

Otimização de Experimentos Fatoriais com Múltiplas Respostas

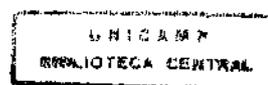
Verônica Maria Cadena de Almeida

Prof. Dr. Ademir José Petenate

orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

nov - 1997
Campinas-SP



Otimização de Experimentos Fatoriais com Múltiplas Respostas

Este exemplar corresponde à redação final da tese, devidamente corrigida e defendida por Verônica M^a Cadena de Almeida e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 7 de novembro de 1997.



Prof. Dr. Ademir José Petenate

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Estatística.

nov -1997

Campinas -SP

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Almeida, Verônica Maria Cadena de

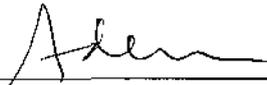
AL64o Otimização de experimentos fatoriais com múltiplas respostas /
Verônica Maria Cadena de Almeida -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1997.

Orientador : Ademir José Petenate

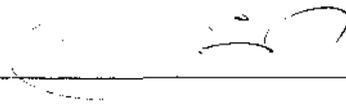
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

I. Planejamento experimental.^x 2. Taguchi, método de (Controle
de qualidade):^x I. Petenate, Ademir José. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

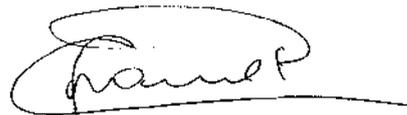
Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 07 de novembro de 1997
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). ADEMIR JOSÉ PETENATE



Prof (a). Dr (a). JOSÉ ANTONIO CORDEIRO



Prof (a). Dr (a). REINALDO CHARNET

À Janet e Demóstenes, meus pais,
que me mostraram o caminho.

Agradecimentos

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Ao Ademir pela amizade, apoio e orientação durante este período.

Aos professores e funcionários do IMECC que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, em particular, ao Prof. Dr. Antônio Moretti pela valiosa colaboração em um dos pontos desta dissertação.

Aos amigos da UNICAMP pelo carinho ao longo desses anos, em especial, Carla Vivacqua, Rissa Ota e Fernando Lucâmbio, os quais contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

A todas do pensionato, em particular, Raquel, Cristiane, Paula, Rosimeyre, Lianca e Lusane, que pelo convívio diário, reduziram a enorme saudade de casa.

Aos meus irmãos, Cláudia, Paulo e Roberta, que mesmo longe fisicamente, estiveram sempre próximos.

A George pelos momentos inesquecíveis. Pela força e incentivo nas horas mais difíceis.

A Deus por sempre estar presente.

Resumo

Na prática, a maioria dos produtos tem várias características de qualidade, as quais são consideradas importantes e mesmo vitais tanto para o consumidor quanto para o fabricante do produto. Deste modo, quando um experimento fatorial é executado, são medidas várias respostas em relação aos fatores. Determinar um conjunto de níveis dos fatores ótimos para as respostas não é um problema trivial, pois dificilmente os níveis dos fatores que são ótimos para uma determinada resposta, serão ótimos para as outras. Por este motivo é importante considerar, de forma conjunta, o efeito dos fatores na locação e dispersão das respostas.

A presente dissertação apresenta cinco métodos de abordar a análise de múltiplas respostas em experimentos planejados. Todos eles basicamente propõem a construção de uma função objetivo univariada, para as múltiplas características medidas. Estas funções deverão captar informações sobre média, variância, distância ao valor objetivo, etc para as várias características envolvidas num processo. Espera-se com isso determinar um conjunto de níveis que, não podendo ser o melhor conjunto para cada característica, seja entretanto, um compromisso com o ótimo.

Sumário

Capítulo 1 Introdução	1
Capítulo 2 Algumas Idéias Preliminares: Múltiplas Respostas e Taguchi	4
2.1 Algumas Formas de Abordar a Análise de Múltiplas Respostas	4
2.2 Idéias Gerais sobre a Metodologia de Taguchi	7
Capítulo 3 Análise de Múltiplas Respostas	18
3.1 Método de Khuri e Conlon	19
3.1.1 Modelo Linear Multivariado	19
3.1.2 Dependência Linear Entre as Respostas	20
3.1.3 Otimização Simultânea de Funções de Múltiplas Respostas	22
3.1.4 Função Distância	24
3.1.5 Uma Função Distância que Quantifica a Aleatoriedade de ϕ	24
3.2 Método de Elsayed e Chen	26
3.2.1 Método de Otimização	26
3.2.2 Múltiplas Características com um Único Fator de Controle	29
3.2.2.1 Fator de Sinal Diferente para as Características	30
3.2.2.2 Fator de Sinal Comum para as Características	33
3.2.2.3 Vários Fatores de Controle	38
3.3 Método de Pignatiello	39
3.3.1 Função Perda para Múltiplas Características de Qualidade	40
3.3.2 Função Perda Esperada	42
3.3.3 Estratégias para Minimizar a Função Perda Esperada	42

3.3.3.1 Estratégia Direta	42
3.3.3.2 Estratégia de Partição	43
3.4 Método de Ribeiro e Albin	45
3.4.1 Função Perda para Múltiplas Características de Qualidade	45
3.4.2 Função Perda Esperada	46
3.4.3 Otimização de um Processo com Múltiplas Características de Qualidade	47
3.4.3.1 Identificar as Características de Qualidade e os Parâmetros da Função Perda	47
3.4.3.2 O Planejamento do Experimento e a Coleta de Dados	48
3.4.3.3 Análise de Cada Característica de Qualidade Individualmente	48
3.4.3.4 Estimativa da Perda Esperada para Cada Tratamento	50
3.4.3.5 Modelo da Perda como Função dos Fatores e Otimização do Processo	51
3.5 Método de Ribeiro e Elsayed	51
3.5.1 Introdução	52
3.5.2 Função Perda Gradiente	53
Capítulo 4 Estudos de Casos e Avaliações	56
4.1 Estudos de Casos	56
4.1.1 Primeiro Caso	56
4.1.1.1 Método de Ribeiro e Albin	57
4.1.1.2 Método de Pignatiello	64
4.1.2 Segundo Caso	65
4.1.2.1 Método de Ribeiro e Albin	66
4.1.2.2 Método de Khuri e Conlon	72
4.1.3 Terceiro Caso	74
4.1.3.1 Método de Ribeiro e Albin	77
4.2 Avaliações	87

Capítulo 5 Conclusões	94
5.1 Breve Resumo	94
5.2 Aspectos Principais	95
5.3 Contribuições da Dissertação	96
Apêndices	98
Apêndice A	99
Apêndice B	109
Apêndice C	113
Bibliografia	116

Capítulo 1 Introdução

Recentemente, em nossa sociedade, podemos observar que a palavra qualidade adquiriu um significado bastante amplo. Ela pode ser vista sobre diferentes aspectos: qualidade de vida, qualidade de serviços, qualidade de bens de consumo, etc. Aqui estaremos preocupados apenas com a qualidade de bens de consumo.

Na compra de um produto, o consumidor observa determinadas características, as quais considera importante. Caso compre um rádio para o carro, espera que o rádio funcione bem todas as vezes que seja usado. Seja em dias quentes ou frios, estradas boas ou ruins. Desta forma, o consumidor desenvolve um julgamento sobre a qualidade do produto. Contudo, este julgamento está baseado apenas na observação.

Na indústria, o produto passa por diversas fases antes de chegar ao consumidor. Hoje, a meta não é apenas fabricar um produto que tenha características dentro das especificações. A preocupação atual é que o produto se apresente robusto às fontes de variação e que as características funcionais estejam próximas a seus valores objetivos.

Por fontes de variação podemos entender as variações ambientais, a deterioração do produto e as imperfeições de fabricação. As variações ambientais são tais como: temperatura, umidade, variação de voltagem, etc. Uma causa importante na variação do desempenho do produto é a deterioração com o tempo de uso. Exemplos comuns de deterioração do produto são: crescimento da resistência elétrica de um resistor, perda de elasticidade de uma mola, desgaste de peças de um motor devido a fricção, etc. As imperfeições de fabricação são inevitáveis durante o processo de fabricação entre diferentes unidades do produto. Em outras palavras, não existem dois produtos idênticos.

Ter características de qualidade dentro dos intervalos de especificação não garante ao produto um bom desempenho. Por exemplo, se o tamanho da porta de um carro está próxima do seu

limite de tolerância inferior e o tamanho de sua moldura está próximo ao limite de tolerância superior, então a porta não fechará de modo apropriado. Isso não aconteceria caso os tamanhos, tanto da porta quanto da moldura, estivessem com suas características próximas a seus valores objetivos.

Segundo Taguchi, a qualidade do produto pode ser quantificada em termos da perda total imposta à sociedade na hora em que o produto é embarcado. Observe a oposição nestas duas palavras: "qualidade" ser definida como "perda". Por que perda? Todo produto fabricado oferece um tempo de garantia. Se o cliente utiliza este tempo de garantia, quem cobre o custo é o produtor. Caso o produto volte a falhar, fora do prazo de garantia, quem perde é o cliente.

A partir desse enfoque, Taguchi desenvolveu no final dos anos 50 início dos anos 60, os fundamentos do *Planejamento Robusto* e aplicou-os no desenvolvimento de vários produtos. O planejamento robusto tem suas idéias fundamentadas no delineamento de experimentos estatísticos. Tal delineamento remonta de 1920 com os trabalhos de Sir Ronald Fisher e ganhou uma nova abordagem com as idéias de Taguchi.

Este plano, utiliza principalmente o arranjo ortogonal para tornar o produto/processo robusto às fontes de variação. Com isso, não basta apenas encontrar o melhor conjunto dos níveis para os fatores que afetam a média das respostas¹, precisamos também, determinar o melhor conjunto para aqueles fatores os quais afetam a variabilidade.

Na prática, todo produto fabricado tem mais que uma característica de qualidade que é considerada importante ou mesmo vital pelo consumidor do produto. Assim, no momento em que um produto/processo é planejado, são observadas, ou melhor medidas, várias respostas num mesmo arranjo ortogonal e cada uma delas é analisada individualmente. Na grande maioria dos casos, existem conflitos na determinação dos níveis ótimos dos fatores para as diversas características funcionais do produto. Havendo conflito, cabe ao engenheiro de processo decidir o que fazer.

¹Os termos "resposta" e "característica de qualidade" serão usados indistintamente ao longo dos próximos capítulos.

O objetivo deste trabalho é apresentar e avaliar cinco métodos de abordar a análise de múltiplas respostas em experimentos planejados. Todos eles basicamente propõem a construção de uma função objetivo univariada, para as múltiplas características medidas. Estas funções deverão captar informações sobre média, variância, distância ao valor objetivo, etc para as várias características envolvidas num processo. Espera-se, com isso, determinar um conjunto de níveis que, não podendo ser o melhor conjunto para cada característica, seja entretanto, um compromisso com o ótimo.

Este trabalho encontra-se dividido da seguinte forma: no Capítulo 2 veremos quando surgiu e como era abordada a análise de múltiplas respostas num produto ou processo. Apresentaremos também uma rápida introdução aos métodos de Taguchi que serão úteis para compreender algumas das funções propostas. No Capítulo 3 veremos os cinco métodos disponíveis na literatura que transformam, através de uma função, uma análise multivariada numa análise univariada. No Capítulo 4 serão apresentados três estudos de casos utilizando, quando possível, os métodos descritos no capítulo 3. Faremos também uma avaliação de cada um dos métodos. Finalmente, no Capítulo 5 a conclusão será apresentada sobre o estudo de Múltiplas Respostas.

Capítulo 2 Algumas Idéias Preliminares:

Múltiplas Respostas e Taguchi

A qualidade de um produto precisa ser planejada. Este é o elemento essencial das atividades de Taguchi no controle de qualidade *off-line* que envolvem os estágios de projeto do produto e do processo de fabricação. Sua contribuição, para a melhoria da qualidade, visa tanto a média quanto a variabilidade do desempenho das características, porém seus métodos analisam apenas uma característica de qualidade por vez.

Neste capítulo, mostraremos um pequeno resumo das idéias de Taguchi (seção 2.2) que servirão de base para alguns dos métodos de análise de múltiplas respostas que serão apresentados no capítulo 3. Antes disso, porém, faremos uma retrospectiva sobre o estudo de múltiplas respostas e sobre algumas maneiras de abordar o problema (seção 2.1).

2.1 Algumas Formas de Abordar a Análise de Múltiplas Respostas

Ao analisar um processo com múltiplas respostas, muitas variáveis são consideradas e o problema de otimização torna-se mais complexo que no caso de uma única resposta. Quando existem duas ou mais variáveis sobre investigação simultânea, o significado do ótimo torna-se relativo. Isto ocorre porque não existe uma única forma de encontrar o conjunto de níveis dos fatores que otimizarão as respostas. Além disso, podemos encontrar condições que sejam ótimas para uma das variáveis, mas não para as outras.

De modo geral, após a execução de um plano experimental medindo várias respostas, o procedimento comum é analisar separadamente cada variável em relação aos fatores. Este método porém, não leva em conta as possíveis interrelações entre as respostas. Quanto à solução encontrada, se o conjunto de níveis ótimos dos fatores para uma característica não é o mesmo para a outra, consideramos para qual das respostas deve ser dada maior importância e conseqüentemente qual nível adotar. A este tipo de abordagem, chamamos *solução de compromisso*. Porém, a solução de compromisso pode ser a pior solução. Isso porque se existe conflito entre os níveis dos fatores para

as características, já não pode existir solução ótima e enquanto se faz a opção por uma das variáveis como sendo a mais importante, a variável descartada poderá ter para si a pior solução.

Observa-se que a abordagem por solução de compromisso diz respeito apenas, à análise quanto ao efeito dos fatores na locação. Imagine porém, como o problema cresce se considerarmos uma análise para o efeito dos fatores na variabilidade. Neste caso, novos conflitos podem surgir e a análise de múltiplas respostas começa a tomar grandes proporções.

Na década de 60 as técnicas de superfície de resposta eram as mais utilizadas para se obter uma solução para a análise de processos com múltiplas respostas. Isso era realizado através da *superposição das curvas de nível* para as várias respostas no sentido de visualizar a melhor condição de operação. Diagramas mostrando curvas de nível para uma determinada resposta, frequentemente, indicam mais de uma região onde esta resposta está num local que pode ser considerado satisfatório. O pesquisador pode usar este tipo de informação, em adição a um diagrama similar para uma segunda resposta, chegando a um conjunto de níveis dos fatores que representam, aproximadamente, a melhor condição de operação. Contudo, estudos deste tipo tornam-se difíceis quando o número de fatores é maior que três e quando há muitas respostas envolvidas no processo.

Hill e Hunter (1966) fazem referência a 18 artigos que consideram mais que uma variável resposta que utilizam o enfoque de *superposição de curvas de nível*. Eles citam por exemplo, Lind, Goldin e Hickman (1960) que estudavam o efeito de determinados agentes na produção de certos antibióticos. Modelos de regressão de ordem dois foram ajustados para ambas as respostas: custo e produção. Eles encontraram com sucesso novas condições de operação, através da superposição das curvas de nível, que resultou no crescimento da produção em 5% e reduziu os custos em \$ 5,00/Kg do produto. Este exemplo foi apresentado e discutido passo a passo por Myers (1976).

Myers e Carter (1973) apresentaram um método associado à exploração de uma superfície onde se mediam duas respostas apenas. O método encontra condições dos fatores que maximiza (ou minimiza) uma primeira função resposta. Esta função está sujeita a uma condição de uma segunda função resposta, que requer algum valor específico. Este método porém, pode ser aplicado apenas a funções respostas quadráticas.

Um procedimento de otimização baseado num conceito de *proximidade*¹ foi desenvolvido

¹Tradução do inglês *desirability*.

por Derringer e Suich (1980). Neste procedimento cada função resposta é transformada num valor d , $0 \leq d \leq 1$. O valor de d estará mais próximo de 1 quanto mais as respostas se aproximam dos seus valores objetivos. A escolha desta transformação depende de um julgamento subjetivo de acordo com a importância das respostas. A média geométrica é utilizada, para combinar os valores transformados das funções respostas, como uma medida global do sistema.

Box e Draper (1987), apresentaram um experimento fatorial 2^6 , sem replicação, utilizado para um estudo de fabricação de tintas. Neste experimento o objetivo era obter um produto com cor e brilho, com objetivos fixos, e a maximização da resistência. As respostas foram inicialmente analisadas individualmente através do Gráfico de Probabilidade Normal onde descobriu-se que apenas três dos seis fatores eram significativos. Com os modelos de regressão para as duas respostas com objetivos fixos determinou-se um plano de interseção. Através deste plano de interseção, os níveis dos fatores que maximizavam a resistência foram encontrados.

Myers, Khuri e Carter (1989) fazem uma breve retrospectiva do estudo de múltiplas respostas e citam, como um aspecto importante da análise, a escolha do plano experimental que deve estar baseada num critério que envolva todas as respostas. Este tipo de estudo, porém, ainda é pouco desenvolvido.

Vining e Myers (1990), baseados nos procedimentos de Myers e Carter (1973), consideraram a média e variância como respostas de interesse. Com isso, eles atingem a principal meta da filosofia de Taguchi: obter condições de levar o processo para o valor nominal das respostas minimizando a variância.

Uma das técnicas utilizadas que tem se mostrado útil, mas que funciona apenas para o caso de duas respostas específicas, é a *Janela de Operação*. Esta técnica se aplica a uma situação onde as características *menor é melhor* e *maior é melhor*² estão envolvidas. Ambas as respostas são definidas em termos do mesmo tipo de unidades de medida. O objetivo do experimento é minimizar a característica *menor é melhor* enquanto maximiza a característica *maior é melhor* e, desta forma, aumentar a janela na qual a operação pode ocorrer de forma eficiente.

Um exemplo clássico da *Janela de Operação* é o da indústria de máquinas copiadoras. A

²Este tipo de enfoque será melhor definido na seção 2.2.

característica *menor é melhor* está relacionada com a força na mola necessária para alimentar a máquina com um papel por vez. Se a força é insuficiente, nenhum papel alimentará a máquina. A característica *maior é melhor* está relacionada com a força na mola que poderá causar uma super alimentação na máquina. Se muita força é aplicada, mais de um papel alimentará a máquina o que poderá causar sua obstrução. Neste caso em particular, o objetivo é aumentar a janela tal que a força necessária para alimentar a máquina seja a mínima que evite a falta de papel e a máxima que evite uma super alimentação. Esta técnica pode ser vista mais detalhadamente em Peace (1993).

2.2. Idéias Gerais sobre a Metodologia de Taguchi

A metodologia estatística de planejamento de experimentos tem sido aplicada para a melhoria de processos industriais a mais de 50 anos. (Ver Davies (1954), Daniel (1976) e Box, Hunter e Hunter (1978)). Entretanto, a maioria das aplicações otimizam apenas o valor médio da variável resposta. A filosofia de Taguchi, para a melhoria de processos, tem ênfase principal na redução da variação com mínimo custo. Veremos abaixo um resumo de suas principais idéias.

Segundo Kackar (1986) sete pontos principais explicam os elementos básicos da filosofia de Taguchi:

1. Um aspecto importante da qualidade de fabricação do produto é a perda total imposta pelo produto à sociedade.
2. Numa economia competitiva, a melhoria de qualidade contínua e a redução nos custos são necessárias para permanecer nos negócios.
3. Um programa contínuo de melhoria da qualidade inclui uma redução incessante na variação das características de desempenho do produto sobre seu valor objetivo.
4. A perda do cliente devido a variação no desempenho do produto é, na grande maioria dos casos, proporcional ao quadrado do desvio da característica sobre seu valor objetivo.
5. A qualidade final e os custos de fabricação do produto são determinados por um grande e extenso planejamento do produto e seu processo de fabricação.
6. A variação no desempenho do produto/processo pode ser reduzida através da redução

da influência das fontes de variação.

7. Experimentos planejados podem ser usados para identificar o conjunto de parâmetros do produto/processo que reduzem a variação no desempenho.

Veremos, agora, todos estes pontos com mais detalhes.

Qualidade Vista pela Sociedade

Como dissemos anteriormente, Taguchi define qualidade como a perda total imposta à sociedade na hora em que o produto é embarcado. Quanto menor a perda, mais desejável é o produto. Exemplos de perda à sociedade incluem: falha do produto em reunir os requisitos necessários para uso do cliente, falha do produto com relação ao desempenho ideal e em não evitar efeitos prejudiciais. Um produto inaceitável que é refugado ou é retrabalhado antes de ser embarcado é visto por Taguchi como um custo para a companhia mas não como perda de qualidade.

Perdas causadas quando um produto tem um desempenho como planejado não são consideradas perdas de qualidade por Taguchi. Sua justificativa nesses casos é que tais situações refletem problemas culturais ou legais, não problemas de engenharia.

Importância da Melhoria da Qualidade

Numa economia competitiva, os negócios que não geram um lucro razoável não podem sobreviver por muito tempo. O lucro é a diferença entre o preço de venda e o custo de fabricação por unidade do produto multiplicado pelo número de unidades vendidas.

Um modo de aumentar as vendas no mercado é garantir produtos de alta qualidade a preços baixos. Muitas empresas se afirmam nos negócios utilizando alta qualidade e preços baixos como uma estratégia competitiva. Num sistema livre é necessário melhorar a qualidade e reduzir os custos de fabricação continuamente.

Necessidade de Reduzir a Variação no Desempenho

A qualidade de um produto não pode ser melhorada a menos que suas características de qualidade possam ser identificadas e medidas. Além disso, um programa de melhoria de qualidade contínua depende do conhecimento dos valores ideais das características. Cada característica de qualidade é uma variável diferente. O objetivo do programa de melhoria de qualidade contínua é reduzir a variação nas características de qualidade do produto sobre seus valores desejados.

Os produtos têm, na grande maioria dos casos, numerosas características de qualidade. Porém, não é necessário nem econômico melhorar todas elas. É suficiente melhorar as características de qualidade mais importantes. As características de desempenho do produto são características de qualidade importantes que determinam o desempenho do produto, satisfazendo as necessidades do cliente. O valor ideal da característica de desempenho é chamado valor objetivo.

Produtos de alta qualidade de desempenho estão próximas do valor objetivo durante o tempo de uso do produto e em diferentes condições de operação. Quanto menor a variação no desempenho do produto, maior é a qualidade.

A variação no desempenho do produto pode ser avaliada quando a característica é medida numa escala contínua. Isto porque medidas contínuas podem detectar pequenas mudanças na qualidade. Algumas características de desempenho de um automóvel que podem ser medidas numa escala contínua são: quantidade de monóxido de carbono produzido por um escapamento, quantidade de ruído causado pelo motor, consumo de combustível, etc.

Função Perda

A função perda quadrática pode aproximar com sucesso a perda de qualidade em muitas situações. Taguchi (1985) mostra como utilizou a expansão em série de Taylor para derivar a expressão para a função perda. Suponha Y a característica de qualidade do produto e T o valor objetivo para Y . Aqui Y é uma variável aleatória com alguma distribuição de probabilidade. A perda de qualidade é então dada por:

$$L(Y) = k(Y - T)^2 \quad (1)$$

onde k é uma constante chamada coeficiente da perda de qualidade. k pode ser determinada se $L(Y)$ é conhecida para algum valor de Y . Suponha $(T - \Delta, T + \Delta)$ o intervalo de tolerância do consumidor. Se o desempenho do produto é insatisfatório quando Y está fora de seu intervalo e o custo do consumidor em reparar ou descartar o produto é A em dólares, então pela equação (1) $A = k\Delta^2$ e $k = A/\Delta^2$.

O intervalo de tolerância do fabricante $(T - \delta, T + \delta)$ pode também ser obtido através da função perda em (1). Suponha que antes do produto ser embarcado, o custo do fabricante em reparar um item que excede o limite de tolerância do consumidor seja B em dólares. Então,

$$B = A/\Delta^2(Y - T)^2$$

$$Y = T \pm (B/A)^{1/2}\Delta$$

e

$$\delta = (B/A)^{1/2}\Delta.$$

Sendo B menor que A , o intervalo de tolerância do fabricante deverá ser limitado pelo intervalo de tolerância do consumidor.

Observe que esta função perda em (1) mostra claramente que quando as características se distanciam do valor objetivo a perda cresce. A função perda quadrática é aplicável apenas quando a característica de qualidade Y tem o valor objetivo finito. Tal característica de qualidade é chamada *nominal é melhor*. Exemplos desse tipo de característica são: diâmetro de um pistão, peso líquido de um produto alimentício, etc.

Caso o valor objetivo da características seja zero, ela é chamada *menor é melhor*. Alguns exemplos desse tipo de característica são: quantidade de impurezas, tempo de resposta e tempo de acesso. Assim, a perda de qualidade em tais situações é dada por:

$$L(Y) = kY^2 \quad (2)$$

Quando o valor ideal da característica é infinito, chamamos tal característica de qualidade de *maior é melhor*. Exemplos desse tipo de característica são: rendimento do combustível de um motor, tempo médio entre falhas de um componente e nitidez da imagem de uma televisão. Como a recíproca dessa característica tem o mesmo comportamento que o tipo *menor é melhor*, então a função perda para a característica *maior é melhor* é dada por:

$$L(Y) = k(1/Y^2) \quad (3)$$

Podemos também estar interessados na função perda esperada. Esta será dada por:

$$E[L(Y)] = kE[(Y - T)^2] = kE[Y^2 - 2YT + T^2].$$

Supondo $\mu = E(Y)$ e $\sigma^2 = E[(Y - \mu)^2]$, então

$$E[L(Y)] = k[E(Y^2) - 2E(Y)T + T^2] = k[\sigma^2 + (\mu - T)^2] = kEQM, \quad (4)$$

onde, *EQM* é o erro quadrático médio.

Pela expressão de $E[L(Y)]$ fica claro que a redução da perda é obtida pela minimização da variância e pelo ajuste do processo no valor nominal.

Observe que a perda esperada para a característica *menor é melhor* é dado por:

$$E[L(Y)] = kE(Y^2) \quad (5)$$

e para a característica *maior é melhor*:

$$E[L(Y)] = kE(1/Y^2). \quad (6)$$

Importância do Projeto do Produto e Processo

O ciclo de desenvolvimento do produto pode ser dividido em três estágios principais: projeto do produto, projeto do processo de fabricação e fabricação propriamente dita. Cada estágio de desenvolvimento do produto tem vários passos. Ao término de um, inicia-se o próximo passo. Além disso, em todos os passos, especialmente os pontos de transferência entre eles, afetam a qualidade final e os custos do produto. Entretanto, por causa da crescente complexidade dos produtos, os

projetos do produto e processo são partes cruciais no desenvolvimento do produto.

É no estágio de projeto do produto que o engenheiro desenvolve todas as especificações do produto. Estas incluem especificações de materiais, de componentes, de configurações e de estruturas. Durante o projeto do processo, o engenheiro planeja o processo de fabricação. Este planejamento pode envolver a criação de um novo processo ou a modificação de um já existente. O departamento de fabricação utiliza o processo de fabricação para produzir as várias unidades do produto.

Controle de Qualidade *Off-line*

Por causa da importância do projeto do produto e do processo, o controle de qualidade deve começar com o primeiro estágio no ciclo de desenvolvimento do produto e deve continuar em todos os estágios subsequentes. Os métodos de controle de qualidade *off-line* são técnicas de controle de qualidade e custo aplicados nos estágios de projeto do produto e do processo de fabricação. Já os métodos de controle de qualidade *on-line* são técnicas de controle de qualidade e custo aplicados durante a fabricação do produto. Os métodos de controle de qualidade *off-line* são usados para a melhoria da qualidade de fabricação do produto e para reduzir custos de desenvolvimento, de fabricação e de ensaios com tempo de vida do produto. Alguns exemplos de métodos de controle de qualidade *off-line* são: testes de sensibilidade, testes com protótipos, testes de ensaios acelerados e testes de confiabilidade.

Taguchi introduziu um procedimento para fixar os valores nominais e os parâmetros de tolerância do produto, são eles:

- *Planejamento do Sistema* - é um processo de aplicação do conhecimento científico da engenharia e de marketing para produzir um protótipo. Este protótipo definirá o conjunto inicial dos níveis dos fatores do produto/processo. O planejamento do sistema requer tanto uma compreensão das necessidades do consumidor quanto um conhecimento do ambiente de fabricação.

- *Planejamento Robusto* - é o processo de identificar o conjunto de níveis dos fatores do produto/processo que torne seu desempenho menos sensível às fontes de variação, mas com um mínimo custo.

● *Planejamento de Tolerância* - é o processo de determinar a tolerância em torno do conjunto de níveis dos fatores identificado pelo planejamento robusto.

Planejamento de Experimentos

Taguchi tem proposto utilizar o planejamento de experimentos estatístico no planejamento robusto. Ele classifica as variáveis que afetam as características de desempenho do produto em duas categorias: *fatores de controle* e *fatores de ruído*.

Os fatores de controle são aqueles fatores que podem ser especificados pelo engenheiro responsável, tais como: escolha do material, temperatura e pressão. Os fatores de controle podem ser classificados em quatro tipos:

1. Afetam tanto a média quanto a variabilidade;
2. Afetam a média mas não a variabilidade (são chamados *fatores de sinal*);
3. Afetam a variabilidade mas não a média;
4. Não afetam nem a média nem a variabilidade (são chamados *fatores de custo*).

Os fatores de sinal afetam a média das características de qualidade e podem ser usados para ajustar o processo no sentido de atingir o valor desejado.

Os fatores de ruído são as fontes de ruído que podem ser incluídas no plano experimental. As fontes de ruído são todas aquelas variáveis que afetam as características de desempenho do produto, fazendo-as desviar de seus valores objetivos. As fontes de ruído podem ser classificadas em duas categorias: fonte de ruído internas e fonte de ruído externas. As fontes de ruído externas são as variáveis externas ao produto que afetam seu desempenho. Exemplos comuns são variações ambientais, tais como: umidade, temperatura; e variações humanas na operação do produto. As fontes de ruído internas são os desvios das características de seus correspondentes conjuntos nominais da fabricação do produto. As fontes de ruído internas são as imperfeições de fabricação e a própria deterioração do produto. Nem todas as fontes de ruído podem ser incluídas no plano experimental por causa de limitações físicas e da falta de conhecimento. Porém, os principais fatores de ruído devem ser identificados e incluídos no experimento, principalmente aqueles que afetam o desempenho

do produto durante a produção e o desempenho do processo no ambiente de fabricação.

O objetivo do plano experimental é identificar o conjunto de níveis dos fatores de controle, dado os efeitos dos fatores de ruído, tal que a variação nas características de desempenho do produto seja mínima. Este conjunto é estimado através da utilização de planos fatoriais para realizar o experimento e da estatística de desempenho para avaliar o efeito dos fatores.

O planejamento robusto, segundo Taguchi, consiste de duas partes: uma matriz de fatores de controle, chamada de matriz interna, e outra matriz de fatores de ruído, chamada matriz externa. A matriz interna especifica o conjunto de níveis dos fatores de controle. A matriz externa especifica os níveis dos fatores de ruído. Como exemplo de uma aplicação consultar Byrne e Taguchi (1987).

No caso de características contínuas, várias observações numa mesma rodada experimental da matriz interna são usadas para calcular um critério chamado *estatística de desempenho*. A *estatística de desempenho* estima o efeito dos fatores de ruído, cujos valores calculados são usados para prever o melhor conjunto dos níveis dos fatores de controle. Este conjunto de níveis dos fatores de controle serão verificados através de um experimento confirmatório. O conjunto inicial dos níveis dos fatores de controle pode ou não ser mudado de acordo com o resultado do experimento confirmatório. Várias iterações do experimento podem ser requeridas para identificar o conjunto de níveis dos fatores de controle, dado que o efeito dos fatores de ruído seja suficientemente pequeno.

Os experimentos do planejamento robusto podem ser feitos de dois modos: através de experimentos físicos com protótipos experimentais do produto ou através de experimentos simulados. Estes últimos, podem ser feitos através de um computador quando a função $Y = f(\theta, \omega)$, relacionando a característica Y com os fatores de controle θ e os fatores de ruído ω , pode ser numericamente avaliada.

Taguchi recomenda o uso de *arranjos ortogonais* para construir a matriz de fatores de controle e de ruído. Todos os planos fatoriais e fatoriais fracionados são arranjos ortogonais. Porém, nem todos os arranjos ortogonais são planos fatoriais fracionados comuns.

