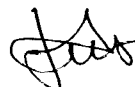


# CÁLCULO DE EQUILÍBRIOS ECONÔMICOS POR OTIMIZAÇÃO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Jurandir Zullo Junior e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 16 de abril de 1990.



Prof. Dr. José Antonio Scaramucci

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

Z87c

12102/BC

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

A meus pais

Jurandir e Maria Aparecida

agradeço e dedico esse trabalho

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor José Antonio Scaramucci pelo trabalho de orientação.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

A Maria do Rosário Gonçalves Rodrigues por toda dedicação e compreensão.

Ao Professor Hilton Silveira Pinto e aos colegas do CEPAGRI - Rosana, Claudir, Edilene, Silvana, Tatiana, Olinto e Tomás - pelas facilidades colocadas à realização dessa dissertação.

Aos Professores José Mário e Ana Friedlander Martinez Peres pela atenção e sugestões.

A Sérgio Antônio Zullo e aos Professores Antônio Carlos do Patrocínio e Antônio Ludovico Beraldo pelo constante apoio.

E a todos que de alguma forma contribuíram para a realização desse trabalho

Muito Obrigado

## ÍNDICE

CAPÍTULO 1. Introdução	1
CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Econômico	4
2.1 A economia	4
2.1.1 Os mercados	5
2.1.2 A produção	7
2.2 O equilíbrio	13
2.2.1 Complementaridade geral	17
2.2.2 Ponto fixo	19
2.2.3 Otimização	21
CAPÍTULO 3. Metodologia	24
3.1 Introdução	24
3.2 Método da Diagonalização	26
3.2.1 Resolução dos subproblemas diagonalizados	30
3.2.1.1 Método de Frank-Wolfe (FW)	32
3.2.1.2 Método da Sequência de Programas	
Quadráticos (SPQ)	34
3.2.1.3 Método da Secante e da Posição Falsa	36
3.2.2 Algoritmo detalhado	40
3.3 Método de aproximações lineares	43
3.4 Considerações finais	47
CAPÍTULO 4. Implementação Computacional	49
4.1 Descrição geral	49
4.2 Ponto inicial	53
4.3 Resolução dos subproblemas	54
4.4 Pesquisa linear	57
4.5 Entrada de dados	58
4.6 Saída dos resultados	61

CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais	62
5.1 Introdução	62
5.2 Combustível líquido	64
5.3 Agroindústria	68
5.4 Setor energético simples	72
5.5 Setor energético brasileiro	79
 CAPÍTULO 6. Conclusões	 109
 Bibliografia	 112
 ANEXO I	 116
ANEXO II	137
ANEXO III	140
ANEXO IV	142
ANEXO V	144
ANEXO VI	145
ANEXO VII	147

## LISTA DE FIGURAS

5.1	Estrutura do setor de combustíveis líquidos no Brasil	66
5.2	Estrutura da agroindústria	70
5.3	Estrutura do setor energético - Parte I	74
5.4	Estrutura do setor energético - Parte II	77
5.5	Estrutura do setor energético nacional - Parte I	81
5.6	Estrutura do setor energético nacional - Parte II	83
5.7	Estrutura do setor energético nacional - Parte III	86
5.8	Estrutura do setor energético nacional - Parte IV	88
5.9	Estrutura do setor energético nacional - Parte V	90
5.10	Estrutura do setor energético nacional - Parte VI	92
5.11	Estrutura do setor energético nacional - Parte VII	94
5.12	Estrutura do setor energético nacional - Parte VIII	96
5.13	Estrutura do setor energético nacional - Parte IX	98
5.14	Estrutura do setor energético nacional - Parte X	100
5.15	Estrutura do setor energético nacional - Parte XI	102
5.16	Estrutura do setor energético nacional - Parte XII	104
5.17	Estrutura do setor energético nacional - Parte XIII	106

## LISTA DE TABELAS

5.1	Bens do setor de combustíveis líquidos no Brasil	65
5.2	Atividades do setor de combustíveis líquidos no Brasil	65
5.3	Resultados comparativos	67
5.4	Bens da agroindústria	69
5.5	Atividades da agroindústria	69
5.6	Resultados comparativos	71
5.7	Bens do setor energético - Parte I	73
5.8	Atividades do setor energético - Parte I	73
5.9	Bens do setor energético - Parte II	75
5.10	Atividades do setor energético - Parte II	76
5.11	Resultados comparativos	78
5.12	Resultados comparativos	79
5.13	Bens do setor energético nacional - Parte I	80
5.14	Atividades do setor energético nacional - Parte I	80
5.15	Bens do setor energético nacional - Parte II	82
5.16	Atividades do setor energético nacional - Parte II	82
5.17	Bens do setor energético nacional - Parte III	84
5.18	Atividades do setor energético nacional - Parte III	85
5.19	Bens do setor energético nacional - Parte IV	87
5.20	Atividades do setor energético nacional - Parte IV	87
5.21	Bens do setor energético nacional - Parte V	89
5.22	Atividades do setor energético nacional - Parte V	89
5.23	Bens do setor energético nacional - Parte VI	91
5.24	Atividades do setor energético nacional - Parte VI	91
5.25	Bens do setor energético nacional - Parte VII	93
5.26	Atividades do setor energético nacional - Parte VII	93
5.27	Bens do setor energético nacional - Parte VIII	95
5.28	Atividades do setor energético nacional - Parte VIII	95
5.29	Bens do setor energético nacional - Parte IX	97
5.30	Atividades do setor energético nacional - Parte IX	97

5.31 Bens do setor energético nacional - Parte X	99
5.32 Atividades do setor energético nacional - Parte X	99
5.33 Bens do setor energético nacional - Parte XI	101
5.34 Atividades do setor energético nacional - Parte XI	101
5.35 Bens do setor energético nacional - Parte XII	103
5.36 Atividades do setor energético nacional - Parte XII	103
5.37 Bens do setor energético nacional - Parte XIII	105
5.38 Atividades do setor energético nacional - Parte XIII	105
5.39 Resultados comparativos - Parte I	107
5.40 Resultados comparativos - Parte II	108



# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Esta dissertação analisa aspectos teóricos e práticos da determinação de equilíbrios em economias setoriais através de métodos de otimização. Os outros trabalhos, sobre o mesmo tópico, desenvolvidos pelo grupo de pesquisas em economia matemática do Departamento de Matemática Aplicada, usam as abordagens de ponto fixo (Arica Chávez, 1987) e complementaridade (Rotondo, 1988). Encerra-se, assim, uma trilogia acerca de métodos computacionais para o cálculo de equilíbrios econômicos.

O equilíbrio de uma economia pode ser entendido como sendo uma situação na qual todos os agentes têm seus objetivos satisfeitos, não possuindo, desse modo, incentivos para a alteração de planos fixados previamente.

Além dessa importância conceitual, existe ainda o fato prático que a análise econômica, realizada sob a ótica do equilíbrio, é mais simples do que considerando-se uma situação de desequilíbrio.

Por isso, mesmo sendo relativamente recente, o cálculo de equilíbrios econômicos gerais e setoriais, aliado aos tradicionais estudos de existência, unicidade e estabilidade, tem se tornado cada vez mais importante e útil na avaliação de políticas econômicas.

Scarf (1967), utilizando uma formulação de ponto fixo, obteve, pela primeira vez, uma solução numérica para o problema do equilíbrio econômico geral. A partir disso foram desenvolvidos métodos globais que acabaram generalizando a obtenção de um zero ou ponto fixo de uma correspondência (aplicação ponto-conjunto ou multiaplicação). A generalidade desses métodos

## CAPÍTULO 1. Introdução

torna-se, do ponto de vista prático, pouco interessante, uma vez que eles deixam de explorar determinadas características de um problema em particular que podem levar a um melhor desempenho computacional. Quanto aos aspectos teóricos, entretanto, esses métodos são muito bons. Dentro desse contexto encontra-se o trabalho desenvolvido por Arica Chávez (1987).

MacKinnon (1975) sugeriu, originariamente, a abordagem do problema do equilíbrio econômico através de formulações de complementaridade. Essa classe de problemas encontra-se bem desenvolvida em termos de métodos numéricos e também quanto a estudos de existência e unicidade para os casos linear e não-linear. Todavia, além de não existirem algoritmos específicos para a resolução de problemas de complementaridade geral, o desempenho dos disponíveis não é bem conhecido, ainda, nas aplicações de grande porte. Por outro lado, os métodos de complementaridade apresentam uma boa precisão computacional. Com base nessa linha de atuação é que foi desenvolvido o trabalho de Rotondo (1988).

Samuelson (1947), discutindo as condições sob as quais um conjunto de equações simultâneas é equivalente à solução de um problema de otimização, possibilitou que problemas de equilíbrio econômico, mesmo não sendo de otimização, pudessem ser interpretados e resolvidos como tal.

Historicamente, de acordo com Florian e Los (1982), Rowse (1981), Friesz et al. (1984) e Carey (1977), os trabalhos de Samuelson (1952) e de Takayama e Judge (1971) são, também, marcos importantes no que se refere à aplicação de otimização em economia.

Com a evolução da computação e da programação matemática, esse tipo de enfoque acabou tornando-se interessante uma vez que ele permite a utilização

## CAPÍTULO 1. Introdução

prática de métodos, algoritmos e pacotes computacionais disponíveis e com eficiência comprovada.

É com base nessa linha de atuação que se procurou desenvolver um trabalho mostrando a aplicabilidade prática da otimização na resolução dos problemas de equilíbrio econômico.

O Capítulo 2 contém uma descrição teórica do problema de equilíbrio econômico, exibindo as diversas formulações existentes para o mesmo com suas vantagens e desvantagens.

No Capítulo 3 são apresentados os métodos que foram utilizados para o desenvolvimento do sistema computacional OTIMIZA descrito no Capítulo 4.

De modo a ilustrar sua aplicação prática, o Capítulo 5 detalha os resultados obtidos em quatro problemas distintos de equilíbrio econômico, estabelecendo comparações com o desempenho do pacote PEGASUS desenvolvido por Bordoni (1989).

As conclusões finais são relatadas no Capítulo 6, seguidas pela Bibliografia.

Incluem-se, em anexo, a documentação do OTIMIZA e de um dos exemplos relatados no Capítulo 5.

## CAPÍTULO 2

### O EQUILÍBRIO ECONÔMICO

Este capítulo apresenta algumas formulações e interpretações para o problema do equilíbrio em um setor econômico cuja estrutura é descrita a seguir.

#### 2.1 A economia

O modelo de economia, a ser empregado no presente texto, é constituído por um *mercado de insumos*, um *setor produtivo* e um *mercado de produtos*, envolvendo um total de  $m$  bens, sendo  $m_i$  insumos,  $m_{pi}$  produtos intermediários e  $m_{pf}$  produtos finais, onde  $m = m_i + m_{pi} + m_{pf}$ .

Os agentes econômicos a serem considerados são os *proprietários dos bens iniciais*, os *produtores* e os *consumidores*.

Os *proprietários dos bens iniciais*, como o próprio nome sugere, são os agentes econômicos que detêm os recursos disponíveis na economia. Seus bens, por si só, não possuem valor comercial dentro do setor econômico considerado a não ser como insumos de processos que os transformam nos bens que realmente têm demanda de consumo. Por isso, os bens iniciais recebem também a denominação de *insumos* e/ou *fatores de produção*.

Como está se tratando, nesse texto, de um setor econômico em particular, é perfeitamente possível que seus bens iniciais sejam produtos de outros setores. Esse fato, entretanto, não altera as considerações feitas acima.

Os *produtores* são os agentes econômicos responsáveis pelos processos de

## CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Económico

transformação dos bens iniciais em bens finais, denominados, genericamente, de *processos de produção*.

Os produtos intermediários constituem uma classe de bens estritamente interiores ao setor produtivo, não havendo oferta nem demanda fora deste. Eles são produtos de determinadas atividades que servem como insumos para outras.

Os agentes económicos responsáveis pela demanda dos bens oriundos do setor produtivo recebem a denominação genérica de *consumidores*.

### 2.1.1 Os mercados

Enquanto o *setor produtivo* é responsável, como o próprio nome diz, pelos processos de produção, os *mercados* ocupam-se das relações de oferta e demanda entre os agentes económicos.

No *mercado de produtos* acontece a comercialização dos bens finais, provenientes do setor produtivo, junto aos consumidores. Supõe-se que, para cada um dos  $m_{pf}$  bens finais, exista um grande número de produtores, oferecendo mercadorias uniformes, e uma grande quantidade de consumidores perfeitamente informados a respeito das alterações de preços. Nesse caso, o preço de cada bem é único e determinado pelo mercado já que ninguém, quer seja produtor ou consumidor, pode, isoladamente, influenciá-lo. Essa situação é denominada de *concorrência perfeita* (Silva e Kageyama, 1980; Miglioli et al., 1985 e Varian, 1984).

O comportamento dos consumidores nesse mercado é caracterizado pela *função vetorial da demanda de produtos*  $X_{pf}$ , que fornece a quantidade de demanda de cada produto de acordo com o preço de mercado de todos os produtos.

Ela pode ser definida do seguinte modo:

$$\begin{aligned} X_{pf} : \mathbb{R}_+^{m_{pf}} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^{m_{pf}} \\ p_{pf} &\longmapsto X_{pf}(p_{pf}) = (X_1^{pf}(p_{pf}), \dots, X_{m_{pf}}^{pf}(p_{pf})) \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $p_{pf}$  é o vetor de preços de mercado dos produtos.

É razoável, economicamente, supor que essa função seja contínua e que o efeito dos *preços intrínsecos* na demanda dos produtos seja negativo, isto é,

$$\frac{\partial X_a^{pf}}{\partial p_a^{pf}} < 0 \quad \text{para } a = 1, \dots, m_{pf} \quad (2.2)$$

Logo, a matriz jacobiana de  $X_{pf}$  tem diagonal negativa.

Uma outra hipótese interessante que pode ser feita é quanto ao efeito dos *preços cruzados* que, nesse caso, seria negativo e bem pequeno em comparação com o dos *preços intrínsecos*.

O *mercado de insumos*, dentro dessa economia, é a instância onde os produtores adquirem, dos proprietários dos bens iniciais, os insumos necessários ao desempenho de suas atividades.

Esse mercado é suposto operar, também, sob condições de concorrência perfeita, fazendo com que o preço de cada um dos  $m_1$  insumos seja único e estipulado pelo próprio mercado.

A reação dos proprietários dos bens iniciais aos preços de mercado dos insumos é descrita pela *função vetorial da oferta de insumos*  $X_1$ , sendo definida como:

$$\begin{aligned}
 X_1 : \mathbb{R}_+^{m_1} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^{m_1} \\
 p_1 &\longmapsto X_1(p_1) = (X_1^1(p_1), \dots, X_{m_1}^1(p_1))
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

onde  $p_1$  é o vetor de preços de mercado dos insumos.

É bem aceitável, em termos econômicos, assumir que  $X_1$  seja contínua e que o efeito dos *preços intrínsecos* na oferta dos insumos seja positivo, ou seja,

$$\frac{\partial X_a^1}{\partial p_a^1} > 0 \quad \text{para } a = 1, \dots, m_1 \tag{2.4}$$

Desse modo, a matriz jacobiana de  $X_1$  apresenta a diagonal positiva.

Pode-se supor, também, que o efeito dos *preços cruzados* é positivo e sensivelmente menor que o dos *preços intrínsecos*.

A disponibilidade de bens, ofertados em quantidades fixas, recebe a denominação especial de *dotação*, sendo muitas vezes, diferentemente desse capítulo, tratada à parte nos textos econômicos.

### 2.1.2 A produção

A produção, nessa economia setorial, é assumida como sendo descrita por  $n$  atividades ou processos, que geram, a partir de uma determinada quantidade de insumos, uma quantidade específica de bens intermediários e/ou finais. A relação entre a entrada e a saída de bens na atividade é suposta constante, variando, isto sim, a intensidade com que ela é operada. Em outras palavras pode-se dizer que o nível de operação da atividade determina a quantidade de insumos necessários e de bens produzidos, só que sempre a uma taxa fixa.

Devido a tais fatos, essa *tecnologia* é dita, em termos econômicos, do

## CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Económico

tipo *Leontief*, exibindo *retornos constantes à escala*, enquanto que as *atividades* são chamadas de *lineares*.

A denominação da tecnologia deve-se ao fato de Wassily Leontief, economista russo emigrado para os Estados Unidos, ter desenvolvido prática e matematicamente, na década de 1920, o modelo de insumo-produto (Miglioli et al., 1985).

Assumindo um nível de operação unitário, cada atividade pode ser representada através de um vetor coluna cujos coeficientes contêm as quantidades de insumos necessários e de bens produzidos em tal processo e situação. Por convenção adota-se que os coeficientes de entrada são negativos, e os de saída são positivos.

Sendo assim, tem-se, para uma atividade genérica  $k$ , o seguinte vetor coluna:

$$A^k = \begin{bmatrix} A_1^k \\ \hline A_{p1}^k \\ \hline A_{pf}^k \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} m_1 & \text{linhas} \\ m_{p1} & \text{linhas} \\ m_{pf} & \text{linhas} \end{array} \quad (2.5)$$

1 coluna

onde  $A_1^k$ ,  $A_{p1}^k$  e  $A_{pf}^k$  são sub-vetores coluna contendo os coeficientes de entrada de insumos, entrada e saída de produtos intermediários, e saída de produtos finais, respectivamente, da atividade.

A partir desses vetores, obtém-se a matriz  $A = [A^k] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , denominada de *matriz tecnológica*, de *insumo-produto*, de *transformação*, de *atividades* ou de *Leontief*.

As colunas de  $A$  apresentam a decomposição das atividades nos seus insumos



## CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Econômico

e produtos, enquanto que suas linhas mostram o destino (como insumo) e a origem (quando produto) dos bens nas atividades.

A matriz tecnológica pode, portanto, ser particionada da seguinte forma:

$$A = \left[ \begin{array}{c} A_{\text{I}} \\ A_{\text{pl}} \\ A_{\text{pf}} \end{array} \right] \begin{array}{l} m_{\text{I}} \text{ linhas} \\ m_{\text{pl}} \text{ linhas} \\ m_{\text{pf}} \text{ linhas} \end{array} \quad (2.6)$$

$n$  colunas

onde  $A_{\text{I}}$ ,  $A_{\text{pl}}$  e  $A_{\text{pf}}$  são sub-matrizes contendo os coeficientes de entrada de insumos, entrada e saída de produtos intermediários, e saída de produtos finais, respectivamente, das  $n$  atividades de produção.

Uma característica marcante nos modelos de economias setoriais é o fato deles não apresentarem, explicitamente, todos os elementos realmente necessários para o completo desempenho das atividades. Alguns itens são exógenos ao setor considerado, ficando embutidos no que se denomina de custo de operação da atividade. Tais valores são representados pelo *vetor custo de operação*, denotado por

$$c = \left[ \begin{array}{c} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{array} \right] \quad (2.7)$$

onde  $c_k \geq 0$  é o custo da atividade  $k$  quando operada a nível unitário.

É óbvio, pelos comentários acima, que esse vetor é nulo no estudo de economias globais .

O nível de operação das atividades é representada pelo *vetor de nível de operação*

## CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Económico

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

onde  $y_k \geq 0$  é o nível de operação da  $k$ -ésima atividade.

Durante a descrição dos mercados foi observado que o setor produtivo recebe, como dados, os preços da oferta de insumos e da demanda de produtos, obtendo, através das funções  $X_i$  e  $X_{pf}$ , os níveis de oferta dos bens iniciais e de demanda dos bens finais, denotados, respectivamente, por  $x_i$  e  $x_{pf}$ .

A partir dessas informações, pode-se estabelecer um programa de produção para o setor, levando-se em consideração três aspectos básicos:

(i) o total de cada bem inicial demandado pelas atividades não pode superar o estipulado em  $x_i$ ,

(ii) a oferta total de cada produto intermediário tem que, no mínimo, empatar com sua demanda total, e

(iii) a oferta total de cada bem final ao mercado consumidor deve, pelo menos, igualar o determinado por  $x_{pf}$ .

Essas proposições podem ser escritas, matematicamente, com o auxílio da matriz tecnológica  $A$ , devido à já citada propriedade que suas linhas têm de descrever o destino e a origem de cada bem nas diversas atividades.

Desse modo, tem-se que os planos de produção, representados por  $y$ , para essa economia, devem satisfazer as seguintes desigualdades:

## CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Económico

$$\begin{aligned}
 A_1 \cdot y &\geq -x_1 & (m_1 \text{ restrições da demanda de insumos}) \\
 A_{pi} \cdot y &\geq 0 & (m_{pi} \text{ restrições do fluxo físico da produção}) \\
 A_{pf} \cdot y &\geq x_{pf} & (m_{pf} \text{ restrições da oferta de produtos}) \\
 y &\geq 0 & (n \text{ restrições de positividade dos níveis de operação} \\
 & & \text{das atividades})
 \end{aligned}$$

Para um dado par de níveis  $x_1$  e  $x_{pf}$  pode ser que não haja um programa de produção factível, isto é, não exista um vetor  $y$  que satisfaça simultaneamente as condições acima.

Por outro lado, é possível que haja mais de um programa que as obedeça, originando, desse modo, um problema de alocação ótima de recursos de produção. Sua resolução é feita escolhendo-se o plano mais eficiente, ou seja, aquele cujo custo de produção total, representado por  $c^t \cdot y$ , é o menor (Koopmans, 1951).

Isso é equivalente ao seguinte problema de programação linear, para um dado par de valores  $x_1$  e  $x_{pf}$ :

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimizar} & c^t \cdot y \\
 \text{em relação a } y & \\
 \text{sujeito a } \left\{ \begin{array}{ll} A_1 \cdot y \geq -x_1 & : \pi_1 \\ A_{pi} \cdot y \geq 0 & : \pi_{pi} \\ A_{pf} \cdot y \geq x_{pf} & : \pi_{pf} \\ y \geq 0 & \end{array} \right. & (2.9)
 \end{array}$$

ou, de forma mais concisa,

## CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Económico

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimizar} & \mathbf{c}^t \cdot \mathbf{y} \\
 \text{em relação a } & \mathbf{y} \\
 \text{sujeito a} & \left\{ \begin{array}{l} A \cdot \mathbf{y} \geq \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \geq 0 \end{array} \right.
 \end{array} \tag{2.9.a}$$

onde,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\mathbf{x}_l \\ 0 \\ \mathbf{x}_{pf} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

O problema dual associado ao primal (2.9) é o seguinte:

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximizar} & -\pi_l^t \cdot \mathbf{x}_l + \pi_{pf}^t \cdot \mathbf{x}_{pf} \\
 \text{em relação a } & \pi_l, \pi_{pl} \text{ e } \pi_{pf} \\
 \text{sujeito a} & \left\{ \begin{array}{l} \pi_l^t \cdot A_l + \pi_{pl}^t \cdot A_{pl} + \pi_{pf}^t \cdot A_{pf} \leq \mathbf{c}^t \\ \pi_l, \pi_{pl}, \pi_{pf} \geq 0 \end{array} \right.
 \end{array} \tag{2.11}$$

ou, de maneira mais compacta,

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximizar} & \pi^t \cdot \mathbf{x} \\
 \text{em relação a } & \pi \\
 \text{sujeito a} & \left\{ \begin{array}{l} \pi^t \cdot A \leq \mathbf{c}^t \\ \pi \geq 0 \end{array} \right.
 \end{array} \tag{2.11.a}$$

onde,

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_i \\ \pi_{pi} \\ \pi_{pf} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Pela teoria da dualidade, as variáveis  $\pi_i$ ,  $\pi_{pi}$  e  $\pi_{pf}$  representam, economicamente, os preços dos insumos, dos produtos intermediários e dos produtos finais, respectivamente, que maximizam o lucro total dos produtores.

Portanto, no caso do setor econômico analisado, verifica-se que a determinação do plano de produção mais eficiente, conforme estabelecido pelo problema (2.9), é equivalente à maximização do lucro total dos produtores através do cálculo dos preços dos bens envolvidos nessa economia, segundo a formulação dual (2.11).

## 2.2 O Equilíbrio

O equilíbrio de um sistema genérico pode ser definido literalmente como sendo a situação na qual existe igualdade, absoluta ou aproximada, entre forças opostas (Ferreira, 1986).

Em termos de um sistema econômico, as forças opostas são representadas pela oferta e demanda. Sendo assim, o equilíbrio econômico consiste na situação em que a oferta e a demanda encontram-se balanceadas, a um determinado preço. Para que isso ocorra, os agentes econômicos necessitam ter seus objetivos satisfeitos pois, caso contrário, eles se sentirão incentivados a adotar mudanças de política.

Com relação à economia considerada, uma vez dados os preços de mercado dos insumos e dos produtos, denotados por  $p_i$  e  $p_{pf}$ , obtém-se, através das

## CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Econômico

funções  $X_1$  e  $X_{pf}$ , os respectivos níveis de oferta e demanda,  $x_1$  e  $x_{pf}$ .

A partir dessas quantidades, o setor produtivo tem a capacidade de determinar, resolvendo o problema (2.9), o plano de produção  $y$  que o faz operar de maneira eficiente.

Os produtores, por sua vez, têm a possibilidade de calcular, pela formulação (2.11), os preços dos insumos e produtos,  $\pi_1$ ,  $\pi_{p1}$  e  $\pi_{pf}$ , que maximizam seu lucro total.

Se os preços forem iguais, ou seja, se  $p_1 = \pi_1$  e  $p_{pf} = \pi_{pf}$ , então está configurada uma situação de equilíbrio pois, a demanda e a oferta estão balanceadas a um preço comum, e os agentes econômicos têm seu comportamento otimizador satisfeito.

Sendo assim, pode-se dizer que um vetor de preços  $p^*$  e um vetor de níveis de operação das atividades  $y^*$  constituem um equilíbrio para a economia em estudo se:

- (i)  $y^*$  determina um plano de produção eficiente para um dado nível  $x^*$ ,
- (ii) esse nível é compatível com o comportamento dos mercados ao preço  $p^*$ , ou seja,  $x^* = X(p^*)$ , e
- (iii) os preços de mercado são iguais àqueles que maximizam o lucro total dos produtores ao nível  $x^*$ , isto é,  $p^* = \pi^*$ .

Isso é posto dado que

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_{p1} \\ p_{pf} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

e

$$X(p) = \begin{bmatrix} -X_1(p_1) \\ 0 \\ X_{pf}(p_{pf}) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Através de modificações adequadas em (2.9), obtem-se a seguinte formulação para o problema do equilíbrio conforme definido acima:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^t \cdot y \\ \text{em relação a } p \text{ e } y & \\ \text{sujeito a} & \left\{ \begin{array}{ll} A_1 \cdot y \geq -x_1 = -X_1(p_1) & : \pi_1 \\ A_{p1} \cdot y \geq 0 & : \pi_{p1} \\ A_{pf} \cdot y \geq x_{pf} = X_{pf}(p_{pf}) & : \pi_{pf} \\ p_1 = \pi_1 \\ p_{pf} = \pi_{pf} \\ p, y \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \quad (2.15)$$

ou, de um modo mais resumido,

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^t \cdot y \\ \text{em relação a } p \text{ e } y & \\ \text{sujeito a} & \left\{ \begin{array}{ll} A \cdot y \geq x = X(p) : \pi \\ p = \pi \\ p, y \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \quad (2.15.a)$$

Observa-se que essa formulação não é a de um problema de programação linear regular, mesmo com os preços  $p_1$  e  $p_{pf}$  dados, uma vez que as variáveis duais  $\pi_1$  e  $\pi_{pf}$  aparecem explicitamente no primal.

## CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Econômico

Desse modo, vê-se que a otimização da eficiência do setor faz parte da determinação do seu ponto de equilíbrio.

Adaptando as formulações (2.9.a) e (2.11.a) à definição de equilíbrio dada, elas adquirem o seguinte aspecto:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^t \cdot y \\ \text{em relação a } y & \\ \text{sujeito a } & \left\{ \begin{array}{l} A \cdot y \geq X(p) : p \\ y \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \quad (2.9.b)$$

e,

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & p^t \cdot X(p) \\ \text{em relação a } p & \\ \text{sujeito a } & \left\{ \begin{array}{l} p^t \cdot A \leq c^t : y \\ p \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \quad (2.11.b)$$

As condições de folga complementar desses problemas caracterizam o equilíbrio em uma economia setorial como sendo a situação onde:

- (i) Nenhum bem possui demanda excedente ( $A \cdot y \geq X(p)$ ),
- (ii) Nenhuma atividade está produzindo lucro positivo ( $p^t \cdot A \leq c^t$ ),
- (iii) Os bens em disponibilidade têm preço nulo ( $p^t \cdot (A \cdot y - X(p)) = 0$ ),
- (iv) As atividades operadas têm lucro associado igual a zero ( $(p^t \cdot A - c^t) \cdot y = 0$ ), e
- (v) Os preços dos bens e os níveis de operação das atividades são não negativos ( $p, y \geq 0$ ).



## CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Econômico

### 2.2.1 Complementaridade geral

Essas condições podem ser arranjadas de modo a permitir que se formule o equilíbrio econômico como um problema de *complementaridade geral*, que (ver Karamardian, 1971) consiste em encontrar um vetor  $z$  tal que

$$z \geq 0, F(z) \geq 0 \text{ e } F(z)^t \cdot z = 0, \quad (2.16)$$

onde  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $z \in \mathbb{R}^n$ .

Tomando

$$z = \begin{bmatrix} p \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(z) = \begin{bmatrix} A \cdot y - X(p) \\ c - A^t \cdot p \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

chega-se à formulação desejada.

Nota-se que não são feitas exigências quanto as condições de integrabilidade da função  $X(p)$ , o que, sem dúvida nenhuma, representa uma grande vantagem desse tipo de enfoque.

Maiores detalhes teóricos e práticos a respeito dessa formulação podem ser encontrados, por exemplo, em Scaramucci e Rotondo (1987a, 1987b e 1988).

O problema de *complementaridade geral* é, na realidade, um caso especial de um outro mais abrangente denominado de *desigualdade variacional* e que (ver Karamardian, 1971) resume-se em achar  $z \in K$  tal que

$$F(z)^t \cdot (w - z) \geq 0 \text{ para todo } w \in K, \quad (2.18)$$

dado  $K \subset \mathbb{R}^n$  não vazio, fechado e convexo, e  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Embora o conceito de *desigualdade variacional* tenha sido introduzido,

## CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Econômico

originariamente, no estudo de equações diferenciais parciais, observa-se que ele abrange um grande número de problemas de equilíbrio competitivo existentes nas áreas de economia, pesquisa operacional e teoria de controle (Dafermos, 1983).

Desse modo, assim como em Florian e Los (1982) e Friesz et al. (1983), tem-se que o equilíbrio econômico, sob a ótica da *desigualdade variacional*, consiste na situação, representada por  $x_1^*$ ,  $x_{pf}^*$  e  $y^*$ , na qual

$$c^t \cdot (y - y^*) + P_1(x_1^*)^t \cdot (x_1 - x_1^*) - P_{pf}(x_{pf}^*)^t \cdot (x_{pf} - x_{pf}^*) \geq 0$$

para todo  $x_1$ ,  $x_{pf}$  e  $y$  tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \cdot y \geq -x_1 \\ A_{pl} \cdot y \geq 0 \\ A_{pf} \cdot y \geq x_{pf} \\ x_1, x_{pf}, y \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.19)$$

ou, de uma forma mais concisa,

$$c^t \cdot (y - y^*) - P(x^*)^t \cdot (x - x^*) \geq 0$$

para todo  $x$  e  $y$  com

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot y \geq x \\ y \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.19.a)$$

onde,  $P_1$ ,  $P_{pf}$  e  $P$  são as funções inversas de  $X_1$ ,  $X_{pf}$  e  $X$ , respectivamente, definidas como:

## CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Económico

$$\begin{aligned}
 P_1 : \mathbb{R}_+^{m_1} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^{m_1} \\
 x_1 &\longmapsto P_1(x_1) = (P_1^1(x_1), \dots, P_{m_1}^1(x_1))
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

sendo que  $x_1$  é o *nível de demanda de insumos*,

$$\begin{aligned}
 P_{pf} : \mathbb{R}_+^{m_{pf}} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^{m_{pf}} \\
 x_{pf} &\longmapsto P_{pf}(x_{pf}) = (P_1^{pf}(x_{pf}), \dots, P_{m_{pf}}^{pf}(x_{pf}))
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

dado que  $x_{pf}$  é o *nível de oferta de produtos*.

e,

$$P(x) = \begin{bmatrix} -P_1(x_1) \\ 0 \\ P_{pf}(x_{pf}) \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

O problema de *desigualdade variacional* é chamado, também, de problema de *ponto estacionário* (Eaves, 1978) e de *equação generalizada* (Robinson, 1980).

