Daí colocando $\Omega_2=\emptyset$ temos novamente por (ii)

$d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega_1,y)$

(vi) Temos que $y\in f(\Omega)$, porque se $y\notin f(\Omega)$ fazendo $\Omega_1=\emptyset$ em (v) obtemos

$d(f,\Omega,y) = d(f,\emptyset,y) = 0$ que é uma contradição.

Como $\{f\in C(\bar{\Omega},E) \;/\; y\notin f(\partial\Omega)\}$ é aberto em $C(\bar{\Omega},E)$, existe $\varepsilon>0$, tal que $f+\varepsilon B\subset\{f\in C(\bar{\Omega},E) \;/\; y\notin f(\partial\Omega)\}$ e por (iii) podemos pedir que para toda $g\in(f+\varepsilon B)$ temos $d(g,\Omega,y)\neq 0$

Dado $y_1\in(y+\varepsilon B)$ temos que $f+y-y_1\ \in(f+\varepsilon B)$ então $d(f+y-y_1,\Omega,y)\neq 0$ e $y\in(f+y-y_1)(\Omega)$, logo $y_1\in f(\Omega)$, isto é $y+\varepsilon B\subset f(\Omega)$.

(vii) Essa propriedade é consequência imediata de (ix), colocando $h(x,\lambda) = (1-\lambda)f(x) + \lambda g(x)$ e $y:[0,1]\to E$ tal que $y(.)\equiv y$

(viii) Dada $f\in C(\bar{\Omega},E)$ por (iii) e (iv) a aplicação

$d(f-\cdot\ ,\ \Omega,\ 0)=d(f,\ \Omega,\ \cdot):E-f(\partial\Omega)\to Z$

esta bem definida e é contínua, portanto necessariamente constante nas componentes conexas de $E-f(\partial\Omega)$.

(ix) Como $h: \bar{\Omega}XI\to E$ é uniformemente contínua, isto é, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que se $\|(x_1,\lambda_1) - (x_2,\lambda_2)\|<\delta$ então $\|h(x_1,\lambda_1) - h(x_2,\lambda_2)\|<\varepsilon$, onde consideramos $\|(x,\lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$, temos que a aplicação

$\lambda \longmapsto h(.,\lambda)-y(\lambda)$

é contínua de I para $C(\bar{\Omega},E)$, logo

$$\lambda \longmapsto d(h(.,\lambda)-y(\lambda),\ \Omega,\ 0)=d(h(.,\lambda),\ \Omega,\ y(\lambda))$$

é contínua de I em Z, portanto constante (I é conexo). $\perp$

Daremos a seguir algumas aplicações do Grau de Brouwer

Teorema 2.8: Seja E um espaço vetorial normado de dimensão finita e $\emptyset \neq \Omega \subset E$ aberto e limitado. Então $\partial\Omega$ não é retrato de $\bar{\Omega}$.

Demonstração:

Suponhamos que exista $f:\bar{\Omega} \to \partial\Omega$ contínua tal que $f/_{\partial\Omega} = id/_{\partial\Omega}$, então para $y \in \Omega$ vem que

$$d(f,\Omega,y) = d(id,\Omega,y) = 1$$

logo $y \in f(\Omega)$, isto é, existe $x \in \Omega$ tal que $f(x)=y$, absurdo pois $f(\Omega) \subset \partial\Omega$. $\perp$

Demonstração do teorema do ponto fixo de Brouwer (1.11) usando o Grau de Brouwer (2.9)

Se E é um espaço vetorial normado de dimensão finita e $\emptyset \neq C \subset E$ é compacto convexo então toda função contínua $f:C \to C$ tem um ponto fixo.

A função $f:C \to C$ admite extensão contínua $\bar{f}:\overline{rB} \to C$ (teorema (1.2)), onde r é tal que $\overline{rB}$ contenha C. Se $\bar{f}$ tem ponto fixo então f tambem tem, podemos supor portanto que $\bar{f}$ não tem ponto fixo em $\partial(rB)$.

Sejam

$g:\overline{rB} \to E$ dada por $g(x)=x-\bar{f}(x)$

$h:\overline{rB}X[0,1] \to E$ dada por $h(x,\lambda)=\lambda g(x)+(1-\lambda)x =$

$= \lambda(x-\bar{f}(x))+(1-\lambda)x = x-\lambda\bar{f}(x).$

Como $0\notin h(\partial(rB)X[0,1])$, pois se $x\in\partial(rB)$ e $h(x,\lambda) = 0$ então $x = \lambda\bar{f}(x)$ daí $\bar{f}(x)=x$ $(\|\bar{f}(x)\|\leq r)$ que é uma contradição, temos que $d(h(.,\lambda), rB, 0)$ independe de $\lambda\in[0,1]$, então

$d(g, rB, 0) = d(id, rB, 0) = 1$

donde, por (vi), concluimos que existe $x\in C$ tal que $f(x)=x$.$\perp$

Teorema 2.10: (Poincaré-Brouwer) Seja $\Omega\subset R^{2n+1}$ aberto e limitado contendo o zero. Suponha que $f:\partial\Omega \to R^{2n+1}$ é contínua e não tem zero. Então existe $x\in\partial\Omega$ e $\lambda\in R-\{0\}$ tal que

$f(x) = \lambda x$

Demonstração:

A aplicação f admite extensão contínua $\bar{f}:\bar{\Omega} \to R^{2n+1}$, então podemos definir $h:\bar{\Omega}X[-1,1] \to R^{2n+1}$ por

$h(x,\lambda) = (1-|\lambda|)\bar{f}(x) + \lambda x$

Seja $y:[-1,1] \to R^{2n+1}$ constante igual a 0. Se $0\notin h(\partial\Omega X[-1,1])$ temos que $d(h(.,\lambda), \Omega, 0)$ independe de λ, então $d(\bar{f}, \Omega, 0) = d(id, \Omega, 0) = d(-id, \Omega, 0)$, mas $d(id,\Omega,0)=1$ e $d(-id,\Omega,0)=-1$ (dimensão ímpar). Portanto existe $x\in\partial\Omega$ tal que $h(x,\lambda) = 0$, onde λ, pelas nossas hipóteses, deve ser diferente de 0, 1 e -1, temos então

$(1-|\lambda|)f(x) + \lambda x = 0$, isto é, $f(x) = \left(\dfrac{-\lambda}{1-|\lambda|}\right)x$.$\perp$

Corolário 2.11: Todo campo de vetores tangentes a S^{2n} se anula em pelo menos um ponto.

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que existe um campo de vetores tangentes $f:S^{2n} \to R^{2n+1}$ (então $<f(x),x>=0$ para todo x de S^{2n}) que não se anula. Pelo teorema anterior existe $x\in S^{2n}$ e $\lambda\in R-\{0\}$ tal que $f(x)=\lambda x$, daí

$<f(x),x> = <\lambda x,x> = \lambda <x,x> = \lambda \neq 0$ que é uma contradição. $\perp$

b) O GRAU DE LERAY-SCHAUDER

Nosso propósito aqui é estender o Grau de Brouwer para campos de vetores compactos definidos no fecho de subconjuntos abertos e limitados de um espaço vetorial normado.

Seja E um espaço vetorial normado e $\Omega\subset E$ aberto e limitado. Denotaremos por

$KV(\bar{\Omega},E) = \{f:\bar{\Omega} \to E \ / \ f$ é campo de vetores compacto$\}$

Temos que $KV(\bar{\Omega},E)$ é um subconjunto convexo de $C(\bar{\Omega},E)$, porque se f e g pertencem a $KV(\bar{\Omega},E)$, temos id-f e id-g compactas e

$$id-((1-\lambda)f + \lambda g)=(\lambda id + (1-\lambda)id) - ((1-\lambda)f+ \lambda g) =$$

$$\lambda(id-g) + (1-\lambda)(id-f)$$

tambem é compacta qualquer que seja $\lambda\in[o,1]$, isto é,

$(1-\lambda)f + \lambda g$ pertence a $KV(\bar{\Omega},E)$ para todo λ de $[0,1]$.

Temos tambem que $KV(\bar{\Omega},E)$ contem a $id_{\bar{\Omega}}$, é invariante por translação, isto é, se $y \in E$

$KV(\bar{\Omega},E) + y = \{f+y \ / \ f \in KV(\bar{\Omega},E)\} = KV(\bar{\Omega},E)$,

e pelo lema (1.16) os elementos de $KV(\bar{\Omega},E)$ são aplicações fechadas. Em particular $f(\partial\Omega)$ é fechado se $f \in KV(\bar{\Omega},E)$, e ainda mais se E tem dimensão finita então $KV(\bar{\Omega},E) = C(\bar{\Omega},E)$.

<u>Lema 2.12:</u> Sejam E espaço vetorial normado de dimensão finita, F subespaço vetorial de E e $\Omega \subset E$ aberto e limitado. Suponha que $f \in C(\bar{\Omega},E)$, $0 \notin f(\partial\Omega)$ e $(id-f)(\bar{\Omega}) \subset F$. Então

$d(f, \Omega, 0) = d(f/_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, 0)$

<u>Demonstração:</u>

Segue da demonstração do teorema (2.6) (existência do Grau de Brouwer) que basta mostrar o caso em que $E = R^n$. Nós podemos identificar F com R^m e $R^m = R^m X\, 0 \subset R^n$ (isto é, F é identificado com o subespaço das m primeiras coordenadas de R^n).

Mostraremos que f pode ser aproximada por uma sequência de funções f_j tais que: $f_j \in C_r^{\infty}(\bar{\Omega},R^n)$ e $f_j = id - g_j$ com $g_j \in C^{\infty}(\bar{\Omega},R^m)$. De fato, a aplicação $id-f:\bar{\Omega} \to R^m$ pode ser aproximada por uma sequência de funções g_j com $g_j \in C^{\infty}(\bar{\Omega},R^m)$ (lema (1.6)). Colocamos $f_j = id - g_j$, temos $f_j \to f$, $f_j \in C^{\infty}(\bar{\Omega},R^n)$ e podemos pedir que o zero seja valor regular de f_j ($j \in \mathbb{N}$), porque caso contrário, consideramos a restrição $f_j/_{\bar{\Omega} \cap R^m}: \bar{\Omega} \cap R^m \to R^m$ e achamos pelo teorema de Sard $y_j \in R^m$, valôr regular de $f_j/_{\bar{\Omega} \cap R^m}$ tal que $|y_j| < \frac{1}{j}$.

Daí chamando $f_j - y_j$ de f_j (observe que com esta alteração a nova função g_j continua pertencendo a $C^{\infty}(\bar{\Omega},R^m)$) temos que o zero é valor regular de $f_j/_{\bar{\Omega}\cap R^m}$ e consequentemente de f_j porque se $(x,z)\in R^n = R^m \oplus R^{n-m}$ é um ponto de $f_j^{-1}(0)$, isto é,

$$f_j(x,z) = (x,z) - (g_j(x,z),\ 0) = (0,0)$$

vem que z=0 e

$$\det f_j'(x,0) = \det \begin{bmatrix} D_x f_j(x,0) & D_z f_j(x,0) \\ & \\ 0 & id_{R^{n-m}} \end{bmatrix} =$$

$$= \det \left(f_j/_{\bar{\Omega}\cap R^m}\right)'(x) \neq 0$$

Portanto

$$d(f_j,\Omega,0) = a(f_j,\Omega) = d(f_j/_{\bar{\Omega}\cap R^m},\Omega\cap R^m,0)$$

donde concluimos que

$$d(f,\Omega,0) = d(f/_{\bar{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,0).\ \perp$$

<u>Teorema 2.13</u>: Seja E espaço vetorial normado e $\Omega \subset E$ aberto e limitado. Então para todo $y\in E$ existe uma aplicação "O Grau de Leray-Schauder"

$$d(\cdot,\ \Omega,\ y):\ \{f\in KV(\bar{\Omega},E)\ /\ y\notin f(\partial\Omega)\} \longrightarrow Z$$

satisfazendo as quatro propriedades do teorema (2.6)

<u>Demonstração:</u>

É suficiente considerar o caso y=0, para a propriedade (iv) usamos o fato que $KV(\bar{\Omega},E)$ é invariante por translação e definimos

$$d(f, \Omega, y) = d(f-y, \Omega, 0)$$

Definiremos primeiramente $d(f,\Omega,0)$ onde $f \in KV(\bar{\Omega},E)$ tal que $0 \notin f(\partial\Omega)$ e $(id-f)$ é de dimensão finita, indicaremos o conjunto de tais funções por $FKV_0(\bar{\Omega},E)$

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todos os subespaços de E de dimensão finita ordenados por inclusão.

