

Tese de Doutorado

Fluxos de curvatura, soluções que se anulam em tempo finito
e comportamento assintótico.[†]

Rafael Rodrigo Ottoboni

IMECC - UNICAMP
Novembro/2011

[†] Este trabalho teve apoio financeiro da FAPESP 06/58861-8

Fluxos de curvatura, soluções que se anulam em tempo finito e comportamento assintótico

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Rafael Rodrigo Ottoboni** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de Setembro de 2011.



Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro

Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro.

Prof. Dr. Eugenio Tommaso Massa.

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva.

Prof. Dr. Pedro José Catuogno.

Prof. Dr. Sebastian Antonio Lorca Pizarro.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR ANA REGINA MACHADO – CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – UNICAMP

Ot8f	Ottoboni, Rafael Rodrigo, 1983- Fluxos de curvatura, soluções que se anulam em tempo finito e comportamento assintótico / Rafael Rodrigo Ottoboni. – Campinas, SP : [s.n.], 2011. Orientador: Marcelo da Silva Montenegro. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Análise matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Equações de evolução não-linear. 4. Geometria diferencial. 5. Fluxo de curvatura. I. Montenegro, Marcelo da Silva, 1967-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.
------	--

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Curvature flows, solutions quenching in finite time and asymptotic behavior

Palavras-chave em inglês:

Mathematical analysis
Partial differential equations
Nonlinear evolution equations
Differential geometry
Curvature flows

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

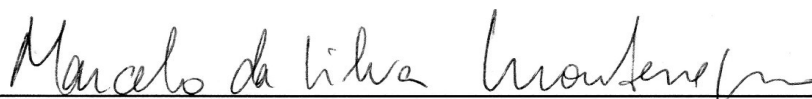
Marcelo da Silva Montenegro [Orientador]
Francisco Odair Vieira de Paiva
Pedro José Catuogno
Sebastian Antonio Lorca Pizarro
Eugenio Tommaso Massa

Data da defesa: 15-09-2011

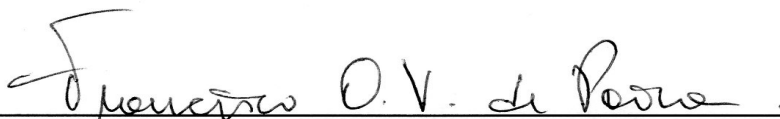
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 15 de setembro de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). MARCELO DA SILVA MONTENEGRO



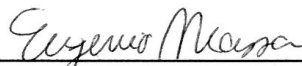
Prof(a). Dr(a). FRANCISCO ODAIR VIEIRA DE PAIVA



Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof(a). Dr(a). SEBASTIAN ANTONIO LORCA PIZARRO



Prof(a). Dr(a). EUGENIO TOMMASO MASSA

Agradecimentos

À minha família, por suas lições de amor, dedicação, trabalho, humildade e coragem.

Aos meus amigos, por momentos de alegria e de tristeza compartilhados.

Ao meu orientador, pelos seus ensinamentos, dedicação e paciência.

Ao IMECC-UNICAMP, por oferecer uma excelente infraestrutura e pesquisa de alto nível.

À Fapesp, pelo apoio financeiro.

Ao pessoal da informática, em especial ao Flávio Andrade e ao Fernando Barbosa, pelo serviço prestado no dia da apresentação e com os testes prévios

Aos professores da banca, em especial ao Prof. Sebastián, pelas dicas, sugestões e empenho para que tudo desse certo no dia da defesa.

Ao colegas de trabalho, por acreditarem e torcerem pelo sucesso do meu trabalho.

Resumo

Neste trabalho apresentamos resultados sobre o fluxo de curvatura média, Gauss e harmônica de superfícies de revolução sujeito a condições de fronteira do tipo Dirichlet, Neumann ou singular. Soluções de alguns dos fluxos de curvatura com alguma destas condições de fronteira ou se anulam em tempo finito ou existem globalmente no tempo convergindo a um segmento de reta.

Abstract

In this thesis we present results on mean curvature flow, Gaussian curvature flow and harmonic mean curvature flow subject to boundary conditions of Dirichlet type, Neumann or singular. Solutions to some of curvature flows with some of these boundary conditions quench in finite time or exist globally in time and converge to a straight line.

Notações

- $\mathcal{C}(D)$, espaço das funções reais contínuas em D .
- $\mathcal{C}^n(D)$, espaço das funções que possuem todas as derivadas até ordem n contínuas em D .
- $\mathcal{C}^{m,n}(D)$, espaço das funções que possuem todas as derivadas até ordem m com relação a primeira variável contínuas em D e todas as derivadas até ordem n com relação a segunda variável contínuas em D .
- $H^l(\overline{\Omega})$ é o espaço de Banach cujos os elementos são funções u contínuas em $\overline{\Omega}$ com derivadas até a ordem $[l]$ contínuas e

$$|u|_{\Omega}^{(l)} = \langle u \rangle_{\Omega}^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]} \langle u \rangle_{\Omega}^{(j)} < \infty,$$

$$\langle u \rangle_{\Omega}^{(0)} = |u|_{\Omega}^{(0)} = \max_{\Omega} |u| < \infty,$$

$$\langle u \rangle_{\Omega}^{(j)} = \sum_{(j)} |D_x^j u|_{\Omega}^{(0)} < \infty,$$

$$\langle u \rangle_{\Omega}^{(l)} = \sum_{\Omega}^{(l)} = \sum_{(l)} \langle D_x^{[l]} u \rangle_{\Omega}^{l-[l]} < \infty.$$

- $H^{l,l/2}(\overline{\Omega} \times (0, T))$ é o espaço de Banach de todas as funções contínuas $u(t, x)$ em $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times (0, T)$ que tem todas as derivadas $D_t^r D_x^s$ contínuas para $2r + s < l$ e

$$|u|_{Q_T}^{(l)} = \langle u \rangle_{Q_T}^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]} \langle u \rangle_{Q_T}^{(j)} < \infty,$$

$$\langle u \rangle_{Q_T}^{(0)} = |u|_{Q_T}^{(0)} = \max_{Q_T} |u| < \infty,$$

$$\langle u \rangle_{Q_T}^{(j)} = \sum_{2r+s=j} |D_t^r D_x^s u|_{Q_T}^{(0)} < \infty,$$

$$\langle u \rangle_{Q_T}^{(l)} = \langle u \rangle_{x, Q_T}^{(l)} + \langle u \rangle_{t, Q_T}^{(l/2)} < \infty,$$

$$\langle u \rangle_{x, Q_T}^{(l)} = \sum_{2r+s=[l]} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_x^{(l-[l])} < \infty,$$

$$\langle u \rangle_{t, Q_T}^{(l/2)} = \sum_{0 < l-2r-s < 2} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_{t, Q_T} < \infty,$$

$$\langle u \rangle_{x, Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{((x,t), (x',t)) \in Q_T, |x-x'| \leq \rho_0} \frac{|u(x,t) - u(x',t)|}{|x-x'|^\alpha} < \infty, 0 < \alpha < 1,$$

$$\langle u \rangle_{t, Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{((x,t), (x,t')) \in Q_T, |t-t'| \leq \rho_0} \frac{|u(x,t) - u(x,t')|}{|t-t'|^\alpha} < \infty, 0 < \alpha < 1.$$

- Para $\alpha \in (0, 1]$, $H^{2+\alpha}(\Omega \times (0, T)) = \{u \mid |u|_{2+\alpha} < \infty\}$, onde

$$|u|_{2+\alpha}; \Omega = \sum_{\beta+2j \leq 2} \sup_{\Omega} |D_x^\beta D_t^j| + [u]_{2+\alpha} + \langle u \rangle_{2+\alpha},$$

com

$$[u]_{2+\alpha} = \sum_{\beta+2j=2} \sup_{X \neq Y} \frac{|D_x^\beta D_t^j(X) - D_x^\beta D_t^j(Y)|}{|X - Y|^\alpha},$$

onde $|X| = \max\{|x|, |t|^{\frac{1}{2}}\}$ e

$$\langle u \rangle_{2+\alpha} = \sup_{(x,t) \neq (x,s)} \frac{|D_x u(x,t) - D_x u(x,s)|}{|t-s|^{\frac{1+\alpha}{2}}}.$$

Sumário

1	Introdução	1
1.1	História e Motivações	1
1.1.1	Fluxo de curvatura média	2
1.1.2	Fluxo de curvatura de Gauss	3
1.1.3	Fluxo de curvatura média inversa	3
1.1.4	Fluxo de curvatura média harmônica	4
1.2	Os problemas estudados	4
1.2.1	Resultados obtidos nesta tese	9
1.2.2	Resultados conhecidos	12
1.3	Comparações dos Resultados	14
2	Fluxo de curvatura média	17
2.1	Motivação	18
2.2	Fluxo de curvatura média com condição de fronteira do tipo Neumann	18
2.2.1	Existência e Regularidade	19
2.2.2	Anulamento e Estimativas	21
2.2.3	Interpretação dos Resultados	28
2.3	Equação curvatura média com condição de fronteira do tipo Dirichlet .	28
2.3.1	Existência e Regularidade	29
2.3.2	Anulamento e Estimativas	31
2.3.3	Interpretação dos Resultados	45

2.4	Fluxo de curvatura média com condição de fronteira singular	45
2.4.1	Existência e Regularidade	46
2.4.2	Anulamento e Estimativa	47
2.4.3	Interpretação dos Resultados	54
3	Fluxo de curvatura de Gauss	55
3.1	Motivação	56
3.2	Fluxo de curvatura de Gauss com condição de fronteira do tipo Neumann	56
3.2.1	Existência e Regularidade	57
3.2.2	Comportamento Assintótico	58
3.2.3	Interpretação dos Resultados	60
3.3	Fluxo de curvatura de Gauss com condição de fronteira do tipo Dirichlet	61
3.3.1	Existência e Regularidade	61
3.3.2	Comportamento Assintótico	63
3.3.3	Interpretação dos Resultados	65
3.4	Fluxo de curvatura de Gauss com condição de fronteira singular	65
3.4.1	Existência e Regularidade	66
3.4.2	Comportamento Assintótico(Condição inicial não convexa) . . .	68
3.4.3	Anulamento e Estimativas(Condição inicial convexa)	70
3.4.4	Interpretação dos Resultados	77
4	Fluxo de curvatura Harmônica	79
4.1	Motivação	79
4.2	Fluxo de curvatura harmônica com condição de fronteira do tipo Dirichlet	80
4.2.1	Existência e Regularidade	80
4.2.2	Comportamento Assintótico	82
4.2.3	Interpretação dos Resultados	84
4.3	Fluxo de curvatura harmônica com condição de fronteira singular . . .	84
4.3.1	Existência e Regularidade	85
4.3.2	Anulamento e Estimativas	88
4.3.3	Interpretação dos Resultados	94
5	Apêndices	95
5.1	Apêndice A: Teoremas de Existência	95

5.2	Apêndice B: Princípios do Máximo e da Comparação	98
5.3	Apêndice C: Método de sub e supersolução	100
5.4	Apêndice D: Teoria de Semigrupos	105
5.5	Apêndice E: Formas Fundamentais da Geometria Diferencial	106
5.5.1	Primeira Forma Fundamental da Geometria Diferencial	106
5.5.2	Segunda Forma Fundamental da Geometria Diferencial	108
5.6	Apêndice F: Outros resultados importantes	109
Referências Bibliográficas		111

Introdução

1.1 História e Motivações

Sejam $M^n, n \geq 1$, uma variedade Riemanniana n -dimensional e $F_0 : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão suave de M^n em uma hipersuperfície no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Dizemos que $M_0 = F_0(M^n)$ evolui através de um fluxo de curvatura se existe uma família $F(t, \cdot)$ de imersões suaves, com hipersuperfícies correspondentes $M_t = F(t, \cdot)$, satisfazendo

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, p) = -f(t, p)\nu(t, p), & p \in M^n, \\ F(0, \cdot) = F_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $f(t, p)$ e $\nu(t, p)$ são respectivamente alguma curvatura e vetor normal exterior à hipersuperfície M_t em $F(t, p)$.

Definindo por $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ as curvaturas principais da hipersuperfície M_t , temos que quando

$$f = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = -H = -\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n}$$

o problema (1.1) é chamado de fluxo de curvatura média, quando

$$f = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = -K = -\lambda_1 \dots \lambda_n$$

o problema (1.1) é chamado de fluxo de curvatura de Gauss, quando

$$f = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = -\frac{1}{H}$$

o problema (1.1) é chamado de fluxo de curvatura média inversa e quando

$$f = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = -\frac{K}{H}$$

o problema (1.1) é chamado de fluxo de curvatura média harmônica.

Tais fluxos de curvatura tem sido estudados por muitos autores. Nesta seção iremos apresentar alguns resultados conhecidos sobre eles e o que motivou a estudá-los.

1.1.1 Fluxo de curvatura média

Uma motivação para este tipo de fluxo é encontrada em [9], em que é estudada uma superfície que se encontra entre os estados físicos, líquido e sólido, movendo-se a uma velocidade v proporcional a curvatura média. Se esta superfície for convexa, então em [51], foi mostrado que permanece convexa para todo tempo, e se encolhe a um ponto. Entretanto, uma superfície não convexa pode se dividir em outras duas. Por exemplo, quando constituída de duas esferas grandes e um tubo ligando-as, um haltere. Em [44] foi mostrado que as duas esferas encolhem mais devagar do que o tubo que as liga.

Em [19] e [29], os autores estudaram o fluxo de curvatura média em superfícies de revolução. Este fluxo neste tipo de superfície se reduz a uma equação de evolução em uma dimensão. Desta forma, os autores nestes trabalhos conseguiram descrever em detalhes como a evolução de superfícies via fluxo de curvatura média ocorre. Uma solução u da equação de evolução que representa o fluxo de curvatura média em superfícies de revolução existe até um tempo finito T , com $u(t, x) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow T^-$ somente em um único ponto x e com alguma de suas derivadas explodindo neste ponto.

Em superfícies mais gerais, Huisken provou em [51] que a forma limite de uma superfície inicial convexa é a de uma esfera quando a evolução se dá pelo fluxo de curvatura média. Extraímos o seguinte teorema de [51].

Teorema 1.1. *Seja $n \geq 2$ e suponhamos que os autovalores da segunda forma fundamental de M_0 são estritamente positivos. Então, a equação de evolução (1.1), com $f = H$, tem uma solução suave em um intervalo de tempo finito $0 \leq t < T$ que converge a um ponto P quando $t \rightarrow T$.*

1.1.2 Fluxo de curvatura de Gauss

Em [33], o fluxo de curvatura de Gauss foi estudado com a motivação de que este modela a mudança no formato de uma pedra ao se chocar contra uma superfície. Supõe que a pedra é sujeita a colisões em todas as direções com intensidade uniforme. Neste artigo o autor conjectura que, independentemente da forma inicial, a forma limite seria a de uma esfera. Tal conjectura foi provada em [5] usando idéias de [79] que prova a existência, unicidade e convergência de uma hipersuperfície convexa fechada a um ponto. O seguinte teorema foi demonstrado em [5].

Teorema 1.2. *Seja $M_0 = x_0(M)$ uma superfície em $\mathbb{R}^3$ compacta, suave e estritamente convexa, dada por um mergulho x_0 . Então, existe uma única solução suave $\{M_t = x(M, t)\}$ da equação (1.1), caso $f = K$, para $t \in [0, T)$, onde $T = \frac{V(M_0)}{4\pi}$ e $V(M_0)$ é o volume da região formada por M_0 . Além disso as superfícies M_t são estritamente convexas e converge a um ponto $q \in \mathbb{R}^3$ quando $t \rightarrow T$.*

Em superfícies de revolução, Jeffres prova em [61], que independentemente da convexidade de uma superfície de revolução inicial esta evolui pelo fluxo de curvatura de Gauss a um segmento de reta ou a um cilindro em tempo infinito.

1.1.3 Fluxo de curvatura média inversa

O interesse no estudo do fluxo de curvatura média inverso vem do papel que ele desempenha na interpretação geométrica de alguns fatos da Teoria da Relatividade relacionados com o conceito de massa quase local de Hawking, conforme [56]. Neste mesmo artigo foi introduzida a noção de solução fraca para este fluxo com a restrição de que a hipersuperfície inicial fosse de curvatura média positiva. Com a hipótese adicional de limitação por baixo da curvatura média da hipersuperfície inicial, o artigo [54], mostra resultados sobre regularidade do fluxo de curvatura média inversa.

1.1.4 Fluxo de curvatura média harmônica

Este fluxo trata-se de uma equação totalmente não linear que torna-se degenerada quando $K \rightarrow 0$ e singular quando $H \rightarrow 0$. Em [3] foi mostrado a existência de solução suave para este tipo de fluxo com a hipótese de que a hipersuperfície inicial M_0 fosse convexa.

Teorema 1.3. *Seja M_0 uma hipersuperfície compacta em $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^{2,1}$ tal que $H(M_0) > 0$. Então, existe um tempo $T > 0$ tal que a deformação desta hipersuperfície pelo fluxo de curvatura de Gauss admite solução única M_t de classe $\mathcal{C}^{2,1}$ tal que $H(M_t) > 0$, para $t \in [0, T)$.*

Também neste artigo, Andrews mostra que a solução do fluxo curvatura média harmônica evolui a um ponto em um tempo finito T_0 . Mais tarde, Dieter estabeleceu em [18] a existência local para uma classe mais geral de fluxos. Em [13], foi estudado o fluxo de curvatura média harmônica de superfícies de revolução e com este estudo os autores concluíram que este tipo de fluxo não se comporta como o fluxo de curvatura média no sentido de que uma superfície do tipo “halter” se estrangula quando fazemos esta evoluir pelo fluxo curvatura média, vide [19], e não quando esta superfície evolui pelo fluxo curvatura média harmônica.

1.2 Os problemas estudados

Considere um conjunto de superfícies formado pela rotação de uma curva em torno do eixo Ox . Para cada t a superfície é

$$\sigma(t, \theta, x) = (x, u(t, x) \cos \theta, u(t, x) \sin \theta)$$

Derivando-se obtemos

$$\sigma_t = (0, u_t \cos \theta, u_t \sin \theta),$$

$$\sigma_\theta = (0, -u \sin \theta, u \cos \theta)$$

e

$$\sigma_x = (1, u_x \cos \theta, u_x \sin \theta).$$

O vetor normal à superfície $\sigma(t, \theta, x)$ é $\vec{n} = \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + (u_x)^2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + (u_x)^2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + (u_x)^2}} \right)$.

Derivando-se mais uma vez temos

$$\sigma_{\theta\theta} = (0, -u \cos \theta, -u \sin \theta),$$

$$\sigma_{\theta x} = (0, -u_x \sin \theta, u_x \cos \theta)$$

e

$$\sigma_{xx} = (0, u_{xx} \cos \theta, u_{xx} \sin \theta).$$

Assim conseguimos determinar os coeficientes da primeira forma fundamental da geometria diferencial (5.13) (vide Apêndice E)

$$E = \langle \sigma_\theta, \sigma_\theta \rangle = u^2,$$

$$F = \langle \sigma_\theta, \sigma_x \rangle = 0,$$

$$G = \langle \sigma_x, \sigma_x \rangle = 1 + (u_x)^2$$

e também os coeficientes da segunda forma fundamental da geometria diferencial (5.14) (vide Apêndice F)

$$e = \langle \sigma_{\theta\theta}, \vec{n} \rangle = -\frac{u}{\sqrt{1 + (u_x)^2}},$$

$$f = \langle \sigma_{\theta x}, \vec{n} \rangle = 0,$$

$$g = \langle \sigma_{xx}, \vec{n} \rangle = \frac{u_{xx}}{\sqrt{1 + (u_x)^2}}.$$

As curvaturas média (H), de Gauss (K), harmônica (A) e média inversa (H^{-1}) são dadas pelas expressões

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{1}{2\sqrt{1 + (u_x)^2}} \left(-\frac{1}{u} + \frac{u_{xx}}{1 + (u_x)^2} \right),$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{u_{xx}}{u(1 + (u_x)^2)^2},$$

$$A = 2\frac{eg - f^2}{eG - 2fF + Eg} = -2\frac{u_{xx}}{(1 + (u_x)^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{uu_{xx} - (1 + (u_x)^2)} \right),$$

e

$$H^{-1} = 2\frac{EG - F^2}{eG - 2fF + Eg} = 2\frac{(1 + (u_x)^2)^{\frac{3}{2}}u}{uu_{xx} - (1 + (u_x)^2)}.$$

Assim as equações de fluxo curvatura média, Gauss, harmônica e média inversa respectivamente, são dadas pelas equações abaixo:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -2H\vec{n},$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -K\vec{n},$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{1}{2}A\vec{n},$$

e

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{1}{2}H^{-1}\vec{n}$$

quando γ for uma superfície de revolução, estas equações podem ser reescritas da seguinte forma:

$$u_t = \underbrace{\frac{u_{xx}}{1 + (u_x)^2} - \frac{1}{u}}_{\text{Fluxo de curvatura média}}$$

Fluxo de curvatura média

$$u_t = \underbrace{\frac{u_{xx}}{u(1 + (u_x)^2)^{\frac{3}{2}}}}_{\text{Fluxo de curvatura de Gauss}}$$

Fluxo de curvatura de Gauss

$$u_t = \underbrace{\frac{u_{xx}}{-uu_{xx} + (1 + (u_x)^2)}}_{\text{Fluxo de curvatura harmônica}}$$

Fluxo de curvatura harmônica

e

$$u_t = \frac{(1 + (u_x)^2)^2 u}{u_{xx}u - (1 + (u_x)^2)}.$$

Fluxo de curvatura média inversa

O objetivo do nosso trabalho foi estudar os seguintes problemas de valor inicial e de fronteira:

- Fluxo de curvatura média em superfícies de revolução com as condições de fronteira: Dirichlet (1.2), Neumann (1.3) e Singular (1.4),

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{1 + (u_x)^2} - \frac{1}{u}, & x \in (0, a), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u(t, a) = 1, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, a], \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{1 + (u_x)^2} - \frac{1}{u}, & x \in (0, a), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u_x(t, a) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, a], \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{1 + (u_x)^2} - \frac{1}{u}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u_x(t, 1) = -\frac{1}{u(t, 1)^\beta}, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (1.4)$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$.

- Fluxo de curvatura de Gauss em superfícies de revolução com as condições de fronteira: Dirichlet (1.5), Neumann (1.6) e Singular (1.7),

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{u(1 + (u_x)^2)^{\frac{3}{2}}}, & x \in (a, b), t > 0, \\ u(t, a) = u_0(a), u(t, b) = u_0(b), & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [a, b], \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{u(1 + (u_x)^2)^{\frac{3}{2}}}, & x \in (a, b), t > 0, \\ u_x(t, a) = 0, u_x(t, b) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [a, b], \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{u(1 + (u_x)^2)^{\frac{3}{2}}}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u_x(t, 1) = -\frac{1}{u(t, 1)^\beta}, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (1.7)$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$.

- Fluxo de curvatura harmônica em superfícies de revolução com as condições de fronteira Dirichlet (1.8) e Singular (1.9)

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{-uu_{xx} + (u_x)^2 + 1}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u(t, 1) = 1, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{-uu_{xx} + (u_x)^2 + 1}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u_x(t, 1) = -\frac{1}{u(t, 1)^\beta}, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (1.9)$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$.

Não iremos estudar o fluxo de curvatura média inversa e o fluxo de curvatura harmônica com condição de fronteira tipo Neumann.

Alguns destes problemas já foram estudados por alguns pesquisadores da área e outros são novos. Nesta tese iremos apresentar tanto os resultados novos quanto os resultados já conhecidos. Isto será feito porque temos como objetivo fazer um estudo geral de alguns fluxos em superfícies de revolução com as três condições de fronteira Dirichlet, Neumann e Singular. Nesta introdução iremos apresentar os principais resultados do trabalho, dividindo-os em resultados obtidos nesta tese e resultados conhecidos. As demonstrações de tais resultados encontram-se no corpo da tese.

1.2.1 Resultados obtidos nesta tese

Fluxo de Curvatura Média

Resultados sobre o problema (1.4)

O primeiro resultado sobre o problema (1.4) diz sobre a existência e o anulamento em tempo finito de sua solução. Para mostrarmos a existência de solução, primeiramente estudamos um problema auxiliar que tem solução pelo Teorema 5.2 do Apêndice A e provamos que a solução do problema auxiliar é também solução do problema (1.4) (demonstração vide Teorema 2.13 da seção 2.4). Para mostrar o anulamento, usamos técnicas similares às técnicas utilizadas em [17] para se provar o anulamento em tempo finito de outro tipo de problema (demonstração vide Teorema 2.15 da seção 2.4).

Teorema 1.4. *Se $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, 1])$, então existe solução para o problema (1.4) em $\mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times [0, 1])$, para algum $T < \infty$ e esta se anula em T somente em $x = 1$.*

O segundo resultado sobre o problema (1.4) exhibe o comportamento de sua solução próximo do ponto e do tempo de anulamento (demonstração vide Proposição 2.16 da seção 2.4). A técnica utilizada foi aplicar o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B como em [29] que estuda os problemas (1.2) e (1.3).

Proposição 1.5. *Se $u_0 \in \mathcal{C}^3([0, 1])$, então a solução u do problema (1.4) satisfaz as seguintes estimativas:*

$$a) \ u(t, x) \geq C_1(T - t)^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, T),$$

$$b) \ -u_x(t, x) \leq C_2(T - t)^{\frac{-\beta}{2}} \text{ para todo } x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, T),$$

onde C_1, C_2 são constantes dependendo apenas β e T , o tempo de anulamento.

Fluxo de Curvatura de Gauss

Resultados sobre (1.7)

O primeiro resultado a seguir versa sobre a existência de solução global no tempo do problema (1.7) para dados iniciais não convexos e que a solução neste caso converge

a um segmento de reta quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, este mesmo resultado mostra que, para dados iniciais convexos, existe solução de (1.7) que se anula em tempo finito (demonstração vide Teoremas 3.5, 3.7 e 3.8 da seção 3.4). Para a existência de solução, usamos técnicas similares as das referências [16], [17], [61] que provam a existência de solução para outros tipos de problemas.

Teorema 1.6. *Se $u_0 \in C^2([0, 1])$, então o problema (1.7) admite solução em $\mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times [0, 1])$. E mais,*

- a) *Se u_0 for um dado inicial não convexo, então a solução de (1.7) é definida para todo t e $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x)$ é um segmento de reta.*
- b) *A solução do fluxo de curvatura de Gauss (1.7) com dado inicial convexo se anula em tempo finito.*

O segundo resultado sobre o problema (1.7) é sobre o comportamento de sua solução próximo do tempo e ponto de anulamento. Para a demonstração deste resultado, cuja a demonstração pode ser encontrada na seção 3.4 Teorema 3.16, utilizamos o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B.

Teorema 1.7. *Se u_0 for um dado inicial convexo, positivo e $u_0 \in C^3([0, 1])$, então existe uma constante C_1 tal que*

$$u(t, 1) \leq C_1(T - t)^{\frac{1}{2(\beta+1)}}, \text{ para todo } t \in [0, T].$$

Fluxo de Curvatura Harmônica

Resultados sobre (1.8)

O resultado sobre o problema (1.8) versa sobre existência global no tempo de sua solução e o comportamento desta solução quando $t \rightarrow \infty$. Para a existência de solução, primeiramente estudamos um problema auxiliar que tem solução pelo Teorema 5.2 do Apêndice A e depois provamos que a solução do problema auxiliar é também solução do problema (1.8) (demonstração completa vide Teorema 4.1 da seção 4.2). Para mostrar o comportamento assintótico utilizamos um funcional como na referência [61] onde é estudado o fluxo de curvatura de Gauss nos casos Dirichlet e Neumann (demonstração vide Teorema 4.2 da seção 4.2).

Teorema 1.8. *Se o dado inicial $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, 1])$, então existe solução para o problema (1.8) em $\mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times [0, 1])$. E mais, se u_0 for convexo, então a solução converge para um segmento de reta quando $t \rightarrow \infty$.*

Resultados sobre (1.9)

O primeiro resultado sobre o problema (1.9) versa sobre a existência e anulamento em tempo finito de sua solução. Para provarmos a existência usamos o método de sub e supersolução (demonstração vide 4.6 da seção 4.3) e para o anulamento em tempo finito fizemos comparação com um problema que tem solução explícita se anulando em tempo finito e aplicamos o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B (demonstração completa vide 4.7 da seção 4.3).

Teorema 1.9. *Se o dado inicial $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, 1])$, então o problema (1.9) admite solução em $\mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times [0, 1])$. Além disso, se o dado inicial for convexo, então a solução de (1.9) se anula em tempo finito somente em $x = 1$.*

Os dois últimos resultado sobre o problema (1.9) são sobre o comportamento da solução de (1.9) próximo do ponto e do tempo de anulamento (demonstrações Proposições 4.8 e 4.9 da seção 4.3). Para obtermos tais estimativas, usamos o Princípio do Máximo como em [30].

Proposição 1.10. *Se $u_0 \in \mathcal{C}^5([0, 1])$ e $u_0^{(i)} \leq 0, i = 1, \dots, 5$, são não positivas, então obtemos as seguintes estimativas:*

$$a) \ u(t, x) \geq C_1(T - t)^\lambda \text{ para todo } x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, T],$$

$$b) \ -u_x \leq C_2(T - t)^{\lambda - \frac{1}{2}} \text{ para todo } x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, T],$$

onde C_1, C_2 são constantes dependendo apenas de β e u_0 , $\lambda = \frac{1}{2(\beta+1)}$ e T o tempo de anulamento.

Proposição 1.11. *Se u_0 estiver nas condições da Proposição anterior, então obtemos as seguintes estimativas:*

$$a) \ u(t, 1) \leq C_3(T - t)^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, T],$$

$$b) \ -u_t \leq C_4(T - t)^{-\lambda} \text{ para todo } x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, T],$$

onde C_3, C_4 são constantes dependendo apenas de β e u_0 .