Taguchi recomenda o uso de um critério, o qual ele chama de razão sinal/ruído (s/r), como estatística de desempenho. Para características contínuas e não-negativas com objetivos fixos, Taguchi define três tipos de razões s/r dependendo das formas da função perda: *menor é melhor*, *maior é melhor* e *nominal é melhor*.

① *menor é melhor*

A característica Y assume valores não negativos, o valor objetivo é $T = 0$ e a função perda $L(Y)$ cresce quando Y se distancia de zero. Neste caso, a perda esperada de (5) é proporcional a:

$$EQM(\theta) = E[(Y - 0)^2] = E(Y^2)$$

e Taguchi recomenda utilizar a seguinte media de desempenho³ (MD):

$$MD(\theta) = -10 \log_{10} EQM(\theta). \quad (7)$$

Quanto maior a medida de desempenho, menor o erro quadrático médio. Seja y_1, y_2, \dots, y_n uma amostra aleatória da distribuição de Y para um dado θ . A medida de desempenho (7) pode ser estimada pela razão (s/r) dada por:

$$S/R(\theta) = -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \quad (8)$$

② *maior é melhor*

A característica de desempenho Y assume valores não negativos, o valor objetivo é infinito e a função perda $L(Y)$ decresce quando Y cresce a partir de zero. Este é um caso particular da característica *menor é melhor* onde a recíproca $1/Y$ é a característica de qualidade. O valor objetivo de $1/Y$ é zero e a medida de desempenho (7) é dada por:

$$MD(\theta) = -10 \log_{10} EQM(\theta).$$

onde

³ O multiplicador 10 e a transformação log na base 10 são convenções utilizadas em Eletrônica e Acústica para representar a unidade em decibéis.

$$EQM(\theta) = E(1/Y^2)$$

e a razão (s/r):

$$S/R(\theta) = -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2} \right) \quad (10)$$

③ nominal é melhor

A característica de qualidade Y tem valor objetivo específico $T = T_0$ e a função perda $L(Y)$ cresce quando Y se distancia de T_0 em qualquer direção. Neste caso a perda esperada (3) é proporcional a

$$EQM(\theta) = E[(Y - T_0)^2],$$

e

$$EQM(\theta) = \sigma^2(\theta) + [\mu(\theta) - T_0]^2.$$

Taguchi recomenda utilizar a seguinte medida de desempenho:

$$MD(\theta) = 10 \log_{10} \left(\frac{\mu^2(\theta)}{\sigma^2(\theta)} \right). \quad (11)$$

Quanto maior a medida de desempenho, menor é o coeficiente de variação $\sigma(\theta)/\mu(\theta)$. Assim, Taguchi recomenda a seguinte razão s/r:

$$S/R(\theta) = 10 \log_{10} \left(\frac{\bar{y}^2}{s^2} \right) \quad (12)$$

onde

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

e

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2.$$

Estes são apenas alguns dos conceitos de Taguchi na área de qualidade. Uma extensa bibliografia pode ser consultada à respeito de seus métodos, algumas são: Sullivan (1984), Kackar (1985), Taguchi (1985), Byrne e Taguchi (1987), Pignatiello (1988) e Phadke (1989). Existe, entretanto, muitas críticas à sua metodologia. Estas, vão desde a escolha limitada de planos experimentais à utilização de razões s/r como estatísticas de desempenho. Não é do nosso interesse, entretanto, participar dessas discussões. Para isso, citamos, Leon *et al.*, (1987), Box (1988), Maghsoodloo (1990), Myers, Khuri e Vining (1992) e Vivacqua (1995). Devemos dizer, contudo, que mesmo quem o critica tem revisado seus métodos e incorporado os princípios de robustez ao ruído e redução da variabilidade. Um interessante painel de discussões foi montado sobre a metodologia de Taguchi. Esse painel discute vários aspectos de seus métodos, tais como: a importância de reduzir a variação, o uso de fatores de ruído, as interações, seleção da característica de qualidade e razões s/r. (Ver Nair (1992)).

Capítulo 3 Análise de Múltiplas Respostas

Vimos no capítulo 2 que Hill e Hunter (1966) é um dos primeiros artigos na literatura estatística a citar importantes aplicações de múltiplas respostas. De modo geral, observamos que os principais livros de Planejamento de Experimento, tais como: Daniel (1976), Box, Hunter e Hunter (1978), Montgomery (1991), em suas explicações sobre experimentos fatoriais trazem apenas a análise de uma única variável resposta. Na prática sabemos da existência de várias respostas que precisam ser otimizadas de acordo com um conjunto de fatores.

Recentemente, o problema de múltiplas respostas vem sendo investigado por alguns pesquisadores do campo da engenharia industrial. Suas idéias se baseiam, principalmente, numa generalização da perda esperada de Taguchi e reduzem, através desta função, um problema multivariado a um univariado. Em outras palavras, com esta nova abordagem, vamos concentrar informações sobre média, variância, covariância, distância ao valor objetivo, etc, numa única função, de acordo com os níveis dos fatores. E, geralmente, o conjunto de níveis ótimos dos fatores é encontrado pela minimização desta função perda univariada.

A principal vantagem de considerar o problema de múltiplas respostas através de uma única função é observar que mudanças nos níveis dos fatores irão afetar conjuntamente as respostas. Por esta razão os fatores que podem afetar uma determinada característica não devem ser estudados isolados dos efeitos que esses mesmos fatores podem ter em outras características. Aqui temos também a oportunidade de captar inter-relações entre as várias respostas, através de termos como covariâncias, coeficientes de interação, etc.

A seguir, na seção 3.1 descreveremos o Método de Khuri e Conlon. Este método foi o único proposto por estatísticos e data de 1981. Ele se baseia numa função que considera a distância das respostas aos seus respectivos ótimos ideais e numa matriz de variância-covariância. Na seção 3.2 o Método de Elsayed e Chen, o qual foi proposto em 1992 será apresentado. Este método está baseado numa medida de desempenho e na função perda esperada de Taguchi. O Método de Pignatiello e o Método de Ribeiro e Albin surgiram em 1993, e serão descritos na seção 3.3 e 3.4, respectivamente. Estes métodos têm como base a função perda de Taguchi e reúnem informações de custos, coeficientes de interação, pesos para cada característica, etc. Na seção 3.5 apresentaremos

o Método de Ribeiro e Elsayed que surgiu em 1995 e que está baseado no Método de Ribeiro e Albin.

3.1 Método de Khuri e Conlon

Khuri e Conlon (1981) propõem um procedimento para a otimização de um processo com múltiplas respostas. As respostas no processo dependem do mesmo conjunto de fatores e devem ser representadas por modelos polinomiais de mesmo grau dentro de uma certa região de interesse. Ótimos individuais são obtidos dos modelos estimados sobre as regiões experimentais. Um ótimo será chamado ideal se todos os ótimos individuais ocorrem no mesmo conjunto de níveis dos fatores. Infelizmente, este ótimo ideal raramente ocorre. Uma função distância é utilizada para medir a proximidade das funções respostas aos seus respectivos valores ótimos individuais, dado o mesmo conjunto de níveis dos fatores. Através da minimização desta função distância podemos chegar a um conjunto de níveis dos fatores convenientes para um compromisso com o ótimo.

A seguir, vamos apresentar, na seção 3.1.1, o modelo linear multivariado para as características. Na seção 3.1.2 discutiremos a dependência linear entre as respostas que neste método não pode existir. A otimização das funções é vista na seção 3.1.3. Na seção 3.1.4 é definida a função que mede a distância entre as respostas e seus valores objetivos e, finalmente, na seção 3.1.5 a função distância é modificada de modo a considerar a aleatoriedade dos ótimos individuais.

3.1.1 Modelo Linear Multivariado

Seja n o número de realizações experimentais e seja r o número de funções respostas observadas dado k fatores x_1, x_2, \dots, x_k . O modelo linear univariado para a i -ésima resposta pode ser escrito na forma:

$$y_i = X \theta_i + \epsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (1)$$

onde,

y_i é o vetor de observações da i -ésima resposta;

θ_i é o vetor de p parâmetros de regressão desconhecidos;
 ϵ_i é o vetor de erros aleatórios associados com a i -ésima resposta; e
 X é uma matriz coluna $n \times p$ de posto completo de constantes conhecidas.

Suponha que a matriz X é a mesma para todas as r funções respostas, cada uma das quais é um polinômio de grau s na região experimental.

O modelo linear multivariado pode ser expresso na forma:

$$Y = X \theta + \epsilon, \quad (2)$$

onde $Y = [y_1, y_2, \dots, y_r]$, $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p]$ e $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r]$. Suponha que os erros ϵ , sejam independentes com vetor de média 0 (zero) e matriz de variância-covariância Σ . Um estimador não-viciado de Σ é $\hat{\Sigma}$, dado pela fórmula:

$$\hat{\Sigma} = \frac{Y' [I_n - X(X'X)^{-1}X'] Y}{(n - p)} \quad (3)$$

onde I_n é um a matriz identidade de ordem $n \times n$ (veja por exemplo, Gnanadesikan (1977) p. 126). Com $r \leq n-p$, $\hat{\Sigma}$ será não-singular, contanto que Y tenha posto r . Por isso, é necessário detectar alguma possível dependência linear entre as respostas.

3.1.2 Dependência Linear Entre as Respostas

Box *et al.* (1973) discutiu alguns problemas associados com a análise de dados de múltiplas respostas. Eles mostraram a importância de identificar três tipos de dependências: dependência entre os erros, dependência linear entre os valores esperados das respostas e dependência linear entre as respostas. O método aqui apresentado necessita que não haja nenhuma dependência linear entre as respostas.

Box *et al.* (1973) mostrou que m relações linearmente independentes devem existir entre as respostas se somente se a matriz DD' tem autovalores nulos de multiplicidade m , onde $D = (d_{ij})$ é

a matriz de ordem $r \times n$ cujo (i,j) -ésimo elemento é $d_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_i$, y_{ij} é o j -ésimo componente de y_i e $\bar{y}_i = \sum_{j=1}^n y_{ij}/n$, $i=1, 2, \dots, r$; $j=1, 2, \dots, n$. A matriz na forma D é escrita:

$$D = Y'(I_n - \frac{1_n 1_n'}{n}), \quad (4)$$

onde 1_n é o vetor com todos os componentes iguais a um, de dimensão n . Se as funções respostas são medidas em unidades diferentes, devemos escrever DD' na forma da matriz de correlação. Tal fato, entretanto, não causa mudanças no número de autovalores nulos de DD' .

Durante a fase de coleta de dados, as respostas são arredondadas para um certo número de casas decimais. Neste caso, pode ocorrer que nenhum dos autovalores de DD' seja exatamente igual a zero, ainda que possa existir dependência linear entre os dados. Por esta razão, é necessário obter uma estimativa da magnitude da esperança e da variância de pequenos autovalores de DD' quando o erro de arredondamento é o único erro presente. Suponha que os erros de arredondamento sejam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tendo distribuição uniforme $U(-\delta, \delta)$. (Veja Box *et al.* (1973)). Sob estas condições Box *et al.* (1973) desenvolveu a fórmula para o valor esperado de pequenos autovalores, λ^0 , de DD' . Eles mostraram que se δ é pequeno o bastante, o valor esperado de λ^0 é dado por:

$$E(\lambda^0) = (n-1)\sigma_{\text{aa}}^2, \quad (5)$$

onde $\sigma_{\text{aa}}^2 = \frac{\delta^2}{3}$ é a variância do erro de arredondamento. E para δ suficientemente pequeno Khuri e Conlon (1981) mostraram que

$$\text{Var}(\lambda^0) \leq q\sigma_{\text{aa}}^4, \quad (6)$$

onde $q = 9nr/5 + nr(nr-1) - (n-1)^2$.

De (5) e (6) conclui-se que quando δ é pequeno o bastante, o valor esperado de λ^0 é da mesma ordem de magnitude de $(n-1)\sigma_{\text{aa}}^2$, e a variância de λ^0 tem ordem de magnitude que não excede $q\sigma_{\text{aa}}^4$. O conhecimento de $(n-1)\sigma_{\text{aa}}^2$ e $q\sigma_{\text{aa}}^4$ garante ao pesquisador decidir se pequenos

autovalores de DD' correspondem de fato a relações lineares entre as respostas.

Se m é a multiplicidade de autovalores nulos de DD' , então é possível encontrar um conjunto de $(r-m)$ respostas entre as quais nenhuma relação linear exista. Isto pressupõe a necessidade de retirar as m respostas que são funções lineares das $(r-m)$ respostas restantes. Os autores avisam que considerações técnicas podem ser usadas para decidir quais respostas devem ser retiradas.

3.1.3 Otimização Simultânea de Funções de Múltiplas Respostas

Nesta seção, introduziremos um procedimento para a otimização simultânea de várias respostas num processo com múltiplas respostas.

Para todas as r funções respostas sob consideração, suponha que não exista nenhuma função de relação linear entre elas e que ϵ tenha distribuição multivariada com média 0 (zero) e matriz de variância-covariância Σ , isto é, $\epsilon \sim N_r(0, \Sigma)$.

Uma estimativa de θ em (2) é: $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r]$, onde $\hat{\theta}_i = (X'X)^{-1}X'y_i$ é um estimador de mínimos quadrados do vetor de coeficientes de regressão para a i -ésima resposta, $i=1, 2, \dots, r$. (Ver Gnanadesikan (1977), p. 123). O ajuste da i -ésima função resposta é um polinômio de grau s em x_1, x_2, \dots, x_k da forma:

$$\hat{y}_i(x) = z'(x)\hat{\theta}_i, \quad i=1, 2, \dots, r, \quad (7)$$

onde $x = [x_1, x_2, \dots, x_k]'$ e $z'(x)$ é um vetor linha de dimensão p , cujo primeiro componente é 1 e os $p-1$ componentes restantes são termos de potência e produtos cruzados de potência de x_1, x_2, \dots, x_k , como descrito pelo modelo polinomial ajustado. De (7) segue que:

$$\text{var} [\hat{y}_i(x)] = z'(x)(X'X)^{-1}z(x)\sigma_{ii}, \quad i=1, 2, \dots, r, \quad (8)$$

$$\text{cov} [\hat{y}_i(\mathbf{x}), \hat{y}_j(\mathbf{x})] = \mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{z}(\mathbf{x})\sigma_{ij} \quad i \neq j = 1, 2, \dots, r, \quad (9)$$

onde σ_{ij} é o (i,j) -ésimo elemento da matriz de variância-covariância Σ . Assim,

$$\text{var} [\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})] = \mathbf{z}'(\mathbf{x})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{z}(\mathbf{x})\Sigma, \quad (10)$$

onde $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = [\hat{y}_1(\mathbf{x}), \hat{y}_2(\mathbf{x}), \dots, \hat{y}_r(\mathbf{x})]'$. Um estimador não-viciado da $\text{var} [\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})]$ é dado por (10) com Σ substituído por $\hat{\Sigma}$ (equação (3)).

Seja ϕ_i o valor ótimo de \hat{y}_i , otimizado individualmente sobre a região experimental, $i = 1, 2, \dots, r$ e seja $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r]'$. Se todas as respostas estimadas atingem seus ótimos individuais no mesmo conjunto de níveis dos fatores, \mathbf{x} , então o problema de otimização simultânea está obviamente resolvido. Se não for o caso, a tarefa é chegar a alguma condição de compromisso de tal forma que as respostas se desviem o mínimo possível dos seus ótimos ideais. Os desvios podem ser formulados através de uma função apropriada e expressa em termos das r respostas estimadas. Esta função mede a distância de $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ (considerada como um ponto do espaço r -dimensional Euclidiano) a $\boldsymbol{\phi}$ (o vetor de ótimos individuais) e será descrita por $\rho[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\phi}]$. O compromisso ótimo envolvendo as r respostas é então obtido encontrando as condições de \mathbf{x} que minimize $\rho[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\phi}]$ sobre a região experimental R . Antes de ρ ser definido, observe que $\boldsymbol{\phi}$ é um vetor aleatório e para a minimização de $\rho[\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\phi}]$, $\boldsymbol{\phi}$ é tratado como um ponto fixo não estocástico do espaço r -dimensional. Ignorar a característica de aleatoriedade de $\boldsymbol{\phi}$ pode conduzir a erros nas condições de interpretação envolvendo as variáveis de controle. Além disso, é necessário incorporar a variabilidade de $\boldsymbol{\phi}$ em ρ .

Na seção (3.1.4) ρ será definido e na seção (3.1.5) ρ será modificado para que a variabilidade de $\boldsymbol{\phi}$ seja levada em consideração.

3.1.4 Função Distância

A função ρ é dada por:

$$\rho [y(x), \phi] = [(\hat{y}(x) - \phi)' \{var [\hat{y}(x)]\}^{-1} (\hat{y}(x) - \phi)]^{1/2}. \quad (11)$$

Substituindo $var [\hat{y}(x)]$ por seus estimadores de (3) e (10) resultará:

$$\rho [y(x), \phi] = \left[\frac{(\hat{y}(x) - \phi)' \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{y}(x) - \phi)}{z'(x)(X'X)^{-1}z(x)} \right]^{1/2}. \quad (12)$$

A fórmula (12) claramente requer que não existam funções de relação linear entre as r respostas, como afirmado anteriormente na seção 3.1.1. Se as r respostas estão linearmente relacionadas, então $\hat{\Sigma}$ torna-se uma matriz singular e ρ torna-se indefinida. A presença de pequenos erros de arredondamento podem impedir que o determinante de $\hat{\Sigma}$ seja exatamente igual a zero. Desta forma, é possível aplicar (12) e obter um mínimo para ρ , o qual, entretanto, não tem sentido.

3.1.5 Uma Função Distância que Quantifica a Aleatoriedade de ϕ

A fórmula (12) foi desenvolvida sem levar em consideração a aleatoriedade de ϕ . Como os componentes de ϕ são valores ótimos individuais das $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_r$, então, eles também são variáveis aleatórias. Seja ζ_i , o valor ótimo da média da i -ésima resposta, otimizada individualmente sobre a região experimental, para $i=1, 2, \dots, r$, e seja $\zeta = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r]'$. Se a variabilidade associada com os componentes de ϕ é grande, então a função ρ definida na seção 3.1.4 pode não ser uma boa medida do desvio de $\hat{y}(x)$ ao verdadeiro ótimo ideal. Como ϕ é um vetor aleatório, um ótimo ideal é dado por ζ , não por ϕ . A variabilidade de ϕ deve ser levada em consideração no desenvolvimento da função que quantifica esta distância. Assim, é proposto o seguinte procedimento: seja ρ a função distância como descrito na seção 3.1.4. O objetivo é encontrar x na região experimental R , tal que $\rho[\hat{y}(x), \zeta]$ tenha um mínimo absoluto sobre R . Entretanto, como ζ não é conhecido, o limite superior desta distância deve ser minimizado. Para que isto ocorra, a região de confiança sobre ζ terá um certo grau de confiança, a qual é denotada por D_ζ para um x fixo em R , têm-se:

$$\rho[\hat{y}(x), \zeta] \leq \max_{\eta \in D_\zeta} \rho[\hat{y}(x), \eta], \quad (13)$$

onde η é um ponto em D_ζ , e o máximo em (13) é obtido com relação a η sobre D_ζ . O lado direito em (13) serve como uma super-estimativa da distância $\rho[\hat{y}(x), \zeta]$. Já o mínimo de $\rho[\hat{y}(x), \zeta]$ sobre R não pode exceder o mínimo correspondente ao limite superior acima mencionado, isto é,

$$\min_{x \in R} \rho[\hat{y}(x), \zeta] \leq \min_{x \in R} \{ \max_{\eta \in D_\zeta} \rho[\hat{y}(x), \eta] \}. \quad (14)$$

Se

$$d_0 = \min_{x \in R} \{ \max_{\eta \in D_\zeta} \rho[\hat{y}(x), \eta] \}, \quad (15)$$

então o mínimo sobre R da distância entre $\hat{y}(x)$ e ζ é menor ou igual a d_0 .

Os autores mostraram que as desigualdades

$$\gamma_{1i} \leq \zeta_i \leq \gamma_{2i} \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (16)$$

mantêm simultaneamente um coeficiente de confiança aproximado de no mínimo $1 - \alpha^*$, onde:

$$\begin{aligned} \gamma_{1i} &= \hat{\phi}_i - g_i(X, \hat{\xi}_i) \sqrt{MS_i} t_{\alpha/2, n-p}, \\ \gamma_{2i} &= \hat{\phi}_i + g_i(X, \hat{\xi}_i) \sqrt{MS_i} t_{\alpha/2, n-p}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (17)$$

e,

$$\alpha^* = 1 - (1 - \alpha)^r;$$

MS_i é o erro médio quadrático para a i -ésima resposta;

$\hat{\xi}_i$ é o ponto em R dado $\hat{y}_i(x)$ (a i -ésima função resposta) que atinge seu ótimo individual, ϕ_i ; e

$$g_i(X, \hat{\xi}_i) = [z'(\hat{\xi}_i)(X'X)^{-1}z(\hat{\xi}_i)]^{1/2}.$$

Assim, a região de confiança desejada, D_c , é determinada pelo retângulo de confiança dado por (16) e (17).

3.2 Método de Elsayed e Chen

Elsayed e Chen (1993) apresentam um método de otimização para determinar o conjunto de níveis ótimos dos fatores para produtos com múltiplas características. Eles desenvolvem uma Medida de Qualidade (PerMQ) baseados numa medida de desempenho (PerMIA) e na função perda esperada de Taguchi. Inicialmente, eles consideram uma transformação na variável resposta de modo que a variância torne-se independente da média (método de otimização). Dois casos são considerados para determinar o conjunto de níveis ótimos dos fatores do produto. No primeiro caso, existe apenas um único fator de controle e fatores de sinal que podem ser os mesmos ou não para as características. No segundo caso, são considerados vários fatores de controle e de sinal através da construção de um exemplo.

A seguir, na seção 3.2.1, o método de otimização proposto por Box (1988) é apresentado. Na seção 3.2.2 é apresentada a função que mede a qualidade global do produto.

3.2.1 Método de Otimização

O método de otimização proposto por Box (1988), é descrito como segue.

Suponha que μ e σ^2 representam a média e a variância da característica de qualidade y , respectivamente. Considerando que a variância está sempre ligada à média é difícil distinguir os fatores de controle que afetem apenas a variabilidade. Uma transformação utilizada para estabilizar a variância é:

$$Y = h(y), \quad (1)$$

tal que o desvio padrão da característica transformada (Y),

$$\sigma_Y \approx h'(\mu) \sigma, \quad (2)$$

torne-se independente da média μ , e além disso, suponha que σ_Y^2 seja apenas afetada pelos fatores de controle. A transformação $h(y)$ pode ser determinada empiricamente. A variância (σ_Y^2) da característica transformada (Y) é chamada Medida de Desempenho Independente do Sinal¹ (PerMIA), Leon *et al.* (1987).

Seja x_d e x_a os fatores de controle e os fatores de sinal, respectivamente. Em outras palavras, os fatores x_d afetam a variabilidade (PerMIA), enquanto os fatores x_a afetam apenas a média (μ) das característica de qualidade. Denotam-se, estes dois tipos de fatores (x_d e x_a) por x . O PerMIA pode ser expresso como:

$$P(x_d) = \sigma_Y^2 = \frac{\sigma^2}{[f(\mu)]^2} \quad (3)$$

onde,

$$f(\mu) = \frac{1}{h'(\mu)}. \quad (4)$$

$P(x_d)$ é o PerMIA para a característica de qualidade y considerando apenas os níveis dos fatores de controle x_d .

O conjunto de níveis ótimos dos fatores de controle x_d são obtidos pela minimização do PerMIA. Suponha que os experimentos são conduzidos para diferentes níveis dos fatores de controle, e o valor mínimo do PerMIA é encontrado e denotado por P^* . Usando a equação (3), obtêm-se a variância da característica,

¹ Tradução do inglês *Performance Measure Independent of Adjustment*.

$$\sigma^2 = [f(\mu)]^2 P^*, \quad (5)$$

a qual é agora afetada apenas por $f(\mu)$.

O nível do fator de sinal é ajustado ao valor objetivo tal que a perda de qualidade seja minimizada. Utilizando-se a expressão de Taguchi da função perda de qualidade, têm-se,

$$E(L) = k \{ \sigma^2 + (\mu - T)^2 \} = k \{ [f(\mu)]^2 P^* + (\mu - T)^2 \} \quad (6)$$

onde,

$E(L)$ é esperança da função perda de qualidade;

k é o coeficiente da função; e

T é o valor nominal da característica de qualidade (y).

Para minimizar a perda de qualidade calcula-se a derivada da equação (6) em relação a μ e iguala-se o resultado a zero. Assim, o nível médio ótimo μ_0 é obtido pelo ajuste do fator de sinal, isto é,

$$\mu_0 = T - f(\mu_0) f'(\mu_0) P^*. \quad (7)$$

Desta forma, o método de otimização pode ser resumido como:

1. Determinar o conjunto de níveis dos fatores de controle no sentido de minimizar a variabilidade da característica de qualidade;
2. Corrigir o valor médio, se necessário, usando os fatores de sinal.

E, finalmente, o valor mínimo da função perda esperada pode ser calculada como:

$$E(L^*) = k \{ [f(\mu_0)]^2 P^* + (\mu_0 - T)^2 \}. \quad (8)$$

3.2.2 Múltiplas Características com um Único Fator de Controle

Para produtos com uma única característica torna-se simples determinar o conjunto de níveis ótimos dos fatores de controle pela escolha de um nível que minimize o PerMIA. Entretanto, a maioria dos produtos tem várias características que são do interesse do cliente. Neste caso, a escolha de um conjunto de níveis para uma característica pode causar em outras o desvio de seus valores objetivos. Deste modo, considera-se a perda de qualidade causada pelo desvio da característica de qualidade em relação a seu valor objetivo no sentido de estimar a contribuição do fator de controle sobre a qualidade global do produto. A função perda de qualidade para a i -ésima característica nominal melhor é dada por:

$$L(y_i) = \frac{A}{\Delta_i^2} (y_i - T_i)^2 \quad (9)$$

onde,

A é a perda do consumidor por descartar produtos defeituosos;

Δ_i é a tolerância para a característica de qualidade i ;

T_i é o valor objetivo para y_i ; e

y_i é a i -ésima característica de qualidade.

A função perda esperada para a i -ésima característica nominal melhor é dada por:

$$E(L_i) = \frac{A}{\Delta_i^2} [\sigma_i^2 + (\mu_i - T_i)^2], \quad (10)$$

onde,

σ_i^2 é a variância da i -ésima característica; e

μ_i é a média da i -ésima característica.

Ignorando os custos de qualidade (A) e considerando que estes permanecerão constantes para todas as características tem-se a seguinte Medida de Qualidade (PerMQ²),

² Tradução do inglês *Performance Measure on Quality*.

$$Q_i = \frac{\sigma_i^2 + (\mu_i - T_i)^2}{\Delta_i^2}, \quad (11)$$

como $\sigma_i^2 = [f_i(\mu)]^2 P_i$ então,

$$Q_i = \frac{f_i^2(\mu) P_i + (\mu_i - T_i)^2}{\Delta_i^2}, \quad (12)$$

onde,

P_i é a Medida de Desempenho (PerMIA) para a característica de qualidade i ; e $f_i(\cdot)$ é a função que é encontrada tal que $\sigma_i^2 = [f_i(\mu)]^2 P_i$.

Desta forma, consideram-se dois casos para determinar o conjunto de níveis ótimos para produtos com múltiplas características de qualidade. No primeiro caso, existe apenas um único fator de controle com fatores de sinal diferentes para cada característica (seção 3.2.2.1) e um fator de controle com fatores de sinal comuns às características (seção 3.2.2.2). No segundo caso, são considerados vários fatores de controle e de sinal e é feito uma generalização deste procedimento para as múltiplas características de qualidade (seção 3.2.2.3).

3.2.2.1 Fator de Sinal Diferente para as Características

Seja k o número de características de qualidade tipo nominal é melhor e seja m ($j = 1, \dots, m$) o número de níveis do fator de controle. Aqui, cada uma das características de qualidade têm seu próprio fator de sinal e existe um único fator de controle que é comum a todas elas.

Para determinar o melhor nível do fator de controle para as características, a PerMQ (Q_{ij}) é definida para a i -ésima característica nominal melhor dado o nível j do fator de controle. Isto é feito após o ajuste da média μ_{ij} ao seu nível ótimo μ_{i0} , através dos fatores de sinal que, neste caso, são diferentes para as k características de qualidade. Assim,

$$Q_{ij} = \frac{f_i^2(\mu_{i0}) P_{ij} + (\mu_{i0} - T_i)^2}{\Delta_i^2} \quad i=1,2,\dots,k \quad (13)$$

onde,

$$P_{ij} = \frac{\sigma_y^2}{f_i^2(\mu_{ij})}, \quad (14)$$

$$\mu_{i0} = T_i - f(\mu_{i0})f'_i(\mu_{i0}) \frac{\sigma_y^2}{f_i^2(\mu_{ij})}. \quad (15)$$

Através da minimização de (Q_{ij}) obtêm-se o nível ótimo do fator de controle. Como o segundo termo na equação (13) permanece constante para todos os níveis do fator de controle, ele é ignorado e a equação (13) é reescrita como,

$$Q_{ij} = \frac{f_i^2(\mu_{i0})P_{ij}}{\Delta_i^2} \quad i=1,2,\dots,k. \quad (16)$$

As características menor é melhor e maior é melhor, as quais não possuem fator de sinal, podem ser influenciadas pelos níveis dos fatores de controle. Assim, a PerMQ para estas características são estimadas como:

$$Q_{ij} = \frac{\sigma_y^2 + \mu_{ij}}{\Delta_i^2} \quad i=k+1,k+2,\dots,l \quad (17)$$

para menor é melhor e,

$$Q_{ij} = (\sigma_y^2 + \mu_{ij})\Delta_i^2 \quad i=l+1,l+2,\dots,n \quad (18)$$

para maior é melhor. Neste último caso, a variância e a média que são calculadas são do inverso da característica, $1/y_i$.

Q_{ij} é uma medida que estima a qualidade global do produto dado pela característica de qualidade i no nível j do fator de controle. Adicionando Q_{ij} sobre as i características, obtêm-se o desempenho do fator de controle no nível j . O PerMQ para um produto com k características tipo nominal é melhor, $k+1$ até l características tipo menor é melhor e $l+1$ até n características tipo maior é melhor são mostradas na Tabela 1 para diferentes níveis dos fatores de controle.

Tabela 1. PerMQ para os m níveis do fator de controle para as n características.