### 2.2.2 Ponto fixo

A partir do problema (2.9), pode-se definir (ver Ahn, 1978), supondo que  $x_1$  e  $x_{pf}$  variam dentro de determinados limites, a seguinte função denominada *custo de operação total*:

$$\begin{aligned}
 V : K \subset \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto V(x) = \text{mínimo } [c^t \cdot y; A \cdot y \geq x, y \geq 0]
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Dado que essa função é convexa, define-se (ver Rockafellar, 1969) o seu

## CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Econômico

subgradiente num ponto  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{K}$  como

$$\begin{aligned}\partial V(\mathbf{x}^0) &= \{ \mathbf{p}; V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}^0) \geq \mathbf{p}^t \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{K} \} = \\ &= \{ \mathbf{p}; \mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x}^0 - V(\mathbf{x}^0) \geq \mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x} - V(\mathbf{x}), \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{K} \}\end{aligned}\quad (2.24)$$

Se  $\mathbf{p}^0 \in \partial V(\mathbf{x}^0)$  então, por (2.24), tem-se que

$$(\mathbf{p}^0)^t \cdot \mathbf{x}^0 - V(\mathbf{x}^0) \geq (\mathbf{p}^0)^t \cdot \mathbf{x} - V(\mathbf{x}), \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{K} \quad (2.25)$$

ou seja, o nível  $\mathbf{x}^0$ , ao preço  $\mathbf{p}^0$ , maximiza lucros no setor produtivo sobre todos os possíveis níveis  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}$ .

Desse modo, conclue-se que o subgradiente representa, do ponto de vista econômico, um conjunto de preços de insumos e de produtos com os quais se maximiza o lucro no setor produtivo, a um dado nível de oferta de insumos e de demanda de produtos.

Analisando-se a propriedade da convexidade de  $V$ , descrita pela expressão

$$\begin{aligned}t.V(\mathbf{x}^1) + (1-t).V(\mathbf{x}^2) &\geq V(t.\mathbf{x}^1 + (1-t).\mathbf{x}^2) \\ \text{para } 0 \leq t \leq 1 \text{ e } \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{K}\end{aligned}\quad (2.26)$$

vê-se que um aumento na escala de produção acarreta num custo de operação maior, ou igual, ao seu valor mínimo ótimo. Isso é causado pela operação de atividades mais *caras* à medida em que a escala de produção aumenta.

Se o problema (2.9) tem soluções primal e dual factíveis, a um dado nível  $\mathbf{x}^0$ , então a solução dual ótima  $\pi^0$  pertence a  $\partial V(\mathbf{x}^0)$  (Ahn, 1978). Logo, os preços dos insumos e dos produtos que maximizam o lucro dos produtores estão contidos no conjunto de preços que maximizam o lucro do setor produtivo.

Nesse caso, o equilíbrio econômico pode ser formulado através do seguinte problema de *ponto fixo* da aplicação composta  $\partial V(\mathbf{X}(\cdot))$ :

$$\pi^* = p^* \in \partial V(x^* = X(p^*)) \quad (2.27)$$

Scarf e Hansen (1973) e Scaramucci e Arica Chávez (1986) apresentam maiores detalhes a respeito dessa classe de problemas.

### 2.2.3 Otimização

Analisando-se a definição (2.18) de *desigualdade variacional*, conclue-se que ela é, na realidade, a representação algébrica da afirmação que o movimento em qualquer direção ( $w - z$ ), a partir de  $z$  fixo, não acarreta em decréscimo no valor da função  $g$ , onde  $F(w) = \nabla g(w)$ , ou seja,  $z$  é um ponto de mínimo local para o seguinte problema:

$$\text{minimizar } g(w) = \int_0^w F(u).du \quad (2.28)$$

em relação a  $w \in K$

A equação vetorial  $F(w) = \nabla g(w)$  é satisfeita, isto é,  $F$  é integrável, se a matriz jacobiana  $\nabla F(w)$  de  $F$  for simétrica (Williamson et al., 1975 p.557). Nesse caso, tem-se, portanto, que toda solução de (2.28) também é solução de (2.18).

Por outro lado, se além de ser simétrico o jacobiano de  $F$  for, também, semidefinido positivo então toda solução de (2.18) é solução de (2.28) (Luenberger, 1984 p.181).

Logo, os problemas (2.18) e (2.28) são equivalentes desde que a matriz jacobiana  $\nabla F(w)$  de  $F$  seja simétrica e semidefinida positiva.

No caso do equilíbrio econômico, supondo-se que as funções  $P_i$  e

## CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Econômico

$P_{pf}$  têm jacobiano simétrico e semidefinido positivo e negativo, respectivamente, tem-se que a formulação (2.9) é equivalente ao seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \left[ c^t \cdot y + \int_0^{x_1} P_1(r) \cdot dr - \int_0^{x_{pf}} P_{pf}(r) \cdot dr \right] \\ & \text{em relação a } y, x_1 \text{ e } x_{pf} \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} A_1 \cdot y \geq -x_1 \\ A_{pl} \cdot y \geq 0 \\ A_{pf} \cdot y \geq x_{pf} \\ x_1, x_{pf}, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.29)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} \left[ \int_0^{x_{pf}} P_{pf}(r) \cdot dr - \int_0^{x_1} P_1(r) \cdot dr - c^t \cdot y \right] \\ & \text{em relação a } y, x_1 \text{ e } x_{pf} \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} A_1 \cdot y \geq -x_1 \\ A_{pl} \cdot y \geq 0 \\ A_{pf} \cdot y \geq x_{pf} \\ x_1, x_{pf}, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.29.a)$$

ou, de um modo mais resumido,

## CAPÍTULO 2. O Equilíbrio Econômico

$$\begin{aligned}
 &\text{maximizar} \quad \left[ \int_0^x P(r).dr - c^t.y \right] \\
 &\text{em relação a } y \text{ e } x \\
 &\text{sujeito a} \quad \begin{cases} A.y \geq x \\ y \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.29.b}$$

Essa equivalência entre o problema do equilíbrio econômico e uma formulação de otimização é mostrada, também, por Friesz et al. (1984), utilizando-se as condições de otimalidade de Kuhn-Tucker.

A simetria do jacobiano de  $P_i$  e de  $P_{pf}$ , requerida para que se chegue à formulação (2.29), significa, economicamente, que o efeito dos preços cruzados deve ser igual, ou seja, a variação do preço de oferta/demanda do bem  $a$  em função da quantidade de oferta/demanda de  $b$  deve igualar-se à variação do preço de oferta/demanda de  $b$  em função da quantidade de oferta/demanda de  $a$ , para todos os bens  $a$  e  $b$  disponíveis no setor econômico. Mais detalhes a respeito deste assunto podem ser encontrados em Ahn (1978, p.18).

Reescrevendo-se a função objetivo de (2.29.a) como

$$\begin{aligned}
 &\left[ \int_0^{x_{pf}} P_{pf}(r).dr - \int_0^{x_i} P_i(r).dr - c^t.y \right] = \left[ \int_0^{x_{pf}} P_{pf}(r).dr - p_{pf}^t.x_{pf} \right] + \\
 &+ \left[ p_{pf}^t.x_{pf} - c^t.y - p_i^t.x_i \right] + \left[ p_i^t.x_i - \int_0^{x_i} P_i(r).dr \right]
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

vê-se que ela representa o excedente econômico obtido no setor, pois sua primeira parcela é o excedente dos consumidores, a segunda dos produtores e a terceira dos proprietários dos bens iniciais. Logo, o equilíbrio pode ser interpretado como sendo uma situação de *máximo bem-estar econômico*.

## CAPÍTULO 3

### METODOLOGIA

Neste capítulo são descritos os métodos que serviram de base para o desenvolvimento de um sistema computacional destinado à resolução numérica do equilíbrio econômico ou de algum outro problema que tenha uma formulação semelhante à sua.

#### 3.1 Introdução

De modo a simplificar a descrição dos métodos de interesse, adota-se como padrão, nesse capítulo, o seguinte problema típico:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } g(\mathbf{x}) &= \int_0^{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u} \\ \text{em relação a } \mathbf{x} &\in \mathbb{K} \\ \text{sujeito a } &\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \\ f_i : \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{para } i = 1, \dots, n \\ g : \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

No caso do equilíbrio econômico tem-se, baseado em (2.29), que:



$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{pf}, y) \quad (3.2.a)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\hat{\mathbf{P}}_1(\mathbf{x}), -\hat{\mathbf{P}}_{pf}(\mathbf{x}), \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{x})) \quad (3.2.b)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}).d\mathbf{x} = \hat{\mathbf{P}}_1(\mathbf{x}).d\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{P}}_{pf}(\mathbf{x}).d\mathbf{x}_{pf} + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{x}).dy \quad (3.2.c)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_1(\mathbf{x}_1) \quad (3.2.d)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{pf}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{pf}(\mathbf{x}_{pf}) \quad (3.2.e)$$

$$\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^t.y \quad (3.2.f)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3.2.g)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & -1 & 0 \\ A_{p1} & 0 & 0 \\ A_{pf} & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.2.h)$$

De acordo com o apresentado no capítulo anterior, a formulação (3.1) é equivalente a um problema de desigualdade variacional, e com isso aplicável na resolução numérica do equilíbrio econômico, desde que a matriz jacobiana  $\nabla \mathbf{F}$  de  $\mathbf{F}$  seja simétrica e semidefinida positiva.

Sabendo-se que a condição de simetria não é sempre verdadeira nas situações de interesse, torna-se necessário o emprego de métodos que de alguma forma viabilizem a sua utilização prática, devido, principalmente, às vantagens computacionais e conceituais que apresenta.

Dentre as várias metodologias existentes para essa finalidade, destaca-se, nessa dissertação, aquelas baseadas na estratégia, comumente adotada nos métodos de otimização, de aproximar a solução de um problema

*complicado* através da resolução iterativa de uma sequência de subproblemas *mais simples* que se relacionam, de algum modo, com o problema original.

Tal relacionamento pode ser conseguido, por exemplo, através da aproximação da função  $F$ , não-integrável, por outras funções  $\tilde{F}^k$  e  $\bar{F}^k$ , que sejam integráveis, dando margem, assim, ao chamados *métodos de aproximações*.

### 3.2 Método da Diagonalização

O *método da diagonalização*, denominado, também, de *método da relaxação* (Dafermos, 1983) e *método de Jacobi não-linear* (Pang e Chan, 1982 e Ahn, 1978), é um método fundamentado na seguinte aproximação não-linear de  $F$  em  $x^k$ , a uma dada iteração  $k$ :

$$F^k(x) \cong \tilde{F}^k(x) = (\tilde{f}_1^k(x), \dots, \tilde{f}_1^k(x), \dots, \tilde{f}_n^k(x)) \quad (3.3)$$

onde  $\tilde{f}_i^k(x) = f_i(x_1^k, \dots, x_{i-1}^k, x_i, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k)$  para  $i = 1, \dots, n$

Conclue-se, a partir dessa definição, que a matriz jacobiana  $\nabla \tilde{F}^k$  de  $\tilde{F}^k$  é diagonal, daí a razão do nome do método, e, portanto, simétrica.

Em termos econômicos, essa estratégia corresponde a adoção de uma resposta *miope* dos preços de mercado dos insumos e produtos, aos respectivos níveis de oferta e demanda.

Isso equivale a afirmar que o preço de mercado de um determinado bem inicial (final) é estabelecido com base no seu nível de oferta (demanda) atual, e nos níveis de oferta (demanda) dos demais bens iniciais (finais) em algum instante de tempo anterior.

Desse modo, os subproblemas diagonalizados, ou separáveis, a serem

resolvidos nesse método são do seguinte tipo:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } \tilde{g}^k(\mathbf{x}^{k+1}) = \int_0^{\mathbf{x}^{k+1}} \tilde{\mathbf{F}}^k(\mathbf{x}).d\mathbf{x} \\
 &\text{em relação a } \mathbf{x}^{k+1} \in \mathbb{K} \\
 &\text{sujeito a } \begin{cases} A.\mathbf{x}^{k+1} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^{k+1} \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Como

$$\tilde{\mathbf{F}}^k.d\mathbf{x} = \tilde{f}_1^k(\mathbf{x}).dx_1 + \dots + \tilde{f}_1^k(\mathbf{x}).dx_1 + \dots + \tilde{f}_n^k(\mathbf{x}).dx_n \tag{3.5}$$

tem-se que  $\tilde{g}^k$  pode ser representada, também, através de uma somatória de integrais de funções univariadas, a saber:

$$\tilde{g}^k(\mathbf{x}^{k+1}) = \int_0^{\mathbf{x}^{k+1}} \tilde{\mathbf{F}}^k(\mathbf{x}).d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \int_0^{\mathbf{x}_i^{k+1}} \tilde{f}_i^k(\mathbf{x}).dx_i \tag{3.6}$$

Logo, pode-se descrever o *método da diagonalização* através do seguinte algoritmo geral:

#### Passo 0 - Inicializações

Tomar um ponto inicial factível  $\mathbf{x}^0$  e fazer  $k \leftarrow 0$ .

#### Passo 1 - Diagonalização

Construir a função  $\tilde{\mathbf{F}}^k(\mathbf{x})$  conforme o especificado em (3.3).

#### Passo 2 - Resolução do subproblema diagonalizado

Obter  $\mathbf{x}^{k+1}$  através da resolução de (3.4).

Passo 3 - Teste de parada

Se  $\max \left\{ |x_i^{k+1} - x_i^k|, \text{ para } i=1, \dots, n \right\} < \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é uma tolerância pré-estabelecida,

então fazer  $x^* \leftarrow x^{k+1}$  e terminar,

senão fazer  $k \leftarrow k + 1$  e retornar ao Passo 1.

As condições sob as quais a sequência  $\{x^k\}$  gerada por esse processo converge localmente para o ponto  $x^*$ , solução de (3.1), são que:

- (i) F seja diferenciável e  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ ,
- (ii) K seja convexo e fechado,
- (iii) F seja continuamente diferenciável numa vizinhança de  $x^*$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^*) &> 0, \text{ para } i = 1, \dots, n \text{ e} \\ \|D^{-1/2} \cdot B \cdot D^{-1/2}\|_2 &< 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde  $D = \text{diag}(\nabla F(x^*))$  e  $B = \nabla F(x^*) - \text{diag}(\nabla F(x^*))$ .

Uma condição suficiente simples para a verificação da desigualdade (3.7) é que a matriz jacobiana  $\nabla F(x^*)$  seja diagonalmente dominante por linha e coluna, ou seja,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^*) > \max \left\{ \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*) \right|, \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^*) \right| \right\} \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

Em termos econômicos, essa condição corresponde a uma situação onde o

### CAPÍTULO 3. Metodologia

preço de oferta (demanda) de cada bem depende basicamente de seu nível de oferta (demanda), e muito pouco dos níveis de oferta (demanda) dos demais bens.

As condições de convergência global, por sua vez, nada mais são que generalizações das condições anteriores. Logo, dado qualquer ponto inicial  $x^0 \in K$ , o *método da diagonalização* converge para  $x^*$ , solução de (3.1), desde que:

- (i)  $K$  seja convexo e fechado,
- (ii)  $F$  seja continuamente diferenciável em  $K$ ,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) > 0, \text{ para } i = 1, \dots, n \text{ e}$$

$$\| D^{-1/2} \cdot B \cdot D^{-1/2} \|_2 < 1 \quad (3.9)$$

onde  $D = \text{diag}(\nabla F(x))$  e  $B = \nabla F(x) - \text{diag}(\nabla F(x))$ .

A demonstração do resultado de convergência local pode ser encontrada em Pang e Chan (1982), enquanto que para o caso global as referências são os artigos de Friesz et al. (1984) e Dafermos (1983).

Os trabalhos de Ahn (1978), Florian e Spiess (1982), Dafermos (1982) e Florian e Los (1982) são, também, fontes de consulta interessantes no que diz respeito aos estudos de convergência.

A aplicação desse método foi sugerida, entre outros, por Abdulaal e LeBlanc (1979) para problemas de equilíbrio de Wardrop, por Friesz et al. (1984) e Florian e Los (1982) em problemas de equilíbrio espacial de preços, e por Ahn (1978), Dafermos (1983), Harker (1984) e Pang e Chan (1982) em

problemas de desigualdade variacional, complementaridade e otimização.

### 3.2.1 Resolução dos subproblemas diagonalizados

O algoritmo do método da diagonalização, na forma como foi proposto, necessita, ainda, de alguns detalhes para tomar um aspecto prático.

Devido à sua importância, a resolução dos subproblemas diagonalizados, correspondente ao Passo 2, é o item que requer um maior aprofundamento.

Analisando-se a formulação (3.4), conclui-se que dois tópicos importantes a serem considerados na sua resolução são a dificuldade e o interesse existentes na determinação *exata* da função objetivo  $\tilde{g}^k$ .

Isso faz com que se distingam duas linhas principais de abordagem dos subproblemas. A primeira delas seria aquela onde a função  $\tilde{g}^k$  é obtida *exatamente* a partir da integração efetiva das funções  $\tilde{f}_1^k$ , de modo que o subproblema possa ser resolvido através da utilização pura e simples de algum pacote computacional de programação não-linear. Essa técnica, embora pareça apresentar uma boa precisão numérica, pode ser extremamente trabalhosa no que diz respeito à integração das funções  $\tilde{f}_1^k$ . Além disso, a disponibilidade de um pacote computacional de programação não-linear eficiente e de caráter geral constitui-se num outro fator que limita, em muito, a sua utilização.

Desse modo, surge a opção de se resolverem os subproblemas *aproximadamente*, e não *exatamente* como na técnica anterior, através de um processo iterativo cuja estratégia **E** seria composta pelos seguintes itens principais:

### CAPÍTULO 3. Metodologia

(E.i) Aproximação de  $\tilde{g}^k$ , na vizinhança de um ponto  $w^l$ , por alguma outra função *mais simples* de se trabalhar,

(E.ii) Resolução do subproblema aproximado resultante para se obter uma direção factível de descida  $d^{l+1}$  de  $\tilde{g}^k$ , e

(E.iii) Minimização de  $\tilde{g}^k$  na direção  $d^{l+1}$  de modo a se determinar um novo ponto factível  $w^{l+1}$  melhor que o anterior, ou seja,  $\tilde{g}^k(w^{l+1}) < \tilde{g}^k(w^l)$ .

Esse processo pode continuar até que não seja possível encontrar-se uma direção factível de descida  $d^{l+1}$ , a partir de um  $w^l$  específico, o qual, nesse caso, seria a solução aproximada de interesse.

Dessa forma pode-se afirmar que essa estratégia resume-se, basicamente, a uma determinação de pontos factíveis do tipo:

$$w^{l+1} = w^l + \alpha_{l+1} \cdot d^{l+1} \quad (3.10)$$

onde  $d^{l+1}$  é uma direção de descida de  $\tilde{g}^k$  e  $\alpha_{l+1}$  é um escalar pertencente ao intervalo  $[0, 1]$  que minimiza  $\tilde{g}^k$  nessa direção.

Além disso, ressalta-se, também, que tal metodologia trabalha diretamente sobre a formulação original (3.4) do subproblema diagonalizado, gerando pontos dentro da região factível de modo que o valor da função objetivo está constantemente decrescendo. Esse é, sem dúvida, um aspecto positivo do algoritmo pois, se o processo iterativo terminar antes da solução final ser encontrada, pode-se utilizar o último ponto calculado como uma aproximação da solução, uma vez que ele é factível. Porisso, os métodos baseados nessa estratégia pertencem à classe dos chamados *métodos primais* ou *viáveis*.

Entre as alternativas existentes para se fazer a aproximação de  $\tilde{g}^k$  na

metodologia descrita, destacam-se, no presente texto, as funções *linear* e *quadrática*.

### 3.2.1.1 Método de Frank-Wolfe (FW)

Pelo *teorema do valor médio*, é dado que se a função  $\tilde{g}^k$  é continuamente diferenciável numa região contendo um segmento de reta  $[w^1, u]$ , então existe um escalar  $\theta \in [0, 1]$  tal que

$$\tilde{g}^k(u) = \tilde{g}^k(w^1) + \nabla \tilde{g}^k(w^1 + \theta.(u - w^1))^t.(u - w^1) \quad (3.11)$$

A fixação do valor de  $\theta$  em zero fornece uma aproximação linear conveniente para  $\tilde{g}^k$ , numa vizinhança de  $w^1$ , correspondente ao plano tangente ao seu gráfico que passa por  $w^1$ , sendo expresso por

$$\tilde{g}^k(u) \cong \tilde{g}^k(w^1) + \nabla \tilde{g}^k(w^1)^t.(u - w^1) \quad (3.12)$$

A aplicação dessa *aproximação tangencial* na estratégia E é fundamentalmente a idéia do método proposto por Frank e Wolfe (1956) para problemas de programação quadrática.

O fato do item (E.ii) resumir-se à resolução de um problema de programação linear, além de colocá-lo na classe dos *métodos de linearizações*, torna-se um grande atrativo para a sua utilização, especialmente com a disponibilidade do método Simplex apresentado por Dantzig (1963).

Sendo assim, observando-se que os termos constantes  $\tilde{g}^k(w^1)$  e  $\nabla \tilde{g}^k(w^1)^t.w^1$  de (3.12) podem ser omitidos numa formulação de programação linear, descreve-se o método de Frank-Wolfe, para a resolução de (3.4), do seguinte modo:



Passo 0 - Inicializações

Tomar um ponto inicial factível  $w^0$  e fazer  $l \leftarrow 0$

Passo 1 - Cálculo da direção de descida

Determinar uma direção de descida  $d^{l+1} = u - w^l$  através da resolução do seguinte *problema de programação linear*:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \nabla \tilde{g}^k(w^l)^t \cdot u = \tilde{F}^k(w^l)^t \cdot u \\ &\text{em relação a } u \in \mathbb{K} \\ &\text{sujeito a } \begin{cases} A \cdot u \geq b \\ u \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Passo 2 - Pesquisa linear

Determinar o escalar  $\alpha_{l+1}$  a partir do *problema unidimensional* a seguir:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \varphi(\alpha_{l+1}) = \tilde{g}^k(w^l + \alpha_{l+1} \cdot d^{l+1}) \\ &\text{em relação a } \alpha_{l+1} \in [0, 1] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Passo 3 - Teste de parada

Se  $\alpha_{l+1} = 0$

então fazer  $w^* \leftarrow w^l$  e encerrar,

senão fazer  $w^{l+1} \leftarrow w^l + \alpha_{l+1} \cdot d^{l+1}$ ,  $l \leftarrow l + 1$  e retornar ao Passo 1.

Em resumo vê-se que esse método faz uma minimização sucessiva de  $\tilde{g}^k$  em direções factíveis de descida obtidas através da resolução de problemas lineares.

Minoux (1983) prova, detalhadamente, que a sequência  $\{w^l\}$  gerada por esse processo iterativo converge para um ponto de mínimo local de (3.4), dado *qualquer* ponto inicial factível  $w^0 \in \mathbb{K}$ , desde que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}^k \text{ seja continuamente diferenciável, isto é, } \tilde{g}^k \in C^1, \\ U = \{ u \in \mathbb{R}^n; A \cdot u \geq b, u \geq 0 \} \text{ seja limitado, e} \\ \tilde{g}^k(u) \rightarrow +\infty \text{ quando } \|u\| \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

Nota-se que essas condições não são estruturalmente muito exigentes, principalmente quanto a convexidade, representado, desse modo, uma vantagem dos *métodos primais*. Como desvantagem registra-se a necessidade de um ponto inicial factível para que se possa começar a execução do algoritmo. Essa é uma característica marcante e desvantajosa dessa classe de métodos (Luenberger, 1984 p. 323).

Zangwill (1969) demonstra, também, a convergência do *Frank-Wolfe*, enquanto que Florian e Los (1982), Friesz et al. (1984), Kennington (1980) e LeBlanc et al. (1975) apresentam algumas de suas aplicações práticas.

### 3.2.1.2 Método da Sequência de Programas Quadráticos (SPQ)

Caso a função  $\tilde{g}^k$  tenha derivada segunda contínua ( $\tilde{g}^k \in C^2$ ) pode-se, devido ao *teorema de Taylor*, aproximá-la numa vizinhança de  $w^1$  pela função quadrática descrita a seguir:

$$\tilde{g}^k(u) \cong \tilde{g}^k(w^1) + \nabla \tilde{g}^k(w^1)^t \cdot (u - w^1) + \frac{1}{2} \cdot (u - w^1)^t \cdot \nabla^2 \tilde{g}^k(w^1) \cdot (u - w^1) \quad (3.15)$$

Essa aproximação é mais estável que a tangencial, utilizada no método de Frank-Wolfe, principalmente nas vizinhanças da solução onde ocorre um predomínio dos termos de segunda ordem sobre os de primeira que, nesse caso, são *quase* zero. As componentes do gradiente de  $\tilde{g}^k(u)$ , estando perto de zero, podem oscilar entre valores positivos e negativos, fazendo com que a direção

### CAPÍTULO 3. Metodologia

geométrica indicada por ele muda rapidamente, representando, portanto, uma situação instável (Zangwill, 1969).

Desse modo, com a aplicação da *aproximação quadrática* (3.15) na estratégia E descrita anteriormente, obtém-se uma extensão natural do *Frank-Wolfe* que, assim como em Fletcher (1972), pode ser detalhada da seguinte forma:

#### Passo 0 - Inicializações

Tomar um ponto inicial factível  $w^0$  e fazer  $l \leftarrow 0$

#### Passo 1 - Cálculo da direção de descida

Determinar uma direção de descida  $d^{l+1} = u - w^l$  através da resolução do seguinte *problema de programação quadrática*:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \nabla \tilde{g}^k(w^l)^t \cdot u + \frac{1}{2} \cdot u^t \cdot \nabla^2 \tilde{g}^k(w^l) \cdot (u - 2 \cdot w^l) = \\ &\quad \tilde{F}^k(w^l)^t \cdot u + \frac{1}{2} \cdot u^t \cdot \nabla \tilde{F}^k(w^l) \cdot (u - 2 \cdot w^l) \\ &\text{em relação a } u \in \mathbb{K} \\ &\text{sujeito a } \begin{cases} A \cdot u \geq b \\ u \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.16}$$

#### Passo 2 - Pesquisa linear

Determinar o escalar  $\alpha_{l+1}$  a partir do *problema unidimensional* a seguir:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \varphi(\alpha_{l+1}) = \tilde{g}^k(w^l + \alpha_{l+1} \cdot d^{l+1}) \\ &\text{em relação a } \alpha_{l+1} \in [0, 1] \end{aligned} \tag{3.14}$$

#### Passo 3 - Teste de parada

Se  $\alpha_{l+1} = 0$

então fazer  $w^* \leftarrow w^l$  e encerrar,

### CAPÍTULO 3. Metodologia

senão fazer  $\mathbf{w}^{l+1} \leftarrow \mathbf{w}^l + \alpha_{l+1} \cdot \mathbf{d}^{l+1}$ ,  $l \leftarrow l + 1$  e retornar ao Passo 1.

Observa-se que, assim como em (3.13), os termos constantes  $\tilde{g}^k(\mathbf{w}^l)$ ,  $\nabla \tilde{g}^k(\mathbf{w}^l)^t \cdot \mathbf{w}^l$  e  $\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{w}^l)^t \cdot \nabla^2 \tilde{g}^k(\mathbf{w}^l) \cdot \mathbf{w}^l$  de (3.15) foram omitidos na formulação (3.16).

A utilização da pesquisa linear, representada pelo Passo 2, evita que se tomem pontos, principalmente *longe* da solução, onde o valor da função objetivo cresça ao se fazer, simplesmente,  $\alpha_{l+1} = 1$  (Luenberger, 1984).

Esse método é denominado de *método da Sequência de Programas Quadráticos* (SPQ) pois, como se nota, ele minimiza sucessivamente a função objetivo em direções factíveis de descida obtidas através da resolução de problemas quadráticos.

A idéia contida nele é, basicamente, a mesma do *método de Newton*, podendo, até mesmo, ser considerado um *método de Newton modificado* (Gill et al., 1981 e Luenberger, 1984). Essa classe de métodos é a mais eficiente, das disponíveis atualmente, para problemas de otimização com restrições não-lineares (Biggs, 1972 e Gill et al., 1988).

#### 3.2.1.3 Método da Secante e da Posição Falsa

Um item importante dos algoritmos descritos anteriormente diz respeito ao passo da minimização unidimensional. O *Frank-Wolfe* e a *Sequência de Programas Quadráticos*, assim como vários outros métodos de otimização, reduzem, de alguma forma, problemas multidimensionais para um sequência de sucessivas pesquisas lineares. Por essa razão as técnicas de *line search* são consideradas a espinha dorsal dos algoritmos de programação não-linear.

### CAPÍTULO 3. Metodologia

A minimização unidimensional exata, embora seja *aparentemente* simples, é, na realidade, quase tão difícil quanto a sua correspondente multidimensional. Por isso, observa-se a tentativa do desenvolvimento de vários métodos de otimização que não necessitem de uma busca unidirecional exata, ou que sejam, de alguma forma, independentes da precisão com que ela é feita. Entretanto, tais métodos não são totalmente aplicáveis para problemas *difíceis*, cuja função objetivo não é muito bem comportada (Gill e Murray, 1974).

De acordo com Mateus e Luna (1986), os métodos de pesquisa linear podem ser divididos, dependendo de seus objetivos, em:

(i) Método finitos ou de aprofundamento

São os que visam determinar um ponto que simplesmente decresça bastante o valor da função objetivo, sem, contudo, minimizá-la.

(ii) Métodos de reduções sucessivas de intervalos

São aqueles que procuram encontrar um ponto próximo ao ponto de mínimo, cercado-o dentro de um *intervalo de incerteza* e, progressivamente, reduzindo o seu tamanho até atingir uma precisão desejada.

A redução do *intervalo de incerteza*, que efetivamente distingue os métodos dessa classe, pode ser feita, basicamente, através das seguintes estratégias:

(ii.1) avaliação da função em pontos específicos dentro do intervalo, acompanhada da comparação de suas magnitudes,

(ii.2) aproximação da função por uma *mais simples* (quadrática ou cúbica, por exemplo) que concorde exatamente com ela, e/ou com sua(s) derivada(s), num certo número de pontos, e cujo mínimo é facilmente obtido.