1.2.2 Resultados conhecidos

Fluxo de curvatura média

Os resultados sobre os problemas (1.2) e (1.3) enunciados abaixo, são retirados das referências [19] e [29]. Tais referências não tratam da questão de existência de solução para tal problema. Nesta tese melhoramos os trabalhos de [19] e [29] mostrando a existência e a regularidade de solução para os problemas (1.2) e (1.3).

Resultados sobre (1.2)

O primeiro resultado sobre (1.2) versa sobre o anulamento em tempo finito da solução de (1.2) cuja demonstração pode ser encontrada no corpo da tese Teorema 2.11 da seção 2.3.

Teorema 1.12. *Para cada a , sejam $w_1(x, a)$ e $w_2(x, a)$ soluções do problema estacionário associado a (1.2). Se o dado inicial $u_0 \in \mathcal{C}^3([0, a])$ e for não negativo, então a solução de (1.2) satisfaz as seguintes propriedades:*

- a) *Se $a \leq a_0$ e $0 < u_0(x) \leq w_2(x, a)$, $u_0(0) < w_2(0, a)$, então a solução do fluxo de curvatura média (1.2) se anula em tempo finito somente em $x = 0$.*
- b) *Se $a < a_0$ e $w_2(x, a) \leq u_0(x) \leq 1$, $u_0(x) \neq w_2(x, a)$, então a solução de (1.2) converge para $w_1(x, a)$ quando $t \rightarrow \infty$.*
- c) *Se $a > a_0$ e $0 < u_0(x) \leq 1$, então a solução de (1.2) se anula em tempo finito somente em $x = 0$.*

O segundo resultado, cuja a demonstração se encontra na seção 2.3 Teorema 2.12, mostra como a solução de (1.2) se comporta próximo do tempo de anulamento T .

Teorema 1.13. *Se u_0 satisfaz as condições do Teorema anterior. Então, existem constantes L_1, L_2 e L_3 tais que a solução u de (1.2) satisfaz as seguintes condições:*

- a) $L_1 \leq u(t, x)(T - t)^{-\frac{1}{2}}$, para $x \in [0, a]$ e $0 < t < T$.
- b) $u(t, 0)(T - t)^{-\frac{1}{2}} \leq L_2$, para $0 < t < T$.
- c) $-u_t(t, x)(T - t)^{\frac{1}{2}} \leq L_3$, para $x \in [0, a]$ e $0 < t < T$.

Resultados sobre (1.3)

O primeiro resultado sobre o fluxo (1.3) diz sobre o anulamento em tempo finito de sua solução. A demonstração pode ser encontrada na seção 2.2 Teorema 2.3.

Teorema 1.14. *Se $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, 1])$, $u'_0 \neq 0$ e suas derivadas $u_0^{(j)}$, $j = 1, 2$, são não negativas, então u se anula em tempo finito somente em $x = 0$.*

O segundo resultado sobre (1.3) exhibe o comportamento de sua solução próximo do tempo de anulamento T e do ponto de anulamento $x = 0$ (demonstração vide Teorema 2.5 da seção 2.2).

Teorema 1.15. *Se $u_0 \in \mathcal{C}^5([0, 1])$, $u'_0 \neq 0$ e suas derivadas $u_0^{(j)}$, $j = 1, \dots, 5$, são não negativas, então existem constantes K_1, K_2, K_3 tais que:*

- a) $K_1 \leq u(t, x)(T - t)^{-\frac{1}{1+\beta}}$, para $x \in [0, a]$ e $0 < t < T$.
- b) $u(t, 0)(T - t)^{-\frac{1}{1+\beta}} \leq K_2$, para $0 < t < T$.
- c) $-u_t(t, x)(T - t)^{\frac{\beta}{1+\beta}} \leq K_3$, para $x \in [0, a]$ e $0 < t < T$.

Fluxo de curvatura de Gauss

Na referência [61] são estudados os problemas (1.5) e (1.6). Os resultados obtidos neste artigo são a existência, regularidade e comportamento assintótico de solução para os problemas (1.5) e (1.6). Os resultados são enunciados abaixo e detalhados no corpo da tese.

Resultados sobre (1.5)

O resultado sobre o fluxo (1.5) garante existência de solução globalmente no tempo para este tipo de fluxo e mostra o comportamento assintótico desta solução quando $t \rightarrow \infty$ (demonstração vide Teoremas 3.3 e 3.4 da seção 3.3).

Teorema 1.16. *Se u_0 é uma função positiva em $H^{2+\alpha}(a, b)$ com segundas derivadas contínuas até o bordo satisfazendo*

$$u''_0(a) = u''_0(b) = 0.$$

Então existe uma solução $u \in H^{2+\alpha}((0, 1) \times (0, \infty))$ para o problema (1.5). A solução é suave para $t > 0$ e quando $t \rightarrow \infty$ $u(t, \cdot)$ converge para um segmento de reta unindo $(a, u_0(a)), (b, u_0(b))$.

Resultados sobre (1.6)

Este resultado, cuja a demonstração se encontra no corpo da tese Teoremas 3.1 e 3.2 da seção 3.2, versa sobre a existência de solução do fluxo de curvatura de Gauss com condição de fronteira do tipo Neumann.

Teorema 1.17. *Se u_0 é uma função positiva em $H^{2+\alpha}(a, b)$ com segundas derivadas contínuas até o bordo. Suponhamos que a primeira derivada de u_0 assume valor zero no pontos $x = a$ e $x = b$. Então existe uma solução $u \in H^{2+\alpha}((a, b) \times (0, \infty))$ para o problema (1.6). A solução é suave para $t > 0$ e $u(t, \cdot)$ converge para um segmento de reta horizontal quando $t \rightarrow \infty$.*

1.3 Comparações dos Resultados

Nesta seção iremos fazer uma comparação entre resultados já existentes e os resultados obtidos nesta tese (novos).

Em [61], a autora mostra a existência e regularidade de solução para os problemas (1.5) e (1.6), porém nos artigos [19] e [29] a questão de existência e regularidade de solução para os problemas (1.2) e (1.3) não é tratada. Nesta tese melhoramos os trabalhos [19] e [29] provando a existência e regularidade de solução para os problemas (1.2) e (1.3).

Na dissertação de mestrado [73] estudamos, com base em [30], o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = -[u(1, t)]^{-\beta}, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (1.10)$$

onde $\beta > 0$ e u_0 é suficientemente suave. Nesta dissertação foi provada a existência de solução para o problema (1.10) via método de sub e supersolução, o anulamento em

tempo finito T da solução de (1.10) somente em $x = 1$ e obtido o comportamento da solução próximo do ponto $x = 1$ e do tempo T através das seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} K_1(1-x)^2 &\leq u(x, t) \leq K_2(1-x)^{2\lambda}, \\ K_3(T-t)^\lambda &\leq u(1, t) \leq K_4(T-t)^\lambda \end{aligned}$$

e

$$-(T-t)^{1-\lambda}u_t(x, t) \leq K_5,$$

para $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T)$,

onde K_1, K_2, K_3, K_4 e K_5 são constantes positivas e

$$\lambda = \frac{1}{2(\beta + 1)}.$$

Este trabalho de mestrado juntamente com as referências [19] e [29] nos motivou a estudar os fluxos de curvatura média, de Gauss e harmônica com a condição de fronteira do problema (1.10). Nesta tese provamos a existência e regularidade de solução para os problemas (1.4), (1.7) e (1.9), o anulamento em tempo finito destas soluções para dados iniciais convexos e obtivemos algumas estimativas parecidas com as obtidas acima mas para as soluções de (1.4), (1.7) e (1.9) perto do seus tempos e seus pontos de anulamento. A existência e regularidade, o anulamento e estimativas das soluções do problemas (1.4), (1.7) e (1.9) para dados iniciais convexos são novos.

Em [61], a autora demonstra, sem qualquer hipótese sobre a convexidade da superfície inicial, tanto o fluxo (1.5) quanto o fluxo (1.6) existem globalmente no tempo e convergem, quando $t \rightarrow \infty$, para um segmento de reta. Nesta tese, com a hipótese de não convexidade no dado inicial, mostramos que o fluxo (1.7) tem o mesmo comportamento. A existência, regularidade e comportamento assintótico da solução do problema (1.7) são novos.

O fluxo de curvatura harmônico com condição de fronteira do tipo Dirichlet (1.8) nunca foi estudado anteriormente. Nesta tese provamos a existência e regularidade de solução globalmente no tempo para o problema (1.8) e obtivemos o comportamento assintótico de sua solução.

Resumindo, as contribuições desta tese são:

- Existência e regularidade de solução para o fluxo de curvatura média com condição de fronteira do tipo Dirichlet (Teorema 2.6 da seção 2.3).
- Existência e regularidade de solução para o fluxo de curvatura média com condição de fronteira do tipo Neumann (Teorema 2.1 da seção 2.2).
- Existência e regularidade de solução para o fluxo de curvatura média com condição de fronteira singular (Teorema 2.13 da seção 2.4).
- Existência e regularidade de solução para o fluxo de curvatura harmônica com condição de fronteira do tipo Dirichlet (Teorema 4.1 da seção 4.2).
- Existência e regularidade de solução para o fluxo de curvatura harmônica com condição de fronteira singular (Teorema 4.6 da seção 4.3).
- Anulamento em tempo finito e estimativas da solução do fluxo de curvatura média com condição de fronteira singular (Teorema 2.15 e proposição 2.16 da seção 2.4).
- Anulamento em tempo finito e estimativas da solução do fluxo de curvatura de Gauss com condição de fronteira singular e condição inicial convexa (Teoremas 3.8 e 3.16 da seção 3.4).
- Comportamento assintótico da solução do fluxo de curvatura de Gauss com condição de fronteira singular e condição inicial não convexa (Teorema 3.7 da seção 3.4).
- Comportamento assintótico da solução do fluxo de curvatura de harmônica com condição de fronteira do tipo Dirichlet (Teorema 4.2 da seção 4.2).
- Anulamento em tempo finito e estimativas da solução do fluxo de curvatura harmônica com condição de fronteira singular (Teorema 4.7, Proposição (4.8) e Proposição 4.9 da seção 4.3).

Fluxo de curvatura média

Neste capítulo iremos demonstrar resultados sobre os problemas (1.2), (1.3) e (1.4). Na seção 2.1 iremos demonstrar como fica o fluxo curvatura média em superfícies de revolução. A seção 2.2 será dividida em duas subseções, na primeira delas iremos apresentar resultados de existência e regularidade do problema (1.2) e na segunda resultados sobre anulamento e estimativas de sua solução perto do seu ponto e seu tempo de anulamento. Os resultados da subseção 2.2.1 são novos, porém os da subseção 2.2.2 são já conhecidos (vide [19] e [29]). A seção 2.3 também será dividida em duas subseções, na subseção 2.3.1 iremos demonstrar a existência de solução para o problema (1.2) e na subseção 2.3.2 mostraremos o anulamento em tempo finito e estimativas de sua solução perto do seu tempo e ponto de anulamento. Os resultados da subseção 2.3.1 são novos, mas os da subseção 2.3.2 já são conhecidos (vide [19] e [29]). Finalizando o capítulo temos resultados sobre o problema (1.4) divididos em duas subseções, na subseção 2.4.1 demonstraremos a existência e regularidade de solução para o problema (1.4) e na subseção 2.4.2 mostraremos o anulamento em tempo finito e estimativas de sua solução perto do seu tempo e ponto de anulamento. Os resultados das duas subseções 2.4.1 e 2.4.2 são novos. A justificativa de detalharmos resultados já conhecidos neste

capítulo é que temos como objetivo fazer um estudo mais geral de fluxo de curvatura em superfícies de revolução com as três condições de fronteira: Dirichlet, Neumann e singular.

2.1 Motivação

Considerando uma família de superfícies $\gamma(t, \theta, x) \subset \mathbb{R}^3$, dada por:

$$\gamma(t, \theta, x) = (x, u(t, x) \cos \theta, u(t, x) \sin \theta),$$

onde $\theta \in [0, 2\pi]$ e $x \in [0, a]$. Fazendo esta evoluir através do fluxo curvatura média, isto é

$$\gamma_t = -2H\vec{n}, \quad (2.1)$$

onde H representa a curvatura média e $\vec{n}$ o vetor normal exterior à superfície, concluímos que u satisfaz

$$u_t = \frac{u_{xx}}{1 + (u_x)^2} - \frac{1}{u}, \quad (2.2)$$

observando que $H = \frac{1}{2}(1 + (u_x)^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{xx}}{1 + (u_x)^2} - \frac{1}{u} \right)$ e $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (u_x)^2}} \left(u_x, -\cos \theta, -\sin \theta \right)$.

2.2 Fluxo de curvatura média com condição de fronteira do tipo Neumann

A equação deduzida anteriormente com condição de fronteira tipo Neumann foi estudada nos artigos [19] e [29]. Em nenhuma destas referências a questão de existência do problema foi tratada. Esta seção será dividida em duas subseções, na primeira delas iremos apresentar resultados sobre existência e regularidade do problema (1.3) e na segunda resultados sobre o anulamento em tempo finito e estimativa para este tipo de fluxo perto do seu tempo e seu ponto de anulamento. Os resultados da subseção (2.2.1) são novos, mas os da subseção 2.2.2 já são conhecidos (vide [19] e [29]).

2.2.1 Existência e Regularidade

O problema a ser estudado nesta seção é o problema (1.3), ou seja

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{1 + (u_x)^2} - \frac{1}{u}, & x \in (0, a), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u_x(t, a) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, a], \end{cases}$$

Teorema 2.1. *Se $u_0 \in C^2([0, a])$, então existe $T > 0$ tal que o problema (1.3) admite solução em $C^{1,2}([0, T) \times [0, a])$.*

Demonstração: Considere o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} v_t = F(t, x, v, v_x, v_{xx}), & x \in (0, a), t > 0, \\ v_x(t, 0) = 0, v_x(t, a) = 0, & t > 0, \\ v(0, x) = v_0(x) > 0, & x \in [0, a], \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $F(t, x, z, p, r) = \frac{r}{1 + p^2} - \frac{1}{z}$ para $x \in (0, a)$, $\frac{m}{2} < z < M$ e $|p| < C$, com

$$m = \min_{x \in [0, a]} v_0(x),$$

$$M = \max_{x \in [0, a]} v_0(x)$$

e

$$C = \max_{x \in [0, a]} u'_0(x).$$

Com estas condições sobre a F , garantimos a existência de solução para o problema auxiliar (2.3) através do Teorema 5.4 do Apêndice A.

De fato, as condições (i), (ii), (iii) e (iv) no Teorema 5.4 do Apêndice A são satisfeitas, tomando

$$\mu(|z|) = \frac{2}{m} + |z|,$$

$$a_1 = \frac{2}{m} + |p|,$$

$$\Lambda_0 = 1 + |p|,$$

$$a_0 = \frac{1}{1 + C^2},$$

$$a_1 = 1$$

e para qualquer função crescente a_0 e quaisquer constantes não negativas M_0 e M_1 .

A condição (v) do Teorema 5.4 do Apêndice A é satisfeita se tomarmos $c_1 = \frac{m^2}{4}$ e $c_2 = 2C$.

De fato, primeiramente observemos que

$$\left| F(t, x, z, p, r) - F(t, y, w, q, r) \right| \leq \left| \frac{(q^2 - p^2)r}{(1 + p^2)(1 + q^2)} + \frac{z - w}{wz} \right|.$$

Usando o Teorema do Valor Médio e os valores de c_1 e c_2 obtemos

$$\left| F(t, x, z, p, r) - F(t, y, w, q, r) \right| \leq (|x - y| + |z - w| + |p - q|)(c_1 + c_2).$$

Assim, como as hipóteses do Teorema 5.4 do Apêndice A são satisfeitas, concluímos sobre a existência de solução para o problema auxiliar (2.3).

Em seguida vamos provar que v satisfaz as condições que foram impostas sobre a F concluindo assim que v é também solução do problema (1.3).

Observe que a solução de (2.3) satisfaz $\frac{m}{2} \leq v \leq M$ e $|v_x| \leq C$, para algum $T > 0$ com $t \in [0, T]$ e $x \in [0, a]$. De fato, pelo Princípio do Máximo 5.5 do Apêndice B obtemos

$$m = \min_{x \in [0, a]} v_0, \quad M = \max_{x \in [0, a]} v_0$$

e

$$C = \max_{x \in [0, a]} v'_0(x)$$

tais que

$$v(t, x) \leq M \text{ e } |v_x(t, x)| \leq C, \quad (2.4)$$

para algum T_0 fixado e $(t, x) \in [0, T_0] \times [0, a]$.

Considerando a função $w = v - \frac{m}{2} + kt$, temos que w satisfaz o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} w_t - F(t, x, w, w_x, w_{xx}) \geq 0, & x \in (0, a), t \in (0, T), \\ w_x(t, 0) = 0, w_x(t, a) = 0, & t \in (0, T), \\ w(0, x) = v_0 - \frac{m}{2} > 0, & x \in [0, a]. \end{cases} \quad (2.5)$$

Daí, pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B temos que $w \geq 0$, para $x \in [0, a]$ e $t \in [0, T_0]$.

Assim, existem $T < \min\{T_0, \frac{m}{k}\}$ tal que

$$v \leq \frac{m}{2}, \quad (2.6)$$

para $x \in [0, a]$ e $t \in [0, T]$.

Logo, de (2.4) e (2.6) concluímos que v satisfaz as condições impostas sobre F . Assim v é solução do problema de valor inicial e de fronteira (1.3). ■

2.2.2 Anulamento e Estimativas

Nesta seção iremos descrever as técnicas utilizadas nas referências [19] e [29] para a obtenção do anulamento em tempo finito T das soluções de uma classe de problemas que contém o problema de valor inicial e de fronteira (1.3). Além disso apresentaremos resultados sobre o comportamento da solução próximo do tempo T .

Considerando o problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} u_t = (\phi(u_x))_x - \frac{1}{u^\beta}, & x \in (0, a), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u_x(t, a) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, a], \end{cases} \quad (2.7)$$

onde $\beta > 0$ e ϕ é uma função, temos os seguintes resultados:

Lema 2.2. *Suponhamos que $\phi \in \mathcal{C}^3([0, \infty))$, então temos as seguintes propriedades:*

a) Se $u_0 \in \mathcal{C}^1([0, a])$ e $u_0 \geq 0$, em $[0, a]$, então $u_x \geq 0$ em $[0, a] \times [0, T]$.

b) Se $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, a])$ e $[\phi(u'_0)]' - \frac{1}{u_0^\beta} \leq 0$, então $u_t \leq 0$ em $[0, a] \times [0, T]$.

c) Se $u_0 \in \mathcal{C}^3([0, a])$, satisfaz as hipóteses dos item anteriores e

$$\left\{ [\phi(u_0)]' - \frac{1}{u_0^\beta} \right\}' \geq 0, \text{ então } u_{xt} \geq 0 \text{ em } [0, a] \times [0, T].$$

Demonstração: a) Definindo $\alpha = u_x$, temos que α resolve o seguinte problema:

$$\begin{cases} \alpha_t = (\phi_x(u_x))\alpha_{xx} + (\phi_{xx}(u_x))\alpha_x + \beta u^{-\beta-1}\alpha, & x \in (0, a), t > 0, \\ \alpha(t, 0) = 0, \alpha(t, a) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = (u_0)_x(x) \geq 0, & x \in [0, a], \end{cases} \quad (2.8)$$

Logo, pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B, concluímos que $u_x \geq 0$ em $[0, a] \times [0, T]$.

b) Observe que, definindo $h = u_x$, temos que h satisfaz o seguinte problema

$$\begin{cases} h_t = (\phi_x(u_x))h_{xx} + (\phi_{xx}(u_x))h_x + \beta u^{-\beta-1}h, & x \in (0, a), t > 0, \\ h(t, 0) = 0, h(t, a) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = [\phi((u_0)_x)]_x - \frac{1}{u_0^\beta} \leq 0, & x \in [0, a], \end{cases} \quad (2.9)$$

Assim, pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B, concluímos que $u_x \geq 0$ em $[0, a] \times [0, T]$.

c) Usando os itens anteriores deste lema e definindo $r = u_{tx}$, obtemos que r satisfaz

$$r_t - \phi'(u_x)r_{xx} - \phi''(u_x)u_{xx}r_x - (\phi'''(u_x)u_{xx}^2 + \beta u^{-\beta-1})r = -\beta(\beta+1)u^{-\beta-2}u_x u_t > 0,$$

com $r(t, 0) = 0 = r(t, a)$ e

$$r(0, x) = \left([\phi((u_0)_x)]_x - \frac{1}{u_0^\beta} \right)'(x) \geq 0.$$

Portanto, pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B concluímos que $u_{tx}(t, x) \geq 0$, para $t \in [0, T]$ e $x \in [0, a]$. ■

Teorema 2.3. *Se ϕ e u_0 satisfazem as hipóteses (a), (b) e (c) do Lema 2.2 e $u'_0 \neq 0$, então a solução u do problema (2.7) se anula em tempo finito somente em $x = 0$. Em particular a solução de (1.3) também se anulam em tempo finito somente em $x = 0$.*

Demonstração: Comparamos o problema (2.7) com

$$\begin{cases} \theta_t = -\frac{1}{\theta^\beta}, & x \in (0, a), t > 0, \\ \theta_x(t, 0) = 0, \theta_x(t, a) = 0, & t > 0, \\ \theta(0, x) = M = \max_{x \in [0, a]} u_0(x) > 0, & x \in [0, a]. \end{cases} \quad (2.10)$$

A solução de (2.10) é explícita e é dada por:

$$\theta(t) = [M - (\beta + 1)t]^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

Usando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B, podemos concluir que $u < \theta$ em $[0, a] \times [0, T_\theta)$. Assim, como θ se anula em tempo, então u se anula em tempo finito.

Do item (a) do Lema 2.2, temos $u(t, 0) \leq u(t, x)$ para todo $x \in (0, a]$. Portanto u se anula em tempo finito em $x = 0$.

Para mostramos que ela se anula somente em $x = 0$, dividiremos em dois casos:

Se $u'_0 > 0$ concluímos, pelo Teorema do Valor Médio e pelo item (c) do Lema 2.2, que

$$u(t, x) - u(t, 0) = u_x(t, \xi)x \geq u'_0(\xi)x > 0,$$

para $x \in (0, a]$. Daí

$$\lim_{t \rightarrow T} u(t, x) > 0,$$

para $x \in (0, a]$.

Caso contrário, se existe um $x_0 = \min\{x > 0 \mid u'_0(x) = 0\}$. Primeiramente, com o mesmo argumento do caso anterior, conseguimos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow T} u(t, x) > 0,$$

para $x \in (0, x_0]$, e para concluir utilizamos o item (a) do Lema 2.2 para obtermos

$$\lim_{t \rightarrow T} u(t, x) > 0,$$

para $x \in (0, a]$.

■

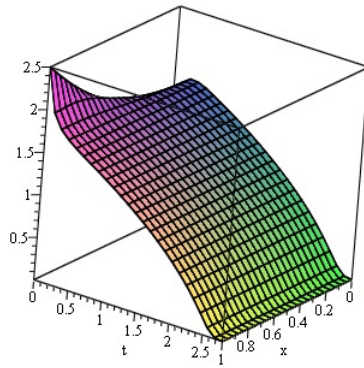
O resultado obtido anteriormente coincide com o resultado gerado numericamente pelo software Maple segundo a figura abaixo. Neste caso, aproximamos o problema (1.3) pelo seguinte problema com $\epsilon > 0$:

$$\begin{cases} (u_\epsilon)_t = \frac{(u_\epsilon)_{xx}}{1 + (u_\epsilon)_x^2} - \frac{(u_\epsilon)}{((u_\epsilon) + \epsilon)^{\beta+1}}, & x \in (0, a), t > 0, \\ (u_\epsilon)(t, 0) = 0, (u_\epsilon)(t, a) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, a] \end{cases}$$

e o resolvemos numericamente dando valores $u_0(x) = x^2 + 1,5$, $\beta = 1$ e $\epsilon = 0,2$

Linhas de Comando:

```
>PDE := diff(u(x,t),t) = (diff(u(x,t),x,x))/(1 + (diff(u(x,t),x))^2) - u(x,t)/(0.2 + u(x,t))^2
> IBC := u(x,0) = x^2 + 1.5, (D[1](u))(0,t) = 0, (D[1](u))(1,t) = 0
> pds := pdsolve(PDE,IBC,numeric)
> pds: -plot3d(t = 0..1.3, x = 0..1)
```



Como no Lema 2.2 e no Teorema 2.3 foram colocadas várias hipóteses sobre ϕ e u_0 , no próximo resultado mostramos que de fato existe um dado inicial que satisfaz tais hipóteses.

Teorema 2.4. *Se $\phi \in C^1([0, \infty))$ e $\phi' > 0$ em $[0, \infty)$, então existe u_0 satisfazendo as hipóteses do Lema 2.2 com $u'_0 \neq 0$.*

Demonstração: Consideremos o problema

$$\begin{cases} \phi'(v')v'' - \frac{1}{v^\beta} = \delta, & x \in (0, a), t > 0, \\ v(0) = \alpha > 0, \\ v'(0) = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

temos que este é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} v' = w, \\ w' = \frac{1}{\phi'(w)}(v^{-\beta} - \delta)\alpha > 0, \\ (v(0), w(0)) = (\alpha, 0), \alpha > 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Observando que o único ponto crítico do sistema é $\{(\delta^{-\frac{1}{\beta}})\}$, pois $\phi' > 0$ em $[0, \infty)$, temos que a matriz de linearização em torno deste ponto crítico é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d & 0 \end{pmatrix}$$

onde $d = \frac{\beta}{\phi'(0)}\delta^{\frac{\beta+1}{\beta}}$. Assim os autovalores são $\pm\sqrt{d}i$ e portanto $(-\delta^{-\frac{1}{\beta}}, 0)$ é um centro. Definindo

$$F(v, w) = \begin{cases} \int_0^w r\phi'(r)dr + \frac{v^{-\beta+1}}{\beta-1} + \delta v, & \beta \neq 1 \\ \int_0^w r\phi'(r)dr - \ln v + \delta v, & \beta = 1 \end{cases}$$

temos que $\frac{dF}{dt}(v(t), w(t)) = 0$, portanto F é uma integral primeira para o sistema (2.12). Assim, pelo Teorema de Lyapunov, existem soluções periódicas $(v(x, \delta, \mu), w(x, \delta, \mu))$ com período mínimo $\frac{2\pi}{\sqrt{d}}$ tais que $\left(v(0, \delta, \mu), w(0, \delta, \mu)\right) = (\delta^{-\frac{1}{\beta}}, 0)$. Logo $v(x, \delta, \mu)$ é solução de (2.11).

Por continuidade dos dados iniciais para α bem próximo e menores que $\delta^{-\frac{1}{\beta}}$ teremos $v(x, \delta, \alpha)$ bem próximo de $v(x, \delta, \mu)$. Assim para $\alpha < \delta^{-\frac{1}{\beta}}$, como $v(x, \delta, \mu)$ são periódicas de período $\frac{2\pi}{\sqrt{d}}$, temos que $v(x, \delta, \alpha)$ para α bem próximo de $\delta^{-\frac{1}{\beta}}$ também o são.

Como $v''(0, \delta, \alpha) > 0$, existe $b > 0$ tal que $v'(x, \delta, \alpha) > 0$ para todo $0 \leq x \leq \frac{2\pi b}{\sqrt{d}}$.

Daí, se δ for pequeno teremos d pequeno e então $\frac{2\pi b}{\sqrt{d}}$ será grande. Portanto, certamente $a < \frac{2\pi b}{\sqrt{d}}$, concluindo assim o resultado. ■

Depois de exibir as técnicas utilizadas nas referências [19] e [29] para provar o anulamento em tempo finito somente em um ponto, iremos obter o comportamento das soluções de (2.7) próximo do seu tempo de anulamento.

Teorema 2.5. *Se u_0 satisfaz as condições do Lema 2.2 e $\phi \in \mathcal{C}^3([0, +\infty))$, $\phi'(s) > 0$, $s \geq 0$ e $\phi''(s) \leq 0, s \geq 0$. Então, existem constantes K_1, K_2, K_3 tais que:*

$$a) \quad K_1 \leq u(t, x)(T - t)^{-\frac{1}{1+\beta}}, \text{ para } x \in [0, a] \text{ e } 0 < t < T.$$

$$b) \quad u(t, 0)(T - t)^{-\frac{1}{1+\beta}} \leq K_2, \text{ para } 0 < t < T.$$

$$c) \quad -u_t(t, x)(T - t)^{\frac{\beta}{1+\beta}} \leq K_3, \text{ para } x \in [0, a] \text{ e } 0 < t < T.$$

Demonstração: a) Pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B $u_t < 0$ em $(0, a) \times (0, T)$. Usando o item (c) do Lema 2.2 concluímos $u_t(t, 0) \leq u_t(t, x)$ em $[0, a) \times (0, T)$

Seja $0 < \eta < T$, com η pequeno. Observe que $-u_t(\eta, x)$ e $u^\beta(\eta, x)$ são positivos para $x \in [0, a - \eta]$, pois $x = 0$ é o único ponto de anulamento da função u e definamos

$$\delta_1 = \min_{x \in [0, a - \eta]} \{-u_t(\eta, x)u^\beta(\eta, x)\}.$$

Observe também que o item (b) do Lema 2.2 implica $0 < u(T, a - \eta) \leq u(t, a - \eta)$, para todo $t \in [0, T)$. Como $x = 0$ é o único ponto de anulamento de u podemos definir

$$\delta_2 = \min_{t \in [\eta, T)} \{-u_t(t, a - \eta)u^\beta(t, a - \eta)\}.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$, definindo $J(t, x) = u_t(t, x) + \delta u^{-\beta}(t, x)$ e derivando J obtemos

$$\begin{aligned} J_t - \phi'(u_x)J_{xx} - \left[\frac{\phi''(u_x)}{\phi'(u_x)}u_{xt} + \beta u^{-\beta-1} \right] J = & (1 - \delta) \frac{\phi''(u_x)}{\phi'(u_x)}u_{xt}u^{-\beta} \\ & - \beta(\beta + 1)\phi'(u_x)\delta u^{-\beta-2}(u_x)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Já sabemos que

$$J(\eta, x) = u_t(\eta, x) + \delta u^{-\beta}(\eta, x) \leq 0, \text{ para todo } x \in [0, a - \eta] \text{ e}$$

$$J(t, a - \eta) = u_t(t, a - \eta) + \delta u^{-\beta}(t, a - \eta) \leq 0, \text{ para todo } t \in [\eta, T].$$

Daí, pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B concluimos que $J \leq 0$ em $[\eta, T) \times [0, a - \eta]$.