PerMQ	nível 1	...	nível j	...	nível m
Característica 1	$\frac{f_1^2(\mu_{10})P_{11}}{\Delta_1^2}$...	$\frac{f_1^2(\mu_{10})P_{1j}}{\Delta_1^2}$...	$\frac{f_1^2(\mu_{10})P_{1m}}{\Delta_1^2}$
:	:		:		:
Característica $k + 1$	$\frac{\sigma_{(k+1)1}^2 + \mu_{(k+1)1}^2}{\Delta_{k+1}^2}$...	$\frac{\sigma_{(k+1)j}^2 + \mu_{(k+1)j}^2}{\Delta_{k+1}^2}$...	$\frac{\sigma_{(k+1)m}^2 + \mu_{(k+1)m}^2}{\Delta_{k+1}^2}$
:	:		:		:
Característica $l + 1$	$(\sigma_{(l+1)1}^2 + \mu_{(l+1)1}^2) \Delta_{l+1}^2$...	$(\sigma_{(l+1)j}^2 + \mu_{(l+1)j}^2) \Delta_{l+1}^2$...	$(\sigma_{(l+1)m}^2 + \mu_{(l+1)m}^2) \Delta_{l+1}^2$
:	:		:		:
Característica n	$(\sigma_{n1}^2 + \mu_{n1}^2) \Delta_n^2$...	$(\sigma_{nj}^2 + \mu_{nj}^2) \Delta_n^2$...	$(\sigma_{nm}^2 + \mu_{nm}^2) \Delta_n^2$
Q_j	$\sum_{i=1}^k \frac{f_i^2(\mu_{i0})P_{i1}}{\Delta_i^2}$ + $\sum_{i=k+1}^l \frac{\sigma_{i1}^2 + \mu_{i1}^2}{\Delta_i^2}$ + $\sum_{i=l+1}^n (\sigma_{i1}^2 + \mu_{i1}^2) \Delta_i^2$...	$\sum_{i=1}^k \frac{f_i^2(\mu_{i0})P_{ij}}{\Delta_i^2}$ + $\sum_{i=k+1}^l \frac{\sigma_{ij}^2 + \mu_{ij}^2}{\Delta_i^2}$ + $\sum_{i=l+1}^n (\sigma_{ij}^2 + \mu_{ij}^2) \Delta_i^2$...	$\sum_{i=1}^k \frac{f_i^2(\mu_{i0})P_{im}}{\Delta_i^2}$ + $\sum_{i=k+1}^l \frac{\sigma_{im}^2 + \mu_{im}^2}{\Delta_i^2}$ + $\sum_{i=l+1}^n (\sigma_{im}^2 + \mu_{im}^2) \Delta_i^2$

Q_j mede o desempenho do fator de controle no nível j para a qualidade global do produto, e, o mínimo Q_j corresponde ao nível ótimo do fator de controle, isto é,

$$\text{Nível \acute{o}timo} = S^* = \min_{s \in [1, m]} \{ Q_1, Q_2, \dots, Q_j, \dots, Q_m \}. \quad (19)$$

O calculo de Q_j pode ser simplificado considerando que a transformaao para estabilizar a variancia seja dado por $\ln y$. Deste modo, $f(\mu) = \mu$ e assumamos que $\mu_{10} = T_i$. O PerMQ para a característica nominal  melhor da Tabela 1 torna-se:

$$Q_{ij} = \frac{[f_i(\mu_{10})]^2 P_{ij} + (\mu_{10} - T_i)^2}{\Delta_i^2} = \frac{T_i^2 \sigma_y^2}{\mu_{ij}^2 \Delta_i^2} \quad (20)$$

3.2.2.2 Fator de Sinal Comum para as Características

Suponha agora que existe um fator de sinal que seja comum as k características tipo nominal  melhor. O objetivo  determinar a quantidade ótima de ajuste para o fator de sinal tal que o PerMQ para as k características seja minimizado de acordo com cada nível do fator de controle. Suponha que a média da característica i seja funao do fator de controle (x_d) e do fator de sinal (x_a), $\mu_i = g_i(x_d, x_a)$. A média da característica i dado o nível j do fator de controle pode ser expressa como: $\mu_{ij} = g_{ij}(x_a) = g_i(x_d / x_d = \text{nível } j)$.

Sendo a o nível inicial do fator de sinal e Δa_j a quantidade de ajuste para o fator de sinal quando o fator de controle está no nível j , o valor médio após o ajuste  dado por:

$$g_{ij}(a + \Delta a_j). \quad (21)$$

A variancia estimada após o ajuste, em termos da equaao (3) :

$$[f_i(g_{ij}(a + \Delta a_j))]^2 P_{ij} = [f_i(g_{ij}(a + \Delta a_j))]^2 \frac{\sigma_y^2}{[f_i(\mu_{ij})]^2}. \quad (22)$$

O desvio em relação ao valor objetivo é:

$$T_i - g_y(a + \Delta a_j). \quad (23)$$

Portanto, o PerMQ para a característica i após o ajuste de Δa_j dado o nível j do fator de controle é:

$$Q_y = \frac{[f'_i(g_y(a + \Delta a_j))]^2 \frac{\sigma_y^2}{[f'_i(\mu_y)]^2} + [T_i - g_y(a + \Delta a_j)]^2}{\Delta_i^2}. \quad (24)$$

O PerMQ para o nível j é:

$$Q_j = \sum_{i=1}^k \frac{[f'_i(g_y(a + \Delta a_j))]^2 \frac{\sigma_y^2}{[f'_i(\mu_y)]^2} + [T_i - g_y(a + \Delta a_j)]^2}{\Delta_i^2} \quad (25)$$

O mínimo Q_j é obtido derivando a equação (24) em relação a Δa_j e igualando o resultado a zero, isto é,

$$\sum_{i=1}^k \{ f'_i(g_y(a + \Delta a_j^*)) f''_i(g_y(a + \Delta a_j^*)) g'_y(a + \Delta a_j^*) \frac{\sigma_y^2}{[f'_i(\mu_y)]^2} - [T_i - g_y(a + \Delta a_j^*)] g''_y(a + \Delta a_j^*) \} = 0 \quad (26)$$

onde Δa_j^* é a quantidade ótima de ajuste para o fator de sinal, o qual resultará no mínimo PerMQ para o nível j do fator de controle.

Para simplificar a equação (24), a notação da variância e do desvio da característica em relação ao valor objetivo após o ajuste Δa_j^* é definido, respectivamente, como:

$$v_y^2 = \frac{[f'_i(g_y(a + \Delta a_j'))]^2 \sigma_y^2}{[f'_i(\mu_y)]^2} \quad (27)$$

$$\varepsilon_y = T_i - g_y(a + \Delta a_j'). \quad (28)$$

Assim, o PerMQ simplificado para a característica i e o fator de controle no nível j é:

$$Q_y = \frac{v_y^2 + \varepsilon_y^2}{\Delta_i^2} \quad (29)$$

A Tabela 2 mostra o PerMQ para cada característica e para cada nível do fator de controle após o ajuste do fator de sinal.

Tabela 2. PerMQ para os níveis do fator de controle após o ajuste do fator de sinal.

PerMQ	nível 1	...	nível j	...	nível m
Característica 1	$\frac{v_{11}^2 + e_{11}^2}{\Delta_1^2}$...	$\frac{v_{1j}^2 + e_{1j}^2}{\Delta_1^2}$...	$\frac{v_{1m}^2 + e_{1m}^2}{\Delta_1^2}$
⋮	⋮		⋮		⋮
Característica $k + 1$	$\frac{\sigma_{(k+1)1}^2 + \mu_{(k+1)1}^2}{\Delta_{k+1}^2}$...	$\frac{\sigma_{(k+1)j}^2 + \mu_{(k+1)j}^2}{\Delta_{k+1}^2}$...	$\frac{\sigma_{(k+1)m}^2 + \mu_{(k+1)m}^2}{\Delta_{k+1}^2}$
⋮	⋮		⋮		⋮
Característica $l + 1$	$\Delta_{l+1}^2 (\sigma_{(l+1)1}^2 + \mu_{(l+1)1}^2)$...	$\Delta_{l+1}^2 (\sigma_{(l+1)j}^2 + \mu_{(l+1)j}^2)$...	$\Delta_{l+1}^2 (\sigma_{(l+1)m}^2 + \mu_{(l+1)m}^2)$
⋮	⋮		⋮		⋮
Característica n	$\Delta_n^2 (\sigma_{n1}^2 + \mu_{n1}^2)$		$\Delta_n^2 (\sigma_{nj}^2 + \mu_{nj}^2)$		$\Delta_n^2 (\sigma_{nm}^2 + \mu_{nm}^2)$
Q_j	$\sum_{t=1}^k \frac{v_{t1}^2 + e_{t1}^2}{\Delta_t^2}$		$\sum_{t=1}^k \frac{v_{tj}^2 + e_{tj}^2}{\Delta_t^2}$		$\sum_{t=1}^k \frac{v_{tm}^2 + e_{tm}^2}{\Delta_t^2}$
	$+ \sum_{t=k+1}^l \frac{\sigma_{t1}^2 + \mu_{t1}^2}{\Delta_t^2}$...	$+ \sum_{t=k+1}^l \frac{\sigma_{tj}^2 + \mu_{tj}^2}{\Delta_t^2}$...	$+ \sum_{t=k+1}^l \frac{\sigma_{tm}^2 + \mu_{tm}^2}{\Delta_t^2}$
	$+ \sum_{t=l+1}^n (\sigma_{t1}^2 + \mu_{t1}^2) \Delta_t^2$		$+ \sum_{t=l+1}^n (\sigma_{tj}^2 + \mu_{tj}^2) \Delta_t^2$		$+ \sum_{t=l+1}^n (\sigma_{tm}^2 + \mu_{tm}^2) \Delta_t^2$

O nível ótimo do fator de controle correspondente ao mínimo PerMQ da Tabela 2. Isto é,

$$\text{Nível ótimo} = S^* = \min_{S \in [1, m]} \{Q_1, Q_2, \dots, Q_j, \dots, Q_m\} \quad (30)$$

Suponha que $f_i(\mu_y) = \mu_y$ e $g_y(\cdot)$ seja uma função linear, isto é, $g_y(a + \Delta a_j) = \mu_y + \Delta a_j s_i$, onde s_i representa a mudança na média da característica i produzido pela mudança de uma unidade em Δa_j . Substituindo f_i e g_y na equação (26) obtêm-se:

$$\Delta a_j^* = \frac{\sum_{i=1}^k s_i (T_i - \frac{\sigma_y^2 s_i}{\mu_y} - \mu_y)}{\sum_{i=1}^k s_i^2 (\frac{\sigma_y^2 s_i}{\mu_y} + 1)} \quad (31)$$

A variância (v_y^2) e o desvio da característica ao valor objetivo (ϵ_y) para a característica nominal é melhor i dada na Tabela 2, pode ser substituída por:

$$v_y^2 = \left[\frac{(\mu_y + s_i \Delta a_j^*) \sigma_y}{\mu_y} \right]^2 \quad (32)$$

e

$$\epsilon_y = T_i - \mu_y - s_i \Delta a_j^* \quad (33)$$

onde Δa_j^* é obtido da equação (31).

Após esta simplificação, o fator de controle ótimo pode ser obtido usando a Tabela 2 e a equação (30).

3.2.2.3 Vários Fatores de Controle

Nos casos anteriores assumiu-se que existe apenas um fator de controle que afeta as características de qualidade do produto. Entretanto, na grande maioria dos casos, existem vários fatores de controle que têm efeito direto nas características. Nesta situação, é preciso determinar com antecedência quais fatores influenciam a PerMIA e quais fatores influenciam a média. A idéia então é agrupar as características de qualidade, baseadas em fatores de controle comuns. Assim, o nível ótimo do fator de controle é obtido para este grupo de características. Por exemplo, suponha que um experimento possua 7 fatores A, B, ..., G e 5 características de qualidade I, II, ..., V e, suponha também que os fatores de controle e de sinal afetem as características de acordo com a Tabela 3 abaixo:

Tabela 3. Fatores de Controle e de Sinal.

Características	Fatores de Controle	Fatores de Sinal
I	A	G
II	A e B	G
III	B e C	F
IV	D	E
V	D	E

Na Tabela 3, as características I, II e III são agrupadas porquê as características I e II tem o fator de controle comum (A) e as características II e III tem um fator de controle comum (B). As características IV e V, como têm um único fator de controle (D), são alocadas em outro grupo. Duas novas Tabelas são construídas.

Tabela 4. Níveis do fator de controle D.

PerMQ	Níveis do fator de Controle D		
	1	...	m
IV	$Q_{IV,1}$...	$Q_{IV,m}$
V	$Q_{V,1}$...	$Q_{V,m}$
Total	Q_1	...	Q_m

Tabela 5. Níveis dos fatores de Controle A, B e C.

PerMQ	Níveis dos fatores de Controles A, B e C		
	1,1,1	...	m,m,m
I	$Q_{I;(1,1,1)}$...	$Q_{I;(m,m,m)}$
II	$Q_{II;(1,1,1)}$...	$Q_{II;(m,m,m)}$
III	$Q_{III;(1,1,1)}$...	$Q_{III;(m,m,m)}$
Total	$Q_{(1,1,1)}$...	$Q_{(m,m,m)}$

Os níveis dos fatores que aparecem nas Tabelas 4 e 5 acima devem corresponder apenas aos tratamentos realizados para a coleta de dados. Para calcular o PerMQ nas Tabelas 4 e 5 é necessário determinar a quantidade ótima de ajuste para o fator de sinal. A Tabela 3 mostra que existe um fator de sinal (E) comum às características IV e V. Então, Δa_j^* do fator E precisa ser determinado antes de ser calculado o PerMQ. Similarmente, às características I e II tem um fator de sinal comum (G) e o Δa_j^* também precisa ser calculado. No entanto, a característica III pode ser ajustada ao seu valor objetivo, visto que ela tem seu próprio fator de sinal. O conjunto de níveis de controle ótimo dos fatores A, B, C e D são aqueles correspondentes ao mínimo PerMQ nas Tabelas 4 e 5.

3.3 Método de Pignatiello

Pignatiello (1993) sugere uma função perda para a melhoria da qualidade de processos/produtos que são caracterizados por múltiplas características de qualidade. Esta se apresenta

como uma generalização da função perda quadrática utilizada por Taguchi. A função perda esperada, pode ser expressa em termos dos componentes de variância e do desvio-quadrático da média em relação ao valor objetivo. Algumas estratégias são discutidas para minimizar a função perda esperada.

A seguir, vamos apresentar a proposta da função perda (seção 3.3.1), a função perda esperada (seção 3.3.2) e, na seção 3.3.3, duas estratégias para minimizar a perda esperada.

3.3.1 Função Perda para Múltiplas Características de Qualidade

Seja $x = [x_1, x_2, \dots, x_k]'$ um vetor $k \times 1$ de fatores, e seja $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]'$ um vetor $n \times 1$ de características de qualidade. Suponha que y tenha distribuição normal multivariada com média η e matriz de variância-covariância Σ , isto é, $y \sim N_n(\eta, \Sigma)$ e que sejam estabelecidos valores objetivos finitos para cada uma das n características de qualidade. O vetor de valores objetivos para as variáveis respostas é denotado por $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]'$. Aqui considera-se apenas as variáveis tipo nominal é melhor.

Como a distribuição do vetor das características de qualidade deve ser função dos fatores x , denota-se a média do vetor resposta dado x por,

$$E[y/x] = \eta(x).$$

Então, se o processo está no objetivo, $\eta(x) = \tau$. Também, denota-se a matriz de variância-covariância de y dado x por,

$$Var[y/x] = \Sigma(x).$$

Suponha que a distribuição de y é normal para todos os possíveis x definidos sobre a região experimental, isto é, $y/x \sim N_n(\eta(x), \Sigma(x))$.

Se o processo tem características de qualidade que se desviam dos valores objetivos, a perda irá ocorrer. Assim, define-se uma matriz de custos C $n \times n$ positiva definida, para representar a perda que ocorre quando y desvia-se de τ . Com isto, a função perda quadrática pode agora ser definida,

$$L(y(x)) = (y(x) - \tau)' C (y(x) - \tau). \quad (1)$$

Desde que C é positiva definida, a perda é estritamente positiva quando $y \neq \tau$. Como a matriz C deve ser simétrica, isto é $c_{ij} = c_{ji}$, a função perda em (1) pode também ser escrita como:

$$L = \mathbf{z}' C \mathbf{z} = \sum_i z_i^2 c_{ii} + 2 \sum_{j > i} z_i z_j c_{ij} \quad (2)$$

onde, $\mathbf{z} = y(x) - \tau$. Assim, se C é matriz diagonal, então a função perda é a soma das n diferenças entre as respostas e seus valores objetivos. Para a matriz não-diagonal C , os elementos fora da diagonal estão relacionados com o incremento na perda quando as características de qualidade estão, aos pares, fora de seus valores objetivos.

No caso univariado ($n = 1$) a expressão para a perda é reduzida a:

$$L = c(y(x) - \tau)^2 = c z^2(x),$$

que é a mesma função perda quadrática simétrica usada por Taguchi para a característica do tipo nominal é melhor.

No caso bivariado ($n = 2$), a perda é:

$$L = c_{11} z_1^2 + c_{22} z_2^2 + 2 c_{12} z_1 z_2.$$

Os dois primeiros termos da função perda bivariada são valores da função perda quadrática univariada. O último termo é diferente de zero apenas quando ambas as respostas estão fora de seus valores objetivos e $c_{12} \neq 0$. Então c_{12} está relacionado à perda adicional que ocorre quando as características y_1 e y_2 estão fora de seus valores objetivos.

3.3.2 Função Perda Esperada

Se existe a distribuição de y dado x , existirá também a distribuição da perda dado x . O objetivo é encontrar o conjunto de níveis dos fatores, x^* , tal que a perda esperada seja minimizada. Seja $E(L(x))$ a perda esperada dado x . O objetivo é encontrar x^* tal que,

$$E(L(x^*)) = \min_x E(L(x)). \quad (3)$$

A função perda esperada pode ser expressa como:

$$E(L(x)) = tr(C \Sigma(x)) + (\eta(x) - \tau)' C (\eta(x) - \tau). \quad (4)$$

Observa-se que no caso univariado ($n = 1$), a função perda esperada reduz-se para:

$$E(L(x)) = c[\sigma^2(x) + (\eta(x) - \tau)^2].$$

Então, a função perda esperada é composta por dois componentes: a variância da característica de qualidade e o desvio quadrático da média em relação ao valor objetivo.

3.3.3 Estratégias para Minimizar a Função Perda Esperada

Agora, vamos descrever duas estratégias para minimizar a função perda esperada: Estratégia Direta e a Estratégia de Partição. As duas estratégias estão baseadas em minimizar diretamente a função perda sobre o conjunto de níveis dos fatores. Porém, se a partição dos fatores de controle é possível, esta informação deve ser utilizada para encontrar primeiro os níveis dos fatores que minimizem a variabilidade, depois os níveis dos fatores que conduzam a média ao valor objetivo. Outras estratégias podem ser vistas em Pignatiello (1993).

3.3.3.1 Estratégia Direta

Uma estratégia simples para encontrar a melhor combinação dos fatores é encontrar x^* , que

minimize $\hat{E}(L(x))$ onde,

$$\hat{E}(L(x)) = tr(CS(x)) + (\bar{y}(x) - \tau)'C(\bar{y}(x) - \tau) \quad (5)$$

é uma estimativa de $E(L(x))$. $\bar{y}(x)$ e $S(x)$ são estimativas de η e Σ dado x , respectivamente.

Assim, após a realização do experimento para a coleta dos dados (y) calcula-se $\bar{y}(x)$ e $S(x)$ e juntamente com a matriz de custos, C , a perda esperada, $\hat{E}(L(x))$ é estimada para cada tratamento. Desta forma, um modelo de regressão da perda, $E(L(x))$, em função dos fatores, x é ajustado. Como as replicações são utilizadas para o cálculo da matriz de variância-covariância, $S(x)$, o autor sugere utilizar o gráfico de probabilidade normal e/ou o procedimento de Lenth (1989), para observar quais os fatores significativos. E, a partir daí, utilizar os métodos de superfície de resposta para determinar a direção descendente para x^* ; seguir a direção descendente e estabelecer um novo local da região experimental. Os métodos de superfície de resposta podem ser utilizados até que melhorias na redução da perda esperada sejam mínimas.

3.3.3.2 Estratégia de Partição

Outra estratégia para minimizar a perda esperada, que pode ajudar a encontrar a melhor combinação dos níveis dos fatores, assume que o experimentador tenha algum conhecimento *a priori* da relação entre x e y , tais como: quais fatores são os de sinal (afetam a locação) e quais fatores são os de controle (afetam a dispersão).

Para implementar esta estratégia, suponha que seja possível a partição do vetor de fatores em três componentes disjuntos:

$$x = [x_c | x_s | x_e]$$

O vetor x_c representa os fatores de controle que afetam a dispersão através de Σ . O vetor x_s representa os fatores de sinal que não afetam a dispersão, mas afetam a média η . Já o vetor x_e representa os fatores que não afetam nem a dispersão nem a média podendo ser considerado como fatores de custo.

Como o vetor x_d pode também afetar a média, a matriz de covariância é escrita como $\Sigma(x_d)$ e o vetor de médias pode ser expresso como $\eta(x_d, x_a)$.

Caso seja possível particionar os fatores, dois passos são usados para encontrar o conjunto de níveis ótimos dos fatores, x^* ;

(1) Encontrar x_d^* que minimize o $tr(C \Sigma(x_d))$, que é a porção da variância da função perda esperada. Isto é,

$$tr(C \Sigma(x_d^*)) = \min_{x_d} tr(C \Sigma(x_d)).$$

(2) Fixando x_d dado x_d^* , encontrar x_a^* que minimize o desvio quadrático da média em relação ao valor objetivo. Isto é, encontrar x_a^* tal que,

$$(\eta(x_d^*, x_a^*) - \tau)' C (\eta(x_d^*, x_a^*) - \tau) = \min_{x_a} (\eta(x_d^*, x_a) - \tau)' C (\eta(x_d^*, x_a) - \tau).$$

Portanto, o conjunto ótimo dos níveis dos fatores pode ser determinado como:

$$E(L(x^*)) = \min_{x_d} tr(C \Sigma(x_d)) + \min_{x_a | x_d^*} (\eta(x_d^*, x_a) - \tau)' C (\eta(x_d^*, x_a) - \tau). \quad (6)$$

Considere os dois componentes de $\hat{E}(L(x))$ como independentes. Assim, um primeiro modelo seria ajustado ao $tr(C \Sigma(x_d))$, em função dos fatores. Os métodos de superfície de resposta podem ser utilizados para determinar a região descendente até encontrar x_d^* que minimize o $tr(C \Sigma(x_d))$. Com x_d fixado em x_d^* , ajusta-se um segundo modelo de $(\eta(x_d^*, x_a) - \tau)' C (\eta(x_d^*, x_a) - \tau)$ em função de x_a . Deste modo, x_a^* deve ser encontrado tal que minimize $(\eta(x_d^*, x_a) - \tau)' C (\eta(x_d^*, x_a) - \tau)$.

Quando a partição não é possível, pois pode ocorrer que em alguns experimentos todos os fatores afetem a dispersão, a Estratégia Direta deve ser empregada.

3.4 Método de Ribeiro e Albin

Ribeiro e Albin (1993) abordam o problema de múltiplas características de qualidade através da proposta de uma função perda. Esta função combina as diversas características num único valor considerando todos os tratamentos. Desta forma, o conjunto de níveis ótimos dos fatores são aqueles que minimizam o valor esperado da função perda. A função perda proposta é uma extensão da função perda quadrática usada por Taguchi. Ela comporta pesos relativos à cada característica e um coeficiente de interação para cada par de características de qualidade. A função perda proposta é positiva, simétrica e consistente.

A seguir, na seção 3.4.1 apresentamos a função perda e a expressão da função perda esperada na seção 3.4.2. Os procedimentos de otimização encontram-se na seção 3.4.3.

3.4.1 Função Perda para Múltiplas Características de Qualidade

A função perda proposta é dada por:

$$L = \max \{ L^*, w_q (Y_q - T_q)^2, q = 1, \dots, Q \} \quad (1)$$

onde,

$$L^* = \sum_{q=1}^Q w_q (Y_q - T_q)^2 + \sum_{q=1}^{Q-1} \sum_{r=q+1}^Q c_{qr} \sqrt{w_q w_r} |Y_q - T_q| |Y_r - T_r| \quad (2)$$

com $-1 < c_{qr} < \alpha$ e $w_q > 0$ para $q, r = 1, \dots, Q$.

A função perda L tem três propriedades:

- i) $L \geq 0$, ou seja, a perda é não negativa;
- ii) L é simétrica, isto é, a perda é função das diferenças absolutas entre as características de qualidade e seus valores objetivos;

iii) L é consistente, ou seja, se uma característica de qualidade é afetada por uma determinada combinação dos níveis dos fatores de tal forma que a característica se distâncie de seu valor objetivo, a perda L deve crescer ou no máximo permanecer a mesma. Por esta razão a perda é expressa como função do máximo.

3.4.2 Função Perda Esperada³

O valor esperado de L é,

$$E(L) = \max \{ E(L^*), E(w_q(Y_q - T_q)^2), q = 1, \dots, Q \} \quad (3)$$

onde,

$$E(L^*) = \sum_{q=1}^Q w_q [\text{var}(Y_q) + (E(Y_q) - T_q)^2] + \sum_{q=1}^{Q-1} \sum_{r=q+1}^Q c_{qr} \sqrt{w_q w_r} [\text{cov}(|Y_q - T_q|, |Y_r - T_r|) + E(|Y_q - T_q|)E(|Y_r - T_r|)] \quad (4)$$

e

$$E(w_q(Y_q - T_q)^2) = w_q [\text{var}(Y_q) + (E(Y_q) - T_q)^2] \quad (5)$$

Ou seja, $E(L)$ é função da variância de cada característica de qualidade, $\text{var}(Y_q)$ e da diferença entre o valor esperado da característica e seu valor objetivo, $(E(Y_q) - T_q)$. Quando o coeficiente de interação é diferente de zero, isto é, $c_{qr} \neq 0$, então $E(L)$ também é função do produto entre os valores esperados do desvio absoluto entre a característica e seu valor objetivo e da covariância do desvio absoluto em relação ao valor objetivo para cada par de características de qualidade. Esta covariância não é igual à covariância entre duas características, $\text{cov}(Y_q, Y_r), q \neq r$. Se $\text{cov}(Y_q, Y_r) = 0, q \neq r$, não se pode concluir que $\text{cov}(|Y_q - T_q|, |Y_r - T_r|) = 0, q \neq r$. Caso $\text{cov}(Y_q, Y_r), q \neq r$ seja negativa (ou positiva) nada pode ser concluído sobre o sinal da $\text{cov}(|Y_q - T_q|, |Y_r - T_r|), q \neq r$.

³ Como o valor esperado da função L não está definido corretamente por Ribeiro e Albin (1993), propomos utilizar a função L^* como função perda e o valor esperado de L^* como função perda esperada. Neste caso, o coeficiente de interação deve apenas assumir valores maiores ou iguais a zero para garantir a consistência da função L^* .

3.4.3 Otimização de um Processo com Múltiplas Características de Qualidade

O procedimento proposto para a otimização do produto/processo com várias respostas contém os seguintes passos:

1. Identificar as características de qualidade, os pesos e os coeficientes de interação.
 2. Identificar os fatores, os níveis e planejar o experimento.
 3. Analisar cada característica de qualidade individualmente para garantir um conhecimento da relação entre as características de qualidade e os fatores.
 4. Estimar a perda esperada para cada tratamento.
 5. Modelar a perda como função dos fatores e otimizar o processo.
- Veremos agora cada um destes procedimentos mais detalhadamente.

3.4.3.1 Identificar as Características de Qualidade e os Parâmetros da Função Perda

As variáveis aleatórias Y_q , $q = 1, \dots, Q$, representam as medidas das características de qualidade para o produto/processo. Caso a variável Y_q seja do tipo nominal é melhor, T_q é o valor objetivo. Quando a característica é menor é melhor o objetivo é zero, ou seja $T_q = 0$. Para a característica maior é melhor, a recomendação de Ribeiro e Albin (1993) é escolher o limite superior da característica de qualidade como valor objetivo, enquanto que a recomendação de Taguchi, nestes casos, é usar Y_q^{-1} e igualar o objetivo a zero (ver Phadke (1989)).

Os pesos⁴ w_q , $q = 1, \dots, Q$, indicam a importância relativa de cada característica de qualidade e/ou ajuste para diferenças nas escalas de medidas. Os pesos devem ser determinados através de discussões com engenheiros de processo, operadores de máquina, consumidores, etc. Para normalizar diferentes escalas de medidas, quando a importância das características de qualidade está representada por r_q , $q = 1, \dots, Q$, w_q deve ser selecionada como:

$$w_q = \frac{r_q}{\Delta_q^2} \quad (6)$$

⁴ Observem que os pesos estão definidos como função da tolerância ao quadrado, isto é Δ_q^2 , para tornar a função perda adimensional.

onde Δ_q é a tolerância dada na especificação $T_q \pm \Delta_q$. Por exemplo, suponha que a característica de qualidade Y_1 tenha o dobro da importância de Y_2 e que Y_1 tenha limites de especificação 5 ± 1.5 segundos e Y_2 tenha limites de especificação 100 ± 10 graus. Então, $w_1 = 2/(1.5)^2$ e $w_2 = 1/(10)^2$.

Os coeficientes de interação, c_{qr} , $r, q = 1, \dots, Q$, e $r \neq q$, refletem como a perda é afetada quando as características estão, aos pares, fora de seus valores objetivos. Assim como os pesos, os coeficientes de interação também devem ser determinados através de discussões com engenheiros de processo.

3.4.3.2 O Planejamento do Experimento e a Coleta de Dados

O próximo passo é determinar os fatores que afetam as características de qualidade, selecionar os níveis e planejar o experimento. É aconselhável selecionar, no mínimo, três níveis para cada fator de modo a permitir o ajuste de modelos de regressão para a média e variância.

Para usar este procedimento, para otimizar um produto/processo, é necessário termos replicações. Como mostrado anteriormente, a perda esperada requer estimação de médias, variâncias e covariâncias e no mínimo duas observações são necessárias para cada tratamento.

Utiliza-se a seguinte notação: o experimento consiste de M tratamentos; para o tratamento $m = 1, \dots, M$, o número de observações é N_m ; e, existe um conjunto de Q características de qualidade. Assim,

$$\{y_{mqn}; m = 1, \dots, M, q = 1, \dots, Q, e n = 1, \dots, N_m\}.$$

onde y_{mqn} é o tratamento m para a característica de qualidade q e que contém n observações.

3.4.3.3 Análise de Cada Característica de Qualidade Individualmente

Modelos de regressão devem ser ajustados, se possível, para a média e variância das características de qualidade. Estes modelos seriam construídos a partir das médias e variâncias amostrais. Por exemplo, suponha um modelo de variância da característica de qualidade como função dos fatores e que tal modelo indique que a variância é função apenas de um dos fatores. Estes modelos

serão usados para se obter a variância predita para cada tratamento e com isso poder estimar a função perda esperada.

Para estimar a função perda calcula-se, para cada tratamento, a média e a variância para cada característica. Para o tratamento m , com N_m observações, a estimativa da variância amostral para a característica de qualidade q é:

$$s_{mq}^2 = \frac{1}{N_m - 1} \sum_{n=1}^{N_m} (y_{mqn} - \bar{y}_{mq})^2 \quad (7)$$

onde,

$$\bar{y}_{mq} = \frac{1}{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} y_{mqn} \quad (8)$$

Estas estimativas amostrais devem ser utilizadas para ajustar modelos de regressão, quando possível, para média e variância como função dos fatores.

Para a estimativa da covariância e da média dos desvios utiliza-se a seguinte transformação de y_{mq} para d_{mq} , onde d_{mq} é o desvio absoluto da característica de qualidade q , para o tratamento m , em relação ao seu valor objetivo, para $q = 1, 2, \dots, Q$:

$$d_{mq} = |y_{mq} - T_q|, \quad (9)$$

Assim, a estimativa da média dos desvios é:

$$\bar{d}_{mq} = \frac{1}{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} d_{mqn} \quad (10)$$

e a estimativa da covariância do desvio absoluto em relação ao valor objetivo para cada par de característica de qualidade q e r ,

$$R_{mqr}^2 = \frac{1}{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} d_{mqn} d_{mrn} - \bar{d}_{mq} \bar{d}_{mr} \quad (11)$$

3.4.3.4 Estimativa da Perda Esperada⁵ Para Cada Tratamento

A estimativa de $E(L)$ para o tratamento m é \hat{l}_m ,

$$\hat{l}_m = \max \{ \hat{E}(L_m^*), \hat{E}(w_q(Y_{mq} - T_q))^2; q = 1, \dots, Q \} \quad (12)$$

onde,

$$\hat{E}(L_m^*) = \sum_{q=1}^Q w_q [\hat{\sigma}_{mq}^2 + (\hat{\mu}_{mq} - T_q)^2] + \sum_{q=1}^{Q-1} \sum_{r=q+1}^Q c_{qr} \sqrt{w_q w_r} [\hat{Y}_{mqr}^2 + \hat{\delta}_{mq} \hat{\delta}_{mr}], \quad (13)$$

e

$$\hat{E}(w_q(Y_{mq} - T_q)^2) = w_q [\hat{\sigma}_{mq}^2 + (\hat{\mu}_{mq} - T_q)^2]. \quad (14)$$

\hat{E} indica uma estimativa da perda esperada. A variável aleatória Y_{mq} é a característica de qualidade q para o tratamento m e a variável aleatória L_m^* é função da equação (2) para o tratamento m . Denota-se as estimativas dos parâmetros como:

$$\hat{\mu}_{mq} = \hat{E}(Y_{mq}); \quad \hat{\sigma}_{mq}^2 = \hat{V}(Y_{mq}) \quad (15)$$

⁵ Vide nota de rodapé 3 página 45.

$$\hat{\delta}_{mq} = \hat{E} (|Y_{mq} - T_q|); \quad e \quad \hat{\gamma}_{mq}^2 = \hat{Cov} (|Y_{mq} - T_q|) (|Y_{mq} - T_q|) \quad (16)$$

As estimativas das equações (15) e (16) podem ser iguais às estimativas das equações (7), (8), (10) e (11). Entretanto, se existirem estimativas dos modelos ajustados para as médias e variâncias das características de qualidade, estas devem ser substituídas pelas estimativas das equações (15).