### CAPÍTULO 3. Metodologia

A aproximação de  $\varphi(\cdot)$ , definida em (3.14), por uma quadrática  $q(\alpha)$  que coincida com ela, e com suas derivadas primeira e segunda, num ponto  $\alpha_1$ , pode ser descrita, pelo *teorema de Taylor*, como

$$q(\alpha) = \varphi(\alpha_1) + \varphi'(\alpha_1) \cdot (\alpha - \alpha_1) + \frac{1}{2} \cdot \varphi''(\alpha_1) \cdot (\alpha - \alpha_1)^2 \quad (3.17)$$

Considerando-se que  $q''(\alpha)$  ( $=\varphi''(\alpha_1)$ ) é contínua, ou seja,  $q \in C^2$ , e supondo-se que  $\varphi''(\alpha_1) > 0$ , então, pelas condições necessárias e suficientes de segunda ordem, tem-se que  $\alpha_{1+1}$  é um ponto de mínimo global de  $q(\alpha)$  se e somente se

$$q'(\alpha_{1+1}) = \varphi'(\alpha_1) + \varphi''(\alpha_1) \cdot (\alpha_{1+1} - \alpha_1)^2 = 0 \quad (3.18)$$

e, portanto,

$$\alpha_{1+1} = \alpha_1 - \frac{\varphi'(\alpha_1)}{\varphi''(\alpha_1)} \quad (3.19)$$

Substituindo-se  $\varphi''(\alpha_1)$  por

$$\frac{\varphi'(\alpha_{1-1}) - \varphi'(\alpha_1)}{\alpha_{1-1} - \alpha_1} \quad (3.20)$$

obtem-se a fórmula

$$\alpha_{1+1} = \alpha_1 - \varphi'(\alpha_1) \cdot \frac{(\alpha_{1-1} - \alpha_1)}{(\varphi'(\alpha_{1-1}) - \varphi'(\alpha_1))} \quad (3.21)$$

que, usada iterativamente, consiste no *método da secante* ou da *interpolação linear*.

Considerando-se, a partir de (3.14), que

$$\varphi(\alpha) = \tilde{g}^k(w^1 + \alpha \cdot d^{1+1}) \quad (3.22)$$

e

$$\varphi'(\alpha) = \nabla \tilde{g}^k(w^l + \alpha \cdot d^{l+1})^t \cdot d^{l+1} = \tilde{F}^k(w^l + \alpha \cdot d^{l+1})^t \cdot d^{l+1} \quad (3.23)$$

conclue-se que (3.21) pode ser escrita, também, como

$$\alpha_{l+1} = \alpha_l - \nabla \tilde{g}^k(a)^t \cdot d^{l+1} \cdot \frac{(\alpha_{l-1} - \alpha_l)}{(\nabla \tilde{g}^k(b) - \nabla \tilde{g}^k(a))^t \cdot d^{l+1}} \quad (3.24)$$

ou

$$\alpha_{l+1} = \alpha_l - \tilde{F}^k(a)^t \cdot d^{l+1} \cdot \frac{(\alpha_{l-1} - \alpha_l)}{(\tilde{F}^k(b) - \tilde{F}^k(a))^t \cdot d^{l+1}} \quad (3.25)$$

onde,  $a = w^l + \alpha_l \cdot d^{l+1}$  e  $b = w^l + \alpha_{l-1} \cdot d^{l+1}$ .

Comparando-se (3.19) com (3.21), vê-se que a última utiliza menos informações de mais pontos, enquanto a primeira, que é a base do *método de Newton*, usa mais informações de menos pontos. Por essa razão, conclui-se que o *método da secante* é mais adequado para problemas cuja função têm um cálculo trabalhoso. Um outro aspecto a ser salientado é a independência existente, em ambas as fórmulas, entre  $\alpha_{l+1}$  e  $\varphi(\alpha_l)$ .

Tanto o *método da secante*, quanto o *de Newton*, necessitam de um ponto inicial suficientemente próximo da solução para que converjam a uma ordem de aproximadamente 1,618 e de no mínimo 2, respectivamente (Luenberger, 1984).

Analisando-se a expressão (3.21), conclue-se que pode ocorrer extrapolação, isto é,  $\alpha_{l+1} > \alpha_l$  ou  $\alpha_{l+1} < \alpha_{l-1}$ , desde que  $\varphi'(\alpha_{l-1})$  e  $\varphi'(\alpha_l)$  tenham o mesmo sinal.

### CAPÍTULO 3. Metodologia

que  $\alpha_{i+1}$  receba o valor do ponto,  $\alpha_{i-1}$  ou  $\alpha_i$ , cujo sinal da derivada primeira,  $\varphi'(\alpha_{i-1})$  ou  $\varphi'(\alpha_i)$ , seja o mesmo que  $\varphi'(\alpha_{i+1})$ . Com isso tem-se o *método da posição falsa* que, embora tenha sua convergência assegurada, ela se processa a uma taxa linear (Gill et al., 1981).

Vários outros métodos de *pesquisa linear* podem ser encontrados, por exemplo, em Avriel (1976), Gill et al. (1981), Mateus e Luna (1986), Minoux (1983), Luenberger (1984) e Zangwill (1969).

#### 3.2.2 Algoritmo detalhado

Uma vez concluída a descrição dos métodos destinados à resolução dos subproblemas diagonalizados, o algoritmo do *método da diagonalização* adquire o seguinte aspecto:

##### Passo 0 - Inicializações

Tomar um ponto inicial factível  $\mathbf{x}^0$  e fazer  $k \leftarrow 0$ .

##### Passo 1 - Diagonalização

Aproximar a função  $F(\mathbf{x})$  por  $\tilde{F}^k(\mathbf{x})$  definida como

$$F^k(\mathbf{x}) \cong \tilde{F}^k(\mathbf{x}) = (\tilde{f}_1^k(\mathbf{x}), \dots, \tilde{f}_1^k(\mathbf{x}), \dots, \tilde{f}_n^k(\mathbf{x})) \quad (3.3)$$

onde  $\tilde{f}_i^k(\mathbf{x}) = f_i(x_1^k, \dots, x_{i-1}^k, x_i, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k)$  para  $i = 1, \dots, n$

##### Passo 2 - Resolução do subproblema diagonalizado

Obter  $\mathbf{x}^{k+1}$ , solução de



$$\begin{aligned}
&\text{minimizar } \tilde{g}^k(x^{k+1}) = \int_0^{x^{k+1}} \tilde{F}^k(x).dx = \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i^{k+1}} \tilde{f}_i^k(x).dx_i \\
&\text{em relação a } x^{k+1} \in K \\
&\text{sujeito a } \begin{cases} A.x^{k+1} \geq b \\ x^{k+1} \geq 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.4.a}$$

através de:

Opção 1 - Integração Explícita (IE)

Integrar as funções  $\tilde{f}_i^k$ , para  $i=1, \dots, n$ , e resolver diretamente o problema resultante.

Opção 2- Frank-Wolfe (FW) ou Sequência de Programas Quadráticos (SPQ)

Passo 2.0 - Inicializações

Fazer  $w^0 \leftarrow x^k$  e  $l \leftarrow 0$ .

Passo 2.1 - Cálculo da direção de descida

Determinar a direção de descida  $d^{l+1} = u - w^l$  a partir da resolução do seguinte problema de programação

Opção 2.1.a - linear (FW)

$$\begin{aligned}
&\text{minimizar } \nabla \tilde{g}^k(w^l)^t \cdot u = \tilde{F}^k(w^l)^t \cdot u \\
&\text{em relação a } u \in K \\
&\text{sujeito a } \begin{cases} A.u \geq b \\ u \geq 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

ou

Opção 2.1.b - quadrática (SPQ)

$$\begin{aligned} \text{minimizar } \nabla \tilde{g}^k(\mathbf{w}^l)^t \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}^t \cdot \nabla^2 \tilde{g}^k(\mathbf{w}^l) \cdot (\mathbf{u} - 2 \cdot \mathbf{w}^l) = \\ \tilde{\mathbf{F}}^k(\mathbf{w}^l)^t \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}^t \cdot \nabla \tilde{\mathbf{F}}^k(\mathbf{w}^l) \cdot (\mathbf{u} - 2 \cdot \mathbf{w}^l) \end{aligned}$$

em relação a  $\mathbf{u} \in \mathbb{K}$

(3.16)

$$\text{sujeito a } \begin{cases} A \cdot \mathbf{u} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \geq 0 \end{cases}$$

### Passo 2.2 - Pesquisa linear

#### Passo 2.2.a - Inicializações

Fazer  $\alpha_{l-1} \leftarrow 0$ ,  $\alpha_l \leftarrow 1$ .

#### Passo 2.2.b - Teste do sentido da direção

Se  $\tilde{\mathbf{F}}^k(\mathbf{w}^l)^t \cdot \mathbf{d}^{l+1} > 0$  ou  $\tilde{\mathbf{F}}^k(\mathbf{u})^t \cdot \mathbf{d}^{l+1} < \tilde{\mathbf{F}}^k(\mathbf{w}^l)^t \cdot \mathbf{d}^{l+1} < 0$

então fazer  $\alpha_{l+1} \leftarrow 0$  e encerrar a pesquisa linear.

#### Passo 2.2.c - Determinação de $\alpha_{l+1}$

Calcular  $\alpha_{l+1}$  através de

$$\alpha_{l+1} = \alpha_l - \tilde{\mathbf{F}}^k(\mathbf{a})^t \cdot \mathbf{d}^{l+1} \cdot \frac{(\alpha_{l-1} - \alpha_l)}{(\tilde{\mathbf{F}}^k(\mathbf{b}) - \tilde{\mathbf{F}}^k(\mathbf{a}))^t \cdot \mathbf{d}^{l+1}} \quad (3.25)$$

onde,  $\mathbf{a} = \mathbf{w}^l + \alpha_l \cdot \mathbf{d}^{l+1}$  e  $\mathbf{b} = \mathbf{w}^l + \alpha_{l-1} \cdot \mathbf{d}^{l+1}$ .

#### Passo 2.2.d - Teste de parada da pesquisa linear

Se  $|\tilde{\mathbf{F}}^k(\mathbf{w}^l + \alpha_{l+1} \cdot \mathbf{d}^{l+1})^t \cdot \mathbf{d}^{l+1}| < \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é uma tolerância pré-estabelecida,

então encerrar a pesquisa linear

senão se  $\tilde{\mathbf{F}}^k(\mathbf{w}^l + \alpha_{l+1} \cdot \mathbf{d}^{l+1})^t \cdot \mathbf{d}^{l+1} > 0$

então fazer  $\alpha_l \leftarrow \alpha_{l+1}$  e ir ao Passo 2.2.c,

senão fazer  $\alpha_{l-1} \leftarrow \alpha_{l+1}$  e ir ao Passo 2.2.c.

Passo 2.3 - Teste de parada da resolução do subproblema diagonalizado

Se  $\alpha_{l+1} < \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é uma tolerância pré-estabelecida,

então fazer  $\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \mathbf{w}^* \leftarrow \mathbf{w}^l$  e encerrar a resolução do subproblema diagonalizado,

senão fazer  $\mathbf{w}^{l+1} \leftarrow \mathbf{w}^l + \alpha_{l+1} \cdot \mathbf{d}^{l+1}$ ,  $l \leftarrow l + 1$  e retornar ao

Passo 2.1.

Passo 3 - Teste de parada do método da diagonalização

Se  $\max \left\{ \left| x_i^{k+1} - x_i^k \right|, \text{ para } i=1, \dots, n \right\} < \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é uma tolerância pré-estabelecida,

então fazer  $\mathbf{x}^* \leftarrow \mathbf{x}^{k+1}$  e terminar,

senão fazer  $k \leftarrow k + 1$  e retornar ao Passo 1.

### 3.3 Métodos de aproximações lineares

Um outro grupo de métodos iterativos, não menos importante que o anterior e que também pode ser empregado para se resolver o problema (3.1), tem seu fundamento na seguinte aproximação linear de  $F$  em  $\mathbf{x}^k$ , a uma dada iteração  $k$ :

$$\mathbf{F}^k(\mathbf{x}) \cong \bar{\mathbf{F}}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{A}(\mathbf{x}^k) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \quad (3.26)$$

onde  $\mathbf{A}(\mathbf{x}^k)$  é uma matriz simétrica específica.

Um fato importante, que decorre dessa definição, é que o jacobiano de  $\bar{\mathbf{F}}^k$ , por ser igual a  $\mathbf{A}(\mathbf{x}^k)$ , é, também, simétrico.

Os subproblemas de uma metodologia baseada em (3.26) são, aparentemente,

semelhantes aos subproblemas (3.4) do *método da diagonalização* uma vez que eles possuem o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } \bar{g}^k(\mathbf{x}^{k+1}) = \int_0^{\mathbf{x}^{k+1}} \bar{\mathbf{F}}^k(\mathbf{x}).d\mathbf{x} \\
 &\text{em relação a } \mathbf{x}^{k+1} \in \mathbb{K} \\
 &\text{sujeito a } \begin{cases} A.\mathbf{x}^{k+1} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^{k+1} \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Todavia, com um pouco de cálculo, observa-se que  $\bar{g}^k$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 \bar{g}^k(\mathbf{x}^{k+1}) &= \int_0^{\mathbf{x}^{k+1}} \bar{\mathbf{F}}^k(\mathbf{x}).d\mathbf{x} = \int_0^{\mathbf{x}^{k+1}} (\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + A(\mathbf{x}^k).(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)).d\mathbf{x} = \\
 &= (\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) - A(\mathbf{x}^k).\mathbf{x}^k)^t.\mathbf{x}^{k+1} + \frac{1}{2}.(\mathbf{x}^{k+1})^t.A(\mathbf{x}^k).\mathbf{x}^{k+1} = \\
 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^k)^t.\mathbf{x}^{k+1} + \frac{1}{2}.(\mathbf{x}^{k+1})^t.A(\mathbf{x}^k).(\mathbf{x}^{k+1} - 2.\mathbf{x}^k)
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Com isso, os métodos de aproximações lineares destinados à resolução de (3.1) podem ser descritos a partir do seguinte algoritmo:

#### Passo 0 - Inicializações

Tomar um ponto inicial factível  $\mathbf{x}^0$  e fazer  $k \leftarrow 0$ .

#### Passo 1 - Aproximação linear

Aproximar a função  $F(\mathbf{x})$  por  $\bar{\mathbf{F}}^k(\mathbf{x})$  definida como

$$\mathbf{F}^k(\mathbf{x}) \cong \bar{\mathbf{F}}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + A(\mathbf{x}^k).(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \tag{3.22}$$

onde  $A(\mathbf{x}^k)$  é uma matriz simétrica específica.

Passo 2 - Resolução do subproblema aproximado

Obter  $\mathbf{x}^{k+1}$  através da resolução do seguinte *problema de programação quadrática*:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } F(\mathbf{x}^k)^t \cdot \mathbf{x}^{k+1} + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{x}^{k+1})^t \cdot A(\mathbf{x}^k) \cdot (\mathbf{x}^{k+1} - 2 \cdot \mathbf{x}^k) \\ &\text{em relação a } \mathbf{x}^{k+1} \in \mathbb{K} \\ &\text{sujeito a } \begin{cases} A \cdot \mathbf{x}^{k+1} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^{k+1} \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Passo 3 - Teste de parada

Se  $\max \left\{ |x_i^{k+1} - x_i^k|, \text{ para } i=1, \dots, n \right\} < \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é uma tolerância pré-estabelecida,

então fazer  $\mathbf{x}^* \leftarrow \mathbf{x}^{k+1}$  e terminar,

senão fazer  $k \leftarrow k + 1$  e retornar ao Passo 1.

Entre as definições que podem ser dadas à matriz  $A(\mathbf{x}^k)$  destacam-se, nessa dissertação, duas de maior interesse prático.

A primeira delas, correspondente ao *método de Jacobi linearizado*, resume-se em fazer com que  $A(\mathbf{x}^k) = \text{diag}(\nabla F(\mathbf{x}^k))$ .

Do ponto de vista econômico, esse método assume que o preço de mercado de cada bem responde apenas à variação de seu nível de oferta/demanda, desprezando, com isso, o efeito da variação da oferta/demanda dos demais bens da economia.

Sua convergência local para a solução  $\mathbf{x}^*$  de (3.1) ocorre desde que:

- (i)  $F$  seja contínua,
- (ii)  $\mathbb{K}$  seja convexo e fechado,

### CAPÍTULO 3. Metodologia

(iii)  $F$  seja continuamente diferenciável numa vizinhança de  $\mathbf{x}^*$ ,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) > 0, \text{ para } i = 1, \dots, n \text{ e}$$

$$\|D^{-1/2} \cdot B \cdot D^{-1/2}\|_2 < 1 \quad (3.7)$$

onde  $D = \text{diag}(\nabla F(\mathbf{x}^*))$  e  $B = \nabla F(\mathbf{x}^*) - \text{diag}(\nabla F(\mathbf{x}^*))$ .

A demonstração dessas condições locais, e das globais, que as generalizam, é feita por Pang e Chan (1982). Um exemplo da aplicação prática desse método em problemas de equilíbrio de tráfego pode ser encontrado em Oliveira (1989).

Não é demais frisar-se que embora as matrizes  $\tilde{\nabla F}^k$  (diagonalização) e  $A$  (Jacobi linearizado) sejam diagonais, esse fato decorre de ações conceitualmente diferentes.

No primeiro método, a diagonalização de  $\nabla F$  é obtida através da aproximação de  $F$  por uma função  $\tilde{F}^k$  cujo jacobiano é diagonal. O método de Jacobi linearizado, por sua vez, mesmo sendo fundamentado numa aproximação  $\bar{F}^k$  de  $F$ , diagonaliza  $\nabla F$  simplesmente desprezando os termos não nulos que estão fora de sua diagonal principal.

Uma outra forma possível de se definir a matriz  $A(\mathbf{x}^k) = [a_{ij}]$  é através de aproximações simétricas de  $\nabla F(\mathbf{x}^k)$  tais como:

$$a_{ij} = \frac{\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)}{2} \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n \quad (3.30)$$

e

$$a_{ij} = \min \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right\} \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n \quad (3.31)$$

Isso dá origem a métodos do tipo *quase-Newton* que, sob a ótica econômica, baseiam-se na suposição que o efeito dos preços cruzados é igual.

Estudos de convergência local e global podem ser encontrados, assim como nos casos anteriores, no trabalho de Pang e Chan (1982).

### 3.4 Considerações finais

Comparando-se o algoritmo proposto para o método da diagonalização com o dos métodos de aproximações lineares, nota-se que o segundo é sensivelmente mais simples que o anterior. Dessa forma, embora as aproximações lineares sejam, teoricamente, menos eficientes que as não-lineares, na prática elas são mais fáceis de serem programadas.

Afora isso, observa-se uma grande similaridade entre os problemas (3.13), (3.16) e (3.29), o que, sem dúvida, pode ser explorado numa implementação computacional desses métodos.

As críticas feitas por alguns autores aos métodos descritos nesse capítulo são, basicamente, de cunho filosófico, uma vez que eles põem em dúvida a validade prática das aproximações realizadas. Por outro lado, o desempenho computacional que apresentam nas situações de interesse, apesar da rigidez de suas condições suficientes de convergência, acaba se contrapondo a esse ceticismo, fazendo com que eles sejam cada vez mais estudados e desenvolvidos tanto em termos teóricos quanto práticos (Florian e Spiess, 1982).

### CAPÍTULO 3. Metodologia

Além dos métodos apresentados nesse capítulo, existe na literatura uma outra série de técnicas, com as mais diferentes estratégias, que também podem ser empregadas, ou pelo menos tentadas, para se resolver o problema (3.1). Como exemplo cita-se o trabalho de Carey (1977).



## CAPÍTULO 4

### Implementação Computacional

Este capítulo contém uma descrição do sistema OTIMIZA desenvolvido para o cálculo do equilíbrio econômico, baseado nos métodos de otimização apresentados anteriormente.

#### 4.1 Descrição Geral

Tendo o objetivo principal de determinar numericamente o ponto de equilíbrio econômico, através de uma formulação de otimização, desenvolveu-se um sistema em FORTRAN no computador VAX 11/785 (VMS 4.5) instalado no Centro de Computação da UNICAMP.

Os aspectos formais da linguagem utilizada, além de vários tópicos relativos à eficiência de sua programação, podem ser encontrados em Digital Equipment Corporation (1984a, 1984b) e Control Data Corporation (1985).

A peculiaridade dos problemas de equilíbrio econômico reside no fato, relatado no capítulo 2, que a sua função objetivo nem sempre está bem definida devido à não integrabilidade das funções que representam, economicamente, a *demanda inversa*.

Sendo assim, fez-se uma implementação computacional dos métodos de aproximações descritos no capítulo anterior, de modo a mostrar o emprego da otimização nessa classe de problemas, mesmo quando isso não seja, num primeiro instante, possível.

Embora essa tenha sido a motivação principal do sistema desenvolvido,

## CAPÍTULO 4. Implementação Computacional

evitou-se, contudo, a particularização demasiada de seu ambiente para permitir a sua utilização em outras aplicações de interesse cuja formulação seja semelhante à do equilíbrio.

Dessa forma pode-se definir o OTIMIZA como sendo um sistema computacional baseado em métodos de otimização e orientado para a resolução de problemas do seguinte tipo:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } g(x) \\ &\text{em relação a } x \in K \\ &\text{sujeito a } \left\{ \begin{array}{l} A \cdot x \geq b \\ l \leq x \leq u \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde,  $g : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$b \in \mathbb{R}^m$

$l, u \in \mathbb{R}^n$

Os métodos sobre os quais se fundamenta o OTIMIZA são identificados como:

Métodos de aproximações não-lineares

0 - Método da Diagonalização com Integração Explícita (IE)

1 - Método da Diagonalização com Frank-Wolfe (FW) ou Sequência de Programas Quadráticos (SPQ)

Métodos de aproximações lineares

2 - Método de Jacobi linearizado

31- Método da Simetrização com média aritmética (equação 3.30)

32- Método da Simetrização com mínimo (equação 3.31)

## CAPÍTULO 4. Implementação Computacional

Conforme já fora salientado no final do capítulo 3, existe uma grande similaridade estrutural entre esses dois grandes grupos de métodos. A diferença básica, decorrente do tipo de aproximação feita, está na resolução do subproblema resultante.

No caso do método da diagonalização esse item é bem abrangente, variando desde a resolução de um problema de programação não-linear qualquer (IE) até a resolução iterativa de uma sequência de programas quadráticos (SPQ) ou lineares (FW), acompanhada de pesquisas lineares.

Nos métodos de aproximações lineares, entretanto, esse passo resume-se à resolução pura e simples de um problema quadrático.

Desse modo, a utilização de um único pacote computacional capaz de resolver tanto problemas lineares como quadráticos e não-lineares quaisquer, permitiu que em apenas uma estrutura algorítmica se encaixassem todos os métodos desejados.

O sistema escolhido para essa tarefa foi o MINOS (Modular In-core Nonlinear Optimization Code), desenvolvido por Murtagh e Saunders (1978, 1983), devido à sua disponibilidade na biblioteca de programas do VAX e, principalmente, por sua aplicabilidade e eficiência na resolução de problemas de otimização, como atestam Friesz et al. (1984), Gill et al. (1981, 1988), Harker (1984) e Rowse (1981).

Basicamente, pode-se descrever o MINOS como sendo um pacote computacional, escrito em FORTRAN, destinado à resolução de problemas de otimização *grandes e esparsos*, onde a função objetivo e as restrições podem ser *lineares* ou *não-lineares*, ou uma mistura de ambas. No caso de funções não-lineares, elas devem ser suaves.

## CAPÍTULO 4. Implementação Computacional

A entrada de dados no MINOS, na forma como ele é utilizado no OTIMIZA, é feita através de dois arquivos de dados (SPECS.MNS e MPS.MNS) e uma subrotina (FUNOBJ).

O SPECS.MNS contém informações a respeito da natureza do problema a ser resolvido e do modo como a solução deve ser obtida, permanecendo inalterado durante toda a execução do sistema. Seu formato é relativamente livre.

O MPS.MNS define as restrições do problema e os coeficientes da parte linear da função objetivo, podendo ser atualizado, pelo sistema, durante a sua execução. Apresenta um formato bem rígido.

O próprio OTIMIZA se encarrega da montagem desses arquivos a partir das informações fornecidas pelo usuário e das que ele mesmo estipula, visando, com isso, facilitar a sua utilização e assegurar a perfeita entrada de dados no MINOS.

A subrotina FUNOBJ é responsável pelo cálculo do valor e do gradiente da parte não-linear da função objetivo que, nesse caso, pode ser uma quadrática ou uma não-linear qualquer. Ela utiliza a subrotina DERIVADAS para obter os valores de  $g$  e  $\nabla g$  na diagonalização com IE, e de  $\nabla g^k$  e  $\nabla^2 g^k$  nos demais métodos, com exceção da diagonalização com FW que só necessita do primeiro.

É no nível dessas subrotinas que se processa o Passo 1 dos métodos implementados, correspondente à aproximação linear/não-linear da função  $F$ .

Enquanto a DERIVADAS é fornecida pelo usuário, a FUNOBJ é parte integrante do OTIMIZA e não pode ser alterada externamente.

O sistema tem sua execução encerrada, ou interrompida, quando o método escolhido converge, ou o número máximo de iterações permitida para a resolução do problema é alcançada. Esse valor, definido pelo usuário, representa a

## CAPÍTULO 4. Implementação Computacional

quantidade máxima de aproximações lineares/não-lineares da função objetivo  $g(x)$  que podem ser feitas para que a solução seja encontrada.

Desse modo, evita-se um gasto excessivo de tempo na hipótese de ocorrer divergência, ciclagem ou lentidão demasiada de convergência.

A precisão utilizada nos testes de convergência durante o programa é única e estipulada pelo usuário.

Os valores numéricos reais são de precisão simples, definidos como REAL\*4 no FORTRAN/VAX.

### 4.2 Ponto inicial

O ponto inicial efetivamente utilizado é obtido através de um processo iterativo que consiste em aproximar a função  $g(x)$  linearmente/não-linearmente e resolver o problema resultante, até que se chegue a uma direção factível de descida.

Uma vez atingido tal objetivo começa-se, verdadeiramente, a executar o método escolhido.

Observa-se que o ponto inicial, conseguido dessa forma, representa a extremidade esquerda de um intervalo factível de busca, pertencente a uma direção de descida de  $g(x)$ .

Com isso, procura-se evitar que um ponto infactível, ou não contido numa direção de descida, seja empregado para a partida do método.

O ponto que serve de base para a determinação da primeira aproximação é fornecido pelo usuário, sendo que o número de iterações efetuadas nesse procedimento não é contabilizado para fins de interrupção do programa.

Como norma geral, sugere-se o fornecimento de dados iniciais apenas às

## CAPÍTULO 4. Implementação Computacional

variáveis que não podem se anular.

### 4.3 Resolução dos Subproblemas

Conforme já fora destacado anteriormente, a resolução dos subproblemas aproximados tem, na utilização do MINOS, o seu trunfo principal. Em qualquer dos métodos implementados, ele é sempre chamado uma vez a cada iteração desse passo.

Na diagonalização com integração explícita e nos métodos de aproximações lineares, a resolução de cada subproblema, por ser composta de apenas uma iteração, se confunde com o emprego do MINOS que, nessa situação, é o total responsável por esse item tão importante dos algoritmos.

As outras variantes do método da diagonalização, entretanto, apresentam um cenário diferente do anterior uma vez que a resolução de cada subproblema é feita, como um todo, de forma iterativa. As chamadas do MINOS não são, como antes, as únicas responsáveis por esse tópico, mas se fazem acompanhar de buscas unidimensionais.

O número de iterações do FW ou da SPQ entre duas diagonalizações consecutivas  $\tilde{g}^k$  de  $g$  é limitado a um valor máximo estabelecido pelo próprio usuário.

Isso é feito com o propósito de se evitar um esforço excessivo na resolução dos primeiros subproblemas, possibilitando, de outro modo, que os últimos sejam completamente solucionados.

É importante salientar-se que a opção pelo método 1 (diagonalização com FW ou SPQ) não determina, explicitamente, qual dos métodos (FW ou SPQ) deve ser empregado na resolução dos subproblemas. Isso fica implícito a partir das

## CAPÍTULO 4. Implementação Computacional

informações fornecidas na entrada dos dados do problema.

Um item muito importante dentro desse contexto, é o número de variáveis a serem *tratadas* como não-lineares pelo MINOS.

É óbvio que se tal valor for fixado em zero, o Frank-Wolfe será utilizado para esse fim, não sendo necessário, portanto, que seja fornecido o hessiano da função diagonalizada.

Caso contrário, é assumido que o método a ser empregado é o da SPQ, havendo, desse modo, a exigência da entrada do hessiano. Isso não impede, todavia, que se utilize o Frank-Wolfe nessa situação, bastando, para tanto, fazer o hessiano igual a zero.

Desse modo, embora a função objetivo diagonalizada seja, supostamente, uma quadrática, na prática ela é linear.

Uma primeira diferença existente entre esse modo de utilização do Frank-Wolfe e o anterior, decorre da forma como o MINOS resolve os problemas correspondentes à determinação das direções factíveis de descida.

Enquanto o método *simplex primal*, proposto por Dantzig (1963), é aplicado nos programas lineares, no caso não-linear ocorre uma combinação entre os algoritmos *quase Newton* e *gradiente reduzido*, sugeridos, respectivamente, por Wolfe (1962) e Davidson (1959).

Isto acaba, entretanto, tornando-se irrelevante no caso do Frank-Wolfe pois, segundo Murtagh e Saunders (1983, p.2), essas metodologias são essencialmente equivalentes quando a função objetivo é linear.

As duas formas de utilização do Frank-Wolfe distinguem-se, também, no modo de fornecimento da função objetivo ao MINOS. Enquanto na primeira isso é feito exclusivamente pelo MPS.MNS, na segunda tal encargo é de

## CAPÍTULO 4. Implementação Computacional

responsabilidade, também, da subrotina FUNOBJ.

Apesar dessas considerações, é importante ressaltar que a atualização freqüente do arquivo MPS.MNS não está vinculada apenas à ausência de variáveis *não-lineares* na função objetivo. Ela relaciona-se, também, com a canalização das variáveis do problema, representada pelos vetores  $l$  e  $u$  em (4.1), pois, como foi citado no capítulo anterior, uma das hipóteses de convergência local do Frank-Wolfe é a limitação da região factível.

O MINOS, dentre as especificações do problema que podem ser fixadas no SPECS.MNS, possui duas que visam estipular um valor máximo (*mais infinito*) e um mínimo (*menos infinito*) atingível pelas variáveis ilimitadas parcial e totalmente.

Sendo assim, uma forma simples de diminuir a *liberdade* dessas variáveis é através do estabelecimento de valores adequados à realidade do problema para o *mais* e o *menos infinito*.

Desse modo, obtém-se uma canalização implícita das variáveis e, conseqüentemente, a limitação da região factível, não havendo, para tanto, necessidade de atualização do arquivo MPS.MNS a cada chamada do MINOS.

A fixação explícita de limites às variáveis ilimitadas parcial e totalmente é um outro procedimento que pode ser aplicado nesse caso. Todavia, cabe ressaltar que embora esse procedimento também desobrigue a repetida correção do MPS.MNS, ele é mais trabalhoso que o anterior e requer um maior conhecimento do problema. Um ponto a ser observado nessas duas estratégias é a rigidez dos limites, implícitos ou explícitos, fixados pelo usuário na entrada dos dados no programa.

Dentro deste contexto existe ainda uma terceira técnica que pode ser



## CAPÍTULO 4. Implementação Computacional

utilizada pelo OTIMIZA. Nela o limite inferior (superior) originariamente livre, de uma determinada variável, é igualado ao valor assumido por ela na iteração anterior menos (mais) uma certa constante, fornecida pelo usuário, denominada de *cerca*.

Isso dá origem a um processo dinâmico de fixação das canalizações para as variáveis parcial e totalmente ilimitadas, requerendo, portanto, a atualização do MPS.MNS a cada chamada do MINOS.

Para que tal procedimento seja realmente efetuado pelo sistema, a despeito da utilização dos dois anteriores, é preciso que o valor fornecido para a *cerca* seja positivo e exista, pelo menos, uma variável sem limitante inferior e/ou superior finito.

A adição de limites explícitos às variáveis do problema é aplicada, por exemplo, em dois algoritmos, propostos por Friesz et al. (1984), que empregam o Frank-Wolfe como passo intermediário para o cálculo do equilíbrio espacial de preços.

Mesmo que a limitação da região factível não seja requerida para a convergência do método da SPQ, as técnicas de canalização descritas acima podem ser utilizadas da mesma forma.