Dada $f \in FKV_0(\bar{\Omega},E)$ e $F \in \mathcal{F}$ definimos

$$\delta(f,F) = \begin{cases} d_F(f/_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, 0) & \text{se } (id-f)(\bar{\Omega}) \subset F \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $d_F(\cdot\, , \Omega \cap F, 0)$ denota o grau de Brouwer em F

Agora para toda $f \in FKV_0(\bar{\Omega},E)$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $(id-f)(\bar{\Omega}) \subset F$. Daí para todo $F' \in \mathcal{F}$ com $F \subset F'$ temos que

$$\delta(f,F') = d_{F'}(f/_{\bar{\Omega} \cap F'}, \Omega \cap F', 0) = d_F(f/_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, 0) =$$

$= \delta(f,F)$ pelo lema anterior (2.12) pois $(id-f/_{\bar{\Omega} \cap F'})(\bar{\Omega} \cap F') \subset F$.

Portanto $\lim\limits_{\mathcal{F}} \delta(f,F)$ existe e definimos

$$d(\cdot, \Omega, 0): FKV_0(\bar{\Omega},E) \longrightarrow Z \qquad \text{por}$$

$$d(f, \Omega, 0) = \lim_{\mathcal{F}} \delta(f,F)$$

Esta aplicação possue as propriedades (i), (ii) e (iii) do teorema (2.6) e as propriedades (i) e (ii) são de verificação imediata, para (iii) seja $f \in FKV_0(\bar{\Omega},E)$. Temos que $dist(0,f(\partial\Omega)) = \varepsilon > 0$ ($f(\partial\Omega)$ é fechado). Mostraremos que

$d(\cdot,\Omega,0)$ é constante na bola aberta de centro em f e raio ε, isto é, se $g\in FKV_0(\bar{\Omega},E)$ e $\| f-g\| < \varepsilon$, existe $F\in \mathcal{F}$ tal que $(id-f)(\bar{\Omega}) \subset F$ e $(id-g)(\bar{\Omega})\subset F$, então

$$d(g,\Omega,0) = d_F(g/_{\bar{\Omega}\cap F}, \Omega\cap F, 0) = d_F(f/_{\bar{\Omega}\cap F},\Omega\cap F, 0) =$$

$= d(f,\Omega,0)$ pela propriedade (ix)(invariante por homotopia) do Grau de Brouwer. Basta considerar $h:\bar{\Omega}\cap F X[0,1] \to \bar{\Omega}\cap F$ dada por $h(x,\lambda) = (1-\lambda)f/_{\bar{\Omega}\cap F}(x) + \lambda g/_{\bar{\Omega}\cap F}(x)$, temos que $0\notin h(\partial(\bar{\Omega}\cap F)X[0,1])$.

Estenderemos a aplicação acima ao $KV_0(\bar{\Omega},E) = \{f\in KV(\bar{\Omega},E) \;/\; 0\notin f(\partial\Omega)\}$. Para isto, observaremos em primeiro lugar que $FKV(\bar{\Omega},E)$ é denso em $KV(\bar{\Omega},E)$, isto é,se $f\in KV(\bar{\Omega},E)$ temos que $(id-f)\in K(\bar{\Omega},E)$, então dado $\varepsilon>0$ arbitrário, pela proposição (1.13), existe $h\in FK(\bar{\Omega},E)$ tal que $\| h - (id-f)\| < \varepsilon$. Logo chamando $g=id-h$, temos que $g\in FKV(\bar{\Omega},E)$ e

$$\| f-g\| = \| f - (id-h)\| = \| h - (id-f)\| < \varepsilon$$

Daí, como $KV_0(\bar{\Omega},E)$ é aberto em $KV(\bar{\Omega},E)$ (lema (2.5)), temos que $FKV_0 = FKV\cap KV_0$ é denso em $KV\cap KV_0 = KV_0$.

Portanto dada $f\in KV_0(\bar{\Omega},E)$ existe uma sequência (f_j), $f_j\in FKV_0(\bar{\Omega},E)$ tal que $f_j \to f$.

Definimos

$$d(f,\Omega,0) = \lim_{j\to\infty} d(f_j,\Omega,0)$$

temos, $d(\cdot,\Omega,0)$ bem definida, pois $d(f_j,\Omega,0)$ é finalmente constante (demonstração análoga à efetuada na 1a. parte do teorema (2.6)), independe da sequência (f_j) considerada e as propriedades (i), (ii) e (iii) são verificadas sem dificuldade. $\perp$

Teorema 2.14: (Invariante por homotopia) Sejam E espaço vetorial normado, $\Omega \subset E$ aberto e limitado, $\emptyset \neq I \subset R$ intervalo fechado e $h:\bar{\Omega}XI \to E$ aplicação compacta. Suponha que $y(.):I \to E$ é uma curva continua tal que $x-h(x,\lambda) \neq y(\lambda)$ quaisquer que sejam $\lambda \in I$ e $x \in \partial\Omega$. Então

$d(id-h(.,\lambda), \Omega, y(\lambda))$

esta bem definida e independe de $\lambda \in I$.

Demonstração:

Como $id-h(.,\lambda)$ é um campo de vetores compacto ($h(.,\lambda):\bar{\Omega} \to E$ é compacta) e $(id-h(.,\lambda))(\partial\Omega) \neq y(\lambda)$ por hipótese, temos que $d(id-h(.,\lambda), \Omega, y(\lambda))$ esta bem definido para $\lambda \in I$.

Como o Grau de Leray-Schauder é invariante por translação, basta mostrar que $d(id-(h(.,\lambda)+y(\lambda)), \Omega, 0)$ independe de $\lambda \in I$ e como $h(.,.)+y(.):\bar{\Omega}XI \to E$ é compacta (a imagem esta contida no compacto $\overline{h(\bar{\Omega}XI)}+y(I)$) é suficiente mostrar que $d(id-h(.,\lambda), \Omega, 0)$ independe de λ. Para isto sejam λ_1 e $\lambda_2 \in I$ tais que $\lambda_1 < \lambda_2$, pela proposição (1.13) $h:\bar{\Omega}XI \to E$ pode ser uniformemente aproximada por aplicações h_n compactas de dimensão finita. Portanto é suficiente justificar a afirmação no caso em que h é compacta de dimensão finita e neste caso encontramos $F \in \mathcal{F}$ tal que $h(\bar{\Omega}XI) \subset F$ e para $j=1,2$ temos

$$d(id-h(.,\lambda_j), \Omega, 0) = d_F((id-h(.,\lambda_j))/_{\Omega \cap F}, \Omega \cap F, 0)$$

Como $(id-h(.,.))/_{\bar{\Omega} \cap F}:\bar{\Omega} \cap FX[\lambda_1,\lambda_2] \to F$ é contínua, $x-h(x,\lambda) \neq 0$ para $(x,\lambda) \in (\partial\Omega \cap F) X [\lambda_1, \lambda_2]$ e o Grau de Brouwer é invariante por homotopia temos que

$$d(id-h(.,\lambda_1), \Omega, 0) = d(id-h(.,\lambda_2, \Omega, 0) \perp$$

<u>Corolário 2.15</u>: Seja f_0 e $f_1 \in KV(\bar{\Omega},E)$ tais que $(1-\lambda)f_0(x) + \lambda f_1(x) \neq y$ $(y \in E)$ quaisquer que sejam $\lambda \in [0,1]$ e $x \in \partial\Omega$. Então $d(f_0, \Omega, y) = d(f_1, \Omega, y)$

<u>Demonstração</u>:

Como f_0 e $f_1 \in KV(\bar{\Omega},E)$ temos que $id-f_0$ e $id-f_1$ são aplicações compactas, então a aplicação $h: \bar{\Omega} X [0,1] \to E$ dada por $h(x,\lambda) = (1-\lambda)(x-f_0(x) + \lambda(x-f_1(x))$ tambem é compacta e

$$x-h(x,\lambda) = (1-\lambda)f_0(x) + \lambda f_1(x) \neq y$$

qualquer que seja $\lambda \in [0,1]$ e qualquer que seja $x \in \partial\Omega$, logo pelo teorema anterior vem que $d(f_0, \Omega, y) = d(f_1, \Omega, y)$. $\perp$

<u>Corolário 2.16</u>: O Grau de Leray-Schauder tem as propriedades de (v) a (viii) do Grau de Brouwer

As demonstrações são análogas às efetuadas no Corolário 2.7.

Para as aplicações da teoria do Grau dadas no Capítulo IV, precisaremos de um teorema de invariança por homotopia, mais geral, durante a qual o domínio Ω, varia continuamente. Mais precisamente: Seja $\emptyset \neq I \subset R$ um intervalo e A um subconjunto de EXI. Denotaremos por

$$A_\lambda = \{x \in E \ / \ (x,\lambda) \in A\}$$

Observe que, se A é aberto em EXI (a topologia em EXI é a topologia induzida pela topologia produto de EXR) então para todo $\lambda\epsilon I$, A_λ é um subconjunto aberto de E.

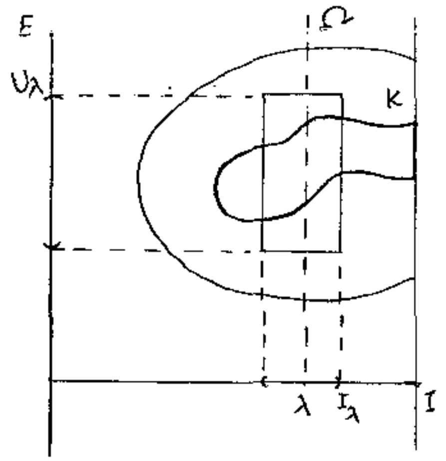
Teorema 2.17: (Geral da Invariança por homotopia) Seja $\emptyset \neq I \subset R$ um intervalo fechado e Ω um subconjunto aberto e limitado de EXI, Suponha que $h:\bar{\Omega} \to E$ é uma aplicação compacta e que $y(.):I \to E$ é uma curva contínua tal que, para todo $(x,\lambda)\epsilon\partial\Omega$, $x-h(x,\lambda) \neq y(\lambda)$. Então

$d(id-h(.,\lambda),\ \Omega_\lambda,\ y(\lambda))$

esta bem definida e independe de $\lambda\epsilon I$.

Demonstração:

Como no teorema (2.14) é suficiente mostrar para $y(\lambda) = 0$ para todo $\lambda\epsilon I$.



Temos que $K = \{(x,\lambda)\epsilon\Omega \ / \ x-h(x,\lambda)=0\}$ é um subconjunto compacto de Ω, porque, como $x-h(x,\lambda) \neq 0$ para $(x,\lambda)\epsilon\partial\Omega$, temos que K é um subconjunto fechado de EXI e está contido no compacto $\overline{h(\bar{\Omega})}XI$. Daí para todo $\lambda\epsilon I$, k_λ é um subconjunto compacto de Ω_λ.