3.4.3.5 Modelo da Perda como Função dos Fatores e Otimização do Processo

O último passo é criar um modelo da perda esperada como função dos fatores dado a estimativa da perda esperada para cada tratamento. Em alguns casos, o conjunto de níveis ótimos dos fatores podem ser encontrados pelo estudo dos valores extremos da função perda esperada. Um outro modo é considerar a minimização da função perda no intervalo dos fatores.

Para representar geometricamente a função perda em função dos fatores, os autores sugerem a utilização das curvas de nível.

3.5 Método de Ribeiro e Elsayed

Ribeiro e Elsayed (1995), propuseram um estudo de múltiplas características de qualidade através do uso da função perda, chamada por eles de *função perda gradiente*. Esta função é uma modificação da função perda apresentada pelo método de Ribeiro e Albin (1993), que além de considerar o desvio das características aos seus respectivos valores objetivos e a variabilidade das mesmas, considera também possíveis variações dos fatores.

3.5.1 Introdução

Em geral, os objetivos dos engenheiros de processo em se tratando da qualidade do produto são:

- (1) Minimizar os desvios aos valores objetivos;
- (2) Maximizar a robustez ao ruído (minimizar a variabilidade);
- (3) Maximizar a robustez às flutuações dos fatores.

A meta é ajustar os níveis dos fatores de modo que os objetivos de 1 a 3 sejam atingidos.

Durante a fase de produção, devido a mudança de *setup*, de operadores, de material, etc, torna-se difícil manter fixos os níveis de alguns (ou de todos) os fatores. Além disso, é necessário que os fatores sejam robustos a possíveis flutuações, isto é, pequenas mudanças nestes níveis não devem alterar as características de qualidade do produto.

Para atingir estes três objetivos os seguintes passos são sugeridos:

1. **Identificação do Problema.** Listar os fatores e as características de qualidade de interesse. Para as características, definir objetivos e especificações.
2. **Construção de Modelos.** Executar o experimento e coletar os dados de média e variabilidade. Construir modelos, tais como:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= f_1(X_1, \dots, X_P); & \sigma_{Y_1} &= g_1(X_1, \dots, X_P) \\ & \vdots & & \\ \mu_Q &= f_Q(X_1, \dots, X_P); & \sigma_{Y_Q} &= g_Q(X_1, \dots, X_P) \end{aligned}$$

onde, μ_j é a média das características j ($j=1, \dots, Q$), σ_{Y_j} é o desvio padrão das j características e X_k são os fatores ($k=1, \dots, P$).

3. **Informação do Gradiente**⁶. Calcular as derivadas parciais de Y_j em relação a X_1, \dots, X_P . Estas derivadas proporcionam informações sobre a robustez dos fatores.
4. **Níveis Ótimos.** Definir uma função (onde T representa o valor objetivo):

⁶ Lembre-se que o gradiente de uma função está na direção e sentido nos quais a função tem sua maior taxa de variação.

$$L = f[(Y-T), \sigma, \textit{derivadas}]$$

a qual, capta os objetivos acima mencionados. Finalmente, a otimização deve ser obtida pelos procedimentos tradicionais de programação não-linear ou simplesmente pelo cálculo de L para diferentes valores de níveis dos fatores e, com isso, localizar os níveis ótimos.

Os passos descritos acima demandam atenção. No passo 1 definir objetivos apropriados é muito importante. O engenheiro deve estar certo de que a escolha dos objetivos estão em harmonia com os requisitos dos clientes.

No passo 2 a tarefa é planejar e executar um experimento. Os níveis dos fatores devem ser escolhidos cuidadosamente para investigar, de modo apropriado, a região de interesse. É importante, também, coletar dados que permitam modelar a variabilidade. Modelos devem ser construídos para cada característica separadamente. Fazendo isso, tem-se a oportunidade de conhecer aspectos importantes sobre o processo em estudo.

O passo 3 é bastante simples. Consiste apenas do cálculo das derivadas parciais.

O passo 4 faz uso de uma função que capta os objetivos, isto é, proporciona uma medida quantitativa dos desvios aos valores objetivos, mais a falta de robustez ao ruído, mais a falta de robustez a flutuações dos fatores. Esta função leva em consideração a importância relativa das diferentes características de qualidade como também a importância da robustez aos desvios para os diferentes fatores.

3.5.2 Função Perda Gradiente

Para determinar os níveis ótimos dos fatores uma função objetivo é desenvolvida. A soma do produto dos pesos pelo erro médio quadrático é apropriado para capturar o primeiro e o segundo objetivo⁷:

⁷ Ribeiro e Albin (1993), também calculam "termos de interação" que levam em conta alguma perda que pode ser percebida pelo consumidor quando os pares de características de qualidade estão simultaneamente fora do objetivo. Para propósitos de otimização, em várias situações, este termo pode ser descartado. Entretanto, quando necessário, ele deve ser incorporado a equação (1) (e a equação (4)) no sentido de realizar uma otimização mais acurada.

$$L(i) = \sum_{j=1}^Q w_j [(\hat{\mu}_j - T_j)^2 + \hat{\sigma}_{Y_j}^2] \quad (1)$$

onde:

$L(i)$ é a perda para o tratamento i ;

w_j é o peso que leva em conta a importância das características Y_j ($j=1, \dots, Q$, onde Q é a quantidade de características de qualidade);

$\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_{Y_j}$ são, respectivamente, a média predita e o desvio padrão predito da característica de qualidade Y_j dado o tratamento i ;

T_j é o objetivo para a característica de qualidade Y_j .

A informação do gradiente é necessária para captar a robustez as flutuações dos fatores. Suponha que para cada característica de qualidade, modelos foram desenvolvidos de modo a representar a relação entre a média das características de qualidade Y_j e os fatores X_1, \dots, X_p ,

$$\hat{\mu}_j = f(X_1, \dots, X_p). \quad (2)$$

Deste modo, para um dado tratamento, pode-se estimar a variabilidade produzida na característica de qualidade Y_j devido as flutuações dos fatores usando:

$$\hat{\sigma}_{Y_j}^2 = \sum_{k=1}^P \hat{\sigma}_{X_k}^2 \left(\frac{\partial \hat{\mu}_j}{\partial X_k} \right)^2. \quad (3a)$$

A expressão (3a) é válida quando flutuações em X_1, \dots, X_p são independentes. Quando elas forem correlacionadas, a estimativa é obtida usando:

$$\hat{\sigma}_{Y_j}^2 = \sum_{k=1}^P \hat{\sigma}_{X_k}^2 \left(\frac{\partial \hat{\mu}_j}{\partial X_k} \right)^2 + \sum_{k \neq l} \rho_{kl} \hat{\sigma}_{X_k}^2 \hat{\sigma}_{X_l}^2 \frac{\partial \hat{\mu}_j}{\partial X_k} \frac{\partial \hat{\mu}_j}{\partial X_l}. \quad (3b)$$

As expressões (3a) e (3b) estão baseadas na expansão em série de Taylor de $\hat{\mu}_j$.

Adicionando a expressão (3a) ou (3b) à equação (1), têm-se a função objetivo a ser minimizada. Quando X_1, \dots, X_p são independentes, $L(i)$ resulta:

$$L(i) = \sum_{j=1}^q w_j [(\hat{\mu}_j - T_j)^2 + \hat{\sigma}_{T_j}^2 + \sum_{k=1}^p \hat{\sigma}_{x_k}^2 \left(\frac{\partial \hat{Y}_j}{\partial X_k}\right)^2]$$

onde, o primeiro termo mede o desvio da média ao valor objetivo. Os últimos dois termos quantificam as fontes de variabilidade: devido aos fatores não-controláveis (fatores de ruído); e, devido as flutuações nos fatores.

Capítulo 4 Estudos de Casos e Avaliações

Este capítulo tem por objetivo aplicar os métodos apresentados no Capítulo 3. Para isso, dois conjuntos de dados foram simulados e um terceiro conjunto de dados foi obtido do livro *Empirical Model - Building an Response Surfaces* de George Box e Normam Draper (1987). Nossa intenção é observar a dificuldade de aplicação dos métodos e a solução obtida. Para cada conjunto de dados, os métodos são aplicados quando possível, devido as suas restrições. Entretanto, dois métodos não foram aplicados: o de Elsayed e Chen e o de Ribeiro e Elsayed. O primeiro por ser um método que necessita de algumas suposições que demandam um conhecimento prático do problema. O segundo por ser uma extensão do método de Ribeiro e Albin com um novo termo que quantifica a variabilidade dos fatores.

A seguir, na seção 4.1 apresentamos três estudos de casos e, na seção 4.2, faremos uma avaliação de cada método descrevendo suas principais características.

4.1 Estudos de Casos

4.1.1 Primeiro Caso

Suponha que estejamos estudando o efeito de três fatores (X_1, X_2, X_3) em três variáveis respostas (Y_1, Y_2, Y_3). Os fatores possuem 5 níveis (-2, -1, 0, 1, 2) e, temos portanto, 125 tratamentos. Para cada tratamento, 4 observações foram simuladas. As variáveis respostas são do tipo nominal melhor e apresentam os seguintes valores objetivos 16.0, 4.5 e 13.7 para Y_1, Y_2 e Y_3 , respectivamente.

Os dados foram gerados através das seguintes funções:

$$Y_1 = 14 - X_1 + e_1$$
$$\text{onde } e_1 \sim N(0, \sigma_1) \text{ e } \sigma_1 = 0.3 + 0.5X_2 - 0.155X_3$$

$$Y_2 = 3.9 - 1.17 X_2 + 0.136 X_2^2 - 0.438 X_3 + 0.134 X_3^2 + e_2$$

onde $e_2 \sim N(0, \sigma_2)$ e $\sigma_2 = 0.32$

$$Y_3 = 15 - 0.12 X_1 + 0.186 X_1^2 - 0.339 X_3 + 0.518 X_3^2 + e_3$$

onde $e_3 \sim N(0, \sigma_3)$ e $\sigma_3 = 0.918 + 0.214 X_1 - 0.112 X_2$

O programa de geração dos dados encontra-se no Apêndice A.

4.1.1.1 Método de Ribeiro e Albin

Estimativas de média, desvio padrão, covariâncias e desvio médio encontram-se no Apêndice A1 para cada tratamento.

Foram ajustados modelos de regressão para média e desvio padrão (como descrito na seção 3.4.3.3) para cada característica de qualidade, obtendo-se¹:

$$\hat{\mu}_1 = 14.03 (0.04) - 0.1 (0.03) X_1$$

$$e \hat{\sigma}_1 = 0.63 (0.04) + 0.19 (0.03) X_2 - 0.08 (0.03) X_3 - 0.10 (0.02) X_2 X_3$$

$$\hat{\mu}_2 = 3.82 (0.03) - 1.17 (0.01) X_2 - 0.45 (0.01) X_3 + 0.15 (0.01) X_2^2 + 0.15 (0.01) X_3^2$$

$$e \hat{\sigma}_2 = 0.29$$

$$\hat{\mu}_3 = 15.03 (0.09) - 0.16 (0.03) X_1 - 0.32 (0.03) X_3 + 0.15 (0.03) X_1^2 + 0.49 (0.03) X_3^2$$

$$e \hat{\sigma}_3 = 0.82 (0.03) + 0.16 (0.02) X_1 - 0.08 (0.02) X_2$$

Estes modelos conseguem captar todos os fatores utilizados para a geração dos dados, a não ser para $\hat{\sigma}_1$ que mostra uma interação significativa ao nível 0.01% entre os fatores X_2 e X_3 , a qual não foi utilizada para gerar os dados. Quanto ao valor das estimativas, estas se apresentam razoavelmente

¹ Os valores entre parênteses são os desvios padrões dos coeficientes.

próximas aos valores utilizados nas funções de geração.

As tabelas de Análise de Variância para cada modelo apresentado acima encontram-se na Tabela 1 e 2. Os Gráficos de Resíduos são apresentados nas Figuras 1-5. Observa-se que tanto os Gráficos de Probabilidade Normal quanto os Gráficos dos Resíduos apresentam problemas com relação a suposição de normalidade dos erros e variância constante, porém isto se deve unicamente às funções utilizadas para gerar os dados.

Tabela 1. Tabelas de Análise de Variância para a média de Y_1 , Y_2 e Y_3 .

Y_1

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo (devido a X1)	1	248.077230	248.077230	1524.50	0.0001
Erro	123	20.015434	0.162727		
Total Corrigido	124	268.092664			

Y_2

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	4	409.034827	102.258707	3878.50	0.0001
X2	1	343.384774	343.384774	13024.01	0.0001
X3	1	50.125853	50.125853	1901.19	0.0001
X2*X2	1	7.515070	7.515070	285.03	0.0001
X3*X3	1	8.009129	8.009129	303.77	0.0001
Erro	120	3.163862	0.026366		
Total Corrigido	124	412.198689			

Y_3

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	4	123.330971	30.832743	123.87	0.0001
X1	1	6.5735049	6.5735049	26.41	0.0001
X3	1	25.4495758	25.4495758	102.24	0.0001
X1*X1	1	8.2351394	8.2351394	33.08	0.0001
X3*X3	1	83.0727508	83.0727508	333.73	0.0001
Erro	120	29.870638	0.248922		
Total Corrigido	124	153.201609			

Tabela 2. Tabelas de Análise de Variância para o desvio padrão de Y_1 e Y_3 .

Y_1

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	3	15.9259470	5.3086490	22.95	0.0001
X2	1	8.98368631	8.98368631	38.84	0.0001
X3	1	1.66926653	1.66926653	7.22	0.0082
X2*X3	1	5.27299419	5.27299419	22.80	0.0001
Erro	121	27.9858913	0.2312884		
Total Corrigido	124	43.9118383			

Y_3

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	2	7.77170649	3.88585325	30.18	0.0001
X1	1	6.09405310	6.09405310	47.32	0.0001
X2	1	1.67765339	1.67765339	13.03	0.0004
Erro	122	15.71025873	0.12877261		
Total Corrigido	124	23.48196522			

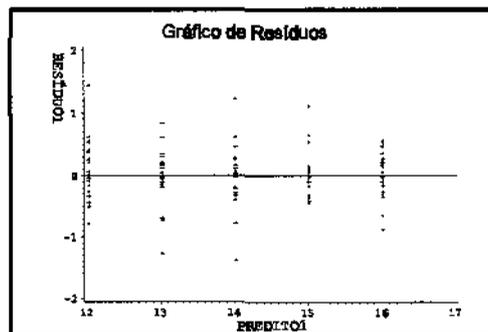
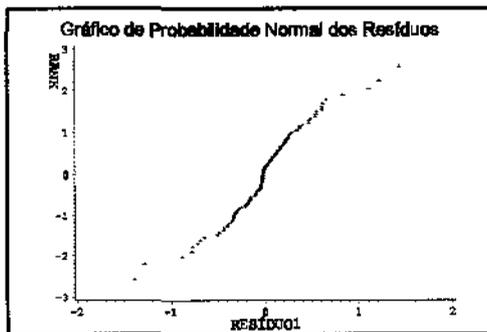


Figura 1. Gráficos de Resíduos para a média de Y_1 .

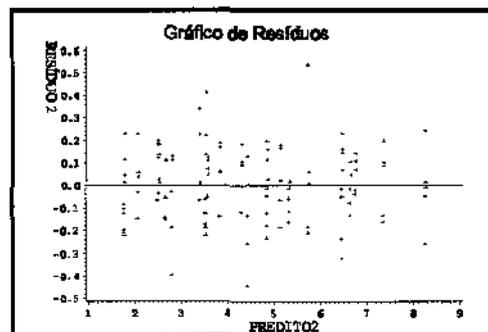
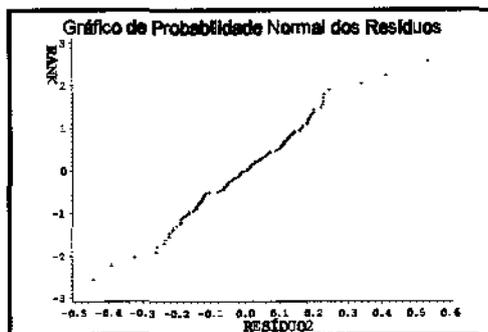


Figura 2. Gráficos de Resíduos para a média de Y_2 .

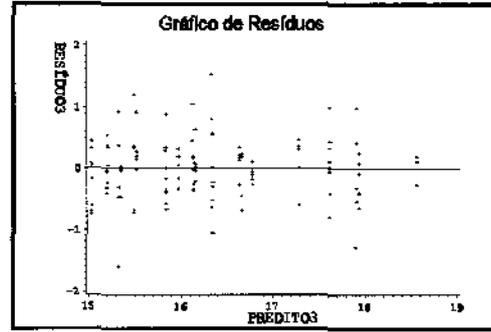
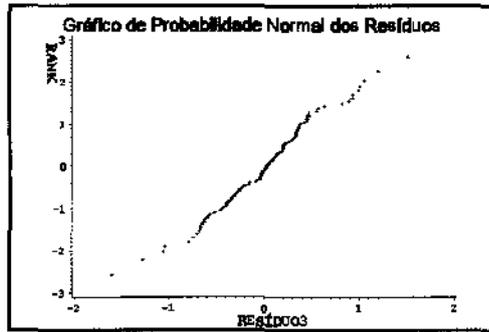


Figura 3. Gráficos de Resíduos para a média de Y_3 .

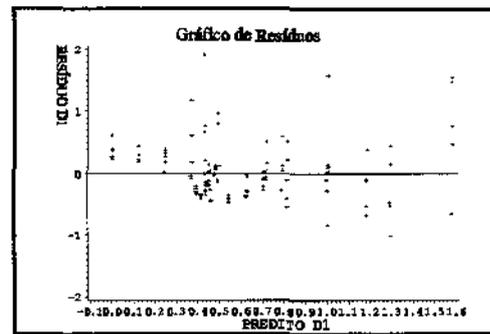
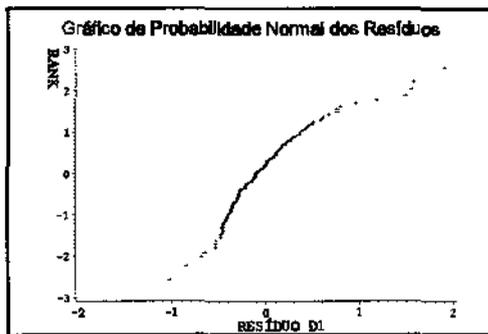


Figura 4. Gráficos de Resíduos para o desvio padrão de Y_1 .

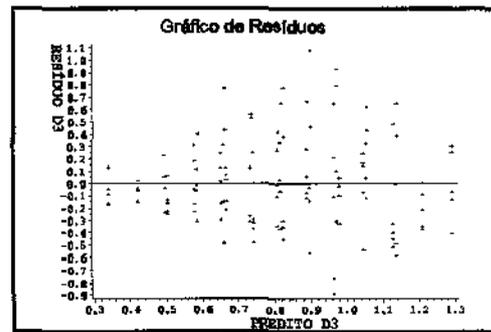
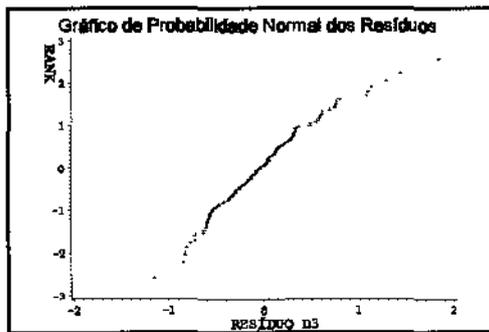


Figura 5. Gráficos de Resíduos para o desvio padrão de Y_3 .

Para este método fixamos os pesos como iguais a 1, ou seja, consideramos as respostas de igual importância. Com o objetivo de entender melhor o comportamento do coeficiente de interação e sua influência no cálculo da função perda esperada, fixamos os valores: 1 e 0. Estes valores serão sempre utilizados quando da aplicação deste método.

A perda esperada foi calculada - de acordo com a função apresentada na seção 3.4.3.4 - para os 125 tratamentos para os dois coeficientes de interação como mostrado no Apêndice A1. As menores perdas ocorreram para os tratamentos:

Tabela 3. Menores estimativas para a perda.

Coeficiente de interação	E(L)	X ₁	X ₂	X ₃
1	7.9534	-2	-1	0
0	4.8971	-1	-1	0

Modelos de regressão da perda em função dos fatores, de acordo com os coeficientes de interação 1 e 0, respectivamente, foram obtidos e estão relacionados abaixo²:

$$\hat{L}_1 = 16.72(1.39) + 6.76(0.5)X_1 - 3.51(0.5)X_3 + 2.52(0.42)X_1^2 + 4.76(0.42)X_3^2 + 2.27(0.35)X_2X_3$$

$$\hat{L}_2 = 8.66(0.51) + 3.27(0.18)X_1 - 2.40(0.18)X_3 + 1.85(0.15)X_1^2 + 2.96(0.15)X_3^2 + 0.89(0.13)X_2X_3$$

As tabelas de Análise de Variância para cada modelo acima são apresentadas na Tabela 4. Os Gráficos de Resíduos são apresentados nas Figuras 6 e 7. Os modelos apresentam R² acima de 78.5% .

Tabela 4. Tabelas de Análise de Variância para a perda esperada de L₁ e L₂.

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	5	27211.7127	5442.3425	86.69	0.0001
X1	1	11407.8269	11407.8269	181.71	0.0001
X3	1	3084.3150	3084.3150	49.13	0.0001
X1*X1	1	2226.7195	2226.7195	35.47	0.0001
X3*X3	1	7914.6025	7914.6025	126.07	0.0001
X3*X2	1	2578.2488	2578.2488	41.07	0.0001
Erro	119	7470.9979	62.7815		
Total Corrigido	124	34682.7106			

² Os valores entre parênteses são os desvios padrões dos coeficientes.

L_2

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	5	8782.41182	1756.48236	209.20	0.0001
X1	1	2679.47329	2679.47329	319.13	0.0001
X3	1	1438.30818	1438.30818	171.31	0.0001
X1*X1	1	1202.39754	1202.39754	143.21	0.0001
X3*X3	1	3066.04456	3066.04456	365.18	0.0001
X3*X2	1	396.18826	396.18826	47.19	0.0001
Erro	119	999.13423	8.39609		
Total Corrigido	124	9781.54605			

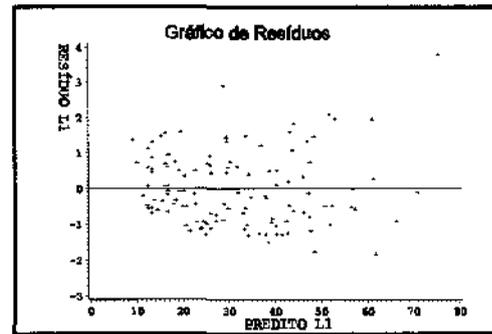
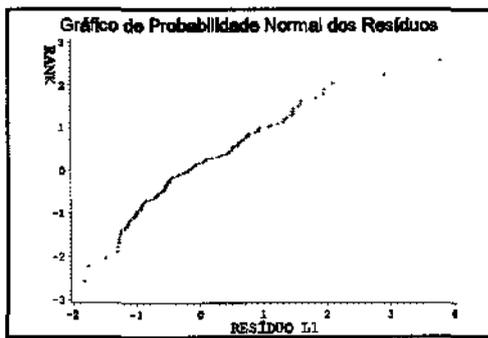


Figura 6. Gráficos de Resíduos para \hat{L}_1 .

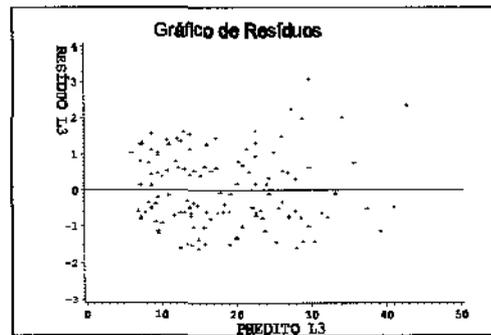
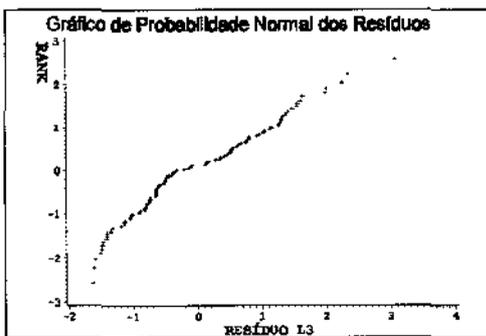


Figura 7. Gráficos de Resíduos para \hat{L}_2 .

Observa-se que a variação na perda esperada, para qualquer dos coeficientes de interação, está associada aos efeitos linear e quadrático de X_1 e X_3 e com a interação entre os fatores X_2 e X_3 .

A Tabela 5 mostra os níveis dos fatores que minimizam as funções perdas na região de

interesse:

Tabela 5. Níveis para otimização do processo.

	$c_{\psi} = 1.0$	$c_{\psi} = 0$
X_1	-1.34	-0.88
X_2	-2.0	-2.0
X_3	0.85	0.71
$min \hat{L}$	8.7830	5.7393

Na Tabela 5 observa-se que, de acordo com o coeficiente de interação utilizado, existe uma diferença no valor dos níveis dos fatores que devem ser ajustados para a otimização do processo. Ao substituir estes níveis ótimos nos modelos de regressão para a média e desvio padrão obtêm-se:

Tabela 6. Estimativas de média e desvio padrão para as respostas de acordo com os níveis ótimos.

(X_1, X_2, X_3)	$(-1.34, -2, .85)$	$(-.88, -2, .71)$
$\hat{\mu}_1$	15.37	14.91
$\hat{\sigma}_1$	0.35	0.34
$\hat{\mu}_2$	6.48	6.52
$\hat{\sigma}_2$	0.29	0.29
$\hat{\mu}_3$	15.59	15.30
$\hat{\sigma}_3$	0.76	0.84

Através da Tabela 6 podemos concluir que utilizando o coeficiente de interação entre as respostas igual a 1 obtêm-se, para este caso, o resultado mais próximo aos valores objetivos.

Para a execução do Método de Ribeiro e Albin todos os resultados foram obtidos através do *software* SAS Release 6.08.

4.1.1.2 Método de Pignatiello

Para este método, supomos a matriz de custo como:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando a função perda - da seção 3.3.2 - obtemos as estimativas mostradas no Apêndice A2.

Ajustou-se um modelo de regressão da perda esperada em função dos fatores, obtendo-se³:

$$\hat{L} = 5,97(.94) + 3,41(.29)X_1 - 2,38(.29)X_3 + 0,87(.21)X_2X_3 \\ + 1,62(.25)X_1^2 + 1,90(.25)X_2^2 + 3,03(.25)X_3^2$$

A tabela de Análise de Variância para o modelo acima encontra-se na Tabela 7 e o Gráfico de Resíduos na Figura 9. O modelo apresenta $R^2 = 80.30\%$. Observa-se que para este método a variação na perda esperada está associada aos efeitos linear e quadrático de X_1 e X_3 , do efeito quadrático de X_2 e da interação entre os fatores X_2 e X_3 .

Tabela 7. Tabela de Análise de Variância para a perda esperada (L).

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	6	10105.6175	1684.2696	80.15	0.0001
X1	1	2902.84671	2902.84671	138.14	0.0001
X3	1	1420.93763	1420.93763	67.62	0.0001
X3*X2	1	380.29831	380.29831	18.10	0.0001
X1*X1	1	918.00117	918.00117	43.68	0.0001
X2*X2	1	1264.57184	1264.57184	60.18	0.0001
X3*X3	1	3218.96183	3218.96183	153.18	0.0001
Erro	118	2479.6725	21.0142		
Total Corrigido	124	12585.2900			

³ Os valores entre parênteses são os desvios padrões dos coeficientes.

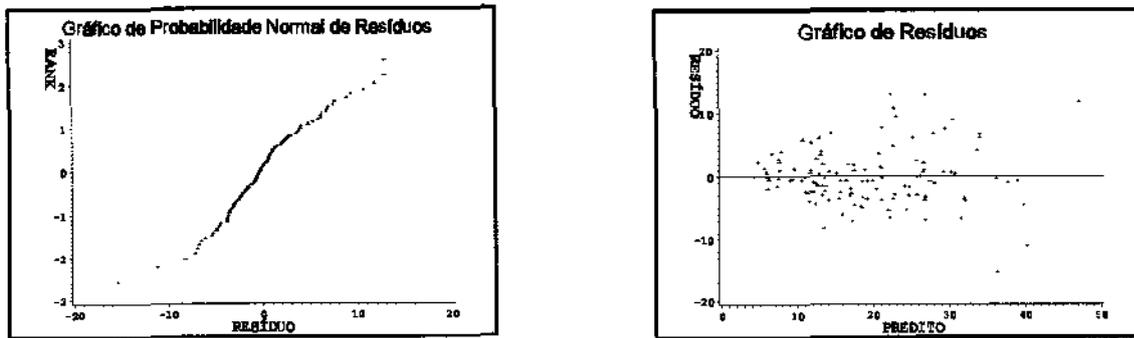


Figura 8. Gráficos de Resíduos para L .

Ao minimizar a função perda dentro da região de interesse obtêm-se os seguintes níveis para a otimização do processo: $X_1 = -1.1$, $X_2 = -0.1$ e $X_3 = 0.4$.

Para aplicação do Método de Pignatiello foi utilizado o *software* SAS Release 6.08.

4.1.2 Segundo Caso

Suponha que estejamos estudando o efeito de dois fatores (X_1, X_2) em quatro variáveis respostas (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4). Os fatores possuem cinco níveis (-2, -1, 0, 1, 2) e foram simuladas duas observações por tratamento. As variáveis respostas são do tipo *maior é melhor*.

Os dados foram gerados através das seguintes funções:

$$Y_1 = 5.26 - .613 X_1 - .478 X_2 - .218 X_1^2 - .307 X_2^2 + .709 X_1 X_2 + e_1$$

onde $e_1 \sim N(0, \sigma_1)$ e $\sigma_1 = .103$

$$Y_2 = 2.2 - .099 X_1 - .18 X_2 - .058 X_1^2 - .035 X_2^2 - .035 X_1 X_2 + e_2$$

onde $e_2 \sim N(0, \sigma_2)$ e $\sigma_2 = .130$

$$Y_3 = 4.28 - .315 X_1 - .396 X_2 - .156 X_1^2 - .479 X_2^2 + .218 X_1 X_2 + e_3$$

onde $e_3 \sim N(0, \sigma_3)$ e $\sigma_3 = .126$

$$Y_4 = 2.45 + .131 X_1 + .073 X_2 + .025 X_1^2 + .028 X_2^2 - .084 X_1 X_2 + e_4$$

onde $e_4 \sim N(0, \sigma_4)$ e $\sigma_4 = .089$

O programa de geração dos dados encontra-se no Apêndice B.

4.1.2.1 Método de Ribeiro e Albin

Estimativas de média, desvio padrão, desvio médio e covariâncias encontram-se no Apêndice B1 para cada tratamento.

