ERRATA nos 2 exemplares da tese do aluno Mauricio de Araujo Ferreira:

Na capa:

Onde se lê:	Leia-se:
Maurício de Araujo Ferreira	Mauricio de Araujo Ferreira

Em folha i:

Onde se lê:	Leia-se:
Maurício de Araujo Ferreira	Mauricio de Araujo Ferreira

Em folha ii:

Onde se lê:	Leia-se:
Maurício de Araujo Ferreira	Mauricio de Araujo Ferreira

Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta
Coordenador CPG/IMECC
Matric. 042471 - UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Funções valorização e anéis de valorização de Dubrovin em álgebras simples

por

Maurício de Araujo Ferreira

Doutorado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Antonio José Engler

IMECC - UNICAMP

Coorientador: Prof. Dr. Adrian Roscoe Wadsworth

University of California, San Diego

Financiamento: CAPES e FAPESP

Campinas, SP

2011

Funções valorização e anéis de valorização de Dubrovin em álgebras simples

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Maurício de Araujo Ferreira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 30 de setembro de 2011.

Prof. Dr. Antonio José Engler
Orientador

Adrian R. Wadsworth
Prof. Dr. Adrian Roscoe Wadsworth
Coorientador

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Antonio José Engler (IMECC–UNICAMP) – Orientador
Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos (IME-USP)
Prof. Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero (UFRGS)
Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura (IMECC–UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti (IMECC–UNICAMP)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR ANA REGINA MACHADO – CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – UNICAMP

F413f

Ferreira, Maurício de Araujo, 1982-
Funções valorização e anéis de valorização de Dubrovin em álgebras simples / Maurício de Araujo Ferreira. – Campinas, SP : [s.n.], 2011.

Orientador: Antonio José Engler.
Coorientador: Adrian Roscoe Wadsworth.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria da valorização. 2. Anéis de divisão. 3. Álgebras associativas. 4. Anéis graduados. 5. Anéis de valorização de Dubrovin. I. Engler, Antonio José, 1944-. II. Wadsworth, Adrian Roscoe. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Value functions and Dubrovin valuation rings on simple algebras
Palavras-chave em inglês:
Valuation theory
Division rings
Associative algebras
Graded rings
Dubrovin valuation rings
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Antonio José Engler [Orientador]
Eduardo do Nascimento Marcos
Miguel Angel Alberto Ferrero
Adriano Adrega de Moura
Paulo Roberto Brumatti
Data da defesa: 30-09-2011
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 30 de setembro de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). ANTONIO JOSÉ ENGLER

Prof(a). Dr(a). EDUARDO DO NASCIMENTO MARCOS

Prof(a). Dr(a). MIGUEL ANGEL ALBERTO FERRERO

Prof(a). Dr(a). ADRIANO ADREGA DE MOURA

Prof(a). Dr(a). PAULO ROBERTO BRUMATTI

Este trabalho é dedicado as duas pessoas dão sentido a minha vida, minha mãe Luzia Lopes de Araujo e minha esposa Márcia Braga de Carvalho Ferreira

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer ao meu orientador Professor Antônio José Engler pela excelente orientação que foi muito além de uma tese de doutorado. O aprendizado obtido durante esses longos anos de convivência me guiará em toda a minha vida acadêmica. Obrigado também pela confiança depositada em mim e por toda ajuda durante esses anos.

I would like to thank my thesis co-advisor Professor Adrian Wadsworth for all help during the last three years. Thank you for receiving me so kindly in San Diego and for all support during my staying there. Thank you for being always available to talk and for answering so patiently all my questions. Thank you also for your visit during the winter of 2010, a time when the main results of this thesis were obtain.

I would also like to thank the Mathematics Department of the University of California, San Diego for its hospitality during my visit in 2009.

Eu gostaria de agradecer também a banca examinadora pelas valiosas sugestões e correções. E a todos os funcionários do IMECC, por terem sido sempre muito atenciosos em tudo o que eu precisei, em especial Ednaldo, Lívia, Reginaldo e Tânia.

Finalmente, eu gostaria de agradecer a CAPES e a FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese estudamos a relação entre duas teorias de valorização não-comutativas: anéis de valorização de Dubrovin e gauges. Os anéis de valorização de Dubrovin foram introduzidos em 1982, como uma generalização para anéis artinianos simples dos anéis de valorização invariantes em álgebras de divisão. Gauges são funções como valorizações, que podem ser definidas não só em álgebra de divisão, mas mais geralmente em álgebras simples e até mesmo semi-simples, de dimensão finita sobre corpos valorizados. Gauges foram introduzidas muito mais recentemente em 2010 por Tignol e Wadsworth. Assim como em valorizações de corpos, podemos definir um anel associado a uma gauge, que chamamos de anel da gauge. Propriedades aritméticas do anel da gauge são estudadas. Mostramos que o anel de uma gauge é sempre uma ordem semi-local integral sobre seu centro. Também descrevemos o anel da gauge com relação a composição de gauges e extensão de escalares. Introduzimos o conceito de gauge minimal em álgebras centrais simples, que são gauges cuja parte de grau zero da álgebra graduada associada tem o menor número possível de componentes simples. Mostramos que o anel de uma gauge minimal coincide com a interseção de uma família de anéis de valorização de Dubrovin, satisfazendo uma propriedade adicional, que foi introduzida por Gräter em 1992, e que é chamada de propriedade da interseção. Reciprocamente, se for dada uma família de anéis de valorização de Dubrovin, satisfazendo a propriedade da interseção, então existe uma gauge minimal associada, assumindo-se que a valorização de centro tem posto finito. O passo fundamental nesse sentido foi obtermos um teorema de existência de gauges minimais em álgebras centrais simples sobre corpos com uma valorização de posto finito. Além disso, generalizamos para álgebras simples, não necessariamente centrais, um resultado de Tignol e Wadsworth que relaciona gauges com certas funções valorização introduzidas por Morandi em 1989 e que estão associadas aos anéis de valorização de Dubrovin integrais sobre o centro. Como consequência desse último resultado, obtivemos um teorema de existência de gauges em álgebras semi-simples de dimensão finita sobre um corpo com uma valorização de posto 1.

Palavras-chave: Teoria da valorização, Anéis de divisão, Álgebras associativas, Anéis graduados, Anéis de valorização de Dubrovin.

Abstract

In this thesis work we study the connection between two theories of non-commutative valuation: Dubrovin valuation rings and gauges. Dubrovin valuation rings were introduced in 1982 as a generalization of invariant valuation rings to Artinian simple rings. Gauges are valuation-like maps that can be defined not only on division algebras, but more generally, on finite-dimensional semisimple algebras over valued fields. Gauges were introduced much more recently in 2010 by Tignol and Wadsworth. Just as for valuations on fields, we can define a ring associated to a gauge, which we call gauge ring. Arithmetic properties of the gauge ring are studied. We show that the gauge ring is always a semi-local order integral over its center. We also describe the gauge ring with respect to composition of gauges and scalar extension. We introduce the concept of minimal gauge on central simple algebras, which are gauges that the degree zero part of the associated graded ring has the least number of simple components. We show that the ring of a minimal gauge is an intersection of a family of Dubrovin valuation rings having the intersection property. The intersection property was introduced by Gräter in 1992. We also proved that if we start with a family of Dubrovin valuation rings having the intersection property, then there exist a minimal gauge associated, assuming that the valuation of the center has finite rank. In this direction, our main result is an existence theorem of minimal gauges on central simple algebra over a field with a finite rank valuation. We also generalize for simple algebras, non-necessarily central, a result of Tignol and Wadsworth which relate gauges with certain value functions introduced by Morandi in 1989. This value functions are associated to Dubrovin valuation rings integral over its center. As a consequence of this last result, we obtain an existence theorem of gauges on finite dimensional semisimple algebras over a field with a rank one valuation.

Key words: Valuation theory, Division rings, Associative algebras, Graded rings, Dubrovin valuation rings.