Mostraremos que para cada $\lambda\epsilon I$, existe um (possivelmente vazio) subconjunto aberto U_λ de Ω_λ e $\varepsilon(\lambda)>0$ tal que, com $I_\lambda = I \cap (\lambda-\varepsilon(\lambda),\lambda+\varepsilon(\lambda))$, temos

$$K \cap (EXI_\lambda) \subset U_\lambda XI_\lambda \subset \Omega \qquad (2.18)$$

Suponhamos que para algum $\lambda\epsilon I$, $K_\lambda = \emptyset$. Então pela compacidade de K, encontramos $\varepsilon(\lambda)>0$, tal que, para todo $t\in I_\lambda$, $K_t=\emptyset$, neste caso colocamos $U_\lambda=\emptyset$. Consideramos agora $\lambda\in I$ tal que $K_\lambda\neq\emptyset$. Daí pela definição de topologia produto e pela compacidade de K_λ, existem $x_1, \ldots, x_m\in K$, números positivos $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ e $\rho_1, \ldots, \rho_m$ tais que

$$K_\lambda \subset \bigcup_{j=1}^{m}(x_j+\rho_j B) \subset \Omega_\lambda \quad \text{e}$$

$$(x_j+\rho_j B)X(I\cap(\lambda-\varepsilon_j\,,\ \lambda+\varepsilon_j))\subset\Omega$$

Colocando $U_\lambda = \bigcup_{j=1}^{m}(x_j+\rho_j B)$ e $\varepsilon(\lambda) = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$ temos $U_\lambda X I_\lambda \subset \Omega$.

Suponhamos que a inclusão à esquerda de (2.18) não é verificada, por menor que seja o valor de $\varepsilon(\lambda)$ considerado. Então tomando para $\varepsilon(\lambda)$ os valores da sequência $(\frac{1}{n})$ encontramos para cada $n\in\mathbb{N}$, (x_n,λ_n) tal que

$$(x_n,\lambda_n)\in K\cap(EXI_\lambda) \quad \text{e} \quad (x_n,\lambda_n)\notin U_\lambda X I_\lambda\ ,$$

logo $\lambda_n\to\lambda$ e $x_n\in U_\lambda^c$. Como K é compacto podemos supor que (x_n,λ_n) converge para $(x,\lambda)\in K$, encontramos portanto o elemento x que pertence a U_λ^c (U_λ^c é fechado) e a K_λ que é uma contradição pois $K_\lambda\subset U_\lambda$.

Da compacidade de I e da propriedade (2.18) encontramos $\lambda_1<\lambda_2< \ldots <\lambda_r$ tais que $I = \bigcup_{j=1}^{r} I_{\lambda_j}$, e pelo teorema (2.14) para $1\leq j\leq r$ temos que

$d(id-h(.,\lambda), U_{\lambda_j}, 0)$ $(\lambda\in I_{\lambda_j})$ esta bem definida e independe de $\lambda \epsilon I_{\lambda_j}$.

Pela propriedade (v) do Grau de Leray-Schauder, para todo $\lambda \epsilon\ I_{\lambda_j}$

$$d(id-h(.,\lambda),\ \Omega_\lambda,\ 0) = d(id-h(.,\lambda),\ U_{\lambda_j},\ 0)$$

Finalmente, se $\lambda \epsilon\ I_{\lambda_j} \cap I_{\lambda_{j+1}}$, tambem pela propriedade (v) vem que

$$d(id-h(.,\lambda),\ U_{\lambda_j},\ 0) = d(id-h(.,\lambda),\ \Omega_\lambda,\ 0) =$$

$$= d(id-h(.,\lambda),\ U_{\lambda_{j+1}},\ 0)$$

como queríamos verificar. $\perp$

<u>Teorema 2.19</u>: (Leray-Schauder) Seja Ω um aberto e limitado contendo o zero em algum espaço vetorial normado E. Seja $f:\bar{\Omega} \to E$ uma aplicação compacta satisfazendo a seguinte condição:

$$(LS) \quad \begin{cases} \text{Se existe } x_0 \epsilon \partial\Omega \text{ e } \lambda>0 \text{ tal que } f(x_0) = \lambda x_0 \\ \text{então } \lambda \leq 1. \end{cases}$$

Então f tem um ponto fixo em $\bar{\Omega}$.

<u>Demonstração:</u>

Podemos supor que f não tem ponto fixo em $\partial\Omega$. Então para $x \epsilon \partial\Omega$ e $\lambda \epsilon [0,1]$ temos que

$(1-\lambda)x + \lambda(x-f(x)) \neq 0$

porque, caso contrário teríamos $\lambda f(x_0) = x_0$ para algum $x_0 \epsilon \partial\Omega$ e algum $\lambda \epsilon [0,1]$ e ainda mais $\lambda > 0$ (pois $x_0 \neq 0$). Desse modo podemos escrever $f(x_0) = \frac{1}{\lambda} x_0$ que pela condição (LS) saí

$\frac{1}{\lambda} \leq 1$, isto é, $\lambda = 1$, que é uma contradição pois f não tem ponto fixo em $\partial\Omega$. Logo pelo corolário (2.15) e propriedade (i) temos

$$d(id-f, \Omega, 0) = d(id, \Omega, 0) = 1$$

e daí pela propriedade (vi) concluimos que $0 \in (id-f)(\bar{\Omega})$. $\perp$

Observação: Demonstra-se (|3|) que o Grau de Brouwer e o Grau de Leray-Schauder, determinados pelas propriedades (i), (ii), (iii) e (iv), são únicos. Daí se dim $E<\infty$ temos que os dois graus coincidem.

CAPÍTULO III

CAMPOS DE VETORES COMPACTOS DIFERENCIÁVEIS E CAMPO DE VETORES COMPACTOS ÍMPARES

Nosso objetivo aqui é obter resultados que nos forneça o Grau explicitamente, para isto, pedimos algumas propriedades adicionais para as aplicações. Trabalhamos com Campos de vetores compactos diferenciáveis ou Campo de vetores ímpares.

a) CAMPOS DE VETORES COMPACTOS DIFERENCIÁVEIS

Lema 3.1: Seja E um espaço de Banach e $\Omega \subset E$ uma aplicação compacta diferenciável em algum ponto $x \in \Omega$. Então $f'(x)$ é uma aplicação linear compacta.

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que $f'(x)$ não é compacta, isto é, $\overline{f'(x).B}$ não é compacto, então $f'(x).B$ não pode ser totalmente limitado, logo existe $\delta>0$ e uma sequência $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em E com $\|y_j\|<1$ tais que, para $j \neq k$

$$\|f'(x)y_j - f'(x)_{j_k}\| = \|f'(x)(y_j - y_k)\| \geq \delta$$

Como f é diferenciável em x, temos

$$f(x+y)-f(x) - f'(x)y = \frac{r(y)}{\|y\|}\|y\| \quad \text{e} \quad \frac{r(y)}{\|y\|} \to 0 \quad \text{quando } y\to 0.$$ Logo existe $\rho>o$ tal que para $y \in \rho B$ temos

$$\|f(x+y) - f(x) - f'(x)y\| \leq \frac{\delta}{3}\|y\| < \rho\frac{\delta}{3}$$

Mostraremos que a sequência $(f(x+\rho y_j))_{j\in\mathbb{N}}$ não tem ponto de acumulação contrariando o fato de que f é compacta.

Para isto, seja $j \neq k$ e

$\|f(x+\rho y_j) - f(x+\rho y_k)\| =$

$= \|f(x+\rho y_j)-f(x)-f'(x).\rho y_j - f(x+\rho y_k)+f(x)+f'(x).\rho y_k +$

$+ f'(x).\rho y_j - f'(x).\rho y_k\| \geq$

$\geq \rho \|f'(x)(y_j-y_k)\| - \|f(x+\rho y_j)-f(x) - f'(x).\rho y_j\| -$

$- \|f(x+\rho y_k)-f(x)-f'(x).\rho y_k\| \geq \rho\delta - \rho\frac{\delta}{3} - \rho\frac{\delta}{3} = \rho\frac{\delta}{3} > o$ $\perp$

Seja E um espaço vetorial normado e $\Omega \subset E$ aberto. Seja $f:\Omega \to E$ uma aplicação compacta e suponha que existe um ponto fixo $x_o \in \Omega$ de f. Dizemos que x_o é um ponto fixo isolado de f se existe uma vizinhança U de X_o em Ω tal que $f(x) \neq x$ para $x \in U-\{x_o\}$. Neste caso para todo $\varepsilon > o$ tal que $x_o + \varepsilon\bar{B} \subset U$, o Grau de Leray-Schauder $d(id-f, x_o + \varepsilon B, o)$ esta bem definido e pela propriedade (v) independe de ε. Daí

$$i(f,x_o) = \lim_{\varepsilon \to o} d(id-f, x_o+\varepsilon B, o)$$

esta bem definido e é chamado de índice de f em x_o.

Proposição 3.2 Sejam E espaço de Banach, $\Omega \subset E$ aberto e $f:\Omega \to E$ aplicação compacta. Seja $x_o \in \Omega$ um ponto fixo de f. Suponhamos que f é diferenciável em x_o e que 1 não é auto valor de $f'(x_o)$. Então x_o é um ponto fixo isolado de f e

$$i(f,x_o) = i(f'(x_o),0)$$

Demonstração: Como 1 não é auto valor de $f'(x_o)$ e $f'(x_o)$ é compacta (lema anterior), temos como resultado da teoria de Riesz-Schauder que $id-f'(x_o)$ admite inversa contínua. Então existe

$\alpha > o$ tal que, para todo $x \in E$

$$\|x - f'(x_0)x\| \geq 2\alpha\|x\|$$

Em particular o 0 é o único ponto fixo de $f'(x_0)$.

Como f é diferenciável em x_0, existe $\varepsilon > o$ tal que, para $x \in x_0 + \varepsilon B$

$$\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| \leq \alpha\|x - x_0\|$$

Colocando $g = id - f$ temos que as duas desigualdades anteriores podem ser escritas:

$$\|g'(x_0).x\| \geq 2\alpha\|x\| \quad \text{para } x \in E \quad \text{e}$$

$$\|g(x) - g'(x_0).(x - x_0)\| \leq \alpha\|x - x_0\| \quad (\text{pois } f(x_0) = x_0)$$

para $x \in x_0 + \varepsilon B$. Logo para $x \in x_0 + \varepsilon B$ e $\lambda \in [0,1]$ temos

$$\|(1-\lambda)g(x) + \lambda g'(x_0)(x - x_0)\| = \|g(x) - \lambda g(x) + \lambda g'(x_0)(x - x_0) +$$

$$+ g'(x_0)(x - x_0) - g'(x_0)(x - x_0)\| \geq$$

$$\geq \|g'(x_0)(x - x_0)\| - (1-\lambda)\|g(x) - g'(x_0)(x - x_0)\| \geq$$

$$\geq 2\alpha\|x - x_0\| - \alpha\|x - x_0\| = \alpha\|x - x_0\|$$

Daí, em particular para $\lambda = o$, vem que $\|g(x)\| = \|x - f(x)\| \geq \alpha\|x - x_0\|$ para $x \in x_0 + \varepsilon B$ donde concluimos que x_0 é um ponto fixo isolado de f e usando o corolário (2.15) concluimos que

$$d(g, x_0 + \varepsilon B, o) = d(g'(x_0) - y_0 \, , \, x_0 + \varepsilon B, o)$$

onde $y_0 = g'(x_0).x_0$.