Foram ajustados modelos de regressão para a média e desvio padrão para as quatro variáveis respostas como função dos fatores, obtendo-se⁴:

$$\hat{\mu}_1 = 5.24(.03) - .63(.011)X_1 - .48X_2(.011) - .21X_1^2(.009) - .3X_2(.009) + .7X_{12}(.008)$$

$$e \quad \hat{\sigma}_1 = cte = .0906$$

$$\hat{\mu}_2 = 2.24(.035) - .1(.013)X_1 - .16X_2(.013) - .05X_1^2(.011) - .05X_2(.011) - .04X_{12}(.009)$$

$$e \quad \hat{\sigma}_2 = cte = .0921$$

$$\hat{\mu}_3 = 4.26(.034) - .31(.012)X_1 - .39X_2(.012) - .15X_1^2(.01) - .49X_2(.01) + .22X_{12}(.008)$$

$$e \quad \hat{\sigma}_3 = .089(.012) - .014(.006)X_{12}$$

$$\hat{\mu}_4 = 2.45(.017) + .13(.006)X_1 + .07X_2(.006) + .03X_1^2(.005) + .02X_2(.005) - .09X_{12}(.004)$$

$$e \quad \hat{\sigma}_4 = .0656$$

Os modelos de regressão acima conseguem captar todos os termos utilizados para a geração dos dados. Porém, o modelo para $\hat{\sigma}_3$ mostra uma interação significativa ao nível 3.55% entre X_1 e X_2 , a qual não foi utilizada na função de geração. Quanto ao valor das estimativas dos parâmetros, estas se apresentam próximas das funções de geração. As tabelas de Análise de Variância para os modelos de regressão apresentados acima encontram-se nas Tabelas 1 e 2. Os modelos de regressão para a média das respostas possuem R^2 acima de 93.81%. Já o modelo de regressão para o desvio padrão de Y_3 apresenta um $R^2 = 17.84\%$. Os Gráficos de Resíduos encontram-se nas Figuras 1-5. Observe que alguns resíduos apresentam uma grande magnitude em relação aos demais resíduos.

⁴ Os valores entre parêntes são os desvios padrões dos coeficientes.

Tabela 1. Tabelas de Análise de Variância para a média de Y_1 , Y_2 , Y_3 e Y_4 .

Y_1

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	5	90.0012428	18.0002486	2878.90	0.0001
X1	1	20.1227419	20.1227419	3218.36	0.0001
X2	1	11.7572273	11.7572273	1880.41	0.0001
X1*X1	1	3.0978624	3.0978624	495.46	0.0001
X2*X2	1	6.2403094	6.2403094	998.05	0.0001
X1*X2	1	48.7831018	48.7831018	7802.19	0.0001
Erro	19	0.1187972	0.0062525		
Total Corrigido	24	90.1200400			

Y_2

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	5	2.34200460	0.46840092	57.55	0.0001
X1	1	0.47358454	0.47358454	58.19	0.0001
X2	1	1.31573161	1.31573161	161.66	0.0001
X1*X1	1	0.20509492	0.20509492	25.20	0.0001
X2*X2	1	0.17841702	0.17841702	21.92	0.0002
X1*X2	1	0.16917652	0.16917652	20.79	0.0002
Erro	19	0.15463730	0.00813881		
Total Corrigido	24	2.49664190			

Y_3

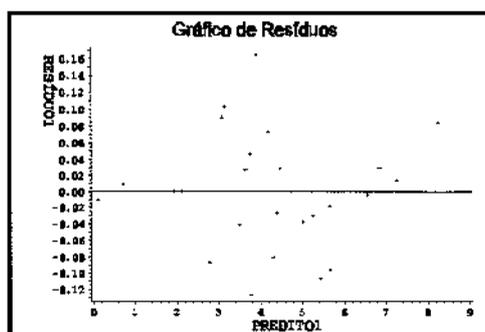
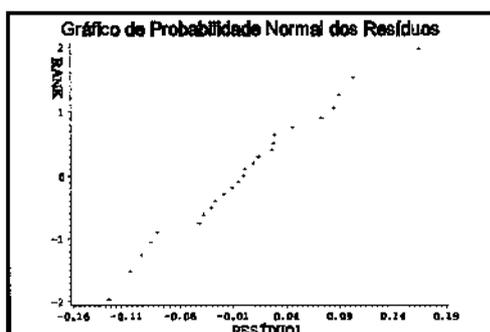
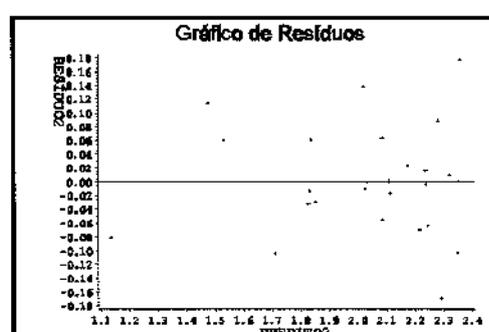
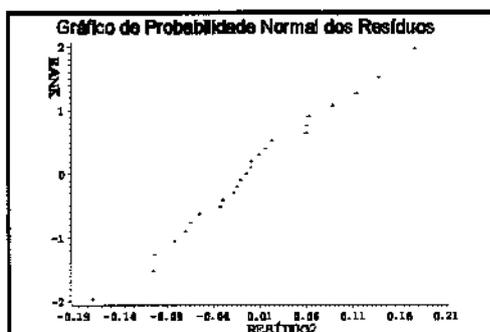
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	5	35.2542364	7.0508473	917.45	0.0001
X1	1	4.7719867	4.7719867	620.93	0.0001
X2	1	7.6318083	7.6318083	993.05	0.0001
X1*X1	1	1.4734796	1.4734796	191.73	0.0001
X2*X2	1	16.5569286	16.5569286	2154.38	0.0001
X1*X2	1	4.8200333	4.8200333	627.18	0.0001
Erro	19	0.1460194	0.0076852		
Total Corrigido	24	35.4002557			

Y_4

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	5	1.89063734	0.37812747	197.22	0.0001
X1	1	0.82136573	0.82136573	428.40	0.0001
X2	1	0.25456994	0.25456994	132.78	0.0001
X1*X1	1	0.05216423	0.05216423	27.21	0.0001
X2*X2	1	0.03755125	0.03755125	19.59	0.0003
X1*X2	1	0.72498620	0.72498620	378.13	0.0001
Erro	19	0.03642844	0.00191729		
Total Corrigido	24	1.92706579			

Tabela 2. Tabela de Análise de Variância para o desvio padrão de Y_3 . Y_3

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo (devido a X1*X2)	1	0.01944216	0.01944216	4.99	0.0355
Erro	23	0.08955700	0.00389378		
Total Corrigido	24	0.10899917			

Figura 1. Gráficos de Resíduos para a média de Y_1 .Figura 2. Gráficos de Resíduos para a média de Y_2 .

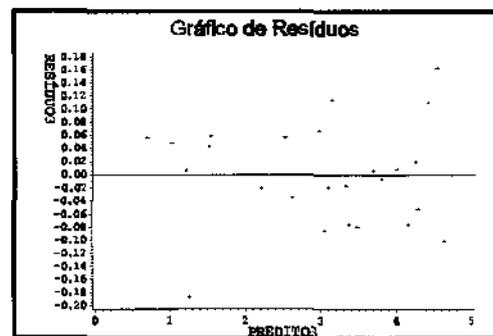
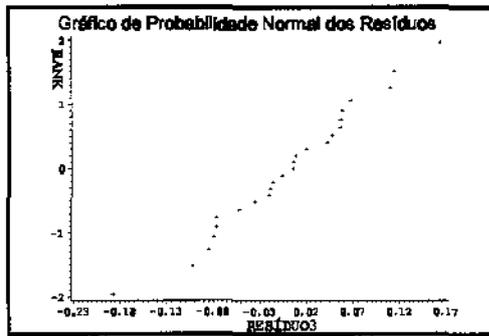


Figura 3. Gráficos de Resíduos para a média de Y_3 .

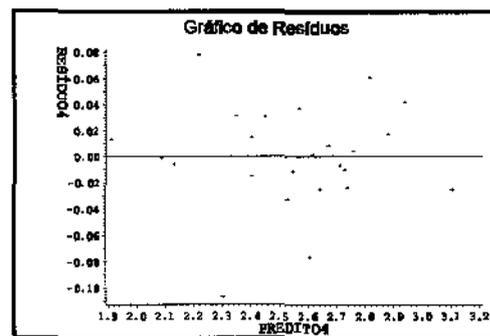
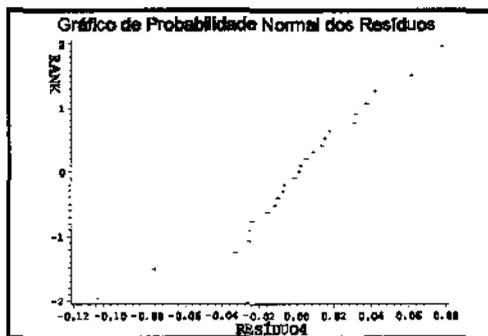


Figura 4. Gráficos de Resíduos para a média de Y_4 .

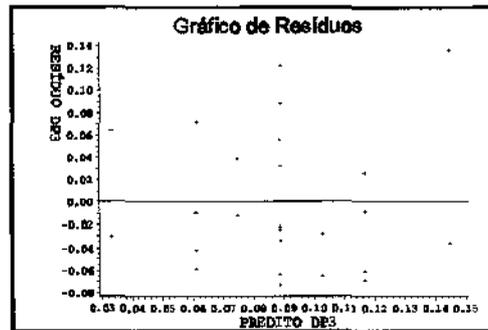
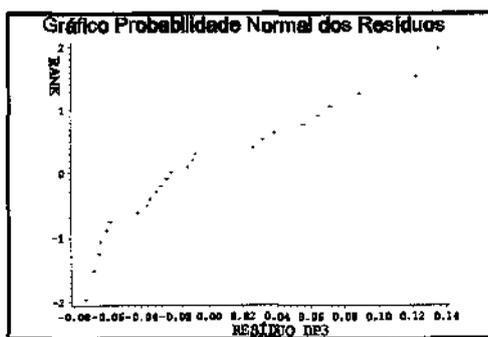


Figura 5. Gráficos de Resíduos para o desvio padrão de Y_3 .

Para este método também consideramos as respostas de igual importância e fixamos os pesos para cada variável resposta como sendo iguais a 1. Como as quatro variáveis respostas são do tipo *maior é melhor*, o modelo de regressão para a média foi maximizado na região de interesse

fornecendo os valores 8.24, 2.37, 4.61 e 2.59 para Y_1 , Y_2 , Y_3 e Y_4 , respectivamente.

A perda esperada foi calculada para os 25 tratamentos de acordo com os coeficientes de interação (1 e 0) - ver Apêndice B1. Neste caso pode-se observar que, o mesmo tratamento possui a menor perda esperada para qualquer dos coeficientes de interação, como mostrado na Tabela 3 abaixo:

Tabela 3. Menores estimativas para a perda.

Coeficiente de interação	E(L)	X_1	X_2
1	1.616	-2	-2
0	0.8838	-2	-2

Utilizando as estimativas da função perda esperada, foram ajustados modelos de regressão da perda em função dos fatores, de acordo com os coeficientes de interação 0 e 1, obtendo-se:

$$\hat{L}_1 = 4.90(2.55) + 7.68(.92)X_1 + 7.442(.92)X_2 + 6.02(.77)X_1^2 + 9.62(.77)X_2^2 - 9.41(.65)X_1X_2$$

$$\hat{L}_2 = 5.07(1.63) + 4.98(.59)X_1 + 4.16(.59)X_2 + 3.84(.5)X_1^2 + 5.65(.5)X_2^2 - 6.76(.41)X_1X_2$$

As tabelas de Análise de Variância para cada modelo acima são apresentados na Tabela 4. De modo geral, os modelos de regressão da perda apresentam R^2 acima de 96.73%. Observe que a variação na perda esperada é explicada pelos mesmos fatores que afetam a média das características. Os Gráficos Resíduos são apresentados nas Figuras 6 e 7. Nestes gráficos pode-se observar que existem problemas com relação a suposição de normalidade dos erros e variância constante.

Tabela 4. Tabela de Análise de Variância para a perda esperada L_1 e L_2 .

L_1					
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	5	23584.6968	4716.9394	112.33	0.0001
X1	1	2946.10356	2946.10356	70.16	0.0001
X2	1	2770.00849	2770.00849	65.97	0.0001
X1*X1	1	2534.04108	2534.04108	60.35	0.0001
X2*X2	1	6475.09548	6475.09548	154.21	0.0001
X1*X2	1	8859.44820	8859.44820	210.99	0.0001
Erro	19	797.8096	41.9900		
Total Corrigido	24	24382.5064			

L_2

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	5	9941.31771	1988.26354	115.46	0.0001
X1	1	1238.45401	1238.45401	71.92	0.0001
X2	1	863.51272	863.51272	50.15	0.0001
X1*X1	1	1030.42638	1030.42638	59.84	0.0001
X2*X2	1	2237.15765	2237.15765	129.92	0.0001
X1*X2	1	4571.76696	4571.76696	265.49	0.0001
Erro	19	327.17785	17.21989		
Total Corrigido		24	10268.49556		

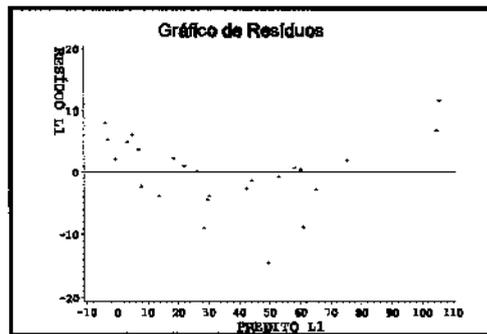
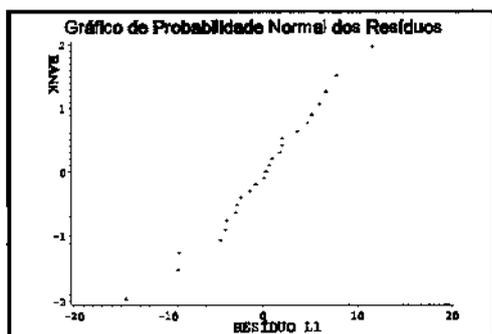


Figura 6. Gráficos de Resíduos para \hat{L}_1 .

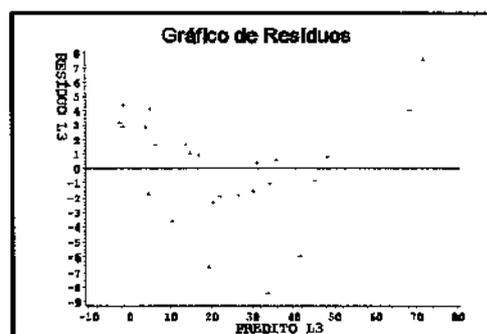
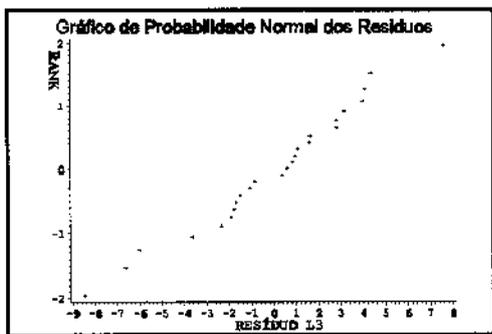


Figura 7. Gráficos de Resíduos para \hat{L}_2 .

A Tabela 5 mostra os níveis dos fatores que minimizam as funções perda na região de interesse:

Tabela 5. Níveis para otimização do processo.

	$c_{\hat{y}} = 1.0$	$c_{\hat{y}} = 0$
X_1	-1.52	-1
X_2	-1.13	-0.97
$min \hat{L}$	-5.1628	-1.3369

Na Tabela 5 observa-se que, de acordo com o coeficiente de interação utilizado, existe uma diferença nos valores dos níveis dos fatores que devem ser ajustados para a otimização do processo. Substituindo estes níveis ótimos nos modelos de regressão para a média e desvio padrão obtêm-se:

Tabela 6. Estimativas de média e desvio padrão para as respostas de acordo com os níveis ótimos.

(X_1, X_2)	(-1.52, -1.13)	(-1, -0.97)
$\hat{\mu}_1$	7.09	4.24
$\hat{\sigma}_1$	0.09	0.09
$\hat{\mu}_2$	2.31	2.11
$\hat{\sigma}_2$	0.09	0.09
$\hat{\mu}_3$	4.59	3.37
$\hat{\sigma}_3$	0.06	0.10
$\hat{\mu}_4$	2.00	2.47
$\hat{\sigma}_4$	0.07	0.07

Através da Tabela 6 pode-se observar que utilizando o coeficiente de interação entre as respostas igual a 1, obtêm-se os melhores resultados.

4.1.2.2 Método de Khuri e Conlon

O primeiro passo para aplicação do Método de Khuri e Conlon consistiu em calcular a média de acordo com cada tratamento para cada variável resposta. Foram ajustados modelos de regressão

para cada resposta em função dos fatores. Estas informações, juntamente com as tabelas de Análise de Variância e Gráficos de Resíduos, são as mesmas do Método de Ribeiro e Albin aplicado anteriormente.

Para cada um destes modelos, máximos individuais foram localizados fornecendo os valores apresentados na Tabela 7. Além disso, retângulos de confiança, D_{ζ} , - determinados por (16) e (17) seção 3.1.5 - correspondendo a um coeficiente de confiança de no mínimo 95%, também foram calculados e encontram-se abaixo:

Tabela 7. Máximos individuais e região D_{ζ}

Ótimos Individuais		Localização dos Pontos		D_{ζ}	
		X_1	X_2	γ_1	γ_2
\hat{y}_1	8.2404	-2.00	-2.00	8.0907	8.3901
\hat{y}_2	2.3721	-0.34	-1.47	2.2797	2.4645
\hat{y}_3	4.6106	-1.00	-0.63	4.5256	4.6946
\hat{y}_4	2.588	1.00	-1.00	2.5458	2.6302

A localização da menor distância juntamente com as estimativas para $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, $\hat{\mu}_3$ e $\hat{\mu}_4$ encontram-se na Tabela 8 abaixo:

Tabela 8. Máximos simultâneos.

Menor distância	Localização		Estimativas			
	X_1	X_2	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{\mu}_3$	$\hat{\mu}_4$
32.1973	-1.9	-2	8.1193	2.1923	3.9888	1.7347

Para o cálculo da menor distância, d_0 , utilizamos o *software* MATLAB versão 4.0.

Após a utilização dos métodos de Ribeiro e Albin e Khuri e Conlon ao Segundo Caso podemos concluir que cada método obtêm diferentes resultados. Apesar do Método de Khuri e

Conlon obter uma estimativa mais próxima ao ótimo individual em relação a primeira resposta, podemos observar que a segunda, terceira e quarta variável obtiveram melhores resultados com a aplicação do Método de Ribeiro e Albin.

4.1.3 Terceiro Caso⁵

Em um estudo sobre a fabricação de tintas, o fabricante estava interessado em:

1. Obter um produto com *cor* e *brilho* de objetivos fixos 20 e 26 unidades, respectivamente, e maximizar a *resistência*.
2. Compreender o modo no qual as três respostas são afetadas pelos fatores. Tal compreensão permitiria que futuras modificações fossem feitas no processo, se necessário.
3. Compreender que tipo de mudanças poderiam ser feitas nos fatores para poder compensar possíveis falhas de especificações.

Por hipótese seis fatores poderiam afetar as respostas (*resistência, cor e brilho*). São eles: z_1 = índice de polisulfídrico; z_2 = razão de refluxo; z_3 = moles de polisulfídrico; z_4 = tempo de reação; z_5 = quantidade de solvente; e, z_6 = temperatura de reação.

A Tabela 1 apresenta os fatores em seus níveis originais e codificados:

Tabela 1. Variáveis codificadas

Variáveis	z_i	Níveis de x_i		x_i em termos de z_i
		-1	1	
Índice de polisulfídrico	z_1	6	7	$x_1 = (z_1 - 6.5)/0.5$
Razão de refluxo	z_2	150	170	$x_2 = (z_2 - 160)/10$
Moles de polisulfídrico	z_3	1.8	2.4	$x_3 = (z_3 - 2.1)/0.3$
Tempo (min)	z_4	24	36	$x_4 = (z_4 - 30)/6$
Solvente (cm ³)	z_5	30	42	$x_5 = (z_5 - 36)/6$
Temperatura (°C)	z_6	120	130	$x_6 = (z_6 - 125)/5$

⁵ Dados retirados do livro *Empirical Model-Building an Response Surfaces* de George Box e Normam Draper (1987).

Um fatorial 2^6 completo foi executado. Os resultados destas 64 rodadas, as quais foram executadas em ordem aleatória, são mostradas no Apêndice C.

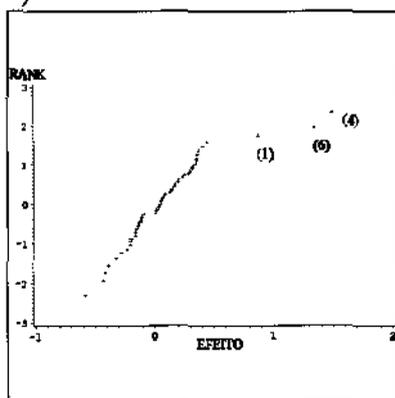
Uma análise preliminar consistiu em calcular os efeitos fatoriais - veja Tabela 2 - e mostrá-los através do Gráfico de Probabilidade Normal - Figura 1. Desta análise concluiu-se que os efeitos principais de X_1 , X_4 e X_6 , isto é, índice de polisulfídrico, tempo de reação e temperatura de reação, respectivamente, são os mais significativos.

Tabela 2. Estimativas dos efeitos em ordem crescente para resistência, cor e brilho.

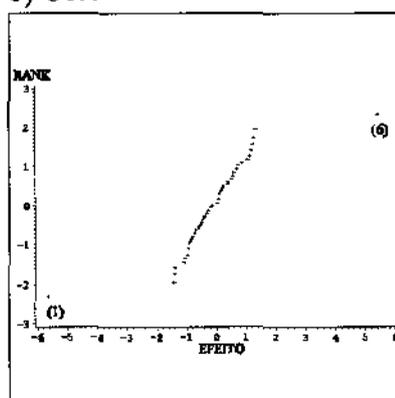
Resistência, y_1		Cor, y_2		Brilho, y_3	
Efeito	Estimativa	Efeito	Estimativa	Efeito	Estimativa
1245	-0.57969	1	-5.64063	6	-4.43750
24	-0.42969	2456	-1.42188	12346	-1.71875
16	-0.41094	135	-1.39063	234	-1.59375
1346	-0.38281	2	-1.35938	123456	-1.40625
123	-0.32656	256	-1.10938	56	-1.25000
1356	-0.32656	1236	-1.07813	4	-1.18750
146	-0.27969	1245	-0.98438	1245	-1.18750
1456	-0.23594	23	-0.95313	1456	-1.18750
5	-0.20781	25	-0.95313	2346	-1.12500
15	-0.20781	36	-0.92188	134	-0.90625
2346	-0.20469	14	-0.89063	2456	-0.81250
234	-0.20156	146	-0.85938	346	-0.78125
25	-0.16719	2345	-0.79688	235	-0.75000
245	-0.16719	1246	-0.73438	12356	-0.56250
145	-0.16406	1356	-0.73438	3	-0.46875
45	-0.15781	124	-0.70313	125	-0.46875
1246	-0.15781	123	-0.60938	1235	-0.46875
3456	-0.13906	26	-0.57813	136	-0.46875
125	-0.13594	126	-0.54688	46	-0.46875
126	-0.12656	245	-0.51563	3456	-0.46875
2345	-0.12031	15	-0.48438	1234	-0.43750
356	-0.11406	346	-0.48438	5	-0.40625
1234	-0.10781	123456	-0.42188	2345	-0.40625
36	-0.10781	34	-0.39063	236	-0.34375
26	-0.08906	1256	-0.39063	356	-0.31250
46	0.00781	12456	-0.32813	12345	-0.25000
1256	0.01094	156	-0.26563	1236	-0.18750
2456	0.01719	1456	-0.26563	23456	-0.18750
135	0.03281	4	-0.17188	13456	-0.12500
35	0.03906	12356	-0.17188	123	0.03125
3	0.05156	1346	-0.14063	1345	0.03125
156	0.05156	134	0.01563	12456	0.03125
136	0.05469	145	0.01563	36	0.06250
235	0.06094	24	0.07813	24	0.09375
13	0.07031	125	0.07813	256	0.09375
23456	0.07031	235	0.07813	23	0.12500
14	0.07344	13456	0.07813	1	0.18750

346	0.08594	246	0.10938	345	0.18750
56	0.13281	356	0.10938	14	0.21875
1236	0.14531	1234	0.14063	245	0.21875
246	0.14844	1345	0.17188	2356	0.28125
1345	0.17031	56	0.20313	124	0.31250
123456	0.17031	2356	0.23438	25	0.31250
236	0.17656	12	0.35938	1256	0.31250
2356	0.19531	35	0.39063	13	0.37500
34	0.20156	16	0.39063	1346	0.43750
134	0.20156	236	0.51563	12	0.46875
12456	0.23594	45	0.54688	16	0.46875
12356	0.25156	12346	0.54688	34	0.50000
256	0.28594	345	0.57813	135	0.50000
23	0.29844	5	0.67188	26	0.53125
456	0.31406	3456	0.67188	45	0.56250
1235	0.32344	456	0.70313	145	0.59375
12345	0.34844	23456	0.85938	1246	0.65625
2	0.35156	3	0.95313	456	0.65625
13456	0.35469	234	1.04688	2	0.75000
345	0.35781	12345	1.10938	15	0.75000
12346	0.37031	136	1.17188	156	0.78125
124	0.40781	46	1.17188	246	0.81250
12	0.44531	1235	1.23438	126	0.87500
1	0.87344	2346	1.26563	146	0.93750
6	1.34531	13	1.32813	1356	1.40625
4	1.49219	6	5.42188	35	1.53125

a) Resistência.



b) Cor.



c) Brilho.

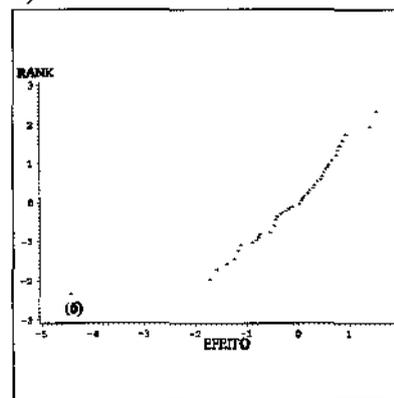


Figura 1. Gráficos de Probabilidade Normal dos Efeitos para a) Resistência, b) Cor e c) Brilho.

Com base nestes resultados, o fatorial 2^6 foi projetado em um fatorial 2^3 de X_1 , X_4 e X_6 replicado (replicação não genuína) oito vezes e analisado.

4.1.3.1 Método de Ribeiro e Albin

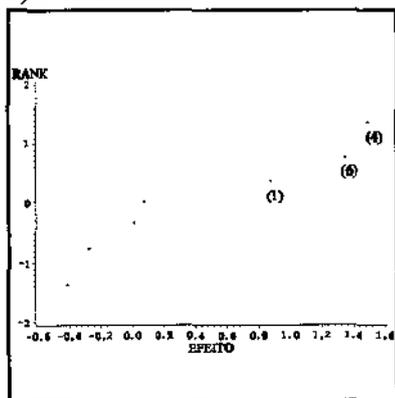
Estimativas de média, desvio padrão, desvio médio e covariâncias encontram-se no Apêndice C.

Para ajustar um modelo de regressão para a média e para o desvio padrão, estimativas dos efeitos foram calculadas - veja Tabelas 3 e 4 - e são mostradas através do Gráfico de Probabilidade Normal dos Efeitos - Figuras 2 e 3.

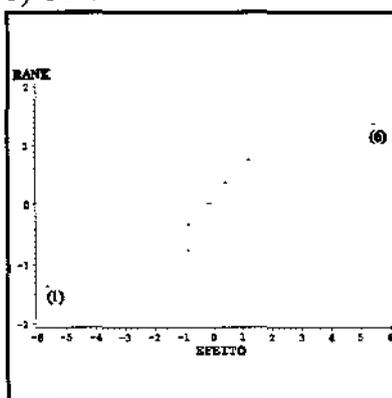
Tabela 3. Estimativas dos efeitos para média de resistência, cor e brilho.

Resistência, \bar{Y}_1		Cor, \bar{Y}_2		Brilho, \bar{Y}_3	
Efeito	Estimativa	Efeito	Estimativa	Efeito	Estimativa
1	0.87343750	1	-5.64062500	1	0.18750000
4	1.49218750	4	-0.17187500	4	-1.18750000
14	0.07343750	14	-0.89062500	14	0.21875000
6	1.34531250	6	5.42187500	6	-4.43750000
16	-0.41093750	16	0.39062500	16	0.46875000
46	0.00781250	46	1.17187500	46	-0.46875000
146	-0.27968750	146	-0.85937500	146	0.93750000

a) Resistência.



b) Cor.



c) Brilho.

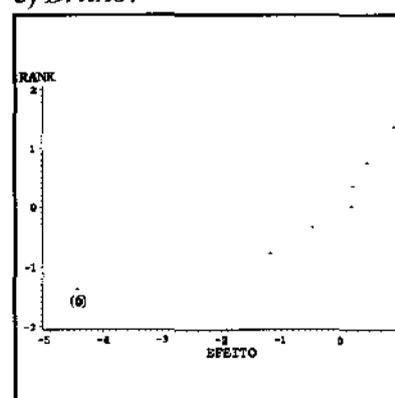
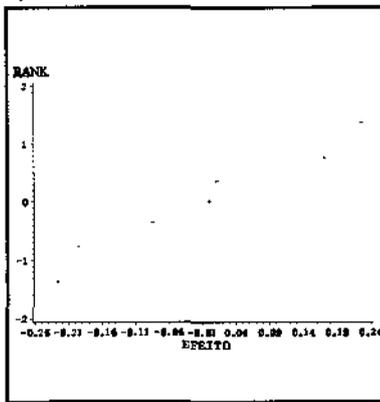


Figura 2. Gráficos Normal dos Efeitos para a média de: a) Resistência, b) Cor e c) Brilho.

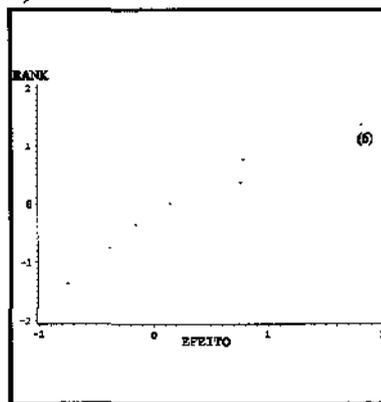
Tabela 4. Estimativas dos efeitos para o desvio padrão de *resistência, cor e brilho.*

Resistência, S_1		Cor, S_2		Brilho, S_3	
Efeito	Estimativa	Efeito	Estimativa	Efeito	Estimativa
1	0.009660047	1	-0.758325671	1	0.190170867
4	0.170233332	4	0.753380439	4	0.142602195
14	0.226664924	14	-0.393779973	14	0.868078933
6	-0.196895046	6	1.811028633	6	0.649508671
16	-0.000730142	16	0.777922299	16	1.684949029
46	-0.228255617	46	0.137575063	46	-0.160686971
146	-0.084834744	146	-0.165165018	146	0.426742548

a) *Resistência.*



b) *Cor.*



c) *Brilho.*

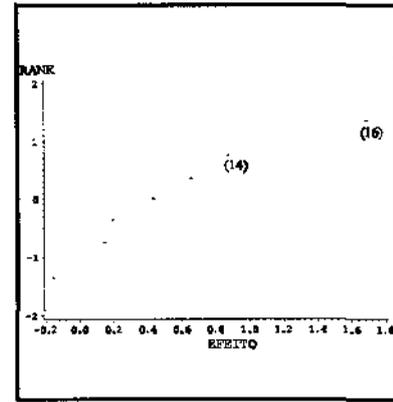


Figura 3. Gráfico Normal dos Efeitos para o desvio padrão de: a) *Resistência*, b) *Cor* e c) *Brilho*.

Desta forma, ajustaram-se modelos de regressão para a média e desvio padrão para cada resposta, os quais são dados por⁶:

Resistência: $\hat{\mu}_1 = 11.12 (.25) + .87 (.25)X_1 + 1.49 (.25)X_4 + 1.35 (.25)X_6$

$$\hat{\sigma}_1 = cte = 1.85$$

Cor: $\hat{\mu}_2 = 16.95 (.79) - 5.64 (.79)X_1 + 5.42 (.79)X_6$

$$\hat{\sigma}_2 = 5.38 (.60) + 1.81 (.60)X_6$$

Brilho: $\hat{\mu}_3 = 28.28 (.68) - 4.44 (.68)X_6$

$$\hat{\sigma}_3 = 5.36 (.37) + 1.68 (.37)X_1X_6 + .87 (.37)X_1X_4$$

⁶ Os números em parênteses são os desvios padrões dos coeficientes.