Sumário

Notação

Ao longo desse trabalho, Γ denota sempre um grupo abeliano, divisível e totalmente ordenado, escrito aditivamente, que contém os valores de todas as valorizações e os graus (índices) de todas as graduações que considerarmos. Se v é uma valorização em um corpo F, então V denota sempre o anel de valorização determinado por v e vice-versa. Além disso, denotaremos por Γ_v o grupo de valores de v e por $\overline{F}^v$ o corpo de resíduos de v, ou simplesmente $\overline{F}$ quando houver uma única valorização envolvida. Da mesma forma, se α é uma função valorização em uma álgebra A então escrevemos R_α para denotar o anel $\{a \in A \mid \alpha(a) \geq 0\}$. Também escrevemos sempre Γ_α para denotar o conjunto de valores $\alpha(A \setminus \{0\})$, o qual não é necessariamente um grupo. Se S é um anel, então denotaremos por $\overline{S}$ o anel quociente $S/J(S)$, onde $J(S)$ é o radical de Jacobson de S. Além disso, se R é um subanel de S contendo $J(S)$, então $\widetilde{R}$ denota o anel $R/J(S)$.

Lista de Símbolos

$(a,b)_F$	álgebra de quatérnios.
(F^h, v^h)	henselização do corpo valorizado (F, v).
$\alpha \leq \beta$	β é uma função valorização menos fina que α, pág. 40.
$\alpha \otimes \beta$	função valorização no produto tensorial, pág. 43.
$\delta(W/V)$	defeito, pág. 47.
Γ_B	grupo de valores do anel de valorização de Dubrovin B, pág. 6.

Γ_R	conjunto de graduação de uma anel graduado R, pág. 11.
$\mathrm{gr}_\alpha(A)$	álgebra graduada associada a α.
$\mathbb{Q}$	corpo dos números racionais.
$\mathbb{Q}_p$	corpo dos números p-ádicos.
$\mathbb{Z}$	anel dos inteiros.
$\omega(\alpha)$	número de componentes simples da parte de grau zero de $\mathrm{gr}_\alpha(A)$, pág. 59.
$\mathrm{Br}(K)$	grupo de Brauer do corpo K.
$\deg(r)$	grau de um elemento homogêneo r, pág. 11.
$\mathrm{st}(B)$	estabilizador de B, pág. 6.
$\xi(V)$	número da extensão $(\xi(V, A))$, pág. 73.
$A^\times$	conjunto das unidades do anel A.
d'	imagem de um elemento na álgebra graduada, pág. 23.
$j(V, A)$	posto degrau, pág. 74.
$q(F)$	corpo de frações, pág. 21.
$v \leq w$	w é uma valorização menos fina de v, pág. 39.
V_P	localização do anel V pelo ideal primo P.

Capítulo 1

Introdução

A história da Teoria de Valorizações começou em 1912, quando o matemático húngaro Josef Kürschák formulou os axiomas de valorização em corpos. A principal motivação foi a tentativa de melhorar a fundamentação da teoria de corpos p-ádicos definidos por Kurt Hensel. Valorizações permitiram que a estrutura aritmética de corpos de números fossem melhor entendidas. Isto impulsionou o desenvolvimento da teoria nas décadas seguintes, principalmente através dos trabalhos de Helmut Hasse e Alexander Ostrowski.

Na terminologia moderna, a valorização definida por Kürschák é denominada valor absoluto, enquanto o termo valorização é dedicado a um conceito mais geral apresentado por Wolfgang Krull em 1932. Este conceito mais geral de valorização se mostrou aplicável em outras áreas da matemática como geometria algébrica e análise funcional. O início da história da Teoria de valorização é contada por Roquette em [**Ro**]. As referências principais sobre Teoria de Valorização são Endler [**E1**], Engler e Prestel [**EP**] e Efrat [**Ef**].

A eficiência da Teoria de Valorizações no estudo da aritmética de corpos levou naturalmente a tentativa de generalizá-la para estruturas mais gerais, como álgebras de divisão e álgebras centrais simples, que podemos chamar de *valorizações não-comutativas.* O primeiro conceito de anel de valorização não-comutativo apareceu no trabalho de Hasse em [**Ha**] em 1931 e foi melhor explorado posteriormente no livro de Schilling [**Sch**]. Atualmente estes anéis são conhecidos por anéis de valorização invariantes: um subanel R de um anel de divisão D é dito um *anel de valorização invariante* se satisfaz

(1.1) (i) Se $d \in D^{\times}$, então $d \in R$ ou $d^{-1} \in R$;

(ii) $dRd^{-1} = R$ para todo $d \in D^{\times}$.

A grande vantagem dos anéis de valorização invariantes é que, assim como acontece com corpos, podemos associar uma valorização a estes anéis. Como $aR = Ra$ para cada $a \in D^{\times}$, temos que $\Lambda = \{aR \mid a \in D^{\times}\}$ é um grupo com a operação $(aR) \cdot (bR) = abR$. Além disso, a relação de ordem, $aR \leq bR$ se e somente se $aR \supseteq bR$, faz de Γ um grupo totalmente ordenado. A função $v : D \to \Lambda \cup \{\infty\}$, definida por $v(d) = dR$ se $d \in D^{\times}$ e $v(0) = \infty$ é uma valorização, pois para todo $c, d \in D$ temos:

(1.2) (i) $v(d) = \infty$ se e somente se $d = 0$;

(ii) $v(cd) = v(c) + v(d)$;

(iii) $v(c + d) \geq \min\{v(c), v(d)\}$.

Reciprocamente, se $v : D \to \Gamma \cup \{\infty\}$ é uma valorização em D, isto é, v satisfaz as propriedades (i), (ii) e (iii) de (1.2), então o subconjunto

$$R_v = \{d \in D \mid v(d) \geq 0\} \tag{1.3}$$

é um anel de valorização invariante de D. Denotamos o grupo de valores $v(D^{\times})$ de v por Γ_D e o anel de resíduos $R_v/J(R_v)$ por $\overline{D}$, onde $J(R_v)$ denota o Radical de Jacobson de R_v.

A grande desvantagem dos anéis de valorização invariantes é que estes não tem boas propriedades de extensão. O teorema a seguir estabelece um critério para a existência de uma valorização na álgebra de divisão, estendendo uma valorização do centro.

Teorema 1.4. *Seja D um anel de divisão com dimensão finita sobre seu centro F. Uma valorização v de F se estende para uma valorização w em D se e somente se v tem extensão única para cada corpo intermediário $F \subset L \subset D$. Assim, v tem no máximo uma extensão em D.*

O Teorema 1.4 foi demonstrado por Ershov em [**Er**] e independentemente por Wadsworth em [**W1**]. Note que pelo Teorema 1.4 a existência da extensão está condicionada a uma hipótese muito restritiva sobre as extensões da valorização para os corpos intermediários. Portanto, o Teorema 1.4 sugere que valorizações em álgebras de divisão são objetos muito raros, em comparação com valorizações em corpos.

Mais recentemente, P. Morandi forneceu em [**M1**] um outro critério útil, para decidir quando uma valorização do centro se estende para uma valorização na álgebra de divisão.

Teorema 1.5. *Sob as hipóteses do Teorema 1.4, seja (F^h, v^h) a henselização de (F, v). Então v se estende para uma valorização em D se e somente se $D \otimes_F F^h$ é um anel de divisão. Quando isto ocorre, $\overline{D \otimes_F F^h} = \overline{D}$ e $\Gamma_{D\otimes_F F^h} = \Gamma_D$, e a valorização em D é a restrição da valorização em $D\otimes_F F^h$, que é a única extensão de v^h em F^h.*

O Teorema 1.5 já havia sido estabelecido por P. M. Cohn em [**C**] para valorizações de posto 1, trocando-se a henselização pelo completamento.

Note que pelo Teorema 1.5, se o centro é um corpo henseliano, então a valorização sempre se estende. Isso permitiu que valorizações fossem utilizadas no estudo de propriedades aritméticas de anéis de divisão de dimensão finita, principalmente no caso em que o corpo de base é henseliano. Uma visão geral do assunto, contendo os desenvolvimentos recentes da teoria e aplicações pode ser encontrada em [**W3**].