Assim $u_t(t, x) \leq -\delta u^{-\beta}(t, x)$ em $[0, a - \eta] \times [\eta, T)$, ou seja $u_t(t, x)u^\beta(t, x) \leq -\delta$ em $[0, a - \eta] \times [\eta, T)$. Particularmente temos $u_t(t, 0)u^\beta(t, 0) \leq -\delta$. Se $t > \eta$, integrando de t a T temos

$$\frac{u^{\beta+1}}{\beta+1}(T, 0) - \frac{u^{\beta+1}}{\beta+1}(t, 0) \leq -\delta(T - t)$$

e como $u(T, 0) = 0$ obtemos

$$u(t, 0)(T - t)^{-\frac{1}{\beta+1}} \leq [\delta(\beta + 1)]^{\frac{1}{\beta+1}},$$

para todo $\eta < t < T$.

Uma vez que $u(t, 0)(T - t)^{-\frac{1}{\beta+1}}$ é uma função contínua positiva em $[0, \eta]$.

Tomando $K_1 = \min \left\{ \min_{[0, \eta]} \{u(t, 0)(T - t)^{-\frac{1}{\beta+1}}, [\delta(\beta + 1)]^{\frac{1}{\beta+1}}\} \right\}$ concluimos

$$u(t, 0)(T - t)^{-\frac{1}{\beta+1}} \geq K_1.$$

Para obter a desigualdade para todo x , basta observar o item (a) do Lema 2.2.

b) Fixando t , $u(t, x)$ assume valor mínimo em $x = 0$, pois o item (a) do Lema 2.2 é válido. Assim $u_{xx}(t, 0) \geq 0$ e então

$$u_t(t, 0) \geq u^{-\beta}(t, 0).$$

Integrando de 0 a T , sabendo u se anula em tempo finito para $x = 0$ e tomando $K_2 = (\beta + 1)^{\frac{1}{\beta+1}}$ concluimos o item b).

c) Como $u_{xt} \geq 0$ em $[0, a] \times [0, T)$ pelo item (c) do Lema 2.2 teremos

$$u_t(t, x) \geq u_t(t, 0) = \phi'(u_x(t, 0))u_{xx}(t, 0) - u^{-\beta}(t, 0)$$

Por hipótese temos que $\phi(s) > 0$, para todo $s \geq 0$ e como $u(t, x)$ atinge seu mínimo para t fixado em $x = 0$ obtemos $u_{xx}(t, 0) \geq 0$.

Usando o item a) concluímos que

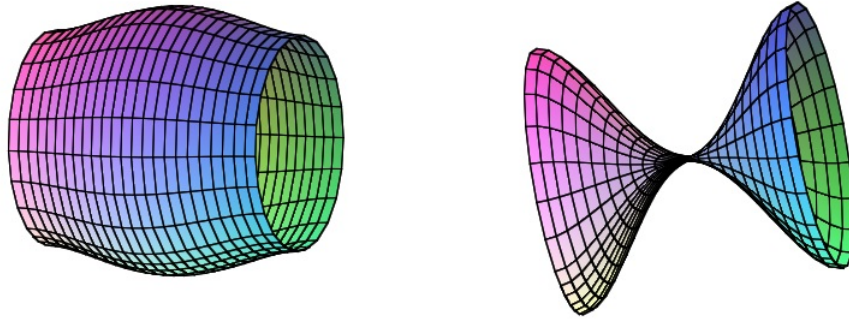
$$u_t(t, x) \geq -u^{-\beta}(t, 0) \geq -K_1^{-\beta}(T - t)^{-\frac{\beta}{\beta+1}}.$$

Daí, tomando $K_3 = K_1^{-\beta}$, finalizamos o item c).

■

2.2.3 Interpretação dos Resultados

Para finalizarmos, vamos interpretar os resultados (2.3) e (2.5) da subseção anterior (2.2.2). Uma superfície inicial à esquerda evolui pelo fluxo curvatura média em superfícies de revolução com condição de fronteira do tipo Neumann a superfície à direita



2.3 Equação curvatura média com condição de fronteira do tipo Dirichlet

Estudar a equação fluxo curvatura média com condição de fronteira Dirichlet também fez parte do trabalho das referências [19] e [29]. Porém, como no problema com condição de fronteira tipo Neumann, a questão de existência e regularidade não foi tratada. Esta seção será dividida em duas subseções, na primeira iremos mostrar a existência

e regularidade de solução até um tempo finito T para o problema (1.2) e na segunda apresentar os principais resultados e técnicas utilizadas nos trabalhos [19] e [29] para descrever o comportamento da solução de tal problema próximo do tempo de anulamento. Os resultados da subseção 2.3.1 são novos, porém os da subseção 2.3.2 já são conhecidos (vide [19] e [29]).

2.3.1 Existência e Regularidade

O problema tratado nesta seção é o problema (1.2), ou seja

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{(1 + (u_x)^2)} - \frac{1}{u}, & x \in (0, a), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u(t, a) = 1, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, a], \end{cases}$$

A existência e regularidade são obtidas, como em [16] Teorema 2.1, estudando a existência e regularidade de um problema auxiliar e depois provando que a solução do problema auxiliar também é solução de (1.2).

Teorema 2.6. *Se $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, a])$, então existe $T > 0$ tal que o problema de valor inicial e de fronteira (1.2) tem solução em $\mathcal{C}^2([0, a] \times [0, T))$.*

Demonstração: Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{1 + (u_x)^2} - b(u), & x \in (0, a), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u_x(t, a) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, a], \end{cases} \quad (2.13)$$

onde b é uma função positiva limitada inferiormente e superiormente respectivamente por constantes positivas C_1 e C_2 , com derivada negativa e limitada inferiormente por uma constante negativa C_3 .

Utilizando o Teorema 5.1 do Apêndice A temos a existência de solução do problema auxiliar (2.13). De fato, os coeficientes e os dados de fronteira satisfazem as hipóteses do Teorema 5.1 do Apêndice A para $m = 0$, $\nu = 1$, $\mu = 3$, $\mu_1 = 2 \max\{12, C_2\}$ e $\epsilon = -C_3$. De fato, neste caso temos

$$a_{ij}(t, x, u, p) = (1 + p^2)^{-1}$$

e

$$a = b(u).$$

Assim, como $|p| \leq 1 + p^2$, $\frac{|x| + x^2}{1 + x^2} \leq 2$, temos

$$1 \leq \frac{1 + 2|p| + p^2}{1 + p^2} = \frac{(1 + |p|)^2}{1 + p^2} = 1 + 2\frac{|p|}{1 + p^2} \leq 3$$

$$2|p|\frac{(1 + |p|)^3}{(1 + p^2)^2} + b(u) \leq 2\frac{|x|(1 + |x|)}{1 + x^2} \cdot \frac{(1 + |x|)^2}{1 + x^2} + b(u) \leq 2.2.3 + C_2 \leq \mu_1,$$

e sabendo que a derivada de b é limitada inferiormente temos

$$-b'(u) \leq -C_3.$$

Portanto, temos a existência e regularidade do problema auxiliar.

Em seguida iremos mostrar que a solução do problema auxiliar é também solução do problema (1.2).

Observamos, usando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B como em 2.2, que

- a) Se $u_0 \in \mathcal{C}^1([0, a])$ e $u'_0 \geq 0$, em $[0, a]$, então a derivada com relação a variável x da solução do problema auxiliar $u_x \geq 0$ em $[0, a] \times [0, T)$.
- b) Se $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, a])$ e a curvatura média da superfície de rotação inicial u_0 for não positiva, então a derivada com relação a variável t da solução do problema auxiliar $u_t \leq 0$ em $[0, a] \times [0, T)$.

Assim, se o dado inicial v_0 satisfaz as condições a) e b) acima, então a solução do problema auxiliar é também solução do problema (1.2). De fato, como a solução do problema auxiliar (2.13) é regular e tem dado inicial positivo, existe T_0 tal que $m = u(T_0, 0) > 0$. Note que dos itens a) e b) obtemos respectivamente

$$u(t, x) \geq m$$

e

$$u(t, x) \leq M,$$

para $x \in [0, a]$ e $t \in [0, T_0]$, onde $M = \max_{x \in [0, a]} u_0(x)$.

Assim se $b(u) = \frac{1}{u}$ teremos

$$\frac{1}{M} \leq b(u) \leq \frac{1}{m}$$

e

$$b'(u) \geq -\frac{1}{m^2}.$$

Logo, existe $T > 0$ tal que $T \in [0, T_0]$, onde a solução do problema auxiliar (2.13) é também solução do problema (1.2) para $t \in [0, T]$ e $x \in [0, a]$. ■

2.3.2 Anulamento e Estimativas

Nesta seção apresentaremos resultados e técnicas utilizadas em [19] e [29] sobre um classe de problemas que contêm o problema (1.2) (fazendo $\beta = 1$ e $\phi(s) = \arctg(s)$) que exibem o comportamento das soluções desta classe de problemas perto dos seus tempos e dos pontos de anulamento.

Considerando o problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} u_t = (\phi(u_x))_x - \frac{1}{u^\beta}, & x \in (0, a), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u(t, a) = 1, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, a], \end{cases} \quad (2.14)$$

temos os seguintes resultados:

Lema 2.7. *Se $\phi \in \mathcal{C}^3([0, \infty))$, temos:*

- a) *Se $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, a])$ e $[\phi(u'_0)]' - \frac{1}{u_0^\beta} \leq 0$, então $u_t \leq 0$ em $[0, a] \times [0, T)$.*
- b) *Se u_0 satisfaz as hipóteses do item a) e $u_0 \geq 0$ em $[0, a]$, então $u_x \geq 0$ em $[0, a] \times [0, T)$.*
- c) *Se $u_0 \in \mathcal{C}^3([0, a])$, satisfaz as hipóteses dos itens a) e b) e ainda*

$$\left\{ [\phi(u'_0)]' - \frac{1}{u_0^\beta} \right\}' \geq 0, \text{ então } u_{xt} \geq 0 \text{ em } [0, a] \times [0, T).$$

Demonstração: a) Como o dado inicial é uma função par, u solução de (2.14) pode ser estendida de forma par, isto é $u(t, -x) = u(t, x)$, para $x \in [0, a]$.

Definindo $\alpha = u_t$ e derivando temos

$$\alpha_t - \phi'(u_x)\alpha_{xx} - \phi''(u_x)u_{xx}\alpha_x - \beta u^{-\beta-1}\alpha = 0,$$

$$\alpha(t)(t, -a) = 0 = \alpha(t, a) \text{ e } \alpha(0, x) = (\phi'(u'_0)u''_0 - (u_0)^{-\beta}) \leq 0.$$

Daí, pelo Princípio do Máximo temos $u_t \leq 0$ em $[0, a] \times [0, T]$.

b) Se $\beta = u_x$. Derivando β obtemos

$$\begin{cases} \delta_t - \phi'(u_x)\delta_{xx} - \phi''(u_x)\delta_x - u^{-\beta-1}\delta = 0, & x \in (0, a), t > 0, \\ \delta(t, 0) = 0, \delta(t, a) \geq 0, & t > 0, \\ \delta(0, x) = (u_0)_x(x) \geq 0, & x \in [0, a], \end{cases} \quad (2.15)$$

Daí, pelo Princípio do Máximo, concluimos que $u_x \geq 0$ em $[0, a] \times [0, T]$.

c) Definindo $\theta = u_{xt}$ e derivando obtemos

$$\begin{aligned} \theta_t - \phi'(u_x)\theta_{xx} - 2\phi''(u_x)u_{xx}\theta_x - (\phi''(u_x)u_{xxx} + \phi'''(u_x)(u_{xx})^2 + \beta u^{-\beta-1})\theta = \\ = -\beta(\beta + 1)u^{-\beta-2}u_t u_x \geq 0, \end{aligned}$$

$\theta(t, 0) = 0$, $\theta(t, a) \geq 0$ e $\theta(0, x) = (\phi'(u'_0)u''_0 - (u_0)^{-\beta})' \geq 0$. Logo, pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B $u_{xt} \geq 0$ em $[0, a] \times [0, T]$. ■

Com os sinais das derivadas obtidos no Lema anterior, concluimos o anulamento em tempo finito da solução de (2.14), em particular o anulamento da solução de (1.2), através do seguinte resultado:

Teorema 2.8. *Seja T , o tempo maximal de existência de v e $h(x) = \frac{\pi}{2a} \cos\left(\frac{\pi}{2a}x\right)$. Suponha que $\phi(0) = 0$, $\phi(t) \leq k_1 t + k_2$ e $[\phi((u_0)_x)]_x - \frac{1}{u_0^\beta} \leq 0$ então as seguintes afirmações seguem:*

(a) *Se $\int_0^a u_0(x)h(x)dx$ é pequeno, então $T < +\infty$.*

(b) *Se a é grande, então $T < \infty$. Mais precisamente,*

$$k_1 \leq 0 \text{ e } a > \frac{3k_2}{2} \Rightarrow T < \infty,$$

$$k_1 \leq 0 \text{ e } k_2 \leq 0 \text{ e } a > \sqrt{k_1} \Rightarrow T < \infty \text{ e}$$

$$k_1 \leq 0 \text{ e } k_2 \geq 0 \text{ e } a > \frac{4}{3}k_2 + \frac{4}{3}\sqrt{k_2^2 + \frac{16}{3}k_1} \Rightarrow T < \infty.$$

Demonstração: (a) Definindo $I_1(t) = \int_0^a u(t, x)h(x)dx$, derivando e substituindo u_t obtemos

$$I_1'(t) = \int_0^a (\phi(u_x))_x h dx - \int_0^a u^{-\beta} h dx.$$

Integrando por partes e usando as hipóteses concluimos

$$I_1'(t) \leq - \int_0^a \phi(u_x) h_x dx - \int_0^a u^{-\beta} h dx$$

Pela desigualdade de Jensen 5.27 temos

$$[I_1(t)]^{-\beta} = \left[\int_0^a u h dx \right]^{-\beta} \leq \int_0^a u^{-\beta} h dx$$

e então

$$I_1'(t) \leq - \int_0^a \phi(u_x) h_x dx - (I_1(t))^{-\beta}.$$

Usando a hipótese $\phi(t) \leq k_1 t + k_2$, substituindo o valor de h_x e integrando por partes temos

$$I_1'(t) \leq \frac{\pi^2}{4a^2} k_1 - \frac{\pi^2}{4a^2} k_1 I_1(t) + \frac{\pi}{2a} k_2 - (I_1)^{-\beta}.$$

O item (b) do Lema 2.7 implica que

$$I_1(t) = \int_0^a u(t, x)h(x)dx \leq \int_0^a u_0(x)h(x)dx$$

Assim $I_1(t)$ é pequeno e portanto $(I_1(t))^{-\beta}$ é grande. Daí obtemos

$$I_1'(t) \leq -c, c > 0.$$

Se $T = +\infty$ teremos $\lim_{t \rightarrow +\infty} I_1'(t) = 0$, pois $I_1(t)$ é decrescente e limitada inferiormente. Isto não é possível. Logo $T < +\infty$.

(b) Multiplicando $u_t - (\phi(u_x))_x = -u^{-\beta}$ por $w(x) = a^2 - x^2$, definindo $I_2(t) = \int_0^a u(t, x)w(x)dx$ e derivando obtemos

$$I_2'(t) = \int_0^a u_t(t, x)w(x)dx = \int_0^a (\phi(u_x))_x w - u^{-\beta} w dx.$$

Integrando por partes, observando que $u(t, x) \leq u(0, x) = u_0(x) \leq 1$ e usando a hipótese de limitação por uma função linear obtemos

$$I_2(t) \leq 2 \int_0^a k_1 u_x x dx + 2 \int_0^a k_2 x dx - \int_0^a (a^2 - x^2) dx.$$

Integrando por partes o primeiro termo do lado direito e calculando os outros dois temos

$$I_2'(t) \leq 2k_1 a - 2k_1 \int_0^a u dx + k_2 a^2 - \frac{2a^3}{3}$$

Se $k_1 \leq 0$ temos $2k_1 a - 2k_1 \int_0^a u dx \leq 0$. Daí $I_2'(t) \leq k_2 a^2 - \frac{2}{3} a^3 = a^2(k_2 - \frac{2}{3}a)$. Assim se $a > \frac{3}{2}k_2$ e $k_1 \leq 0$ temos $T < +\infty$

Logo, se $k_1 \geq 0$ teremos

$$I_2'(t) \leq 2k_1 a + k_2 a^2 - \frac{2}{3} a^3 = a \left(2k_1 + k_2 a - \frac{2}{3} a^2 \right).$$

As raízes do polinômio são $\frac{4}{3}k_2 \pm \frac{4}{3}\sqrt{k_2^2 + \frac{16}{3}k_1}$.

Daí se $a > \frac{4}{3}k_2 + \frac{4}{3}\sqrt{k_2^2 + \frac{16}{3}k_1}$ e $k_1 \geq 0$ então $T < +\infty$.

Se $k_1 \geq 0$ e $k_2 \leq 0$ temos $I_2'(t) \leq 2k_1 a - \frac{2}{3} a^3$. Assim, se $k_1 \geq 0, a > \sqrt{k_1}$ e $k_2 \leq 0$ então $T < +\infty$. ■

O próximo resultado dos trabalhos [19] e [29] que vamos apresentar é o anulamento em tempo finito da solução de (2.14) somente em $x = 0$. Para se chegar a este resultado foi preciso primeiro fazer uma análise do problema estacionário associado.

Lema 2.9. *Suponha que $\beta = 1$ e ϕ satisfaça as condições:*

a) $\phi \in \mathcal{C}^1([0, \infty))$, $\phi'(r) > 0$ para $r \geq 0$,

b) $\lim_{r \rightarrow \infty} \xi(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \eta \phi'(\eta) d\eta = +\infty$,

c) $\int_0^1 \frac{1}{\xi^{-1}(\eta)} d\eta < +\infty$.

Então, existe $a_0 > 0$ tal que:

- (a) Se $a < a_0$ existem duas soluções, $w_1(x, a) > w_2(x, a)$, positivas de (2.16).
- (b) Se $a > a_0$ o problema de valor de fronteira (2.16) não tem solução.
- (c) Se $a = a_0$ existe exatamente uma única solução de (2.16).

$$\begin{cases} (\phi(w_x))_x = \frac{1}{w}, & x \in (0, a) \\ w_x(0) = 0, \\ w(a) = 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Demonstração: Pela hipótese a) e pela positividade de u temos que $w_{xx} > 0$ em $(0, a) \times (0, T)$. Assim, w_x é crescente e como $w_x > 0$ em $(0, a)$.

Para facilitar a notação chamamos $w_0 = w(0)$.

Observe que a seguinte equivalência é válida: w é solução de

$$\begin{cases} (\phi(w_x))_x = \frac{1}{w}, & x \in (0, a) \\ w_x(0) = 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

se e somente se w for solução da equação integral

$$\varphi(w_x) := \int_0^{w_x} \eta \phi'(\eta) d\eta = \ln\left(\frac{w(x)}{w_0}\right).$$

De fato, para ida multiplique a equação de (2.17) por w_x . Integrando de 0 a x temos

$$\int_0^x \phi'(w') w'' w' ds = \ln(w(x)) - \ln(w_0).$$

Definindo $\eta = w'(s)$ temos

$$\varphi(w_x) = \int_0^{w_x} \eta \phi'(\eta) d\eta = \ln\left(\frac{w(x)}{w_0}\right).$$

Para a volta basta definir $\eta = w'$.

Daí, como φ é invertível, obtemos $w_x = \varphi^{-1}\left(\ln\left(\frac{w(x)}{w_0}\right)\right)$. Integrando de 0 a x temos

$$\int_0^x \frac{w'}{\varphi^{-1}\left(\ln\left(\frac{w(x)}{w_0}\right)\right)} ds = x.$$

Definindo $\eta = w(s)$ obtemos

$$\int_{w_0}^w \frac{1}{\varphi^{-1}\left(\ln\left(\frac{\eta}{w_0}\right)\right)} ds = x.$$

Desta forma o número de soluções de (2.16) é igual ao número de soluções w_0 da equação integral

$$\int_{w_0}^1 \frac{1}{\varphi^{-1}\left(\ln\left(\frac{\eta}{w_0}\right)\right)} ds = a.$$

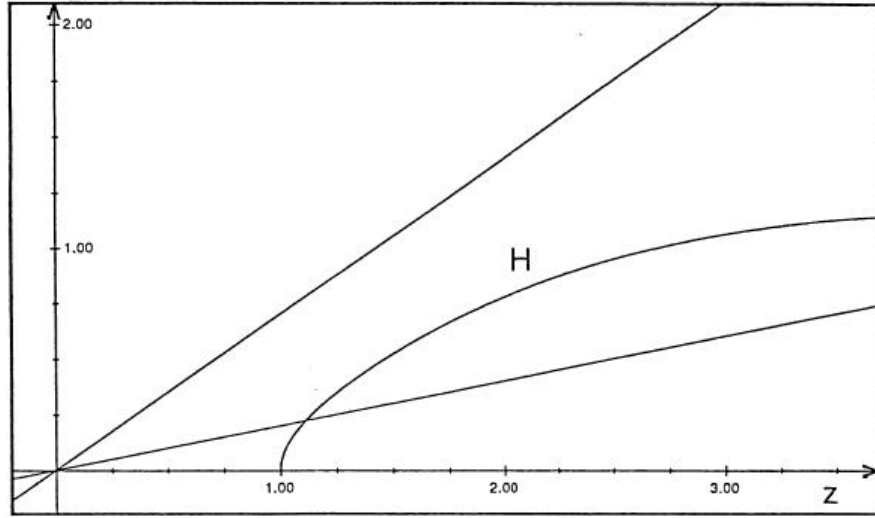
Substituindo $y = \ln\left(\frac{\eta}{w_0}\right)$ temos

$$w_0 \int_0^{\ln\left(\frac{1}{w_0}\right)} \frac{e^y}{\varphi^{-1}(y)} dy = a.$$

Como $w' > 0$ em $(0, a)$ teremos que $w(x) \leq w(a) = 1$. Definindo $z = \frac{1}{w_0}$ obtemos $1 \leq \frac{1}{w_0}$. Daí devemos contar o número de soluções de

$$H(z) := \int_0^{\ln z} \frac{e^y}{\varphi^{-1}(y)} dy = az.$$

Derivando H observamos que ela é crescente e côncava em z . Notando as outras informações sobre H conseguimos esboçar um gráfico.



Assim existe um único a_0 tal que a reta $y = a_0 z$ tangencia $H(z)$. Mais ainda, para $a < a_0$ temos duas soluções de $H(z) = az$ as quais denotaremos por $z_1(a)$ e $z_2(a)$ com $z_1(a) < z_2(a)$ e para $a > a_0$ não teremos solução de $H(z) = az$.

Observemos também que $\lim_{a \rightarrow 0} z_1(a) = 1$ e $\lim_{a \rightarrow 0} z_2 = +\infty$, correspondentemente temos para $a < a_0$ duas soluções $w_1(x, a)$ e $w_2(x, a)$ do problema (2.16) tais que $w_i(0, a) = \frac{1}{z_i(a)}$.

Como $z_1(a) < z_2(a)$ temos $w_2(0, a) < w_1(0, a)$. Mostremos que $w_1(x, a) > w_2(x, a)$ em $(0, a)$. Suponha que não, isto é, existe y em $(0, a)$ mínimo tal que $w_1(y, a) = w_2(y, a)$. Note que $w_2(x, a) < w_1(x, a)$, para todo $0 \leq x < y$, pela definição de y . Daí y é ponto de mínimo de $w_1 - w_2$ em $[0, y]$. Logo $(w_1)_x(y, a) = (w_2)_x(y, a)$. Portanto

$$\varphi((w_1)_x(y, a)) - \ln w_1(y, a) = \varphi((w_2)_x(y, a)) - \ln w_2(y, a)$$

e da equação integral concluimos

$$w_1(0, a) = w_2(0, a)$$

contradição. Então $w_1(x, a) > w_2(x, a)$ em $(0, a)$. ■

Depois de ter sido feita uma análise do problema estacionário, antes de mostrar a existência do anulamento em tempo finito para solução de (2.14), vamos apresentar um resultado que mostra que se há anulamento então este só pode acontecer em $x = 0$.

Lema 2.10. *Suponhamos que $\beta = 1$ e que ϕ satisfaz as hipóteses do Teorema 2.9 e mais ou ϕ é convexa ou $s \geq \phi(s)$ para $s \geq 0$. Suponha também que as hipóteses do Lema 2.7 são satisfeitas e que u se anula em $T \in (0, +\infty]$. Então u se anula somente em $x = 0$.*

Demonstração: Caso ϕ convexa: Inicialmente observamos que temos o resultado se provarmos que para cada $b \in (0, a)$ e para algum $\epsilon(b, \delta)$ a desigualdade $J(t, x) := u_x(t, x) - \epsilon(x - b)$ é válida em $Q_b = [b, a] \times [0, T)$.

De fato, se a desigualdade é válida temos

$$\int_b^x u_s(t, s) ds \geq \frac{\epsilon(x - b)^2}{2}.$$

Assim

$$u(t, x) \geq \frac{\epsilon(x - b)^2}{2} + u(t, b) > 0,$$

para $x \in (b, a)$, isto é u não se anula em (b, a) . Como b é arbitrário e u se anula no tempo T então u vai se anular somente na origem.

Voltamos a analisar o sinal de J em Q_b . Derivando temos

$$J_t - \phi'(u_x)J_{xx} = \frac{u_x}{u^2} + \phi''(u_x)(u_{xx})^2.$$

Usando o Lema 2.7 obtemos

$$J_t - \phi'(u_x)J_{xx} \geq 0.$$

Analisando na fronteira parabólica temos

$$J(t, b) = u_x(t, b) \geq 0$$

$$J(t, a) = u_x(t, a) - \epsilon(a - b)$$

$$J(0, x) = u_x(0, x) - \epsilon(x - b) \geq (u_0)_x(x) - \epsilon(a - b)$$

Tomando $\epsilon = \min \left\{ \frac{\delta}{a-b}, \min_{x \in [b, a]} \frac{(u_0)_x}{a-b} \right\}$ temos

$$J(t, b), J(t, a) \text{ e } J(0, x) \geq 0.$$

Logo, pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B temos $J \geq 0$ em $[b, a] \times [0, T)$.

Caso $s \geq \phi(s) \geq 0$: Definindo $\tilde{J}(t, x) := \phi(u_x) - \epsilon(x - b)$ e derivando obtemos

$$\tilde{J}_t - \phi'(u_x)\tilde{J}_{xx} = \phi'(u_x)\frac{u_x}{u^2}.$$

Usando as hipóteses e o Lema 2.7 concluímos que

$$\tilde{J}_t - \phi'(u_x)\tilde{J}_{xx} \geq 0.$$

A análise na fronteira parabólica fica

$$\tilde{J}(t, b) = \phi(u_x(t, b)) \geq 0,$$

$$\tilde{J}(t, a) = \phi(u_x(t, a)) - \epsilon(a - b) \geq \phi(\delta) - \epsilon(a - b)$$

e

$$\tilde{J}(0, x) = \phi(u_x(0, x)) - \epsilon(x - b) \geq \phi((u_0)_x(x)) - \epsilon(a - b).$$

Tomando $\epsilon = \min \left\{ \frac{\phi(\delta)}{a-b}, \min_{x \in [b, a]} \frac{\phi((u_0)_x(x))}{a-b} \right\}$ e usando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B concluímos que $\tilde{J} \geq 0$ em $[b, a] \times [0, T)$. Como vimos anteriormente integrando temos

$$u(t, x) - u(t, b) \geq \epsilon \frac{(x - b)^2}{2},$$

para todo $x \in [b, a]$. Como por hipótese u se anula em tempo finito T , então u se anula somente na origem. ■

Finalmente, utilizando teoria de semigrupos, mostraremos o anulamento em tempo finito da solução de (2.14). Particularmente, estaremos mostrando o anulamento da solução de (1.2).