As tabelas de Análise de Variância para os modelos ajustados acima encontram-se nas Tabelas 5 e 6. Os Gráficos de Resíduos são apresentados nas Figuras 4-8. Estes gráficos não parecem indicar qualquer violação nas suposições básicas do modelo.

Para a *Resistência*, o modelo de regressão para a média apresenta $R^2 = 95\%$. Observe na Tabela 5 que este modelo é significativo ao nível 0.46%, indicando que a variação na média deve ser bem explicada pelos efeitos linear dos fatores índice de polisulfídrico (X_1), tempo de reação (X_4) e temperatura de reação (X_6). Já o desvio padrão não parece estar associado a qualquer dos fatores e apresenta-se constante.

Para a *Cor*, o modelo de regressão para a média apresenta $R^2 = 95.20\%$. Olhando a Tabela 5, observamos que este modelo é significativo ao nível 0.05% e que a variação na média parece estar associada com os efeitos linear de índice de polisulfídrico (X_1) e temperatura de reação (X_6). Observando a Tabela 6, vemos que a temperatura de reação (X_6) afeta de modo significativo (1.91%) o desvio padrão. O modelo ajustado para o desvio padrão apresenta $R^2 = 62.72\%$.

Para o *Brilho*, o modelo de regressão para a média é significativo ao nível 0.06% e sua variação é devida apenas a temperatura de reação (X_6) - ver Tabela 5. Este modelo apresenta $R^2 = 87.50\%$. Para o desvio padrão o $R^2 = 83.96\%$ - ver Tabela 6. Diferente das outras respostas, a variação do desvio padrão está associada com os efeitos de interação entre índice de polisulfídrico (X_1) com tempo de reação (X_4) e temperatura de reação (X_6).

Tabela 5. Tabelas de Análise de Variância para a média de *resistência*, *cor* e *brilho*.

<i>Resistência</i>						
Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F	
Modelo	3	38.3950586	12.7983529	25.34	0.0046	
X1	1	6.1031445	6.1031445	12.08	0.0254	
X4	1	17.8129883	17.8129883	35.27	0.0040	
X6	1	14.4789258	14.4789258	28.67	0.0059	
Erro	4	2.0203906	0.5050977			
Total Corrigido	7	40.4154492				

Cor

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	2	489.707031	244.853516	49.57	0.0005
X1	1	254.533203	254.533203	51.53	0.0008
X6	1	235.173828	235.173828	47.61	0.0010
Erro	5	24.697266	4.939453		
Total Corrigido	7	514.404297			

Brilho

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo (devido a X6)	1	157.531250	157.531250	42.02	0.0006
Erro	6	22.492188	3.748698		
Total Corrigido	7	180.023438			

Tabela 6. Tabelas de Análise de Variância para o desvio padrão de *cor* e *brilho*.*Cor*

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo (devido a X6)	1	26.2385977	26.2385977	10.10	0.0191
Erro	6	15.5925765	2.5987627		
Total Corrigido	7	41.8311742			

Brilho

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	2	28.7409141	14.3704571	13.09	0.0103
X1*X6	1	22.7124258	22.7124258	20.68	0.0061
X1*X4	1	6.0284883	6.0284883	5.49	0.0661
Erro	5	5.4903309	1.0980662		
Total Corrigido	7	34.2312450			

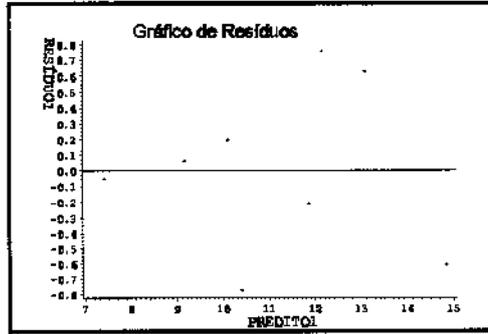
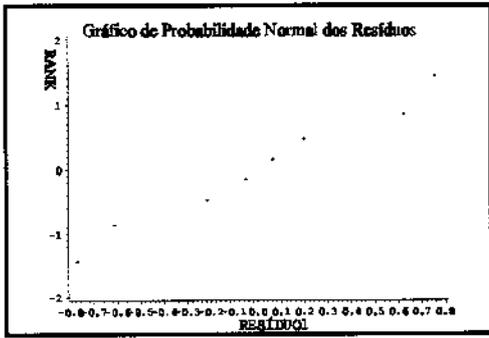


Figura 4. Gráficos de Resíduos para a média de *Resistência*.

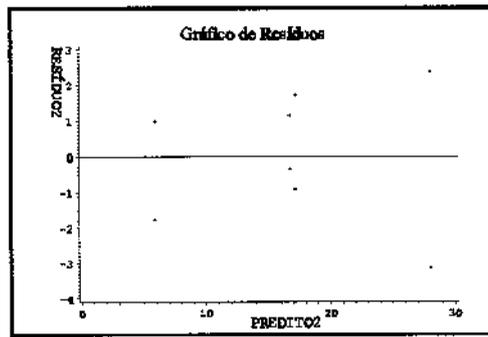
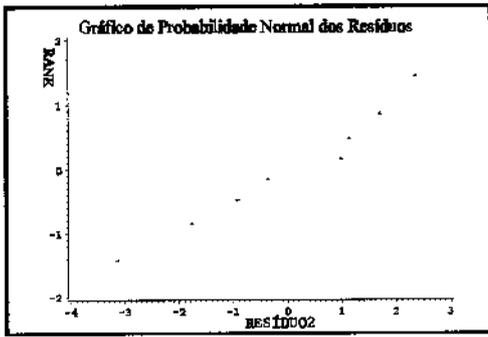


Figura 5. Gráficos de Resíduos para a média de *Cor*.

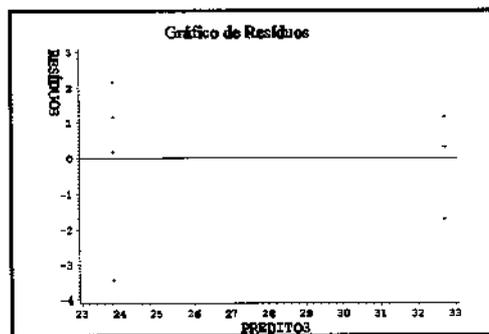
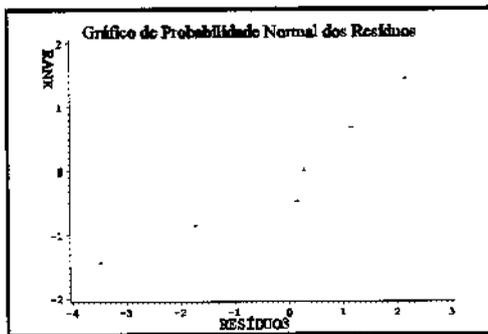


Figura 6. Gráficos de Resíduos para a média de *Brilho*.

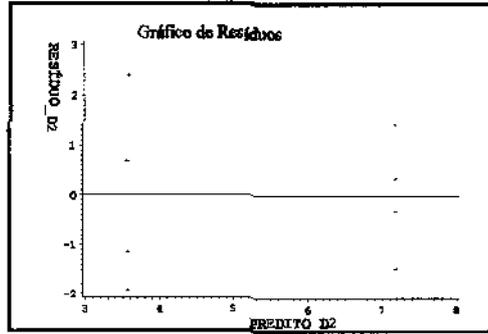
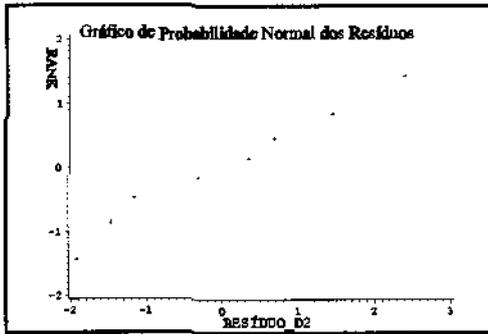


Figura 7. Gráficos de Resíduos para o desvio padrão de *Cor*.

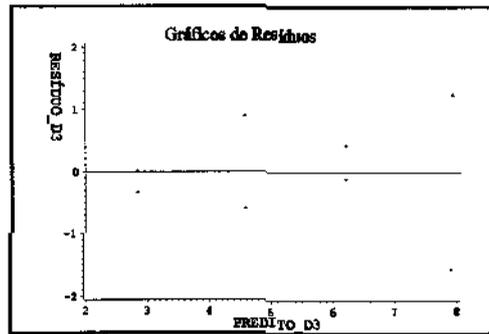
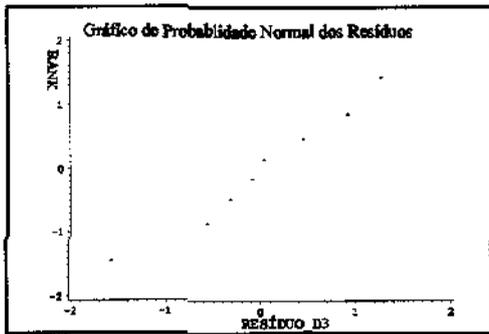


Figura 8. Gráficos de Resíduos para o desvio padrão de *Brilho*.

As respostas *resistência*, *cor* e *brilho* foram consideradas de igual importância. Com isso $w_q = 1$, $q = 1, 2, 3$. Como não tínhamos conhecimento do limite superior da característica *resistência*, o modelo de regressão para a média foi maximizado na região de interesse fornecendo o valor 14.83, o qual foi considerado como valor objetivo.

A perda esperada foi calculada para os 8 tratamentos de acordo com os coeficientes de interação 1 e 0. As estimativas da função perda são apresentadas no Apêndice C. As menores perdas ocorreram para os seguintes tratamentos:

Tabela 7. Menores estimativas para a perda.

Coefficiente de interação	E(L)	X ₁	X ₄	X ₆
1	186.756	1	-1	1
0	117.498	1	-1	1

Para ajustarmos modelos de regressão da perda como função dos fatores, estimativas dos efeitos foram calculadas, os quais se encontram na Tabela 8 e, são mostradas através dos Gráficos de Probabilidade Normal na Figura 9.

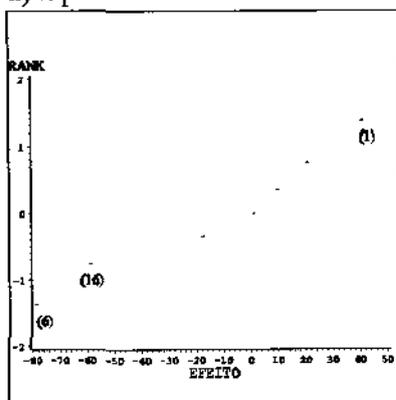
Tabela 8. Estimativas dos efeitos para perda de acordo com os coeficientes de interação.

Efeito	Estimativa(L ₁) ⁽¹⁾	Estimativa(L ₂) ⁽²⁾
1	40.5020	27.8900
4	-17.6581	-11.0748
14	0.8954	11.9190
6	-78.9829	-43.7962
16	-59.1466	-40.7400
46	20.5252	6.9403
146	9.8041	0.0000

⁽¹⁾ Calculada com coeficiente de interação 1.

⁽²⁾ Calculada com coeficiente de interação 0.

a) L₁



c) L₂

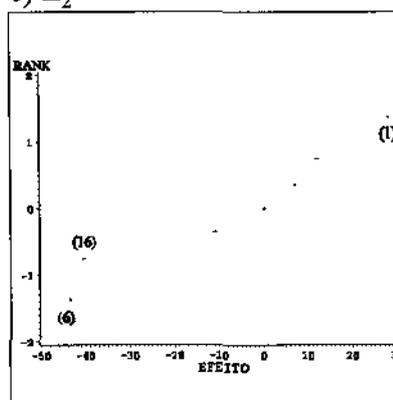


Figura 9. Gráficos de Probabilidade Normal dos Efeitos para a perda esperada.

Ajustou-se modelos de regressão da perda em função dos fatores de acordo com os coeficientes de interação 1 e 0, respectivamente, obtendo-se⁷:

$$\hat{L}_1 = 297.95 (14.4) + 40.50 (14.4)X_1 - 78.98 (14.4)X_6 - 59.15 (14.4)X_1X_6$$

$$\hat{L}_2 = 181.93 (8.84) + 27.89 (8.84)X_1 - 43.80 (8.84)X_6 - 40.74 (8.84)X_1X_6$$

As tabelas de Análise de Variância para cada modelo acima são apresentadas na Tabela 9. Os Gráficos de Resíduos são apresentados nas Figuras 10 e 11.

Tabela 9. Tabelas de Análise de Variância para a perda esperada de L_1 e L_2 .

L₁

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	3	91016.2354	30338.7451	18.28	0.0085
X1	1	13123.2815	13123.2815	7.91	0.0482
X6	1	49906.3784	49906.3784	30.06	0.0054
X1*X6	1	27986.5755	27986.5755	16.86	0.0148
Erro	4	6640.0913	1660.0228		
Total Corrigido	7	97656.3267			

L₂

Fonte	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Valor F	Pr > F
Modelo	3	34845.6914	11615.2305	18.56	0.0082
X1	1	6222.8233	6222.8233	9.94	0.0344
X6	1	15344.8728	15344.8728	24.52	0.0078
X1*X6	1	13277.9952	13277.9952	21.22	0.0100
Erro	4	2503.0608	625.7652		
Total Corrigido	7	37348.7522			

É interessante observar-se que a variação na perda esperada, para qualquer dos dois coeficientes de interação, está associado aos efeitos linear de índice de polisulfídrico (X_1) e temperatura de reação (X_6) e da interação entre estes dois fatores. Todos estes modelos apresentam R^2 acima de 93.20%. Ao minimizar estas funções dentro da região de interesse, os níveis dos fatores encontrados são (ver

⁷ Os números entre parênteses são os desvios padrões dos coeficientes.

Tabela 10):

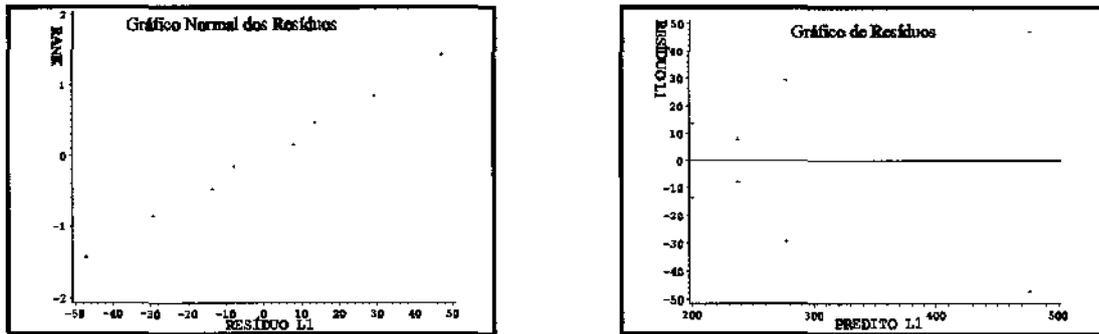


Figura 10. Gráfico de Resíduos para \hat{L}_1 .

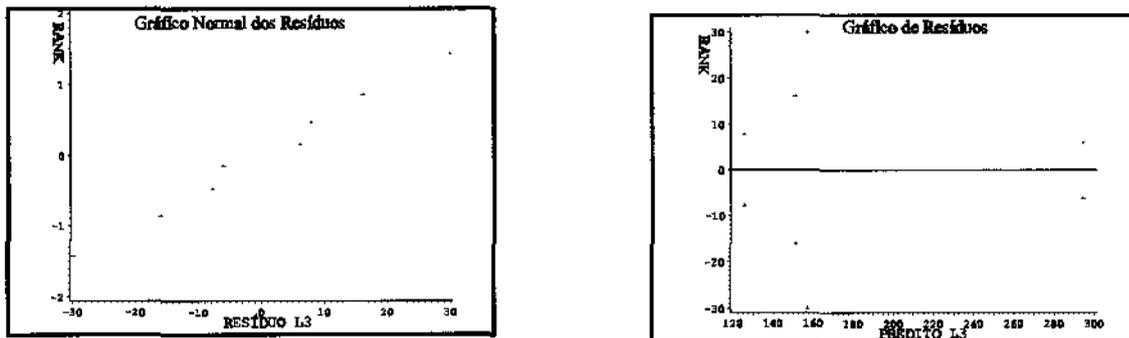


Figura 11. Gráfico de Resíduos para \hat{L}_2 .

Tabela 10. Níveis para otimização do processo.

	$c_{ij}=1$	$c_{ij}=0$
X_1	1	1
X_4	qq.	qq.
X_6	1	1
$\min \hat{L}$	200.322	125.283

Neste caso observa-se que utilizando qualquer dos coeficientes de interação, o conjunto de níveis dos fatores para a otimização das respostas é o mesmo. Ao substituir os valores $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ e $X_3 = 1$ nos modelos de regressão da média e desvio padrão, as estimativas para a resistência, cor e brilho são dadas na Tabela 11 abaixo:

Tabela 11. Estimativas para a média e desvio padrão das respostas com $X_1=1$, $X_2=1$ e $X_3=1$.

	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Resistência	14.96	1.85
Cor	16.73	7.19
Brilho	23.84	7.91

Da qual podemos concluir que a maximização da resposta resistência foi obtida com sucesso. As respostas cor e brilho estão relativamente próximas aos seus valores objetivos porém, com grande variabilidade.

4.2 Avaliações

Vamos agora apresentar um estudo comparativo dos métodos discutidos no capítulo 3. Como dissemos anteriormente, estes métodos se baseiam em reduzir um problema multivariado a um problema univariado através de uma determinada função.

De modo geral, observamos que o tema "Múltiplas Respostas em um Experimento Fatorial" é bem pouco discutido na literatura. Observe, entretanto, que ao realizarmos um experimento fatorial para estudo de um processo/produto são, na maioria das vezes, várias as respostas de interesse.

No capítulo 2 vimos alguns tipos de análises difíceis de serem extendidas para um maior número de respostas, como é o caso de *superposição de curvas de nível*. Já quanto aos métodos apresentados no capítulo 3, esta preocupação não existe. Não há, contudo nenhum método específico para aplicação em um experimento com fatores qualitativos. Em nenhum método observamos qualquer preocupação com a aleatorização do experimento.

Esta seção tem por objetivo apresentar as principais características de cada método, discutindo suas limitações bem como suas vantagens.

Método de Khuri e Conlon

Este método foi o primeiro a ser encontrado na literatura a incorporar duas informações, as quais consideramos importantes: distância ao valor objetivo e variância. Entretanto, a variância calculada é a variância da característica. Para os outros métodos a variância calculada é a variância da característica de acordo com cada tratamento. Se por um lado isto nos traz mais informação, por outro aumenta o custo do experimento pelo número de replicações necessárias. O Método de Khuri e Conlon, é portanto, o único método que não necessita de replicações.

Temos aqui a suposição de que as respostas devem ser representadas por modelos de regressão polinomial de mesmo grau dentro da região de interesse. Em outras palavras, todas as respostas são representadas por um modelo linear em função dos fatores ou por um modelo quadrático, ou por um modelo cúbico e assim por diante.

Os dados devem ser inicialmente checados para possíveis dependências lineares entre as respostas. Se tais dependências existirem então aquelas respostas que são funções lineares das outras são removidas. A necessidade de tal procedimento é consequência da exigência da matriz $\hat{\Sigma}$ ser não-singular.

Com as respostas restantes, estimadores de mínimos quadrados são calculados.

Vimos que o passo seguinte consiste na obtenção de ótimos individuais das respostas estimadas sobre a região experimental. Esta informação será representada pelo vetor ϕ . Vemos, com isso, que podemos maximizar ou minimizar os modelos polinomiais. Em outras palavras, o Método de Khuri e Conlon pode ser utilizado para as características tipo *menor é melhor* e *maior é melhor*. Sabendo qual o conjunto de níveis onde as respostas atingem seus ótimos individuais têm-se a matriz $z(x)$.

Os desvios das respostas aos ótimos individuais serão medidos por meio de uma função distância. Esta função comporta também uma estrutura de variância-covariância. O min-max desta função nos fornecerá o conjunto de níveis ótimos dos fatores. Observe que por ser ρ uma função quadrática positiva definida seu máximo estará em suas bordas, isto é, o máximo de ρ estará no limite da região de confiança dado por D_{ζ} . Em outras palavras, ao calcularmos o intervalo de confiança para ζ_i teremos 2^r possíveis combinações de onde estará o máximo de ρ .

Método de Elsayed e Chen

Este método propõem, inicialmente, uma transformação na variável resposta para separar os fatores que afetam a média, dos fatores que afetam a variabilidade. Entretanto, determinar qual a transformação na variável resposta de modo a se obter esta separação pode ser difícil. Realizada esta transformação, pode-se determinar o conjunto de níveis dos fatores de controle no sentido de minimizar a variabilidade das características e corrigir o valor médio usando os fatores de sinal. Com isso, o valor mínimo da função perda pode ser calculado.

Considerando a função perda de qualidade de Taguchi e desconsiderando os custos do consumidor, Elsayed e Chen (1993) determinam uma medida de qualidade, a qual chamam PerMQ.

Para produtos com múltiplas características e com um único fator de controle é possível separar dois casos, pensando no fator de sinal. No primeiro caso pode acontecer que os fatores que afetam a média das características sejam diferentes para cada resposta. Através da utilização da Medida de Qualidade, a expressão para determinar o nível ótimo dos fatores de controle e ajustar o fator de sinal ao valor objetivo para cada característica de qualidade foi apresentado.

Quando temos um fator de controle e um fator de sinal que é o mesmo para todas as características é necessário determinar a quantidade ótima de ajuste para cada nível do fator de controle. Desta forma, o nível ótimo do fator de sinal será a quantidade inicial (α) mais a quantidade de ajuste ($\Delta\alpha_j^*$) e o nível do fator de controle será o menor Q_j calculado.

As expressões para as características *nominal é melhor* foram deduzidas supondo que a transformação utilizada para separar os fatores é a logarítmica. Portanto, no caso de outras transformações é necessário deduzir as expressões para a Medida de Qualidade (Q_j).

Este método requer um grande conhecimento do processo em estudo, pois são necessárias suposições sobre a função $g_y(\cdot)$ para o caso em que o fator de sinal é o mesmo para as k características do tipo *nominal é melhor*.

Para este método replicações são necessárias para o cálculo da variância para cada tratamento. Dentre os métodos apresentados, o de Elsayed e Chen é o único que não contém termo de covariâncias entre as respostas. Em outras palavras, este método não capta as interrelações entre as respostas.

De modo geral, consideramos esta metodologia difícil de ser entendida e complicada de ser aplicada.

Método de Pignatiello

Este método pode, segundo o autor, ser aplicado apenas em características do tipo *nominal é melhor*. Podemos, entretanto, estendê-lo facilmente para a característica *menor é melhor*. Para isso, basta igualar o objetivo a zero.

É necessário que haja, no mínimo, uma replicação para estimar a matriz de variância-covariância. A variância aqui estimada é a variância para cada tratamento, o que nos traz mais informações sobre a variabilidade das características de acordo com os níveis dos fatores.

Podemos expressar a função perda esperada como:

$$E(L(\mathbf{x})) = \text{tr}(C \Sigma(\mathbf{x})) + (\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\tau})' C (\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\tau}) =$$

$$E(L(\mathbf{x})) = \sum_i c_{ii} [\text{var}(Y_i) + (E(Y_i) - T_i)^2] +$$

$$2 \sum_{i > j} c_{ij} [\text{cov}(Y_i, Y_j) + (E(Y_i) - T_i)(E(Y_j) - T_j)].$$

Logo, a perda esperada é função do produto do custo pela variância mais o desvio quadrático da média em relação ao valor objetivo. Quando a matriz de custos é não diagonal, a perda esperada também é função da covariância mais o produto entre a diferença da média da característica e do valor objetivo para o par de características de qualidade.

Podemos dizer que a função perda proposta por Pignatiello apresenta apenas a propriedade de ser positiva. O fato da matriz de custos ser positiva-definida assegura a positividade de L . Entretanto, não há garantias de que esta função seja simétrica ou consistente. Vamos considerar um exemplo com duas características do tipo *nominal é melhor* com objetivos T_i , $i=1,2$. Vamos supor que a primeira característica esteja a uma distância ϵ do valor objetivo e que a segunda característica esteja a uma distância δ do valor objetivo, isto é $(Y_1 - T_1) = \pm \epsilon$ e $(Y_2 - T_2) = \pm \delta$, respectivamente. Lembrando que os desvios podem ser positivos ou negativos com relação ao valor objetivo. Sendo $c_{ij} > 0$ e considerando apenas os desvios positivos ao objetivo temos $L(\epsilon) = c_{11}\epsilon^2 + c_{22}\delta^2 + 2c_{12}\epsilon\delta$.

Mas, com $(Y_1 - T_1) = -\epsilon$ e $(Y_2 - T_2) = \delta$ então $L(\epsilon) < L(0)$ em alguns casos. Portanto, não temos garantias da consistência de L , isto é, quando a distância ao valor objetivo diminui, a perda cresce. Quanto a simetria considere que $(Y_1 - T_1) = \epsilon$ e $(Y_2 - T_2) = \delta$ então $L_1(\epsilon) = c_{11}\epsilon^2 + c_{22}\delta^2 + 2c_{12}\epsilon\delta$ e seja $(Y_1 - T_1) = -\epsilon$ e $(Y_2 - T_2) = \delta$ então $L_2(\epsilon) = c_{11}\epsilon^2 + c_{22}\delta^2 - 2c_{12}\epsilon\delta$. Logo, $L_1(\epsilon) \neq L_2(\epsilon)$. Em outras palavras, os desvios positivos e negativos com relação ao valor objetivo podem produzir diferentes perdas.

Como a replicação é utilizada para o cálculo da matriz de variância-covariância, teremos apenas uma estimativa da perda para cada tratamento. Com isso, ao se estimar um modelo da perda em função dos fatores não teremos graus de liberdade o suficiente para estimar o erro. Por esta razão, o autor sugere o uso do Gráfico de Probabilidade Normal ou o procedimento de Lenth (1989).

O autor também sugere a utilização dos métodos de superfície de resposta na tentativa de achar o mínimo valor para o modelo da perda esperada. Observe que neste caso, novos experimentos são necessários para seguir a direção na qual a perda, \hat{L} , decresce.

Método de Ribeiro e Albin

Este método trabalha com qualquer tipo de característica seja ela *menor é melhor* com valor objetivo igual a zero, *nominal é melhor* com valor objetivo igual a T e *maior é melhor*. Neste último caso é necessário termos idéia do limite superior da característica, pois ele será o valor objetivo.

Com as estimativas amostrais de média e variância, os autores propõem desenvolver modelos para a média e variância em função dos fatores. Este procedimento nos garante, conseqüentemente, um maior conhecimento do processo sob estudo.

A função perda proposta tem três propriedades importantes:

1. $L^* \geq 0$. A perda é não negativa.
2. L^* é simétrica. A perda associada com desvios positivos ao valor objetivo é igual a perda associada com desvios negativos ao valor objetivo. Em outras palavras, a perda é a mesma se Y_1 está 5 unidades acima ou abaixo do valor objetivo.
3. L^* é consistente para $c_{yy} \geq 0$. A perda não decrescerá se o desvios absolutos ao valor objetivo crescerem.

A função perda comporta também pesos e um coeficiente de interação. Os pesos para as características refletem sua importância e o ajuste para diferenças nas escalas de medidas. Os autores mostram-se contrários a fixação dos pesos como um fator de custo. Segundo eles, a importância relativa para algumas características é proporcional aos custos de retrabalho associado com os desvios ao valor objetivo. Entretanto, para outras características, os custos podem estar associados com dificuldades de montagem, insatisfação dos consumidores, etc. E estes últimos podem ser custos impossíveis de medir. O coeficiente de interação entre as respostas deve ser fixado através de discussões com engenheiros de processo, técnicos, etc. Vimos, durante o estudo de casos, que fixamos dois diferentes coeficientes: 1 e 0. Nos dois primeiros casos estudados, a melhor escolha seria com coeficiente igual a 1. No Terceiro Caso não havia diferença entre a escolha dos coeficientes.

Para se obter um resultado satisfatório quando da aplicação deste método é necessário, segundo os autores, termos, no mínimo, três níveis dos fatores e duas observações por tratamento. Isto poderá, entretanto, elevar em muito o custo do experimento. Observe que no Terceiro Caso tínhamos replicações, porém trabalhávamos com apenas dois níveis. Foi necessário calcular estimativas dos efeitos e construir gráficos de Probabilidade Normal dos Efeitos para, a partir daí, poder modelar a média, a variabilidade e a perda esperada em função dos fatores.

A função perda esperada é função da variância da característica, do desvio quadrático da média da característica ao valor objetivo e para um coeficiente de interação diferente de zero, a perda esperada também é função da covariância e do produto entre os desvios absolutos da característica ao valor objetivo. Vemos que, diferente do Método de Pignatiello, o Método de Ribeiro e Albin trata não da covariância entre duas características mas sim da covariância entre o desvio absoluto entre a característica e seu valor objetivo, a qual não tem nenhuma relação com a covariância de duas variáveis.

Método de Ribeiro e Elsayed

A função perda proposta por Ribeiro e Elsayed é uma extensão da função proposta por Ribeiro e Albin. Um novo termo é incluído aqui para garantir a robustez dos fatores.

A função perda gradiente é composta por três termos:

1. desvio quadrático da média ao valor objetivo;
2. variância da característica de qualidade;
3. produto da variância do fator pela informação do gradiente.

Logo, esta função perda traz um novo termo que é a variabilidade dos fatores. Esta variabilidade foi, segundo Ribeiro e Elsayed (1995), discutida por Oh (1988) para o caso de uma única reposta. Os fatores podem variar durante o processo com mudanças de *setup*, material, operadores, etc. Quanto a informação do gradiente, sabemos que o gradiente de uma função está na direção e sentido nos quais a função tem sua máxima taxa de variação. Logo, isto se refere a variação da média da característica Y_j em relação ao fator X_k . Com isso, ao minimizar a perda estamos minimizando a variabilidade dos fatores e obtendo a menor variação da média da característica Y_j em relação ao fator X_k .

Para o cálculo da média e variância é necessário ao menos uma replicação. Entretanto, para o ajuste de modelos para a média e variância em função dos fatores são necessárias, no mínimo, três níveis.

Capítulo 5 Conclusões

Na prática, a maioria dos produtos tem várias características de qualidade, as quais são consideradas importantes e mesmo vitais tanto para o consumidor quanto para o fabricante do produto. Deste modo, quando um experimento fatorial é executado, são medidas várias respostas em relação aos fatores. Determinar um conjunto de níveis dos fatores ótimos para as respostas não é um problema trivial, pois dificilmente os níveis dos fatores que são ótimos para uma determinada resposta, serão ótimos para as outras. Por este motivo é importante considerar, de forma conjunta, informações sobre a média e a variabilidade das respostas em relação aos fatores. Um outro ponto a considerar é como captar as inter-relações entre as respostas.

A seguir, na seção 5.1, apresentaremos um breve resumo sobre o estudo de múltiplas respostas na literatura. Na seção 5.2 destacaremos os principais aspectos dos métodos descritos no Capítulo 3, e finalmente, a seção 5.3, comentaremos as contribuições desta dissertação.

5.1 Breve Resumo

Vimos que, no início dos anos 60, os métodos de superfície de resposta eram os mais utilizados para determinar um conjunto de níveis dos fatores conveniente para as respostas. Modelos de regressão eram ajustados para as diversas respostas e através da superposição das curvas de nível, tentava-se visualizar uma condição de operação adequada. O problema com este tipo de enfoque surge quando temos vários fatores e quando estamos medindo várias respostas.

Um tipo de procedimento que é bastante utilizado, porém com algumas limitações é a análise individual da média das respostas em relação aos fatores. Além de preocupar-se apenas com o efeito dos fatores na locação, um problema que existe com este tipo de enfoque é a dificuldade de se resolver os conflitos que surgem, na escolha dos níveis ótimos, entre os diversos fatores para as respostas.