Por outro lado, quando o corpo de base não é henseliano, a extensão pode simplesmente não existir, como no exemplo abaixo.

Exemplo 1.6. Considere a álgebra de quatérnios $(-1,-1)_{\mathbb{Q}}$ sobre o corpo de números racionais $\mathbb{Q}$. Temos que $\mathbb{Q}(i)$ é uma extensão quadrática de $\mathbb{Q}$ dentro de $(-1,-1)_{\mathbb{Q}}$. Como $5 = (2-i)(2+i)$ em $\mathbb{Q}(i)$, temos que a valorização 5-ádica de $\mathbb{Q}$ tem duas extensões distintas para $\mathbb{Q}(i)$. Portanto, a valorização 5-ádica não se estende para uma valorização na álgebra de quatérnios $(-1,-1)_{\mathbb{Q}}$. Mais geralmente, se $\mathcal{P}$ denota o conjunto dos números primos e $\mathbb{Q}_p$ é o corpo dos números p-ádicos, que é o completamento de $\mathbb{Q}$ com relação à valorização p-ádica v_p, então a teoria global de corpos de classe nos dá uma aplicação injetiva

$$\mathrm{Br}(\mathbb{Q}) \hookrightarrow \Big(\bigoplus_{p\in\mathcal{P}} \mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p)\Big) \oplus \mathrm{Br}(\mathbb{R}),$$

que aplica cada classe $[A] \in \mathrm{Br}(\mathbb{Q})$ para $\big(([A\otimes\mathbb{Q}_p])_{p\in\mathcal{P}}, [A\otimes\mathbb{R}]\big)$ e tal que $[A\otimes\mathbb{Q}_p] = 0$ para quase todo $p \in \mathcal{P}$ (cf. [**P**, Thm. 18.5 e Prop. 18.5]). Segue do Teorema 1.5 que para cada álgebra de divisão sobre o corpo de números racionais, no máximo um número finito de valorizações p-ádicas pode se extender.

Um segundo conceito de anel de valorização não-comutativo é o *anel de valorização total*, cuja terminologia foi introduzida por P. M. Cohn em [**C**]. Um subanel T de um anel de divisão D é dito um anel de valorização total se para todo $d \in D^{\times}$, tem-se $d \in T$ ou $d^{-1} \in T$. Note que todo anel de valorização invariante é um anel de valorização total. Um exemplo de um anel de valorização total mas não invariante é dado no Exemplo 3.14.

Lembre que se L é uma extensão finita de F e V é um anel de valorização de F, então V sempre se estende para L. O número de extensões distintas é limitado por $[L : F]$ e o fecho integral de V em L é a interseção de todas as extensões. Além disso, se L é uma extensão normal, então as extensões são conjugadas. O resultado seguinte estabelece que os anéis de valorização totais tem um comportamento similar ao caso comutativo.

Teorema 1.7. *Seja D um anel de divisão de dimensão finita sobre seu centro F e seja V um anel de valorização em F. Então V se estende para um anel de valorização total em D se e somente se o fecho integral de V em D é um subanel de D. Mais ainda, se V pode ser estendido para D então o seguinte vale:*

(1) *V tem apenas um número finito $B_1, \dots, B_k$ de extensões totais.*

(2) $k \leq n = \sqrt{[D : F]}$.

(3) *$B_1 \cap \cdots \cap B_k$ é o fecho integral de V em D.*

(4) *Todas as extensões de V são conjugadas, isto é, se B e B' são extensões de V para D então $B' = dBd^{-1}$ para algum $d \in D^{\times}$.*

Segue de [**W2**, Thm. E] que k é o tamanho matricial de $D \otimes_F F^h$, isto é, $D \otimes_F F^h \cong M_k(E)$, onde E é uma F^h-álgebra de divisão. Assim, pelo Teorema 1.5, $k = 1$ se e somente se a extensão é um anel de valorização invariante.

Assim como os anéis de valorização invariantes, os anéis de valorização totais não possuem boas propriedades de extensão. P. M. Cohn mostrou em [**C**, Thm. 3] que se D é uma álgebra de divisão de dimensão finita sobre seu centro F e se V é um anel de valorização de F de posto 1, então todo anel de valorização total de D estendendo V é invariante. Assim, o Exemplo 1.6 fornece também um exemplo de uma álgebra de divisão que não admite anel de valorização total estendendo a valorização 5-ádica do centro.

Em 1982, uma outra teoria de valorização não-comutativa foi apresentada por Dubrovin [**Du1**], a qual consiste em uma generalização dos anéis de valorização invariantes, não apenas para álgebras de divisão, mas que valem mais geralmente para anéis artinianos simples. Esses anéis são hoje conhecidos como *anéis de* *valorização de Dubrovin*. Eles são definidos como segue: seja A um anel artiniano simples, um subanel $B \subseteq A$ é dito um anel de valorização de Dubrovin de A se

(1.8) (i) $B/J(B)$ é artiniano simples;

(ii) se $s \in A \backslash B$, então existem $b_1, b_2 \in B$ tais que $b_1 s, sb_2 \in B \backslash J(B)$,

onde $J(B)$ denota o radical de Jacobson de B. O anel $\overline{B} = B/J(B)$ é chamado de anel de resíduos de B.

Apesar de não ficar claro a partir da definição que estes anéis merecem o nome de anéis de valorização, por não terem uma propriedade como (1.1), a nomenclatura é justificada pelas propriedades listadas abaixo (ver [**Du1**] e [**Du2**]). Seja $F = Z(A)$ e seja $V = F \cap B = Z(B)$.

(1.9) V é um anel de valorização de F.

(1.10) Os ideais bilaterais de B são totalmente ordenados por inclusão.

(1.11) Se B é um anel de valorização de Dubrovin de A e S é um subanel de A contendo B então S é um anel de valorização de Dubrovin de A e $\widetilde{B} = B/J(S)$ é um anel de valorização de Dubrovin de $\overline{S} = S/J(S)$. Além disso, $J(S)$ é um ideal primo de B e $\mathcal{C}_B(J(S)) = \{c \in B \mid [c + J(S)]$ é regular modulo $J(S)\}$ é um *conjunto de Ore* regular de B. Então podemos construir o anel quociente B com relação $\mathcal{C}_B(J(S))$, que denotamos por $B_{J(S)}$, a localização de B pelo ideal primo $J(S)$. Neste caso, temos ainda que $S = B_{J(S)}$. Maiores detalhes sobre localização de anéis não comutativos por conjuntos de Ore podem ser encontrados em [**MMU**, §1].

(1.12) Se S é um anel de valorização de Dubrovin de A e $\widetilde{B}$ é um anel de valorização de Dubrovin de $\overline{S} = S/J(S)$ então $B = \{r \in S \mid r + J(S) \in \widetilde{B}\}$ é um anel de valorização de Dubrovin de A.

(1.13) Suponhamos $[A : F] < \infty$. Para todo ideal primo P de B, considere $\mathcal{P} = P \cap V$. Então $\mathcal{P}$ é um ideal primo de V, e a localização central $B_{\mathcal{P}}$ é um subanel de A contendo B e $J(B_{\mathcal{P}}) = P$. Então, combinando isto com (1.11), obtemos que existe uma correspondência bijetiva entre os ideais primos de B, os ideais primos de V, e os subaneis de A contendo B.

(1.14) O anel de matrizes $M_n(B)$ é um anel de valorização de Dubrovin de $M_n(A)$. Mais ainda, se $A = M_n(D)$, onde D é um anel de divisão, então existe um anel de valorização de Dubrovin R de D com $B = q^{-1} M_n(R) q$, para algum $q \in A^{\times}$.