Teorema 2.11. *Se $\beta = 1$ e ϕ e u_0 satisfazem as hipóteses do Lema 2.10, então:*

- a) *Se $a \leq a_0$ e $0 < u_0(x) \leq w_2(x, a)$, $u_0(0) < w_2(0, a)$, então u se anula em tempo finito somente em $x = 0$.*
- b) *Se $a < a_0$ e $w_2(x, a) \leq u_0(x) \leq 1$, $u_0(x) \neq w_2(x, a)$, então u converge assintoticamente para $w_1(x, a)$ quando $t \rightarrow \infty$.*
- c) *Se $a > a_0$ e $0 < u_0(x) \leq 1$, então u se anula em tempo finito somente em $x = 0$.*

Demonstração: Item a): Suponha que u não se anula em tempo finito

Consideremos $X = \{u_0 \in \mathcal{C}(-a, a), u_0 > 0\}$ e definimos $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(u_0) = 2\pi \int_{-a}^a \frac{u_0(x)}{\sqrt{1 + ((u_0)_x)^2}} dx.$$

Derivando temos que J é funcional de Lyapunov. Daí pelo Teorema 5.1 do livro [64] temos que u converge para solução estacionária w_1 ou w_2 . Se convergir para w_1 teremos uma contradição com a ordem de w_1 e w_2 e se ela convergir para w_2 teremos uma contradição com a hipótese do item a). Portanto u se anula em tempo finito.

item b): Do item a) o problema estacionário admite um funcional de Lyapunov. Daí estamos nas hipóteses do Teorema 5.1 encontrado em [64]. Assim u irá convergir para w_1 ou w_2 . Concluimos pela estabilidade de w_1 , que u converge para w_1 .

item c): Analogamente ao item a) observando que na conclusão teremos u convergindo para uma solução do problema estacionário, porém neste caso não há solução deste problema criando assim uma contradição com o fato de u não se anular em tempo finito. Daí u vai se anular em tempo finito. ■

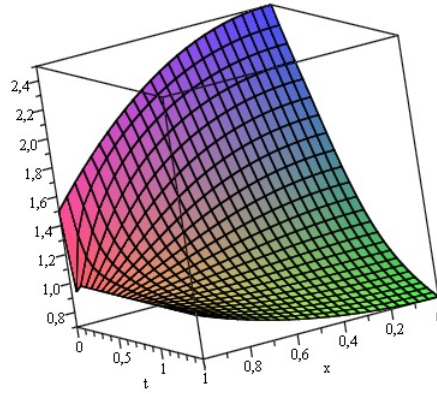
Com o auxílio do software Maple, vemos que o resultado obtido anteriormente (Teorema 2.11) coincide com o resultado numérico. Aqui estamos aproximando o problema (1.2) pelo seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u_\epsilon)_t = \frac{(u_\epsilon)_{xx}}{1 + (u_\epsilon)_x^2} - \frac{(u_\epsilon)}{((u_\epsilon) + \epsilon)^{\beta+1}}, & x \in (0, a), t > 0, \\ (u_\epsilon)_x(t, 0) = 0, (u_\epsilon)(t, a) = 1, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, a]. \end{array} \right.$$

e em seguida resolvendo este problema aproximado usando o Maple, fazendo $\beta = 1$, $\epsilon = 0, 2$ e $u_0(x) = -x^2 + 2.5$

Linhas de Comando:

```
> PDE := diff(u(x, t), t) = (diff(u(x, t), x, x))/(1 + (diff(u(x, t), x))^2) - u(x, t)/(0.2 + u(x, t))^2
> IBC := u(1, t) = 1, u(x, 0) = -x^2 + 2.5, (D[1](u))(0, t) = 0
> pds := pdsolve(PDE, IBC, numeric)
> pds: -plot3d(t = 0..1.2, x = 0..1)
```



Para concluir esta seção apresentamos o comportamento da solução de (2.14) próximo do tempo de anulamento T e do ponto $x = 0$.

Teorema 2.12. *Se $\beta = 1$ e u_0 satisfaz as condições do Lema 2.7 e $\phi \in \mathcal{C}^3([0, +\infty))$,*

$\phi'(s) > 0, s \geq 0$ e $\phi''(s) \leq 0, s \geq 0$. Então, existem constantes L_1, L_2 e L_3 tais que:

a) $L_1 \leq u(t, 0)(T - t)^{-\frac{1}{2}} \leq L_2$, para $0 < t < T$.

b) $-u_t(t, x)(T - t)^{\frac{1}{2}} \leq L_3$, para $x \in [0, a]$ e $0 < t < T$.

Demonstração: a) Observando inicialmente que $w = u_t$ satisfaz

$$w_t - \phi'(u_x)w_{xx} - \phi''(u_x)w_x - \beta u^{\beta-1}w = 0$$

em $(0, T) \times (0, a)$.

Assim, o mínimo e o máximo de w são atingidos na fronteira parabólica e portanto $u_t < 0$ em $(0, T) \times (0, a)$, pois se $u_t(t_0, x_0) = 0$ para $(t_0, x_0) \in (0, T) \times (0, a)$ teríamos (t_0, x_0) ponto interior da fronteira parabólica sendo máximo. Sabendo que $u_t \leq 0$ em $[0, T] \times [0, a]$ pelo Lema 2.7 e usando o Princípio do Máximo temos $u_t = 0$ em $[0, T] \times [0, a]$ o que implica que $u(t, x) = u(T, x)$, para todo $t < T$.

Como $u(T, 0) = 0$ teríamos $u(t, 0) = 0$, para todo $t < T$.

Mas T é o mínimo tal que $u(t, 0) = 0$. Assim $u_t < 0$ para $t \in (0, T)$ e $x \in (0, a)$. Sabendo que $u_{xt} \geq 0$ em $[0, T] \times [0, a]$ temos $u_{t,0} \leq u_t(t, x) \leq 0$, para $t \in (0, T)$ e $x \in (0, a)$.

Logo $u_t(t, 0) < 0$, concluindo assim que $u_t < 0$ em $(0, T) \times (0, a)$.

Definindo $0 < \eta < T$, observando que $-u_t(\eta, x)$ e $u^\beta(\eta, x)$ são positivos para $x \in [0, a - \eta]$, definindo

$$\delta_1 = \min_{x \in [0, a - \eta]} \{-u_t(\eta, x)u^\beta(\eta, x)\}$$

e notando que $\delta_1 = \min_{x \in [\eta, T]} \{-u_t(t, a - \eta)\}$ existe e é positiva, pois u_t satisfaz uma equação parabólica.

Como $u_t \leq 0$ temos

$$0 < u(T, a - \eta) \leq u(t, a - \eta) \leq u(0, a - \eta) = u_0(a - \eta).$$

Seja $\delta_2 = \min_{t \in [\eta, T]} \{-u_t(t, a - \eta)u^\beta(t, a - \eta)\}$, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$ temos

$$\delta \leq \delta_1 \Rightarrow \delta \leq -u_t(\eta, x)u^\beta(\eta, x),$$

$x \in [0, a - \eta]$, ou seja

$$u_t(\eta, x) + \delta u^{-\beta}(\eta, x) \leq 0,$$

para todo $x \in [0, a - \eta]$.

Temos ainda que $\delta \leq \delta_2$ implica que

$$\delta \leq -u_t(t, a - \eta)u^\beta(t, a - \eta),$$

para $t \in [\eta, T)$, ou seja

$$u_t(t, a - \eta) + \delta u^{-\beta}(t, a - \eta) \leq 0,$$

para todo $t \in [0, T)$.

Definindo $J(t, x) = u_t(t, x) + \delta u^{-\beta}(t, x)$ temos

$$J(\eta, x) = u_t(\eta, x) + \delta u^{-\beta}(\eta, x) \leq 0,$$

para todo $t \in [0, a - \eta]$

$$J(t, a - \eta) = u_t(t, a - \eta) + \delta u^{-\beta}(t, a - \eta) \leq 0,$$

para todo $t \in [\eta, T)$

e

$$J_x(t, 0) = 0,$$

para todo $t \in [0, T)$ e sabendo que $J_t - \phi'(u_x)J_{xx} - \left[\frac{\phi'' u_{xx}}{\phi'(u_x)} u_{xt} + \beta u^{-\beta-1} \right] J \leq 0$, concluimos pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B que

$$J \leq 0 \text{ em } [\eta, T) \times [0, a - \eta],$$

ou seja

$$u_t(t, x) \leq -\delta u^{-\beta}(t, x),$$

para $t \in [\eta, T)$ e $x \in [0, a - \eta]$.

Particularmente temos

$$u_t(t, 0)u^\beta(t, 0) \leq -\delta.$$

Se $t > \eta$. Integrando de t a T e usando o fato de que $u(T, 0) = 0$ obtemos

$$-u^{\beta+1}(t, 0) \leq -\delta(\beta + 1)(T - t),$$

ou seja

$$u(t, 0)(T - t)^{-\frac{1}{\beta+1}} \geq [\delta(\beta + 1)]^{\frac{1}{\beta+1}},$$

para $\eta < t < T$.

Como $u(t, 0)(T - t)^{-\frac{1}{\beta+1}}$ é uma função contínua positiva em $[0, \eta]$, tomando

$$L_1 = \min \left\{ \min_{[0, \eta]} \{u(t, 0)(T - t)^{-\frac{1}{\beta+1}}\}, [\delta(\beta + 1)]^{\frac{1}{\beta+1}} \right\}$$

temos

$$u(t, 0)(T - t)^{-\frac{1}{\beta+1}} \geq C_1.$$

Como $u(t, \cdot)$ é mínimo em $x = 0$, pois $u_x \geq 0$, temos $u_{xx}(t, 0) \geq 0$ e portanto

$$u_t(t, 0) = \phi'(u_x(t, 0))u_{xx}(t, 0) - u^{-\beta}(t, 0) \geq -u^\beta(t, 0),$$

isto é

$$u_t(t, 0)u^\beta(t, 0) \geq -1.$$

Integrando de t a T e sabendo que $u(T, 0) = 0$, existe $C_2 = (\beta + 1)^{\frac{1}{\beta+1}}$ tal que

$$u(t, 0)(T - t)^{-\frac{1}{\beta+1}} \leq L_2.$$

b) Como, pelo Teorema 2.7 temos que $u_{xt} \geq 0$, em $[0, T) \times [0, a]$ temos

$$u_t(t, x) \geq u_t(t, 0) = \phi'(u_x(t, 0))u_{xx}(t, 0) - u^{-\beta}(t, 0) \geq -u^\beta(t, 0).$$

Sabendo que $\phi(s) > 0$ para todo $s \geq 0$ e como $u(t, \cdot)$ atinge mínimo em $x = 0$, então $u_{xx}(t, 0) \geq 0$.

Utilizando o item anterior obtemos

$$L_1(T - t)^{-\frac{\beta}{\beta+1}} \leq u(t, 0) \leq L_2(T - t)^{-\frac{\beta}{\beta+1}}$$

Daí

$$-L_1^{-\beta}(T-t)^{\frac{-\beta}{\beta+1}} \leq -u^{-\beta}(t,0) \leq -L_2^{-\beta}(T-t)^{\frac{-\beta}{\beta+1}}$$

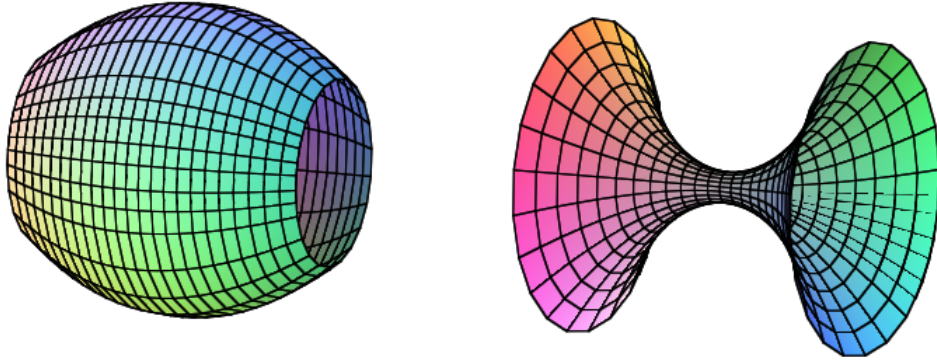
e portanto existe $L_3 = L_2^{-\beta}$ tal que

$$-(T-t)^{\frac{\beta}{\beta+1}}u_t(t,x) \leq L_3.$$

■

2.3.3 Interpretação dos Resultados

De acordo com o lema 2.10 e o teorema 2.12 da seção anterior 2.3.2, o fluxo de curvatura média em superfícies de revolução com condição de fronteira do tipo Dirichlet transforma uma superfície inicial à esquerda em uma superfície a direita da figura abaixo.



2.4 Fluxo de curvatura média com condição de fronteira singular

O estudo de equações do fluxo curvatura média com condição singular foi motivado pelo que fizemos na dissertação de mestrado [73], pelos artigos [19] e [29] e pelo motivo

de que não há bibliografia que consta tal estuda. Todos os resultados desta seção são novos. Esta seção será dividida em duas subseções, inicialmente provaremos a existência e regularidade de solução até um tempo finito T do problema (1.4) e depois mostraremos resultados sobre o comportamento da solução de (1.4) próximo do seu tempo e seu ponto de anulamento.

2.4.1 Existência e Regularidade

O problema a ser estudado nesta seção é o problema (1.4), ou seja

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{1 + (u_x)^2} - \frac{1}{u}, & x \in (0, a), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u_x(t, a) = -\frac{1}{u(t, x)^\beta}, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, a], \end{cases}$$

onde $\beta > 0$.

A existência de solução de tal problema é obtida estudando-se a existência de solução de um problema auxiliar e depois provando que toda solução de (1.4).

Teorema 2.13. *Se $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, a])$, então o problema (1.4) tem solução em $\mathcal{C}^{2,1}([0, a] \times [0, T))$.*

Demonstração: Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} v_t = F(t, x, v, v_x, v_{xx}), & x \in (0, a), t > 0, \\ v_x(t, 0) = 0, v_x(t, a) = -g(t, x, u(t, a)), & t > 0, \\ v(0, x) = v_0(x) > 0, & x \in [0, a], \end{cases} \quad (2.18)$$

onde $F(t, x, z, p, r) = \frac{r}{1 + p^2} - \frac{1}{z}$ para $x \in (0, a)$ $\frac{m}{2} < u < M$ e $|p| < C$, com

$$m = \min_{x \in [0, a]} v_0(x),$$

$$M = \max_{x \in [0, a]} v_0(x)$$

e

$$C = \max_{x \in [0, a]} u'_0(x)$$

e g uma função limitada.

Com estas condições sobre a F , garantimos a existência de solução para o problema (2.18) através do Teorema 5.4 do Apêndice A. De fato, as condições (i), (ii), (iii) e (iv) no Teorema 5.4 do Apêndice A são satisfeitas tomando-se

$$\mu(|z|) = \frac{2}{m} + |z|,$$

$a_1 = \frac{2}{m} + |p|$, $\Lambda_0 = 1 + |p|$, $a_0 = \frac{1}{1+C^2}$, $a_1 = 1$ e para qualquer função crescente a_0 e quaisquer constantes não negativas M_0 e M_1 .

A condição (v) do Teorema 5.4 do Apêndice A é satisfeita se tomarmos $c_1 = \frac{m^2}{4}$ e $c_2 = 2C$. De fato:

$$\left| F(t, x, z, p, r) - F(t, y, w, q, r) \right| \leq \left| \frac{(q^2 - p^2)r}{(1 + p^2)(1 + q^2)} + \frac{z - w}{wz} \right|$$

Usando o Teorema do Valor Médio e os valores de c_1 e c_2

Obtemos

$$\left| F(t, x, z, p, r) - F(t, y, w, q, r) \right| \leq (|x - y| + |z - w| + |p - q|)(c_1 + c_2).$$

Logo, existe solução para o problema auxiliar (2.18).

Finalmente para concluir a prova, basta observamos que pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B que

$$\frac{m}{2} \leq u(t, x) \leq M \text{ e } |u_x| \leq C.$$

Assim a solução do problema inicial e de fronteira auxiliar também é solução de (1.4) .

■

2.4.2 Anulamento e Estimativa

Nesta seção mostraremos resultados que conseguimos obter sobre anulamento somente em $x = 1$ das soluções de uma classe de problemas que inclui o problema (1.4) (Tomando $\alpha = 1$ e $\phi(s) = \arctg(s)$).

Considerando a classe de problemas

$$\begin{cases} u_t = (\phi(u_x))_x - \frac{1}{u^\alpha}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u_x(t, 1) = -(u(t, 1))^{-\beta}, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (2.19)$$

onde $\alpha, \beta > 0$, temos os seguintes resultados:

Lema 2.14. a) Se $\phi'(u'_0)u''_0 - \frac{1}{u_0^\alpha} \leq 0$ em $[0, 1]$, então $u_t \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T]$.

b) Se $u'_0 \leq 0$ em $[0, 1]$, então $u_x \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T]$.

c) Se $\left(\phi'(u'_0)u''_0 - \frac{1}{u_0^\alpha}\right)' \leq 0$ em $[0, 1]$ e as hipóteses do item a) e b) são satisfeitas, então $u_{xt} \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T]$.

Demonstração: a) Definindo $w = u_t$ temos

$$w_t - \phi'(u_x)w_{xx} - \phi''(u_x)w_x - u^{-\beta-1}w = 0,$$

$$w_x(t, 0) = 0, w_x(t, 1) = \beta u^{-\beta-1}(t, 1)w(t, 1) \text{ e } w(0, x) = \phi'(u'_0)u''_0 - \frac{1}{u_0^\alpha} \leq 0.$$

Definindo $v = e^{\psi(x)}w$ temos

$$v_t - \frac{1}{1 + u_x^2}v_{xx} + \left[\frac{2\psi^2}{1 + u_x^2} - \frac{2u_x u_{xx}}{(1 + u_x^2)^2} \right] v_x + \left[\frac{\psi'' - (\psi')^2}{1 + u_x^2} + \frac{2u_x u_{xx} \phi^2}{(1 + u_x^2)^2} - \frac{1}{u^2} \right] v = 0,$$

$$v_x(t, 0) - \psi(0)v(t, 0) = 0 \text{ e } v_x(t, 1) - [\beta u^{-\beta-1}(t, 1) + \psi'(1)]v(t, 1).$$

Tomando ψ de forma que $\phi'(0) \leq 0$ e $[\beta u^{-\beta-1}(t, 1) + \psi'(1)] < 0$ e usando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B temos que $v \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T]$, ou seja

$$u_t(t, x) \leq 0,$$

em $[0, 1] \times [0, T]$.

b) Definindo $h = u_x$, temos

$$h_t - \phi'(u_x)h_{xx} - \phi''(u_x)h_x - u^{-\beta-1}h = 0$$

Como $h(t, 0) = 0$, $h(t, 1) = -u^\beta(t, 1) \leq 0$ e $h(0, x) = u'_0(x) \leq 0$. Assim, pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B temos

$$u_x(t, x) \leq 0,$$

para todo $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T]$.

c) Definindo de $r = u_{xt}$ e usando os itens anteriores temos

$$r_t - \phi'(u_x)r_{xx} - \phi''(u_{xx})u_{xx}r_x - (\phi'''(u_x)u_{xx}^2 + \beta u^{-\beta-1})r = -\beta(\beta+1)u^{-\beta-2}u_t u_x \leq 0$$

Observe também que

$$r(t, 0) = u_{xt}(t, 0) = 0,$$

$$r(t, 1) = u_{xt}(t, 1) = \beta u^{\beta+1}(t, 1)u_t(t, 1) \leq 0$$

e

$$r(0, x) = \left(\phi'(u'_0)u''_0 - \frac{1}{u_0^\alpha} \right)' \leq 0.$$

Daí, pelo Princípio do Máximo, concluímos que $u_{xt} \leq 0$, para $t \in [0, T]$ e $x \in [0, 1]$. ■

Teorema 2.15. *Se ϕ é não decrescente $\phi(0) = 0$ e $\phi(u) < 0$, para $u < 0$, então a solução do problema (2.19) se anula em tempo finito. Em adicional, se as hipóteses do Lema 2.14 são satisfeitas então esta solução se anula em tempo finito somente em $x = 1$. Particularmente, a solução de (1.4) se anula em tempo finito somente para $x = 1$.*

Demonstração: Defina $F(t) = \int_0^1 u(t, x)dx$.

Derivando obtemos

$$F'(t) = \int_0^1 u_t dx = \int_0^1 (\phi(u_x))_x - \frac{1}{u^\alpha} dx \leq \int_0^1 (\phi(u_x))_x = \phi(u_x(t, 1)) - \phi(u_x(t, 0)) = \phi(-(u(t, 1))^\beta).$$

Usando as hipótese $-(u(t, x))^{-\beta}$ decrescente e ϕ não decrescente concluímos que

$$F'(t) \leq \phi(-u_0(1)^{-\beta}).$$

Assim $F(t) \leq F(0) - \phi(-u_0(1)^{-\beta})t$ e daí existe $t_0 > 0$ tal que $F(t_0) = 0$. Como u é não negativa e $u_x \leq 0$ existirá um T ($0 < T \leq t_0$) tal que $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t, 1) = 0$.

Para a unicidade basta aplicarmos o Teorema do Valor Médio:

$$u(t, 1) - u(t, x) = u_x(t, \xi)(1 - x) \leq u'_0(\xi)(1 - x) < 0,$$

para $0 \leq x < 1$.

Daí $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t, x) > 0$, para $0 \leq x < 1$. ■

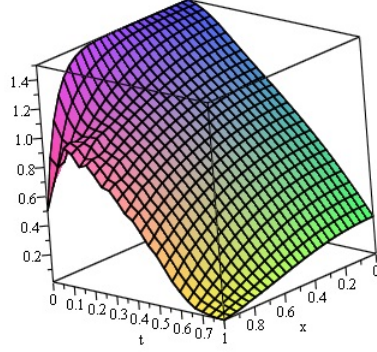
Na figura abaixo, o resultado obtido numericamente pelo software Maple aproximando o problema (1.4) do seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u_\epsilon)_t = \frac{(u_\epsilon)_{xx}}{(1 + (u_\epsilon)_x^2)} - \frac{(u_\epsilon)}{(u_\epsilon + \epsilon)^2}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ (u_\epsilon)_x(t, 0) = 0, (u_\epsilon)_x(t, 1) = -\frac{(u_\epsilon)(t, 1)}{(u_\epsilon + \epsilon)^{\beta+1}}, & t > 0, \\ (u_\epsilon)(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{array} \right. \quad (2.20)$$

fazendo $u_0(x) = -x^{10} + 1, 5$, $\beta = 1$ e $\epsilon = 0, 2$, concorda com o que conseguimos mostrar anteriormente (Teorema 2.15).

Linhas de Comando:

```
>PDE := diff(u(x,t),t) = (diff(u(x,t),x,x))/(1 + (diff(u(x,t),x))^2) - u(x,t)/(0.2 + u(x,t))^2
>IBC := (0.2 + u(1,t))^2 * (D[1](u))(1,t) = -u(1,t), u(x,0) = -x^10 + 1.5, (D[1](u))(0,t) = 0
> pds := pdsolve(PDE,IBC,numeric)
> pds: -plot3d(t = 0...8, x = 0..1)
```



Finalmente para concluir este capítulo sobre equações fluxo curvatura média mostramos o comportamento da solução da equação fluxo de curvatura média com condição de fronteira tipo mista singular próximo do tempo de anulamento T .

Proposição 2.16. *Se as hipóteses do Lema 2.14 são satisfeitas para o dado inicial, então obtemos as seguintes estimativas:*

- a) $C_1 \leq u(t, 1)(T - t)^{\frac{-1}{\alpha+1}} \leq C_2$ para todo $t \in [0, T)$,
- b) $-u_t(t, x)(T - t)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \leq C_3$ para todo $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T)$,
- c) $C_4 \leq -u_x(t, 1)(T - t)^{\frac{-\beta}{\alpha+1}} \leq C_5$ para todo $t \in [0, T)$,

onde C_1, C_2 são constantes dependendo apenas de α e β e T o tempo de anulamento.

Demonstração: a) Observemos inicialmente que $w = u_t$ satisfaz

$$w_t - \phi'(u_x)w_{xx} - \phi'''(u_x)w_x - \alpha u^{-\alpha-1}w = 0$$

em $(0, 1) \times (0, T)$.

Assim o mínimo e o máximo de w são atingidos na fronteira parabólica e portanto $u_t < 0$ para $t \in (0, 1) \times (0, T)$, pois se $u_t(t_0, x_0) = 0$ para $(t_0, x_0) \in (0, 1) \times (0, T)$ teríamos (t_0, x_0) ponto interior da fronteira parabólica sendo o máximo, visto que $u_t \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$ pelo Lema 2.14.

Daí, pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B teríamos $u_t = 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$ o que implica que $u(t, x) \leq u(T, x)$, para todo $t < T$.

Como $u(T, 1) = 0$, pelo Teorema 2.15, teríamos $u(t, 1) = 0$, para todo $t < T$. Portanto, como T é o mínimo tal que $u(t, 0)$, temos $u_t < 0$, para $t \in (0, T)$ e $x \in (0, 1)$.

Como pelo item c) do Lema 2.14 temos $u_{xt} \leq 0$, em $[0, 1] \times [0, T)$ teríamos

$$u_t(t, 1) \leq u_t(t, x) < 0,$$

para $t \in (0, T)$ e portanto $u_t < 0$ em $(0, 1] \times (0, T)$.

Observe que $-u_t(\eta, x)$ e $u^\beta(\eta, x)$ são positivos para $x \in [\eta, 1 - \eta]$ e pelo fato de que u_t satisfaz uma equação parabólica e $u_t < 0$ em $(0, 1] \times (0, T)$ temos que

$$\min_{t \in [\eta, T)} \{-u_t(t, \eta)\}, \min_{t \in [\eta, T)} \{-u_t(t, 1 - \eta)\}$$

existem

Assim, definindo $\delta_1 = \min_{x \in [\eta, 1 - \eta]} \{-u_t(\eta, x), u^\beta(\eta, x)\}$, $\delta_2 = \min_{x \in [\eta, T)} \{-u_t(t, \eta)u^\alpha(t, \eta)\}$ e $\delta_3 = \min_{x \in [\eta, T)} \{-u_t(1, 1 - \eta)u^\alpha(t, 1 - \eta)\}$, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ e definindo

$$J(t, x) = u_t(t, x) + \delta u^{-\alpha}(t, x)$$

temos $J \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$.

Como, pelos itens b) e c) do Lema 2.14, temos $u(t, 1) \leq u(t, x)$ e $u_t(t, 1) \leq u_t(t, x)$ em $[0, 1] \times [0, T)$ obtemos

$$u_t(t, 1)u^\alpha(t, 1) \leq -\delta.$$

Integrando de 0 a T temos para $t > \eta$ a seguinte desigualdade

$$u(t, 1)^{\alpha+1} \geq \alpha(\alpha + 1)(T - t),$$

Como, pelo item a) do Lema 2.14

$$u_t \leq 0$$

em $[0, 1] \times [0, T)$, temos que existe $C_1 = [\alpha(\alpha + 1)]^{\frac{1}{1+\alpha}}$ tal que

$$u(t, 1) \geq C_1(T - t)^{\frac{1}{\alpha}},$$

para todo $t \in [0, T)$.

Utilizando o item b) do Lema 2.14, temos que a função $u(t, \cdot)$ atinge seu mínimo em $x = 1$ e portanto $u_{xx}(t, 1) \geq 0$.

Assim,

$$u_t = \phi'(u_x)u_{xx} - u^{-\alpha} \geq -u^{-\alpha},$$

ou seja

$$u_t u^\alpha \geq -1,$$

em $[0, 1] \times (0, 1)$.

Integrando de t a T obtemos $C_2 = (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha+1}}$ tal que

$$u(t, 1) \leq C_2(T - t)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

b) Como pelo item c) do Lema 2.14 temos $u_{xt} \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$ obtemos

$$u_t(t, x) \leq u_t(t, 1) = \phi'(u_x(t, 1))u_{xx}(t, 1) - u^{-\beta}(t, 1) \geq -u^{-\beta}(t, 1).$$

Note que para obtermos a desigualdade anterior observamos que $\phi(s) > 0$, para todo $s > 0$ e como $u(t, \cdot)$ atinge mínimo em $x = 1$ temos $u_{xx}(t, 1) \geq 0$.

Do item anterior a) temos

$$C_1(T - t)^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq u(t, 1) \leq C_2(T - t)^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

e portanto

$$-C_1^{-\alpha}(T - t)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \leq -u(t, 1)^{-\alpha} \leq -C_2^{-\alpha}(T - t)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

isto é existe $C_3 = C_1^\alpha$ tal que

$$u_t(t, x) \leq -u^{-\alpha}(t, 1) \geq -C_3(T - t)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

c) Sabendo que $u_x(t, 1) = -u^{-\beta}(t, 1)$ utilizando o item a) obtemos $C_4 = C_2^{-\beta}$ e $C_5 = C_1^{-\beta}$ tal que

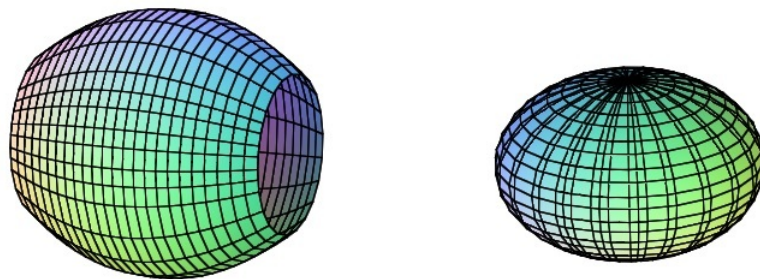
$$C_4 \leq -u_x(t, 1)(T - t)^{\frac{\beta}{\alpha+1}} \leq C_5,$$

para todo $t \in [0, T)$.

■

2.4.3 Interpretação dos Resultados

Sabendo que a evolução de superfícies de revolução via fluxos de curvatura podem ser encaradas como evolução de curvas. O Teorema 2.15 e a Proposição 2.16 da seção anterior 2.4.2 garantem que uma superfícies inicial do lado esquerdo da figura abaixo evolui pelo fluxo de curvatura média com condição de fronteira singular a uma superfície ao lado.