### 4.4 Pesquisa linear

A pesquisa linear empregada no FW e na SPQ foi dotada de alguns artifícios computacionais para torná-la tão rápida quanto precisa.

O comprimento dos intervalos de busca é reduzido em 4% a partir de sua extremidade direita, a fim de se evitarem problemas numéricos de divisão por zero, decorrentes do uso direto dos resultados provenientes do MINOS.

## CAPÍTULO 4. Implementação Computacional

Suas *iterações normais*, baseadas no *método da posição falsa*, podem ser relaxadas, possibilitando, desse modo, uma aceleração do processo.

Cada *iteração relaxada* é obtida através da multiplicação do passo médio de um número de *iterações normais*, fixado pelo usuário, por um fator específico definido, também, na entrada de dados.

A pesquisa linear é encerrada quando a derivada da função aproximada, ou o passo efetuado, estiverem dentro da precisão desejada no problema.

Cabe salientar aqui que o termo *passo*, utilizado acima, representa a diferença entre os resultados de duas *iterações normais* consecutivas.

O número de iterações, incluindo as *normais* e as *relaxadas*, é limitado a um valor máximo estipulado na entrada de dados. Caso essa quantidade seja atingida, a busca unidimensional é interrompida.

### 4.5 Entrada de dados

A entrada de dados no sistema é feita através de um único arquivo, tipo texto, denominado OTIMIZA.DAT, a partir do qual são extraídas as informações necessárias durante sua execução, bem como gravados os arquivos SPECS.MNS e MPS.MNS.

Seu conteúdo, obedecendo a uma estrutura relativamente fixa, é composto pelos seguintes dados:

Nome do problema

Cerca

Relaxação

Iterações para relaxação

## CAPÍTULO 4. Implementação Computacional

Número máximo permitido

de aproximações lineares/não-lineares

de subproblemas

de pesquisas lineares

Precisão

Frequência de impressão

de aproximações lineares/não-lineares

de cada subproblema

Limitante supremo (+infinito)

Limitante ínfimo (-infinito)

Eco dos dados matriciais de entrada

Número de linhas de  $A$ , Número de colunas de  $A$ , Número de variáveis  
não-lineares

Número de elementos não-nulos de  $A$

Linha, Coluna, Valor dos elementos não-nulos de  $A$

Número de elementos não-nulos de  $b$

Linha, Valor dos elementos não-nulos de  $b$

Número de limites inferiores distintos de -infinito

Variável, Valor dos limites inferiores distintos de -infinito

Número de limites superiores distintos de +infinito

Variável, Valor dos limites superiores distintos de +infinito

Número de componentes não-nulas do ponto inicial fornecido

Variável, Valor das componentes não-nulas do ponto inicial fornecido

Especificações adicionais do MINOS

A partir dessas informações, e das que ele fixa, o sistema grava o

## CAPÍTULO 4. Implementação Computacional

seguinte conjunto de parâmetros no SPECS.MNS:

- \* MINIMIZE (tipo de otimização);
- \* OBJECTIVE=OBJ1 (nome da parte linear da função objetivo);
- \* RHS=RHS1 (nome do vetor **b**);
- \* BOUNDS=BOUND1 (nome do conjunto de limites inferiores e superiores);
- ROWS= superestimativa do número de linhas da matriz *A*;
- COLUMNS= superestimativa do número de colunas da matriz *A*;
- ELEMENTS= superestimativa do número de elementos não-nulos de *A*;
- LOWER BOUND= menos infinito;
- UPPER BOUND= mais infinito;
- \* MPS FILE=25 (número do arquivo MPS.MNS);
- SCALE=YES (escalamento das variáveis e restrições lineares);
- SOLUTION=NO (suspensão da impressão dos resultados finais);
- NONLINEAR VARIABLES= número de variáveis não-lineares;
- SUPERBASICS LIMIT= superestimativa do número de variáveis não-lineares;
- HESSIAN DIMENSION= superestimativa do número de variáveis não-lineares;
- LINESEARCH TOLERANCE= precisão da pesquisa linear realizada no MINOS;
- LOG FREQUENCY= 0 (suspensão da impressão dos resultados das iterações do MINOS);

SUPPRESS PARAMETERS (suspensão da impressão da lista completa dos parâmetros do MINOS e de seus valores utilizados).

As diretivas precedidas por um asterisco não são passíveis de alteração pelo usuário. As demais, tanto as pertencentes a esse conjunto como as outras existentes, podem ser modificadas através da opção *Especificações adicionais*

## CAPÍTULO 4. Implementação Computacional

do MINOS presente no OTIMIZA.DAT. Isso deve ser feito, contudo, de acordo com o estabelecido por Murtagh e Saunders (1983).

### 4.6 Saída dos resultados

As informações relativas à última chamada do MINOS são mantidas no arquivo MINOS.SAI, possibilitando, com isso, que se façam verificações a respeito de seu desempenho no programa.

Originariamente, visando à redução do tempo total de processamento, esse arquivo contém um pequeno conjunto de resultados, que podem ser acrescidos de outros a partir de modificações adequadas nas especificações do SPECS.MNS.

Os parâmetros de entrada do problema, as advertências geradas durante o processo, a solução obtida, juntamente com o tempo e o número de iterações necessárias para tal, são sempre gravados num arquivo, tipo texto, denominado OTIMIZA.SAI. O restante, dados matriciais de entrada e resultados parciais das iterações e subiteraões, fica condicionado à opção feita no OTIMIZA.DAT.

## CAPÍTULO 5

### Resultados Experimentais

Neste capítulo são apresentados e comparados os resultados obtidos com a utilização do OTIMIZA e do PEGASUS em quatro problemas distintos de equilíbrio econômico.

#### 5.1 Introdução

O programa PEGASUS, cujos resultados são comparados ao do OTIMIZA, é um pacote computacional escrito em FORTRAN por Bordoni (1989). Possuindo um ambiente totalmente voltado para o cálculo de equilíbrios econômicos, ele tem seu fundamento na teoria de complementaridade geral.

Isso torna interessante tal comparação, principalmente no que se refere à qualidade das soluções, pois tratam-se de duas formas distintas de se abordarem os mesmos problemas.

Com relação ao tempo de processamento, tais confrontamentos ficam prejudicados uma vez que o PEGASUS encontra-se num estágio de desenvolvimento relativamente superior ao do OTIMIZA, apresentando, inclusive, uma versão para microcomputadores da linha IBM-PC.

A descrição da estrutura dos setores econômicos considerados é feita através do emprego de diagramas onde as atividades são representadas por *retângulos*, os produtos intermediários por *círculos*, os mercados de bens finais por *triângulos normais* e os mercados de insumos por *triângulos invertidos*.

## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

Dentro de cada um desses símbolos encontra-se o índice referente ao respectivo bem/atividade caracterizada, cujo detalhamento é feito em tabelas apresentadas à parte.

Os mnemônicos correspondentes aos bens e atividades são iniciados pelas letras  $x$  e  $y$ , respectivamente, seguidos do índice de referência.

Os coeficientes técnicos fixos de demanda/oferta de insumos/produtos são denotados sobre os arcos, que expressam, exatamente, o fluxo de bens nas economias enfocadas.

As funções *demanda inversa* dos bens iniciais e finais são fornecidas através de gráficos ilustrativos e, se for o caso, da própria expressão analítica.

As dotações são colocadas dentro de elipses, junto aos bens correspondentes, enquanto que o custo unitário de cada atividade é apresentado ao lado do respectivo símbolo representativo.

A unidade monetária padrão utilizada, a menos de alguma outra informação em contrário, é o dólar. Os tempos de processamento são apresentados em segundos.

Os quatro exemplos tiveram, em comum, os seguintes parâmetros de entrada:

Relaxação	5
Iterações para Relaxação	5
Número máximo permitido	
de aproximações lineares/não-lineares	50
de subproblemas	100
de pesquisas lineares	100
Precisão	0.0001

## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

### Frequência de impressão

das aproximações lineares/não-lineares	0
de cada subproblema	0
Eco dos dados matriciais de entrada	0 (NAO)
Especificações adicionais	0

### 5.2 Combustível líquido

O primeiro exemplo a ser considerado diz respeito ao setor de combustíveis líquidos no Brasil, conforme a descrição feita por Rotondo (1988) e Scaramucci e Rotondo (1988).

Trata-se de um modelo simples onde a função objetivo é bem definida uma vez que as funções *demanda inversa* são integráveis. Logo, não ocorre uma aplicação efetiva dos métodos de aproximações descritos no Capítulo 3 já que isso não se faz necessário.

Dessa forma, esse exemplo fica sendo útil para mostrar o emprego do OTIMIZA em problemas desse tipo, bem como para estabelecer uma comparação entre os métodos de Frank-Wolfe, da Sequência de Programas Quadráticos e da Integração Explícita.

Os bens, as atividades e a estrutura dessa economia são detalhados a seguir:



## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

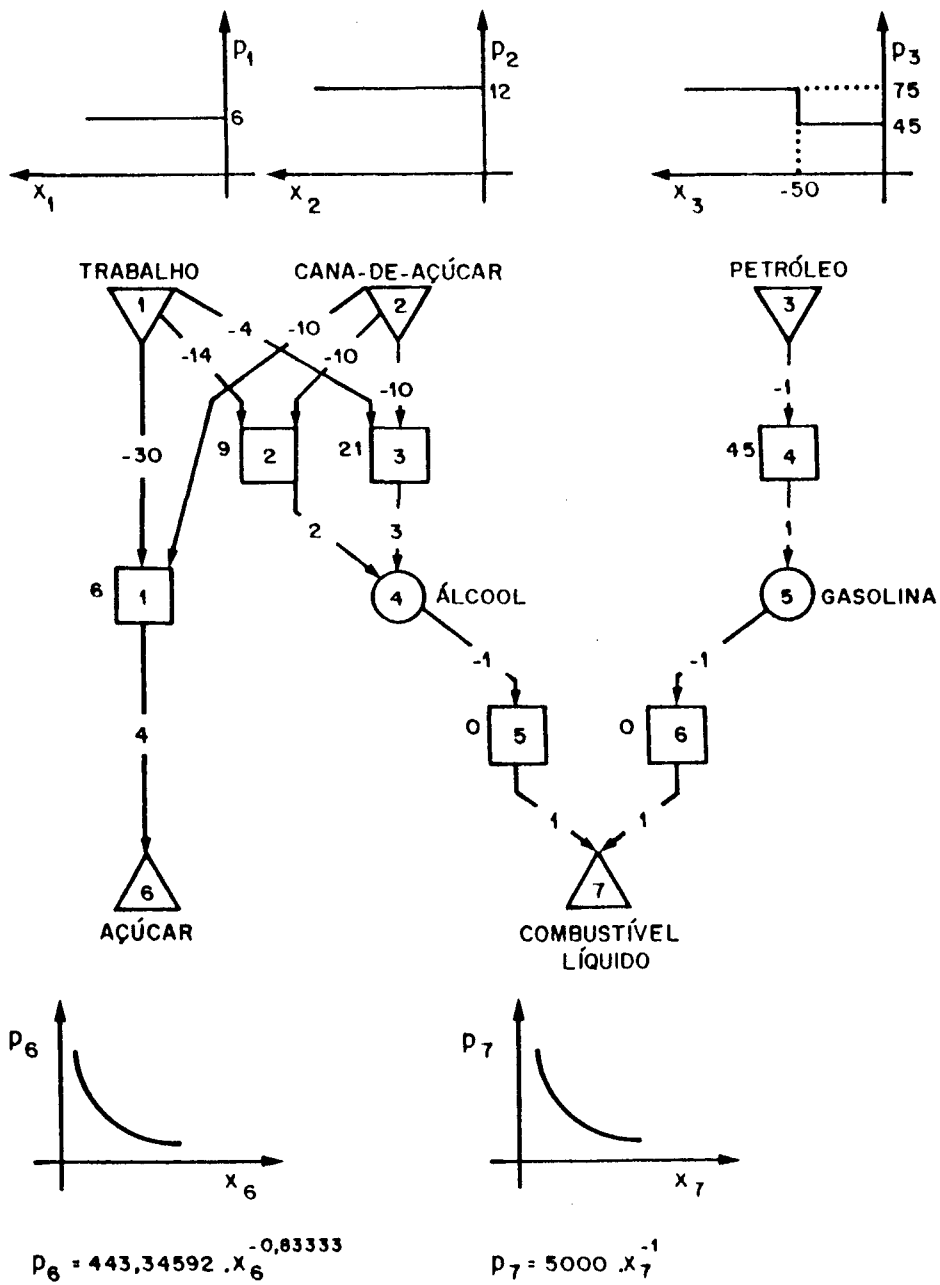
**Tabela 5.1** Bens do setor de combustíveis líquidos no Brasil

Índice	Variável	Descrição
1	$x_1$	Mão-de-obra (homens-hora)
2	$x_2$	Cana-de-açúcar (toneladas)
3	$x_3$	Petróleo (barris)
4	$x_4$	Álcool (litros)
5	$x_5$	Gasolina (litros)
6	$x_6$	Açúcar (toneladas)
7	$x_7$	Combustível líquido (litros)

**Tabela 5.2** Atividades do setor de combustíveis líquidos no Brasil

Índice	Variável	Descrição
1	$y_1$	Produção de açúcar
2	$y_2$	Produção de álcool/Região 1
3	$y_3$	Produção de álcool/Região 2
4	$y_4$	Refino de petróleo
5	$y_5$	Ligação de mercados
6	$y_6$	Ligação de mercados

**Figura 5.1 - Estrutura do setor de combustíveis líquidos no Brasil**



## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

Os resultados obtidos pelos dois sistemas são apresentados a seguir, ressaltando-se que foi fornecido um ponto inicial cujas componentes não-nulas (variáveis  $x_6$  e  $x_7$ ) receberam o valor 50.

Os limitantes supremo e ínfimo das variáveis foram assinalados em  $+1.0E+10$  e  $-1.0E+10$ , respectivamente, enquanto que a cerca utilizada no Frank-Wolfe foi igual a 50.

**Tabela 5.3** Resultados comparativos

Variável	PEGASUS	IE	OTIMIZA FW	SPQ
$x_1$	-183	-182,5821	-183,0129	-182,9412
$x_2$	-323,6	-323,4747	-323,6141	-323,6064
$x_3$	0	0	-0,0061	0
$x_6$	8,24	8,1834	8,2411	8,2306
$x_7$	90,91	90,9048	90,9095	90,909
$y_1$	2,06	2,0459	2,0603	2,0576
$y_2$	0	0	0	0
$y_3$	30,30	30,3016	30,3011	30,303
$y_4$	0	0	0,0061	0
$y_5$	90,91	90,9048	90,9034	90,909
$y_6$	0	0	0,0061	0
Iterações	4	1	2	2
MINOS				
chamadas		1	18	8
tempo		8,97	15,15	6,81
Pesq. lin.				
chamadas			215	17
tempo			0,07	0,01
Tempo total	4	10	19	9

A variação nos limitantes supremo e ínfimo, na SPQ, produziu soluções

## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

semelhantes a esta.

O Frank-Wolfe mostrou-se extremamente sensível às alterações no valor da cerca empregada, bem como produziu resultados idênticos em suas duas formas de utilização detalhadas no capítulo anterior.

A Integração Explícita apresentou alguma sensibilidade aos valores mínimos estabelecidos para as variáveis  $x_6$  e  $x_7$  que não podem se anular.

### 5.3 Agroindústria

O segundo modelo apresentado é o de uma agroindústria capacitada a produzir milho, frango e ovos, segundo a formulação de Rotondo (1988) e Scaramucci e Rotondo (1987b).

Nesse caso, existem duas funções *demanda inversa* não-integráveis, requerendo, portanto, a utilização efetiva dos métodos de aproximações implementados no OTIMIZA.

A seguir incluem-se as tabelas dos bens e atividades da economia considerada, bem como a representação gráfica de sua estrutura.

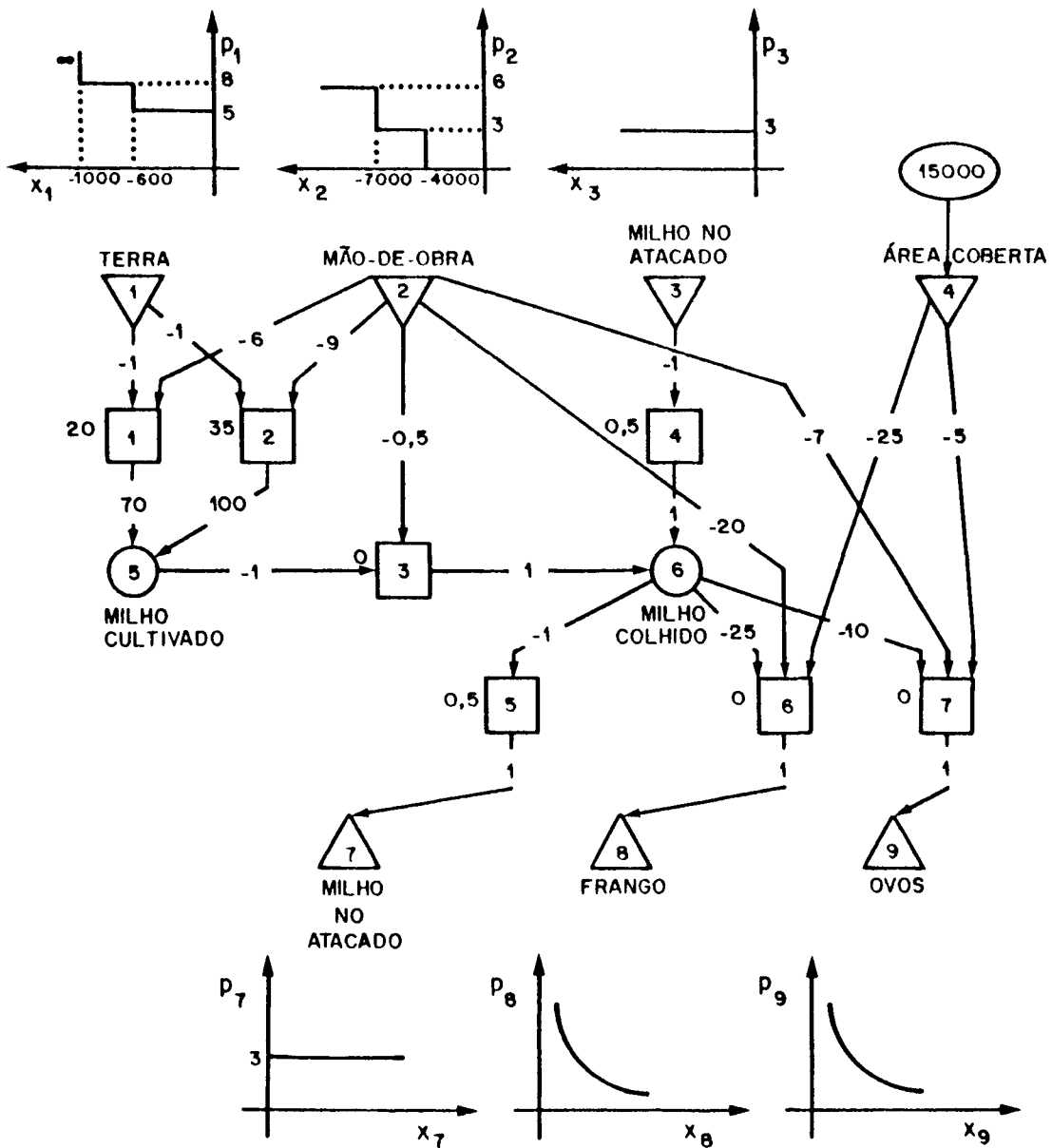
**Tabela 5.4** Bens da agroindústria

Índice	Variável	Descrição (unidade)
1	$x_1$	Terra (hectares)
2	$x_2$	Mão-de-obra (homens-hora)
3	$x_3$	Milho no atacado (sacos)
4	$x_4$	Área coberta ( $m^2$ )
5	$x_5$	Milho cultivado (sacos)
6	$x_6$	Milho colhido (sacos)
7	$x_7$	Milho no atacado (sacos)
8	$x_8$	Frango (kg)
9	$x_9$	Ovos (dúzias)

**Tabela 5.5** Atividades da agroindústria

Índice	Variável	Descrição
1	$y_1$	Produção de milho/Tecnologia 1
2	$y_2$	Produção de milho/Tecnologia 2
3	$y_3$	Colheita de milho
4	$y_4$	Transporte de milho do atacado
5	$y_5$	Transporte de milho ao atacado
6	$y_6$	Produção de frango
7	$y_7$	Produção de ovos

Figura 5.2 Estrutura da agroindústria



$$p_8 = 32534660 \cdot x_9^{-0,869565} \cdot x_8^{-2,173913}$$

$$p_9 = 795,07711 \cdot x_8^{-0,434763} \cdot x_9^{-2,173913}$$

## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

Os resultados listados a seguir foram obtidos com um ponto inicial no qual o valor 100 foi atribuído as variáveis  $x_8$  e  $x_9$ , e 0 às demais. Os limitantes supremo e ínfimo estiveram em  $+1.0E+20$  e  $-1.0E+20$ , respectivamente, enquanto que a cerca utilizada na diagonalização com Frank-Wolfe foi igual a 1000.

**Tabela 5.6** Resultados comparativos

Variável	PEGASUS	OTIMIZA			
		IE	Diagonalização com FW	SPQ	Jacobi linearizado
$x_1$	-47,06	-47,0755	-49,9039	-47,0695	-47,0769
$x_2$	-7000	-7000	-7127,6915	-7000	-7000
$x_3$	-3045	-3043,3438	-2874,0701	-3044,0664	-3043,1638
$x_4$	-6334	-6334,654	-6348,3	-6333,96	-6332,8275
$x_7$	0	0	14,0495	0	0
$x_8$	253,2	253,1473	253,7323	253,1595	253,1442
$x_9$	0,9944	0,9943	0,9985	0,9945	0,9945
$y_1$	47,06	47,0755	49,9039	47,0695	47,0769
$y_2$	0	0	0	0	0
$y_3$	3294	3295,282	3493,2698	3294,865	3295,1982
$y_4$	3045	3043,3438	2874,0701	3044,0664	3043,386
$y_5$	0	0	14,0495	0	0
$y_6$	253,2	253,1473	253,7322	253,1595	253,1442
$y_7$	0,9944	0,9943	0,9984	0,9945	0,9945
Iterações	10	13	8	10	19
MINOS					
chamadas		13	36	49	19
tempo		36,28	34,84	48,86	20,03
Pesq. lin.					
chamadas			1362	73	
tempo			0,74	0,03	
Tempo total	7	39	41	50	22

## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

Assim como no exemplo anterior, a variação da cerca provocou alterações sensíveis na solução obtida, no número de iterações e no tempo de processamento, para a diagonalização com Frank-Wolfe. A adoção de limitação implícita rígida, nesse caso, mostrou-se satisfatória.

Quanto à diagonalização com SPQ, não foram observadas mudanças consideráveis nos resultados anteriores ao se empregar alguma das técnicas de canalização de variáveis descritas no capítulo 4.

A simetrização não apresentou resultados satisfatórios, enquanto que a diagonalização com IE teve o mesmo comportamento que no exemplo anterior.

### 5.4 Setor energético simples

Este exemplo, proposto por Hogan (1975), trata de um setor energético cujas únicas fontes primárias de energia resumem-se em carvão e petróleo bruto.

Sua resolução, feita por Hogan (1975), requer, nesse contexto, a aplicação efetiva dos métodos implementados no OTIMIZA, devido à existência de funções *demandas inversas* não-integráveis.

Os bens e as atividades desse setor, além de sua própria estrutura, são apresentados, a seguir, em duas partes.

A unidade dos bens relacionados ao carvão mineral é a tonelada, enquanto a dos ligados ao óleo bruto é o barril.



## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

**Tabela 5.7** Bens do setor energético - Parte I

Índice	Variável	Descrição
1	$x_1$	Carvão mineral/Região produtora 1
2	$x_2$	Carvão mineral/Região produtora 2
3	$x_3$	Carvão mineral/Região consumidora 1
4	$x_4$	Carvão mineral/Região consumidora 2

**Tabela 5.8** Atividades da setor energético - Parte I

Índice	Variável	Descrição
1	$y_1$	Transporte de carvão mineral da região produtora 1 para a consumidora 1
2	$y_2$	Transporte de carvão mineral da região produtora 1 para a consumidora 2
3	$y_3$	Transporte de carvão mineral da região produtora 2 para a consumidora 1
4	$y_4$	Transporte de carvão mineral da região produtora 2 para a consumidora 2

Figura 5.3 Estrutura do setor energético - Parte I

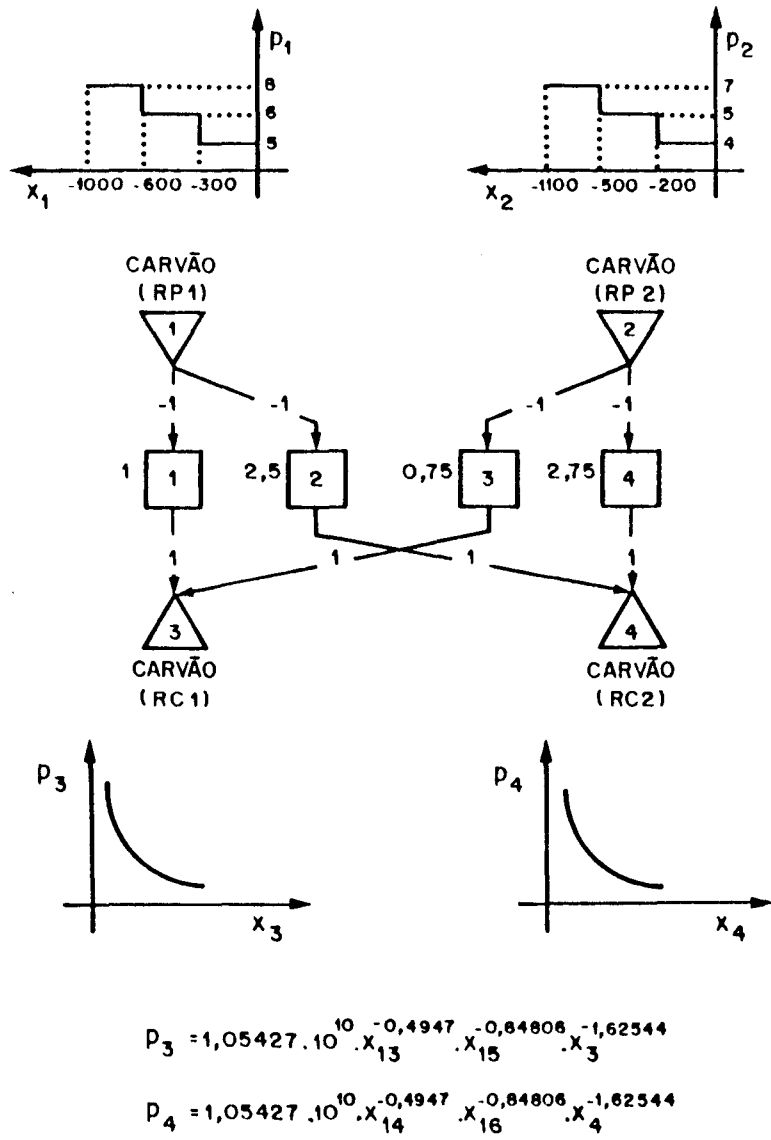


Tabela 5.9 Bens do setor energético - Parte II

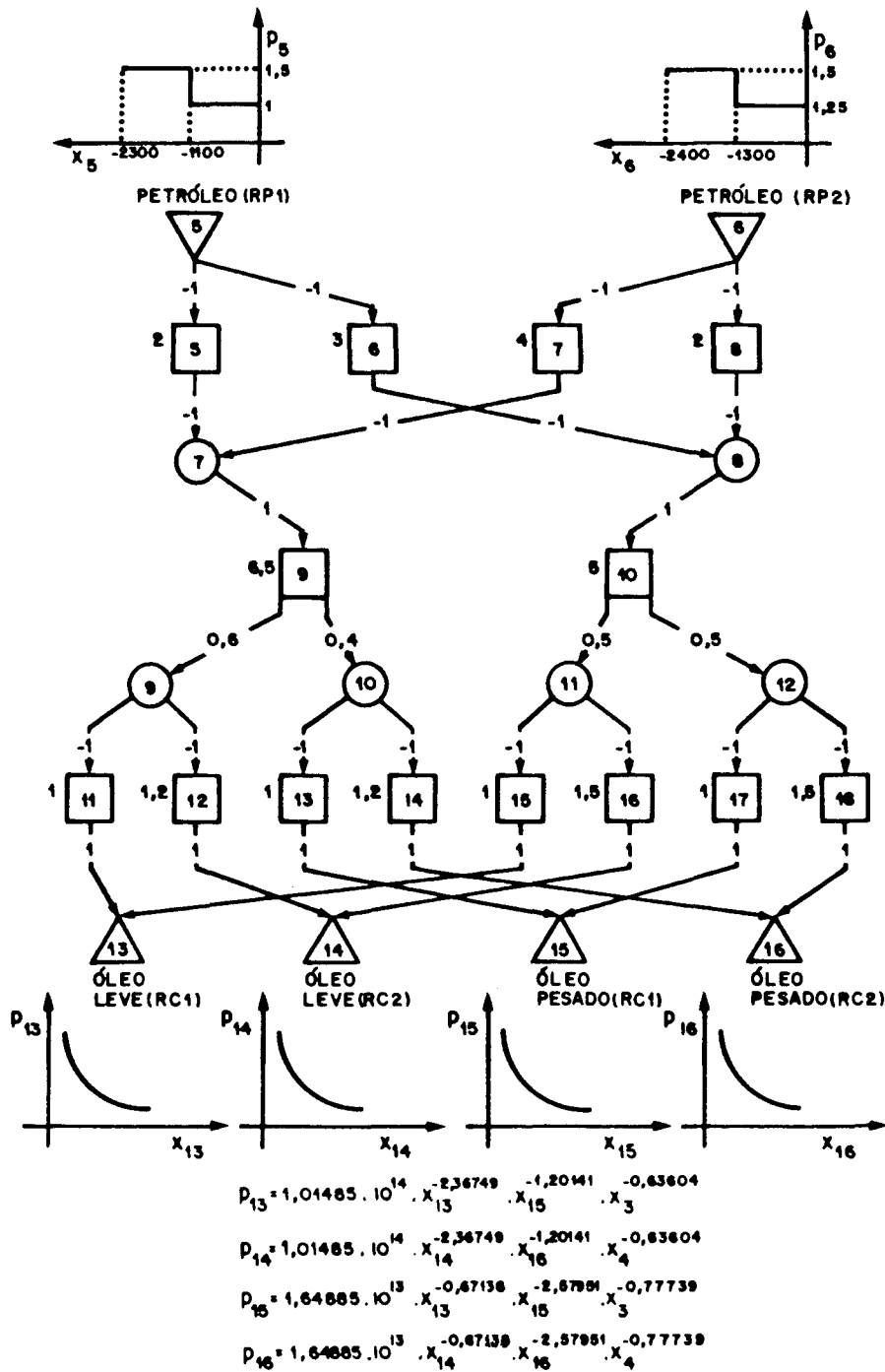
Índice	Variável	Descrição
5	$x_5$	Óleo bruto/Região produtora 1
6	$x_6$	Óleo bruto/Região produtora 2
7	$x_7$	Óleo bruto/Refinaria 1
8	$x_8$	Óleo bruto/Refinaria 2
9	$x_9$	Óleo leve/Refinaria 1
10	$x_{10}$	Óleo pesado/Refinaria 1
11	$x_{11}$	Óleo leve/Refinaria 2
12	$x_{12}$	Óleo pesado/Refinaria 2
13	$x_{13}$	Óleo leve/Região consumidora 1
14	$x_{14}$	Óleo leve/Região consumidora 2
15	$x_{15}$	Óleo pesado/Região consumidora 1
16	$x_{16}$	Óleo pesado/Região consumidora 2

## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

Tabela 5.10 Atividades do setor energético - Parte II

Índice	Variável	Descrição
5	$y_5$	Transporte de óleo bruto da região produtora 1 para a refinaria 1
6	$y_6$	Transporte de óleo bruto da região produtora 1 para a refinaria 2
7	$y_7$	Transporte de óleo bruto da região produtora 2 para a refinaria 1
8	$y_8$	Transporte de óleo bruto da região produtora 2 para a refinaria 2
9	$y_9$	Refino de petróleo
10	$y_{10}$	Refino de petróleo
11	$y_{11}$	Transporte de óleo leve da refinaria 1 para a região consumidora 1
12	$y_{12}$	Transporte de óleo leve da refinaria 1 para a região consumidora 2
13	$y_{13}$	Transporte de óleo pesado da refinaria 1 para a região consumidora 1
14	$y_{14}$	Transporte de óleo pesado da refinaria 1 para a região consumidora 2
15	$y_{15}$	Transporte de óleo leve da refinaria 2 para a região consumidora 1
16	$y_{16}$	Transporte de óleo leve da refinaria 2 para a região consumidora 2
17	$y_{17}$	Transporte de óleo pesado da refinaria 2 para a região consumidora 1
18	$y_{18}$	Transporte de óleo pesado da refinaria 2 para a região consumidora 2

Figura 5.4 Estrutura do setor energético - Parte II



## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

As soluções obtidas por Hogan (1975) e pelos sistemas PEGASUS e OTIMIZA, para as formas finais de energia, são apresentadas adiante.