Embora não exista em geral uma valorização associada aos anéis de valorização de Dubrovin, podemos definir um grupo de valores associado a esses anéis. Seja B uma anel de valorização de Dubrovin de um anel artiniano simples A. Definimos

$$\mathrm{st}(B) = \{a \in A^\times \mid aBa^{-1} = B\},$$

o *estabilizador* de B sobre a ação de $A^\times$, que é um subgrupo de $A^\times$. Note que $B^\times$ é um subgrupo normal de $\mathrm{st}(B)$. Então definimos o *grupo de valores* de B por

$$\Gamma_B = \mathrm{st}(B)/B^\times.$$

Seja (F, v) um corpo valorizado e A uma F-álgebra central simples. Seja (F^h, v^h) a henselização de (F, v). Então $A \otimes_F F^h \cong M_n(D)$, onde D é um uma F^h-álgebra de divisão central. Seja w a valorização em D estendendo a valorização henseliana v^h. Seja $\overline{D}$ o anel de resíduos e Γ_w o grupo de valores de w. Se B é um anel de valorização de Dubrovin de A, com $Z(B) = V$, então temos por [**W2**, Thm. B] que

$$\Gamma_B = \Gamma_w \quad \text{e} \quad \overline{B} \cong M_t(\overline{D}), \text{ para algum } t \geq 1. \tag{1.15}$$

Nota 1.16. Se R é um anel de valorização total em um anel de divisão D, então R é um anel de valorização de Dubrovin. Para verificar isso, vejamos que o conjuntos dos ideais à direita de R é totalmente ordenado pela inclusão. Sejam I, J ideais não nulos à direita de R com $I \nsubseteq J$. Seja $x \in I \setminus J$. Para todo $a \in J \setminus \{0\}$ devemos ter $a^{-1}x \in R$ ou $x^{-1}a \in R$. Mas $a^{-1}x \in R$ implica $x = a(a^{-1}x) \in J$, o que não é possível. Então $a = x(x^{-1}a) \in I$. Portanto, $J \subseteq I$. Segue que $J(R)$ é o único ideal maximal à direita de R e então $J(R) = R \setminus R^\times$. Portanto, $R/J(R)$ é um anel de divisão, logo artiniano simples. Para a segunda propriedade de (1.8), note que se $s \in D \setminus R$, então $s^{-1} \in R$, logo $1 = ss^{-1} = s^{-1}s \in R \setminus J(R)$.

Além de poderem ser encontrados em álgebras centrais simples e não apenas álgebras de divisão, outra grande vantagem dos anéis de valorização de Dubrovin, em relação aos anéis de valorização totais e invariantes, é que estes possuem propriedades de extensão muito boas. O resultado seguinte foi obtido primeiramente por Dubrovin [**Du2**] e uma demonstração mais simples foi dada por Brungs and Gräter em [**BG**].

Teorema 1.17. *Seja A um anel artiniano simples com dimensão finita sobre seu centro F e seja V um anel de valorização de F. Então existe um anel de valorização de Dubrovin B de A com $B \cap F = Z(B) = V$.*

Além disso, apesar de o número de extensões poder ser infinito, tem-se uma certa unicidade, como pode ser visto no Teorema 1.18 abaixo, que foi demonstrado por Brungs e Gräter em [**BG**] no caso em que V tem posto finito, e em geral por Wadsworth em [**W2**].

Teorema 1.18. *Sejam B_1 e B_2 anéis de valorização de Dubrovin em um anel artiniano simples A com dimensão finita sobre seu centro F, tais que $Z(B_1) = Z(B_2)$. Então existe $q \in A^\times$ tal que $B_1 = qB_2q^{-1}$.*

A grande desvantagem dos anéis de valorização de Dubrovin é que em geral esses anéis não tem uma valorização associada como os anéis de valorização invariantes. Um resultado parcial foi obtido por P. Morandi em [**M2**], no qual ele estabelece a existência de uma função valorização associada a cada anel de valorização de Dubrovin, apenas no caso em esses são integrais sobre o centro. As *funções valorização de Morandi* serão discutidas na Seção 2.7.

Recentemente, Tignol e Wadsworth introduziram em [**TW1**] uma nova ferramenta à qual chamaram de *gauge*[1]. Gauges são aplicações semelhantes a valorizações que podem ser definidas não só em álgebras de divisão mas, mais geralmente, em álgebras simples, ou até mesmo semi-simples, de dimensão finita sobre corpos valorizados. Para sermos mais precisos, seja (F, v) um corpo valorizado e Γ um grupo abeliano, divisível, totalmente ordenado contendo o grupo de valores de v. Suponhamos que A é uma F-álgebra de dimensão finita. Uma aplicação $\alpha : A \to \Gamma \cup \{\infty\}$ é dita uma v-função valorização multiplicativa se para todo $x, y \in A$ e $c \in F$ temos:

(i) $\alpha(x) = \infty$ se e somente se $x = 0$;

(ii) $\alpha(x + y) \geq \min\{\alpha(x), \alpha(y)\}$;

(iii) $\alpha(cx) = v(c) + \alpha(x)$;

(iv) $\alpha(xy) \geq \alpha(x) + \alpha(y)$.

A função valorização α define uma filtração em A: para cada $\gamma \in \Gamma$ seja

$$A^{\geq\gamma} = \{x \in A \mid \alpha(x) \geq \gamma\},\ A^{>\gamma} = \{x \in A \mid \alpha(x) > \gamma\} \text{ e } A_\gamma = A^{\geq\gamma}/A^{>\gamma}. \tag{1.19}$$

Com isso, obtemos um anel graduado associado a α:

$$\mathrm{gr}_\alpha(A) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma. \tag{1.20}$$

[1] Como não encontramos um termo em português que substituísse adequadamente a palavra *gauge*, continuaremos usando o termo original em inglês.

De modo análogo, trocando-se A por F e α por v em (1.19) e (1.20), obtemos um anel graduado comutativo $\mathrm{gr}_v(F)$, tal que todo elemento homogêneo não nulo tem inverso, que chamamos de *corpo graduado*. O anel graduado $\mathrm{gr}_\alpha(A)$ tem uma estrutura de $\mathrm{gr}_v(F)$-álgebra graduada. Uma v-função valorização multiplicativa é dita uma *v-gauge* se a álgebra graduada $\mathrm{gr}_\alpha(A)$ satisfaz as duas propriedades adicionais seguintes:

(v) $\mathrm{gr}_\alpha(A)$ é uma álgebra graduada semi-simples, isto é, não contém ideais bilaterais homogêneos nilpotentes não nulos;

(vi) $\dim_{\mathrm{gr}_v(F)} \mathrm{gr}_\alpha(A) = \dim_F A$.

Veremos na Seção 3.5, que a condição (vi) acima é equivalente a uma condição sobre a valorização v ser sem defeito na álgebra A. Os conceitos de função valorização e álgebra graduada mencionados acima serão estudados com maiores detalhes no Capítulo 2. Veremos no Exemplo 2.42 que toda valorização sem defeito em álgebras de divisão de dimensão finita sobre seu centro são gauges.

Uma das limitações para um maior desenvolvimentos da teoria dos anéis de valorização de Dubrovin, foi a ausência de uma função valorização associada a esses anéis. Então é natural questionar se a recente teoria de gauges não cumpriria esse papel. Além disso, temos por (1.16) e (2.42) que a teoria dos anéis de valorização de Dubrovin e a teoria de gauges podem ambas serem vistas como generalizações dos anéis de valorização invariante para álgebras centrais simples.