Fluxo de curvatura de Gauss

Neste capítulo iremos estudar os problemas (1.6), (1.5) e (1.7). Na primeira seção deste capítulo, deduziremos a equação do fluxo de curvatura de Gauss em superfícies de revolução. As duas seções posteriores, 3.2 e 3.3, serão ambas divididas em duas subseções, na subseção 3.2.1 (3.3.1) mostraremos a existência e regularidade global no tempo da solução para o problema (1.6)((1.5)) respectivamente e na subseção 3.2.2 (3.3.2) exibiremos o comportamento assintótico desta solução. Todos os resultados das seções 3.2 e 3.3 já são conhecidos, vide [61]. Os resultados novos deste capítulo encontram-se na seção 3.4. Esta última seção é dividida em três subseções, na primeira mostraremos resultados sobre a existência e regularidade de solução para o problema (1.7), na segunda exibiremos o comportamento assintótico da solução de (1.7) para dados iniciais não convexos e na última subseção demonstraremos o anulmento em tempo finito e estimativas da solução de (1.7) para dados iniciais convexos. Os resultados já conhecidos deste capítulo serão detalhados nesta tese, pois temos como objetivo fazer um estudo mais geral de fluxos de curvatura com as três condições de fronteira: Dirichlet, Neumann e singular.

3.1 Motivação

Considerando uma família de superfícies $\gamma(t, \theta, x) \subset \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\gamma(t, \theta, x) = (x, u(t, x) \cos \theta, u(t, x) \sin \theta), \quad (3.1)$$

onde $x \in [a, b]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Fazendo esta evoluir através do fluxo curvatura de Gauss, isto é

$$\gamma_t = -K \vec{n}, \quad (3.2)$$

onde K representa a curvatura de Gauss e $\vec{n}$ o vetor normal à superfície, concluímos que u satisfaz

$$u_t = \frac{u_{xx}}{u \left[1 + (u_x)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.3)$$

$$\text{observando que } K = -\frac{u_{xx}}{u(1 + u_x^2)} \text{ e } \vec{n} = \left(-\frac{u_x}{\sqrt{1 + (ux)^2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + (ux)^2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + (ux)^2}} \right).$$

3.2 Fluxo de curvatura de Gauss com condição de fronteira do tipo Neumann

A equação deduzida anteriormente com condição de fronteira tipo Neumann, problema (1.6), foi objeto de estudo no artigo [61]. Os resultados obtidos em [61] sobre o problema (1.6) são existência e regularidade de sua solução para todo $t > 0$ e comportamento assintótico desta solução. Nesta seção iremos detalhar os principais resultados da referência [61]. Primeiramente apresentaremos resultados de existência e regularidade de solução para (1.6).

3.2.1 Existência e Regularidade

Consideramos nesta seção o problema de valor inicial e de fronteira (1.6), ou seja

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = \frac{u_{xx}}{\left[1 + (u_x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, & x \in (a, b), t > 0, \\ u_x(t, a) = 0, u_x(t, b) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [a, b], \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Em [61] prova-se existência de solução global no tempo para o problema (1.6) utilizando o Teorema 5.3 do Apêndice A. Prova-se também que a solução tem regularidade $H^{2+\alpha}((a, b) \times [0, \infty))$ (Ver Notações)

Teorema 3.1. *Seja $u_0(x)$ um dado inicial positivo em $[a, b]$, com $u_0 \in H^{2+\alpha}(a, b)$ e derivadas de segunda ordem contínuas satisfazendo*

$$u'_0(a) = u'_0(b) = 0.$$

Então, existe uma solução $u \in H^{2+\alpha}((a, b) \times [0, \infty))$ do problema (1.6).

Demonstração: Seja $M = \max_{x \in [a, b]} \{u_0(x)\}$ e $\epsilon > 0$. Definindo

$$v(t, x) = M + \epsilon + \epsilon \frac{t}{t+1} - A\epsilon \sin\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right),$$

onde A é uma constante positiva satisfazendo

$$A < \min\left\{1, \frac{M(b-a)^2}{\pi^2(T+1)^2}\right\}.$$

Desta maneira $-v_t + \frac{1}{v(1+v_x^2)^{\frac{3}{2}}}v_{xx} < 0$ e portanto $u(t, x) \leq v(t, x)$, para todo $x \in [a, b] \times [0, T)$. De fato, primeiramente temos que

$$(u-v)_t - \frac{1}{u(1+u_x^2)^{\frac{3}{2}}}u_{xx} + \frac{1}{v(1+v_x^2)^{\frac{3}{2}}}v_{xx} \leq 0$$

Sabendo que nas condições de fronteira temos $u_x(t, a) = 0$, $u_x(t, b) = 0$, $v_x(t, a) < 0$ e $v_x(t, b) > 0$, temos pelo Princípio do Máximo que

$$u(t, x) \leq v(t, x) \leq \sup_{[a, b] \times [0, T]} v(t, x) = M + 2\epsilon.$$

Como ϵ foi tomado arbitrariamente, temos $u(t, x) \leq M$, para todo $x \in [a, b]$ e $t \in [0, T]$. Assim estamos nas hipóteses do Teorema 5.2 do Apêndice A e portanto concluímos a existência de solução para o problema (1.6). ■

3.2.2 Comportamento Assintótico

Também em [61] foi obtido, sem qualquer hipótese de convexidade sobre o dado inicial, o comportamento assintótico da solução de (1.6) pelo seguinte Teorema:

Teorema 3.2. *Se u_0 é uma função positiva em $H^{2+\alpha}(a, b)$ com segundas derivadas contínuas até o bordo. Suponha que a primeira derivada de u_0 assume valor zero no pontos $x = a$ e $x = b$. Então a solução de (1.6) $u(t, \cdot)$ converge para um segmento de reta horizontal, quando $t \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Definindo $E(t) = \int_a^b (1 + u_x^2) dx$, derivando, integrando por partes e utilizando as condições de fronteira do problema (1.6) obtemos

$$E'(t) = 2 \int_a^b u_x u_{xt} = 2 \int_a^b u_x u_{tx} dx = - \int_a^b u_t u_{xx} dx$$

Sabendo que u_t e u_{xx} tem o mesmo sinal temos $E'(t) \leq 0$ e como E é limitada inferiormente devemos ter $E(t)$ decresce para uma constante e $E'(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Assim $u_t u_{xx} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e usando a equação de (1.6) temos que $u_t \rightarrow 0$ e $u_{xx} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Logo, como u se torna independente de t com segunda derivada $u''_\infty(x) = 0$ temos que $u(t, \cdot)$ converge a um segmento de reta. ■

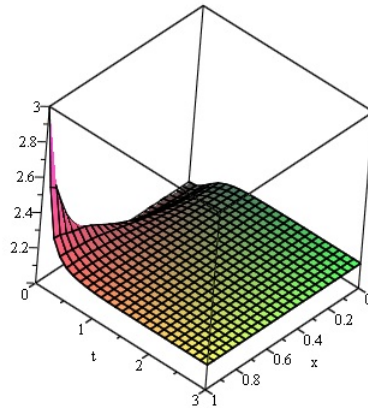
Aproximando o problema (1.6) do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u_\epsilon)_t = \frac{(u_\epsilon)_{xx}}{(u_\epsilon) + \epsilon \left[1 + (u_\epsilon)_x^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, & x \in (a, b), t > 0, \\ (u_\epsilon)_x(t, a) = 0, (u_\epsilon)_x(t, b) = 0, & t > 0, \\ (u_\epsilon)(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (3.5)$$

e utilizando o software Maple, conseguimos obter as soluções numéricas nos casos dado inicial não convexo ($\epsilon = 0, 2$, $u_0(x) = x^{10} + 2$, $a = 0$ e $b = 1$) e no convexo ($\epsilon = 0, 2$, $u_0(x) = -x^{10} + 2$, $a = 0$ e $b = 1$) respectivamente. Em ambas as figuras podemos observar a concordância do resultado numérico com o resultado analítico obtido na referência [61].

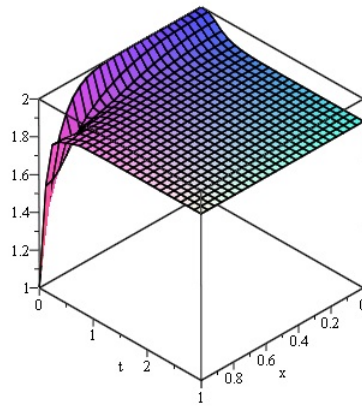
Linhas de comando para o problema de Gauss com condição de fronteira Dirichlet e condição inicial não convexa:

```
>PDE := diff(u(x,t),t) = (diff(u(x,t),x,x))/((u(x,t)+0.2)*(1+(diff(u(x,t),x))^2)^1.5
>IBC := u(x,0) = x^10 + 2, (D[1](u))(0,t) = 0, (D[1](u))(1,t) = 0
>pds := pdsolve(PDE,IBC,numeric)
>pds: -plot3d(t = 0..3, x = 0..1)
```



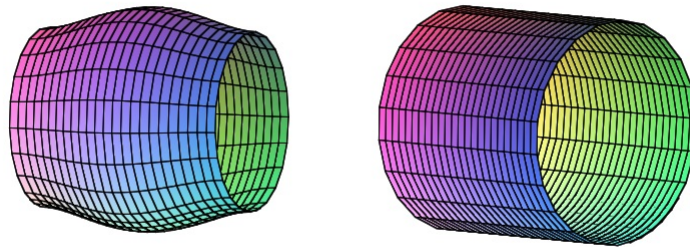
Linhas de comando para o problema de Gauss com condição de fronteira Dirichlet e condição inicial convexa:

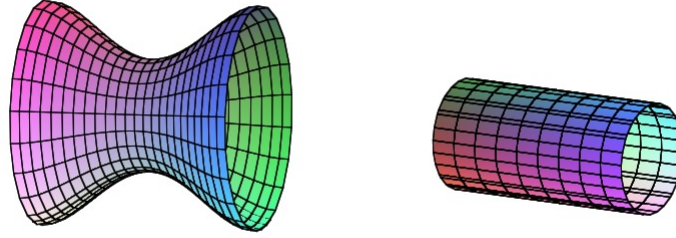
```
>PDE := diff(u(x,t),t) = (diff(u(x,t),x,x))/((u(x,t)+0.2)*(1+(diff(u(x,t),x))^2)^1.5)
>IBC2 := u(x,0) = -x^10 + 2, (D[1](u))(0,t) = 0, (D[1](u))(1,t) = 0
>pds2 := pdsolve(PDE,IBC2,numeric)
>pds2: -plot3d(t = 0..3, x = 0..1)
```



3.2.3 Interpretação dos Resultados

Segundo o Teorema 3.2 e o software matemático Maple, o fluxo curvatura de Gauss com condição de fronteira Neumann transforma superfícies iniciais do lado esquerda das figuras em superfícies do lado direito respectivamente.





3.3 Fluxo de curvatura de Gauss com condição de fronteira do tipo Dirichlet

A equação fluxo de curvatura de Gauss com condição de fronteira tipo Dirichlet, problema (1.5), também foi objeto de estudo da referência [61]. Neste artigo os resultados obtidos sobre o problema (1.5) foram existência e regularidade de sua solução, na subseção 3.3.1, e o comportamento assintótico desta solução, na subseção 3.3.2. Nesta seção apresentaremos os principais resultados do trabalho [61].

3.3.1 Existência e Regularidade

Consideramos nesta seção o problema de valor inicial e de fronteira (1.5), ou seja

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = \frac{u_{xx}}{u \left[1 + (u_x)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, & x \in (a, b), t > 0, \\ u(t, a) = u_0(a), u(t, b) = u_0(b), & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{array} \right.$$

Em [61] prova-se existência de solução global no tempo para o problema (1.5) utilizando o Teorema 5.3 do Apêndice A.

Teorema 3.3. *Se $u_0(x)$ for positiva em $[a, b]$, com $f \in H^{2+\alpha}((a, b))$ e com segunda derivada contínua satisfazendo*

$$u_0''(a) = u_0''(b) = 0.$$

Então, existe uma solução $u \in H^{2+\alpha}((a, b) \times [0, \infty))$ para o problema (1.5).

Demonstração: Consideramos o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{g(u) \left[1 + (u_x)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, & x \in (a, b), t > 0, \\ u(t, a) = u_0(a), u(t, b) = u_0(b), & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (3.6)$$

onde $m = \min_{x \in [a, b]} u_0(x)$ e $g(z)$ é uma função decrescente em $[0, \infty)$, $g(z) = \frac{m}{4}$, para $z \leq \frac{m}{4}$, $g(z) = z$, para $z \geq \frac{m}{2}$ e $g(z)$ é estendida de maneira simétrica para valores negativos.

Pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B temos que u atinge seu máximo na fronteira parabólica. Como $u(t, a) = u_0(a)$ e $u(t, b) = u_0(b)$, temos que o máximo de u é realizado por f e portanto

$$u(t, x) \leq M = \max_{x \in [a, b]} u_0(x),$$

para $x \in [a, b]$ e $t \in [0, T)$.

Sabendo que g foi definida simetricamente, então $-u$ é solução do problema (3.6) e pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B temos

$$m \leq u(t, x),$$

para $x \in [a, b] \times [0, T)$

Definindo $v(t, x) = \max_{\Gamma} u_x(t, x)$, onde Γ é a fronteira parabólica, obtemos usando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B que $u(t, x) \leq v(t, x)$. Assim, estamos nas condições do Teorema 5.2 do Apêndice A, portanto concluímos a existência de solução do problema (1.5). ■

3.3.2 Comportamento Assintótico

Também em [61] foi obtido, sem qualquer hipótese de convexidade no dado inicial, o comportamento assintótico da solução pelo seguinte Teorema:

Teorema 3.4. *Se u_0 é uma função positiva em $H^{2+\alpha}(a, b)$ com segundas derivadas contínuas até o bordo. Suponha que*

$$u_0''(a) = u_0''(b) = 0.$$

Então a solução de (1.5) $u(t, \cdot)$ converge para um segmento de reta unindo $(a, f(a)), (b, f(b))$, quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração: Definindo $E(t) = \int_a^b (1 + u_x^2) dx$, derivando, integrando por partes e substituindo as condições de fronteira do problema (1.5) temos

$$E'(t) = 2 \int_a^b u_x u_{xt} dx = 2 \int_a^b u_x u_{tx} dx = - \int_a^b u_t u_{xx} dx.$$

Como u_t e u_{xx} tem o mesmo sinal temos que $E(t)$ decresce para um constante e $E'(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

Daí pela equação (1.5) temos $u_t \rightarrow 0$ e $u_{xx} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

Como u se torna independente de t com segunda derivada $u_\infty''(x) = 0$. Portanto a solução de (1.5) $u(t, \cdot)$ converge a um segmento de reta.

■

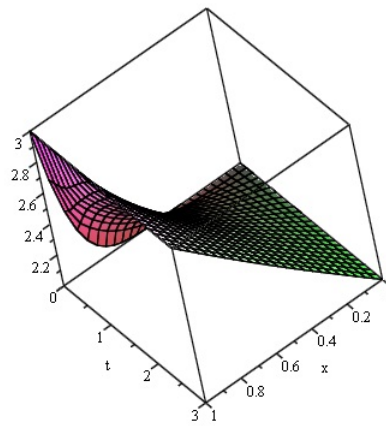
Aproximando o problema (1.5) do problema

$$\begin{cases} (u_\epsilon)_t = \frac{(u_\epsilon)_{xx}}{((u_\epsilon) + \epsilon) \left[1 + (u_\epsilon)_x^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, & x \in (a, b), t > 0, \\ (u_\epsilon)_x(t, a) = u_0(a), (u_\epsilon)_x(t, b) = u_0(b), & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [a, b], \end{cases} \quad (3.7)$$

e utilizando o software Maple, tanto para o caso em que o dado inicial é convexo ($\epsilon = 0, 2$, $u_0(x) = x^{10} + 2$, $a = 0$ e $b = 1$) como no não convexo ($\epsilon = 0, 2$, $u_0(x) = -x^{10} + 2$, $a = 0$ e $b = 1$) respectivamente. Em ambos os casos podemos observar nas figuras que os resultados numéricos coincidem com o resultado analítico obtido no trabalho [61].

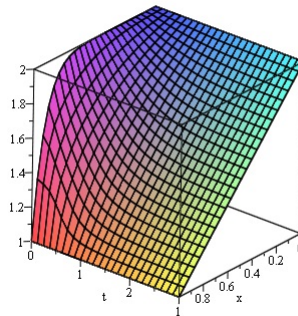
Linhas de comando para o problema de Gauss com condição de fronteira Dirichlet e condição inicial não convexa:

```
>PDE := diff(u(x,t),t) = (diff(u(x,t),x,x))/((u(x,t)+0.2)*(1+(diff(u(x,t),x))^2)^1.5)
>IBC := u(0,t) = 2, u(1,t) = 3, u(x,0) = x^10 + 2
>pds := pdsolve(PDE,IBC,numeric)
>pds: -plot3d(t = 0..3, x = 0..1)
```



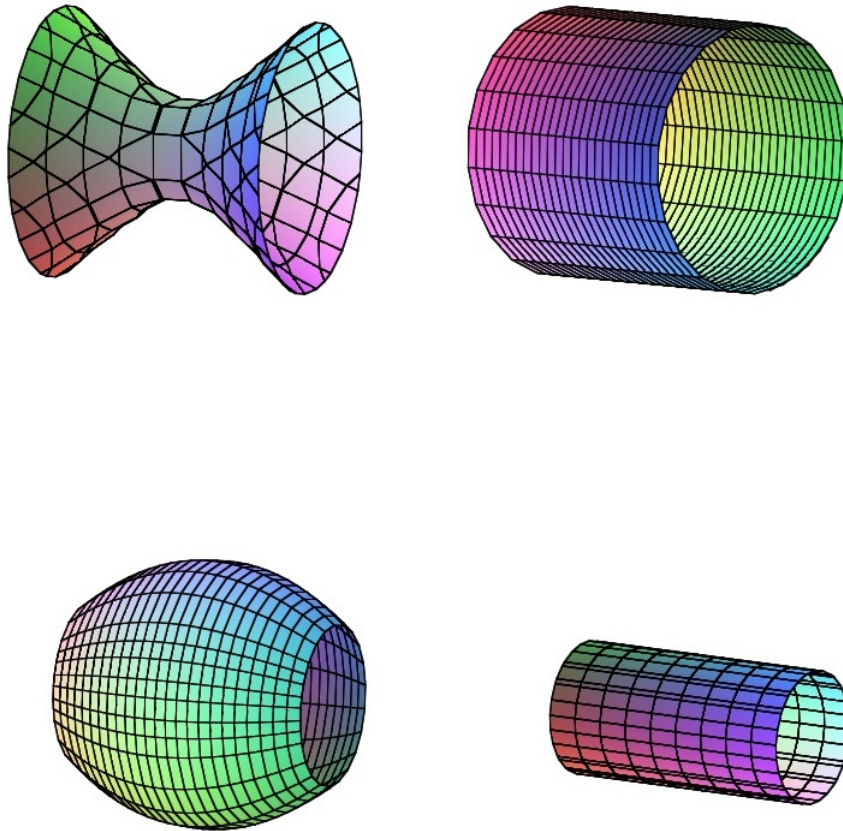
Linhas de comando para o problema de Gauss com condição de fronteira Dirichlet e condição inicial convexa:

```
>PDE := diff(u(x,t),t) = (diff(u(x,t),x,x))/((u(x,t)+0.2)*(1+(diff(u(x,t),x))^2)^1.5)
>IBC2 := u(0,t) = 2, u(1,t) = 1, u(x,0) = -x^10 + 2
>pds2 := pdsolve(PDE,IBC2,numeric)
>pds2: -plot3d(t = 0..3, x = 0..1)
```



3.3.3 Interpretação dos Resultados

Com base no Teorema 3.4 e com o auxílio do software Maple concluímos que as superfícies do lado esquerdo das figuras evoluem via fluxo de curvatura de Gauss com condição de fronteira Dirichlet a superfícies do lado direito respectivamente.



3.4 Fluxo de curvatura de Gauss com condição de fronteira singular

O estudo da equação de fluxo curvatura de Gauss com condição de fronteira tipo singular, isto é o problema (1.7), não consta em nenhuma referência da área. Todos os

resultados desta seção são novos. Nesta seção mostraremos todos os resultados obtidos sobre o estudo do problema (1.7).

3.4.1 Existência e Regularidade

O objetivo desta seção é estudar sobre o problema de valor inicial e de fronteira (1.7), ou seja

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = \frac{u_{xx}}{u \left[1 + (u_x)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, & x \in (a, b), t > 0, \\ u_x(t, a) = 0, u_x(t, b) = -\frac{1}{u(t, b)^\beta}, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [a, b], \end{array} \right.$$

onde $\beta > 0$.

Como o problema acima (1.7) não está nas condições dos teoremas 5.1, 5.2 e 5.3 do Apêndice A, então, para provar a existência de solução de (1.7), provamos que a solução do problema auxiliar (3.8), obtida diretamente aplicando o Teorema 5.3 do Apêndice A, é também solução de (1.7).

Teorema 3.5. *Seja $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, 1])$, então o problema (1.7) tem solução em $\mathcal{C}^{1,2}([0, T) \times [0, 1])$ para algum $T > 0$.*

Demonstração: Considere o problema auxiliar

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = \frac{u_{xx}}{g(u) \left[1 + (u_x)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, & x \in (a, b), t > 0, \\ u_x(t, a) = 0, u_x(t, b) = -\frac{1}{(g(u(t, b)))^\beta}, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [a, b], \end{array} \right. \quad (3.8)$$

onde $\beta > 0$, $g(u) = \frac{m}{4}$, para $u \leq \frac{m}{4}$, $g(u) = u$, para $u \geq \frac{m}{2}$, g estendida por simetria para valores negativos e $m = \min_{x \in [a, b]} u_0(x)$.

Nestas condições, aplicando o Teorema 5.3 do Apêndice A, obtemos uma solução para o problema auxiliar (3.8). Em seguida iremos provar que toda solução do problema auxiliar (3.8) é também solução do problema (1.7).

Primeiramente observamos que a solução do problema auxiliar (3.8) satisfaz as hipóteses do Teorema 5.3 do Apêndice A, isto é, que a solução u de (3.8) é tal que

$$\min_{x \in [a, b]} u_0(x) = m \leq u \leq M = \max_{x \in [a, b]} u_0(x).$$

De fato, definindo

$$v(t, x) = M + \epsilon + \epsilon \frac{t}{t+1} - A\epsilon \sin\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right),$$

onde $A < \min\left\{1, \frac{M(b-a)^2}{\pi^2(T+1)^2}\right\}$ e suficiente pequeno de forma que

$$v_t > \frac{v_{xx}}{g(v) \left[1 + (v_x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.9)$$

Note que v é tal que $v_{xx} \leq 0$ e $M \leq v \leq M + 2\epsilon$.

Note também que $u(t, x) < v(t, x)$ para $(t, x) \in [a, b] \times [0, T]$. De fato, u e v não se interceptam em $t = 0$ pois $u_0(x) \leq M$ e $v_0(x) > M$ e além disso u e v não se interceptam em $t_0 > 0$ e $x \in (a, b)$, pois se isto ocorresse supondo que t_0 é o primeiro tempo que u e v se interceptam no interior de $[a, b]$ existirá um $x_0 \in (a, b)$ tal que $v(t, x_0) > u(t, x_0)$, para $t < t_0$, $v_t(t_0, x_0) - u_t(t_0, x_0) \leq 0$, $v_x(t_0, x_0) = u_x(t_0, x_0)$ e $v_{xx}(t_0, x_0) = u_{xx}(t_0, x_0)$. Assim

$$v_t(t_0, x_0) < u_t(t_0, x_0) = \frac{u_{xx}(t_0, x_0)}{g(u(t_0, x_0))(1 + (u_x(t_0, x_0))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{v_{xx}(t_0, x_0)}{g(v(t_0, x_0))(1 + (v_x(t_0, x_0))^2)^{\frac{3}{2}}},$$

o que contraria (3.9).

u e v também não se interceptam em $t_0 > 0$ e $x = a$ ou b pois as condições de fronteira $u_x(t, a) = 0$, $u_x(t, b) \leq 0$, $v_x(t, a) < 0$ e $v_x(t, b) > 0$ indicam que se u e v se interceptam na fronteira de $[a, b]$ então certamente u e v também se interceptam no interior de $[a, b]$, o que já provamos que não ocorre.

Assim como $u_0 \leq M$ temos $u < v$ em $[0, T] \times [a, b]$.

Logo, $v \leq M + 2\epsilon$ e $u < v$ implicam que $u < M + 2\epsilon$ e pelo fato de ϵ ser arbitrário concluimos que $u \leq M$ em $[0, T] \times [a, b]$.

Para obter a estimativa de u por baixo, observamos que g é uma função simétrica,

$$\min_{x \in [a,b]} u_0(x) = - \max_{x \in [a,b]} -u_0(x), \inf u = - \sup(-u).$$

e

$$m = \min_{x \in [a,b]} u_0(x) \text{ e } M = \max_{x \in [a,b]} u_0(x).$$

Finalmente, finalizamos o problema de existência de solução para o problema (1.7) observando que toda solução de (3.8) é também solução de (1.7). De fato, como a solução do problema auxiliar (3.8) satisfaz $u \geq m > \frac{m}{2}$ e como por definição $g(u) = u$, para $u \geq \frac{m}{2}$ segue o resultado. ■

3.4.2 Comportamento Assintótico(Condição inicial não convexa)

Os resultados desta seção diferem um pouco dos resultados obtidos em seção anteriores (seções 3.2 e 3.3). A hipótese de convexidade sobre o dado inicial é de extrema importância, uma vez que os resultados obtidos para o caso dado inicial convexo e não convexo são diferentes. Nesta seção iremos mostrar resultados sobre o comportamento assintótico da solução da equação de fluxo de curvatura de Gauss com condição de fronteira tipo singular e com dado inicial não convexo.

Lema 3.6. *Se $u_0 \in \mathcal{C}^2([a, b])$ e $u_0'' \geq 0$, então $u_t \geq 0$ em $[a, b] \times [0, T)$.*

Demonstração: Definindo $h = u_t$ e derivando obtemos

$$h_t = \frac{1}{u(1+u_x^2)^{\frac{3}{2}}} h_{xx} + \frac{3u_x}{u^2(1+u_x^2)^{\frac{5}{2}}} h_x + \left[\frac{u_{xx}}{u^2(1+u_x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{u(1+u_x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] h.$$

Nas condições de fronteira temos

$$h_x(t, 0) = 0 \text{ e } h_x(t, 1) = \beta u^{-\beta-1}(t, 1)h \text{ e na condição inicial}$$

$$h(0, x) = \frac{u_0''(x)}{u_0(x)(1+(u_0')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Assim, aplicando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B temos o resultado. ■

Teorema 3.7. *Se u_0 estão nas condições do Lema 3.6 então a solução de (1.7) é definida para todo t e $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x)$ é uma segmento de reta.*

Demonstração: Defina $E(t) = \int_a^b (1 + (u_x)^2)dx$. Derivando e depois integrando por partes obtemos

$$E'(t) = 2 \int_a^b u_x u_{xt} dx = 2 \left(u_x(t, b) u_t(t, b) - u_x(t, a) u_t(t, a) - \int_a^b u_t u_{xx} dx \right).$$

Da equação do problema (1.7) concluímos que u_t e u_{xx} tem o mesmo sinal. Usando as condições de fronteira de (1.7) obtemos $E'(t) \leq 0$. Assim, E é uma função decrescente.

Como E é limitada inferiormente, ou seja

$$E(t) \geq b - a,$$

e E é uma função decrescente, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} E'(t) = 0$. Assim $u_t u_{xx} \rightarrow 0$.

Sabendo que $u_t = \frac{1}{u(1 + (u_x)^2)^{\frac{3}{2}}}$ concluímos que $u_t \rightarrow 0$ e $u_x \rightarrow 0$.

Como $u(t, x)$ é limitado por cima e por baixo e não decrescente em t . Assim existe $u_\infty(x)$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = u_\infty(x)$ e esta convergência é uniforme pois $[0, 1]$ é compacto.

Assim, usando o Teorema 5.25 temos que $u_\infty''(x) = 0$, ou seja um segmento de reta.

■

Aproximando o problema (1.7) do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u_\epsilon)_t = \frac{(u_\epsilon)_{xx}}{((u_\epsilon) + \epsilon) \left[1 + (u_\epsilon)_x^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ (u_\epsilon)_x(t, 0) = 0, (u_\epsilon)_x(t, 1) = -\frac{u_\epsilon(t, 1)}{((u_\epsilon) + \epsilon)^{\beta+1}}, & t > 0, \\ (u_\epsilon)(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{array} \right. \quad (3.10)$$

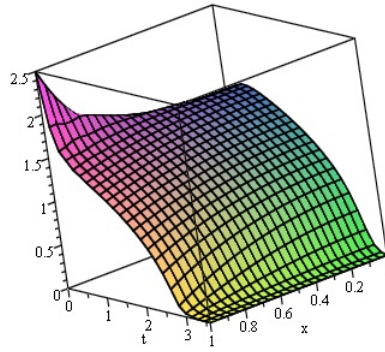
e resolvendo o problema aproximado numericamente pelo software Maple fazendo $\epsilon = 0, 2$, $u_0(x) = x^5 + 1, 5$ e $\beta = 1$, podemos observar que o resultados analítico desta seção coincidem com o resultado numérico plotado pelo software através da figura abaixo:

Linhas de Comando:

```

> PDE := diff(u(x,t),t) = (diff(u(x,t),x,x))/((u(x,t)+0.2)*(1+(diff(u(x,t),x))^2)^1.5)
> IBC2 := {(0.2+u(1,t))^2*(D[1](u))(1,t) = -u(1,t), u(x,0) = x^5 + 1.5, (D[1](u))(0,t) = 0}
> pds2 := pdsolve(PDE, IBC2, numeric)
> pds2:-plot3d(t = 0..3.6, x = 0..1)

```

**3.4.3 Anulamento e Estimativas(Condição inicial convexa)**

Nesta seção iremos apresentar os resultados sobre a equação de fluxo curvatura de Gauss com condição de fronteira singular. Nos próximos resultados mostraremos que a solução de (1.7) no caso convexo se anula em tempo finito T e de que forma tal solução se comporta próximo do tempo de anulamento T .