Forneceu-se, a esses dois pacotes, um ponto inicial com as seguintes componentes não-nulas:  $x_3 = x_4 = x_{13} = x_{14} = x_{15} = x_{16} = 500$ .

Os valores de *mais* e *menos infinito* foram, respectivamente,  $+1.0E+10$  e  $-1.0E+10$ , enquanto que a cerca empregada na diagonalização com Frank-Wolfe foi igual a 1000.

**Tabela 5.11** Resultados comparativos

Variável	Hogan	PEGASUS	OTIMIZA		
			IE	Diagonalização com FW	SPQ
$x_3$	1102	1100	1101	1100	1101
$x_4$	998	999	999	992	999
$x_{13}$	1252	1274	1275	1263	1274
$x_{14}$	1266	1290	1290	1280	1291
$x_{15}$	1041	1064	1065	1060	1065
$x_{16}$	1055	1070	1070	1063	1070
Iterações		5	3	15	9
MINOS					
chamadas			3	229	32
tempo			19,08	316,85	51,14
Pesq. lin.					
chamadas				15015	2
tempo				26,52	0,02
Tempo total		11	22	450	54

Tabela 5.12 Resultados comparativos

Variável	Hogan	PEGASUS	OTIMIZA		
			Jacobi linearizado	Simetrização com média	Simetrização com mínimo
$x_3$	1102	1100	1101	1101	1101
$x_4$	998	999	999	999	999
$x_{13}$	1252	1274	1275	1275	1275
$x_{14}$	1266	1290	1290	1290	1290
$x_{15}$	1041	1064	1065	1065	1065
$x_{16}$	1055	1070	1070	1070	1070
Iterações		5	10	9	13
MINOS chamadas			10	9	13
tempo			17,06	23,48	32,04
Tempo total		11	20	26	35

A canalização dinâmica de variáveis, aplicada à diagonalização com SPQ, produziu resultados numéricos semelhantes aos anteriores, porém com um tempo de processamento muito superior.

A diagonalização com Frank-Wolfe mostrou-se, novamente, sensível à variação no valor de cerca empregada, enquanto que as simetrizações, a despeito do exemplo da agroindústria, funcionaram relativamente bem.

### 5.5 Setor energético brasileiro

Este exemplo é baseado no modelo proposto por Modiano (1983a, 1983b) para o setor energético nacional.

Trata-se de um problema de grande porte, comparado com os anteriores, onde não existem funções *demand inversa* não-integráveis.

## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

As formas primárias de energia resumem-se em nuclear, hídrica, carvão mineral e vegetal, petróleo e cana-de-açúcar, enquanto que as finais são agregadas em eletricidade residencial e industrial, calor residencial e comercial, transporte comercial e individual.

A unidade monetária adotada é o milhão de dólar, ao passo que a energética, na quase totalidade dos bens, é o bilhão de megacalorias.

A seguir são apresentados, em treze partes, os bens, as atividades e a estrutura do setor econômico considerado:

**Tabela 5.13** Bens do setor energético nacional - Parte I

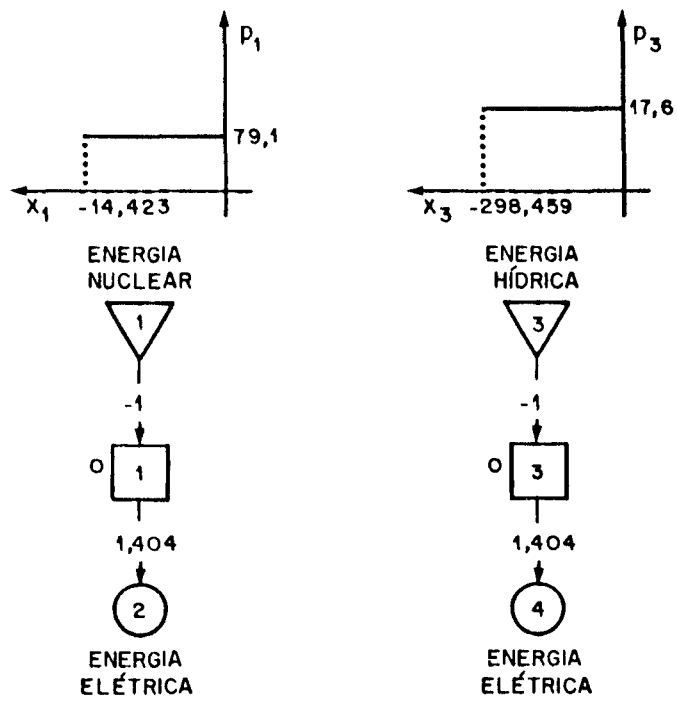
Índice	Variável	Descrição
1	$x_1$	Energia nuclear ( $10^3$ GWh)
2	$x_2$	Energia elétrica de origem nuclear
3	$x_3$	Energia hídrica ( $10^3$ GWh)
4	$x_4$	Energia elétrica de origem hídrica

**Tabela 5.14** Atividades do setor energético nacional - Parte I

Índice	Variável	Descrição
1	$y_1$	Produção de energia elétrica de origem nuclear
3	$y_3$	Produção de energia elétrica de origem hídrica



Figura 5.5 Estrutura do setor energético nacional - Parte I



**Tabela 5.15** Bens do setor energético nacional - Parte II

Índice	Variável	Descrição
5	$x_5$	Carvão mineral ROM (RS e PR) a céu aberto ( $10^6$ t)
6	$x_6$	Carvão mineral ROM (RS e PR) subterrâneo ( $10^6$ t)
7	$x_7$	Carvão mineral ROM
8	$x_8$	Rejeito do beneficiamento de carvão mineral ROM
9	$x_9$	Fração nobre do beneficiamento de carvão mineral ROM
10	$x_{10}$	Carvão mineral ROM para energia elétrica

**Tabela 5.16** Atividades do setor energético nacional - Parte II

Índice	Variável	Descrição
5	$y_5$	Mineração de carvão ROM a céu aberto
6	$y_6$	Mineração de carvão ROM subterrâneo
7	$y_7$	Transporte de carvão mineral ROM às termoeletricas
8	$y_8$	Beneficiamento de carvão mineral ROM
9	$y_9$	Transporte de rejeito do beneficiamento às termoeletricas

Figura 5.6 Estrutura do setor energético nacional - Parte II

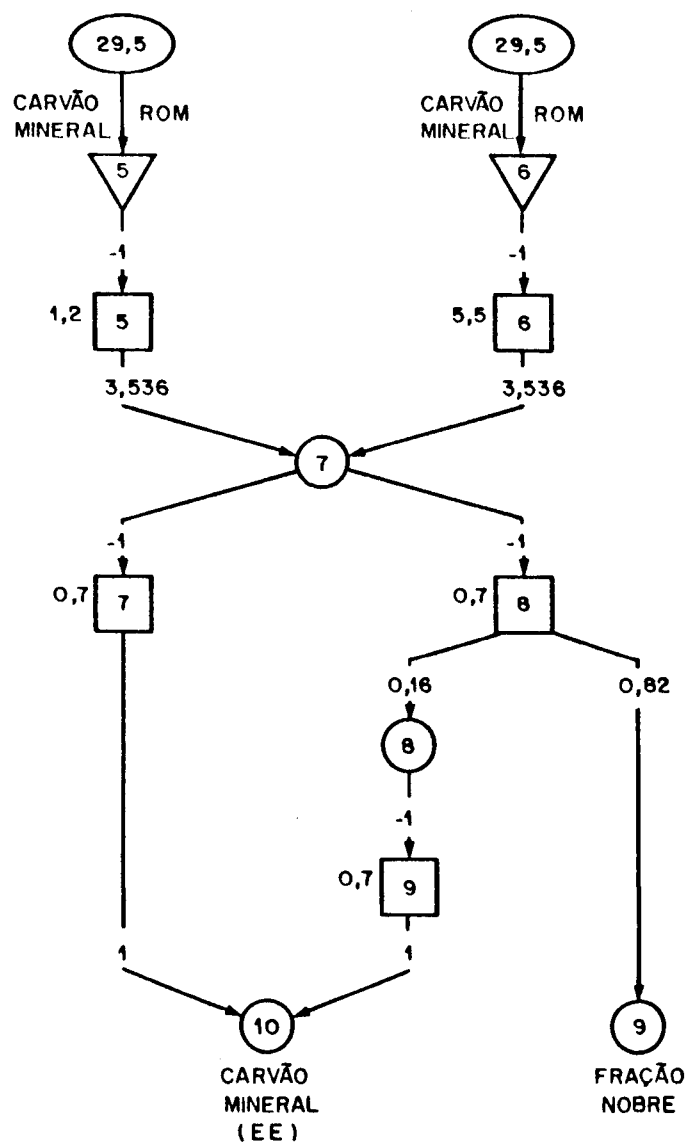


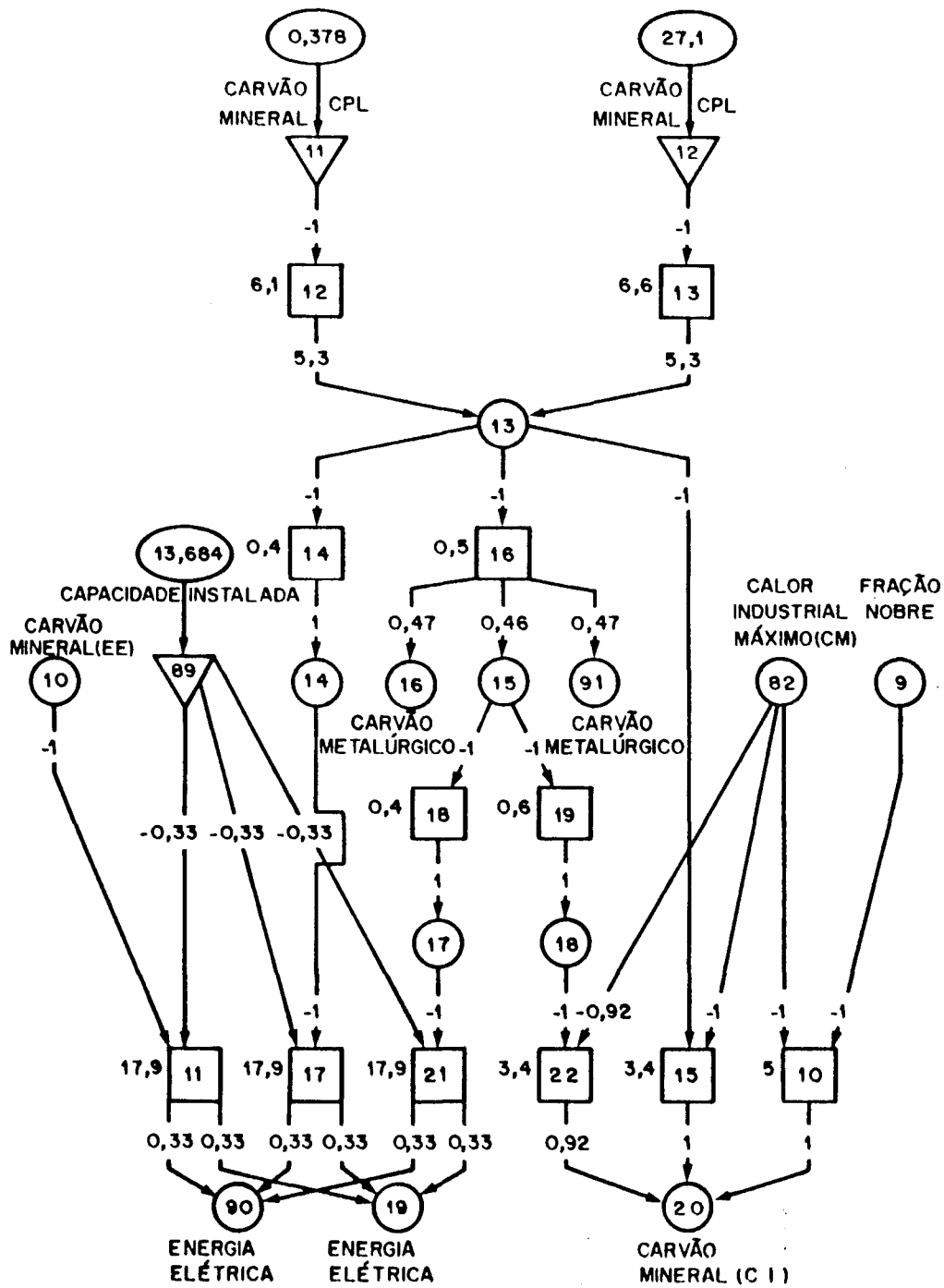
Tabela 5.17 Bens do setor energético nacional - Parte III

Índice	Variável	Descrição
9	$x_9$	Fração nobre do beneficiamento de carvão mineral ROM
10	$x_{10}$	Carvão mineral ROM para energia elétrica
11	$x_{11}$	Carvão mineral CPL (SC) a céu aberto ( $10^6$ t)
12	$x_{12}$	Carvão mineral CPL (SC) subterrâneo ( $10^6$ t)
13	$x_{13}$	Carvão mineral CPL
14	$x_{14}$	Carvão mineral CPL para energia elétrica
15	$x_{15}$	Carvão vapor
16	$x_{16}$	Carvão metalúrgico
17	$x_{17}$	Carvão vapor para energia elétrica
18	$x_{18}$	Carvão vapor para calor industrial
19	$x_{19}$	Energia elétrica a carvão mineral
20	$x_{20}$	Carvão mineral para calor industrial
82	$x_{82}$	Calor industrial máximo produzido com carvão mineral
89	$x_{89}$	Capacidade instalada das termoeletricas a carvão
90	$x_{90}$	Energia produzida a carvão mineral
91	$x_{91}$	Carvão metalúrgico

**Tabela 5.18** Atividades do setor energético nacional – Parte III

Índice	Variável	Descrição
10	$y_{10}$	Transporte de fração nobre do beneficiamento às indústrias
11	$y_{11}$	Produção de energia elétrica a carvão mineral
12	$y_{12}$	Mineração de carvão CPL a céu aberto
13	$y_{13}$	Mineração de carvão CPL subterrâneo
14	$y_{14}$	Transporte de carvão mineral CPL às termoeletricas
15	$y_{15}$	Transporte de carvão mineral CPL às indústrias
16	$y_{16}$	Beneficiamento de carvão mineral CPL
17	$y_{17}$	Produção de energia elétrica a carvão mineral
18	$y_{18}$	Transporte de carvão vapor às termoeletricas
19	$y_{19}$	Reprocessamento de carvão vapor
21	$y_{21}$	Produção de energia elétrica a carvão mineral
22	$y_{22}$	Transporte de carvão vapor às indústrias

Figura 5.7 Estrutura do setor energético nacional - Parte III



## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

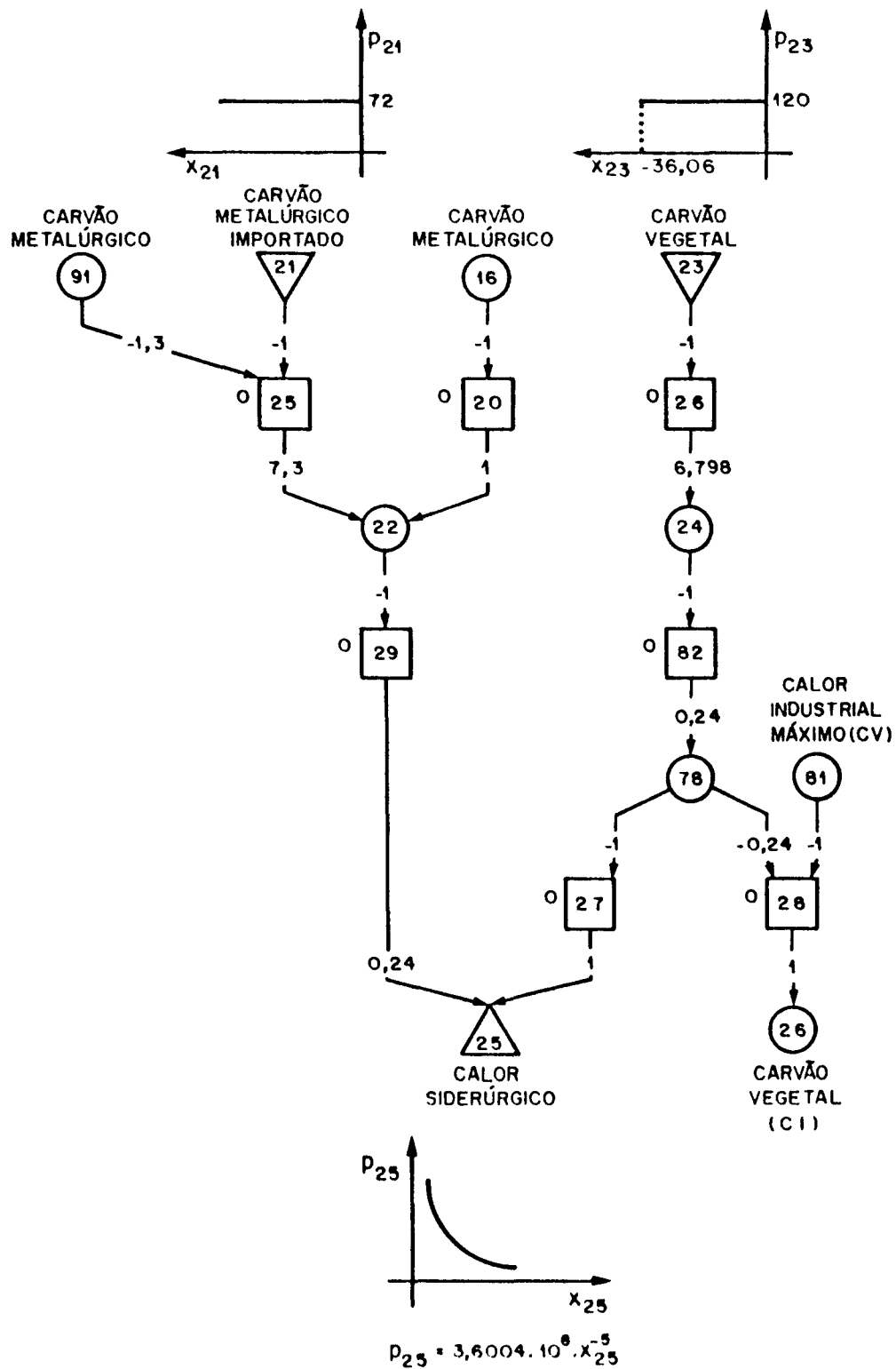
**Tabela 5.19** Bens do setor energético nacional - Parte IV

Índice	Variável	Descrição
16	$x_{16}$	Carvão metalúrgico
21	$x_{21}$	Carvão metalúrgico importado
22	$x_{22}$	Carvão metalúrgico
23	$x_{23}$	Carvão vegetal
24	$x_{24}$	Carvão vegetal
25	$x_{25}$	Calor siderúrgico
26	$x_{26}$	Carvão vegetal para calor industrial
78	$x_{78}$	Carvão vegetal classificado
81	$x_{81}$	Calor industrial máximo produzido com carvão vegetal
91	$x_{91}$	Carvão metalúrgico

**Tabela 5.20** Atividades do setor energético nacional - Parte IV

Índice	Variável	Descrição
20	$y_{20}$	Ligação de mercados
25	$y_{25}$	Conversão energética do carvão metalúrgico importado
26	$y_{26}$	Conversão energética do carvão vegetal
27	$y_{27}$	Produção de calor siderúrgico a carvão vegetal
28	$y_{28}$	Separação de carvão vegetal para calor industrial
29	$y_{29}$	Produção de calor siderúrgico a carvão metalúrgico
82	$y_{82}$	Classificação de carvão vegetal

**Figura 5.8** Estrutura do setor energético nacional - Parte IV





## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

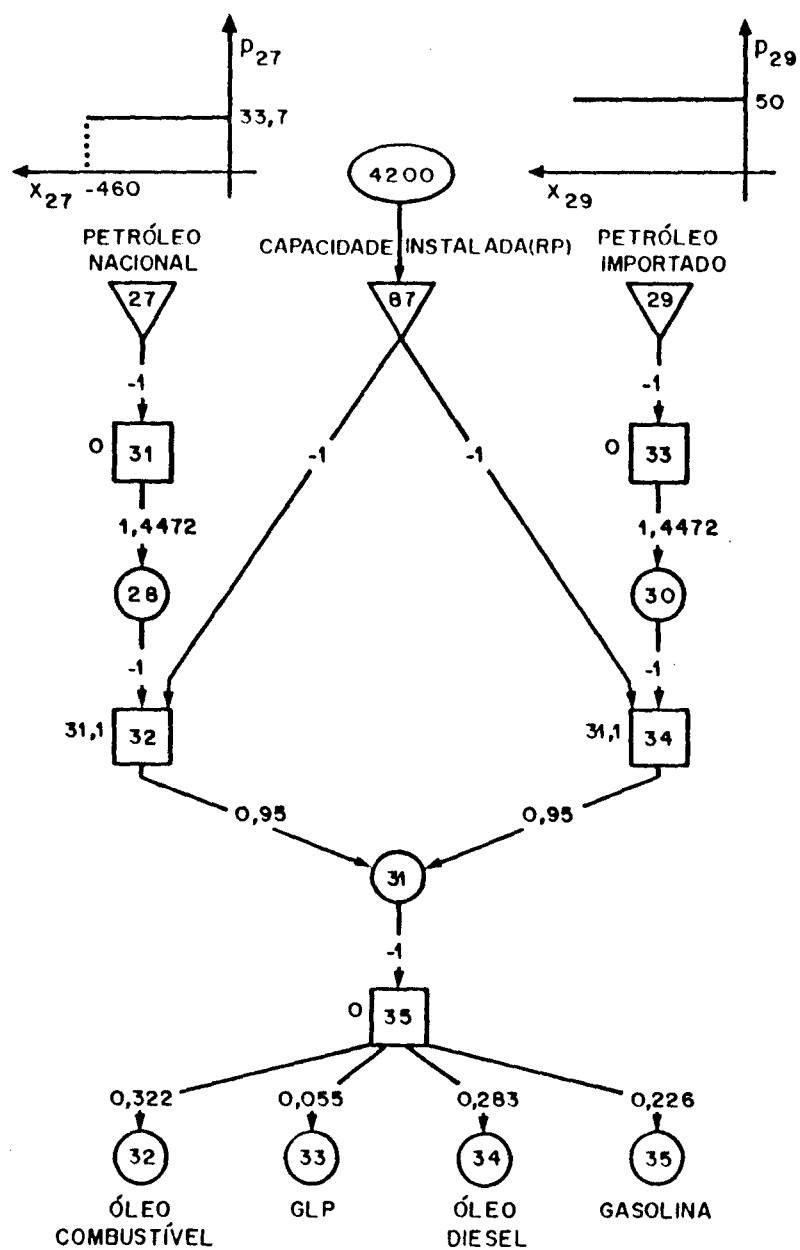
**Tabela 5.21** Bens do setor energético nacional - Parte V

Índice	Variável	Descrição
27	$x_{27}$	Petróleo nacional ( $10^6$ barris)
28	$x_{28}$	Petróleo nacional
29	$x_{29}$	Petróleo importado ( $10^6$ barris)
30	$x_{30}$	Petróleo importado
31	$x_{31}$	Petróleo refinado
32	$x_{32}$	Óleo combustível
33	$x_{33}$	Gás Liquefeito de Petróleo/GLP
34	$x_{34}$	Óleo diesel
35	$x_{35}$	Gasolina
87	$x_{87}$	Capacidade instalada de refino de petróleo

**Tabela 5.22** Atividades do setor energético nacional - Parte V

Índice	Variável	Descrição
31	$y_{31}$	Conversão energética do petróleo nacional
32	$y_{32}$	Refino de petróleo nacional
33	$y_{33}$	Conversão energética do petróleo importado
34	$y_{34}$	Refino de petróleo importado
35	$y_{35}$	Separação dos produtos resultantes do refino de petróleo

Figura 5.9 Estrutura do setor energético nacional - Parte V



## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

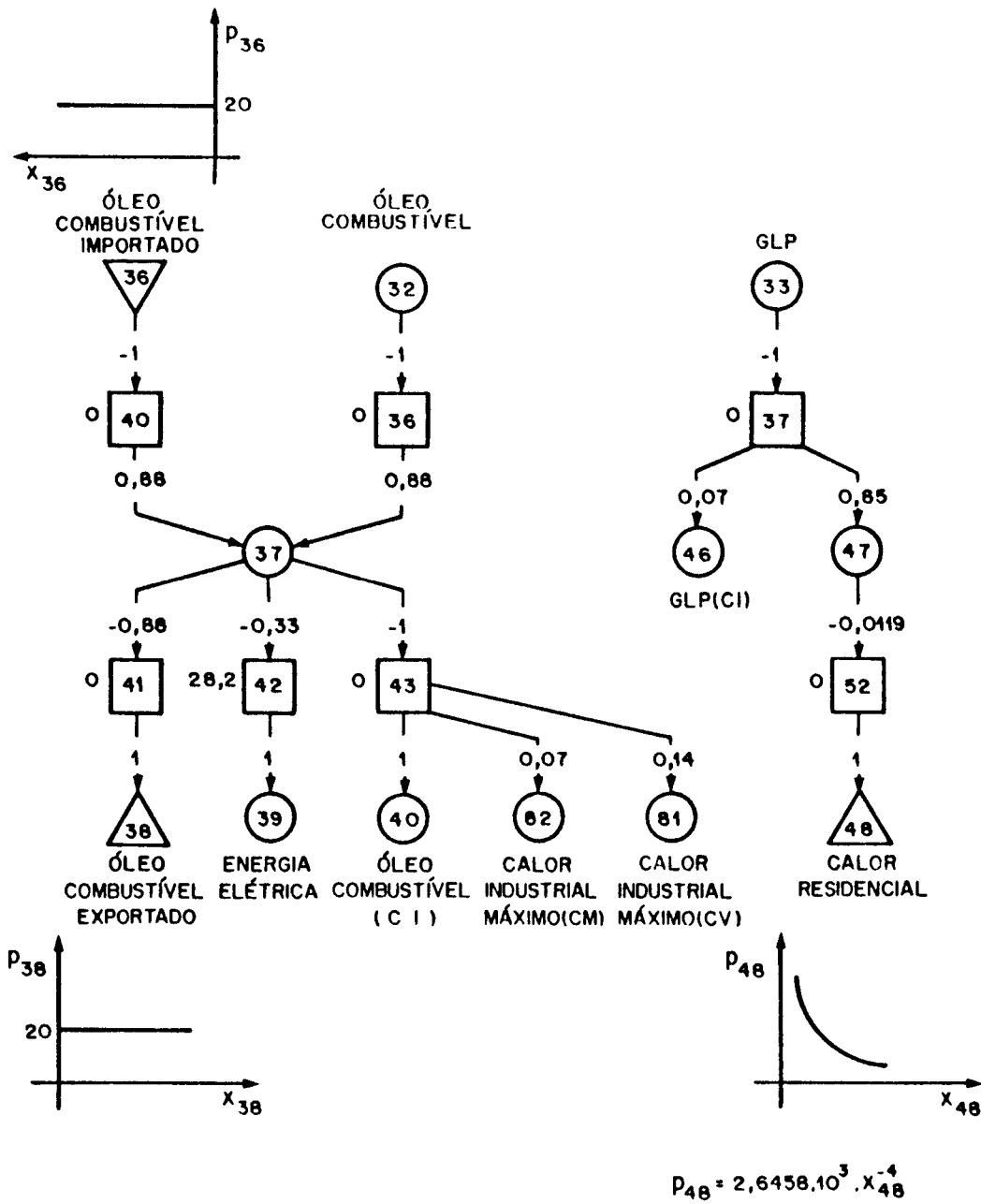
**Tabela 5.23 Bens do setor energético nacional - Parte VI**

Índice	Variável	Descrição
32	$x_{32}$	Óleo combustível
33	$x_{33}$	Gás Liquefeito de Petróleo/GLP
36	$x_{36}$	Óleo combustível importado
37	$x_{37}$	Óleo combustível
38	$x_{38}$	Óleo combustível exportado
39	$x_{39}$	Energia elétrica a óleo combustível
40	$x_{40}$	Óleo combustível para calor industrial
46	$x_{46}$	GLP para calor industrial
47	$x_{47}$	GLP para calor residencial
48	$x_{48}$	Calor residencial ( $10^6$ t)
81	$x_{81}$	Calor industrial máximo produzido com carvão vegetal
82	$x_{82}$	Calor industrial máximo produzido com carvão mineral

**Tabela 5.24 Atividades do setor energético nacional - Parte VI**

Índice	Variável	Descrição
36	$y_{36}$	Ligação de mercados
37	$y_{37}$	Separação do GLP para calor industrial e residencial
40	$y_{40}$	Ligação de mercados
41	$y_{41}$	Separação de óleo combustível para exportação
42	$y_{42}$	Produção de energia elétrica a óleo combustível
43	$y_{43}$	Separação de óleo combustível para calor industrial
52	$y_{52}$	Produção de calor residencial a GLP