Assim como em valorizações, podemos definir um anel associado a uma gauge α em uma F-álgebra de dimensão finita A como sendo $R_\alpha = \{x \in A \,|\, \alpha(x) \geq 0\}$, que chamaremos de *anel da gauge*. Como veremos no Teorema 3.6, o anel da gauge é sempre integral sobre o anel de valorização do centro. Logo não poderíamos esperar que o anel de uma gauge seja um anel de valorização de Dubrovin, exceto no caso tratado por Morandi. A Proposição 2.55 estabelece que toda função valorização de Morandi sem defeito é uma gauge. Por outro lado, observamos que os anéis da gauge tem propriedades aritméticas semelhantes as dos anéis definidos como a interseção de uma família de anéis de Dubrovin satisfazendo a *propriedade da interseção*, que é definida como segue: Seja A uma álgebra simples de dimensão finita sobre seu centro F e sejam $B_1, \ldots, B_k$ anéis de valorização de Dubrovin de A. Seja $R = \bigcap_{i=1}^k B_i$. Dizemos que $B_1, \ldots, B_k$ tem a *Propriedade da Intersecção* (IP) se $J(S) \cap R$ é um ideal primo de R, para cada anel S contendo B_i, para algum $i = 1, \ldots, k$. A propriedade da interseção foi introduzida por Gräter em [**G**]. Gräter mostrou que se V é um anel de valorização em F então sempre existe uma família de anéis de valorização de Dubrovin em A estendendo V e tendo a propriedade da interseção. Além disso, existe um número máximo de anéis com essa propriedade, que é chamado de *número da extensão* e denotado por $\xi(V, A)$. Acontece que esse número é atingido se e somente se a interseção desses anéis é integral sobre V. O objetivo central desse trabalho é estudar a relação entre o anel de uma gauge a interseção de anéis de valorização de Dubrovin tendo a propriedade da interseção.

No que segue, descrevemos o conteúdo estudado em cada capítulo e os resultados principais do trabalho.

No Capítulo 2, funções valorizações e álgebras graduadas são estudadas. Este capítulo não contém resultados novos, mas contém demonstrações mais detalhadas de resultados que aparecem na literatura com demonstrações muito enxutas ou cuja demonstração é simplesmente omitida. Este capítulo também tem a finalidade de familiarizar o leitor com a recente teoria de gauges e com as propriedades da álgebra graduada associada a uma gauge, facilitando a leitura dos capítulos subsequentes.

A teoria de gauges é um assunto novo e muito pouco é conhecido. Até então, os únicos trabalhos envolvendo gauges são: [**TW1**], no qual gauges foram introduzidas; [**TW2**], que contém propriedades adicionais de gauges e aplicações no estudo de álgebras com involuções e [**K**], no qual gauges foram utilizadas para se obter uma generalização do Teorema de Bröker-Prestel. Entretanto, propriedades aritméticas do anel da gauge não foram estudadas nesses trabalhos. Isto será feito na primeira seção do Capítulo 3. O resultado principal dessa seção é o Teorema 3.6, o qual estabelece que o anel de uma v-gauge é uma V-ordem semi-local. Nas seções seguintes deste capítulo, estudamos o comportamento de gauges e do anel da gauge com relação a composição de gauges, extensão de escalares e restrição a uma subálgebra. Na última seção deste capítulo introduzimos o conceito de uma valorização ser *sem defeito* em uma álgebra semi-simples. Este conceito generaliza as extensões de corpos sem defeito e as valorizações em anéis de divisão sem defeito. Os resultados Corolário 3.46 e Teorema 5.22 implicam que uma valorização ser sem defeito numa álgebra central simples é uma condição necessária e suficiente para a existência de uma gauge na álgebra.

O material do capítulo 4 é dedicado ao estudo da estrutura de gauges em álgebras semi-simples e álgebras simples não necessariamente centrais. O resultado principal desse capítulo é o Teorema 4.15, que generaliza para álgebras simples não necessariamente centrais a Proposição 2.55, a qual relaciona gauges com as funções valorização de Morandi. Como consequência desse teorema, obtemos no Corolário 4.21 um resultado de existência de gauges em álgebras semi-simples sobre corpos com uma valorização de posto 1.

O capítulo 5 trata de gauges em álgebras centrais simples. Neste capítulo introduzimos o conceito de gauge minimal, que é uma gauge cuja parte de grau zero da álgebra graduada associada tem o menor número possível de componentes simples. O Teorema 5.17 estabelece que o anel de uma gauge minimal coincide com a interseção de uma família finita de anéis de valorização de Dubrovin satisfazendo a propriedade da interseção. O outro resultado fundamental deste capítulo é o Teorema 5.22, que é um teorema de existência de gauges minimais em álgebras centrais simples, assumindo-se que a valorização do centro tem posto finito e é sem defeito na álgebra. Como consequência desse teorema obtemos o Corolário 5.34, que é a recíproca do Teorema 5.17.

Os apêndices ao final do trabalho contém dois teoremas de Wadsworth que são fundamentais para os nossos resultados. Esses teoremas foram incluídos com demonstrações, pois tratam-se de resultados recentes e que ainda não foram publicados. O Teorema C.1 é a generalização do Teorema 4.5 para valorizações de posto arbitrário. O Teorema B.7 estabelece que se L é uma extensão finita de um corpo valorizado (F, v), então o produto tensorial $L \otimes_F F^h$ é um produto direto de corpos. Também incluímos no Apêndice B uma revisão sobre henselização, que contém alguns resultados fundamentais sobre o assunto, utilizados com frequência ao longo do texto. O Apêndice A contém um resumo sobre a propriedade da interseção de anéis de valorização de Dubrovin. Este foi incluído como uma conveniência ao leitor, tendo em vista que estes resultados serão utilizados com frequência nos Capítulos 4 e 5. Todos os resultados que aparecem aqui foram extraídos do livro de Marubayashi, Miyamoto e Ueda [**MMU**]. Também para a conveniência do leitor, incluímos no Apêndice B uma revisão sobre henselização, que contém alguns resultados fundamentais sobre o assunto, utilizados com frequência ao longo do texto.

Capítulo 2

Funções valorização e álgebras graduadas

Nas duas primeiras seções desse capítulo revisaremos alguns conceitos básicos sobre anéis e módulos graduados. Praticamente tudo que é dito aqui é conhecido na literatura (ver por exemplo [**NvO1**], [**NvO2**] e [**HW2**]), embora há diferenças nas notações, enunciados e demonstrações. Nas seções seguintes, estudaremos propriedades básicas de funções valorização e gauges. A referência utilizada para essas seções foi [**TW1**], no qual o conceito de gauge foi originalmente introduzido. No que segue, Γ denota sempre um grupo abeliano, divisível e totalmente ordenado, escrito aditivamente, que contém os valores de todas as valorizações e os graus (índices) de todas as graduações que considerarmos.

2.1. Anéis e módulos graduados

Um anel R é dito um *anel graduado* se este tem uma decomposição em soma direta $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$, onde cada R_γ é um grupo abeliano e $R_\gamma \cdot R_\delta \subseteq R_{\gamma+\delta}$, para todo $\gamma, \delta \in \Gamma$. O *conjunto de graduação* de R é o subconjunto de Γ definido por

$$\Gamma_R = \{\gamma \in \Gamma \mid R_\gamma \neq \{0\}\}.$$

Os elementos de $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ são chamados *elementos homogêneos* de R. Cada elemento não nulo $r \in R_\gamma$ é dito homogêneo de grau γ e escrevemos $\gamma = \deg(r)$. Todo elemento $r \in R$ se escreve de maneira única como $r = \sum_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma$, onde cada $r_\gamma \in R_\gamma$ e r_γ é não nulos para apenas um número finito de $\gamma \in \Gamma$. Os elementos não nulos r_γ na decomposição de r são chamados de *componentes homogêneas* de r. Note que $1 \in R_0$ pois se escrevermos $1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma$, então $r_\delta = 1r_\delta = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma r_\delta$. Logo $r_\gamma r_\delta = 0$ para todo $\delta, \gamma \in \Gamma$, com $\gamma \neq 0$. Segue que $r_\gamma = r_\gamma 1 = 0$ para todo $\gamma \neq 0$. Portanto $1 = r_0 \in R_0$. Como $R_0 \cdot R_0 \subseteq R_0$, concluímos que R_0 é um subanel de R.

Um anel graduado D é dito um *anel de divisão graduado* se todo elemento homogêneo não nulo é invertível. Se além disso D for comutativo, então dizemos que D é um *corpo graduado*. Os dois resultados seguintes fornecem algumas propriedades básicas de anéis de divisão graduados.