Desde que $g'(x_0)-y_0$ tem seu único zero no ponto x_0, pois $g'(x_0)$ é bijetora, vem, pela propriedade (v) do Grau de Leray-Schauder, que para $\rho>\|x_0\|$ temos

$$d(g'(x_0)-y_0\ ,\ x_0+\varepsilon B,o) = d(g'(x_0)-y_0\ ,\ \rho B,o)$$

Ainda mais temos que

$$(1-\lambda)g'(x_0).x + \lambda(g'(x_0).x-y_0) \neq 0 \text{ se } \|x\| = \rho \text{ e } \lambda\varepsilon[0,1]$$

pois caso contrário teríamos que

$$0 = g'(x_0).x-\lambda y_0 = g'(x_0)x-\lambda g'(x_0)x_0 = g'(x_0)(x-\lambda x_0)$$

que é uma contradição pois $g'(x_0)$ é bijetora e $x-\lambda x_0 \neq 0$. Então

$$d(g'(x_0)-y_0\ ,\ \rho B,0) = d(g'(x_0)\ ,\ \rho B,0)$$

Portanto usando a propriedade (v) do Grau de Leray - Schauder e as igualdades anteriores podemos escrever:

$$d(id-f'(x_0),\ \varepsilon B,0) = d(g'(x_0),\ \varepsilon B,0) =$$
$$= d(g'(x_0),\ \rho B,0) = d(g'(x_0)-y_0,\ \rho B,0) =$$
$$= d(g'(x_0)-y_0,\ x_0+\varepsilon B,0) = d(g,\ x_0+\varepsilon B,0) =$$
$$= d(id-f,\ x_0+\varepsilon B,0) \text{ que implica}$$
$$i(f'(x_0),\ 0) = i(f,x_0) \quad \perp$$

Seja E um espaço de Banach e seja $T:E\to E$ aplicação linear contínua. Seja λ um auto valor de T. Então a multiplicidade (algébrica) $m(\lambda)$ de λ é por definição a dimensão do sub-espaço vetorial

$$E_\lambda = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker\left[(\lambda id-T)^n\right]$$

Como resultado da teoria de Riesz-Schauder, todo auto valor diferente de zero de uma aplicação linear compacta tem multiplicidade finita e neste caso $E = E_\lambda \oplus F_\lambda$ onde E_λ e F_λ são sub-espaços vetoriais invariantes por T. Ainda mais temos somente uma quantidade finita de auto-valores (Reais) maiores que 1.

Teorema 3.3 Sejam E um espaço de Banach, $\Omega \subset E$ aberto e $f:\Omega \to E$ aplicação compacta.
Seja $x_0 \in \Omega$ um ponto fixo de f e suponhamos que f é diferenciável em x_0 e 1 não é auto valor de $f'(x_0)$. Então x_0 é um ponto fixo isolado de f e se E é real

$$i(f,x_0) = (-1)^m$$

onde m é a soma das multiplicidades de todos os auto-valores reais $\lambda > 1$ de $f'(x_0)$. Se E é complexo então

$$i(f,x_0) = 1$$

Demonstração: Sejam $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ os auto valores distintos de $f'(x_0)$ (Reais) maiores que 1. Então $E = N_1 \oplus \ldots \oplus N_k \oplus M$ onde M e os N_j são invariantes por $f'(x_0)$ e $\dim N_j = m(\lambda_j)$. Seja $N = N_1 \oplus \ldots \oplus N_k$ e $m = \sum_{j=1}^{k} m(\lambda_j)$

Pela proposição (3.2) basta mostrar que

$$i(f'(x_0),0) = (-1)^m$$

Para $\lambda \in [0,1]$ e $x \neq 0$ temos que

$(1-\lambda)(id-f'(x_0)) + \lambda(-id_N \oplus id_M) \neq 0$ pois para $\lambda = 1$ e $\lambda = 0$

é imediato, basta observar que $N \cap M = \{0\}$ e $(id-f'(x_0))(x) \neq 0$ se $x \neq 0$. Suponhamos agora que para $\lambda \in (0,1)$ e $0 \neq x = y+z \in N \oplus M$ temos

$$0 = (1-\lambda)(y+z - f'(x_0)(y+z)) + \lambda(-y+z) =$$

$$= y+z - f'(x_0).y - f'(x_0).z - \lambda y - \lambda z + \lambda f'(x_0).y + \lambda f'(x_0).z$$

$$- \lambda y + \lambda z =$$

$$= (y - 2\lambda y - f'(x_0).y + \lambda f'(x_0).y) + (z - f'(x_0).z + \lambda f'(x_0).z)$$

Como o elemento do primeiro parênteses pertence a N e o do segundo pertence a M devemos ter

$$y - 2\lambda y - f'(x_0)y + \lambda f'(x_0).y = 0 \quad \text{e}$$

$$z - f'(x_0).z + \lambda f'(x_0).z = 0 \quad \text{isto é}$$

$$f'(x_0)y = \frac{1-2\lambda}{1-\lambda}\, y \quad \text{e} \quad f'(x_0)z = \frac{1}{1-\lambda} z.$$

Como $\frac{1-2\lambda}{1-\lambda} < 1$, $\frac{1}{1-\lambda} > 1$, $f'(x_0)/_N$ tem somente auto valores maiores que 1 e $f'(x_0)/_M$ somente auto valores menores que 1 vem que $y = z = 0$ que é uma contradição.

Daí temos para $\varepsilon > o$ que

$$d(id-f'(x_0)\ ,\ \varepsilon B, 0) = d(-id_N \oplus id_M\ ,\ \varepsilon B, 0)$$

e o termo do lado direito dessa igualdade esta bem definido, porque

$$id - (-id_N \oplus id_M)(y+z) = 2y \quad \text{isto é}$$

$$(id-(-id_N \oplus id_M))(\varepsilon \bar{B}) \subset N$$

e N é de dimensão finita, logo $-id_N \oplus id_M$ é um campo de vetores compacto e pela definição do Grau de Leray-Schauder vem que

$$d(-id_N \oplus id_M\ ,\ \varepsilon B, 0) = d_N\left((-id_N \oplus id_M)/_{\varepsilon\bar{B}\cap N}\ ,\ \varepsilon B \cap N\ ,\ 0\right) =$$

$$= d_N(-id_N\ ,\ \varepsilon B \cap N\ ,\ 0)$$

Se E é real temos

$$d_N(-id_N\ ,\ \varepsilon B \cap N\ ,\ 0) = (-1)^{\dim N}\ (-1)^m$$

Se E é complexo temos

$$d_N(-id_N\ ,\ \varepsilon B \cap N\ ,\ 0) = d(h o(-id_N) o\ h^{-1},\ h(\varepsilon B \cap N),\ 0)$$

onde h é o homeomorfismo canônico considerado na definição do Grau de Brouwer, logo

$$d_N(-id_N\ ,\ \varepsilon B \cap N\ ,\ 0) = 1$$

pois $h o(-id_N) o\ h^{-1}$ é a identidade de R^{2m} . $\perp$

<u>Teorema 3.4</u> Seja E um espaço vetorial normado, Real e de dimensão finita. Sejam $\Omega \subset E$ aberto e limitado, $f \in C(\bar{\Omega}, E) \cap C^1(\Omega, E)$ tal que $0 \notin f(\partial\Omega)$ e que 0 é um valor regular de f.

Então

$$d(f, \Omega, 0) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \text{sign det } f'(x)$$

<u>Demonstração</u>: Temos que $\bar{\Omega}$ é compacto e que 0 é um valor regular de f, então $f^{-1}(0)$ é formado por uma quantidade finita de pontos isolados $x_1, \ldots, x_m$, portanto pela propriedade (v), pelo teorema (3.2), pelo teorema (3.3) e $\varepsilon > o$ suficientemente pequeno podemos escrever:

$$d(f,\Omega,0) = \sum_{x\in f^{-1}(0)} d(f,x+\varepsilon B,0) = \sum_{x\in f^{-1}(0)} i(id-f,x) =$$

$$= \sum_{x\in f^{-1}(0)} i(id-f'(x),0) = \sum_{x\in f^{-1}(0)} (-1)^{m(x)}$$ (pois 1 não é auto valor de $id-f'(x)$), onde $m(x)$ é a soma das multiplicidades de todos os auto valores $\lambda>1$ de $\underline{id-f'(x)}$.

Como $(id-f'(x))y = \lambda y$ é equivalente a $f'(x).y = (1-\lambda)y$ temos que $m(x)$ é a soma das multiplicidades de todos os auto valores negativos de $f'(x)$.

Sabemos que $\det f'(x)$ é igual ao produto de todos os auto valores da complexificação de $f'(x)$, logo

$$\text{sign} \det f'(x) = (-1)^{m(x)}$$

Portanto

$$d(f,\Omega,0) = \sum_{x\in f^{-1}(0)} \text{sign} \det f'(x). \quad \perp$$

Encerraremos este ítem com uma aplicação, para isto, observaremos o seguinte:

Sabemos que num espaço métrico conexo M, para toda bola com centro em x, B_x , tal que, $M\cap B_x^c \neq \emptyset$ temos $M\cap \partial B_x \neq \emptyset$. Daí, podemos concluir que num espaço métrico conexo M, com mais de um ponto, qualquer vizinhança V de $x\in M$, contem uma quantidade não enumerável de pontos e ainda mais se A é um subconjunto enumerável de M, $M-A$ é denso em M, pois se existem $x\in M$ e V_x vizinhança de x em M tais que $V_x\cap(M-A) = \emptyset$ temos

$$\emptyset = (V_x\cap M)-A = V_x-A$$

que implica $V_x\subset A$, absurdo pois A é enumerável.

Com estas observações e o Grau de Brouwer podemos mostrar o seguinte teorema.

Teorema 3.5: Se $f:R^n \to R^n$ $(n \geq 2)$ é de classe C^1 com uma quantidade enumerável de pontos críticos. Então f é uma aplicação aberta.

Demonstração:

Seja A o conjunto dos pontos críticos de f. Então R^n-A é conexo, daí det $f'(x)$ para $x \in R^n-A$ tem sempre o mesmo sinal.

Se $U \subset R^n$ é aberto e $y_0 \in f(U)$ temos de mostrar que existe uma vizinhança de y_0 inteiramente contida em $f(U)$.

a) Se existe $x \in U-A$ tal que $f(x) = y_0$, o problema não apresenta dificuldade, pois f é um difeomorfismo de classe C^1 de uma vizinhança de x sobre uma vizinhança de $y_0 = f(x)$.

b) Caso contrário temos que existe $x_0 \in U \cap A$ tal que $f(x_0) = y_0$ (note aqui que somente os pontos de A podem ir em y_0) e como A é enumerável existe $\varepsilon > o$ tal que
$y_0 \notin f(\partial(x_0+\varepsilon B))$ e $(x_0+\varepsilon B) \subset U$.