Após a divulgação das idéias de Taguchi durante a década de 80, um novo tipo de metodologia para a análise de produtos/processos com múltiplas respostas surgiu. Os métodos mais

recentes procuram condensar, numa única função, informações sobre médias, variabilidades e distância ao valor objetivo para cada resposta. Desta forma, um problema multivariado torna-se um problema univariado, o que facilita bastante a análise dos dados. Podemos destacar cinco diferentes metodologias, sendo que a primeira surgiu em 81 (Método de Khuri e Conlon) e as demais surgiram a partir de 93. Não observando na literatura qualquer texto comparativo entre estes cinco métodos, procuramos nesta dissertação aplicar e avaliar cada um deles buscando responder às seguintes perguntas:

1. Em quais situações estes métodos podem ser aplicados, isto é, eles podem ser aplicados nas características *menor é melhor*, *nominal é melhor* e *maior é melhor* ?
2. Que exigências são feitas para a aplicação de cada um dos métodos ? Por exemplo, eles necessitam de replicação ?
3. Grau de dificuldade de aplicação dos métodos. São métodos simples de serem entendidos e aplicados?
4. Características das funções univariadas. A estrutura da função possui quais componentes ?

Vamos agora destacar os aspectos principais dos métodos de Khuri e Conlon, Elsayed e Chen, Pignatiello, Ribeiro e Albin e Ribeiro e Elsayed estudados no Capítulo 3, os quais representam nosso principal interesse.

5.2 Aspectos Principais

O Método de Khuri e Conlon pode ser aplicado às características *menor é melhor* e *maior é melhor*. Este método quantifica apenas a variabilidade das respostas, não necessitando portanto de replicação. É necessário que não haja dependência linear entre as respostas e que possamos ajustar um polinômio de mesmo grau para todas as respostas. A função distância proposta mede a distância de cada resposta a um ótimo ideal e contém uma matriz de variância-covariância. O Método de Khuri e Conlon requer recursos computacionais um pouco mais elaborados que os outros métodos.

O Método de Elsayed e Chen pode ser aplicado às características: *menor é melhor*, *nominal é melhor* e *maior é melhor*. Requer replicações e um grande conhecimento do processo sob estudo. Exige inicialmente uma transformação nas variáveis respostas para separar os fatores que afetam a

média daqueles fatores que afetam a variabilidade das respostas. Entretanto, esta transformação pode ser difícil de ser encontrada. Uma grande desvantagem observada neste método é não possuir qualquer termo de inter-relação entre as respostas. Consideramos esta metodologia complicada e de difícil aplicação.

O Método de Pignatiello foi desenvolvido para características *nominal é melhor*. Mostramos, entretanto, que é possível estendê-lo para características *menor é melhor* bastando, para isso, igualar o valor objetivo a zero. A função perda proposta é positiva, porém não há garantias de que esta função seja simétrica ou consistente. A função perda esperada quantifica a distância das respostas a seus respectivos valores objetivos e contém em sua estrutura uma matriz de variância-covariância. Portanto, para este método é necessário, no mínimo, uma replicação para cada tratamento. Este método é o único que trabalha com custos na função perda.

O Método de Ribeiro e Albin é aplicável a características do tipo *menor é melhor*, *nominal é melhor* e *maior é melhor*. Requer replicações e, no mínimo, três níveis para cada fator para ajustar modelos para a média e desvio padrão em função dos fatores. Através da modelagem da média e variância ganha-se mais conhecimento do processo em estudo. Contudo, um maior número de realizações do experimento é necessário. A função perda proposta é positiva simétrica e consistente. A estrutura desta função é composta de pesos, para quantificar a importância das características, coeficientes de interação entre as respostas, do desvio quadrático da média das características aos valores objetivos, da variância para cada tratamento e de covariâncias dos desvios da média ao objetivo.

O Método de Ribeiro e Elsayed é uma extensão do Método de Ribeiro e Albin porém, com um novo termo que quantifica a variabilidade dos fatores.

5.3 Contribuições da Dissertação

Neste trabalho fizemos um estudo sobre as técnicas de análise de experimentos fatoriais com múltiplas respostas. Discutimos, inicialmente, sobre o procedimento de *superposição de curvas de nível*, cuja desvantagem ocorre quando têm-se muitos fatores no experimento e quando são muitas as respostas medidas. Discutimos também, sobre a análise individual da média das respostas, cuja

solução por compromisso é a forma de resolver possíveis conflitos que podem existir entre os níveis dos fatores para as respostas.

Podemos observar que, tanto o procedimento de *superposição de curvas de nível* quanto a análise individual da média das respostas, não existe uma preocupação com o efeito dos fatores na dispersão, pois as suposições usuais, nestes procedimentos, são que os erros possuem distribuição normal de média zero e variância constante. Se isto não ocorre busca-se uma transformação na variável resposta para que esta suposição seja satisfeita.

Já os métodos apresentados no capítulo 3 possuem a vantagem de explorar tanto o efeito dos fatores na locação quanto seu efeito na dispersão. Por este motivo, as funções utilizadas para a simulação de dados no Primeiro Caso (seção 4.1.1) apresentam os erros de cada variável possuindo distribuição normal de média zero e variância sendo escrita como função dos fatores. Devemos destacar que, dentre estes métodos, apenas o de Khuri e Conlon (o qual é anterior as idéias de Taguchi) não se preocupa em quantificar a variação para cada tratamento.

Podemos também destacar como vantagem nos métodos de Pignatiello, Ribeiro e Albin e Ribeiro e Elsayed sua facilidade de aplicação.

O assunto "Múltiplas Respostas em um Experimento Fatorial" ganhou um novo enfoque a partir das idéias de Taguchi. Acreditamos que a condensação de diversas informações numa única função para cada tratamento seja uma boa solução. Muito ainda pode ser pesquisado sobre este assunto para incorporar, por exemplo, fatores qualitativos aos métodos. Caso o experimento fatorial possua fatores qualitativos sugerimos a análise individual das respostas em relação a estes fatores, havendo conflito é necessário decidir a qual das respostas deve ser dada maior importância.

Apêndices

Apêndice A

Todas as informações contidas neste Apêndice são referentes ao Primeiro Caso - Capítulo 4. O Apêndice A1 contém informações referentes ao Método de Ribeiro e Albin e o Apêndice A2 contém informações sobre a aplicação do Método de Pignatiello.

Programa de geração dos dados para o Primeiro Caso.

```
data vera.geracao;
dp2=0.32;
do i=1 to 4;
do x1=-2, -1, 0, 1, 2;
do x2=-2, -1, 0, 1, 2;
do x3=-2, -1, 0, 1, 2;
dp1=.3 + .5*x2 - .155*x3;
dp3=.918 + .214*x1 - .112*x2;
e1=rannor(1)*dp1;
e2=rannor(2)*dp2;
e3=rannor(3)*dp3;
y1=14 - x1 + e1;
y2=3.9 - 1.17*x2 + 0.136*x2**2 - .438*x3 +.134*x3**2 + e2;
y3=15 - .12*x1 + .186*x1**2 - .339*x3 + .518*x3**2 + e3;
output;
end;
end;
end;
end;
run;
```

Apêndice A1

Estimativas de média e desvio-padrão para as variáveis Y_1 , Y_2 , Y_3 de acordo com cada tratamento - Primeiro Caso.

OBS	X1	X2	X3	MEDIA1	DPADRAO1	MEDIA2	DPADRAO2	MEDIA3	DPADRAO3
1	-2	-2	-2	16.0014	0.60739	7.99437	0.14366	18.6758	0.51637
2	-2	-2	-1	15.8619	0.55718	7.45334	0.47042	16.6739	0.45385
3	-2	-2	0	16.2179	0.57221	6.86044	0.13287	15.6285	0.73549
4	-2	-2	1	16.2275	0.28172	6.13486	0.21781	16.2203	0.79068
5	-2	-2	2	15.1310	0.60330	6.44408	0.32913	16.6742	0.69379
6	-2	-1	-2	15.9905	0.05431	6.69036	0.20319	18.2909	0.52223
7	-2	-1	-1	16.0058	0.04872	5.53045	0.36812	16.8751	0.98489
8	-2	-1	0	15.9738	0.22981	4.95638	0.25282	16.2789	0.56820

9	-2	-1	1	16.2668	0.48465	4.83182	0.38749	15.8780	0.69834
10	-2	-1	2	15.7659	0.54193	4.88240	0.20288	17.7417	0.27542
11	-2	0	-2	16.4824	0.90590	5.26441	0.15075	18.7451	0.36400
12	-2	0	-1	16.2802	0.60891	4.29076	0.38219	16.5044	0.33891
13	-2	0	0	16.1582	0.21976	3.68629	0.07632	16.1643	0.27704
14	-2	0	1	16.0062	0.08524	3.46577	0.35884	15.7744	0.56216
15	-2	0	2	15.9987	0.01632	3.66986	0.36907	17.6335	0.25771
16	-2	1	-2	16.5691	1.56755	4.40334	0.23532	18.6504	0.27023
17	-2	1	-1	16.2377	1.00244	3.40638	0.43177	16.6034	0.43909
18	-2	1	0	15.6824	1.04131	2.61146	0.33878	16.0106	0.36531
19	-2	1	1	16.0759	0.60900	2.69359	0.56759	15.7933	0.38014
20	-2	1	2	16.1897	0.26303	2.68920	0.12676	17.5836	0.36029
21	-2	2	-2	16.3689	0.92894	3.51257	0.36811	18.7399	0.28797
22	-2	2	-1	15.7187	0.81893	2.52427	0.15668	16.7156	0.16936
23	-2	2	0	16.5016	0.16037	1.92116	0.22503	15.8102	0.46893
24	-2	2	1	15.9221	0.87143	1.99898	0.31149	16.1201	0.25020
25	-2	2	2	15.3699	1.09628	1.69196	0.19829	17.2866	0.16859
26	-1	-2	-2	15.1691	0.39814	8.26909	0.42000	17.2921	0.47072
27	-1	-2	-1	14.8631	0.42568	7.21824	0.30239	16.7834	1.20364
28	-1	-2	0	15.1076	0.52004	6.89423	0.22617	15.3032	0.36629
29	-1	-2	1	14.6523	0.97207	6.40392	0.26169	16.4346	1.59511
30	-1	-2	2	14.6727	1.45146	6.60645	0.16923	16.2163	0.51764
31	-1	-1	-2	14.9801	0.09383	6.62383	0.35588	17.8434	0.42144
32	-1	-1	-1	14.9966	0.06536	5.74954	0.32345	15.9440	0.44047
33	-1	-1	0	15.0780	0.28459	5.16708	0.30900	15.2966	0.36789
34	-1	-1	1	14.6216	0.19350	5.04527	0.48272	15.7157	0.25980
35	-1	-1	2	14.9829	0.58240	5.01230	0.18024	16.8547	0.99060
36	-1	0	-2	15.1448	0.50500	5.21123	0.48314	17.5280	0.97291
37	-1	0	-1	14.5857	0.59716	4.55336	0.21273	16.2203	1.42642
38	-1	0	0	15.0262	0.22914	3.88037	0.30067	15.3599	0.17212
39	-1	0	1	15.1089	0.06349	3.40846	0.37061	15.6613	1.09105
40	-1	0	2	14.9982	0.00815	3.40745	0.30607	15.9694	0.50485
41	-1	1	-2	14.9888	1.06698	4.29479	0.15016	18.0117	0.41049
42	-1	1	-1	14.9348	0.72844	3.41226	0.54836	16.1774	0.88441
43	-1	1	0	14.7151	0.28412	2.92552	0.07302	14.8760	0.52957
44	-1	1	1	14.8569	0.57027	2.62210	0.25185	15.4922	0.34629
45	-1	1	2	15.0344	0.22921	2.51947	0.19937	16.8865	0.75672
46	-1	2	-2	15.6771	3.13183	3.63990	0.22535	18.1788	0.72585
47	-1	2	-1	16.1298	1.74051	2.77495	0.26973	16.1026	0.26003
48	-1	2	0	14.6917	2.58101	2.10323	0.13735	15.3151	0.54530
49	-1	2	1	14.9253	0.64659	1.56001	0.35545	15.7859	0.45531
50	-1	2	2	15.5570	0.41710	1.57620	0.29951	16.8455	0.45759
51	0	-2	-2	14.0652	0.36360	8.50029	0.40269	18.0633	1.02588
52	0	-2	-1	13.6972	0.42272	7.44123	0.30131	16.7232	0.95518
53	0	-2	0	14.1899	0.26332	6.72930	0.20123	15.0668	1.01948
54	0	-2	1	13.8447	1.55182	6.52583	0.42179	15.5720	0.65465
55	0	-2	2	13.7126	1.28634	6.62343	0.25516	16.3561	0.87575
56	0	-1	-2	14.0316	0.17741	6.74585	0.25750	17.7371	1.35484
57	0	-1	-1	14.0072	0.00514	5.80309	0.28288	15.6718	0.86242
58	0	-1	0	13.9922	0.14165	5.32341	0.09179	15.4737	1.97877
59	0	-1	1	13.7483	0.26133	4.61421	0.37163	15.7447	0.75105
60	0	-1	2	14.4939	0.46665	4.80304	0.15225	15.2821	0.32882
61	0	0	-2	13.8175	0.83295	5.34316	0.41774	17.2117	1.14979
62	0	0	-1	14.6356	0.72181	4.16626	0.31601	16.1646	0.44570
63	0	0	0	14.0112	0.26624	3.88516	0.12942	14.8688	0.83915
64	0	0	1	14.0480	0.18586	3.74875	0.48576	15.5432	1.46891
65	0	0	2	13.9987	0.00369	3.94606	0.33614	16.9050	0.75222
66	0	1	-2	13.2577	0.65443	4.48219	0.30173	18.6198	0.42020
67	0	1	-1	14.2774	1.08994	3.62282	0.29241	15.8358	1.28961

68	0	1	0	13.6339	1.33670	2.76776	0.35637	14.4217	0.85628
69	0	1	1	14.3033	0.35490	2.70028	0.38516	15.2426	0.46711
70	0	1	2	14.0968	0.57846	2.53416	0.22474	16.0450	1.26234
71	0	2	-2	12.6339	3.06329	3.69005	0.28756	17.9452	0.66618
72	0	2	-1	14.1342	0.76245	2.60767	0.32478	15.1690	0.35395
73	0	2	0	14.1500	1.11986	2.29430	0.15845	15.4662	0.77329
74	0	2	1	15.2443	0.75217	1.88391	0.26330	14.9618	0.48628
75	0	2	2	13.8149	0.63912	1.81938	0.34520	16.1123	0.89353
76	1	-2	-2	13.1917	0.26461	8.20217	0.29428	17.7126	0.64600
77	1	-2	-1	13.1982	0.33474	7.55319	0.24410	15.4672	1.51973
78	1	-2	0	13.3231	0.42006	6.71121	0.16240	15.3437	0.54902
79	1	-2	1	13.8608	0.32306	6.22089	0.23533	15.1451	1.78095
80	1	-2	2	11.7447	0.34315	6.41286	0.60313	17.1475	1.12725
81	1	-1	-2	12.9139	0.13627	6.56640	0.25081	16.8138	1.09557
82	1	-1	-1	12.9680	0.06980	5.55527	0.23602	15.2455	1.67448
83	1	-1	0	12.8476	0.09049	5.30985	0.13207	14.3287	1.48545
84	1	-1	1	13.0202	0.26169	4.66872	0.32355	14.7920	0.92964
85	1	-1	2	13.3659	0.56177	4.96555	0.38463	15.7002	1.37703
86	1	0	-2	12.3151	1.36860	5.16123	0.45078	17.6238	1.76320
87	1	0	-1	13.0721	0.43399	3.97857	0.31059	15.4380	1.89832
88	1	0	0	13.0055	0.26156	4.01361	0.43726	14.2734	1.07199
89	1	0	1	13.0043	0.10783	3.35647	0.19576	14.8712	0.65922
90	1	0	2	12.9900	0.00515	3.34525	0.41356	15.2905	0.66402
91	1	1	-2	12.8574	1.08716	4.18120	0.34668	17.5747	0.81364
92	1	1	-1	13.0173	1.13459	3.33196	0.34872	16.1569	0.76516
93	1	1	0	12.8860	0.39516	2.40587	0.43780	15.4789	1.16807
94	1	1	1	12.3468	0.33009	2.68676	0.20251	15.1319	1.55634
95	1	1	2	13.2478	0.30853	2.64334	0.30500	15.8142	0.94619
96	1	2	-2	13.2205	2.04961	3.61365	0.61653	17.5482	0.79803
97	1	2	-1	13.6375	0.26843	2.52424	0.31964	16.1140	0.46219
98	1	2	0	13.1487	0.71938	2.12497	0.20783	15.0952	1.22412
99	1	2	1	12.9295	1.21765	1.78402	0.19893	14.8778	1.07753
100	1	2	2	12.9712	1.18518	1.55466	0.15649	17.8446	0.69706
101	2	-2	-2	12.0617	0.23776	8.24425	0.42448	18.8972	1.54338
102	2	-2	-1	11.5445	0.30894	7.19102	0.23955	17.1732	1.15301
103	2	-2	0	12.0990	0.62046	6.82297	0.28381	13.7151	1.59310
104	2	-2	1	12.0999	0.54138	6.68905	0.44302	15.8202	0.88278
105	2	-2	2	11.6889	0.38243	6.44878	0.20047	16.3573	1.22267
106	2	-1	-2	11.9519	0.09037	6.50929	0.29908	17.3658	1.12024
107	2	-1	-1	12.0111	0.07910	6.27743	0.18401	16.3198	0.83800
108	2	-1	0	11.8821	0.15880	5.07773	0.42822	15.6864	1.00030
109	2	-1	1	12.0096	0.32819	4.72537	0.44129	15.8505	1.21298
110	2	-1	2	12.4407	0.44803	4.73026	0.28717	16.7599	0.86271
111	2	0	-2	12.3987	0.51291	5.31098	0.34180	18.3205	0.67723
112	2	0	-1	12.2451	0.49126	4.42790	0.34814	16.2975	0.61515
113	2	0	0	12.2882	0.24112	3.99186	0.29404	15.0106	1.60912
114	2	0	1	11.9816	0.14563	3.34566	0.29683	14.7698	0.72407
115	2	0	2	11.9961	0.00498	3.31198	0.20499	16.9685	0.80275
116	2	1	-2	12.5743	0.49921	4.39176	0.35390	16.6267	0.50689
117	2	1	-1	11.6003	0.89450	3.73826	0.51016	16.1070	1.18359
118	2	1	0	11.7718	0.71377	2.91182	0.10605	16.2473	1.20938
119	2	1	1	11.7022	0.32224	2.43517	0.11258	16.6793	1.28975
120	2	1	2	12.0399	0.45218	2.46790	0.22448	16.8363	0.97158
121	2	2	-2	13.4638	2.33620	3.67722	0.32760	17.5834	1.17214
122	2	2	-1	11.2529	1.43745	2.51518	0.12529	16.5834	1.61047
123	2	2	0	12.6511	1.03147	2.03079	0.40309	14.8582	0.07198
124	2	2	1	11.5265	0.61251	1.64592	0.27178	14.8038	0.19868
125	2	2	2	12.4115	2.33221	1.67145	0.23588	16.7985	0.85451

Estimativas de covariância entre Y_1 e Y_2 , Y_1 e Y_3 e Y_2 e Y_3 . Estimativas do desvio médio para cada característica de qualidade - Primeiro Caso.

OBS	X1	X2	X3	R2M12	R2M13	R2M23	MED_D1	MED_D2	MED_D3
1	-2	-2	-2	0.00796	0.07452	0.03707	0.44658	3.49437	4.97580
2	-2	-2	-1	0.04299	0.06868	-0.03314	0.43544	2.95334	2.97390
3	-2	-2	0	-0.02143	0.13673	-0.03029	0.46454	2.36044	1.92855
4	-2	-2	1	0.02681	0.05211	0.02881	0.24111	1.63486	2.52035
5	-2	-2	2	0.13381	0.23006	0.12079	0.86902	1.94408	2.97420
6	-2	-1	-2	0.00248	0.00874	0.07728	0.03424	2.19036	4.59088
7	-2	-1	-1	0.00166	0.00992	0.01127	0.04039	1.03045	3.17506
8	-2	-1	0	-0.00557	0.00721	0.08698	0.17230	0.45638	2.57889
9	-2	-1	1	0.05512	0.01992	0.03575	0.45515	0.33182	2.17804
10	-2	-1	2	0.03502	0.01725	0.00388	0.36713	0.38240	4.04173
11	-2	0	-2	0.01128	-0.16148	0.01032	0.67772	0.76441	5.04507
12	-2	0	-1	0.06717	-0.01593	0.02118	0.33021	0.34969	2.80438
13	-2	0	0	-0.00752	0.01530	-0.01353	0.20905	0.81371	2.46431
14	-2	0	1	0.00013	0.01066	-0.02269	0.05772	1.03423	2.07437
15	-2	0	2	0.00100	0.00159	-0.00699	0.01140	0.83014	3.93354
16	-2	1	-2	0.09163	0.03186	0.00869	1.30728	0.17082	4.95043
17	-2	1	-1	0.14836	0.11396	0.09386	0.80501	1.09362	2.90340
18	-2	1	0	0.00516	0.03860	0.03695	0.82499	1.88854	2.31063
19	-2	1	1	0.13882	0.03298	0.11620	0.42711	1.80641	2.09329
20	-2	1	2	0.01765	0.03862	0.03122	0.22499	1.81080	3.88356
21	-2	2	-2	-0.01884	0.07801	0.05576	0.64777	0.98743	5.03990
22	-2	2	-1	0.02597	0.01119	0.00887	0.73664	1.97573	3.01560
23	-2	2	0	0.01993	0.00219	0.04639	0.50160	2.57884	2.11021
24	-2	2	1	-0.06069	-0.06223	0.05073	0.58821	2.50102	2.42013
25	-2	2	2	0.02331	-0.00048	0.01393	1.04984	2.80804	3.58662
26	-1	-2	-2	-0.00805	-0.11380	0.08881	0.83089	3.76909	3.59214
27	-1	-2	-1	-0.06230	-0.03742	0.12612	1.13692	2.71824	3.08345
28	-1	-2	0	0.03843	0.11314	-0.01265	0.89240	2.39423	1.60320
29	-1	-2	1	-0.02148	-0.48449	-0.18587	1.37699	1.90392	2.73458
30	-1	-2	2	0.07352	0.05393	-0.04579	1.43652	2.10645	2.51632
31	-1	-1	-2	-0.01370	0.00308	-0.04887	1.01995	2.12383	4.14338
32	-1	-1	-1	-0.00227	0.01816	0.04007	1.00340	1.24954	2.24405
33	-1	-1	0	0.02983	0.00474	0.00083	0.92201	0.66708	1.59657
34	-1	-1	1	0.00448	0.00778	0.03808	1.37840	0.54527	2.01569
35	-1	-1	2	0.04212	-0.08097	-0.00615	1.01708	0.51230	3.15475
36	-1	0	-2	0.08273	-0.06963	-0.33828	0.85518	0.71123	3.82800
37	-1	0	-1	-0.05187	0.61007	-0.12397	1.41425	0.15322	2.52027
38	-1	0	0	0.00282	0.02224	0.02447	0.97384	0.61963	1.65994
39	-1	0	1	0.01522	0.04871	0.20063	0.89110	1.09154	1.96132
40	-1	0	2	0.00009	0.00033	0.07776	1.00178	1.09255	2.26942
41	-1	1	-2	0.02184	0.05092	0.02203	1.01124	0.20521	4.31171
42	-1	1	-1	-0.13889	-0.29548	0.27215	1.06523	1.08774	2.47740
43	-1	1	0	0.00743	-0.09079	-0.02394	1.28490	1.57448	1.17603
44	-1	1	1	-0.04752	0.04025	-0.06205	1.14314	1.87790	1.79219
45	-1	1	2	0.00333	0.09045	0.07590	0.96558	1.98053	3.18654
46	-1	2	-2	0.15070	0.56968	0.02822	2.49762	0.86010	4.47879
47	-1	2	-1	-0.08387	-0.17419	0.02430	1.29943	1.72505	2.40256
48	-1	2	0	-0.00674	0.00269	-0.04942	1.62793	2.39677	1.61513
49	-1	2	1	-0.04178	0.02732	0.08364	1.07474	2.93999	2.08594

50	-1	2	2	-0.02194	-0.03054	-0.02738	0.44296	2.92380	3.14549
51	0	-2	-2	-0.03316	-0.15539	-0.07078	1.93479	4.00029	4.36328
52	0	-2	-1	-0.01117	-0.08545	-0.18136	2.30282	2.94123	3.02319
53	0	-2	0	0.02611	0.01031	-0.01365	1.81010	2.22930	1.36684
54	0	-2	1	0.36821	-0.17231	0.07649	2.15526	2.02583	1.87199
55	0	-2	2	-0.14575	-0.72011	0.06545	2.28738	2.12343	2.65609
56	0	-1	-2	-0.02502	-0.10857	0.13614	1.96839	2.24585	4.03707
57	0	-1	-1	-0.00030	-0.00214	0.15147	1.99283	1.30309	1.97177
58	0	-1	0	0.00254	-0.08410	-0.01014	2.00781	0.82341	2.36824
59	0	-1	1	-0.04972	-0.10643	0.11044	2.25174	0.23468	2.04469
60	0	-1	2	0.02017	0.11301	0.01101	1.50613	0.30304	1.58209
61	0	0	-2	-0.05492	-0.35630	-0.22359	2.18248	0.84316	3.51166
62	0	0	-1	0.07413	0.18891	0.08345	1.36443	0.36221	2.46458
63	0	0	0	-0.01440	-0.07701	0.07829	1.98883	0.61484	1.18269
64	0	0	1	0.02892	-0.06163	-0.26864	1.95200	0.75125	1.91721
65	0	0	2	0.00029	-0.00080	-0.01934	2.00130	0.55394	3.20501
66	0	1	-2	-0.07332	-0.20029	0.04307	2.74226	0.21641	4.91982
67	0	1	-1	0.16042	0.68698	0.07466	1.72261	0.87718	2.13583
68	0	1	0	-0.24531	-0.40722	0.10633	2.36607	1.73224	0.96251
69	0	1	1	0.01229	0.09069	-0.07683	1.69673	1.79972	1.54257
70	0	1	2	-0.01072	-0.23927	-0.12238	1.90320	1.96584	2.34505
71	0	2	-2	0.46903	-0.04795	-0.05413	3.56524	0.80995	4.24518
72	0	2	-1	-0.04730	0.16694	-0.01071	1.86584	1.89233	1.46898
73	0	2	0	-0.06644	-0.40024	0.08784	1.84998	2.20570	1.76622
74	0	2	1	-0.05840	-0.16545	0.05636	0.89435	2.61609	1.26176
75	0	2	2	0.10394	-0.32226	-0.02944	2.18510	2.68062	2.41230
76	1	-2	-2	0.02663	-0.01037	-0.12783	2.80832	3.70217	4.01258
77	1	-2	-1	-0.02401	0.22071	-0.06639	2.80178	3.05319	1.88963
78	1	-2	0	0.03043	-0.01546	0.03358	2.67694	2.21121	1.64372
79	1	-2	1	0.01757	-0.15215	0.15116	2.13920	1.72089	1.69403
80	1	-2	2	-0.01783	0.18302	0.33366	4.25533	1.91286	3.44748
81	1	-1	-2	-0.02313	-0.10224	0.13717	3.08612	2.06640	3.11383
82	1	-1	-1	0.00172	-0.05257	0.13304	3.03196	1.05527	1.75898
83	1	-1	0	-0.00249	0.00179	0.01419	3.15245	0.80985	1.41844
84	1	-1	1	0.00447	0.14095	-0.02199	2.97980	0.31549	1.10366
85	1	-1	2	0.08268	0.01569	-0.08422	2.63407	0.46555	2.00016
86	1	0	-2	0.17149	-1.24181	-0.53762	3.68489	0.66123	3.92377
87	1	0	-1	0.06658	0.23129	0.24815	2.92792	0.52143	2.06876
88	1	0	0	-0.01673	0.00520	-0.09924	2.99454	0.56589	0.95556
89	1	0	1	0.01130	-0.04381	-0.09525	2.99574	1.14353	1.17118
90	1	0	2	-0.00103	0.00087	0.06112	3.00996	1.15475	1.59047
91	1	1	-2	0.12038	0.49034	-0.04039	3.14259	0.31880	3.87467
92	1	1	-1	0.25905	0.58943	0.13378	2.98266	1.16804	2.45690
93	1	1	0	0.03874	0.34384	0.15626	3.11400	2.09413	1.77885
94	1	1	1	-0.04846	-0.03745	0.04341	3.65322	1.81324	1.87051
95	1	1	2	0.03249	-0.11683	-0.00447	2.75221	1.85666	2.11419
96	1	2	-2	0.69154	-0.72781	-0.26192	2.77954	0.88635	3.84820
97	1	2	-1	0.01452	0.07916	-0.00433	2.36251	1.97576	2.41398
98	1	2	0	-0.07497	-0.02345	0.00660	2.85131	2.37503	1.59229
99	1	2	1	0.16063	0.44979	0.04099	3.07046	2.71598	1.37185
100	1	2	2	0.07496	-0.55094	-0.00866	3.02880	2.94534	4.14463
101	2	-2	-2	-0.03824	-0.25244	0.39353	3.93830	3.74425	5.19719
102	2	-2	-1	-0.04032	-0.14890	0.14260	4.45554	2.69102	3.47316
103	2	-2	0	-0.08106	-0.22783	0.13040	3.90105	2.32297	1.14808
104	2	-2	1	0.05792	0.30473	0.06406	3.90012	2.18905	2.12016
105	2	-2	2	-0.05270	-0.04699	0.08303	4.31107	1.94878	2.65725
106	2	-1	-2	-0.00106	0.04501	-0.00962	4.04809	2.00929	3.66585
107	2	-1	-1	-0.00670	-0.02840	0.01680	3.98886	1.77743	2.61983
108	2	-1	0	-0.04348	0.03594	0.04255	4.11794	0.57773	1.98644

109	2	-1	1	0.01995	0.24510	0.05387	3.99040	0.38955	2.15053
110	2	-1	2	-0.06452	-0.16042	0.04035	3.55929	0.28438	3.05988
111	2	0	-2	-0.05128	-0.05471	0.13861	3.60130	0.81098	4.62054
112	2	0	-1	-0.03806	-0.14794	0.04051	3.75494	0.28960	2.59747
113	2	0	0	0.04860	0.08648	0.11558	3.71179	0.50814	1.85765
114	2	0	1	-0.03120	0.05735	-0.11542	4.01843	1.15434	1.06977
115	2	0	2	0.00025	0.00012	0.03021	4.00390	1.18802	3.26852
116	2	1	-2	-0.05515	-0.00046	-0.01020	3.42572	0.29758	2.92670
117	2	1	-1	-0.18397	0.33027	0.16578	4.39968	0.76174	2.40700
118	2	1	0	-0.01787	-0.31490	0.00630	4.22815	1.58818	2.54726
119	2	1	1	-0.01344	-0.14633	0.10719	4.29777	2.06483	2.97932
120	2	1	2	0.00937	0.24167	0.00567	3.96009	2.03210	3.13635
121	2	2	-2	-0.33368	0.14762	0.14740	2.53622	0.82278	3.88345
122	2	2	-1	0.00561	1.66211	-0.02417	4.74711	1.98482	2.88336
123	2	2	0	-0.29992	0.03360	-0.00789	3.34888	2.46921	1.15820
124	2	2	1	-0.10995	-0.03734	0.00641	4.47354	2.85408	1.10383
125	2	2	2	-0.26495	0.89689	-0.06240	3.58852	2.82855	3.09853

Estimativas da função perda esperada pelo Método de Ribeiro e Albin de acordo com cada tratamento para os coeficientes de interação iguais a 1 e 0, respectivamente - Primeiro Caso.