Proposição 2.1. *Seja $D = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma$ um anel de divisão graduado. Para todo $a, b \in D$, se ab é um elemento homogêneo, então a e b são homogêneos.*

Demonstração: Suponhamos que $a, b \in D \setminus \{0\}$. Como Γ é totalmente ordenado, podemos escrever $a = a_1 + \cdots + a_k$ tal que $a_i \neq 0$ e $\deg(a_1) < \cdots < \deg(a_k)$. Da mesma forma, seja $b = b_1 + \cdots + b_r$. Como D é anel de divisão, cada elemento homogêneo de D é invertível. Logo $a_1 b_1 \neq 0$ e $a_k b_r \neq 0$. Mas $a_1 b_1$ e $a_k b_r$ são as componentes homogêneas de ab de menor e maior grau, respectivamente. Como ab é homogêneo, temos que $\deg(a_1) + \deg(b_1) = \deg(a_k) + \deg(b_r)$. Portanto, $\deg(a_1) = \deg(a_k)$ e $\deg(b_1) = \deg(b_r)$, o que significa que a e b são homogêneos. $\square$

Proposição 2.2. *Seja $D = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma$ um anel de divisão graduado. Então D_0 é um subanel de divisão de D e cada D_γ não nulo é um D_0-espaço vetorial à esquerda (à direita) de dimensão 1.*

Demonstração: Já vimos que D_0 é um subanel de D. Como os elementos não nulos de D_0 são unidades, concluímos que D_0 é um anel de divisão. Agora se existe $a \neq 0$ em D_γ, então $D_\gamma a^{-1}$ é um D_0-subespaço vetorial à esquerda de D_0. Logo $D_0 = D_\gamma a^{-1}$. Portanto, $D_\gamma = D_0 a$, que é um D_0-espaço vetorial à esquerda de dimensão 1. Da mesma forma, $D_\gamma = aD_0$. $\square$

Exemplo 2.3. Seja A um anel. O anel dos polinômios $R = A[t]$ é um anel graduado, com a graduação $R_n = A \cdot t^n$ para $n \geq 0$ e $R_n = \{0\}$ para $n < 0$.

Exemplo 2.4. Seja A um anel. O anel dos polinômios de Laurent $R = A[t, t^{-1}]$ é um anel graduado, cujo conjunto de graduação é $\mathbb{Z}$. Se A é um anel de divisão (corpo), então R é uma anel de divisão (corpo) graduado.

Nota 2.5. Um anel de divisão graduado não é necessariamente um anel de divisão (com a graduação esquecida), como pode ser visto no Exemplo 2.4. O que temos em geral é que anéis de divisão graduados não tem divisores de zero. Para verificar isso, seja D um anel de divisão graduado e sejam $a, b \in D$ tais que $ab = 0$. Pela Proposição 2.1, devemos ter que a e b são homogêneos. Então não podemos ter $a, b \neq 0$ pois neste caso, ambos seriam unidades.

Em geral o conjunto de graduação de um anel graduado não é necessariamente um grupo, como mostra o Exemplo 2.3. Mas no caso em que D é um anel de divisão, Γ_D é um subgrupo de Γ pois se $\gamma, \delta \in \Gamma_D$, então existem elementos homogêneos não nulos $a_\gamma \in D_\gamma$ e $a_\delta \in D_\delta$. Logo $a_\gamma a_\delta^{-1}$ é um elemento homogêneo não nulo em $D_{\gamma-\delta}$. Portanto, $\gamma - \delta \in \Gamma_D$.

Um *subanel graduado* de um anel graduado R é um subanel $S \subseteq R$ tal que $S = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma \cap S$, isto é, para cada $s \in S$ todas as componentes homogêneas de s também estão em S. O centro $Z(R)$ de R é um subanel graduado. Além disso, temos

$$Z(R)_0 = Z(R) \cap R_0 \subseteq Z(R_0).$$

Da mesma forma, um ideal I (à direita, à esquerda ou bilateral) de um anel graduado R é dito um *ideal homogêneo* se $I = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma \cap I$.

Seja R um anel graduado. Um R-módulo à esquerda M é dito um *R-módulo graduado à esquerda* se existe uma decomposição $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$, onde cada M_γ é um subgrupo aditivo de M e $R_\gamma \cdot M_\delta \subseteq M_{\gamma+\delta}$ para $\gamma, \delta \in \Gamma$. Módulos graduados à direita são definidos de madeira análoga. O conjunto de graduação Γ_M é definido por

$$\Gamma_M = \{\gamma \in \Gamma \mid M_\gamma \neq \{0\}\}.$$

Um submódulo $N \subseteq M$ é dito um *submódulo graduado* se $N = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma \cap N$.

Seja D um anel de divisão graduado e M um D-módulo graduado à esquerda. Então cada componente homogênea M_γ é um D_0-espaço vetorial à esquerda. O conjunto de graduação Γ_M não é necessariamente um grupo, mas é uma união de classes laterais do grupo Γ_D. Denotamos por $|\Gamma_M : \Gamma_D|$ o número dessas classes laterais. Seja $\Gamma_M = \bigcup_{i\in I} \Gamma_i$, onde cada Γ_i é uma classe lateral de Γ_D e a união é disjunta. Essa decomposição nos dá uma decomposição de M em submódulos graduados

$$M = \bigoplus_{i\in I} M_i, \qquad \text{onde} \qquad M_i = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma_i} M_\gamma \quad \text{para } i \in I. \tag{2.6}$$

Proposição 2.7. *Todo módulo graduado sobre um anel de divisão graduado é um módulo livre que tem uma base formada por elementos homogêneos. Mais ainda, quaisquer duas dessas bases tem a mesma cardinalidade.*

Demonstração: Seguindo a notação do parágrafo anterior, para cada $i \in I$ e $\gamma_i \in \Gamma_i$, seja $\left(m_{ij}\right)_{j\in J_i}$ uma D_0-base à esquerda de M_{γ_i}. Então $M_{\gamma_i} = \bigoplus_{j\in J_i} D_0 m_{ij}$. Logo $M_{\gamma_i+\delta} = \bigoplus_{j\in J_i} D_\delta m_{ij}$ para todo $\delta \in \Gamma_D$. Como $\Gamma_i = \gamma_i + \Gamma_D$, segue da decomposição (2.6) que $M_i = \bigoplus_{j\in J_i} D m_{ij}$. Logo $\left(m_{ij}\right)_{j\in J_i}$ é uma D-base à esquerda de M_i formada por elementos homogêneos. Novamente pela decomposição (2.6) temos que $\left(m_{ij}\right)_{i\in I, j\in J_i}$ é uma D-base à esquerda de M formada por elementos homogêneos. Agora seja $(x_t)_{t\in T}$ uma D-base à esquerda de M formada por elementos homogêneos. Para cada $i \in I$, seja $T_i = \{t \in T \mid \deg(x_t) \in \Gamma_i\}$. Como $\Gamma_i = \gamma_i + \Gamma_D$, podemos tomar para cada $t \in T_i$ um elemento homogêneo não nulo d_t em $D_{\gamma_i - \deg(x_t)}$. Então $d_t x_t \in M_{\gamma_i}$ e $(d_t x_t)_{t\in T}$ é também uma D-base à esquerda de M formada por elementos homogêneos. Mas pela decomposição (2.6), temos que $(d_t x_t)_{t\in T_i}$ é uma D-base à esquerda de V_i. Logo $(d_t x_t)_{t\in T_i}$ é uma D_0-base à esquerda de M_{γ_i}. Portanto, $|T| = \sum_{i\in I} |T_i| = \sum_{i\in I} \dim_{D_0} M_{\gamma_i}$. □

Por conta da Proposição 2.7, faz sentido chamarmos módulos sobre anéis de divisão graduados de *espaços vetoriais graduados*. O posto, que é o número de elementos em qualquer base formada por elementos homogêneos, será chamado de dimensão, que denotaremos por $\dim_D M$ ou $[M : D]$. A demonstração da Proposição 2.7 mostra que

$$\dim_D M = \sum_{i\in I} \dim_D M_i = \sum_{i\in I} \dim_{D_0} M_{\gamma_i}, \tag{2.8}$$

onde I é um conjunto de índices com $|\Gamma_M : \Gamma_D|$ elementos e $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ é um conjunto de representantes da decomposição de Γ_M em classes laterais de Γ_D.