Pela observação feita anteriormente temos que $f(x_0+\varepsilon B)-f(A)$ é denso em $f(x_0+\varepsilon B)$, logo podemos escolher y_1 em $f(x_0+\varepsilon B)-f(A)$ suficientemente próximo de y_0 de modo que

$$d(f, x_0+\varepsilon B, y_0) = d(f+y_0-y_1, x_0+\varepsilon B, y_0)$$

pela continuidade do Grau de Brouwer, e devido ao fato de y_1 estar em $f(x_0+\varepsilon B)-f(A)$ temos ainda mais que:

y_1 é valor regular de $f/_{x_0+\varepsilon B}$ e

$$(f/_{x_0+\varepsilon B})^{-1}(y_1) \neq \emptyset$$

Pelo teorema (3.4) podemos escrever:

$$d(f,\ x_0+\varepsilon B,\ y_0) = d(f+y_0-y_1\ ,\ x_0+\varepsilon B,\ y_0) =$$

$$= \sum_{x\,\in\left((f+y_0-y_1)/x_0+\varepsilon B\right)^{-1}(y_0)} \text{sign det } (f+y_0-y_1)'(x) =$$

$$= \sum_{x\,\in\,(f/_{x_0+\varepsilon B})^{-1}(y_1)} \text{sign det } f'(x) \neq 0$$

(det $f'(x)$ tem sempre o mesmo sinal se $x\varepsilon R^n - A$)

Finalmente pela propriedade (vi) do Grau de Brouwer $f(x_0+\varepsilon B)$ é vizinhança de y_0 em $f(U)$. $\perp$

b) CAMPOS DE VETORES COMPACTOS ÍMPARES

Um sub conjunto Ω de um espaço vetorial é chamado symétrico, (com respeito à origem) se $-\Omega = \Omega$. Sejam E e F espaços vetoriais e $\Omega \subset E$ simétrico. Dizemos que a aplicação $f:\Omega \to F$ é ímpar (respectivamente par) se para todo $x\varepsilon\Omega$, $f(-x) = -f(x)$ (respectivamente $f(x) = f(-x)$).

Começaremos com alguns resultados técnicos

Proposição 3.6 Seja $K \subset R^n$ compacto e seja $f\varepsilon C(K,R^m)$ com $m>n$ e $0 \notin f(K)$. Então f tem uma extensão contínua $\bar{f}:R^n \to R^m$ com

$0 \notin \bar{f}(R^n)$.

<u>Demonstração</u>: Seja $\delta = dist(0,f(K))$. Escolhemos $\varepsilon > o$ tal que $2\varepsilon < \delta$.

Pelo lema (1.6) existe $g \varepsilon C^\infty(R^n,R^m)$ tal que $\|f-g\|_{C(K,R^m)} < \varepsilon$ (Verifique na demonstração do lema (1.6), que f_ε esta definida em todo o R^n).

Como $m>n$, pelo teorema de BROWN-SARD, $g(R^n)$ tem medida nula em R^m e daĩ existe $y \varepsilon R^m - g(R^n)$ com $|y|$ arbitrariamente pequeno, portanto mudando g por g-y se necessãrio, podemos supor que $0 \notin g(R^n)$.

Modificaremos a função g de modo a obter uma função h tal que $|h(x)| \geq \delta/2$ para $x \varepsilon R^n$ e $h(x) = g(x)$ para $x \varepsilon K$. Para isto consideremos $\rho: R_+ \to R_+$ dada por

$$\rho(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\delta} & \text{se } o \leq t \leq \frac{\delta}{2} \\ 1 & \text{se } t > \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

Colocamos

$$h(x) = \frac{g(x)}{\rho(|g(x)|)}$$

temos $h \varepsilon C(R^n,R^m)$, $|h(x)| = \frac{\delta}{2}$ se $o<|g(x)| \leq \frac{\delta}{2}$,

$|h(x)| > \frac{\delta}{2}$ se $|g(x)| > \frac{\delta}{2}$ e finalmente se $x \varepsilon K$, como

$|g(x)| \geq |f(x)|-|g(x) - f(x)| \geq \delta - \varepsilon > \delta/2$,

temos $h(x) = g(x)$, logo

$\|f-h\|_{C(K,R^m)} < \varepsilon$

A função $f-h\colon K \to \varepsilon B$, pelo teorema (1.2), admite extensão $k\colon R^n \to \varepsilon B$. Portanto a função $\bar{f} = h+k$ satisfaz as condições de proposição pois

$\bar{f}/_K = h/_K + k/_K = f$ e para $x \in R^n$

$|\bar{f}(x)| \geq |h(x)| - |k(x)| \geq \delta/_2 - \varepsilon > o$. $\perp$

Lema 3.7 Seja $K \subset R^n$ compacto e simétrico.
Seja $f \in C(K, R^m)$, ímpar, tal que $0 \notin f(K)$ e $m>n$. Então existe uma extensão contínua ímpar $\bar{f}\colon R^n \to R^m$ de f tal que $\bar{f}(x) \neq 0$ se $x \neq 0$.

Demonstração

Como f é ímpar e $0 \notin f(K)$ temos $0 \notin K$. Colocamos então $\delta = \mathrm{dist}(0, K)$. Demonstraremos o lema por indução sobre n.

1) $n = 1$: Pela proposição (3.6) f tem extensão contínua, sem zeros, sobre R. Restrinjimos esta extensão a $[\delta, \infty)$ obtendo $f_1\colon [\delta, \infty) \to R^m$ e colocamos para $x \in R_+$

$$\bar{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se} \quad x \geq \delta \\ \dfrac{f_1(\delta)}{\delta}\, x & \text{se} \quad o \leq x \leq \delta \end{cases}$$

Finalmente obtemos a função $\bar{f}\colon R \to R^m$ desejada colocando

$\bar{f}(x) = \bar{f}_1(x)$ se $x \geq o$ e

$\bar{f}(x) = -\bar{f}_1(-x)$ se $x \leq o$.

2) $n-1 \to n$: Identificamos R^{n-1} com $R^{n-1} \times \{0\} \subset R^n$ e escolhemos $\rho > o$ tal que $K \subset \rho B$, então $K \subset \rho\bar{B} - \delta B$.

Construimos $\bar{f}$ por etapas:

a) Se $K \cap R^{n-1} \neq \emptyset$, pela hipótese de indução, podemos estender $f/_{K \cap R^{n-1}}$ continuamente, ímpar, e sem zeros para a aplicação

f_1: $R^{n-1} \cap (\rho\bar{B}-\delta B) \longrightarrow R^m$

Se $K \cap R^{n-1} = \emptyset$ tomamos para f_1 uma função contínua, ímpar e sem zeros arbitrária.

b) Seja

$$\bar{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se} \quad x \in R^{n-1} \cap (\rho\bar{B}-\delta B) \\ \\ f(x) & \text{se} \quad x \in K \cap (R^{n-1} x R_+) \end{cases}$$

(observe que f_1 já é ímpar em $R^{n-1} \cap (\rho\bar{B}-\delta B)$)

Estendemos $\bar{f}_1$ pela proposição (3.6) continuamente e sem zeros para

f_2: $(\rho\bar{B}-\delta B) \cap (R^{n-1} x R_+) \longrightarrow R^m$

c) Estendemos f_2 obtendo $f_3 \in C(\rho\bar{B}-\delta B, R^m)$ por reflexão em torno do hiper plano $R^{n-1} x \{0\}$, isto é, se $x \in (R^{n-1} x R_-) \cap (\rho\bar{B}-\delta B)$ colocamos $f_3(x) = -f_2(-x)$.

d) Definimos finalmente $\bar{f} \in C(R^n, R^m)$ por:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f_3(x) & \text{se} \quad \delta \leq |x| \leq \rho \\ \frac{|x|}{\delta} \; f_3(\frac{\delta}{|x|} x) & \text{se} \quad 0 < |x| \leq \delta \\ \frac{|x|}{\rho} \; f_3(\frac{\rho}{|x|} x) & \text{se} \quad |x| \geq \rho \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

$\perp$

Teorema 3.8 (BORSUK)

Seja E um espaço vetorial normado e $\Omega \subset E$, aberto, limitado, contendo a origem e simétrico.

Seja $f: \bar{\Omega} \to E$ campo de vetores compacto tal que $f/_{\partial\Omega}$ é ímpar e $0 \notin f(\partial\Omega)$. Então

$d(f,\Omega,0) \equiv 1 \pmod{2}$

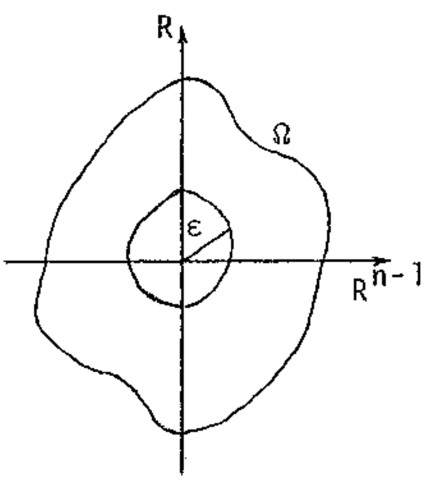
e f tem um zero em Ω

Demonstração

a) Primeiramente suponhamos $\dim E = n < \infty$. Pela definição do Grau de Brouwer, podemos supor sem perda de generalidade, que $E = R^n$, pois $d(f,\Omega,0) = d(uofou^{-1}, u(\Omega),0)$ onde $u: E \to R^n$ é um isomorfismo topológico e temos $uofou^{-1}$ e $u(\Omega)$ dentro das hipóteses do teorema.

Escolhemos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon\bar{B} \subset \Omega$.

A função $g_1: \varepsilon\bar{B} \cup \partial\Omega \to R^n$ dada por $g_1/_{\varepsilon\bar{B}} = id_{\varepsilon\bar{B}}$ e $g_1/_{\partial\Omega} = f/_{\partial\Omega}$ admite, pelo teorema (1.2), extensão para $\bar{g}_1 \in C(\bar{\Omega}, R^n)$.



Então pela propriedade (vii) temos $d(f,\Omega,0) = d(\bar{g}_1, \Omega,0)$ mas

$d(\bar{g}_1,\Omega,0) = d(id, \varepsilon B,0) + d(\bar{g}_1, \Omega-\varepsilon\bar{B},0)$ pela propriedade (ii). Daí, como $d(id,\varepsilon B,0) = 1$, resta-nos mostrar que

$d(\bar{g}_1, \Omega-\varepsilon\bar{B},0) \equiv 0 \pmod{2}$

Seja $g_2 = \bar{g}_1{}_{/(\partial\Omega \cup \varepsilon\partial B)\cap R^{n-1}}$ onde

$R^{n-1} = R^{n-1}\times\{0\}\subset R^n$, temos g_2 contínua, ímpar e não se anula, logo pelo lema (3.7) g_2 tem uma extensão

$\bar{g}_2 : (\bar{\Omega} - \varepsilon B)\cap R^{n-1} \longrightarrow R^n$

contínua, ímpar e sem zeros

Definimos g_3 por:

$$g_3(x) = \begin{cases} \bar{g}_1(x) & \text{se} \quad x\in \partial\Omega \cup \varepsilon\partial B \\ \\ \bar{g}_2(x) & \text{se} \quad x\in (\bar{\Omega} - \varepsilon B)\cap R^{n-1} \end{cases}$$

temos g_3 contínua, ímpar e sem zeros.

Seja $\Delta = \Omega - \varepsilon\bar{B}$, novamente, pelo teorema (1.2) g_3 pode ser estendida continuamente para $\bar{g}_3 : \bar{\Delta} \longrightarrow R^n$ e como $\bar{g}_3{}_{/\partial\Delta} = \bar{g}_1{}_{/\partial\Delta}$ vem que

$d(\bar{g}_1, \Delta, 0) = d(\bar{g}_3, \Delta, 0)$

Como $\mathrm{dist}(0, \bar{g}_3(\partial\Delta \cup (\bar{\Delta}\cap R^{n-1}))) = \partial > 0$, pelo lema (1.6) e a continuidade do Grau de Brouwer podemos encontrar $h\in C^\infty(\bar{\Delta}, R^n)$ com $0\notin h(\partial\Delta\cup(\bar{\Delta}\cap R^{n-1}))$ e $d(\bar{g}_3, \Delta, 0) = d(h, \Delta, 0)$, basta tomar h dentro de uma vizinhança de $\bar{g}_3$ onde $d(\cdot, \Delta, 0)$ é constante e tal que $\|h - \bar{g}_3\| < \delta$.