Figura 5.10 Estrutura do setor energético nacional - Parte VI



## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

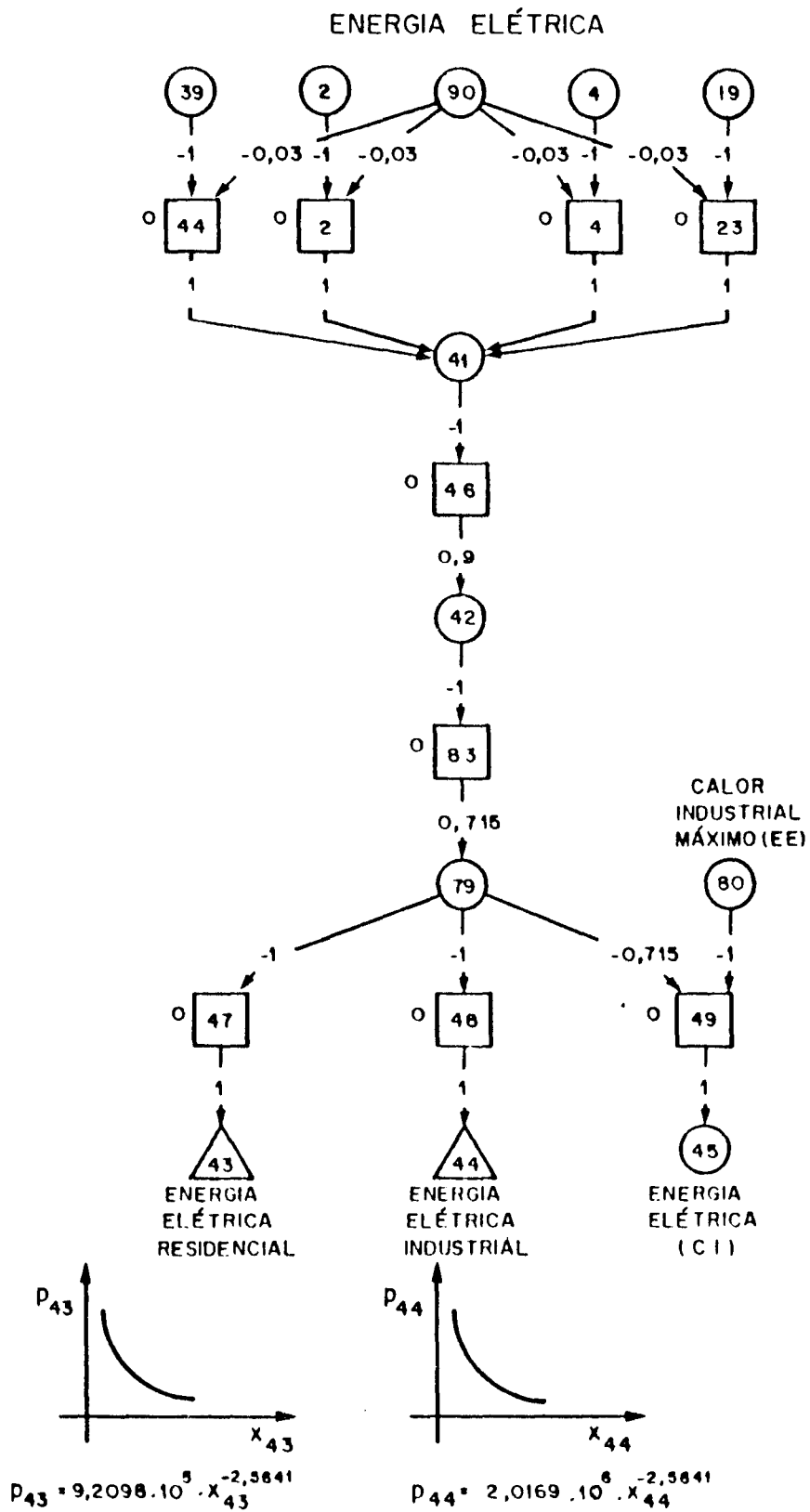
**Tabela 5.25** Bens do setor energético nacional – Parte VII

Índice	Variável	Descrição
2	$x_2$	Energia elétrica de origem nuclear
4	$x_4$	Energia elétrica de origem hídrica
19	$x_{19}$	Energia elétrica a carvão mineral
39	$x_{39}$	Energia elétrica a óleo combustível
41	$x_{41}$	Energia elétrica
42	$x_{42}$	Energia elétrica líquida ( $10^3$ GWh)
43	$x_{43}$	Energia elétrica residencial ( $10^3$ GWh)
44	$x_{44}$	Energia elétrica industrial ( $10^3$ GWh)
45	$x_{45}$	Energia elétrica para calor industrial
79	$x_{79}$	Energia elétrica líquida ( $10^3$ GWh)
80	$x_{80}$	Calor industrial máximo produzido com energia elétrica
90	$x_{90}$	Energia elétrica a carvão mineral

**Tabela 5.26** Atividades do setor energético nacional – Parte VII

Índice	Variável	Descrição
2	$y_2$	Ligação de mercados
4	$y_4$	Ligação de mercados
23	$y_{23}$	Ligação de mercados
44	$y_{44}$	Ligação de mercados
46	$y_{46}$	Desconto das perdas de energia elétrica por transmissão
47	$y_{47}$	Separação de energia elétrica para consumo residencial
48	$y_{48}$	Separação de energia elétrica para consumo industrial
49	$y_{49}$	Separação de energia elétrica para calor industrial
83	$y_{83}$	Conversão de unidade da energia elétrica

Figura 5.11 Estrutura do setor energético nacional - Parte VII



## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

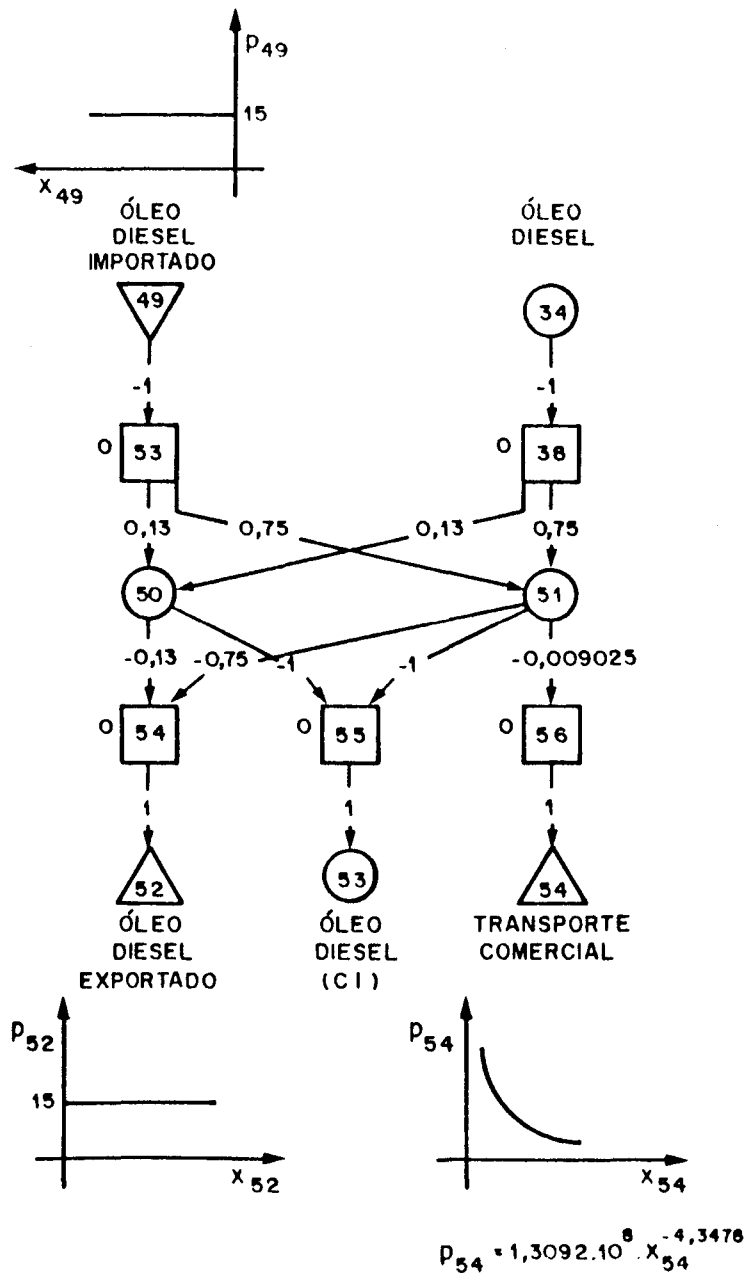
**Tabela 5.27** Bens do setor energético nacional - Parte VIII

Índice	Variável	Descrição
34	$x_{34}$	Óleo diesel
49	$x_{49}$	Óleo diesel importado
50	$x_{50}$	Óleo diesel para exportação e calor industrial
51	$x_{51}$	Óleo diesel para exportação, calor industrial e transporte comercial
52	$x_{52}$	Óleo diesel exportado
53	$x_{53}$	Óleo diesel para calor industrial
54	$x_{54}$	Transporte comercial ( $10^6 \text{ m}^3$ )

**Tabela 5.28** Atividades do setor energético nacional - Parte VIII

Índice	Variável	Descrição
38	$y_{38}$	Ligação de mercados
53	$y_{53}$	Ligação de mercados
54	$y_{54}$	Separação de óleo diesel para exportação
55	$y_{55}$	Separação de óleo diesel para calor industrial
56	$y_{56}$	Separação de óleo diesel para transporte comercial

Figura 5.12 Estrutura do setor energético nacional - Parte VIII





## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

**Tabela 5.29** Bens do setor energético nacional - Parte IX

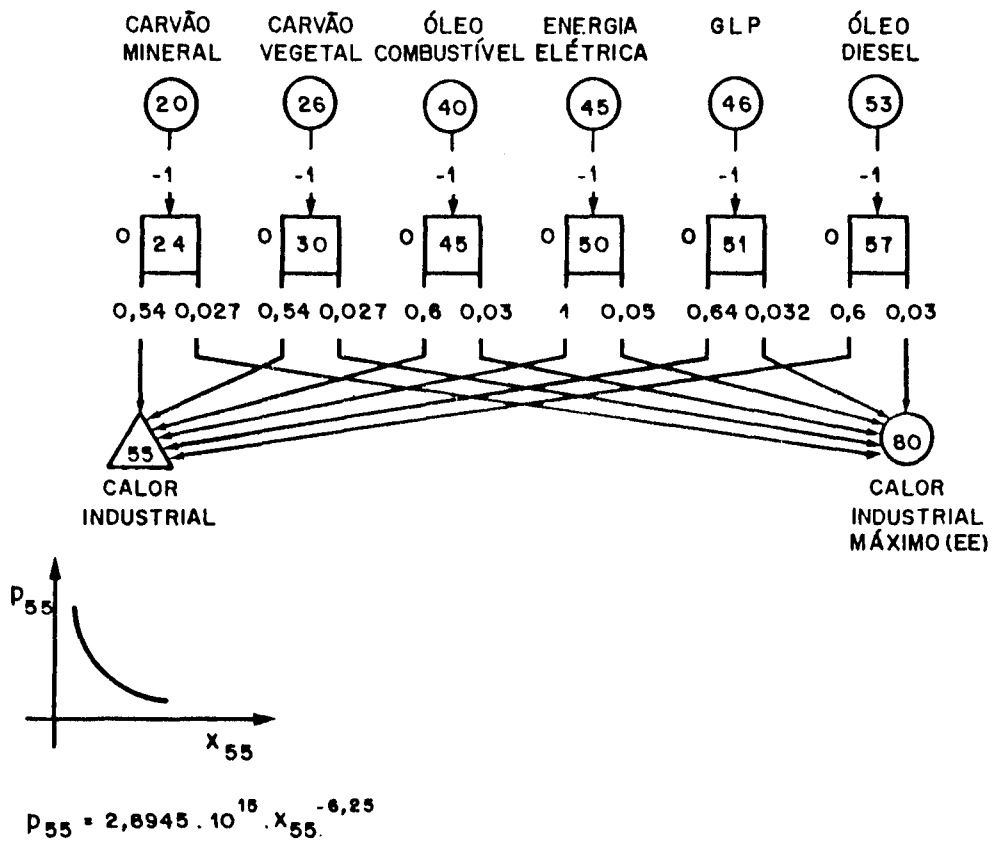
Índice	Variável	Descrição
20	$x_{20}$	Carvão mineral para calor industrial
26	$x_{26}$	Carvão vegetal para calor industrial
40	$x_{40}$	Óleo combustível para calor industrial
45	$x_{45}$	Energia elétrica para calor industrial
46	$x_{46}$	GLP para calor industrial
53	$x_{53}$	Óleo diesel para calor industrial
55	$x_{55}$	Calor industrial
80	$x_{80}$	Calor industrial máximo produzido com energia elétrica

**Tabela 5.30** Atividades do setor energético nacional - Parte IX

Índice	Variável	Descrição
24	$y_{24}$	Produção de calor industrial a carvão mineral
30	$y_{30}$	Produção de calor industrial a carvão vegetal
45	$y_{45}$	Produção de calor industrial a óleo combustível
50	$y_{50}$	Produção de calor industrial a energia elétrica
51	$y_{51}$	Produção de calor industrial a GLP
57	$y_{57}$	Produção de calor industrial a óleo diesel

## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

Figura 5.13 Estrutura do setor energético nacional – Parte IX



## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

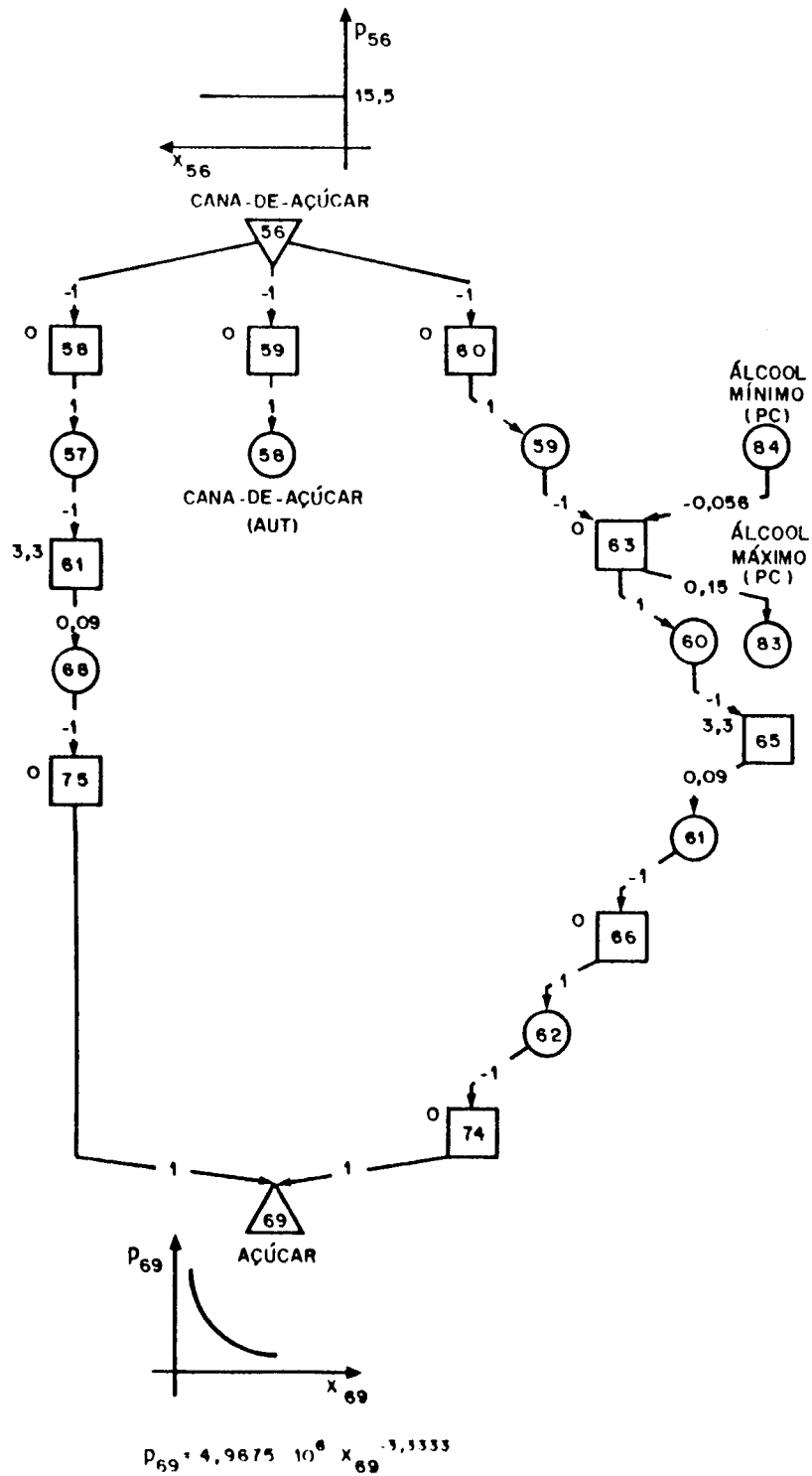
**Tabela 5.31** Bens do setor energético nacional - Parte X

Índice	Variável	Descrição
56	$x_{56}$	Cana-de-açúcar ( $10^6$ t)
57	$x_{57}$	Cana para usinas sem destilaria ( $10^6$ t)
58	$x_{58}$	Cana para destilarias autônomas ( $10^6$ t)
59	$x_{59}$	Cana para usinas com destilaria ( $10^6$ t)
60	$x_{60}$	Cana para processo conjunto ( $10^6$ t)
61	$x_{61}$	Açúcar + Alcool ( $10^6$ t)
62	$x_{62}$	Açúcar ( $10^6$ t)
68	$x_{68}$	Açúcar ( $10^6$ t)
69	$x_{69}$	Açúcar ( $10^6$ t)
83	$x_{83}$	Alcool máximo do processo conjunto
84	$x_{84}$	Alcool mínimo do processo conjunto

**Tabela 5.32** Atividades do setor energético nacional - Parte X

Índice	Variável	Descrição
58	$y_{58}$	Separação de cana para as usinas sem destilaria
59	$y_{59}$	Separação de cana para as destilarias autônomas
60	$y_{60}$	Separação de cana para as usinas com destilaria
61	$y_{61}$	Produção de açúcar nas usinas sem destilaria
63	$y_{63}$	Separação de cana para produção conjunta
65	$y_{65}$	Produção conjunta de açúcar e álcool
66	$y_{66}$	Separação de açúcar
74	$y_{74}$	Ligação de mercados
75	$y_{75}$	Ligação de mercados

Figura 5.14 Estrutura do setor energético nacional - Parte X



## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

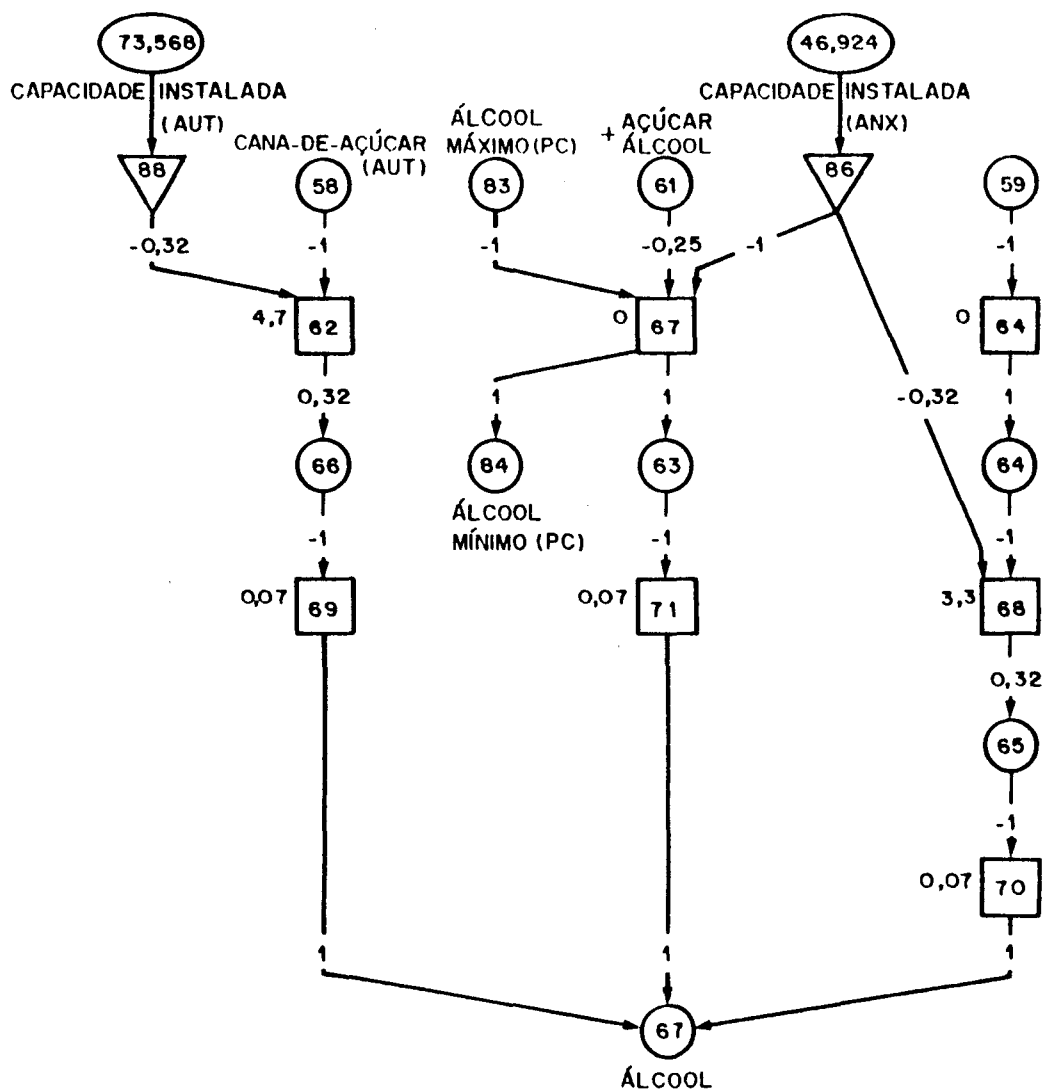
**Tabela 5.33** Bens do setor energético nacional – Parte XI

Índice	Variável	Descrição
58	$x_{58}$	Cana para destilarias autônomas ( $10^6$ t)
59	$x_{59}$	Cana para usinas com destilaria ( $10^6$ t)
61	$x_{61}$	Açúcar + Alcool ( $10^6$ t)
63	$x_{63}$	Alcool
64	$x_{64}$	Cana para destilarias anexas ( $10^6$ t)
65	$x_{65}$	Alcool
66	$x_{66}$	Alcool
67	$x_{67}$	Alcool
83	$x_{83}$	Alcool máximo do processo conjunto
84	$x_{84}$	Alcool mínimo do processo conjunto
86	$x_{86}$	Capacidade instalada das destilarias anexas
88	$x_{88}$	Capacidade instalada das destilarias autônomas

**Tabela 5.34** Atividades do setor energético nacional – Parte XI

Índice	Variável	Descrição
62	$y_{62}$	Produção de álcool em destilarias autônomas
64	$y_{64}$	Separação de cana para produção de álcool
67	$y_{67}$	Separação de álcool
68	$y_{68}$	Produção de álcool pelo processo autônomo
69	$y_{69}$	Ligação de mercados
70	$y_{70}$	Ligação de mercados
71	$y_{71}$	Ligação de mercados

Figura 5.15 Estrutura do setor energético nacional - Parte XI



## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

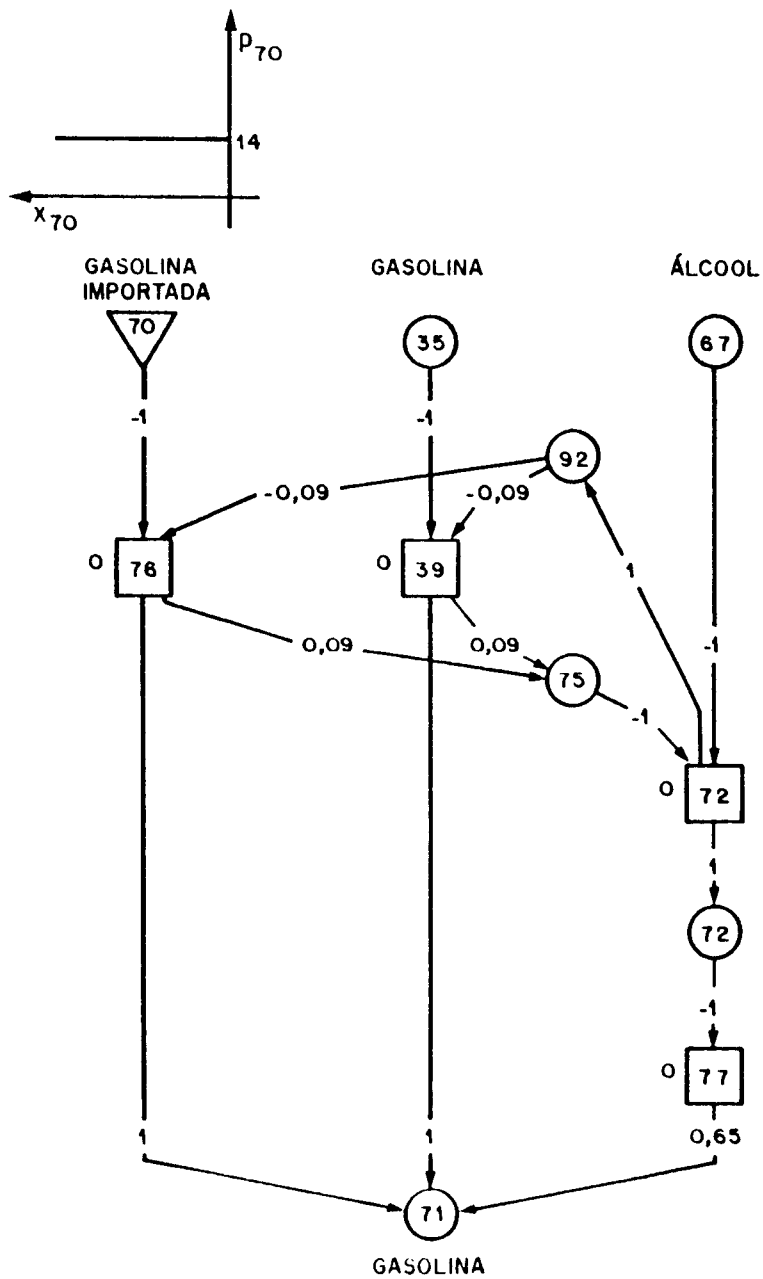
**Tabela 5.35** Bens do setor energético nacional - Parte XII

Índice	Variável	Descrição
35	$x_{35}$	Gasolina
67	$x_{67}$	Álcool
70	$x_{70}$	Gasolina importada
71	$x_{71}$	Gasolina para exportação e consumo
72	$x_{72}$	Álcool anidro
75	$x_{75}$	15% (em volume) de gasolina
92	$x_{92}$	15% (em volume) de álcool

**Tabela 5.36** Atividades do setor energético nacional - Parte XII

Índice	Variável	Descrição
39	$y_{39}$	Ligação de mercados
72	$y_{72}$	Separação de álcool para adição à gasolina
76	$y_{76}$	Ligação de mercados
77	$y_{77}$	Adição de álcool anidro à gasolina

Figura 5.16 Estrutura do setor energético nacional - Parte XII





## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

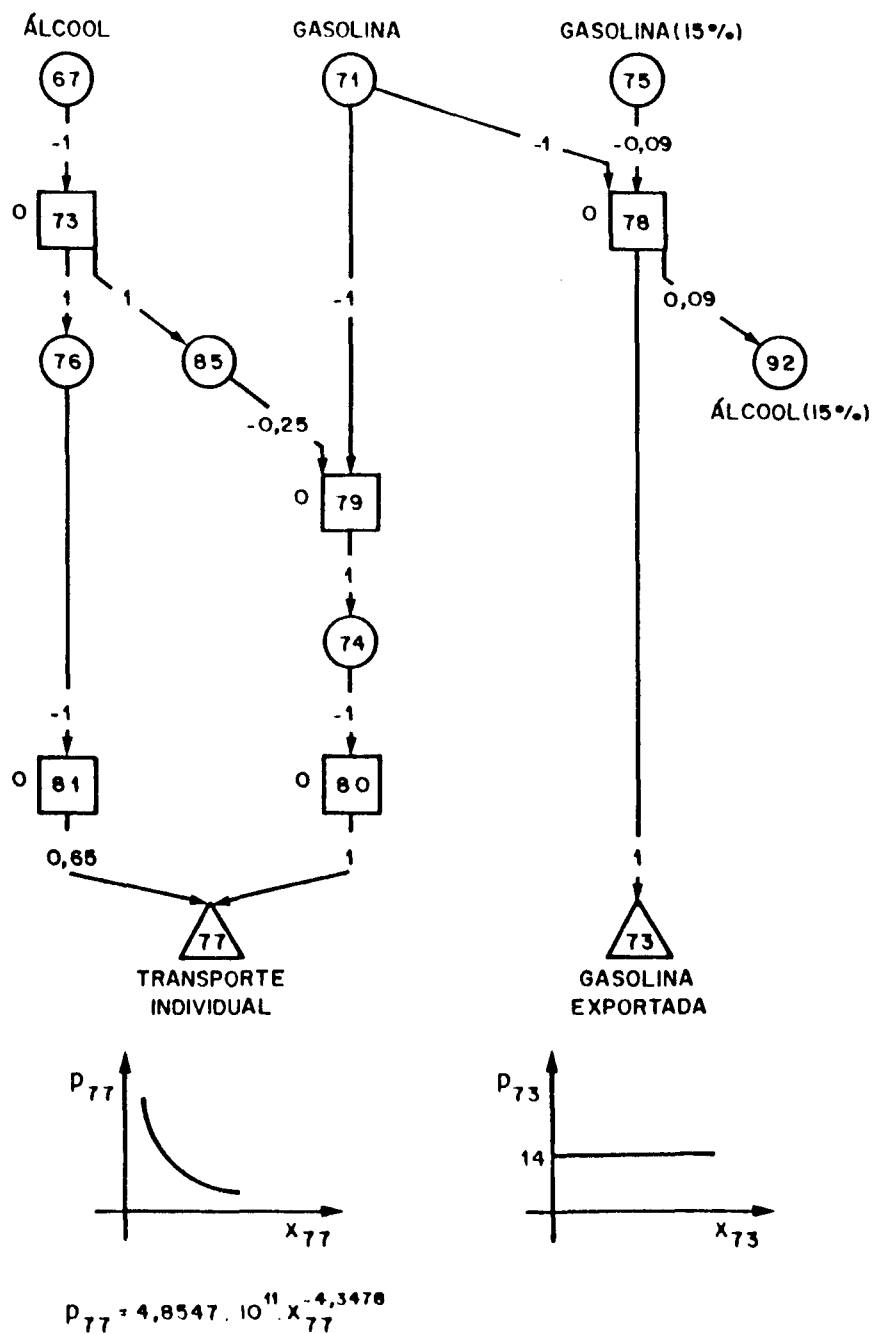
**Tabela 5.37** Bens do setor energético nacional - Parte XIII

Índice	Variável	Descrição
67	$x_{67}$	Álcool
71	$x_{71}$	Gasolina para exportação e consumo
73	$x_{73}$	Gasolina exportada
74	$x_{74}$	Gasolina para veículos
75	$x_{75}$	15% (em volume) de gasolina
76	$x_{76}$	Álcool para veículos
77	$x_{77}$	Transporte individual
85	$x_{85}$	% de gasolina correspondente à utilização de álcool
92	$x_{92}$	15% (em volume) de álcool

**Tabela 5.38** Atividades do setor energético nacional - Parte XIII

Índice	Variável	Descrição
73	$y_{73}$	Separação de álcool para veículos
78	$y_{78}$	Separação de gasolina para exportação
79	$y_{79}$	Separação de gasolina para veículos
80	$y_{80}$	Ligação de mercados
81	$y_{81}$	Ligação de mercados

Figura 5.17 Estrutura do setor energético nacional - Parte XIII



## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

As quantidades ótimas de oferta e demanda dos bens iniciais e finais, dentro do modelo apresentado, são descritas a seguir.

O ponto inicial fornecido teve o valor 500 assinalado às variáveis  $x_{92}$ ,  $x_{97}$ ,  $x_{98}$ ,  $x_{99}$ ,  $x_{102}$ ,  $x_{103}$ ,  $x_{105}$  e  $x_{108}$ , e 0 às demais.