Seja D um anel de divisão graduado e seja F um subanel de D tal que F é também um anel de divisão graduado. Então D pode ser visto como um F-*espaço vetorial graduado* à esquerda. Nestas condições, temos a seguinte relação fundamental que será utilizada frequentemente ao longo do texto.

Proposição 2.9. $[D : F] = [D_0 : F_0]|\Gamma_D : \Gamma_F|$.

Demonstração: Pela proposição 2.2, temos que E_γ é um E_0-espaço vetorial à esquerda de dimensão 1, para cada $\gamma \in \Gamma_E$. Logo $[E_0 : D_0] = \dim_{D_0} E_\gamma$. Seja

$\Gamma_E = \bigcup_{i \in I} \gamma_i + \Gamma_D$, escrito como uma união disjunta de classes laterais distintas. Aplicando a fórmula (2.8) obtemos que

$$[E : D] = \sum_{i \in I} \dim_{D_0} E_{\gamma_i} = [E_0 : D_0] |\Gamma_E : \Gamma_D|.$$

□

2.2. Álgebras graduadas simples e semi-simples

Seja F um corpo graduado. Definimos uma *F-álgebra graduada* como um anel graduado A com 1 que é também um F-espaço vetorial graduado na qual a multiplicação do anel e a multiplicação por escalares estão relacionadas por

$$(\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b) \qquad \text{para todo } \lambda \in F \text{ e } a, b \in A.$$

Podemos identificar F com um subanel graduado de A através da aplicação que leva $\lambda \in F$ em $\lambda 1 \in A$. Dizemos que A é uma F-álgebra central se $Z(A) = F$. Se A e B são F-álgebra graduadas, então definimos uma graduação no produto direto $A \times B$ por

$$A \times B = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \times B_\gamma.$$

Uma *álgebra graduada simples* é uma álgebra graduada $A \neq \{0\}$ tal que $\{0\}$ e A são os únicos ideais bilaterais homogêneos. Se uma álgebra graduada A é também um anel de divisão graduado então dizemos que A é uma *álgebra de divisão graduada*. Note que se A é uma álgebra de divisão graduada, então A é uma álgebra graduada simples. De fato, seja I um ideal bilateral homogêneo não nulo de A e seja $x \in I \backslash \{0\}$. Como I é homogêneo, temos que todas as componentes homogêneas de x estão em I. Seja x_γ uma componente homogênea não nula de x. Como A é um anel de divisão graduado, todo elemento homogêneo não nulo de A tem inverso. Logo $1 = x_\gamma x_\gamma^{-1} \in I$.

Exemplo 2.10 (Álgebra de quatérnios graduada). Seja F um corpo graduado tal que $\operatorname{car}(F_0) \neq 2$. Sejam a, b elementos homogêneos não nulos de F. Seja Q a F-álgebra gerada por dois elementos i, j tais que

$$i^2 = a, \qquad j^2 = b \quad \text{e} \quad ij = -ji.$$

Seja $k = ij$. Fazendo

$$\deg(i) = \frac{1}{2}\deg(a), \quad \deg(j) = \frac{1}{2}\deg(b) \quad \text{e} \quad \deg(k) = \frac{1}{2}\deg(a) + \frac{1}{2}\deg(b),$$

obtemos que Q é uma F-álgebra graduada que tem $\{1, i, j, k\}$ como F-base formada por elementos homogêneos. A álgebra Q é dita uma álgebra de quatérnios graduada e denotamos por $(a, b)_F$. Vamos mostrar que Q é uma F-álgebra graduada simples. Para isso, seja I um ideal bilateral homogêneo não nulo de Q e seja $u = x + yi + zj + wk \in I \setminus \{0\}$. Então algum dos x, y, z, w é não nulo. Vamos supor que $y \neq 0$. Os demais casos são análogos. Como I é ideal bilateral, temos

$$(a^{-1}i)ui = x + yi - zj - wk \in I.$$

Logo $x + yi \in I$. Da mesma forma,

$$(b^{-1}j)(x + yi)j = x - yi \in I,$$

donde obtemos que $yi \in I$. Segue que $y = (a^{-1}i)(yi) \in I$. Seja agora y_γ uma componente homogênea não nula de y. Como I é ideal homogêneo, segue que $y_\gamma \in I$. Logo $1 = y_\gamma y_\gamma^{-1} \in I$. Também podemos verificar que $Z(Q) = F$. A inclusão $F \subseteq Z(Q)$ é clara. Para a outra inclusão, seja $u = x+yi+zj+wk \in Z(Q)$. Como $iu = ui$, segue que $xi+ay+zk+waj = xi+ay-zk-waj$. Logo $z = w = 0$. Também de $ju = uj$ obtemos $xj - yk = xj + yk$. Logo $y = 0$. Portanto $u \in F$.

Vamos agora discutir um pouco sobre homomorfismos entre módulos graduados. Seja $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ e $N = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} N_\gamma$ módulos à esquerda sobre um anel graduado R. Seja $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ o grupo dos R-homomorfismos com a graduação esquecida. Para cada $\gamma \in \Gamma$, denotamos por $\mathrm{Hom}_R(M, N)_\gamma$ o grupo dos R-homomorfismos que levantam o grau por γ, isto é,

$$\mathrm{Hom}_R(M, N)_\gamma = \{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid f(M_\delta) \subseteq N_{\delta+\gamma} \text{ para todo } \delta \in \Gamma\}.$$

Desta forma, $\mathrm{Hom}_R(M, N)_0$ consiste dos homomorfismos que preservam a graduação. Se existir um isomorfismo em $\mathrm{Hom}_R(M, N)_0$ então dizemos que M e N são isomorfos como módulos graduados e denotamos por $M \cong_g N$. O mesmo vale para homomorfismos de anéis ou álgebras graduadas.

Note que $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{Hom}_R(M, N)_\gamma$ é sempre um subgrupo de $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ e temos a igualdade

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{Hom}_R(M, N)_\gamma,$$

se M é finitamente gerado (cf. [**NvO1**, Cor. I.2.11]). Com essa decomposição, $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ é um $Z(R)$-módulo graduado. Agora considere o anel $\mathrm{End}_R(M) = \mathrm{Hom}_R(M, M)$, com a graduação introduzida acima. Note que a graduação de $\mathrm{End}_R(M)$ é compatível com a composição de homomorfismos. Então $\mathrm{End}_R(M)$

tem também uma estrutura de anel graduado. O resultado seguinte estabelece que no caso em que R é um anel de divisão graduado, $\mathrm{End}_R(M)$ é sempre uma álgebra graduada simples.

Proposição 2.11. *Seja F um corpo graduado e D uma F-álgebra de divisão graduada de dimensão finita. Suponhamos que M é um D-espaço vetorial graduado à esquerda de dimensão finita. Então $End_D(M)$ é uma F-álgebra graduada simples de dimensão finita tal que $Z(End_D(M)) = Z(D)$.*

Demonstração: Cada elemento $a \in Z(D)$ é identificado em $\mathrm{End}_D(M)$ como sendo a multiplicação por a. Seja $(d_h)_{h=1}^k$ uma F-base de D formada por elementos homogêneos. Seja $n = \dim_D M$. Para cada $i, j = 1, \dots, n$, seja E_{ij} a transformação linear de M definida por

$$\mathrm{E}_{ij}(m_\ell) = \begin{cases} m_i & \text{se} \quad \ell = j, \\ 0 & \text{se} \quad \ell \neq j. \end{cases}$$

Então $(d_r \mathrm{E}_{ij})_{r,i,j}$ é uma F-base de $\mathrm{End}_D(M)$ formada por elementos homogêneos. Logo $\mathrm{End}_D(M)$ é uma F-álgebra de dimensão finita. Para mostrar que $\mathrm{End}_D(M)$ é simples, seja I um ideal bilateral homogêneo não nulo de $\mathrm{End}_D(M)$. Seja $f \in I \setminus \{0\}$. Como as componentes homogêneas de um elemento em I também estão em I, podemos supor que f é homogêneo. Seja $r \in \{1, \dots, n\}$ tal que $f(m_r) \neq 0$. Seja $f(m_r) = \sum_{s=1}^n d_{sr} m_s$. Podemos encontrar $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $d_{jr} \neq 0$. Como f é homogêneo, temos que d_{jr} também deve ser homogêneo, logo invertível. Agora note que a aplicação linear $\sum_{i=1}^n \mathrm{E}_{ij} \circ f \circ \mathrm{E}_{ri}$ envia cada m_s em $d_{jr} m_s$, logo é invertível. Portanto, $1 \in I$.