Para $x\in\partial\Delta\cup(\bar{\Delta}\cap R^{n-1})$ e $\lambda\in[0,1]$ temos

$-\bar{g}_3(x) = \bar{g}_3(-x)$ e

$$\left|(1-\lambda)\bar{g}_3(x) + \lambda\,\frac{h(x) - h(-x)}{2}\right| =$$

$$= \left|\bar{g}_3(x) - \frac{\lambda}{2}\,\bar{g}_3(x) - \frac{\lambda}{2}\,\bar{g}_3(x) + \frac{\lambda}{2}\,h(x) - \frac{\lambda}{2}\,h(-x)\right| \geq$$

$$\geq \left|\bar{g}_3(x)\right| - \frac{\lambda}{2}\left|h(x) - \bar{g}_3(x)\right| - \frac{\lambda}{2}\left|\bar{g}_3(-x) - h(-x)\right| >$$

$$> \delta - \frac{\lambda}{2}\delta - \frac{\lambda}{2}\delta = (1-\lambda)\delta \geq 0 .$$

Daí, trocando h pela sua parte ímpar $\frac{h(x)-h(-x)}{2}$, se necessário, podemos supor que h é ímpar e colocando

$\Delta^+ = \Delta \cap (R^{n-1} \times R_{++})$

$\Delta^- = \Delta \cap (R^{n-1} \times R_{--})$ temos

$$d(h,\Delta,0) = d(h,\Delta^+,0) + d(h,\Delta^-,0) .$$

Seja $y \in R^n$ um valor regular de h tal que $d(h,\Delta,0) = d(h,\Delta,y)$, então como h é ímpar temos que $-y$ tambem é valor regular de h,

$\{x \in \Delta^+ / h(x) = y\} = -\{x \in \Delta^- / h(x) = -y\}$ e $h'(x) = h'(-x)$, isto é, h' é uma função par. Portanto

$$d(h,\Delta^+,0) = d(h-y,\Delta^+,0) = \sum_{x \in h^{-1}(y) \cap \Delta^+} \text{sign det } h'(x) =$$

$$= \sum_{-x \in h^{-1}(-y) \cap \Delta^-} \text{sign det } h'(x) = \sum_{x \in h^{-1}(-y) \cap \Delta^-} \text{sign det } h'(-x) =$$

$$= \sum_{x \in h^{-1}(-y) \cap \Delta^-} \text{sign det } h'(x) = d(h+y,\Delta^-,0) = d(h,\Delta^-,0) .$$

Daí $d(h,\Delta,0) = 2d(h,\Delta^+,0) \equiv 0 \pmod{2}$

b) Observaremos primeiramente que a aplicação $x \longmapsto -f(-x)$ é tambem um campo de vetores compacto, pois, como $\bar{\Omega}$ é simétrico, temos

$$\{x+f(-x)/x\in\bar{\Omega}\} = -\{-x-f(-x)/x\in\bar{\Omega}\} = -\{x-f(x)/x\in\bar{\Omega}\}$$

Daí a parte ímpar de f, $f^*(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ é um campo de vetores compacto e

$$d(f,\Omega,0) = d(f^*,\Omega,0) \quad \text{pois } f/_{\partial\Omega} = f^*/_{\partial\Omega} ,$$

logo podemos supor que f é um campo de vetores compacto ímpar, e f pode ser aproximada por campos de vetores compactos ímpares de dimensão finita. Agora a conclusão decorre de parte a).

Finalmente pela propriedade (vi) sai que f tem um zero em Ω . $\perp$

Veremos a seguir algumas aplicações do teorema de Borsuk.

Teorema 3.9: Seja Ω um aberto, limitado, simétrico, contendo o zero num espaço vetorial normado de dimensão finita E. Seja $f: \partial\Omega \longrightarrow E$ contínua e ímpar tal que $f(\partial\Omega)$ esta contido num sub espaço próprio de E. Então f tem um zero.

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que $0 \notin f(\partial\Omega)$, pelo teorema (1.2) f tem uma extensão contínua $\bar{f}$ sobre $\bar{\Omega}$ tal que $\bar{f}(\bar{\Omega})$ esta contido no sub-espaço próprio de E. Pelo teorema anterior $d(\bar{f},\Omega,0) \neq 0$ então $\bar{f}(\Omega)$ é uma vizinhança do zero em E que contradiz o fato de $\bar{f}(\Omega)$ estar contido no sub-espaço próprio. $\perp$

Teorema 3.10: (Borsuk — Ulam)

Seja Ω um aberto, limitado, simétrico, contendo o zero num espaço vetorial normado de dimensão finita E. Seja $f: \partial\Omega \longrightarrow E$ contínua tal que $f(\partial\Omega)$ esta contido num subespaço próprio de E. Então existe $x \in \partial\Omega$ tal que

$f(x) = f(-x)$

isto é, no mínimo um par de pontos antípodas são aplicados no mesmo ponto.

<u>Demonstração</u>:

Tomamos a parte ímpar de f, $f^*(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, temos que f^* esta nas condições do teorema anterior, logo existe $x \in \partial\Omega$ tal que $f^*(x) = 0$, então $f(x) = f(-x)$. $\perp$

<u>Teorema 3.11</u>: (Lusternik - Schnirelmann)

Seja Ω um aberto, limitado, simétrico, contendo o zero num espaço vetorial normado E, com $n = \dim E < \infty$. Então em cada família de n conjuntos fechados cobrindo $\partial\Omega$, no mínimo um conjunto contem um par de pontos antípodas.

<u>Demonstração</u>:

Sejam $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos fechados tais que $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.

Suponhamos que para $j = 1, \ldots, n-1$, $A_j \cap (-A_j) = \emptyset$ então para cada $j = 1, \ldots, n-1$ existe uma função contínua $f_j: \partial\Omega \longrightarrow [0,1]$ tal que $f_j(A_j) = \{0\}$ e $f_j(-A_j) = \{1\}$ (função de Uryshon). Sejam $e_1, \ldots, e_{n-1}$, n-1 vetores linearmente independendentes de E e seja $f: \partial\Omega \longrightarrow [e_1, \ldots, e_{n-1}]$ dada por $f = \sum_{j=1}^{n-1} f_j e_j$ temos f contínua e pelo teorema anterior existe $x_o \in \partial\Omega$ tal que

$f(x_0) = f(-x_0)$, isto é, $f_j(x_0) = f_j(-x_0)$ para $j = 1,\dots,n-1$.
Então

$$x_0 \notin \bigcup_{j=1}^{n-1} (A_j \cup (-A_j))$$

mas

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} (-A_j) = \partial\Omega$$

logo $x_0 \in A_n \cap (-A_n)$ que prova o teorema. $\perp$

Seja X um espaço topológico e Y um conjunto. Uma aplicação $f:X \longrightarrow Y$ é localmente injetora se para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U_x tal que $f/_{U_x}$ é injetora

<u>Teorema 3.12</u>: (Invariança do domínio)

Seja U um aberto num espaço vetorial normado E e seja $f:U \longrightarrow E$ um campo de vetores compacto, localmente injetor. Então f é uma aplicação aberta, em particular $f(U)$ é aberto em E.

<u>Demonstração</u>:

Seja $U_1 \subset U$ aberto. Mostraremos que $f(U_1)$, é aberto em E. Seja $y \in f(U_1)$, mostraremos que existe vizinhança V de y em E com $V \subset f(U_1)$.

Seja $x_0 \in U_1$, tal que $f(x_0) = y$, escolhemos $\varepsilon > o$ tal que $x_0 + \varepsilon B \subset U_1$ e $f/_{x_0+\varepsilon B}$ é injetora.

Definimos $\theta: U_1 - x_0 \longrightarrow E$ por $\theta(x) = f(x+x_0) - y$, temos que θ é um campo de vetores compacto, (simplesmente trans ladamos para a origem) $\theta/_{\varepsilon B}$ é injetora e $\theta(o) = 0$

Seja $g = id-\theta$ e $h:\varepsilon\bar{B}x[0,1] \to E$ dada por

$h(x,\lambda) = g(\frac{x}{1+\lambda}) - g(\frac{-\lambda x}{1+\lambda})$

temos que:

a) h é composta $(h(\varepsilon\bar{B}x[0,1]) \subset \{g(x)-g(-x)/x\varepsilon\varepsilon\bar{B}\})$

b) $h(\cdot,1)$ é ímpar em $\varepsilon\bar{B}$

c) Para $x \neq o$ e $\lambda\varepsilon[0,1]$,

$$x - h(x,\lambda) = x - g(\frac{x}{1+\lambda}) + g(\frac{-\lambda x}{1+\lambda}) =$$

$$= x - \frac{x}{1+\lambda} + \theta(\frac{x}{1+\lambda}) - \frac{\lambda x}{1+\lambda} - \theta(\frac{-\lambda x}{1+\lambda}) =$$

$$= \theta(\frac{x}{1+\lambda}) - \theta(\frac{-\lambda x}{1+\lambda}) \neq 0$$ pois $\theta/_{\varepsilon B}$ é injetora.

Daí, como o grau de Leray-Schauder é invariante por homotopia, vem que

$d(id-h(\cdot,0), \varepsilon B,0) = d(id-h(\cdot,1), \varepsilon B,0)$

isto é,

$d(\theta,\varepsilon B,0) = d(id-h(\cdot,1), \varepsilon B,0)$

que pelo teorema de Borsuk é diferente de zero, logo $\theta(\varepsilon B)$ é vizinhança de zero em E, então $V = f(x_0+\varepsilon B) = \theta(\varepsilon B) + y$ é vizinhança de y em E contida em $f(U_1)$. $\perp$

CAPÍTULO IV

UM TEOREMA GLOBAL PARA UM PROBLEMA NÃO LINEAR DE AUTO VALORES

Entendemos como um problema de auto valores não linear uma equação da forma

(4.1) $x = G(\lambda, x)$

onde x pertence a um espaço de Banach real E, $\lambda \in R$ e $G: R \times E \to E$ é compacta (isto é, G é contínua e aplica conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos).

Nós estudaremos a equação (4.1) sob as hipóteses que $G(\lambda, x) = \lambda L x + H(\lambda, x)$ onde $L: E \to E$ é uma aplicação linear compacta e $H(\lambda, x) = O(\|x\|)$ para x nas vizinhanças do 0 e λ em intervalos limitados.

Observe que $\{(\lambda, 0)/\lambda \in R\}$ são soluções de (4.1) as quais chamaremos de soluções triviais.

Chamaremos $(\mu, 0)$ de ponto de bifurcação de (4.1) com respeito à linha de soluções triviais se toda vizinhança de $(\mu, 0)$ contiver soluções não triviais.

Dizemos que $\mu \in R$ é um valor caracteristico de L se existe $x \in E$, $x \neq 0$ tal que $x = \mu L x$.

Denotaremos por $\mathcal{S}$ o fecho do conjunto das soluções não triviais de (4.1) e por $r(L)$ o conjunto dos valores caracteristicos de L.

Lema 4.2 Se $\mu_0 \notin r(L)$ existe uma vizinhança V de $(\mu_0,0)$ que não contem soluções não triviais

Demonstração:

Observe primeiramente que $I - \mu_0 L$ tem inversa contínua pois $\mu_0 \notin r(L)$.