**Tabela 5.39** Resultados comparativos - Parte I

Variável	PEGASUS	OTIMIZA	
		FW	SPQ
$x_1$	0	0	0
$x_3$	-168,6	-162,5398	-168,6145
$x_5$	0	0	0
$x_6$	0	0	0
$x_{11}$	-0,378	-0,378	-0,378
$x_{12}$	-27,1	-27,1	-27,1
$x_{21}$	-4,587	-4,3348	-4,5865
$x_{23}$	-4,625	-4,0379	-4,6248
$x_{27}$	-0,7287	-1,1032	-0,7287
$x_{29}$	0	0	0
$x_{36}$	-254,9	-222,0957	-254,8689
$x_{49}$	-1,311	-1,3793	-1,3106
$x_{56}$	-413	-241,7757	-413,4505
$x_{70}$	-181,5	-120,4861	-181,4861

## CAPÍTULO 5. Resultados Experimentais

**Tabela 5.40** Resultados comparativos - Parte II

Variável	PEGASUS	OTIMIZA	
		FW	SPQ
$x_{25}$	24,46	24,0286	24,463
$x_{38}$	0	0	0
$x_{43}$	64,06	61,5469	64,0555
$x_{44}$	86,96	84,5814	86,9612
$x_{48}$	3,936	5,9564	3,9359
$x_{52}$	0	0,0001	0
$x_{54}$	109,5	119,8899	109,5123
$x_{55}$	168,8	147,2435	168,7726
$x_{69}$	20,55	10,5748	20,5532
$x_{73}$	0	0	0
$x_{77}$	223,6	149,2887	223,5984
Iterações	4	2	2
MINOS			
chamadas		49	20
tempo		226,8	125,88
Pesq. lin.			
chamadas		2124	0
tempo		3,28	0
Tempo total	60	250	140

Os valores de mais e menos infinito utilizados no OTIMIZA foram, respectivamente, igual a  $1.0E+20$  e  $-1.0E+20$ , enquanto que a cerca empregada no Frank-Wolfe foi igual a 5.

A diagonalização com SPQ não apresentou, novamente, alterações significantes com a canalização dinâmica das variáveis.

Da mesma forma que nos exemplos anteriores, a diagonalização com Frank-Wolfe mostrou-se suscetível às variações no valor da cerca utilizada.

## CAPÍTULO 6

### Conclusões

Os resultados experimentais reportados no capítulo anterior sugerem algumas conclusões interessantes a respeito da aplicação prática da otimização no cálculo de pontos de equilíbrio econômico.

As soluções obtidas por otimização foram, na quase totalidade dos casos, muito semelhantes às encontradas por complementaridade que, por sua vez, caracterizam-se pela apresentação de uma boa precisão numérica.

A *diagonalização com Frank-Wolfe* fugiu um pouco dessa tendência geral de similaridade de soluções devido, principalmente, ao tipo de aproximação que ela emprega na resolução dos subproblemas.

Afora isso, existe ainda um outro aspecto desfavorável à sua utilização prática que é a grande sensibilidade observada na limitação da região factível dos problemas.

Por outro lado, essa metodologia é a que requer uma quantidade menor de informações a respeito da função objetivo, bem como é a que necessita de um ferramental computacional mais simples que nos outros casos, constituído, principalmente, de um pacote de programação linear.

O desempenho dos métodos de otimização em termos do tempo total de processamento esteve bem dentro daquilo que era esperado, notando-se um comportamento semelhante ao da qualidade das soluções.

A maior rapidez do PEGASUS sobre o OTIMIZA pode ser atribuída, por exemplo, ao estágio de desenvolvimento ligeiramente superior que ele se encontra comparado a este outro sistema.

## CAPÍTULO 6. Conclusões

Afora esse aspecto, deve-se levar em conta, também, que a versão do MINOS utilizada pelo OTIMIZA, além de não estar muito direcionada para aplicações iterativas do tipo das que foram feitas, não teve seu potencial totalmente explorado por nenhum dos quatro exemplos.

Com respeito à esta questão da dimensão dos problemas resolvidos, existe ainda um outro ponto importante a ser considerado que é o fato da otimização ser mais frequentemente indicada para a resolução de problemas médios e grandes e não tanto para problemas de pequeno porte como os do Capítulo 5.

A pesquisa linear, apesar de sua importância fundamental no Frank-Wolfe e relativa na SPQ, teve pouco peso no tempo de processamento total do *método da diagonalização*, confirmando a afirmação feita anteriormente que o grande responsável pelo consumo de tempo no OTIMIZA foi o MINOS.

Um outro aspecto, já levantado na descrição dos métodos, é que a *diagonalização com integração explícita* não apresentou resultados tão precisos como era de se esperar em se tratando de um problema com formulação exata. Além disso, as suas iterações mostraram-se computacionalmente caras.

O *método de Jacobi linearizado*, mesmo sendo fundamentado numa aproximação teoricamente mais fraca que o *método da diagonalização*, comportou-se muito bem nas situações práticas, confirmando o que se diz a seu respeito na literatura.

O fato da *simetrização* apresentar resultados satisfatórios dependendo do exemplo mostra a necessidade de um maior aprofundamento teórico para que a sua utilização prática seja feita de forma mais segura.

Apesar de todas essas considerações pode-se afirmar que, de um modo geral, as soluções obtidas por otimização foram, em termos numéricos e temporais, bem aceitáveis em se tratando de problemas econômicos.

## CAPÍTULO 6. Conclusões

Dessa forma, conclue-se que a otimização é, realmente, uma alternativa viável e interessante a ser aplicada na resolução de problemas de equilíbrio econômico, mesmo quando isso não seja possível, a priori, devido à não integrabilidade das funções *demanda inversa*.

Outros problemas que porventura tenham uma formulação semelhante à sua, mesmo não sendo de natureza otimizante, podem fazer uso, também, dessa teoria.

Na prática, desde que se disponha de um bom pacote de programação quadrática e de informações adequadas da função objetivo, sugere-se a utilização efetiva do *método da diagonalização com SPQ* e do *método de Jacobi linearizado*.

Devido à rapidez de convergência desses métodos quando o ponto inicial está suficientemente próximo da solução, propõe-se o emprego da *diagonalização com Frank-Wolfe* em um método combinado no qual ele é o encarregado da obtenção desse ponto inicial. A segunda fase, caracterizada pelo refinamento da solução, fica a cargo de um dos métodos anteriores.

Fica como sugestão para a realização de futuros trabalhos, a utilização de outros pacotes computacionais não tão poderosos quanto o MINOS mas orientados para a resolução de determinados tipos específicos de problemas como os lineares e os quadráticos.

Um maior aprofundamento teórico e prático dos métodos enfocados nesse trabalho, bem como a utilização de outros métodos além desses, podem se configurar em linhas de pesquisa interessantes a serem abordadas.

Com isso, acredita-se que o objetivo proposto inicialmente de mostrar a aplicabilidade prática da otimização nos problemas de equilíbrio econômico foi satisfatoriamente alcançado.

## BIBLIOGRAFIA

- Abdulaal, M. e LeBlanc, L. J. (1979). "Methods of Combining Modal Split And Equilibrium Assignment Models", *Transportation Science* 13, pp. 292-314.
- Ahn, B. (1978). "Computation of Market Equilibria for Policy Analysis: The Project Independence Evaluation System Approach". *Tese de Doutorado (Ph. D.)* (Universidade de Stanford, Stanford, Califórnia).
- Arica Chávez, J. R. (1987). "Cálculo de Equilíbrios Econômicos por Métodos Homotópicos". *Tese de Mestrado* (Universidade Estadual de Campinas, Campinas).
- Avriel, M. (1976). *Nonlinear Programming: Analysis and Methods* (Prentice Hall, New Jersey).
- Biggs, M. C. (1972). "Constrained Minimization Using Recursive Equality Quadratic Programming", em *Numerical Methods for Non-Linear Optimization* (F. A. Lootsma, Ed.), pp. 411-428 (Academic Press, London/New York).
- Bordoni, O. F. J. G. (1989). "PEGASUS - O Problema de Equilíbrio Geral Aplicado resolvido por Um Sistema Unificado de Suporte Computacional". *Tese de Mestrado* (Universidade Estadual de Campinas, Campinas).
- Control Data Corporation. (1985). *Topics for FORTRAN Programmers* (St. Paul, Minnesota).
- Carey, M. (1977). "Integrability and Mathematical Programming Models: A Survey and A Parametric Approach", *Econometrica* 45, pp. 1957-1976.
- Dafermos, S. (1982). "Relaxation Algorithms for the General Asymmetric Traffic Equilibrium Problem", *Transportation Science* 16, pp. 231-240.
- Dafermos, S. (1983). "An Iterative Scheme for Variational Inequalities", *Mathematical Programming* 26, pp. 40-47.
- Dantzig, G. B. (1963). *Linear Programming and Extensions* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey).
- Davidson, W. C. (1959). "Variable Metric Methods for Minimization", *Report ANL-5590* (Argonne National Laboratory, Argonne, Illinois).
- Digital Equipment Corporation. (1984a). *Programming in VAX FORTRAN* (Maynard, Massachussets).
- Digital Equipment Corporation. (1984b). *VAX FORTRAN User's Guide* (Maynard, Massachussets).



## Bibliografia

- Eaves, B. C. (1978). "A Locally Quadratically Convergent Algorithm for Computing Stationary Points". *Technical Report SOL 78-13* (Departamento de Pesquisa Operacional, Universidade de Stanford, Stanford, Califórnia).
- Ferreira, A. B. de H. (1986). *Novo Dicionário da Língua Portuguesa* (Editora Nova Fronteira S. A., Rio de Janeiro).
- Fletcher, R. (1972). "Minimizing General Functions Subject to Linear Constraints", em *Numerical Methods for Non-Linear Optimization* (F. A. Lootsma, Ed.), pp. 279-296 (Academic Press, London/New York).
- Florian, M. e Los, M. (1982). "A New Look at Static Spatial Price Equilibrium Models", *Regional Science and Urban Economics* 12, pp. 579-597.
- Florian, M. e Spiess, H. (1982). "The Convergence of Diagonalization Algorithms for Asymmetric Network Equilibrium Problems", *Transportation Research* 6B, pp. 477-483.
- Frank, M. e Wolfe, P. (1956). "An Algorithm for Quadratic Programming", *Naval Research Logistics Quarterly* 3, pp. 95-110.
- Friesz, T. L., Harker, P. T. e Tobin, R. L. (1984). "Alternative Algorithms for the General Network Spatial Price Equilibrium Problem", *Journal of Regional Science* 24, pp. 475-507.
- Friesz, T. L., Tobin, R. L., Smith, T. E. e Harker, P. T. (1983). "A Nonlinear Complementarity Formulation and Solution Procedure for the General Derived Demand Network Equilibrium Problem", *Journal of Regional Science* 23, pp. 337-359.
- Gill, P. E. e Murray, W. (1974). "Safeguard Steplength Algorithms for Optimization Using Descent Methods", *National Physical Laboratory Report NAC 37*.
- Gill, P. E., Murray, W., Saunders, M. A. e Wright, M. H. (1988). "Recent Developments in Constrained Optimization", *Journal of Computational and Applied Mathematics* 22, pp. 257-270.
- Gill, P. E., Murray, W. e Wright, M. H. (1981). *Practical Optimization* (Academic Press, London/New York).
- Harker, P. T. (1984). "A Variational Inequality Approach for the Determination of Oligopolistic Market Equilibrium", *Mathematical Programming* 30, pp. 105-111.
- Hogan, W. W. (1975). "Energy Policy Models for Project Independence", *Computers and Operations Research* vol. 2, pp. 251-271.
- Karamardian, S. (1971). "Generalized Complementarity Problem", *Journal of Optimization Theory and Applications* 8, pp. 161-168.

## Bibliografia

- Kennington, J. L. e Helgason, R. V. (1980). *Algorithms for Network Programming* (John Wiley, New York).
- Koopmans, T. C. (1951). *Activity Analysis of Production and Allocation* (John Wiley, New York).
- LeBlanc, L. J., Morlok, E. K. e Pierskalla, W. P. (1975). "An Efficient Approach to Solving the Road Network Equilibrium Traffic Assignment Problem", *Transportation Research* 9, pp. 309-318.
- Luenberger, D. G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming* (Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts).
- MacKinnon, J. G. (1975). "An Algorithm for the Generalized Transportation Problem", *Regional Science and Urban Economics* 5, pp. 445-464.
- Mateus, G. R. e Luna, H. P. L. (1986). *Programação Não Linear* (UFMG, Belo Horizonte).
- Miglioli, J., Belluzzo, L. G. e Silva, S. (1985) *O Funcionamento da Economia Capitalista* (Universidade Estadual de Campinas, Campinas).
- Minoux, M. (1983). *Programmation Mathématique* (Dunod, Paris).
- Modiano, E. M. (1983a). "Energia e Economia: Um Modelo Integrado", *Programa Nacional de Pesquisa Econômica (PNPE) - Série Fac-Símile N° 8* (Rio de Janeiro).
- Modiano, E. M. (1983b). "Energia e Economia: Um Modelo Integrado para o Brasil", *Pesquisa e Planejamento Econômico* 13 (2), pp. 307-364.
- Murtagh, B. A. e Saunders, M. A. (1978). "Large-Scale Linearly Constrained Optimization", *Mathematical Programming* 14, pp. 41-72.
- Murtagh, B. A. e Saunders, M. A. (1983). "MINOS User's Guide", *Report SOL 83-20* (Departamento de Pesquisa Operacional, Universidade de Stanford, Stanford, Califórnia).
- Oliveira, R. C. de (1989). "Equilíbrio de Tráfego sob Duas Abordagens: Complementaridade e Otimização". *Tese de Mestrado* (Universidade Estadual de Campinas).
- Pang, J. S. e Chan, D. (1982). "Iterative Methods for Variational and Complementarity Problems", *Mathematical Programming* 24, pp. 284-313.
- Robinson, S. M. (1980). "Strongly Regular Generalized Equations", *Mathematics of Operations Research* 5, pp. 43-62.
- Rockafellar, R. T. (1969). *Convex Analysis* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey).

## Bibliografia

- Rotondo, W. (1988). "Cálculo de Equilíbrios Econômicos por Complementaridade". *Tese de Mestrado* (Universidade Estadual de Campinas, Campinas).
- Rowse, J. (1981). "Solving the Generalized Transportation Problem", *Regional Science and Urban Economics* 11, pp. 57-68.
- Samuelson, P. A. (1947). *Foundations of Economic Analysis* (Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts).
- Samuelson, P. A. (1952). "Spatial Price Equilibrium and Linear Programming", *American Economic Review* 42, pp. 283-303.
- Scaramucci, J. A. e Arica Chávez, J. R. (1986). "Métodos Homotópicos para a Determinação de Equilíbrios Econômicos", *Anais do IX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC)*, pp. 373-381 (Brasília).
- Scaramucci, J. A. e Rotondo, W. (1987a). "Eficiência Econômica: Uma Análise Setorial por Complementaridade", *X Congresso Nacional de Matemática Aplicada* (Gramado, Rio Grande do Sul).
- Scaramucci, J. A. e Rotondo, W. (1987b). "Cálculo de Equilíbrios Setoriais por Complementaridade", *Anais do 7º Encontro Latino-Americano da Econometric Society*, pp. 1903-1910 (São Paulo).
- Scaramucci, J. A. e Rotondo, W. (1988). "Treating Perfect and Imperfect Competition in Engineering-Economic Models", *2ª Conferência sobre Aplicações de Matemática à Economia e à Gestão* (Lisboa, Portugal).
- Scarf, H. (1967). "The Approximation of Fixed Points of Continuous Mappings", *SIAM Journal of Applied Mathematics* 15, pp. 1328-1343.
- Scarf, H. e Hansen, T. (1973). *The Computation of Economic Equilibria* (Yale State University Press, New Haven, Conn.).
- Silva, J. G. e Kageyama, A. A. (1980). *O Preço da Produção na Agricultura* (Universidade Estadual de Campinas, Campinas).
- Takayama, T. e Judge, G. G. (1971). *Spatial and Temporal Price and Allocation Models* (Amsterdam, North Holland).
- Varian, H. R. (1984). *Microeconomic Analysis* (W. W. Norton & Company, New York).
- Williamson, R. E., Crowell, R. H. e Froter, H. F. (1975). *Cálculo de Funções Vetoriais - Volume 2* (Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro).
- Wolfe, P. (1962). *The Reduced-Gradient Method*, manuscrito não publicado (RAND Corporation).
- Zangwill, W. I. (1969). *Nonlinear Programming: A Unified Approach* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey).

## ANEXO I

### Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```
C*****
C*
C*          SISTEMA OTIMIZA - Programa Principal
C*
C*      Resolucao de problemas de programacao nao-linear com base no
C*
C*          Metodo da Diagonalizacao
C*          com Integracao Explicita (IE) - 0
C*          Frank-Wolfe (FW) - 1
C*          Sequencia de Problemas Quadraticos (SPQ) - 1
C*
C*          Metodo de Jacobi Linearizado - 2
C*
C*          Metodo da Simetrizacao
C*          com Media Aritmetica - 31
C*          Minimo - 32
C*
C*          Jurandir Zullo Junior   -   04/01/90
C*
C*****
C
C
C
C*****
C*
C*      DEFINICAO DE VARIAVEIS
C*
C*****
C
C      Definicao da dimensao maxima dos vetores e matrizes
C
C      PARAMETER DMX=120,ELM=300
C
C      Definicao das variaveis inteiras
C
C      INTEGER KRELAX,ITRELAX
C      INTEGER MAXITPO,KPO,FRIMPPPO,RESTOPO
C      INTEGER TIMESTORAGE,STATUS,ELAPSED
C      INTEGER ROWS,COLUMNS,ELEMENTS
C      INTEGER KPL,MAXITPL,TOTKPL,PARCKPL
C      INTEGER KPD,TOTKPD,MAXITPD,FRIMPPD,RESTOPD
C      INTEGER CHAVE,ASTKEY,COLKEY,IMPPI,METODO,ECO
C      INTEGER M,N,NA,NB,NLO,NUP,NPI,NNOBJ,NSLHD
```

## ANEXO 1. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

INTEGER NOME(8),NSP,CARTAO(80)
INTEGER LINHA(ELM),COLUNA(ELM),LINMIN,COLMIN,INDMIN
INTEGER NWCORE,ND,K,I,J,LINAJU,COLAJU,COLGRD

C
C Definicao das variaveis reais de precisao dupla
C
REAL*8 Z(25000)

C
C Definicao das variaveis reais de precisao simples
C
REAL*4 EPSLON,CERCA,MAISINF,MENOSINF,ERRO
REAL*4 YK(DMX),DK(DMX),XKK(DMX),XK(DMX),XX(DMX),XG(DMX),P(DMX)
REAL*4 PASSO,SPASSO,FIXO,SUPRELAX,RELAX
REAL*4 U(DMX),UP(DMX),L(DMX),LO(DMX),B(DMX),VALOR(ELM),VALAJU
REAL*4 LK,LKM1,LKMM1,F1,F2,F3,LFIXO,LVELHO
REAL*4 TPMINOS1,TPPL,TPPD,PARCTPPL,PARCTPPD

C
C Definicao de areas comuns de dados
C
COMMON /M3MPS2/ LCNAM1,LRNAM1,LCNAM2,LRNAM2,LXS,LXL,LFREE
COMMON /XKCOMM/ XK
COMMON /XXCOMM/ XX
COMMON /XGCOMM/ XG
COMMON /PCOMM/ P
COMMON /NDCOMM/ ND
COMMON /NVNLIN/ NNOBJ
COMMON /MTCOMM/ METODO

C
C Inicializacao de variaveis
C
DATA NWCORE/25000/,ISPECS/21/,ISCRCH/22/,IPSOLN/0/
DATA CHAVE/0/,IMPPI/0/,ASTKEY/0/
DATA TOTKPL/0/,TPPL/0./,PARCKPL/0/,PARCTPPL/0./
DATA KPO/0/,KPD/0/,PARCTPPD/0./,TPPD/0./,TOTKPD/0/
DATA LINHA/ELM*0/,COLUNA/ELM*0/,VALOR/ELM*0./
DATA XX/DMX*0./,XK/DMX*0./,B/DMX*0./

C
C
C
C*****
C*
C* ENTRADA E IMPRESSAO DOS DADOS
C*
C*****
C
C Abertura dos arquivos de entrada e saida
C
OPEN(UNIT= 2,STATUS='OLD',FILE='OTIMIZA.DAT')
OPEN(UNIT=14,STATUS='NEW',FILE='OTIMIZA.SAI')
OPEN(UNIT=21,STATUS='NEW',FILE= 'SPECS.MNS')
C

```

# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

C      Leitura e impressao dos parametros do problema
C
      WRITE(14,564)
564    FORMAT('1',20X,'SISTEMA OTIMIZA - Saida dos Resultados',/)
      WRITE(14,540)
540    FORMAT(20X,'      Jurandir Zullo Junior - 04/01/90',/)
      WRITE(14,250)
250    FORMAT(/,' ',77(1H*))
      WRITE(14,563)
563    FORMAT(' PARAMETROS DE ENTRADA',/)
      READ(2,565) NOME
565    FORMAT(8A1)
      WRITE(14,566) NOME
566    FORMAT(' Nome ..... ',8A1)
      READ(2,*) METODO
      WRITE(14,620) METODO
620    FORMAT(' Metodo..... ',1I2)
      IF (METODO.EQ.0) THEN
        WRITE(14,680)
680    FORMAT('+',50(1X),'(Diagonalizacao com IE)')
        ELSE
          IF (METODO.EQ.1) THEN
            WRITE(14,683)
683    FORMAT('+',50(1X),'(Diagonalizacao com FW/SPQ)')
            ELSE
              IF (METODO.EQ.2) THEN
                WRITE(14,681)
681    FORMAT('+',50(1X),'(Jacobi linearizado)')
                ELSE
                  WRITE(14,682)
682    FORMAT('+',50(1X),'(Simetrizacao)')
                ENDIF
              ENDIF
            ENDIF
          ENDIF
        READ(2,*) CERCA
        WRITE(14,555) CERCA
555    FORMAT(' Cerca ..... ',1F14.6)
        READ(2,*) RELAX
        WRITE(14,556) RELAX
556    FORMAT(' Relaxacao ..... ',1F9.6)
        READ(2,*) ITRELAX
        WRITE(14,557) ITRELAX
557    FORMAT(' Iteracoes para Relaxacao ..... ',1I3)
        WRITE(14,562)
562    FORMAT(' Numero maximo permitido')
        READ(2,*) MAXITPO
        WRITE(14,561) MAXITPO
561    FORMAT(' de aproximacoes lineares/nao-lineares .. ',1I3)
        READ(2,*) MAXITPD
        IF (METODO.NE.1) THEN
          MAXITPD=1

```

# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

ENDIF
WRITE(14,560) MAXITPD
560 FORMAT('      de subproblemas .....      ',I13)
    READ(2,*) MAXITPL
    WRITE(14,558) MAXITPL
558 FORMAT('      de pesquisas lineares .....      ',I13)
    READ(2,*) EPSLON
    WRITE(14,559) EPSLON
559 FORMAT(' Precisao .....      ',1F9.6)
    WRITE(14,590)
590 FORMAT(' Frequencia de impressao')
    READ(2,*) FRIMPPPO
    WRITE(14,591) FRIMPPPO
591 FORMAT('      das aproximacoes lineares/nao-lineares .      ',I13)
    READ(2,*) FRIMPPD
    WRITE(14,592) FRIMPPD
592 FORMAT('      de cada subproblema .....      ',I13)
    READ(2,*) MAISINF
    WRITE(14,610) MAISINF
610 FORMAT(' Limitante supremo (+infinito).....      ',
11E12.5)
    READ(2,*) MENOSINF
    WRITE(14,611) MENOSINF
611 FORMAT(' Limitante infimo (-infinito).....      ',
11E12.5)
    READ(2,*) ECO
    WRITE(14,612) ECO
612 FORMAT(' Eco dos dados matriciais de entrada.....      ',I13)
    IF (ECO.EQ.0) THEN
        WRITE(14,613)
613     FORMAT('+',52(1X),'(NAO)')
        ELSE
        WRITE(14,614)
614     FORMAT('+',52(1X),'(SIM)')
    ENDIF
C
C   Leitura e impressao das dimensoes do sistema
C
    READ(2,*) M,N,NNOBJ
    WRITE(14,541)
541 FORMAT(' Dimensoes do sistema')
    WRITE(14,542) M
542 FORMAT('      - linhas.....      ',I13)
    WRITE(14,543) N
543 FORMAT('      - colunas.....      ',I13)
    WRITE(14,544) NNOBJ
544 FORMAT('      - variaveis nao lineares.....      ',I13)
C
C   Leitura da matriz A
C
    READ(2,*) NA

```

# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

IF (ECO.EQ.0) THEN
  WRITE(14,545) NA
545  FORMAT('      - elementos nao nulos de A.....      ',1I3)
      ELSE
        IF (NA.GE.1) THEN
          WRITE(14,655)
655    FORMAT('/',' Elementos nao nulos de A')
          WRITE(14,656)
656    FORMAT(' linha      coluna      valor')
        ENDIF
      ENDIF
    DO 18 K=1,NA
      READ(2,*) LINHA(K),COLUNA(K),VALOR(K)
      IF ((ECO.NE.0).AND.(VALOR(K).NE.0.0)) THEN
        WRITE(14,598) LINHA(K),COLUNA(K),VALOR(K)
598    FORMAT(2X,1I3,6X,1I3,4X,1F14.6)
      ENDIF
18  CONTINUE
C
C  Ordenacao dos dados da matriz A por ordem crescente de coluna
C
    DO 731 K=1,NA-1
      LINMIN=LINHA(K)
      COLMIN=COLUNA(K)
      INDMIN=K
      DO 732 I=K+1,NA
        IF ((COLUNA(I).LT.COLMIN).OR.((COLUNA(I).EQ.COLMIN).AND.
1(LINHA(I).LT.LINMIN))) THEN
          COLMIN=COLUNA(I)
          LINMIN=LINHA(I)
          INDMIN=I
        ENDIF
732  CONTINUE
      IF (K.NE.INDMIN) THEN
        COLAJU=COLUNA(INDMIN)
        LINAJU=LINHA(INDMIN)
        VALAJU=VALOR(INDMIN)
        COLUNA(INDMIN)=COLUNA(K)
        LINHA(INDMIN)=LINHA(K)
        VALOR(INDMIN)=VALOR(K)
        COLUNA(K)=COLAJU
        LINHA(K)=LINAJU
        VALOR(K)=VALAJU
      ENDIF
731  CONTINUE
C
C  Leitura do vetor B
C
    READ(2,*) NB
    IF (ECO.EQ.0) THEN
      WRITE(14,546) NB

```



# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

546   FORMAT('    - elementos nao nulos de B.....      ',1I3)
      ELSE
      IF (NB.GE.1) THEN
      WRITE(14,595)
595   FORMAT('/', ' Elementos nao nulos de B')
      WRITE(14,596)
596   FORMAT(' linha          valor')
      ENDIF
    ENDIF
    DO 10 K=1,NB
    READ(2,*) I,B(I)
    IF ((ECO.NE.0).AND.(B(I).NE.0.0)) THEN
      WRITE(14,690) I,B(I)
690   FORMAT(2X,1I3,3X,1F14.6)
    ENDIF
10   CONTINUE
C
C   Inicializacao dos vetores de canalizacao inferior e superior
C
      DO 549 I=1,N
      L(I)=MENOSINF
549   U(I)=MAISINF
C
C   Leitura do vetor de canalizacao inferior
C
      READ(2,*) NLO
      IF (ECO.EQ.0) THEN
      WRITE(14,547) NLO
547   FORMAT('    - limites inferiores distintos de -inf      ',1I3)
      ELSE
      IF (NLO.GE.1) THEN
      WRITE(14,691)
691   FORMAT('/', ' Limites inferiores distintos de -infinito')
      WRITE(14,570)
570   FORMAT(' variavel          valor')
      ENDIF
    ENDIF
    DO 12 K=1,NLO
    READ(2,*) J,L(J)
    IF ((ECO.NE.0).AND.(L(J).GT.MENOSINF)) THEN
      WRITE(14,568) J,L(J)
568   FORMAT(3X,'X',1I3,3X,1F14.6)
    ENDIF
12   CONTINUE
C
C   Leitura do vetor de canalizacao superior
C
      READ(2,*) NUP
      IF (ECO.EQ.0) THEN
      WRITE(14,548) NUP
548   FORMAT('    - limites superiores distintos de +inf      ',1I3)

```

# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

        ELSE
        IF (NUP.GE.1) THEN
        WRITE(14,594)
594    FORMAT(/,' Limites superiores distintos de +infinito')
        WRITE(14,570)
        ENDIF
    ENDIF
    DO 14 K=1,NUP
    READ(2,*) J,U(J)
    IF ((ECO.NE.0).AND.(U(J).LT.MAISINF)) THEN
        WRITE(14,568) J,U(J)
    ENDIF
14    CONTINUE
C
C    Assinalamento dos vetores de canalizacao inferior e superior
C
    DO 19 I=1,N
    LO(I)=L(I)
    UP(I)=U(I)
19    CONTINUE
C
C    Leitura e impressao do ponto inicial
C
    READ(2,*) NPI
    IF ((ECO.NE.0).AND.(NPI.GE.1)) THEN
        WRITE(14,569)
569    FORMAT(/,' Componentes nao nulas do ponto inicial fornecido')
        WRITE(14,570)
    ENDIF
    DO 15 K=1,NPI
    READ(2,*) I,XK(I)
    IF ((ECO.NE.0).AND.(XK(I).NE.0.0)) THEN
        WRITE(14,568) I,XK(I)
    ENDIF
    XX(I)=XK(I)
15    CONTINUE
C
C
C
C*****
C*
C*    GRAVACAO DO SPECS.MNS
C*
C*****
C
    WRITE(21,510) NOME
510  FORMAT('BEGIN ',8A1)
    ROWS=(M+1)*1.2
    WRITE(21,515) ROWS
515  FORMAT('ROWS=',1I3)
    COLUMNS=(N+1)*1.2

```

# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

WRITE(21,516) COLUMNS
516 FORMAT('COLUMNS=',1I3)
ELEMENTS=(NA+N)*1.2
WRITE(21,517) ELEMENTS
517 FORMAT('ELEMENTS=',1I3)
WRITE(21,518) MENOSINF,MAISINF
518 FORMAT('LOWER BOUND=',1E8.1,/, 'UPPER BOUND=',1E8.1)
WRITE(21,535)
535 FORMAT('SCALE=YES',/, 'SOLUTION=NO')
WRITE(21,520) NNOBJ
520 FORMAT('NONLINEAR VARIABLES=',1I3)
NSLHD=N+1
WRITE(21,521) NSLHD
521 FORMAT('SUPERBASICS LIMIT=',1I3)
WRITE(21,522) NSLHD
522 FORMAT('HESSIAN DIMENSION=',1I3)
WRITE(21,530) EPSLON
530 FORMAT('LINESEARCH TOLERANCE=',1E8.1,/, 'LOG FREQUENCY=0')
WRITE(21,531)
531 FORMAT('SUPPRESS PARAMETERS')
C
C   Leitura e gravacao de especificacoes adicionais no arquivo SPECS.MNS
C
READ(2,*) NSP
WRITE(14,523) NSP
523 FORMAT(' Especificacoes adicionais ..... ',1I3)
DO 524 I=1,NSP
READ(2,525) CARTAO
525 FORMAT(80A1)
WRITE(14,527) CARTAO
527 FORMAT(1X,80A1)
WRITE(21,525) CARTAO
524 CONTINUE
C
C   Gravacao das especificacoes inalteraveis
C
WRITE(21,511)
511 FORMAT('MINIMIZE',/, 'OBJECTIVE=OBJ',/, 'RHS=RHS1')
WRITE(21,512)
512 FORMAT('BOUNDS=BOUND1')
WRITE(21,519)
519 FORMAT('MPS FILE=25')
WRITE(21,526)
526 FORMAT('END')
C
C   Fechamento do arquivo de entrada
C
CLOSE(UNIT=2)
C
C   Abertura dos arquivos utilizados pelo Minos
C

```

# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

OPEN(UNIT= 6,STATUS='NEW',FILE='MINOS.SAI')
OPEN(UNIT=22,STATUS='NEW',FILE='SCRCH.MNS')
OPEN(UNIT=25,STATUS='NEW',FILE='MPS.MNS')