Os primeiros resultados apresentados são sobre o anulamento em tempo finito da solução de (1.7).

Teorema 3.8. *Se $\beta \geq 1$ e $u_0'' \leq 0$, então a solução de (1.7) se anula em tempo finito.*

Demonstração: Considerando o problema auxiliar:

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_t = \frac{h_{xx}}{h \left[1 + (h_x)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, & x \in (0,1), t > 0, \\ h_x(t,0) = 0, h_x(t,1) = -\frac{1}{h(t,1)}, & t > 0, \\ h(0,x) = \sqrt{r^2 - x^2}, & x \in [0,1], \end{array} \right. \quad (3.11)$$

cujas soluções explícitas são $h(t, x) = \sqrt{(r^3 - 3t)^{\frac{2}{3}} - x^2}$. Se tomarmos

$$r \geq \max \left\{ \sqrt{1 + \max_{x \in [0,1]} (u_0(x))^2}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right\},$$

compararmos este problema auxiliar com o problema (1.7) ($0 < \beta \leq 1$) usando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B, concluímos que $u \leq h$ em $[0, 1] \times [0, T_h]$. Como h se anula em tempo finito, u vai se anular caso $\beta \geq 1$. ■

Lema 3.9. a) Se $u_0 \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ e $u'_0 \leq 0$ em $[0, 1]$, então $u_x \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$.

b) Se $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ e $u''_0 \leq 0$, então $u_t \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$.

c) Se $u_0 \in \mathcal{C}^3([0, 1])$ e $\left\{ \frac{u''_0}{u_0 \{1 + [(u'_0)^2]^{\frac{3}{2}}\}} \right\}_x \geq 0$, então $u_{xt} \geq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$.

Demonstração:

a) Definindo $\alpha = u_x$ temos que α satisfaz o problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_t = \frac{1}{u \left[1 + (u_x)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \alpha_{xx} - \frac{3u_{xx}u_x}{u \left[1 + (u_x)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} \alpha_x - \frac{u_{xx}}{u^2 \left[1 + (u_x)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \alpha, & x \in (0, 1), t > 0, \\ \alpha(t, 0) = 0, \alpha(t, 1) = -\frac{1}{u(t, 1)^\beta} \leq 0, & t > 0, \\ \alpha(0, x) = u'_0(x) \leq 0, & x \in [0, 1], \end{array} \right.$$

Assim, usando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B, temos $u_x \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$.

b) Definindo $h = u_t$ temos que h satisfaz o problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_t = \frac{1}{u \left[1 + (u_x)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} h_{xx} - \frac{3u_{xx}u_x}{u \left[1 + (u_x)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} h_x - \frac{u_{xx}}{u^2 \left[1 + (u_x)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} h, & x \in (0, 1), t > 0, \\ h_x(t, 0) = 0, h_x(t, 1) = \beta \frac{1}{u(t, 1)^{\beta+1}} h(t, 1) \leq 0, & t > 0, \\ h(0, x) = \frac{u''_0(x)}{u_0(1 + (u'_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \leq 0, & x \in [0, 1], \end{array} \right.$$

Assim, usando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B, temos $u_t \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$.

c) Observando que u_{xt} satisfaz uma equação parabólica e suas condições de fronteira são

$$u_{xt}(t, 0) = 0 \text{ e } u_{xt}(t, 1) = \beta u^{-\beta-1} u_t(t, 1),$$

concluimos, pelos Princípio do Máximo que $u_{tx} \geq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$. ■

Teorema 3.10. *Se u_0 satisfaz as hipóteses do Lema 3.9 e u solução de (1.7) se anula em tempo finito, então ela se anula somente em $x = 1$.*

Demonstração: Se $(u_0)_x < 0$, pelo Teorema do Valor Médio e pelo item c) do Lema 3.9 existe um $\eta \in (a, x)$ tal que

$$u(t, a) - u(t, x) \leq (u_0)_x(\eta)(a - x) < 0.$$

Daí $\lim_{t \rightarrow T} u(t, x) > 0$, para todo $x \in [0, 1)$. Se não, existe um $0 < x_0 \leq 1$ tal que $(u_0)_x(x) < 0$, para $x \in [x_0, 1]$. Assim, usando o Teorema do Valor Médio e o item c) do Lema 3.9, temos que $\lim_{t \rightarrow T} u(t, x) > 0$, para todo $x \in [x_0, 1)$. Observando o item a) do Lema 3.9 concluimos que $\lim_{t \rightarrow T} u(t, x) > 0$, para todo $x \in [0, 1)$. ■

Aproximando o problema (1.7) do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u_\epsilon)_t = \frac{(u_\epsilon)_{xx}}{((u_\epsilon) + \epsilon) \left[1 + (u_\epsilon)_x^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ (u_\epsilon)_x(t, 0) = 0, (u_\epsilon)_x(t, 1) = -\frac{u_\epsilon(t, 1)}{((u_\epsilon) + \epsilon)^{\beta+1}}, & t > 0, \\ (u_\epsilon)(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{array} \right. \quad (3.12)$$

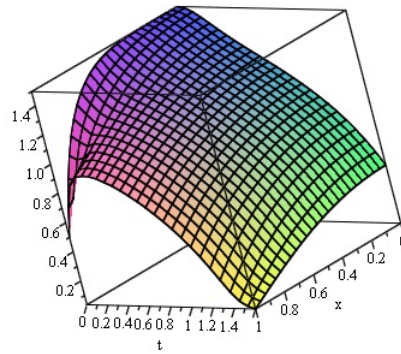
e resolvendo numericamente o problema aproximado para um dado inicial convexo através do software matemático Maple fazendo $\epsilon = 0,2$ $u_0(x) = -x^5 + 1,5$ e $\beta = 1$, podemos observar que o resultado analítico que obtemos coincide com o resultado numérico gerado pelo software.

Linhas de Comando:

```

>PDE := diff(u(x,t),t) = (diff(u(x,t),x,x))/((u(x,t)+0.2)*(1+(diff(u(x,t),x))^2)^1.5)
>IBC := (.2+u(1,t))^2*(D[1](u))(1,t) = -u(1,t), u(x,0) = -x^5 + 1.5, (D[1](u))(0,t) = 0
> pds := pdsolve(PDE,IBC,numeric)
> pds: -plot3d(t = 0..1.6, x = 0..1)

```



Os próximos resultados mostramos são direcionados ao estudo do comportamento da solução do problema (1.7) com dado inicial convexo próximo do tempo de anulação T .

Primeiramente observamos que o problema (1.7) tem um funcional de Lyapunov.

Lema 3.11. *O problema (1.7) admite um funcional de Lyapunov.*

Demonstração: Considerando o funcional

$$J(u(t,x)) = \int_0^1 \frac{1}{2} u_x^2(t,x) dx + \frac{1}{1-\beta} u^{1-\beta}(t,1)$$

e derivando-o com relação a variável t ao longo das órbitas obtemos $\frac{dJ}{dt}(u(t,x)) \leq 0$, portanto J é um funcional de Lyapunov para o problema (1.7)

Considerando os seguintes problemas auxiliares de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} v_t = \frac{v_{xx}}{v}, & x \in (0,1), t > 0, \\ v_x(t,0) = 0, v_x(t,1) = -\frac{1}{v(t,1)^\beta}, & t > 0, \\ v(0,x) = v_0(x) > 0, & x \in [0,1], \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_t = C \frac{w_{xx}}{\left[1 + (w_x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ w_x(t, 0) = 0, w_x(t, 1) = -\frac{1}{w(t, 1)^\beta}, & t > 0, \\ w(0, x) = w_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{array} \right. \quad (3.14)$$

onde $\beta > 0$ e $C = \left(\max \left\{ u_0(x), x \in [0, 1] \right\} \right)^{-1}$, temos os seguintes resultados:

■

O primeiro deles versa sobre os sinais das derivadas da solução de (1.7)

Lema 3.12. *Seja T_w o tempo de anulamento de w , então:*

- a) *Se $w_0 \in C^1([0, 1])$ e $(w_0)_x \leq 0$ em $[0, 1]$, então $w_x \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T_w)$.*
- b) *Se $w_0 \in C^2([0, 1])$ e $(w_0)_{xx} \leq 0$, então $w_t \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T_w)$.*
- c) *Se $w_0 \in C^3([0, 1])$ e $\left\{ \frac{(u_0)_{xx}}{\{1 + [(u_0)_x]^2\}^{\frac{3}{2}}} \right\}_x \geq 0$, então $w_{xt} \geq 0$ em $[0, 1] \times [0, T_w)$.*

Demonstração: a) Definindo $\alpha = u_x$ temos que α satisfaz o problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_t = \left[\frac{C}{(1 + w_x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \alpha_{xx} + \left[\frac{C w_{xx} w_x}{(1 + w_x^2)^{\frac{5}{2}}} \right] \alpha_x, & x \in (0, 1), t > 0, \\ \alpha(t, 0) = 0, \alpha(t, 1) = -\frac{1}{u(t, 1)^\beta} \leq 0, & t > 0, \\ \alpha(0, x) = (u_0)_x(x) \leq 0, & x \in [0, 1], \end{array} \right.$$

Assim, usando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B, temos $u_x \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$.

b) Definindo $h = u_t$ e derivando obtemos

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_t = \left[\frac{C}{(1 + w_x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] h_{xx} + \left[\frac{C w_{xx} w_x}{(1 + w_x^2)^{\frac{5}{2}}} \right] h_x, & x \in (0, 1), t > 0, \\ h_x(t, 0) = 0, h_x(t, 1) = \beta \frac{1}{u(t, 1)^{\beta+1}} h(t, 1), & t > 0, \\ h(0, x) = \frac{u_0''}{u_0(1 + (u_0')^2)^{\frac{3}{2}}} \leq 0, & x \in [0, 1], \end{array} \right.$$

Assim, aplicando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B, obtemos

$$u_t \leq 0,$$

para todo $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T_w)$. ■

Em seguida temos resultados sobre o comportamento da solução de problemas perturbados e do problema (1.7).

Lema 3.13. *Seja T_v o tempo de anulamento de v , então:*

- a) *Se $v_0 \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ e $(v_0)_x \leq 0$ em $[0, 1]$, então $v_x \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T_v)$.*
- b) *Se $v_0 \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ e $(v_0)_{xx} \leq 0$, então $v_t \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T_v)$.*
- c) *Se $v_0 \in \mathcal{C}^3([0, 1])$ e $\left[\frac{(v_0)_{xx}}{v_0} \right]_x$, então $v_{xt} \geq 0$ em $[0, 1] \times [0, T_v)$.*

Demonstração: a) Definindo $\alpha = v_x$ temos que α satisfaz o problema:

$$\begin{cases} \alpha_t = \left[\frac{1}{v} \right] \alpha_{xx} + \left[\frac{v_{xx}}{v^2} \right] \alpha, & x \in (0, 1), t > 0, \\ \alpha(t, 0) = 0, \alpha(t, 1) = -\frac{1}{u(t, 1)^\beta} \leq 0, & t > 0, \\ \alpha(0, x) = (u_0)_x(x) \leq 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

Assim, usando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B, temos $u_x \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$.

b) Definindo $h = u_t$ e derivando obtemos

$$\begin{cases} h_t = \left[\frac{1}{v} \right] h_{xx} + \left[\frac{v_{xx}}{v^2} \right] h, & x \in (0, 1), t > 0, \\ h_x(t, 0) = 0, h_x(t, 1) = \beta \frac{1}{u(t, 1)^{\beta+1}} h(t, 1), & t > 0, \\ h(0, x) = \frac{u_0''}{u_0(1 + (u_0')^2)^{\frac{3}{2}}} \leq 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

Assim, aplicando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B, obtemos

$$u_t \leq 0,$$

para todo $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T_w)$. ■

Lema 3.14. *Se w_0 satisfaz as hipóteses do Lema 3.12, então existe uma constante C_1 tal que*

$$w(t, 1) \leq C_1(T_w - t)^{\frac{1}{2(\beta+1)}}, \text{ para todo } t \in [0, T_w).$$

Demonstração: Defina $J(t, x) = u_x(t, x) + \phi(x)w^{-\beta}(t, x)$. Derivando J e tomando ϕ da mesma forma que foi tomada em [30] (Lema 2.5i)) obtemos:

$C(1 + w_x^2)^{\frac{3}{2}}J_t - J_{xx} = -3C(1 + w_x^2)^{\frac{1}{2}}w_x w_{xt} - \beta(\beta + 1)\phi w^{-\beta-1}(w_x)^2 + 2\beta\phi_x w^{-\beta-1}w_x - \phi_{xx}w^{-\beta} \leq 0$ e concluímos com o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B que $J \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T_w)$.

Já que $J \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T_w)$ e $J(t, 1) = 0$ temos que $J_x(t, 1) \geq 0$. Assim

$$J_x(t, 1) = w_{xx} - \beta\phi w^{-\beta-1}(t, 1)w_x(t, 1) \geq 0,$$

onde substituindo os valores de fronteiras temos

$$(w^{2(\beta+1)}(t, 1))_t \geq -2\beta(\beta + 1)C.$$

Daí, integrando de 0 a T , concluímos tomando $C_1 = (2\beta C(\beta + 1))^{\frac{1}{2(\beta+1)}}$ que

$$w(t, 1) \leq C_1(T_w - t)^{\frac{1}{2(\beta+1)}},$$

para todo $t \in [0, T_w)$. ■

Lema 3.15. *Se v_0 satisfaz as hipóteses do Lema 3.13, então existem constantes C_2 e C_3 tais que*

$$a) \ v(t, 1)(T_v - t)^{-\frac{1}{2\beta+3}} \geq C_2, \text{ para todo } t \in [0, T_v).$$

$$b) \ -v_x(t, x)(T_v - t)^{\frac{\beta}{2\beta+3}} \leq C_3, \text{ para todo } t \in [0, T_v).$$

Demonstração: a) Considerando $\psi(u) = \frac{1}{2}u^2$ e $g(u) = -u^{-\beta}$ no artigo [17], estaremos nas hipóteses do Teorema (3.2) página 579 de [17]. Assim,

$$\int_0^{v(t,1)} \frac{s}{(-s^{-\beta})(-\beta s^{-\beta-1})} ds \geq K(T_v - t),$$

onde K é a constante obtida no Teorema (3.2) em [17]. Portanto,

$$v(t, 1)(T_v - t)^{-\frac{1}{2\beta+3}} \geq C_2,$$

onde $C_2 = [\beta(2\beta + 3)K]^{\frac{1}{2\beta+3}}$.

b) Pelo Lema 3.13 temos que $u_{xx} \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T_v)$. Assim,

$$-v_x(t, x) \leq -v_x(t, 1) = u^{-\beta}(t, 1).$$

Usando o item a) concluímos

$$-v_x(t, x)(T_v - t)^{\frac{\beta}{2\beta+3}} \leq C_3,$$

onde $C_3 = C_2^{-\beta}$. ■

Teorema 3.16. *Se u_0 satisfaz as hipóteses do Lema 3.12 então existe uma constante C_1 tal que*

$$u(t, 1) \leq C_1(T - t)^{\frac{1}{2(\beta+1)}}, \text{ para todo } t \in [0, T).$$

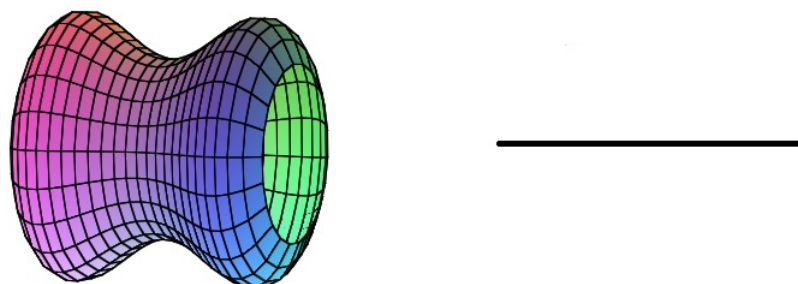
Demonstração: Inicialmente comparamos os problemas (3.13) e (3.14) e concluímos, usando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B, que $u \leq w$ em $[0, 1] \times [0, T)$. Aplicando o Lema 3.14, obtemos

$$u(t, 1) \leq C_1(T - t)^{\frac{1}{2(\beta+1)}},$$

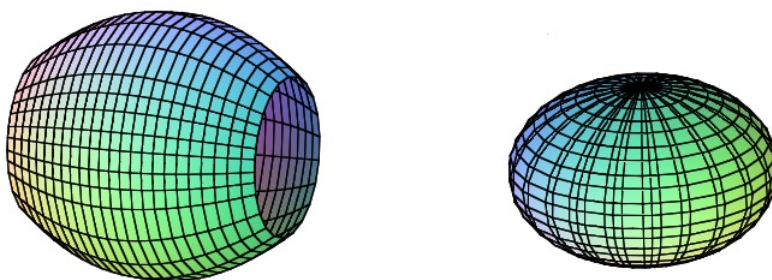
para todo $t \in [0, T)$. ■

3.4.4 Interpretação dos Resultados

De acordo com o Teorema 3.7 e o software Maple, uma superfície inicial não convexa a esquerda da figura abaixo evolui pelo fluxo curvatura de Gauss com condição de fronteira singular a um segmento de reta.



Por outro lado com os Teoremas 3.8 e 3.10 e o software Maple concluimos que uma superfícies inicial que se encontra no lado esquerda da figura abaixo evolui via fluxo curvatura de Gauss com condição de fronteira singular a uma superfície do lado esquerdo da mesma figura.



Fluxo de curvatura Harmônica

Neste capítulo serão demonstrados resultados sobre os problema (1.8) e (1.9). A primeira seção deste capítulo deduziremos a equação do fluxo de curvatura harmônica em superfícies de revolução. A seção posterior 4.2 será dividida em duas subseções, na primeira demonstraremos resultados de existência e regularidade para o problema (1.8) e na segunda exibiremos o comportamento assintótico da solução de (1.8). Na última seção deste capítulo apresentaremos resultados sobre o problema (1.9) divididos em duas subseções, na subseção 4.3.1 mostraremos a existência e regularidade de solução para o problema (1.9) e na subseção 4.3.2 mostraremos o anulamento em tempo finito e estimativas da solução de (1.9) perto do seu tempo e seu ponto de anulamento. Todos os resultados deste capítulo são novos.

4.1 Motivação

Considerando uma família de superfícies $\gamma(t, \theta, x) \subset \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\gamma(t, \theta, x) = (x, u(t, x) \cos \theta, u(t, x) \sin \theta), \quad (4.1)$$

onde $\theta \in [0, 2\pi]$ e $x \in [0, 1]$. Fazendo esta evoluir através do fluxo curvatura harmônica, isto é

$$\gamma_t = -\frac{K}{2H} \cdot \vec{n}, \quad (4.2)$$

onde K representa a curvatura de Gauss, H a curvatura média e $\vec{n}$ o vetor normal à superfície, concluímos que u satisfaz

$$u_t = \frac{u_{xx}}{-uu_{xx} + (u_x)^2 + 1}, \quad (4.3)$$

observando que $K = -\frac{u_{xx}}{u(1 + (u_x)^2)}$, $H = \frac{1}{2}(1 + (u_x)^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{xx}}{1 + (u_x)^2} - \frac{1}{u} \right)$ e

$$\vec{n} = \left(-\frac{u_x}{\sqrt{1 + (u_x)^2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + (u_x)^2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + (u_x)^2}} \right).$$

4.2 Fluxo de curvatura harmônica com condição de fronteira do tipo Dirichlet

O estudo de equação de fluxo de curvatura harmônica com condição de fronteira tipo Dirichlet, isto é o problema (1.8), não consta em nenhuma referência da área. Portanto todos os resultados desta seção são novos. Nesta seção mostraremos resultados sobre existência e regularidade de solução para o problema (1.8), assim como resultados sobre o comportamento assintótico da solução de tal problema.

4.2.1 Existência e Regularidade

Primeiramente mostraremos resultados sobre existência e regularidade estudando um problema auxiliar que tem solução regular pelo Teorema 5.3 do Apêndice B como em [16] e depois provando que toda solução do problema auxiliar é também solução do problema original.

Consideremos o problema de valor inicial e de fronteira (1.8), ou seja

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = \frac{u_{xx}}{\left[-uu_{xx} + (u_x)^2 + 1 \right]}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u(t, 1) = 1, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{array} \right.$$

Teorema 4.1. *Seja $u_0(x) \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ e convexo então existe um $T > 0$ tal que o problema (1.8) admite solução em $\mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times [0, 1])$.*

Demonstração: Obtemos existência do problema acima estudando o seguinte problema auxiliar

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}), & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u(t, 1) = 1, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{array} \right. \quad (4.4)$$

onde satisfaz as seguintes condições:

- (i) Existe uma função crescente μ tal que $|F(X, z, p, 0)| \leq \mu(|z|)(|p|^2 + 1)$
- (ii) Existem funções a_0 , a_1 e Λ_0 crescentes tais que

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} z F(X, z, p, 0) &\leq a_0(|p|)|z| + a_1(|p|), \\ |F_r(X, z, p, r)| &\leq \Lambda_0(|p|) \end{aligned}$$

- (iii) Existem constantes b_0 e b_1 tais que $b_0 \leq F_r \leq b_1$,
- (iv) Existem constantes não negativas M_0 e M_1 tais que

$$\operatorname{sgn} z g(X, z) \geq -M_1,$$

para $|z| \geq M_0$.

- (v) Supondo que exista uma constante $K \geq 0$, existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$|F(X, z, p, r) - F(Y, w, q, r)| \leq [|X - Y| + |z - w| + |p - q|]^\beta [c_1 + c_2|r|],$$

para X e Y em Ω e sempre que $|z| + |w| + |p| + |q| \leq K$.

- (vi) $g \in H^{1+\alpha}(\partial\Omega \times [-K, K])$, para alguma constante positiva K . Então para qualquer $\psi \in H^{2+\alpha}$.

Neste caso o problema (4.4) tem solução pela teoria de equação totalmente não lineares,

Mas o nosso objetivo é provar que toda solução do problema perturbado (4.4) e também solução do problema original (1.8). Para isto, vamos verificar que a solução u de (4.4) para $F(t, x, z, p, r) = \frac{r}{-rz + p^2 + 1}$ satisfaz as condições (i) – (iv) acima.

Observe que se o dado inicial u_0 for positivo e convexo, temos que existem constantes C_1, C_2 e C_3 tais que a solução u do problema (1.8) satisfaz as seguintes desigualdades:

$$C_1 \leq u \leq C_2, \quad |u_x^2| \leq C^3 \text{ e } -u_{xx} \leq C_4,$$

para $x \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}$. Em particular a solução de (4.4) é também solução de (1.8). De fato, pelo Princípio do Máximo para equações parabólicas, a solução de (1.8) atinge seu máximo na fronteira parabólica. Assim existe $C_2 = \max \left\{ 1, \max_{x \in [0, 1]} u_0(x) \right\}$ tal que $u(t, x) \leq C_2$, para $x \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}$. Desde que $-u$ também satisfaz a equação do problema (1.8) e $\min u = -\max -u$, existe $C_1 = \min \left\{ 1, \min_{x \in [0, 1]} u_0(x) \right\}$ tal que $u(t, x) \geq C_1$, para $x \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}$. Também, pelo Princípio do Máximo para equações parabólicas obtemos $C_3 = \max_{x \in [0, 1]} \{u'_0(x)\}$ e $C_4 = \max_{x \in [0, 1]} \{u''_0(x)\}$ tais que $|u_x| \leq C_3$ e $-u_{xx} \leq C_4$, para $x \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}$.

Assim, a solução de (4.4) é também solução de (1.8), concluindo assim a existência de solução para o problema (1.8). ■

4.2.2 Comportamento Assintótico

Nesta seção iremos mostrar, com a hipótese de convexidade sobre o dado inicial u_0 , resultados sobre o comportamento assintótico da solução de (1.8).

Teorema 4.2. *Se o dado inicial u_0 é positivo e convexo, então a solução $u(t, \cdot)$ de (1.8) converge para um segmento de reta quando $t \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Considerando a função $E(t) = \int_0^1 (1 + (u_x)^2) dx$ e diferenciando-a obtemos

$$E'(t) = 2 \left(u_x u_t \Big|_0^1 - \int_0^1 u_t u_{xx} dx \right).$$

Sabendo que $u_x(t, 0) = 0 = u_t(t, 1)$ temos

$$E'(t) = -2 \int_0^1 u_t u_{xx} dx.$$

Assim, usando a equação do problema (1.8), concluímos que $E(t)$ é uma função decrescente. Portanto $E(t)$ é uma função limitada inferiormente que decresce, logo $E'(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Dai, como u_t e u_{xx} tem mesmo sinal, concluímos que $u_t u_{xx} \rightarrow 0$.

Desta forma $u_t \rightarrow 0$ e $u_{xx} \rightarrow 0$, já que $C_1 \leq u \leq C_2$, $|u_x^2| \leq C_3$ e $-u_{xx} \leq C_4$ com constantes C_1, C_2, C_3 e C_4 independente de t . Assim, $u(\cdot, t)$ converge para uma função cuja a segunda derivada é nula, isto é um segmento de reta. ■

Utilizando o software matemático Maple podemos observar que o resultado gerado numericamente pelo Maple no estudo do problema

$$\begin{cases} (u_\epsilon)_t = \frac{(u_\epsilon)_{xx}}{-(u_\epsilon + \epsilon)(u_\epsilon)_{xx} + (u_\epsilon)_x^2 + 1}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ (u_\epsilon)_x(t, 0) = 0, (u_\epsilon)(t, 1) = 1, & t > 0, \\ (u_\epsilon)(0, x) = u_0(x), & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (4.5)$$

através da figura abaixo tem o mesmo comportamento do resultado que obtivemos analiticamente. Neste caso fizemos $\epsilon = 0, 2$ e $u_0(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

Linhas de Comando:

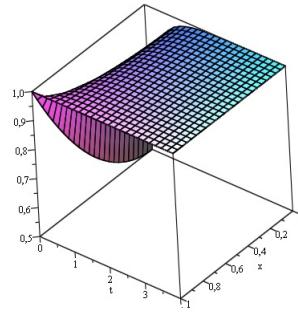
```
> PDE := ((-u(x,t) + 0.2) * (diff(u(x,t), x, x)) + (diff(u(x,t), x))^2 + 1) * (diff(u(x,t), t)) =
diff(u(x,t), x, x)
```

```
IBC := u(1,t) = 1, u(x,0) = (1/2) * x^2 + 1/2, (D[1](u))(0,t) = 0
```

```
pds := pdsolve(PDE, IBC, numeric)
```

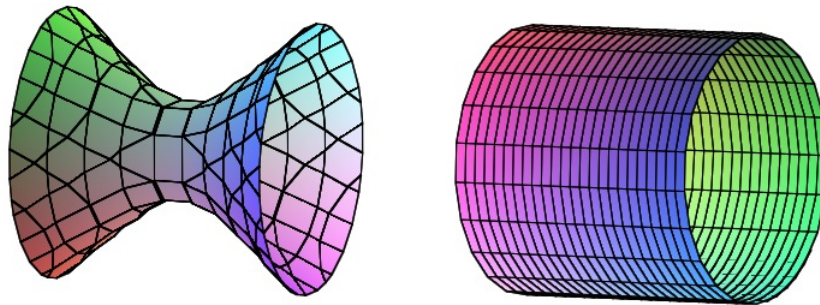
```
pds : -plot3d(t = 0..4, x = 0..1)
```

A figura a seguir mostra a comportamento assintótico de u_ϵ .



4.2.3 Interpretação dos Resultados

De acordo com o Teorema 4.2 da seção anterior 4.2.2 e o software Maple, o fluxo de curvatura harmônica com condição de fronteira dirichlet deforma uma superfície do lado esquerdo da figura abaixo em uma superfície ao seu lado.



4.3 Fluxo de curvatura harmônica com condição de fronteira singular

O estudo sobre a equação de fluxo de curvatura harmônica com condição de fronteira tipo singular, isto é o problema (1.9), não consta em nenhuma bibliografia da área. Todos os resultados mostrados nesta seção são novos. Neste seção mostraremos primeiramente resultados sobre existência e regularidade de solução até um tempo finito

T para o problema (1.9) e depois mostraremos o comportamento assintótico da solução de (1.9) próximo do tempo de seu tempo e seu ponto de anulamento.

4.3.1 Existência e Regularidade

A existência de solução para o problema (1.9) será mostrada através do método de sub e supersolução como no trabalho [73] e na referência [74] para mostrar existência de solução para outros tipos de problemas. As técnicas utilizadas no capítulos anteriores, para concluir a existência de solução, não se aplicam para este tipo de problema.

Considerando problema de valor inicial e de fronteira (1.9), ou seja

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{\left[-uu_{xx} + (u_x)^2 + 1 \right]}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_x(t, 0) = 0, u_x(t, 1) = -\frac{1}{u(t, 1)^\beta}, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

onde $\beta > 0$, temos os seguintes resultados:

Lema 4.3. *Se u_0 for tal que $u_0(x) > 0$, $u'_0(x), u''_0(x) \leq 0$ em $[0, 1]$ e curvatura média $H(u_0) > 0$ então u_t, u_x e $u_{xx} \leq 0$ em $[0, 1] \times [0, T)$.*

Demonstração: Definindo $v = u_t$ temos

$$v_t - \frac{(u_x)^2 + 1}{(-uu_{xx} + (u_x)^2 + 1)^2} v_{xx} + \frac{2u_x u_{xx}}{(-uu_{xx} + (u_x)^2 + 1)^2} v_x - \frac{(u_{xx})^2}{(-uu_{xx} + (u_x)^2 + 1)^2} v = 0$$

e $w = e^{\varphi(x)}v$ onde φ será tomada posteriormente obtemos

$$\begin{aligned} -uu_{xx} + (u_x)^2 + 1)^2 w_t &= \left\{ \left[(u_x)^2 + 1 \right] w_{xx} - \left[2u_x u_{xx} + 2\varphi' \left((u_x)^2 + 1 \right) \right] w_x \right. \\ &\quad \left. + \left[2\varphi' u_x u_{xx} + u_{xx} + \left((\varphi')^2 - \varphi'' \right) \left((u_x)^2 + 1 \right) \right] w \right\}, \end{aligned}$$

$$w_x(t, 0) - e^{\varphi(0)} \underbrace{u_{xt}(t, 0)}_{=0} - \varphi'(0)w(t, 0) = 0$$

$$w_x(t, 1) - [\beta(u(t, 1))^{-(\beta+1)} + \varphi'(1)]w(t, 1) = 0$$

e

$$w(0, x) = \frac{u_0''(x)}{\left(-u_0(x)u_0''(x) + (u_0'(x))^2 + 1\right)} = \frac{u_0''(x)}{u_0(x)\left(1 + (u_0'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{H(u_0(x))} \leq 0.$$

Assim, tomando φ tal que $[\beta(u(t, 1))^{-(\beta+1)} + \varphi'(1)] \leq 0$ estaremos nas hipóteses do Lema 5.6 do Apêndice B. Logo podemos concluir que $u_t \leq 0$, para todo $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T)$.