Chamaremos de U_1 o intervalo

$$\{\lambda \in R \;/\; |\lambda-\mu_0| < \frac{1}{3\|(I-\mu_0 L)^{-1}\| \, \|L\|}\}$$

e de U_2 uma vizinhança de 0 em E tal que

se $x \in U_2$, $\dfrac{H(\lambda,x)}{} \leq \dfrac{\|x\|}{3\|(I-\mu_0 L)^{-1}\|}$ para $\lambda \in U_1$,

Mostraremos que a vizinhança $V = U_1 \times U_2$ satisfaz as condições do lema, pois se $(\lambda,x) \in V$ e

$x = G(\lambda,x) = \lambda Lx + H(\lambda,x)$ temos

$$\|x\| = \|(I-\mu_0 L)^{-1}.(x-\mu_0 Lx)\| = \|(I-\mu_0 L)^{-1}\| \, \|x-\mu_0 Lx\| =$$

$$= \|(I-\mu_0 L)^{-1}\| \, \|(\lambda-\mu_0)Lx + H(\lambda,x)\| \leq$$

$$\leq \|(I-\mu_0 L)^{-1}\| \, |\lambda-\mu_0| \, \|L\| \, \|x\| + \|(I-\mu_0 L)^{-1}\| \, \|H(\lambda,x)\| \leq$$

$\leq \frac{2}{3}\|x\|$, donde concluimos que $x = 0$. $\perp$

Segue imediatamente desse lema, que os pontos de bifurcação de (4.1) possuem na primeira componente um valor característico de L, porem a recíproca é falsa, basta tomar $G: R \times R^2 \to R^2$ dada por $G(\lambda,(x,y)) = \lambda(x,y) + (-y^3,x^3)$.

A equação (4.1) tem a forma $x = \lambda x - y^3$ e $y = \lambda y + x^3$ donde concluímos, multiplicando a primeira por y, a segunda por x e subtraindo, que $x^4 + y^4 = 0$, isto é, $(x,y) = (0,0)$. Portanto $(1,(0,0))$ não é ponto de bifurcação.

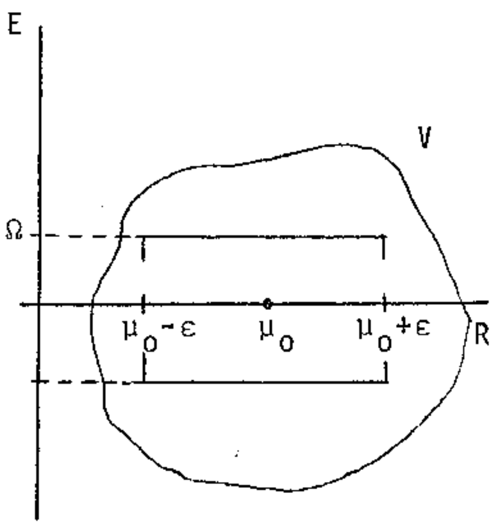
Note que a multiplicidade do valor característico 1, deste exemplo, é par (igual a 2). Provaremos abaixo, que todo valor característico com multiplicidade ímpar do operador L é ponto de bifurcação de (4.1).

Observe que os pontos μ para os quais $(\mu,0)$ são pontos de bifurcação formam um sub-conjunto discreto de R, pois pertencem ao conjunto dos valores característicos da transformação linear compacta L.

<u>Lema 4.3</u> Se $\mu_0 \in r(L)$ tem multiplicidade ímpar. Então $(\mu_0,0)$ é ponto de bifurcação de (4.1).

<u>Demonstração</u>

Seja V uma vizinhança de $(\mu_0,0)$ em RxE. Temos de mostrar que existe uma solução não trivial de (4.1) em V.



Seja $\varepsilon > o$ tal que $[\mu_0-\varepsilon , \mu_0+\varepsilon] \cap r(L) = \{\mu_0\}$ (os valores característicos de L formam um subconjunto discreto de R).

Pelo lema (4.2) existe $\Omega \subset E$ vizinhança do zero tal que

$id - G(\mu_0-\varepsilon,\cdot): \bar{\Omega} \longrightarrow E$

e

$id - G(\mu_0+\varepsilon,\cdot): \bar{\Omega} \longrightarrow E$

se anulam somente no zero. Escolhemos ε e Ω de tal modo que $[\mu_0-\varepsilon\ ,\ \mu_0+\varepsilon] \times \bar{\Omega} \subset V$.

Pelo teorema (3.3) temos que $d(id-G(\mu_0-\varepsilon,\cdot),\ \Omega,0) = (-1)^{m_1}$ onde m_1 é a soma das multiplicidades de todos os auto valores maiores que 1 de $(\mu_0-\varepsilon)L$ e $d(id-G(\mu_0+\varepsilon,\cdot),\ \Omega,0) = (-1)^{m_2}$ onde m_2 é a soma das multiplicidades de todos os auto valores maiores que 1 de $(\mu_0+\varepsilon)L$. Logo

$d(id-G(\mu_0-\varepsilon,\cdot),\ \Omega,0) \neq d(id-G(\mu_0+\varepsilon,\cdot),\ \Omega,0)$

pois m_2 inclui a multiplicidade de $(\mu_0+\varepsilon)\frac{1}{\mu_0}$ que é ímpar.

Daí, considerando $h: \bar{\Omega} \times [-1,1] \to E$ dada por $h(x,\lambda) = G(\mu_0+\lambda\varepsilon,x)$ e $y(\lambda) = 0$, no teorema (2.14) temos que para algum $\lambda\varepsilon[-1,1]$ e algum $x\varepsilon\partial\Omega$, $x-G(\mu_0+\lambda\varepsilon,x) = 0$. Como $\mu = \mu_0+\lambda\varepsilon \in [\mu_0-\varepsilon\ ,\mu_0+\varepsilon]$ vem que (μ,x) é a solução não trivial procurada. $\perp$

Seja X um espaço topológico e $A \subset X$, chamamos de subcontinuo de A, um subconjunto de A fechado e conexo em X.

Seja $\mathcal{E} = R \times E$, dizemos que um contínuo $\mathcal{C}$ (fechado e conexo de $\mathcal{E}$) encontra o infinito se $\mathcal{C}$ não é limitado, onde a norma em $\mathcal{E}$ é dada por $\|(\lambda,x)\| = (|\lambda|^2 + \|x\|^2)^{1/2}$. Denotaremos por $\beta_\varepsilon(\mu,x)$ e $B_\varepsilon(x)$ as bolas em $\mathcal{E}$ e E de raio ε e centro em (μ,x), x respectivamente.

<u>Lema 4.4</u> Seja K um espaço métrico compacto e A e B subconjuntos fechados disjuntos de K. Então existe um subcontínuo de K encontrando A e B ou $K = K_A \cup K_B$ onde K_A e K_B são subconjuntos disjuntos compactos de K contendo A e B respectivamente.

Dem: Referência: |8| pág. 12 $\perp$

Lema 4.5 Seja $\mu \in r(L)$. Suponhamos que não existe um subcontínuo de $\mathcal{S} \cup \{(\mu,0)\}$ que encontra $(\mu,0)$ e

1. encontra o infinito em $\mathcal{E}$, ou
2. encontra $(\hat{\mu},0)$ onde $\mu \neq \hat{\mu} \in r(L)$.

Então existe um aberto limitado $\Omega \subset \mathcal{E}$ tal que $(\mu,0) \in \Omega$, $\partial\Omega \cap \mathcal{S} = \emptyset$ e $\bar{\Omega}$ não contem soluções triviais $(\lambda,0)$ se $|\lambda-\mu| \geq \varepsilon$ com $0<\varepsilon<\mathrm{dist}(\mu, r(L)-\{\mu\})$.

Demonstração

Seja $\mathcal{C}_\mu$ a componente conexa de $(\mu,0)$ em $\mathcal{S} \cup \{(\mu,0)\}$. Por 1. temos que $\mathcal{C}_\mu$ é um sub conjunto limitado de $\mathcal{E}$, logo podemos escolher a e b reais tais que $\mathcal{C}_\mu \subset [a,b] \times \overline{G(\mathcal{C}_\mu)}$ e daí concluir que $\mathcal{C}_\mu$ é compacto, pois G é compacta. Por 2. junto com o lema (4.2) podemos escolher uma δ-vizinhança U_δ de $\mathcal{C}_\mu$ tal que $\overline{U_\delta}$ não contem soluções $(\lambda,0)$ de (4.1) para $|\lambda-\mu| \geq \varepsilon$.

Seja $K = \overline{U}_\delta \cap \mathcal{S}$, temos que K com a topologia induzida de $\mathcal{E}$ é um espaço métrico compacto ($\mathcal{S}$ é localmente compacto) e $\mathcal{C}_\mu \cap \partial U_\delta = \emptyset$ por construção. Se $\partial U_\delta \cap \mathcal{S} = \emptyset$ colocamos $U_\delta = \Omega$ e o lema está demonstrado. Se $\partial U_\delta \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ pelo lema (4.4) existem subconjuntos compactos disjuntos A e B de K tais que $\mathcal{C}_\mu \subset A$, $(\partial U_\delta \cap \mathcal{S}) \subset B$ e $K = A \cup B$ e neste caso tomamos como Ω uma δ_1-vizinhança de A em $\mathcal{E}$ onde δ_1 é menor que a distância entre A e B.
$\perp$

Com esta preparação podemos provar o teorema central deste capítulo.

Teorema 4.6 Se $\mu \in r(L)$ tem multiplicidade ímpar então $\mathcal{S}$ possui um subcontínuo (maximal) $\mathcal{C}_\mu$ tal que $(\mu,0) \in \mathcal{C}_\mu$ e $\mathcal{C}_\mu$

1. encontra o infinito em $\mathcal{E}$, ou
2. encontra $(\hat{\mu},0)$ onde $\mu \neq \hat{\mu} \in r(L)$

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que não existe $\mathcal{C}_\mu$ com as propriedades acima, então existem Ω e ε como no lema (4.5). Como $\bar{\Omega}$ não intercepta a linha de soluções triviais fora do intervalo $(\mu-\varepsilon , \mu+\varepsilon)$, temos que para $|\lambda-\mu| \geq \varepsilon$ existe $\rho(\lambda) > o$ tal que $B_{\rho(\lambda)}(0) \cap \bar{\Omega}_\lambda = \emptyset$ e pelo lema (4.2) para $0<|\lambda-\mu|<\varepsilon$ podemos determinar $\rho(\lambda) > o$ tal que $(\lambda,0)$ é a única solução de (4.1) em $\{\lambda\} \times \bar{B}_{\rho(\lambda)}(0)$.

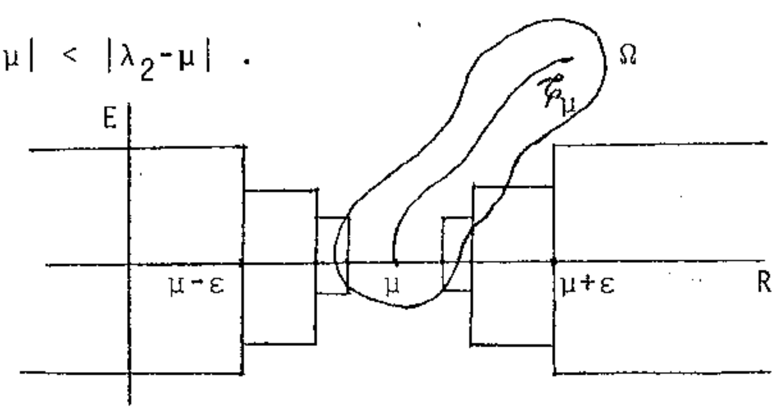
Para simplificar as notações da demonstração escolheremos $\rho(\lambda)$ com as seguintes propriedades:

a) $\rho(\lambda)$ é constante se $|\lambda-\mu| \geq \varepsilon$

b) $\rho(\lambda)$ é constante se $\frac{\varepsilon}{n+1} \leq |\lambda-\mu| < \frac{\varepsilon}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$

(usamos o lema (4.2) e a compacidade de $\frac{\varepsilon}{n+1} \leq |\lambda-\mu| \leq \frac{\varepsilon}{n}$)

c) $\rho(\lambda)$ decresce quando λ se aproxima de μ, isto é, $\rho(\lambda_1) \leq \rho(\lambda_2)$ se $|\lambda_1-\mu| < |\lambda_2-\mu|$.