OBS	X1	X2	X3	LM1	LM2
1	-2	-2	-2	59.4718	38.1823
2	-2	-2	-1	29.5698	18.1274
3	-2	-2	0	17.4385	10.8089
4	-2	-2	1	15.6560	10.4260
5	-2	-2	2	27.9642	17.4233
6	-2	-1	-2	39.1036	28.7273
7	-2	-1	-1	15.0447	11.5803
8	-2	-1	0	7.9534	6.1649
9	-2	-1	1	8.6560	6.6802
10	-2	-1	2	16.7968	13.5709
11	-2	0	-2	32.8438	25.1899
12	-2	0	-1	12.3758	10.2812
13	-2	0	0	9.0036	6.3188
14	-2	0	1	9.8147	7.5018
15	-2	0	2	17.5901	14.2748
16	-2	1	-2	32.9246	25.2518
17	-2	1	-1	18.6609	11.9119
18	-2	1	0	16.8610	8.9524
19	-2	1	1	16.3073	10.5724
20	-2	1	2	25.6176	17.2166
21	-2	2	-2	36.1056	27.1098
22	-2	2	-1	24.3498	14.6690
23	-2	2	0	20.1247	12.2623
24	-2	2	1	22.9641	14.0889
25	-2	2	2	37.4148	20.5933
26	-1	-2	-2	53.3429	33.7204
27	-1	-2	-1	30.8857	15.8817
28	-1	-2	0	17.1114	9.5668
29	-1	-2	1	19.8763	8.9746
30	-1	-2	2	26.5728	14.5499

31	-1	-1	-2	39.3724	24.2398
32	-1	-1	-1	15.6745	9.3090
33	-1	-1	0	8.0847	4.8971
34	-1	-1	1	9.8827	5.2032
35	-1	-1	2	15.9727	10.6719
36	-1	0	-2	26.9562	20.6769
37	-1	0	-1	12.5858	7.9844
38	-1	0	0	8.3235	5.0255
39	-1	0	1	11.1250	5.9992
40	-1	0	2	17.2758	11.3502
41	-1	1	-2	26.2605	20.7132
42	-1	1	-1	15.9197	9.5895
43	-1	1	0	12.9120	7.6335
44	-1	1	1	16.5359	9.0442
45	-1	1	2	25.7364	14.2665
46	-1	2	-2	40.4809	22.5456
47	-1	2	-1	21.5953	12.3210
48	-1	2	0	21.2666	10.9178
49	-1	2	1	24.1385	12.5351
50	-1	2	2	29.4229	17.6176
51	0	-2	-2	67.7512	34.3743
52	0	-2	-1	40.0083	17.6594
53	0	-2	0	21.4325	11.8532
54	0	-2	1	23.6205	11.1550
55	0	-2	2	31.7814	16.0093
56	0	-1	-2	46.3046	24.8681
57	0	-1	-1	20.3058	11.0611
58	0	-1	0	15.4246	7.1580
59	0	-1	1	12.9246	7.3580
60	0	-1	2	15.5685	12.1056
61	0	0	-2	33.1100	21.2796
62	0	0	-1	14.8070	9.7109
63	0	0	0	11.5499	7.2608
64	0	0	1	14.4762	8.1284
65	0	0	2	22.0367	12.7584
66	0	1	-2	36.2094	21.2904
67	0	1	-1	19.2762	11.2904
68	0	1	0	17.3402	9.8432
69	0	1	1	19.6212	11.1479
70	0	1	2	28.0912	15.6491
71	0	2	-2	44.9253	23.0972
72	0	2	-1	23.1567	13.9964
73	0	2	0	23.9669	13.1020
74	0	2	1	21.2147	14.6132
75	0	2	2	36.3218	18.9746
76	1	-2	-2	75.9724	39.5633
77	1	-2	-1	42.6279	22.8795
78	1	-2	0	31.0901	17.0875
79	1	-2	1	26.6233	16.3863
80	1	-2	2	51.1240	21.2206
81	1	-1	-2	52.4646	30.0315
82	1	-1	-1	26.727	16.2557
83	1	-1	0	20.553	12.3667
84	1	-1	1	17.264	12.5637
85	1	-1	2	24.732	17.2913
86	1	0	-2	44.299	26.4174
87	1	0	-1	24.089	14.8799
88	1	0	0	17.430	12.4439
89	1	0	1	21.454	13.3086

90	1	0	2	28.079	17.9185
91	1	1	-2	41.386	26.4026
92	1	1	-1	31.098	16.4338
93	1	1	0	31.325	15.0007
94	1	1	1	33.109	16.3024
95	1	1	2	35.549	20.7836
96	1	2	-2	44.456	28.1838
97	1	2	-1	34.344	19.1142
98	1	2	0	33.236	18.2339
99	1	2	1	36.671	19.7422
100	1	2	2	57.280	24.0836
101	2	-2	-2	104.048	49.2711
102	2	-2	-1	68.290	31.5260
103	2	-2	0	41.283	25.2534
104	2	-2	1	46.527	24.6524
105	2	-2	2	55.186	30.1677
106	2	-1	-2	70.087	39.7137
107	2	-1	-1	47.055	24.8766
108	2	-1	0	32.249	20.5071
109	2	-1	1	32.0968	20.8043
110	2	-1	2	38.8017	26.2129
111	2	0	-2	59.4144	36.0741
112	2	0	-1	34.9227	23.4752
113	2	0	0	30.5346	20.5587
114	2	0	1	31.6066	21.5236
115	2	0	2	48.5717	26.8145
116	2	1	-2	47.8842	36.0336
117	2	1	-1	41.0906	25.0035
118	2	1	0	44.2943	23.0899
119	2	1	1	52.2696	24.4918
120	2	1	2	56.7516	29.6540
121	2	2	-2	52.8819	37.7893
122	2	2	-1	58.1347	27.6583
123	2	2	0	41.0310	26.2975
124	2	2	1	48.6214	27.9060
125	2	2	2	63.5316	32.9284

Apêndice A2

Estimativas da função perda esperada pelo Método de Pignatiello - Primeiro Caso.

OBS	X1	X2	X3	R
1	-2	-2	-2	37.6254
2	-2	-2	-1	18.3231
3	-2	-2	0	10.2245
4	-2	-2	1	9.8286
5	-2	-2	2	14.3342
6	-2	-1	-2	26.1909
7	-2	-1	-1	12.2507
8	-2	-1	0	7.2992
9	-2	-1	1	5.7979
10	-2	-1	2	16.9473
11	-2	0	-2	27.2456
12	-2	0	-1	8.6185
13	-2	0	0	6.8909
14	-2	0	1	5.8247

15	-2	0	2	16.3648
16	-2	1	-2	27.4255
17	-2	1	-1	11.0663
18	-2	1	0	10.3390
19	-2	1	1	8.4883
20	-2	1	2	18.6121
21	-2	2	-2	27.5931
22	-2	2	-1	13.8004
23	-2	2	0	11.6512
24	-2	2	1	13.0372
25	-2	2	2	22.4155
26	-1	-2	-2	28.3564
27	-1	-2	-1	19.9105
28	-1	-2	0	9.5547
29	-1	-2	1	16.4768
30	-1	-2	2	14.9341
31	-1	-1	-2	23.0316
32	-1	-1	-1	7.9068
33	-1	-1	0	4.1559
34	-1	-1	1	6.5983
35	-1	-1	2	12.6023
36	-1	0	-2	17.3258
37	-1	0	-1	10.7912
38	-1	0	0	4.2602
39	-1	0	1	7.1641
40	-1	0	2	7.6961
41	-1	1	-2	20.9851
42	-1	1	-1	10.0689
43	-1	1	0	5.8795
44	-1	1	1	8.5538
45	-1	1	2	15.6738
46	-1	2	-2	31.2897
47	-1	2	-1	11.9347
48	-1	2	0	17.0425
49	-1	2	1	14.9015
50	-1	2	2	19.1119
51	0	-2	-2	40.1308
52	0	-2	-1	24.2753
53	0	-2	0	11.2637
54	0	-2	1	15.2681
55	0	-2	2	19.2826
56	0	-1	-2	27.1497
57	0	-1	-1	10.3811
58	0	-1	0	11.7992
59	0	-1	1	10.0346
60	0	-1	2	5.2123
61	0	0	-2	19.9962
62	0	0	-1	8.8667
63	0	0	0	6.4914
64	0	0	1	10.2003
65	0	0	2	15.2630
66	0	1	-2	32.4208
67	0	1	-1	11.2352
68	0	1	0	11.7668
69	0	1	1	8.9899
70	0	1	2	14.9646
71	0	2	-2	39.9186
72	0	2	-1	10.0323
73	0	2	0	13.2842

74	0	2	1	9.8787
75	0	2	2	19.1056
76	1	-2	-2	38.2675
77	1	-2	-1	22.7762
78	1	-2	0	15.2615
79	1	-2	1	12.9576
80	1	-2	2	35.4042
81	1	-1	-2	24.7719
82	1	-1	-1	15.5594
83	1	-1	0	13.2213
84	1	-1	1	11.1376
85	1	-1	2	13.5154
86	1	0	-2	34.5967
87	1	0	-1	15.7536
88	1	0	0	10.9414
89	1	0	1	12.1383
90	1	0	2	13.5349
91	1	1	-2	26.9547
92	1	1	-1	18.2913
93	1	1	0	18.9589
94	1	1	1	21.2563
95	1	1	2	16.5751
96	1	2	-2	28.5380
97	1	2	-1	15.7002
98	1	2	0	17.7765
99	1	2	1	20.8749
100	1	2	2	36.9416
101	2	-2	-2	59.1591
102	2	-2	-1	40.6386
103	2	-2	0	23.6181
104	2	-2	1	25.7666
105	2	-2	2	31.1254
106	2	-1	-2	35.2153
107	2	-1	-1	26.6761
108	2	-1	0	22.4463
109	2	-1	1	22.3726
110	2	-1	2	23.1119
111	2	0	-2	35.8150
112	2	0	-1	21.5925
113	2	0	0	18.4871
114	2	0	1	19.2583
115	2	0	2	28.8123
116	2	1	-2	20.9443
117	2	1	-1	28.1924
118	2	1	0	28.8715
119	2	1	1	33.3907
120	2	1	2	30.8472
121	2	2	-2	29.1296
122	2	2	-1	39.4639
123	2	2	0	19.8850
124	2	2	1	29.8653
125	2	2	2	36.7040

Apêndice B

Todas as informações contidas neste Apêndice são referentes ao Segundo Caso - Capítulo

4. O Apêndice B1 contém informações referentes ao Método de Ribeiro e Albin.

Programa de geração dos dados para o Segundo Caso.

```
data vera.geracao;
dp1=0.103;
dp2=0.130;
dp3=0.126;
dp4=0.089;
do i=1 to 2;
  do x1=-2, -1, 0, 1, 2;
    do x2=-2, -1, 0, 1, 2;
      e1=rannor(86753)*dp1;
      e2=rannor(25253)*dp2;
      e3=rannor(6)*dp3;
      e4=rannor(45365)*dp4;
      y1=5.26 - .613*x1 - .478*x2 - 0.218*x1**2 - 0.307*x2**2
        + 0.709*x1*x2 + e1;
      y2=2.2 - 0.099*x1 - 0.18*x2 - 0.058*x1**2 - .035*x2**2
        - 0.035*x1*x2 + e2;
      y3=4.28 - 0.315*x1 - 0.396*x2 - .156*x1**2 - 0.479*x2**2
        + 0.218*x1*x2 + e3;
      y4=2.45 + 0.131*x1 + 0.073*x2 + 0.025*x1**2 + 0.028*x2**2
        - 0.084*x1*x2 + e4;
      output;
    end;
  end;
end;
run;
```

Apêndice B1

Estimativas de média e desvio padrão para as variáveis Y_1 , Y_2 , Y_3 e Y_4 para cada tratamento

- Segundo Caso.

OBS	X1	X2	MED_Y1	MED_Y2	MED_Y3	MED_Y4	DP1	DP2	DP3	DP4
1	-2	-2	8.32499	2.19600	4.01505	1.92543	0.06512	0.02937	0.00220	0.16207
2	-2	-1	7.26887	2.18035	4.53463	2.08295	0.03400	0.05723	0.05185	0.11733
3	-2	0	5.57573	2.14520	4.24113	2.19613	0.01435	0.10792	0.12088	0.04414
4	-2	1	3.44940	2.14706	3.04439	2.60511	0.10497	0.09791	0.04885	0.16590
5	-2	2	0.72262	1.82336	0.74441	2.89628	0.03518	0.09546	0.28037	0.00845
6	-1	-2	6.86994	2.32950	3.69948	2.12256	0.03650	0.17547	0.01921	0.05338
7	-1	-1	6.54840	2.35140	4.70652	2.29391	0.03975	0.10284	0.11396	0.01839
8	-1	0	5.64938	2.36811	4.52896	2.38087	0.04874	0.21213	0.17759	0.04218

9	-1	1	4.25947	2.10894	3.30618	2.49619	0.11662	0.07179	0.03794	0.05721
10	-1	2	2.10810	1.89573	1.06597	2.75954	0.19416	0.06770	0.10912	0.01145
11	0	-2	4.98209	2.53611	3.07185	2.38460	0.01493	0.00740	0.06679	0.18172
12	0	-1	5.32354	2.24560	4.08386	2.41661	0.09846	0.02541	0.14510	0.05851
13	0	0	5.21410	2.25238	4.27473	2.48108	0.02764	0.01787	0.21123	0.04194
14	0	1	4.48881	2.01346	3.30228	2.53326	0.08568	0.14070	0.01611	0.02505
15	0	2	3.16957	1.60542	1.58709	2.68634	0.10065	0.02517	0.06416	0.02038
16	1	-2	2.69097	2.12046	2.17753	2.71591	0.36642	0.22359	0.05643	0.04069
17	1	-1	4.05177	2.23403	3.40772	2.61755	0.15785	0.20441	0.07446	0.00434
18	1	0	4.37287	2.03070	3.79486	2.52935	0.08232	0.20126	0.05447	0.14028
19	1	1	4.23390	1.81680	3.25803	2.61677	0.06208	0.07846	0.06275	0.01465
20	1	2	3.65870	1.59042	1.55593	2.67912	0.22051	0.04262	0.13248	0.13617
21	2	-2	0.10521	2.09511	1.06257	3.08089	0.11306	0.04354	0.10831	0.10574
22	2	-1	1.92338	2.15798	2.57902	2.97963	0.10221	0.01955	0.14335	0.02872
23	2	0	3.23658	1.79290	2.97254	2.87707	0.08701	0.05917	0.02504	0.07124
24	2	1	3.79335	1.59039	2.58465	2.71618	0.04564	0.07351	0.00278	0.07608
25	2	2	3.63680	1.05316	1.21402	2.70354	0.01180	0.12187	0.09753	0.01443

Estimativas de covariância entre Y_1 e Y_2 , Y_1 e Y_3 , Y_1 e Y_4 , Y_2 e Y_3 , Y_2 e Y_4 e Y_3 e Y_4 .

Estimativas do desvio médio para cada característica de qualidade - Segundo Caso.

OBS	X1	X2	R2M12	R2M13	R2M14	R2M23	R2M24
1	-2	-2	-0.000956	-0.000072	-0.005277	0.000032	0.0023801
2	-2	-1	0.000973	0.000881	0.001995	0.001484	0.0033571
3	-2	0	-0.000774	0.000867	-0.000317	-0.006522	0.0023819
4	-2	1	-0.005139	0.002564	0.001121	-0.002392	-0.0010460
5	-2	2	-0.001679	0.004931	0.000149	-0.013382	-0.0004034
6	-1	-2	0.001045	-0.000351	-0.000974	-0.000550	-0.0015287
7	-1	-1	0.000523	-0.002265	-0.000365	-0.001499	-0.0002418
8	-1	0	-0.000065	0.002793	0.001028	-0.000154	-0.0000565
9	-1	1	-0.004186	0.002213	0.003336	-0.001362	-0.0020536
10	-1	2	-0.006572	0.010593	0.001111	-0.003694	-0.0003875
11	0	-2	-0.000055	-0.000499	0.001356	0.000247	-0.0006720
12	0	-1	0.001251	-0.007143	-0.002881	-0.001843	-0.0007433
13	0	0	-0.000247	-0.002919	-0.000580	0.001887	0.0003747
14	0	1	0.006028	0.000690	0.001073	0.001133	0.0017621
15	0	2	-0.001267	-0.003229	0.001026	0.000808	-0.0002565
16	1	-2	-0.040964	0.010338	0.007456	-0.006308	-0.0045494

OBS	R2M34	MED_D1	MED_D2	MED_D3	MED_D4
1	0.0001786	0.08499	0.17400	0.59495	0.66457
2	0.0030418	0.97113	0.18965	0.07537	0.50705
3	-0.0026680	2.66427	0.22480	0.36887	0.39387
4	0.0005219	4.79060	0.22294	1.56561	0.11731
5	0.0011848	7.51738	0.54664	3.86559	0.30628
6	0.0005127	1.37006	0.12408	0.91052	0.46744
7	0.0010477	1.69160	0.07272	0.09652	0.29609
8	0.0024172	2.59062	0.15000	0.12558	0.20913
9	0.0010854	3.98053	0.26106	1.30382	0.09381
10	0.0006245	6.13190	0.47427	3.54403	0.16954
11	-0.0060688	3.25791	0.16611	1.53815	0.20540

12	0.0042448	2.91646	0.12440	0.52614	0.17339
13	0.0044297	3.02590	0.11762	0.33527	0.10892
14	0.0002017	3.75119	0.35654	1.30772	0.05674
15	-0.0006538	5.07043	0.76458	3.02291	0.09634
16	0.0011481	5.54903	0.24954	2.43247	0.12591

OBS	X1	X2	R2M12	R2M13	R2M14	R2M23	R2M24
17	1	-1	0.015177	0.005877	0.000342	0.007160	0.0004169
18	1	0	-0.008284	0.002242	-0.003530	-0.005481	0.0086312
19	1	1	0.002435	-0.001948	-0.000455	-0.002462	-0.0005748
20	1	2	-0.004699	-0.014607	-0.013896	0.002823	0.0026860
21	2	-2	-0.002461	-0.006123	-0.005978	0.002358	0.0023019
22	2	-1	0.000999	0.007326	-0.001468	0.001401	-0.0002807
23	2	0	0.002574	-0.001089	-0.003099	-0.000741	-0.0021078
24	2	1	0.001677	-0.000063	-0.001736	-0.000102	-0.0027961
25	2	2	-0.000719	-0.000575	-0.000085	0.005943	0.0008790

OBS	R2M34	MED_D1	MED_D2	MED_D3	MED_D4
17	0.0001615	4.18823	0.14454	1.20228	0.02755
18	-0.0023360	3.86713	0.33930	0.81514	0.09920
19	0.0004597	4.00610	0.55320	1.35197	0.02677
20	0.0083489	4.58130	0.77958	3.05407	0.09629
21	0.0057267	8.13479	0.27489	3.54743	0.49089
22	-0.0020583	6.31662	0.21202	2.03098	0.38963
23	0.0008920	5.00342	0.57710	1.63746	0.28707
24	0.0001057	4.44665	0.77961	2.02535	0.12618
25	0.0007035	4.60320	1.31684	3.39598	0.11354

Estimativas da função perda esperada pelo Método de Ribeiro e Albin de acordo com cada tratamento para os coeficientes de interação iguais a 1 e 0, respectivamente - Segundo Caso.

OBS	X1	X2	LM1	LM2
1	-2	-2	1.616	0.8838
2	-2	-1	2.178	1.2674
3	-2	0	9.774	6.8330
4	-2	1	35.020	25.3358
5	-2	2	111.348	72.4217
6	-1	-2	5.689	3.0363
7	-1	-1	3.859	3.0172
8	-1	0	8.083	6.7453
9	-1	1	25.282	18.1935
10	-1	2	77.268	49.2252
11	0	-2	19.563	12.7412
12	0	-1	10.734	8.1604
13	0	0	10.958	9.1667
14	0	1	22.978	15.9506
15	0	2	58.958	36.5929
16	1	-2	52.201	35.7082
17	1	-1	26.256	20.2603

18	1	0	20.744	15.5139
19	1	1	26.413	17.8772
20	1	2	52.383	31.6483
21	2	-2	117.237	79.3030
22	2	-1	62.476	44.5358
23	2	0	42.953	28.8594
24	2	1	39.863	24.8991
25	2	2	60.400	33.1706

Apêndice C

Todas as informações contidas neste apêndice são referentes ao Terceiro Caso - Capítulo 4.

Dados coletados do experimento fatorial 2^6 utilizado para o estudo sobre a fabricação de tintas.

Tabela 1. Experimento fatorial 2^6 com as respostas resistência, cor e brilho.

Ordem da rodada executada	Níveis dos Fatores						Respostas		
	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Resistência Y1	Cor Y2	Brilho Y3
26	-1	-1	-1	-1	-1	-1	3.4	15	36
3	1	-1	-1	-1	-1	-1	9.7	5	35
11	-1	1	-1	-1	-1	-1	7.4	23	37
5	1	1	-1	-1	-1	-1	10.6	8	34
42	-1	-1	1	-1	-1	-1	6.5	20	20
18	1	-1	1	-1	-1	-1	7.9	9	32
41	-1	1	1	-1	-1	-1	10.3	13	28
14	1	1	1	-1	-1	-1	9.5	5	38
17	-1	-1	-1	1	-1	-1	14.3	23	40
27	1	-1	-1	1	-1	-1	10.5	1	32
19	-1	1	-1	1	-1	-1	7.8	11	32
56	1	1	-1	1	-1	-1	17.2	5	28
23	-1	-1	1	1	-1	-1	9.4	15	34
8	1	-1	1	1	-1	-1	12.1	8	26
32	-1	1	1	1	-1	-1	9.5	15	30
7	1	1	1	1	-1	-1	15.8	1	28
46	-1	-1	-1	-1	1	-1	8.3	22	40
13	1	-1	-1	-1	1	-1	8.0	8	30
58	-1	1	-1	-1	1	-1	7.9	16	35
38	1	1	-1	-1	1	-1	10.7	7	35
43	-1	-1	1	-1	1	-1	7.2	25	32
55	1	-1	1	-1	1	-1	7.2	5	35
6	-1	1	1	-1	1	-1	7.9	17	36
64	1	1	1	-1	1	-1	10.2	8	32
22	-1	-1	-1	1	1	-1	10.3	10	20
4	1	-1	-1	1	1	-1	9.9	3	35
16	-1	1	-1	1	1	-1	7.4	22	35
47	1	1	-1	1	1	-1	10.5	6	28
63	-1	-1	1	1	1	-1	9.6	24	37
51	1	-1	1	1	1	-1	15.1	4	36
20	-1	1	1	1	1	-1	8.7	10	36
29	1	1	1	1	1	-1	12.1	5	35
62	-1	-1	-1	-1	-1	1	12.6	32	32
1	1	-1	-1	-1	-1	1	10.5	10	34
37	-1	1	-1	-1	-1	1	11.3	28	30
61	1	1	-1	-1	-1	1	10.6	18	24

44	-1	-1	1	-1	-1	1	8.1	22	30
24	1	-1	1	-1	-1	1	12.5	31	20
59	-1	1	1	-1	-1	1	11.1	17	32
60	1	1	1	-1	-1	1	12.9	16	25
35	-1	-1	-1	1	-1	1	14.6	38	20
50	1	-1	-1	1	-1	1	12.7	12	20
48	-1	1	-1	1	-1	1	10.8	34	22
36	1	1	-1	1	-1	1	17.1	19	35
21	-1	-1	1	1	-1	1	13.6	12	26
9	1	-1	1	1	-1	1	14.6	14	15
33	-1	1	1	1	-1	1	13.3	25	19
57	1	1	1	1	-1	1	14.4	16	24
10	-1	-1	-1	-1	1	1	11.0	31	22
39	1	-1	-1	-1	1	1	12.5	14	23
25	-1	1	-1	-1	1	1	8.9	23	22
40	1	1	-1	-1	1	1	13.1	23	18
30	-1	-1	1	-1	1	1	7.6	28	20
31	1	-1	1	-1	1	1	8.6	20	20
28	-1	1	1	-1	1	1	11.8	18	20
49	1	1	1	-1	1	1	12.4	11	36
52	-1	-1	-1	1	1	1	13.4	39	20
15	1	-1	-1	1	1	1	14.6	30	11
34	-1	1	-1	1	1	1	14.9	31	20
53	1	1	-1	1	1	1	11.8	6	35
2	-1	-1	1	1	1	1	15.6	33	16
12	1	-1	1	1	1	1	12.8	23	32
45	-1	1	1	1	1	1	13.5	31	20
54	1	1	1	1	1	1	15.8	11	20

Estimativas de média, desvio padrão e desvio médio para as respostas resistência, cor e brilho de acordo com cada tratamento, respectivamente. Estimativas de covariâncias de resistência e cor, resistência e brilho e, cor e brilho, respectivamente - Terceiro Caso.

OBS	X1	X4	X6	MED1	MED2	MED3	DP1	DP2	DP3
1	-1	-1	-1	7.3625	18.875	33.000	1.94785	4.25735	6.34710
2	-1	-1	1	10.3000	24.875	26.000	1.84236	5.71808	5.45108
3	-1	1	-1	9.6250	16.250	33.000	2.12183	5.94619	6.07101
4	-1	1	1	13.7125	30.375	20.375	1.44265	8.61788	2.82527
5	1	-1	-1	9.2250	6.875	33.875	1.34563	1.64208	2.47487
6	1	-1	1	11.6375	17.875	25.000	1.57656	6.87516	6.61168
7	1	1	-1	12.9000	4.125	31.000	2.76561	2.41646	3.96412
8	1	1	1	14.2250	16.375	24.000	1.74417	7.53918	9.16515

OBS	X1	X4	X6	MED_D1	MED_D2	MED_D3	R2M12	R2M13	R2M23
1	-1	-1	-1	7.47188	3.625	8.500	-0.71094	2.01875	-3.18750
2	-1	-1	1	4.53437	6.125	5.000	-2.31250	-0.47500	0.12500
3	-1	1	-1	5.20938	6.000	8.500	1.40000	-3.33750	-3.75000

4	-1	1	1	1.32969	12.375	5.625	-0.09824	-0.86113	2.26563
5	1	-1	-1	5.60938	13.125	7.875	0.12812	-0.82813	2.76563
6	1	-1	1	3.19688	5.625	5.500	-2.18906	0.13125	4.81250
7	1	1	-1	2.83359	15.875	5.000	-0.12979	-0.04141	2.87500
8	1	1	1	1.41719	6.875	8.000	0.51973	-0.65391	4.87500

Estimativas da perda esperada para cada tratamento de acordo com os coeficiente de interação 1 e 0, respectivamente - Terceiro Caso.

OBS	X1	X4	X6	LM1	LM2
1	-1	-1	-1	306.559	187.029
2	-1	-1	1	245.444	167.036
3	-1	1	-1	248.010	127.161
4	-1	1	1	229.779	134.929
5	1	-1	-1	523.673	300.451
6	1	-1	1	186.756	117.498
7	1	1	-1	429.489	288.259
8	1	1	1	213.889	133.067

Bibliografia

- Box, G. (1988). Signal-to-Noise Ratios, Performance Criteria, and Transformations, *Technometrics*, V. 30, N. 1, p. 1-17.
- Box, G. E. P., Draper, N. R. (1987). *Empirical Model Building and Response Surfaces*. New York: Jonh Wiley.
- Box, G. E. P., Hunter, W. G., Hunter, J. S. (1978). *Statistics for Experimenters: An Introduction to Design, Data Analysis and Model Building*. New York: Jonh Wiley & Sons, Inc.
- Box, G. E. P., Hunter, W. G., MacGregor, J. F., Erjavec, J. (1973). Some Problems Associated With the Analysis of Multiresponse Data, *Technometrics*, V. 15, N. 1, p. 33-51.
- Byrne, D. M., Taguchi, S. (1987). The Taguchi Approach to Parameter Design, *Quality Progress*, p. 19-26,
- Daniel, C. (1976). *Applications of Statistics to Industrial Experimentation*. New York: Jonh Willey.
- Davies, O. L. (1954). *Design and Analysis of Industrial Experiments*. Hafner (Macmillan).
- Derringer, G., Suich, R. (1980). Simultaneous Optimization of Several Response Variables *Technometrics*, V. 12, N. 4, p. 214-219.
- Elsayed, E. A., Chen, A. (1993). Optimal Levels of Process Parameters for Products With Multiple Characteristics, *International Journal of Production Research*, V. 31, N. 5, p. 1117-1132.
- Gnanadesikan, R. (1977). *Methods for Statistical Data Analysis of Multivariate Observations*. New York: John Wiley.
- Hill, W. J., Hunter, W. G., Jr. (1966). A Review of Response Surface Methodology: A Literature Review, *Technometrics*, V. 8, N. 4, p. 571-590.
- Kacker, R. N. (1985). Off-Line Quality Control, Parameter Design, and the Taguchi Method, *Journal of Quality Technology*, V. 17, N. 4, p. 176-188.
- _____ (1986). Taguchi's Quality Philosophy: Analysis and Comentary, *Quality Progress*, p. 21-29.
- Khuri, A. I., Conlon, M. (1981). Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Regression Functions, *Technometrics*, V. 23, N. 4, p. 363-375.
- Leon, R. V. Shoemaker, A. C., Kacker, R. N. (1987). Performance Measures Independent of

- Adjustment: An Exploration an Extension of Taguchi's Signal to Noise Ratios, *Technometrics*, V. 29, N. 3, p. 253-265.
- Lenth, R. V. (1989). Quick and Easy Analysis of Unreplicated Factorials, *Technometrics*, V. 31, N. 4, p. 469-473.
- Lind, E. E., Goldin, J., Hickman, J. B. (1960). Fitting Yield and Cost Response Surface, *Chemistry Eng. Prog.*, V. 56, N. 11, p. 62-68. Apud Hill, W. J., Hunter, W. G., Jr. (1966). A Review of Response Surface Methodology: A Literature Review, *Technometrics*, V. 8, N. 4, p. 571-590.
- Maghsoodloo, S. (1990). The Exact Relation of Taguchi's Signal-to-Noise Ratio to His Quality Loss Function, *Journal of Quality Technology*, V. 22, N. 1, p. 57-67.
- Montgomery, D. C. (1991). *Design and Analysis of Experiments*. 3rd. Canada. Jonh Wiley & Sons, Inc.
- Myers, R. H. (1976). *Response Surface Methodology*. Department os Statistics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.
- Myers, R. H., Carter, W. H., Jr. (1973). Response Surface Techniques for Dual Response Systems, *Technometrics*, V. 15, N. 2, p. 301-317.
- Myers, R. H., Khuri, A. I., Carter, W. H., Jr. (1989). Response Surface Methodology: 1966-1988, *Technometrics*, V. 31, N. 2, p. 137-157.
- Myers, R. H., Khuri, A. I., Vining, G. (1992). Response Surface Alternatives to the Taguchi Robust Parameter Design Approach, *The American Statistician*, V. 46, N. 2, p. 131-139.
- Nair, V. N. (1992). Taguchi's Parameter Design: A Panel Discussion, *Technometrics*, V. 34, N. 2, p. 127-161.
- Peace, G. S. (1993). *Taguchi Methods - A Hands-on Approach*. Addison Wesley Publishing Company, Inc. Massachusetts.
- Pignatiello, J. J., Jr. (1988). An Overview of the Strategy and Tatics of Taguchi, *IIE Transactions*, V. 20, N. 3, p. 247-254.
- _____ (1993). Strategies for Robust Multiresponse Quality Engineering, *IIE Transactions*, V. 25, p. 5-15.
- Phadke, M. S. (1989). *Quality Engineering and Robust Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

- Ribeiro, J. L., Elsayed, E. A. (1995). A Case Study on Process Optimization Using the Gradient Loss Function, *International Journal of Production Research*, V. 33, N. 12, p. 3233-3248.
- Ribeiro, J. L. D., Albin, S. L. (1993). An Objective Function of Multiple Quality Characteristics for Parameter Optimization Experiments. Department of Industrial Engineering - Rutgers University. *IE Working Paper* 93-111.
- Sullivan, L. P. (1984). Reducing Variability: A New Approach to Quality, *Quality Progress*, vol 17, N. 7, p. 15-21.
- Vining, G. G., Myers, R. H. (1990). Combining Taguchi and Response Surface Philosophies: A Dual Response Approach, *Journal of Quality Technology*, V. 22, N. 1, p. 38-45.
- Vivacqua, C. A. (1995). Uma Apresentação e Crítica aos Métodos de Taguchi em Planejamento de Experimentos. Campinas: IMECC - UNICAMP. Dissertação de Mestrado em Estatística.
- Taguchi, G. (1985). Quality Engineering in Japan, *Communications Statistics - Theory Methods*, V. 14, N. 11, p. 2785-2801.
- Oh, H. L. (1988). Variation Tolerant Design, Proceedings of the Conference on Uncertainty in Engineering Design, Gaithersburg, Maryland, USA. Apud Ribeiro, J. L. e Elsayed, E. A. (1995). A Case Study on Process Optimization Using the Gradient Loss Function, *International Journal of Production Research*, V. 33, N. 12, p. 3233-3248.