Como

$$H(u) = \frac{-uu_{xx} + 1 + (u_x)^2}{u(1 + (u_x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e $H(u_0) > 0 \Rightarrow H(u) > 0$ (resultado de [18]) concluímos que $u_{xx} \leq 0$, para todo $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T)$.

Definindo $f = u_x$ temos

$$(-uu_{xx} + (u_x)^2 + 1)^2 f_t = \left[\left((u_x)^2 + 1 \right) f_{xx} - 2u_x u_{xx} u_x + u_{xx} f \right],$$

$$f(t, 0) = 0 \text{ e } f(t, 1) \leq 0$$

e

$$f(0, x) = u_x(0, x) = u_0'(x) \leq 0.$$

Portanto, pelo Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B obtemos $u_x \leq 0$, para todo $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T)$. ■

Lema 4.4. *O problema (1.9) admite subsolução e supersolução*

Demonstração: Primeiramente encontraremos uma supersolução. Notemos que esta é facilmente encontrada, já que $\bar{u}(t, x) = K = \max\{u_0(x), x \in [0, 1]\}$ é supersolução para o problema (1.9). De fato,

$$(\bar{u})_t = 0 = \frac{\bar{u}_{xx}}{-\bar{u}(\bar{u})_{xx} + (\bar{u})_x^2 + 1},$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(t, 0) = 0$$

e

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(t, 1) \geq -K^{-\beta} = -(\bar{u}(t, 1))^{-\beta}$$

Procuremos uma subsolução para o problema (1.9). Na referência [73] prova-se que $\underline{u}(t, x) = -\frac{\theta}{2}x^n + \theta - \sigma t$, onde $\sigma = \frac{\theta}{2}n(n-1)$, $\theta = \min u_0$, $x \in [0, 1]$ e n é tal que

$$-\frac{\theta}{2}n \leq -\left(\frac{\theta}{4}\right)^{-\beta},$$

é subsolução do seguinte problema:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ v_x(t, 0) = 0, v_x(t, 1) = -\frac{1}{u(t, 1)^\beta}, & t > 0, \\ v(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (4.6)$$

Porém, pelo Lema 4.3 temos $u_{xx} \leq 0$. Assim,

$$(\underline{u})_t \leq (\underline{u})_{xx} \leq \frac{(\underline{u})_{xx}}{-\underline{u}(\underline{u})_{xx} + (\underline{u})_x^2 + 1}$$

e portanto $\underline{u}$ é subsolução de (1.9). ■

Lema 4.5. *A subsolução e a supersolução encontradas anteriormente estão ordenadas*

Demonstração: Tomando $F(t, x, p, p_i, p_{ij}) = -\frac{p_{ij}}{-pp_{ij} + (p_i)^2 + 1}$, $v = \bar{u}$ e $w = \underline{u}$ temos

$$v_t = \bar{u}_t > F(t, x, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_{xx}) = F(t, x, v, v_x, v_{xx})$$

em $(0, 1) \times (0, T)$ e

$$w_t = \underline{u}_t \leq F(t, x, \underline{u}, \underline{u}_x, \underline{u}_{xx}) = F(t, x, w, w_x, w_{xx})$$

em $(0, 1) \times (0, T)$.

Assim, aplicando o Teorema 5.8 do Apêndice B, obtemos

$$v > w,$$

em $(0, 1) \times (0, T)$. ■

Teorema 4.6. *Se $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, 1])$, então o problema (1.9) admite solução em $\mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times [0, 1])$, para algum T .*

Demonstração: Do Lema 4.4 garantimos a existência de uma subsolução e de uma supersolução para o problema (1.9). Usando, o Lema 4.5 concluímos que $\underline{u} < \bar{u}$, em $(0, 1) \times (0, T)$. Daí, pelo Lema (5.9) do Apêndice C, as sequências $\{\bar{u}^{(k)}\}$ e $\{\underline{u}^{(k)}\}$ estão bem definidas e estão em $\mathcal{C}^{1,2}((0, T) \times (0, 1))$. Logo, aplicando o Teorema 5.13 do Apêndice C, temos a existência e regularidade para o problema (1.9). ■

4.3.2 Anulamento e Estimativas

Nesta seção iremos mostrar resultados sobre o anulamento em tempo finito da solução de (1.9) e sem seguida resultados sobre como a solução de (1.9) se comporta próxima ao tempo de anulamento T .

Primeiramente mostraremos o anulamento em tempo finito da solução de (1.9), utilizando comparação de problemas.

Teorema 4.7. *Se as hipóteses do Lema 4.3 são satisfeitas para o dado inicial u_0 e $u'_0 \neq 0$, então a solução do problema 1.9, para $\beta \geq 1$, se anula em tempo finito somente em $x = 1$.*

Demonstração: Considerando o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} v_t = \frac{v_{xx}}{-vv_{xx} + v_x^2 + 1}, & x \in (0, 1), t \in (0, r), \\ v_x(t, 0) = 0, v_x(t, 1) = -\frac{1}{v(t, 1)}, & t \in (0, r), \\ v(0, x) = \sqrt{r + (1 - x^2)}, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (4.7)$$

cujas uma solução algébrica é $v(t, x) = \sqrt{(r - t) + (1 - x^2)}$ e definindo $w = u - v$, temos

$$\begin{aligned}
w_t &= \frac{u_{xx}}{-uu_{xx} + u_x^2 + 1} - \frac{v_{xx}}{-vv_{xx} + v_x^2 + 1} = \\
&= \frac{1}{-uu_{xx} + u_x^2 + 1} \cdot \frac{1}{-vv_{xx} + v_x^2 + 1} \left[(-vv_{xx} + v_x^2 + 1)u_{xx} - (-uu_{xx} + u_x^2 + 1)v_{xx} \right]
\end{aligned}$$

Definindo $a(t, x) = \frac{1}{-uu_{xx} + u_x^2 + 1} \cdot \frac{1}{-vv_{xx} + v_x^2 + 1}$ obtemos

$$w_t = a(w_{xx} - v_{xx}u_{xx}w + v_x^2u_{xx} - u_x^2v_{xx})$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi(t, x)$ tal que

$$w_t = a \left((1 + v_x^2)w_{xx} + 2v_{xx}\xi(t, x)w_x - v_{xx}u_{xx}w \right)$$

Nas condições de fronteira temos

$$w_x(t, 0) = u_x(t, 0) - v_x(t, 0) = 0 - 0 = 0$$

e

$$w_x(t, 1) = u_x(t, 1) - v_x(t, 1) = -u^{-\beta}(t, 1) + v^{-1}(t, 1)$$

Como, pelo Lema 4.3 temos $u_t \leq 0$, para todo $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T]$ podemos supor que $0 < u(t, x) \leq 1$, para $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T]$. Como por hipótese $\beta > 1$ obtemos $u^{-\beta} > u^{-1}$ e portanto

$$w_x(t, 1) \leq -u^{-1}(t, 1) + v^{-1}(t, 1) = \frac{1}{uv}[-v + u].$$

Definindo $h = e^{\phi(x)w}$ temos

$$\frac{\partial h}{\partial \nu}(t, 0) + \phi'(0)h(t, 0) \leq 0$$

e

$$\frac{\partial h}{\partial \nu}(t, 1) - \left[\frac{1}{uv} + \phi^1(1) \right] h(t, 1) \leq 0$$

Na condição inicial tomamos r grande o suficiente para que $\sqrt{r + (1 - x^2)} \geq u_0(x)$.

Assim, tomando ϕ tal que $\phi'(0) \geq 0$ e $\phi'(1) \leq -\frac{1}{uv}$ e usando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B, obtemos

$$u \leq v,$$

para todo $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T]$.

Logo, como v se anula em tempo finito, então u se anulará em tempo finito.

Para unicidade de anulamento, utilizamos o Teorema do Valor Médio

$$u(t, 1) - u(t, x) = u_x(t, \xi)(1 - x),$$

para algum $\xi \in (0, 1)$ e em seguida o Lema 4.3

$$u_x(t, \xi) \leq u'_0(\xi)(1 - x) < 0.$$

Assim, como u se anula em tempo finito temos que isto só ocorre em $x = 1$. ■

Usando o software matemático Maple, iremos aproximar o problema (1.9) pelo seguinte problema

$$\begin{cases} (u_\epsilon)_t = \frac{(u_\epsilon)_{xx}}{-(u_\epsilon)(u_\epsilon)_{xx} + (u_\epsilon)_x^2 + 1}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ (u_\epsilon)_x(t, 0) = 0, (u_\epsilon)_x(t, 1) = -\frac{1}{(\epsilon + (u_\epsilon)(t, 1))^\beta}, & t > 0, \\ (u_\epsilon)(0, x) = u_0(x), & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (4.8)$$

e então resolver numericamente dando valores $\beta = 2, \epsilon = 0.2$ e $u_0 = -x^3 + 20$.

Linhas de Comando

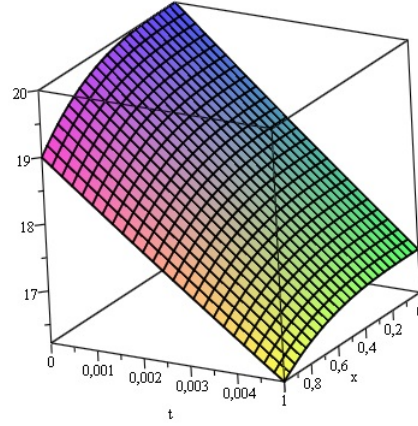
$$> PDE := (-u(x, t) * (diff(u(x, t), x, x)) + (diff(u(x, t), x))^2 + 1) * (diff(u(x, t), t)) = diff(u(x, t), x, x)$$

$$> IBC := (0.2 + u(1, t))^2 * (D[1](u))(1, t) = -u(1, t), u(x, 0) = -x^3 + 20, (D[1](u))(0, t) = 0$$

$$> pds := pdsolve(PDE, IBC, numeric)$$

$$> plot3d(t = 0..0.5e-2, x = 0..1)$$

A figura a seguir descreve o comportamento de u_ϵ antes do tempo de anulamento.



Finalmente para concluir o trabalho temos resultados sobre o comportamento da solução de (1.9) próximo do tempo de anulamento T .

Proposição 4.8. *Se $u_0^{(i)} \leq 0$, $i = 1, \dots, 5$ e as hipóteses do Teorema 4.7 são satisfeitas, então obtemos as seguintes estimativas:*

$$a) \quad u(t, x) \geq C_1(T - t)^\lambda \text{ para todo } x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, T),$$

$$b) \quad -u_x \leq C_2(T - t)^{\lambda - \frac{1}{2}} \text{ para todo } x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, T),$$

onde C_1, C_2 são constantes dependendo apenas de β e u_0 , $\lambda = \frac{1}{2(\beta+1)}$ e T o tempo de anulamento.

Demonstração: a) Considerando o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ v_x(t, 0) = 0, v_x(t, 1) = -\frac{1}{v(t, 1)^\beta}, & t > 0, \\ v(0, x) = u_0(x) > 0, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (4.9)$$

e definindo $w = u - v$, temos que existe $\theta(t, 1)$ uma função positiva tal que

$$\begin{cases} w_t = w_{xx}, & x \in (0, 1), t \in (0, T_M), \\ w_x(t, 0) = 0, w_x(t, 1) + \theta(t, 1)w \geq 0, & t \in (0, T_M), \\ w(0, x) = 0, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (4.10)$$

onde $T_m = \max\{T_u, T_v\}$. Assim aplicando o Princípio do Máximo 5.6 do Apêndice B temos que

$$u(t, x) \geq v(t, x), \quad (4.11)$$

para todo $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T_M)$ e portanto $T_u \geq T_v$.

Usando o Lema 2.4 i) da referência [30], temos

$$v_t(t, 1) \leq -\frac{\beta^2 + \epsilon}{2(2\beta + 1)} v^{-2\beta-1}(t, 1)$$

Integrando de t a $T = T_u$ temos

$$\frac{v(T, 1)}{2\beta + 2} - \frac{v^{2\beta+2}(t, 1)}{2\beta + 2} \leq -\frac{\beta^2 + \epsilon}{2(2\beta + 1)} (T - t).$$

Sabendo, da referência [25], que a solução pode ser estendida e $v(t, 1) = 0$, para todo $t > T$ temos

$$\frac{v^{2\beta+2}}{2\beta + 2}(t, 1) \geq \frac{\beta^2 + \epsilon}{2(2\beta + 1)} (T - t),$$

ou seja

$$v(t, 1) \geq \left(\frac{\beta^2 + \epsilon}{2(2\beta + 1)} \right)^{\frac{1}{2(\beta+1)}} (2\beta + 2)^{\frac{1}{2(\beta+1)}} (T - t)^{\frac{1}{2(\beta+1)}}.$$

Daí, existe $C_1 = \left(\frac{\beta^2 + \epsilon}{2(2\beta + 1)} \right)^{\frac{1}{2(\beta+1)}} (2\beta + 2)^{\frac{1}{2(\beta+1)}}$ tal que

$$u(t, 1) \geq v(t, 1) \geq C_1 (T - t)^\lambda.$$

Como, pelo Lema 4.3 temos $u_x \leq 0$ em $[0, T) \times [0, 1]$, então concluímos a demonstração do item a), isto é

$$f(t, x) \geq C(T - t)^\lambda,$$

para todo $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T)$.

b) Usando a desigualdade $u_{xx} \leq 0$ para todo $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T)$ provada no Lema 4.3 temos

$$u_x(t, 1) \leq u_x(t, x).$$

Substituindo a condição de fronteira e usando o item anterior a) obtemos

$$-u_x(t, x) \leq -u_x(t, 1) = u^{-\beta}(t, 1) \leq C_1^{-\beta}(T-t)^{-\lambda\beta} = C_1^{-\beta}(T-t)^{\lambda-\frac{1}{2}},$$

isto é, existe $C_2 = C_1^{-\beta}$ tal que

$$-u_x(t, x)(T-t)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \leq C_2,$$

para todo $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T)$. ■

Proposição 4.9. *Se as hipóteses da Proposição 4.8 então obtemos as seguintes estimativas:*

$$a) \quad u(t, 1) \leq C_3(T-t)^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, T),$$

$$b) \quad -u_t \leq C_4(T-t)^{-\lambda} \text{ para todo } x \in [0, 1] \text{ e } t \in [0, T),$$

onde C_3, C_4 são constantes dependendo apenas de β e u_0 e T é o tempo de anulamento de u .

Demonstração: a) Pelo Lema 4.3 temos que $u_{xx}(t, x) \leq 0$ para $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, T)$.

Assim

$$\begin{aligned} -uu_{xx} + u_x^2 + 1 &\geq -uu_{xx} \Rightarrow \frac{1}{-uu_{xx} + u_x^2 + 1} \leq \frac{1}{-uu_{xx}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{u_{xx}}{-uu_{xx} + u_x^2 + 1} &\geq -\frac{1}{u} \Rightarrow u_t \geq -\frac{1}{u} \Rightarrow uu_t \geq -1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t \geq -1. \end{aligned}$$

Integrando de t a T temos

$$\frac{u^2(T, x)}{2} - \frac{u^2(t, x)}{2} \geq -(T-t).$$

Avaliando em $x = 1$ e utilizando o Teorema 4.7 temos

$$-\frac{u^2(t, 1)}{2} \geq -(T - t),$$

ou seja, existe uma constante $C_3 = \sqrt{2}$ tal que

$$u(t, 1) \leq C_3(T - t)^{\frac{1}{2}}.$$

b) Como, pela Proposição 4.8 temos

$$u(t, x) \geq C_1(T - t)^\lambda$$

e sabendo, pelo item anterior a, que $u_t \geq -\frac{1}{u}$ temos

$$u_t(t, x) \geq -\frac{1}{C_1}(T - t)^{-\lambda},$$

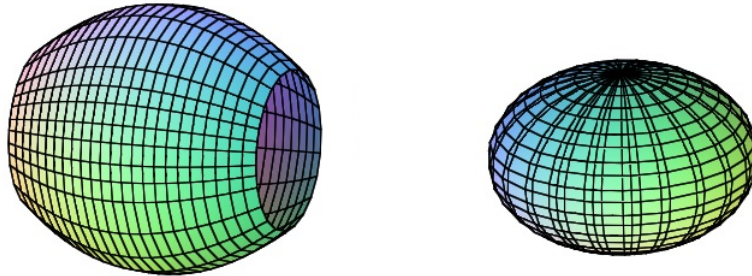
isto é, existe $C_4 = \frac{1}{C_1}$ tal que

$$u_t(t, x) \leq C_4(T - t)^{-\lambda}.$$

■

4.3.3 Interpretação dos Resultados

Com base no Teorema 4.7, nas Proposições 4.8 e 4.9 e fazendo uso do Maple concluímos que o fluxo de curvatura harmônica deforma uma superfície do lado esquerdo da figura abaixo em uma superfície do lado direito da mesma figura.



Apêndices

Este capítulo será dividido em 6 seções. Na primeira delas, o apêndice *A*, apresentaremos resultados importantes sobre existência e regularidade de equações parabólicas quasilineares e equações parabólicas totalmente não lineares. Na segunda, o apêndice *B*, versaremos sobre resultados sobre Princípio do Máximo e Teoremas de Comparação para uma classe de equações parabólicas. No apêndice *C*, nos preocuparemos em lidar com resultados sobre o método de sub e super solução, No apêndice *D* exibiremos resultados sobre teoria de semigrupos. Na penúltima seção, o apêndice *E*, introduziremos noções importantes de geometria diferencial e na última, o apêndice *F*, enunciaremos outros resultados importantes que utilizamos durante o desenvolvimento do trabalho.

5.1 Apêndice A: Teoremas de Existência

Neste apêndice apresentaremos resultados os quais foram importantes para provarmos a existência e regularidade de solução dos fluxos de curvatura estudados anteriormente, decidimos colocá-los separadamente por questões de estética do texto.

Teorema 5.1. (Teorema 4.1, página 558 do livro [63]) *Considere o seguinte problema de valor inicial e de fronteira*

$$\begin{cases} u_t - a_{ij}(t, x, u, u_x)u_{x_i x_j} + a(t, x, u, u_x) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u_{\Gamma_T} = \psi_{\Gamma_T}, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde Γ_T é a fronteira parabólica e definida por $\Gamma_T = \bar{\Omega} \times [0, T] - \Omega \times (0, T]$.

Suponha que as seguintes condições são satisfeitas:

- a) $a_{ij}(t, x, u, 0)\xi_i \xi_j \geq 0$.
- b) $ua(t, x, u, 0) \geq -b_1 u^2 - b_2$, onde b_1 e b_2 são constantes não negativa.
- c) $a_{ij}(t, x, u, p)$ e $a(t, x, u, p)$ são continuamente diferenciáveis com respeito a todas as suas variáveis.
- d) Existam constantes positivas $\nu, \mu, \mu_1, m, \epsilon$ e uma função contínua não negativa $P(\rho)$ onde $P(\rho) \rightarrow 0$, quando $|\rho| \rightarrow \infty$, tais que

$$\nu(1 + |p|)^{m-2}\xi^2 \leq a_{ij}(t, x, u, p)\xi_i \xi_j \leq \mu(1 + |p|)^{m-2}\xi^2,$$

$$\left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k} \right| (1 + |p|)^3 + |a| + \left| \frac{\partial a}{\partial p_k} \right| (1 + |p|) \leq \mu_1(1 + |p|)^m,$$

$$\left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \right| (1 + |p|)^2 + \left| \frac{\partial a}{\partial x_k} \right| \leq (\epsilon + P(|p|))(1 + |p|)^{m+1},$$

$$\left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial u} \right| \leq (\epsilon + P(|p|))(1 + |p|)^{m-2}$$

e

$$-\frac{\partial a}{\partial u} \leq (\epsilon + P(|p|))(1 + |p|)^m$$

- e) A condição de fronteira $\psi(t, x)$ está em $H^{2+\beta, 1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ e as condições de compatibilidade são satisfeitas.

f) $S = \partial\Omega \in H^{2+\beta}$.

Então existe uma única solução do problema (5.1) em $H^{2+\beta, 1+\beta/2}(\bar{Q}_T)$.

Teorema 5.2. (Teoremas 8.2 e 8.3, páginas 200 e 201 do livro [70]) Suponha que $\Gamma_T \in H^\delta$ e $\psi \in H^\delta(\Gamma_T)$ para algum $\delta \in (1, 2)$. Então existe uma constante positiva ϵ tal que o problema (5.1) tem solução em $H^{2+\alpha, -\delta}$ para $T = \epsilon$. Se $\Gamma_T, \psi \in H^{2+\alpha}$ e as condições de compatibilidade são satisfeitas, então $u \in H^{2+\alpha}$. Mais ainda, se existe uma constante M_δ (independente de ϵ) tal que toda solução de (5.1) é tal que

$$|u|_\delta \leq M_\delta,$$

então existe uma solução de (5.1).

Teorema 5.3. (Teorema 14.24 página 379 da referência [70]) Considere o problema

$$\begin{cases} -u_t + F(t, x, u, u_x, u_{xx}) = 0, & \text{em } Q_T = \Omega \times (0, T), \\ u_{\Gamma_T} = \psi_{\Gamma_T}. \end{cases} \quad (5.2)$$

Se $\Gamma_T \in H^{2+\alpha}$ e que F satisfaz as seguintes condições:

- (i) Existem constantes positivas λ e Λ tais que $\lambda \leq F(X, z, p, r) \leq \Lambda$,
- (ii) Existem constantes k e b_1 tais que $zF(X, z, 0, 0) \leq k |z|^2 + b_1$,
- (iii) Existem constantes a_0 e a_1 tais que $a_0 \leq F_r \leq a_1$,
- (iv) Supondo que exista uma constante $K \geq 0$, existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$|F(X, z, p, r) - F(Y, w, q, r)| \leq [|X - Y| + |z - w| + |p - q|]^\beta [c_1 + c_2 |r|],$$

para X e Y em Ω e sempre que $|z| + |w| + |p| + |q| \leq K$. Então para qualquer $\psi \in H^{2+\alpha}$, existe uma solução $u \in C^{2,1}$ do problema (5.3).

Teorema 5.4. (Teorema 14.25 página 379 da referência [70]) Considere o problema

$$\begin{cases} -u_t + F(t, x, u, u_x, u_{xx}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u_x = g(t, x, u), & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{em } \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Se $\Gamma_T \in H^{2+\alpha}$ e que F satisfaz as seguintes condições:

(i) Existe uma função crescente μ tal que $|F(X, z, p, 0)| \leq \mu(|z|)(|p|^2 + 1)$

(ii) Existem funções a_0, a_1 e Λ_0 crescentes tais que

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} z F(X, z, p, 0) &\leq a_0(|p|) |z| + a_1(|p|), \\ |F_r(X, z, p, r)| &\leq \Lambda_0(|p|) \end{aligned}$$

(iii) Existem constantes b_0 e b_1 tais que $b_0 \leq F_r \leq b_1$,

(iv) Existem constantes não negativas M_0 e M_1 tais que

$$\operatorname{sgn} z g(X, z) \geq -M_1,$$

para $|z| \geq M_0$.

(v) Supondo que exista uma constante $K \geq 0$, existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$|F(X, z, p, r) - F(Y, w, q, r)| \leq [|X - Y| + |z - w| + |p - q|]^\beta [c_1 + c_2 |r|],$$

para X e Y em Ω e sempre que $|z| + |w| + |p| + |q| \leq K$.

(vi) $g \in H^{1+\alpha}(\partial\Omega \times [-K, K])$, para alguma constante positiva K . Então para qualquer $\psi \in H^{2+\alpha}$, existe uma solução $u \in C^{2,1}$ do problema (5.4).

5.2 Apêndice B: Princípios do Máximo e da Comparação

Nesta seção iremos exibir resultados sobre Princípio do Máximo e Teoremas de Comparação que são importantes para todo o desenvolvimento dos capítulos anteriores, desde a existência de solução até o comportamento assintótico ou anulamento em tempo finito das soluções das equações de fluxo de curvatura.

Teorema 5.5. (Teorema 9.6 página 215 da referência [70]) *Seja*

$$Pu = -u_t + a^{ij}(t, x, u, Du)D_{ij}u + a(t, x, u, Du)$$

um operador quasilinear. Supondo que P seja parabólico e que exista constante não negativa μ tal que

$$\frac{a(t, x, z, p) \operatorname{sgn} z}{a^{ij}(x, z, p) p_i p_j} \leq \frac{\mu}{|p|}.$$

Se $Pu \geq 0$ em Ω , então

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

Lema 5.6. (Lema 2.1 página 54 da referência [74].) Seja $w \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times (0, T)) \cap \mathcal{C}^{1,2}(\Omega \times (0, T))$, onde Ω é o domínio da função w . Suponha que

$$\begin{cases} w_t(t, x) - L(w(t, x)) \geq 0, & x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \\ \alpha_0(t, x) \frac{\partial w}{\partial \nu}(t, x) + \beta_0(t, x) w(t, x) \geq 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \\ w(0, x) \geq 0, & x \in \bar{\Omega}, \end{cases}$$

onde $L(w(t, x)) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(t, x) w_{x_i x_j}(t, x) - \sum_{j=1}^n b_j(t, x) w_{x_j}(t, x) + c(t, x) w(t, x)$, $\alpha_0 \geq 0$, $\beta_0 \geq 0$, $\alpha_0 + \beta_0 > 0$ em $\partial\Omega \times (0, T)$ e c uma função limitada em $\bar{\Omega} \times (0, T)$, então $w(t, x) \geq 0$ em $\bar{\Omega} \times [0, T]$.

Teorema 5.7. (Teorema 1.4 página 53 da referência [74]) Seja $w \in C^{2,1}(Q_T)$ tal que

$$w_t - Lw + cw \geq 0 \quad (t, x) \in Q_T$$

onde L é o mesmo operador do Lema anterior. Se w atinge um valor mínimo m_0 em um ponto em Q_T então $w(t, x) = m_0$ em Q_T . Se $\partial\Omega$ tem a propriedade da esfera inferior e w atinge o mínimo em um ponto $(t_0, x_0) \in S_T$, então $\frac{\partial w}{\partial \nu} < 0$ em (t_0, x_0) quando w não for constante.

Teorema 5.8. (página 52 da referência [34]) Seja $v(t, x)$, $w(t, x)$ funções contínuas em $\bar{Q}_T$. Suponha que u_x, v_x, u_t e v_t contínuas em $\bar{Q}_T$. Seja $F(t, x, p, p_i, p_{ij})$ ($i = 1, \dots, n$) uma função contínua com $u_{p_{hk}}$ contínua em um domínio E contendo o fecho dos pontos (t, x, p, p_i, p_{ij}) , onde

$$(t, x) \in Q_T, p \in \left(v(t, x), w(t, x) \right),$$

$$p_i \in \left(v_{x_i}(t, x), w_{x_i}(t, x) \right), p_{ij} \in \left(v_{x_i x_j}(t, x), w_{x_i x_j}(t, x) \right);$$

onde (a, b) denota o intervalo que liga a e b . Suponha que $\left(F_{p_{hk}} \right)$ é uma matriz semi definida positiva. Se

$$v_t > F \left(t, x, v, v_{x_i}, v_{x_i x_j} \right) \text{ em } Q_T, \quad (5.4)$$

$$w_t \leq F \left(t, x, w, w_{x_i}, w_{x_i x_j} \right) \text{ em } Q_T, \quad (5.5)$$

e se

$$v > w \in \overline{Q}_T, \quad (5.6)$$

então $v > w$ em Q_T .

5.3 Apêndice C: Método de sub e supersolução

Esta seção será dedicada a exibir o método de sub e supersolução, utilizado algumas vezes para provar-se existência de alguns problemas parabólicos. Esta seção foi baseada nas referências [73] e [74]. A questão de existência de solução para a equação de fluxo curvatura harmônica com condição de fronteira tipo singular estudado anteriormente (seção 3 do Capítulo 4) foi respondida provando a existência por este método.

Para obter solução para o problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) = L(u(x, t)), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = g(x, t, u), & \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \overline{\Omega}, \end{cases} \quad (5.7)$$

onde g é contínua em $\partial\Omega \times (0, T] \times J$, em que J é um setor entre a subsolução $\underline{u}$ e a super solução $\overline{u}$, e satisfaz a condição abaixo

- Existem funções $\bar{b}$ e $\underline{b} \in \mathcal{C}(\partial\Omega \times (0, T])$ tais que

$$-\underline{u}(u_1 - u_2) \leq g(t, x, u_1) - g(t, x, u_2) \leq \bar{b}(u_1 - u_2) \quad (5.8)$$

em $\partial\Omega \times (0, T]$, onde $u_2 \leq u_1$ e u_1 e u_2 estão em J , utilizaremos o método de sub-supersolução. É um processo iterativo em que criaremos uma sequência de funções a partir de uma subsolução e outra a partir de uma supersolução. O método consiste em provar que estas sequências estão bem definidas e que elas convergirão para uma mesma solução do problema (5.7).