Para $\lambda \neq \mu$, não existe soluções de (4.1) em $\{\lambda\} \times \partial(\Omega_\lambda - \bar{B}_{\rho(\lambda)}(0))$, logo $d(id-G(\lambda,\cdot), \Omega_\lambda - \bar{B}_{\rho(\lambda)}(0) , 0)$ esta bem definido.

Mostraremos que

$d(id-G(\lambda,\cdot), \Omega_\lambda - \bar{B}_{\rho(\lambda)}(0) , 0) = 0$ se $\lambda \neq \mu$ (4.7)

e com este resultado chegaremos a uma contradição.

Seja $\lambda>\mu$. Escolhemos $\lambda^* > \lambda$ suficientemente grande tal que, $(\theta,x) \in \Omega$ implica que $\theta<\lambda^*$. Temos que $U = \Omega - [\lambda,\lambda^*] \times \overline{B_{\rho(\lambda)}(0)}$ é um aberto limitado em $\tilde{\mathcal{E}} = [\lambda,\lambda^*] \times E$ e $x - G(\theta,x) \neq 0$ para $(\theta,x) \in \partial U$ (em $\tilde{\mathcal{E}}$) , logo, pelo teorema (2.17), vem que

$d(id-G(\theta,\cdot), \Omega_\theta - \bar{B}_{\rho(\lambda)}(0) , 0)$

é constante para $\theta \in [\lambda,\lambda^*]$, mas $\Omega_{\lambda^*} - \bar{B}_{\rho(\lambda)}(0) = \emptyset$ então $d(id-G(\lambda^*,\cdot), \Omega_{\lambda^*} - \bar{B}_{\rho(\lambda)}(0) , 0) = 0$. Para $\lambda<\mu$ um argumento similar é empregado.

Tomando δ suficientemente pequeno, tal que $B_\delta(\mu,0) \subset \Omega$, podemos concluir tambem pelo teorema (2.17) que

$d(id-G(\lambda,\cdot), \Omega_\lambda,0) \equiv$ constante se $|\lambda-\mu| < \delta$ (4.8)

Pela propriedade (ii) do Grau de Leray-Schauder, se $\mu-\delta < \underline{\lambda} < \mu < \bar{\lambda} < \mu+\delta$ podemos escrever

$$d(id-G(\underline{\lambda},\cdot), \Omega_{\underline{\lambda}},0) = i(G(\underline{\lambda},\cdot),0) + d(id-G(\underline{\lambda},\cdot),\Omega_{\underline{\lambda}}-\bar{B}_{\rho(\underline{\lambda})}(0) , 0)$$

(4.9)

$$d(id-G(\bar{\lambda},\cdot),\Omega_{\bar{\lambda}},0) = i(G(\bar{\lambda},\cdot),0)+d(id-G(\bar{\lambda},\cdot), \Omega_{\bar{\lambda}} - \bar{B}_{\rho(\bar{\lambda})}(0), 0)$$

usando (4.7) vem que

$d(id-G(\underline{\lambda},\cdot),\ \Omega_{\underline{\lambda}},0) = i(G(\underline{\lambda},\cdot),\ 0)$

$d(id-G(\bar{\lambda},\cdot),\ \Omega_{\bar{\lambda}},\ 0) = i(G(\bar{\lambda},\cdot),\ 0)$

e finalmente por (4.8) chegamos a

$i(G(\underline{\lambda},\cdot),0) = i(G(\bar{\lambda},\cdot),\ 0)$

mas $i(G(\underline{\lambda},\cdot),0) = -i(G(\bar{\lambda},\cdot),0) \neq 0$ pois μ é um valor caracterís tico de multiplicidade ímpar (teorema (3.3)). Chegamos assim a contradição e a prova esta completa. $\perp$

Corolário 4.10 Se Ω é aberto e limitado em $\mathscr{E}$ contendo $(\mu,0)$, $G(\lambda,x)$ é compacta em $\bar{\Omega}$ e $\mu\epsilon r(L)$ tem multiplicidade ímpar. Então $\mathscr{S}$ possui um sub contínuo (maximal) $\mathscr{C}_\mu \subset \bar{\Omega}$ tal que $(\mu,0)\epsilon\ \mathscr{C}_\mu$ e $\mathscr{C}_\mu$

1. encontra $\partial\Omega$, ou
2. encontra $(\hat{\mu},0)$ onde $\mu \neq \hat{\mu}\ \epsilon\ r(L)$, $(\hat{\mu},0)\ \epsilon\ \Omega$

A demonstração é a mesma do lema (4.5) e do teorema (4.6)

Teorema 4.11 Suponhamos que as hipóteses do teorema (4.6) estão satisfeitas e (1) não ocorre. Seja $\Gamma = \{\gamma\epsilon r(L)/(\gamma,0)\epsilon\ \mathscr{C}_\mu\}$. Então Γ possui pelo menos um ponto $\gamma \neq \mu$ com multiplicidade ímpar

Demonstração

Como (1) não ocorre Γ possui uma quantidade finita de pontos $\gamma_1,\ldots,\gamma_j$, suponhamo-os ordenados, isto é, $\gamma_1 < \gamma_2 <\ldots< \gamma_j$ e $\gamma_s = \mu$ onde $1 < s < j$ (Se $s = 1$ ou $s = j$ a demonstração é a mesma)

Com a mesma técnica usada no lema (4.5) encontramos um aberto e limitado $\Omega\subset\mathscr{E}$ tal que $\mathscr{C}_\mu \subset \Omega$, $\partial\Omega\cap\mathscr{S} = \emptyset$ e $\bar{\Omega}$ não contem soluções $(\lambda,0)$ de (4.1) se $|\lambda-\gamma| \geq \varepsilon$ para algum $\gamma\varepsilon\Gamma$, onde ε é um real positivo menor que a distância entre Γ e os demais pontos de $r(L)$.

Usando agora os argumentos empregados no teorema (4.6) podemos definir $\rho(\lambda)$, conluir que

$d(id-G(\lambda,\cdot),\ \Omega_\lambda - \bar{B}_{\rho(\lambda)}(0)\ ,\ 0) \equiv$ constante se $\gamma_r < \lambda < \gamma_{r+1}$, $1 \leq r < j$ <u>(4.12)</u>

e ainda mais, como em (4.8), para δ suficientemente pequeno

$d(id-G(\lambda,\cdot),\ \Omega_\lambda,0) \equiv$ constante se $|\lambda - \gamma| < \delta$ para algum $\gamma \in \Gamma$

<u>(4.13)</u>

Seja $\gamma_r - \delta < \underline{\gamma} < \gamma_r < \bar{\gamma} < \gamma_r + \delta$, então, como em (4.9), podemos escrever que

$$d(id-G(\underline{\gamma},\cdot),\Omega_{\underline{\gamma}},0) = i(G(\underline{\gamma},\cdot),0)+d(id-G(\underline{\gamma},\cdot),\Omega_{\underline{\gamma}} - \bar{B}_{\rho(\underline{\gamma})}(0)\ ,\ 0)$$

$$d(id-G(\bar{\gamma},\cdot),\Omega_{\bar{\gamma}},0) = i(G(\bar{\gamma},\cdot),0) + d(id-G(\bar{\gamma},\cdot),\ \Omega_{\bar{\gamma}} - \bar{B}_{\rho(\bar{\gamma})}(0),\ 0)$$

e daí usando (4.13) chegar que

$$i(G(\underline{\gamma},\cdot),0) + d(id-G(\underline{\gamma},\cdot),\ \Omega_{\underline{\gamma}} - \bar{B}_{\rho(\underline{\gamma})}(0)\ ,\ 0) =$$

$$= i(G(\bar{\gamma},\cdot),0)+ d(id-G(\bar{\gamma},\cdot),\ \Omega_{\bar{\gamma}} - \bar{B}_{\rho(\bar{\gamma})}(0)\ ,\ 0)$$

Se γ_r tiver multiplicidade par temos

$i(G(\underline{\gamma},\cdot),\ 0) = i(G(\bar{\gamma},\cdot),\ 0)$, logo

$$d(id-G(\underline{\gamma},\cdot),\Omega_{\underline{\gamma}} - \bar{B}_{\rho(\underline{\gamma})}(0) = d(id-G(\bar{\gamma},\cdot),\ \Omega_{\bar{\gamma}} - \bar{B}_{\rho(\bar{\gamma})}(0)\ ,\ 0)$$

<u>(4.14)</u>

Supondo que $\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1}$, γ_{s+1} ,...γ_j são todos de multiplicidade par, usando as equações (4.12), (4.14) e notando que $\Omega_\lambda = \emptyset$ se λ é suficientemente grande concluimos que

$d(id-G(\lambda,\cdot)\ ,\ \Omega_\lambda - \bar{B}_{\rho(\lambda)}(0)\ ,\ 0) = 0$ se $\lambda \neq \gamma_S = \mu$ <u>(4.15)</u>

De modo análogo, se $\mu - \delta < \underline{\lambda} < \mu < \bar{\lambda} < \mu + \delta$ temos que

$$i(G(\underline{\lambda},\cdot),\ 0) + d(id - G(\underline{\lambda},\cdot),\ \Omega_{\underline{\lambda}} - \bar{B}_{\rho(\underline{\lambda})}(0)\ ,\ 0) =$$

$$= i(G(\bar{\lambda},\cdot),\ 0) + d(id - G(\bar{\lambda},\cdot),\ \Omega_{\bar{\lambda}} - \bar{B}_{\rho(\bar{\lambda})}(0),\ 0)$$

Desde que $i(G(\underline{\lambda},\cdot),0) = -i(G(\bar{\lambda},\cdot),\ 0) \neq 0$, pois $\mu = \gamma_S$ tem multiplicidade ímpar, pelo menos um dos inteiros
$d(id - G(\underline{\lambda},\cdot),\ \Omega_{\underline{\lambda}} - \bar{B}_{\rho(\underline{\lambda})}(0),\ 0)$,

$d(id - G(\bar{\lambda},\cdot),\ \Omega_{\bar{\lambda}} - \bar{B}_{\rho(\bar{\lambda})}(0),\ 0)$ tem que ser diferente de zero, contrariamos desse modo a equação (4.15) e completamos a prova.

$\perp$

BIBLIOGRAFIA

|1| H. AMANN - Lectures on some fixed point theorems.
(Coleção IMPA —

|2| JOHN W. MILNOR - Topology from the Differentiable Viewpoint
(The University Press of Virginia-Charlottesville - 1965)

|3| H. AMANN and S. WEISS - On the uniqueness of the topological degree
(Math. Zeitschr., 130, 39-54 (1973))

|4| J. DUGUNDJI - An extension of Tietzẽs theorem
(Pacific J. Math., 1, 353-367 - (1951))

|5| J. DUGUNDJI - Topology
(Allyn and Bacon - Boston - (1966))

|6| PAUL H. RABINOWITZ - Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems
(Journal of Functional Analysis, 7, 487-513, (1971))

|7| M.A. KRASNOSEL'SKII - Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations
(MacMillan Company - 1964)

|8| G.T. WHYBURN - Topological Analysis
(Princeton University Press - 1964)