C
C
C
C*****
C*
C* GRAVACAO DO MPS.MNS
C*
C*****
C
C Atualizacao dos limites superiores e inferiores das variaveis ilimitadas
C
666 IF (CERCA.GT.0.0) THEN
    DO 191 I=1,N
    IF (L(I).LE.MENOSINF) THEN
        LO(I)=XK(I)-CERCA
    ELSE
        LO(I)=L(I)
    ENDIF
    IF (U(I).GE.MAISINF) THEN
        UP(I)=XK(I)+CERCA
    ELSE
        UP(I)=U(I)
    ENDIF
191 CONTINUE
ENDIF

C
C Calculo do grad(g(XK)) para colocacao no arquivo MPS.MNS
C
667 IF (NNOBJ.LT.N) THEN
    DO 5000 I=1,N
5000 XG(I)=XK(I)
    ND=1
    CALL DERIVADAS
ENDIF

C
C Gravacao
C
REWIND 25
WRITE(25,1000) NOME
1000 FORMAT('NAME',8A1)
WRITE(25,2000)
2000 FORMAT('ROWS')
DO 4000 I=1,M
4000 WRITE(25,6000) I
6000 FORMAT(' G L',1I3)
WRITE(25,3000)
3000 FORMAT(' N OBJ')
WRITE(25,7000)

```

# ANEXO 1. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

7000 FORMAT('COLUMNS')
      K=1
      COLGRD=NNOBJ+1
      DO 8000 J=1,N
      COLKEY=0
7001 IF (K.LE.NA) THEN
      IF (COLUNA(K).EQ.J) THEN
        WRITE(25,9000) COLUNA(K),LINHA(K),VALOR(K)
9000    FORMAT(4X,'X',1I3,6X,'L',1I3,6X,1E12.5)
        K=K+1
        COLKEY=1
        GOTO 7001
      ENDIF
    ENDIF
    IF (J.GE.COLGRD) THEN
      WRITE(25,1010) J,P(J)
1010    FORMAT(4X,'X',1I3,6X,'OBJ ',6X,1E12.5)
      ELSE
        IF (COLKEY.EQ.0) THEN
          WRITE(25,1050) J
1050    FORMAT(4X,'X',1I3)
        ENDIF
      ENDIF
8000 CONTINUE
      WRITE(25,1011)
1011 FORMAT('RHS')
      DO 1012 I=1,M
      IF (B(I).NE.0.0) THEN
        WRITE(25,1014) I,B(I)
1014    FORMAT(4X,'RHSI',6X,'L',1I3,6X,1E12.5)
      ENDIF
1012 CONTINUE
      WRITE(25,1016)
1016 FORMAT('BOUNDS')
      DO 1017 J=1,N
      IF (LO(J).EQ.UP(J)) THEN
        WRITE(25,1030) J,LO(J)
1030    FORMAT(X,'FX BOUND1',4X,'X',1I3,6X,1E12.5)
      ELSE
        IF (UP(J).LT.MAISINF) THEN
          WRITE(25,1018) J,UP(J)
1018    FORMAT(X,'UP BOUND1',4X,'X',1I3,6X,1E12.5)
        ENDIF
        IF (LO(J).GT.MENOSINF) THEN
          WRITE(25,1019) J,LO(J)
1019    FORMAT(X,'LO BOUND1',4X,'X',1I3,6X,1E12.5)
        ENDIF
      ENDIF
1017 CONTINUE
      WRITE(25,1020)
1020 FORMAT('ENDATA')

```

# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

C
C
C
C*****
C*
C* RESOLUCAO DO SUBPROBLEMA
C*
C*****
C
C
C
C*****
C*
C* Determinacao da Direcao Factive de Descida
C*
C*****
C
C Reposicionamento dos arquivos utilizados pelo Minos
C
6 REWIND 6
REWIND 21
REWIND 22
REWIND 25
C
C Inicializacao do registro de tempo de processamento
C
STATUS=LIB$INIT_TIMER(TIMESTORAGE)
C
C Chamada do Minos 5
C
CALL MINOS1(Z,NWCORE)
C
C Determinacao do tempo de processamento do Minos 5
C
STATUS=LIB$STAT_TIMER(2,ELAPSED,TIMESTORAGE)
TPMINOS1=0.01*ELAPSED
PARCTPPD=PARCTPPD+TPMINOS1
C
C Leitura do resultado do Minos e determinacao da distancia
C entre o ponto atual e o resultado do PL
C
DO 3 I=1,N
XKK(I)=Z(LXS+I-1)
XKK(I)=0.96*(XKK(I)-XK(I))+XK(I)
3 DK(I)=XKK(I)-XK(I)
C
C Teste do ponto inicial
C
IF (CHAVE.EQ.0) THEN
CHAVE=1
DO 30 I=1,N

```

# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

30      XK(I)=XKK(I)
      XX(I)=XKK(I)
      IF (CERCA.GT.0.0) THEN
          GOTO 666
      ELSE
          IF (NNOBJ.EQ.0) THEN
              GOTO 667
          ELSE
              GOTO 6
          ENDIF
      ENDIF
  ENDIF
  ENDIF
  ENDIF
C
C
C
C*****
C*
C* Pesquisa Linear pelo Metodo da Posicao Falsa
C*
C*****
C
C
C      Inicializacoes
C
      LKM1=0.
      LK=1.
      LKMM1=1.
      SPASSO=0.
      KPL=0
      KRELAX=0
C
C      Calculo de grad(g(XK+LKM1*DK))*DK
C
777 DO 20 I=1,N
20   XG(I)=XK(I)+LKM1*DK(I)
      ND=1
      CALL DERIVADAS
      F2=0.
      DO 21 I=1,N
21   F2=F2+P(I)*DK(I)
C
C      Calculo de grad(g(XK+LK*DK))*DK
C
      DO 22 I=1,N
22   XG(I)=XK(I)+LK*DK(I)
      ND=1
      CALL DERIVADAS
      F1=0.
      DO 23 I=1,N
23   F1=F1+P(I)*DK(I)
C
C      Teste de direcao de descida

```

# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

C
IF (ABS(F2).LT.EPSLON) THEN
    LKMM1=0.
    GOTO 500
ELSE
    IF (F2.GT.0.0) THEN
        IF (CHAVE.EQ.1) THEN
            DO 31 I=1,N
                XK(I)=XKK(I)
                XX(I)=XKK(I)
                IF (CERCA.GT.0.0) THEN
                    GOTO 666
                ELSE
                    IF (NNOBJ.EQ.0) THEN
                        GOTO 667
                    ELSE
                        GOTO 6
                    ENDIF
                ENDIF
            ENDIF
        ELSE
            LKMM1=0.
            ENDIF
            GOTO 500
        ELSE
C
C
C
        Teste da impressao do ponto inicial efetivamente utilizado
        IF (IMPPI.EQ.0) THEN
            IMPPI=1
            WRITE(14,250)
            WRITE(14,701)
701      FORMAT(' PONTO INICIAL EFETIVAMENTE UTILIZADO',/)
            WRITE(14,570)
            DO 702 K=1,N
702      WRITE(14,568) K,XX(K)
            PARCTPPD=TPMINOS1
            ENDIF
C
C
C
        Teste do sinal e da grandeza de F1 comparado a F2
        CHAVE=2
        IF (F1.LT.F2) THEN
            LKMM1=0.
            GOTO 500
        ELSE
            IF (F1.LE.0.0) THEN
                LKMM1=1.
                GOTO 500
            ENDIF
        ENDIF
    ENDIF
ENDIF

```



# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

ENDIF
C
C Salto da pesquisa linear se nao for Frank-Wolfe ou SPQ
C
IF (METODO.NE.1) THEN
    GOTO 500
ENDIF
C
C Inicializacao do registro de tempo de processamento
C
STATUS=LIB$INIT_TIMER(TIMESTORAGE)
C
C Determinacao da nova iteracao da pesquisa linear
C
779 LKMM1=LK-F1*(LK-LKM1)*(1./(F1-F2))
C
C Incremento do contador de iteracoes da pesquisa linear
C
KPL=KPL+1
C
C Calculo de grad(g(XK+LKMM1*DK))*DK
C
778 DO 24 I=1,N
24  XG(I)=XK(I)+LKMM1*DK(I)
    F3=0.
    ND=1
    CALL DERIVADAS
    DO 25 I=1,N
25  F3=F3+P(I)*DK(I)
C
C Testa se o novo ponto e' de minimo
C
IF (ABS(F3).LT.EPSLON) THEN
    GOTO 501
ENDIF
C
C Renomeacao dos extremos da pesquisa linear
C
IF (F3.LT.0.0) THEN
    LVELHO=LKM1
    LFIXO=LK
    LKM1=LKMM1
    F2=F3
ELSE
    LVELHO=LK
    LFIXO=LKM1
    LK=LKMM1
    F1=F3
ENDIF
C
C Calculo do passo

```

## ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```
C
PASSO=LKMM1-LVELHO
C
C   Calculo do erro do passo
C
  IF (LVELHO.NE.0.0) THEN
    ERRO=PASSO*(1./LVELHO)
    ELSE
      ERRO=PASSO
  ENDIF
C
C   Teste de convergencia do passo
C
  IF (ABS(ERRO).LT.EPSLON) THEN
    GOTO 501
  ENDIF
C
C   Incremento dos contador de iteracoes da relaxacao
C
  KRELAX=KRELAX+1
C
C   Teste de estouro do maximo de iteracoes
C
  IF (KPL.EQ.MAXITPL) THEN
    GOTO 501
  ENDIF
C
C   Teste da somatoria dos passos
C
  IF (KRELAX.EQ.0) THEN
C
    Reinicializacao da somatoria dos passos
C
    SPASSO=0.
    ELSE
C
    Calculo da somatoria dos passos
C
    SPASSO=SPASSO+PASSO
C
    Teste da necessidade de relaxacao
C
    IF (KRELAX.EQ.ITRELAX) THEN
C
      Reinicializacao do contador de iteracoes
C
      KRELAX=-1
C
      Calculo da distancia possivel a ser percorrida
C
      FIXO=LKMM1-LFIXO
```

# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

C
C      Calculo da super-relaxacao baseada em passo medio
C
C      SUPRELAX=RELAX*SPASSO*(1./ITRELAX)
C
C      Testa se a super-relaxacao nao supera a distancia maxima
C
C      IF ((SUPRELAX*FIXO).LT.0.0) THEN
C        IF (ABS(FIXO).GT.ABS(SUPRELAX)) THEN
C
C          Determina o novo valor com relaxacao
C
C          LKMM1=LKMM1+SUPRELAX
C
C          Incremento do contador de iteracoes da pesquisa linear
C
C          KPL=KPL+1
C          GOTO 778
C        ENDIF
C      ENDIF
C    ENDIF
C  ENDIF
C  GOTO 779
C
C      Determinacao do tempo de processamento da pesquisa linear
C
C 501 STATUS=LIB$STAT_TIMER(2,ELAPSED,TIMESTORAGE)
C      PARCTPPL=PARCTPPL+ELAPSED*0.01
C
C*****
C*
C*      Calculo do novo ponto
C*
C*****
C
C
C
C 500 DO 7 I=1,N
C 7   XK(I)=XK(I)+LKMM1*DK(I)
C
C      Totalizacao do numero de iteracoes da pesquisa linear
C
C      PARCKPL=PARCKPL+KPL
C
C      Incremento do contador de iteracoes do problema aproximado
C
C      KPD=KPD+1
C
C*****

```

# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

C*
C*      Testes de parada da resolucao do subproblema
C*
C*****
C
C
C
C      Teste de convergencia
C
C      IF (METODO.EQ.1) THEN
C      IF (LKMM1.GE.EPSLON) THEN
C
C          Teste de estouro do maximo de iteracoes
C
C          IF (KPD.LT.MAXITPD) THEN
C
C              Teste de frequencia da impressao dos resultados
C
C              IF ((FRIMPPD.NE.0).AND.(FRIMPPD.NE.0).AND.
1(IMPPI.EQ.1)) THEN
C                  RESTOPD=KPD-FRIMPPD*(KPD/FRIMPPD)
C                  RESTOPO=(KPO+1)-FRIMPPD*((KPO+1)/FRIMPPD)
C                  IF ((RESTOPD.EQ.0).AND.(RESTOPO.EQ.0)) THEN
C
C                      Impressao do numero da iteracao
C
C                      IF (ASTKEY.EQ.0) THEN
C                          ASTKEY=1
C                          WRITE(14,250)
C                          WRITE(14,251) (KPO+1)
251          FORMAT(1X,1I3,'a. ITERACAO')
C                      ENDIF
C
C                      Impressao dos resultados da subiteracao
C
C                      WRITE(14,310) KPD
310          FORMAT(/,1X,1I3,'a. subiteracao')
C                      WRITE(14,311) LKMM1
311          FORMAT(' Passo: ',1F14.6)
C                      WRITE(14,570)
C                      DO 313 I=1,N
313          WRITE(14,568) I,XK(I)
C                      ENDIF
C                  ENDIF
C
C              Teste para iniciar nova subiteracao
C
C              IF (CERCA.GT.0.0) THEN
C                  GOTO 666
C              ELSE
C                  IF (NNOBJ.EQ.0) THEN

```

# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

        GOTO 667
    ELSE
        GOTO 6
    ENDIF
ENDIF
ELSE
    WRITE(14,317) MAXITPD
317    FORMAT(' Atingido o limite de ',I13,' iteracoes ',
1' permitido para a resolucao dos subproblemas aproximados')
    ENDIF
ENDIF
ENDIF
C
C    Totalizacao do numero de iteracoes dos subproblemas
C
    TOTKPD=TOTKPD+KPD
C
C    Incremento do contador de iteracoes do problema original
C
    KPO=KPO+1
C
C
C
C*****
C*
C*    TESTES DE PARADA DOS METODOS DE APROXIMACOES
C*
C*****
C
C
C
C    Teste de convergencia
C
    IF (((METODO.EQ.1).AND.(KPD.GT.1)).OR.
1    ((METODO.NE.1).AND.(LKMM1.GE.EPSLON))) THEN
C
C    Teste de estouro do maximo de iteracoes
C
    IF (KPO.LT.MAXITPO) THEN
C
C    Teste de frequencia da impressao dos resultados
C
    IF (FRIMPPPO.NE.0) THEN
        RESTOPO=KPO-FRIMPPPO*(KPO/FRIMPPPO)
        IF (RESTOPO.EQ.0) THEN
C
C
C            Impressao dos resultados da iteracao
C
            IF (ASTKEY.EQ.0) THEN
                WRITE(14,250)
                WRITE(14,251) KPO

```

# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

                ENDIF
                WRITE(14,252)
252          FORMAT(/,' Resultado final')
                WRITE(14,570)
                DO 107 I=1,N
107          WRITE(14,568) I,XK(I)
                WRITE(14,350)
                WRITE(14,352) KPD
                WRITE(14,353) PARCKPL
                WRITE(14,354)
                WRITE(14,355) PARCTPPD
                WRITE(14,356) PARCTPPL
                ENDIF
            ENDIF
C
C      Reinicializacao do contador de iteracoes do problema aproximado
C
C      KPD=0
C
C      Reinicializacao da variavel que sinaliza a impressao do numero da
C      iteracao
C
C      ASTKEY=0
C
C      Totalizacoes
C
C      TOTKPL=TOTKPL+PARCKPL
C      TPPL=TPPL+PARCTPPL
C      TPPD=TPPD+PARCTPPD
C
C      Reinicializacoes
C
C      PARCKPL=0
C      PARCTPPL=0.0
C      PARCTPPD=0.0
C
C      Atualizacao do vetor com as coordenadas do ponto anterior
C
C      DO 8 I=1,N
8      XX(I)=XK(I)
C
C      Teste para iniciar nova iteracao
C
C      IF (CERCA.GT.0.0) THEN
C          GOTO 666
C          ELSE
C          IF (NNOBJ.EQ.0) THEN
C              GOTO 667
C          ELSE
C              GOTO 6
C          ENDIF

```

# ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```

        ENDIF
                ELSE
        316      WRITE(14,316) MAXITPO
                FORMAT(' Atingido o limite de ',I13,' aproximacoes ',
1'lineares/nao-lineares permitido para a resolucao do problema')
        ENDIF
    ENDIF
C
C      Impressao da solucao obtida
C
        WRITE(14,250)
        WRITE(14,314)
    314      FORMAT(' SOLUCAO',/)
        WRITE(14,570)
        DO 315 I=1,N
    315      WRITE(14,568) I,XK(I)
C
C      Impressao das estatisticas
C
        WRITE(14,350)
    350      FORMAT(/,' Estatisticas',//,' Total de')
        WRITE(14,351) KPO
    351      FORMAT('   aproximacoes lineares/nao-lineares ..   ',I13)
        WRITE(14,352) TOTKPD
    352      FORMAT('   subproblemas .....   ',I15)
        TOTKPL=TOTKPL+PARCKPL
        WRITE(14,353) TOTKPL
    353      FORMAT('   pesquisas lineares .....   ',I15)
        WRITE(14,354)
    354      FORMAT(/,' Tempo de processamento (CPU) em segundos')
        TPPD=TPPD+PARCTPPD
        WRITE(14,355) TPPD
    355      FORMAT('   da utilizacao do MINOS .....   ',1F12.5)
        TPPL=TPPL+PARCTPPL
        WRITE(14,356) TPPL
    356      FORMAT('   das pesquisas lineares .....   ',1F12.5)
        WRITE(14,250)
C
C      Fechamento dos arquivos de saida
C
        CLOSE(UNIT=6)
        CLOSE(UNIT=14)
        CLOSE(UNIT=21)
        CLOSE(UNIT=22)
        CLOSE(UNIT=25)
C
C
C
C*****
C*
C*      FIM
C*

```

## ANEXO I. Programa Principal do SISTEMA OTIMIZA

```
C*
C*****
C
C
C
C
END
```



## ANEXO II

### Subrotina FUNOBJ

```
C*****
C*
C*          SISTEMA OTIMIZA - Subrotina FUNOBJ
C*
C*          Jurandir Zullo Junior - 04/01/90
C*
C*****
C
C
C
C      SUBROUTINE FUNOBJ(MODE,N,X,F,G,NSTATE,NPROB,Z,NWCORE)
C
C      Definicao implicita das variaveis reais de precisao dupla
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C      Dimensionamento de vetores
C
C      DIMENSION X(N),G(N),Z(NWCORE)
C
C      Definicao da dimensao maxima dos vetores e matrizes
C
C      PARAMETER DMX=120
C
C      Definicao das variaveis reais de precisao simples
C
C      REAL*4 GRDP(DMX,DMX),XK(DMX),XX(DMX),P(DMX),XG(DMX),INTP(DMX)
C
C      Definicao das variaveis inteiras
C
C      INTEGER I,J,ND,METODO,JINI,JFIM
C
C      Definicao de areas comuns de dados
C
C      COMMON /XKCOMM/ XK
C      COMMON /XXCOMM/ XX
C      COMMON /XGCOMM/ XG
C      COMMON /IPCOMM/ INTP
C      COMMON /PCOMM/ P
C      COMMON /GPCOMM/ GRDP
C      COMMON /NDCOMM/ ND
C      COMMON /NVNLIN/ NNOBJ
C      COMMON /MTCOMM/ METODO
C
```

## ANEXO II. Subrotina FUNOBJ

```

C   Teste da existencia de variaveis nao-lineares
C
  IF (NNOBJ.GT.0) THEN
C
C   Calculos para o metodo da diagonalizacao com integracao explicita
C
    IF (METODO.EQ.0) THEN
      DO 1 I=1,N
        XG(I)=X(I)
1      CONTINUE
        ND=0
        CALL DERIVADAS
        F=0.
        DO 4 I=1,NNOBJ
          G(I)=P(I)
          F=F+INTP(I)
4        CONTINUE
          ELSE
C
C   Calculos para os demais metodos
C
        IF (NSTATE.EQ.1) THEN
          DO 2 I=1,N
            XG(I)=XK(I)
2          CONTINUE
            ND=3
            CALL DERIVADAS
            IF (METODO.GE.3) THEN
C
C   Simetrizacao
C
              IF (METODO.EQ.32) THEN
                DO 132 I=1,NNOBJ
                  DO 132 J=I+1,NNOBJ
                    IF (GRDP(I,J).GT.GRDP(J,I)) THEN
                      GRDP(I,J)=GRDP(J,I)
                      ELSE
                        GRDP(J,I)=GRDP(I,J)
                    ENDIF
132          CONTINUE
              ELSE
                DO 131 I=1,NNOBJ
                  DO 131 J=I+1,NNOBJ
                    GRDP(I,J)=(GRDP(I,J)+GRDP(J,I))/2.
                    GRDP(J,I)=GRDP(I,J)
131          CONTINUE
              ENDIF
              ELSE
C
C   Diagonalizacao
C

```

## ANEXO II. Subrotina FUNOBJ

```

DO 101 I=1,NNOBJ
DO 101 J=I+1,NNOBJ
GRDP(I,J)=0.
GRDP(J,I)=0.
101 CONTINUE
ENDIF
ENDIF
F1=0.0
F2=0.0
DO 200 I=1,NNOBJ
IF (METODO.GE.3) THEN
JINI=1
JFIM=NNOBJ
ELSE
JINI=I
JFIM=I
ENDIF
PART1=0.
PART2=0.
DO 201 J=JINI,JFIM
PART1=PART1+GRDP(I,J)*X(J)
PART2=PART2+GRDP(I,J)*XK(J)
201 CONTINUE
F1=F1+X(I)*(PART1-2.*PART2)
F2=F2+P(I)*X(I)
G(I)=P(I)+PART1-PART2
200 CONTINUE
F=0.5*F1+F2
ENDIF
ENDIF
ENTRY FUNCON
ENTRY MATMOD
RETURN
END

```

## ANEXO III

### Subrotina DERIVADAS

```
C*****
C*
C*          SISTEMA OTIMIZA - Subrotina DERIVADAS          *
C*
C*          Jurandir Zullo Junior - 04/01/90                *
C*
C*****
C
C
C
C      SUBROUTINE DERIVADAS
C
C      Definicao da dimensao maxima dos vetores e matrizes
C
C      PARAMETER DMX=120,DMX2=14400
C
C      Definicao das variaveis reais de precisao simples
C
C      REAL*4 XG(DMX),P(DMX),XX(DMX),XK(DMX),GRDP(DMX,DMX),INTP(DMX)
C
C      Definicao das variaveis inteiras
C
C      INTEGER I,J,ND
C
C      Definicao de areas comuns de dados
C
C      COMMON /XXCOMM/ XX
C      COMMON /XGCOMM/ XG
C      COMMON /IPCOMM/ INTP
C      COMMON /PCOMM/ P
C      COMMON /GPCOMM/ GRDP
C      COMMON /NDCOMM/ ND
C
C      Inicializacao de variaveis
C
C      DATA ((GRDP(I,J),J=1,DMX),I=1,DMX)/DMX2*0./
C      DATA P/DMX*0./,INTP/DMX*0./
C      IF (ND.EQ.0) THEN
C
C          Calculo do valor de g (integracao explicita)
C
C          INTP(1)=-5.*XG(1)
C          INTP(2)=-8.*XG(2)
C          INTP(3)=0.
```

### ANEXO III. Subrotina DERIVADAS

```

INTP(4)=-3.*XG(4)
INTP(5)=-6.*XG(5)
INTP(6)=-3.*XG(6)
INTP(7)=3.*XG(7)
INTP(8)=27714711.39*(XX(9)**(-0.869565))*(XG(8)**(-1.173913))
INTP(9)=677.2879336*(XX(8)**(-0.434783))*(XG(9)**(-1.173913))
INTP(10)=20.*XG(10)
INTP(11)=35.*XG(11)
INTP(12)=0.
INTP(13)=0.5*XG(13)
INTP(14)=0.5*XG(14)
INTP(15)=0.
INTP(16)=0.

```

ENDIF

IF (ND.NE.2) THEN

C  
C  
C

Calculo do gradiente da funcao g

```

P(1)=-5.
P(2)=-8.
P(3)=0.
P(4)=-3.
P(5)=-6.
P(6)=-3.
P(7)=3.
P(8)=-32534660.*(XX(9)**(-0.869565))*(XG(8)**(-2.173913))
P(9)=-795.07711*(XX(8)**(-0.434783))*(XG(9)**(-2.173913))
P(10)=20.
P(11)=35.
P(12)=0.
P(13)=0.5
P(14)=0.5
P(15)=0.
P(16)=0.

```

ENDIF

IF (ND.GE.2) THEN

C  
C  
C

Calculo do hessiano da funcao g

```

GRDP(8,8)=70727520.*(XX(9)**(-0.869575))*(XG(8)**(-3.173913))
GRDP(8,9)=28291002.*(XX(9)**(-1.869575))*(XG(8)**(-2.173913))
GRDP(9,8)=345.686*(XX(8)**(-1.434783))*(XG(9)**(-2.173913))
GRDP(9,9)=1728.4285*(XX(8)**(-0.434783))*(XG(9)**(-3.173913))

```

ENDIF

RETURN

END

## ANEXO IV

### Arquivo OTIMIZA.DAT

AGROIND

1

0.

5.

5

50

100

100

0.0001

0

0

+1.0E+20

-1.0E+20

0

8,16,16

30

1,1,-1.

1,2,-1.

1,10,-1.

1,11,-1.

2,3,-1.

2,4,-1.

2,5,-1.

2,10,-6.

2,11,-9.

2,12,-.5

2,15,-20.

2,16,-7.

3,15,-25.

3,16,-5.

4,10,70.

4,11,100.

4,12,-1.

5,12,1.

5,13,-1.

5,14,1.

5,15,-25.

5,16,-10.

6,6,-1.

6,7,1.

6,13,1.

6,14,-1.

7,8,-1.

7,15,1.

#### ANEXO IV. Arquivo OTIMIZA.DAT

8,9,-1.  
8,16,1.  
1  
3,-15000.  
15  
1,-600.  
2,-400.  
3,-4000.  
4,-3000.  
6,0.  
7,0.  
8,0.  
9,0.  
10,0.  
11,0.  
12,0.  
13,0.  
14,0.  
15,0.  
16,0.  
5  
1,0.  
2,0.  
3,0.  
4,0.  
5,0.  
2  
8,100.  
9,100.  
0

## ANEXO V

### Arquivo SPECS.MNS

```
BEGIN AGROIND
ROWS= 10
COLUMNS= 20
ELEMENTS= 55
LOWER BOUND=-0.1E+21
UPPER BOUND= 0.1E+21
SCALE=YES
SOLUTION=NO
NONLINEAR VARIABLES= 16
SUPERBASICS LIMIT= 17
HESSIAN DIMENSION= 17
LINESEARCH TOLERANCE= 0.1E-03
LOG FREQUENCY=0
SUPPRESS PARAMETERS
MINIMIZE
OBJECTIVE=OBJ
RHS=RHS1
BOUNDS=BOUND1
MPS FILE=25
END
```



# ANEXO VI

## Arquivo MPS.MNS

NAME	AGROIND	
ROWS		
G L 1		
G L 2		
G L 3		
G L 4		
G L 5		
G L 6		
G L 7		
G L 8		
N OBJ		
COLUMNS		
X 1	L 1	-0.10000E+01
X 2	L 1	-0.10000E+01
X 3	L 2	-0.10000E+01
X 4	L 2	-0.10000E+01
X 5	L 2	-0.10000E+01
X 6	L 6	-0.10000E+01
X 7	L 6	0.10000E+01
X 8	L 7	-0.10000E+01
X 9	L 8	-0.10000E+01
X 10	L 1	-0.10000E+01
X 10	L 2	-0.60000E+01
X 10	L 4	0.70000E+02
X 11	L 1	-0.10000E+01
X 11	L 2	-0.90000E+01
X 11	L 4	0.10000E+03
X 12	L 2	-0.50000E+00
X 12	L 4	-0.10000E+01
X 12	L 5	0.10000E+01
X 13	L 5	-0.10000E+01
X 13	L 6	0.10000E+01
X 14	L 5	0.10000E+01
X 14	L 6	-0.10000E+01
X 15	L 2	-0.20000E+02
X 15	L 3	-0.25000E+02
X 15	L 5	-0.25000E+02
X 15	L 7	0.10000E+01
X 16	L 2	-0.70000E+01
X 16	L 3	-0.50000E+01
X 16	L 5	-0.10000E+02
X 16	L 8	0.10000E+01
RHS		
RHS1	L 3	-0.15000E+05

## ANEXO VI. Arquivo MPS.MNS

```
BOUNDS
UP BOUND1 X 1 0.00000E+00
LO BOUND1 X 1 -0.60000E+03
UP BOUND1 X 2 0.00000E+00
LO BOUND1 X 2 -0.40000E+03
UP BOUND1 X 3 0.00000E+00
LO BOUND1 X 3 -0.40000E+04
UP BOUND1 X 4 0.00000E+00
LO BOUND1 X 4 -0.30000E+04
UP BOUND1 X 5 0.00000E+00
LO BOUND1 X 6 0.00000E+00
LO BOUND1 X 7 0.00000E+00
LO BOUND1 X 8 0.00000E+00
LO BOUND1 X 9 0.00000E+00
LO BOUND1 X 10 0.00000E+00
LO BOUND1 X 11 0.00000E+00
LO BOUND1 X 12 0.00000E+00
LO BOUND1 X 13 0.00000E+00
LO BOUND1 X 14 0.00000E+00
LO BOUND1 X 15 0.00000E+00
LO BOUND1 X 16 0.00000E+00
ENDATA
```

## ANEXO VII

### Arquivo OTIMIZA.SAI

#### SISTEMA OTIMIZA - Saida dos Resultados

Jurandir Zullo Junior - 04/01/90

\*\*\*\*\*

#### PARAMETROS DE ENTRADA

Nome .....	AGROIND
Metodo.....	1(Diagonalizacao com FW/SPQ)
Cerca .....	0.000000
Relaxacao .....	5.000000
Iteracoes para Relaxacao .....	5
Numero maximo permitido	
de aproximacoes lineares/nao-lineares ..	50
de subproblemas .....	100
de pesquisas lineares .....	100
Precisao .....	0.000100
Frequencia de impressao	
das aproximacoes lineares/nao-lineares .	0
de cada subproblema .....	0
Limitante supremo (+infinito).....	0.10000E+21
Limitante infimo (-infinito).....	-0.10000E+21
Eco dos dados matriciais de entrada.....	0 (NAO)
Dimensoes do sistema	
- linhas.....	8
- colunas.....	16
- variaveis nao lineares.....	16
- elementos nao nulos de A.....	30
- elementos nao nulos de B.....	1
- limites inferiores distintos de -inf	15
- limites superiores distintos de +inf	5
Especificacoes adicionais .....	0

\*\*\*\*\*

#### PONTO INICIAL EFETIVAMENTE UTILIZADO

variavel	valor
X 1	-163.902435
X 2	0.000000
X 3	-3840.000000
X 4	-2880.000000
X 5	0.000000

# ANEXO VII. Arquivo OTIMIZA.SAI

X 6	11473.170898
X 7	0.000000
X 8	4.000000
X 9	4.000000
X 10	163.902435
X 11	0.000000
X 12	11473.170898
X 13	11473.170898
X 14	0.000000
X 15	0.000000
X 16	0.000000

\*\*\*\*\*

## SOLUCAO

variavel	valor
X 1	-47.069496
X 2	0.000000
X 3	-4000.000000
X 4	-3000.000000
X 5	0.000000
X 6	0.000000
X 7	3044.066406
X 8	253.159470
X 9	0.994476
X 10	47.069496
X 11	0.000000
X 12	3294.864990
X 13	0.000000
X 14	3044.066406
X 15	253.159470
X 16	0.994476

## Estatisticas

Total de	
aproximacoes lineares/nao-lineares ..	10
subproblemas .....	49
pesquisas lineares .....	73

Tempo de processamento (CPU) em segundos	
da utilizacao do MINOS .....	48.86000
das pesquisas lineares .....	0.03000

\*\*\*\*\*