O processo iterativo é feito da seguinte forma: Seja

$$G(x, t, u) = \underline{b}(x, t)u + g(x, t, u)$$

então, usando a condição 5.8, chegamos à seguinte desigualdade:

$$G(x, t, u_1) - G(x, t, u_2) \geq 0,$$

para $u_2 \leq u_1$ e $u_1, u_2 \in J$. De fato,

$$\begin{aligned} G(x, t, u_1) - G(x, t, u_2) &= \underline{b}(x, t)u_1 + g(x, t, u_1) - \underline{b}(x, t)u_2 - g(x, t, u_2) \\ &\geq \underline{b}(x, t)(u_1 - u_2) - \underline{b}(x, t)(u_1 - u_2) = 0. \end{aligned}$$

Além disso, usando o fato de g satisfazer a propriedade 5.8 obtemos outra desigualdade:

$$|G(x, t, u_1) - G(x, t, u_2)| \leq k(x, t)|u_1 - u_2|,$$

onde $k(x, t) = |\underline{b}(x, t) + \bar{b}(x, t)|$.

Supondo a existência de subsolução e supersolução para o problema (5.7), obtemos as sequências iterativas.

Seja $\underline{u}$ uma subsolução do problema (5.7). Considere o problema abaixo:

$$\begin{cases} \underline{u}_t^{(1)} = L(\underline{u}^{(1)}), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial \underline{u}^{(1)}}{\partial \nu} + \underline{b} \underline{u}^{(1)} = G(x, t, \underline{u}), & \partial\Omega \times (0, T], \\ \underline{u}^{(1)}(x, 0) = u_0(x), & \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Como $\underline{u}$, $\underline{b}$ e g são contínuas em $\overline{\Omega} \times (0, T]$, temos que a função G é contínua em $\overline{\Omega} \times (0, T]$. Assim, por teoremas clássicos de equações parabólicas, existe $\underline{u}^{(1)}$.

Usando sucessivamente teoremas clássicos de existência obtemos uma sequência $\underline{u}^{(k)}$ de funções, a qual formará uma sequência não-decrescente, e neste caso obtida através da subsolução e que satisfazem:

$$\begin{cases} \underline{u}_t^{(k)} = L(\underline{u}^{(k)}), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial \underline{u}^{(k)}}{\partial \nu} + \underline{b} \underline{u}^{(k)} = G(x, t, \underline{u}^{(k-1)}), & \partial\Omega \times (0, T], \\ \underline{u}^{(k)}(x, 0) = u_0(x), & \overline{\Omega}, \end{cases} \quad (5.10)$$

Também, usando o Teorema de Existência sucessivamente, obtemos uma outra sequência $\overline{u}^{(k)}$ não-crescente de funções, partindo-se da supersolução e tal que:

$$\begin{cases} \overline{u}_t^{(k)} = L(\overline{u}^{(k)}), & \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial \overline{u}^{(k)}}{\partial \nu} + \underline{b} \overline{u}^{(k)} = G(x, t, \overline{u}^{(k-1)}), & \partial\Omega \times (0, T], \\ \overline{u}^{(k)}(x, 0) = u_0(x), & \overline{\Omega}, \end{cases} \quad (5.11)$$

onde $\underline{u}^{(0)} = \underline{u}$ e $\overline{u}^{(0)} = \overline{u}$.

Notemos que essas sequências estão bem definidas e além disso possuem expressões analíticas. Isto é devido a um teorema clássico de equações diferenciais parciais parabólicas. O Lema seguinte, encontrado em [74], descreve as expressões analíticas das sequências encontradas pelo método iterativo.

Lema 5.9. *As duas sequências $\{\overline{u}^{(k)}\}$ e $\{\underline{u}^{(k)}\}$ estão bem definidas e estão em $\mathcal{C}^{2,1}(\Omega \times (0, T])$, para cada k .*

Demonstração: Notemos que, por hipótese, $\underline{u}$ e $\underline{b}$ são contínuas em $\partial\Omega \times (0, T]$. Daí $G(x, t, \underline{u}) = \underline{b}(x, t) \underline{u} + g(x, t, \underline{u})$ é contínua em $\partial\Omega \times (0, T]$, pois g é contínua em $\partial\Omega \times (0, T] \times J$. Também por hipótese u_0 é contínua em $\overline{\Omega}$. Logo, por Teoremas de Existência de equações parabólicas, temos que o problema (5.9) tem solução $\underline{u}^{(1)}$, a qual pode ser representada por:

$$\underline{u}^{(1)}(x, t) = \int_{\Omega} \Gamma(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \underline{\psi}^{(1)}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

onde $\underline{\psi}^{(1)}$ é dada por:

$$\underline{\psi}^{(1)}(x, t) = 2\underline{H}^{(1)}(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] \underline{H}^{(1)}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

com

$$\underline{H}^{(1)}(x, t) = \int_{\partial\Omega} Q(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi - G(x, t, \underline{u}),$$

$$Q_1(x, t, \xi, \tau) = Q(x, t, \xi, \tau) = 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x, t, \xi, \tau) + 2\underline{b}(x, t) \Gamma(x, t, \xi, \tau)$$

e

$$Q_{j+1}(x, t, \xi, \tau) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} Q(x, t, y, s) Q_j(y, s, \xi, \tau) dy ds.$$

Sucessivamente, usando Teorema de Existência, obtemos:

$$\underline{u}^{(k)}(x, t) = \int_{\Omega} \Gamma(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \underline{\psi}^{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

onde $\underline{\psi}^{(k)}$ é dada por:

$$\underline{\psi}^{(k)}(x, t) = 2\underline{H}^{(k)}(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] \underline{H}^{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

com

$$\underline{H}^{(k)}(x, t) = \int_{\partial\Omega} Q(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi - G(x, t, \underline{u}^{(k-1)}).$$

Analogamente, usando Teoremas de Existência, obtemos uma expressão para $\overline{u}^{(k)}$:

$$\overline{u}^{(k)}(x, t) = \int_{\Omega} \Gamma(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \overline{\psi}^{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

onde $\overline{\psi}^{(k)}$ é dada por:

$$\overline{\psi}^{(k)}(x, t) = 2\overline{H}^{(k)}(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] \overline{H}^{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

com

$$\overline{H}^{(k)}(x, t) = \int_{\Omega} Q(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi - G(x, t, \overline{u}^{(k-1)}).$$

Finalmente, temos em mãos as sequências de funções. A partir desse momento vamos nos concentrar na convergência para uma solução do problema (5.7). Começaremos com um Lema de [74] que diz respeito à monotonicidade das sequências obtidas através do método de iteração, via subsolução e supersolução. ■

Lema 5.10. *Se g satisfaz a propriedade 5.8, então as sequências $\{\underline{u}^{(k)}\}$ e $\{\overline{u}^{(k)}\}$ são monótonas e satisfazem*

$$\underline{u} \leq \dots \leq \underline{u}^{(k)} \leq \underline{u}^{(k+1)} \leq \dots \leq \overline{u}^{(k+1)} \leq \overline{u}^{(k)} \leq \dots \leq \overline{u}.$$

Além disso, $\underline{u}^{(k)}$ e $\overline{u}^{(k)}$ são subsolução e supersolução de (5.7), respectivamente.

Sabendo que as sequências de subsolução e supersolução são monótonas então os limites dessas sequências existem. Teremos que, de fato, essas sequências vão convergir para a chamada solução da equação (5.7). Primeiramente, começaremos com um Lema de [74] que conclui que os limites satisfazem uma equação integral.

Lema 5.11. *Os limites $u_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{u}^{(k)}$ e $u_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}^{(k)}$ são contínuos em $\overline{\Omega} \times (0, T]$ e satisfazem a equação integral:*

$$u(x, t) = \int_{\Omega} \Gamma(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (5.12)$$

onde

$$\psi(x, t) = 2H(x, t) + 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x, t, \xi, \tau) \right] H(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$H(x, t) = \int_{\Omega} Q(x, t, \xi, 0) u_0(\xi) d\xi - G(x, t, u),$$

$$Q(x, t, \xi, \tau) = 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x, t, \xi, \tau) + 2\underline{b}(x, t) \Gamma(x, t, \xi, \tau)$$

$$Q_{j+1}(x, t, \xi, \tau) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} Q(x, t, y, s) Q_j(y, s, \xi, \tau) dy ds,$$

$$Q_1 = Q$$

Dai, com o Lema 5.12, temos informações sobre a continuidade da solução de (5.7).

Lema 5.12. *Seja $V(x, t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, t, \xi, \tau) \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau$. Então V é contínua em $\bar{\Omega} \times (0, T]$.*

Concluiremos a questão de existência de solução para o problema (5.7) através do Teorema 5.13, encontrado em [74], e que mostra que os limites das duas sequências de funções, uma de subsoluções e outra de supersoluções, convergem para a mesma função, e esta é solução da equação (5.7). Notemos que a continuidade de tal solução já foi provada no Lema 5.11 com a ajuda do Lema 5.12.

Teorema 5.13. *Se $\bar{u}$ e $\underline{u}$ são, respectivamente, supersolução e subsolução do problema (5.7) e g satisfaz a propriedade 5.8, então as sequências*

$$\{\bar{u}^{(k)}\} \text{ e } \{\underline{u}^{(k)}\}$$

convergem monotonicamente para uma mesma solução de (5.7).

5.4 Apêndice D: Teoria de Semigrupos

Neste seção apresentamos resultados da teoria de semigrupos, usando como bibliografia a referência [64]. A teoria de semigrupos foi importante no trabalho para mostrar o anulamento em tempo finito da solução do fluxo de curvatura média com condição de fronteira tipo Dirichlet (Teorema 2.11).

Definição 5.14. *Seja X um espaço vetorial métrico completo e seja $V_t : X \rightarrow X$ uma família de operadores contínuos. Dizemos que $\{V_t\}$ é uma semigrupo se*

$$V_{t_1}(V_{t_2}(x)) = V_{t_1+t_2}(x),$$

para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ e $x \in X$.

Definição 5.15. *O conjunto $\gamma^+(x) = \{y \in X | y = V_t(x), t \in \mathbb{R}^+\}$ é chamado de semi-trajetória positiva de x e o conjunto $\gamma_t^+(x) = \{y \in X | y = V_\tau(x), \tau \in [t, \infty)\}$ é chamado de semi-trajetória positiva de x a partir do tempo t .*

Definição 5.16. Dizemos que A atrai M , com $A, M \subset X$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $t_1 = t_1(\varepsilon, M) \in \mathbb{R}^+$ tal que $V_t(M) \subset O_\varepsilon(A)$, para todo $t \geq t_1$. Sendo $O_\varepsilon(A)$ a união de todas as bolas abertas de raio ε centradas em pontos de A .

Se A atrai cada ponto de $x \in X$, então A é chamado atrator global.

Definição 5.17. O conjunto ω -limite $\omega(x)$ é o conjunto de todos $y \in X$ tal que $y = \lim_{t_k \rightarrow \infty(x)} V_{t_k}(x)$, para uma sequência $t_k \rightarrow \infty$.

Lema 5.18.

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} [\gamma_t^+(x)]_X$$

e

$$\omega(A) = \bigcap_{t \geq 0} [\gamma_t^+(A)]_X,$$

onde o símbolo $[]_X$ é o fecho em X .

Definição 5.19. Dizemos que um semigrupo $\{V_t\}$ pertence a classe $\mathcal{K}$ se para cada $t > 0$ o operador V_t é compacto, ou seja, para qualquer conjunto limitado $B \subset X$ tem sua imagem $V_t(B)$ precompacta.

Definição 5.20. Um funcional de Liapunov é uma função contínua $\mathcal{L} : X \rightarrow \mathbb{R}$, o qual decresce ao longo de cada trajetória $\gamma^+(x)$, isto é $\mathcal{L}(V_t(x)) \searrow$ quando $t \nearrow$ (exceto nos pontos estacionários $z = V_t(z)$).

Teorema 5.21. Suponha que o semigrupo $\{V_t\}$ pertença a classe $\mathcal{K}$ e $\gamma_+(x)$ é um conjunto limitado para todo $x \in X$. Se para este semigrupo existir um funcional de Liapunov $\mathcal{L}$, então a união dos ω -limite $\omega(x)$ é não vazia e coincide com o conjunto Z de todos os pontos estacionários.

5.5 Apêndice E: Formas Fundamentais da Geometria Diferencial

5.5.1 Primeira Forma Fundamental da Geometria Diferencial

Nessa seção, com base nas referências [11] e [80], apresentaremos a primeira forma quadrática, denominada primeira forma fundamental, que nos permite efetuar alguns

cálculos geométricos, tais como o comprimento de arcos, ângulos entre curvas e áreas de regiões na superfície.

Definição 5.22. *Seja S uma superfície regular e $T_p S$ o plano tangente a S no ponto p . A forma quadrática I_p é uma aplicação $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2$$

é chamada de primeira forma fundamental.

Como podemos observar, a primeira forma fundamental é basicamente o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$ restrito aos vetores tangentes a S .

Daí podemos expressar a primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ associada a parametrização $X(u, v)$ em p .

Seja o vetor $w \in T_p S$, façamos uma curva γ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = w$ e definimos uma função $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ dada por $\beta = X^{-1} \circ \gamma$, tal que

$$\beta(0) = q \text{ e } X(q) = p.$$

Notemos ainda que $\forall (-\epsilon, \epsilon)$ teremos $\gamma'(t) = X'(\beta(t))\beta'(t) = X_u(\beta(t))u'(t) + X_v(\beta(t))v'(t)$, onde $\beta'(t) = (u'(t), v'(t))$.

Assim,

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle w, w \rangle_p = \langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle_{\gamma(0)} = \\ &= \langle X_u(\beta(0))u'(0) + X_v(\beta(0))v'(0), X_u(\beta(0))u'(0) + X_v(\beta(0))v'(0) \rangle_p = \\ &= \langle X_u, X_u \rangle (u')^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle u'v' + \langle X_v, X_v \rangle (v')^2 \end{aligned}$$

Vamos denotar

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, F = \langle X_u, X_v \rangle, G = \langle X_v, X_v \rangle, \quad (5.13)$$

que chamaremos de coeficientes da primeira forma fundamental da geometria diferencial.

5.5.2 Segunda Forma Fundamental da Geometria Diferencial

Nesta seção, também com base nas referências [11] e [80], definiremos a segunda forma fundamental.

Definição 5.23. A forma quadrática II_p , definida em $T_p S$ por $II_p = - \langle dN_p(v), v \rangle$, onde $N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$, é chamada a segunda forma fundamental de S em p .

Vamos calcular a segunda forma fundamental em um vetor $\gamma'(t)$ em $T_p S$. Sejam $X(u, v)$ uma parametrização de $p \in S$ e $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , com $\gamma(0) = p$.

Temos que $\gamma' = X_u u' + X_v v'$,

Assim, a expressão da segunda forma fundamental na base (X_u, X_v) é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\gamma') &= - \langle dN_p(\gamma'), \gamma' \rangle = \\ &= - \langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= -(u')^2 \langle N_u, X_u \rangle + u'v' \langle N_u, X_v \rangle + v'u' \langle N_v, X_u \rangle + (v')^2 \langle N_v, X_v \rangle. \end{aligned}$$

No entanto, $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$, então

$$II_p(\gamma') = -((u')^2 \langle N_u, X_u \rangle + 2u'v' \langle N_u, X_v \rangle + (v')^2 \langle N_v, X_v \rangle)$$

Vamos denotar

$$-e = \langle N_u, X_u \rangle,$$

$$-f = \langle N_u, X_v \rangle$$

e

$$-g = \langle N_v, X_v \rangle$$

Por outro lado, como $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$, então obtemos

$$\langle N, X_u \rangle_u = \langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle = 0$$

$$\langle N, X_v \rangle_v = \langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = 0$$

e

$$\langle N, X_u \rangle_v = \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0$$

Portanto das equações acima temos que:

$$\langle N_u, X_u \rangle = - \langle N, X_{uu} \rangle,$$

$$\langle N_v, X_v \rangle = - \langle N, X_{vv} \rangle,$$

e

$$\langle N_v, X_u \rangle = - \langle N, X_{uv} \rangle.$$

Logo,

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle, f = \langle N, X_{vv} \rangle, g = \langle N, X_{uv} \rangle. \quad (5.14)$$

são os chamados coeficientes da segunda forma fundamental da geometria diferencial.

5.6 Apêndice F: Outros resultados importantes

Nesta seção, com base nas referências [76], [77] e [78], apresentaremos alguns resultados que foram importantes para a aplicação do método de sub e supersolução (vide Apêndice D), para concluir o anulamento em tempo finito da solução do fluxo de curvatura média com condição de fronteira tipo Dirichlet (Teorema 2.8) e para provar a existência de um dado inicial que satisfaz todas as hipóteses enunciadas (Teorema 2.4).

Teorema 5.24. *(Teorema de Dini) Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto. Se uma sequência de funções contínuas $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge monotonamente para uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, então a convergência é uniforme.*

Teorema 5.25. *Seja (f_n) uma sequência de funções deriváveis no intervalo $[a, b]$. Se, para um certo $c \in [a, b]$, a sequência numérica $(f_n(c))$ converge e se as derivadas f'_n convergem uniformemente em $[a, b]$ para uma função derivável g , então (f_n) converge uniformemente em $[a, b]$ para uma função derivável f , tal que $f' = g$.*

Teorema 5.26. *(Teorema central de Liapunov) Seja x_0 um ponto de equilíbrio da equação $x' = f(x)$, onde $f : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função analítica no aberto W . Suponha que o imaginário puro $i\alpha$ é um autovalor simples de $Df(x_0)$. Suponha que*

$\frac{\lambda}{i\alpha} \notin \mathbb{Z}$ para todos os autovalores de $A = Df(x_0)$ diferentes de $\pm i\alpha$. Suponha ainda que exista uma integral primeira $F(x)$ da equação $x' = f(x)$ tal que

$$D^2F(x_0).(v, v) \neq 0,$$

onde v é a parte imaginária de um autovetor de $i\alpha$. Então, existe uma família uniparamétrica de soluções periódicas $x(t, \mu)$ tal que $x(0, \mu) = x_0$ com período $\tau(\mu)$ e $\lim_{\mu \rightarrow 0} \tau(\mu) = \frac{2}{\alpha}$.

Lema 5.27. (*Desigualdade de Jensen*) Seja f uma função integrável não negativa tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Se g é uma função integrável e ψ é convexa, então

$$\psi\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx\right) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \psi(g(x))f(x)dx.$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Acker and B. Kawohl, *Remarks on quenching*. Nonlinear Anal. **13** (1989), 53-61.
- [2] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*. New York: Academic, 1975.
- [3] B. Andrews, *Contraction of convex hypersurfaces in Euclidean Spaces*. Calc. Var. **2** (1994), 151-171.(*).
- [4] B. Andrews, *Contraction of convex hypersurfaces in Riemannian Spaces*. Pacific. J. Math. **195** (2000), 1-34.
- [5] B. Andrews, *Gauss curvature flow: the fate of the rolling stone*. Invent. Math. **138** (1999), 151-161.(*).
- [6] B. Andrews, *Motion of hypersurfaces by Gauss curvature*. Pacific J. Math **195** (2000), 1-34.
- [7] S. Angenet, *The zeroset of a solution of a parabolic equation*. J. Reine Angew. Math **390** (1988), 79-96.
- [8] P. Baras and L.Cohen, *Complete blow up after T_{max} for a semilinear heat equation*. J. Funct. Analysis, **71** (1987), 142-174.
- [9] K.A. Brakke, *The motion of a surface by its mean curvature flow*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1978.(*).

- [10] M. Caputo and P. Daskalopoulos, *Highly degenerate harmonic mean curvature flow*. Calc. Var., **35**(2009), 365-384.
- [11] M. P. do Carmo, Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, 3^a edição, Coleção Textos Universitários, IMPA-RJ, 2005.(*)
- [12] B. Chow and D. Knopf, The Ricci flow: An Introduction. Mathematical Surveys and Monographs vol.110 (2004), AMS.
- [13] P. Daskalopoulos and R. Hamilton, *Harmonic mean curvature flow on surfaces of negative Gaussian curvature*. Comm. Annal. Geom. **14**(2006), 907-943.(*)
- [14] P. Daskalopoulos and N. Sesum, *The harmonic mean curvature flow of convex surfaces of in $\mathbb{R}^3$* . Calculus of Variations, **37**(2008), 187-215.
- [15] K. Deng and H.A. Levine, *On the blow up of u_t at quenching*. Proc. AMS **106**(1989), 1049–1056.
- [16] K. Deng and M. Xu, *On solutions of a singular diffusion equation*. Nonlinear Anal., **41** (2000), 489-500.(*)
- [17] K. Deng and M. Xu, *Quenching for a nonlinear diffusion equation with a singular boundary condition*. Z. Angew. Math. Phys., **50** (1999), 574-584.(*)
- [18] S. Dieter, *Nonlinear degenerate curvature flows for weakly convex hypersurfaces*. Calc. Var., **22** (2005), 229-251.(*)
- [19] G. Dziuk and B. Kawohl, *On rotationally symmetric mean curvature flow*. J. Diff. Eq., **93**(1991), 142–149.(*)
- [20] K. Ecker and G. Huisken, *Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature*. Invent Math. **105**(1991), 547-569.
- [21] L. C. Evans, Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 1998.
- [22] L. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature I*. J. Diff. Geom. **33**(1991) 635-681.
- [23] M. Fila, *Boundedness of global solutions for the heat equation with nonlinear boundary conditions*. Comment. Math. Univ. Carol. **30**(1989), 479–489.

- [24] M. Fila and J. Filo, *Blow-up on the boundary: A survey*. Singularities and Differential Equations, Banach Center Publications **33**(1996),67–78.
- [25] M. Fila and J.S. Guo, *Complete blow-up and incomplete quenching for the heat equation with a nonlinear boundary condition*. Nonlinear Anal., **48**(2002),995–1002.(*).
- [26] S. Fillipas and J. Guo, *Quenching profiles for one dimensional semilinear heat equations*. Quart. Appl. Math. **51** (1993), 713-729.
- [27] M. Fila and J. Hulshof, *A note on the quenching rate*. Proc. Am. Math. Soc., **112**(1991),473–477.
- [28] M. Fila, B. Kawohl, *Asymptotic analysis of quenching problems*. Rocky Mountain J. Math, **22**(1992), 563–577.
- [29] M. Fila, B. Kawohl and H.Levine, *Quenching for quasilinear equations*. Comm. Partial Differential Equations, **17**(1992), 593–614.(*).
- [30] M. Fila and H. Levine, *Quenching on the boundary*. Nonlinear Anal., **21**(1993), 795–802. Inst. Henri. Poincaré Analyse Non Linéaire, **15** (1998), 233–252.(*).
- [31] M. Fila and P. Quittner, *The blow up rate for the heat equation with a boundary condition*. Math. Meth. Appl. Sci., **14**(1991),197–205.
- [32] J. Filo, *Diffusivity versus absorption through the boundary*. J. Diff. Eq. **99**(1992),281–305.
- [33] W.J. Firey, *Shapes of worn stones*. Mathematika **21** (1974), 1-11.(*).
- [34] A. Friedman, Partial differential equations of parabolic types. Prentice-Hall, 1964.(*).
- [35] A. Friedman and B. McLeod, *Blow up of positive solutions of semilinear heat equations*. Indiana Univ. Math. J., **34** (1985), 425-447.
- [36] M. Gage and R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*. J. Diff. Geom.**23**(1986),69–96.

- [37] V.A. Galaktionov, S.P.Kurdyumov and A.A. Samarskii, *On the method of stationary states for quasilinear parabolic equations*. Math. USSR Sbornik, **67**(1990),449–471.
- [38] V. Galaktionov and J. Vasquez, *Necessary and sufficient conditions for complete blow-up and extinction for one-dimension quasilinear heat equations*. Arch. Rational Mech. Anal. **129**(1995),225–244.
- [39] V. Galaktionov and J. Vasquez, *Continuation of blowup solution of nonlinear heat equation in several space dimensions*. Comm. Pure Appl. Math. **50**(1997),1–67.
- [40] G. Gerhardt, *Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres*. J. Diff. Geom. **32** (1990), 299-314.
- [41] Y. Giga and R.V. Kohn, *Asymptotically self-similar blow up of semilinear heat equation*. Comm. Pure Appl. Math., **38**(1995), 297–319.
- [42] J.Gomes, V. Marques and N. Wolanski, *Blow up results and localization of blow up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition*. J. Diff. Eq. **92**(1991),384–401.
- [43] M.A. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*. J. Diff. Geom.**26**(1987),285–314.
- [44] M.A. Grayson, *A short note on the evolution of a surface by its mean curvature*. Duke Math. J.**58**(1989),555–558.(*).
- [45] J-S. Guo, *Quenching behavior for a fast diffusion equation with absorption*. Dynamic Systems Appl **4**(1995),47–56.
- [46] J. Guo, *On the quenching behavior of the solution of a semi-linear parabolic equation*. J. Math. Analysis Applic. **151**(1990),58–79.
- [47] R. Hamilton, *Four manifolds with positive curvature operator*. J. Diff. Geom. **24**(1986), 153-179.
- [48] R. Hamilton, *The formation of singularities in the Ricci Flow*. Surveys in Differential Geometry, vol II, Internat. Press, Cambridge, (1995), 7-136

- [49] G. Huisken, *A distance comparison principle for evolving curves*. Asian. J. Math. **2** (1998), 127-133.
- [50] G. Huisken, *Contracting convex hypersurfaces in Riemannian manifolds by their mean curvature*. Invent. Math. **84** (1986), 463-480
- [51] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*. J. Diff. Geom. **20** (1984), 237-266.(*)
- [52] G. Huisken, *Non-parametric mean curvature evolution with boundary conditions*. J. Diff. Eq. **77** (1989), 369-378.
- [53] G. Huisken, *Asymptotic behaviour for singularities of the mean curvature flow*. J. Diff. Geom. **31** (1990), 285-299.
- [54] Huisken, G. and Ilmanen, T., *Higher regularity on the inverse curvature flow*. Differential Geometry, **80**(2008), 433-451.(*)
- [55] G. Huisken and T. Ilmanen, *The Riemannian Penrose Inequality*. Int. Math. Res. Not. **1997**, 1045-1058.
- [56] G. Huisken and T. Ilmanen, *The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality*. J. Diff. Geom. **59**(2001), 353-437.(*)
- [57] G. Huisken and C. Sinestrari, *Convexity estimates for mean curvature flow and singularities of mean convex surfaces*. Acta. Math., **183** (1999), 45-70.
- [58] G. Huisken and C. Sinestrari, *Mean curvature flow singularities for mean convex surfaces*. Calc. Var., **8**(1999) 1-14.
- [59] T. Ilmanen, *Lectures on Mean curvature flow and related equations*. Lecture notes, Trieste 1995.
- [60] N. Ishimura, *Self-similar solutions for the Gauss curvature evolution of rotationally symmetric surfaces*. Nonlinear Anal. **33** (1998), 97-104.
- [61] T. Jeffres, *Gauss curvature flow on surfaces of revolution*. Adv. Geom, **9**(2009), 189-197.(*)

- [62] A. Lacey and D. Tzanetis, *Complete blow-up for a semilinear diffusion equation with a sufficiently large initial condition*. IMA J. Appl. Math., **42**(1988), 207–215.
- [63] O. A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, N. N. Uralceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Transl. Math. Monogr., 1968.(*)
- [64] O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for semigroups and evolution equations*. Cambridge University Press, 1991.(*)
- [65] H. Levine, *Quenching and beyond: a survey of recent results*. GAKUTO International Series **2**(1993), 501–512.
- [66] H. Levine, *Quenching, nonquenching, and beyond quenching for solutions of some parabolic equations*. Ann. Mat. Pura Appl. **155**(1989), 243–260.
- [67] H. Levine, *The quenching of solutions of linear parabolic and hyperbolic equations with nonlinear boundary conditions*. SIAM J. Math Anal. **14**(1983), 1139–1152.
- [68] H. Levine, *On the nonexistence of global weak solutions of some properly and improperly posed problems of mathematical physics: The method of unbounded Fourier Coefficients*. Math Annalen. **214**(1975), 205–220.
- [69] H. Levine and L. Payne, *Nonexistence theorems for the heat equation with nonlinear boundary conditions and for the porous medium equation backward in time*. J. Diff. Eq. **16**(1974), 319–334.
- [70] G. M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*. World Scientific, 1996.(*)
- [71] J. López, V. Márquez and N. Wolanski *Blow up results and localization of blow up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition*. J. Diff. Eq. **92** (1991), 384–401.
- [72] Y. Martel, *Complete blow up and global behaviour of solutions of $u_t - \Delta u = g(u)$* . Ann. Inst. H. Poincaré, Anal non linéaire **15**(1998), 687–723.
- [73] R.R. Ottoboni, *Equações diferenciais parabólicas e soluções que se anulam em tempo finito*. Dissertação de Mestrado IMECC-UNICAMP, 2007.(*)

- [74] C. V. Pao, Nonlinear parabolic and elliptic equations. Plenum, 1992.(*)
- [75] D. Phillips, *Existence of solutions of quenching problems* . Applicable Anal **24**(1987),253–264.
- [76] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1987.(*)
- [77] Smale-Hirsch, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, New York, 1974.(*)
- [78] T. Sotomayor, Lições de equações diferenciais. Impa, Rio de Janeiro, 1979.(*)
- [79] K. Tso, *Deforming a hypersurfaces by its Gauss-Kronecker curvature*. Comm. Pure. Appl. Math., **38** (1985), 867 - 882.(*)
- [80] K. Tenenblat, Introdução à Geometria Diferencial, 2^a edição, Editora Blucher, 2008.(*)