A multiplicação por um elemento de $Z(D)$ claramente está em $\mathrm{End}_D(M)$. Para a inclusão contrária, seja $f \in \mathrm{End}_D(M)$. Para cada $j = 1, \dots, n$ podemos escrever $f(m_j) = \sum_{r=1}^n d_{rj} m_r$. Agora note que para cada $i, j = 1, \dots, n$ temos

$$\mathrm{E}_{ij} \circ f(m_j) = \mathrm{E}_{ij}(\sum_{r=1}^n d_{rj} m_r) = d_{jj} m_i,$$

e

$$f \circ \mathrm{E}_{ij}(m_j) = f(m_i) = \sum_{\ell=1}^n d_{ri} m_r.$$

Como $\mathrm{E}_{ij} \circ f = f \circ \mathrm{E}_{ij}$, obtemos que $d_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $d_{ii} = d_{jj}$. Portanto f é a aplicação que envia m_r em $d_{11} m_r$. Agora para cada elemento homogêneo $a \in D$ seja g_a a transformação linear que envia m_r em $a m_r$. Como $g_a \circ f = f \circ g_a$, temos que $a d_{11} = d_{11} a$. Logo $d_{11} \in Z(D)$. Portanto, f é a multiplicação por d_{11}, donde concluímos que $f \in Z(D)$. □

A seguir temos uma versão graduada do Teorema de Wedderburn (cf. [**NvO1**, Thm. I.5.8]).

Teorema 2.12 (Teorema de Wedderburn). *Seja A uma F-álgebra graduada central simples de dimensão finita. Então existe uma única F-álgebra graduada de divisão central D (a menos de isomorfismo graduado) tal que existe um isomorfismo de álgebras graduadas*

$$A \cong_g End_D(M),$$

para algum D-espaço vetorial graduado à esquerda M de dimensão finita.

Para uma F-álgebra graduada A como no Teorema 2.12 acima, veremos que a parte de grau zero A_0 de A não é necessariamente simples, mas sim semi-simples. A estrutura de A_0 é determinada pela decomposição de M obtida em (2.6). Como M tem dimensão finita, segue de (2.8) que Γ_M é uma união disjunta de um número finito de classes laterais de Γ_D. Sejam $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ as classes laterais distintas de Γ_D em Γ_M. Considere a decomposição de M como em (2.6)

$$M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i, \qquad \text{onde} \qquad M_i = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_i} M_\gamma.$$

Para $i = 1, \ldots, k$ seja $r_i = \dim_D M_i$ e seja

$$\begin{aligned} B_i &= \{f \in A_0 \mid f(M_i) \subseteq M_i, \text{ e } f(M_j) = 0 \text{ para } j \neq i\} \\ &\cong (\mathrm{End}_D M_i)_0. \end{aligned}$$

Proposição 2.13. *Nas condições do parágrafo acima, temos*

$$A_0 = \prod_{i=1}^{k} B_i \cong \prod_{i=1}^{k} M_{r_i}(D_0).$$

Ver [**TW1**, Prop. 2.1] para uma demonstração da Proposição 2.13.

Uma álgebra graduada A de dimensão finita é dita *semi-simples* se $\{0\}$ é o único ideal bilateral homogêneo nilpotente de A. Note que toda álgebra graduada simples é semi-simples. Além disso, o produto direto de álgebras graduadas semi-simples é também semi-simples, pois a projeção de um ideal bilateral homogêneo nilpotente dá um ideal bilateral homogêneo nilpotente em cada componente.

O restante dessa seção é dedicado a mostrar que toda álgebra graduada semi-simples é isomorfa a um produto direto de álgebras graduadas simples. A demonstração é obtida imitando o caso não graduado, com algumas modificações. Aqui utilizamos como referência [**F**].

Um ideal homogêneo à esquerda (resp. à direita, bilateral) I de um anel A é dito um ideal homogêneo minimal à esquerda (resp. à direita, bilateral) se $I \neq \{0\}$ e não existe nenhum ideal homogêneo à esquerda (resp. à direita, bilateral) I' de A tal que $\{0\} \neq I' \subsetneq I$. Note que se A for uma F-álgebra de dimensão finita, então A contém pelo menos um ideal homogêneo minimal, pois todo ideal homogêneo de A é um F-subespaço vetorial de A.

Para o restante desta seção, A denota sempre uma F-álgebra graduada semi-simples.

Proposição 2.14. *Seja J um ideal homogêneo minimal à esquerda (resp. direita) de A. Então $J = Ae$ (resp. $J = eA$) para algum idempotente homogêneo $e \in A$.*

Demonstração: Suponhamos que J um ideal homogêneo minimal à esquerda de A. O caso em que J é um ideal à direita é análogo. Temos que $J^2 \neq \{0\}$, pois caso contrário o ideal bilateral JA de A seria nilpotente pois

$$(JA)^2 = (JA)(JA) = J(AJ)A = J^2A.$$

Então existe $a \in J$ tal que $Ja \neq \{0\}$. Note que podemos escolher a homogêneo. Logo Ja é um ideal homogêneo à esquerda de A contido em J. Logo $Ja = J$ pela minimalidade de J. Então existe $e \in J$ tal que $ea = a$. Como a é homogêneo, podemos trocar e pela sua componente de grau zero. Desta forma, podemos supor que e é homogêneo de grau zero. Seja $\mathrm{an}_J(a) = \{x \in J \mid xa = 0\}$, que é um ideal homogêneo à esquerda de A contido em J. Agora $\mathrm{an}_J(a) \neq J$ pois $Ja \neq \{0\}$. Novamente pela minimalidade de J, concluímos que $\mathrm{an}_J(a) = \{0\}$. Por outro lado, $e^2 - e \in \mathrm{an}_J(a)$ pois $e^2a = ea$. Portanto, e é um idempotente homogêneo. Como $e \in J$, concluímos pela minimalidade de J que $J = Ae$. □

Note que em uma álgebra graduada todo idempotente homogêneo não nulo deve ter grau 0.

Proposição 2.15. *Seja J um ideal bilateral homogêneo minimal de A. Então $J = Ae$ para algum idempotente homogêneo central $e \in A$. Além disso, e é uma unidade para J, isto é, $ex = xe = x$ para todo $x \in J$.*

Demonstração: Pela Proposição 2.14, temos que $J = Ae_1$ e $J = e_2A$, onde e_1, e_2 são idempotentes homogêneos em A. Logo $e_2 = ce_1$ e $e_1 = e_2d$ para alguns $c, d \in A$. Então $e_2 = ce_1 = (ce_1)e_1 = e_2e_1$. Da mesma forma, $e_1 = e_2e_1$. Portanto, $J = eA = Ae$. Isto implica que e é uma unidade para J. Então para todo $a \in A$, temos

$$ae = e(ae) = (ea)e = ea.$$

Portanto e comuta com todos os elementos de A. □

Proposição 2.16. *Seja J um ideal bilateral homogêneo minimal de A. Então J é uma F-álgebra graduada simples.*

Demonstração: Como J é um ideal bilateral homogêneo então J é um F-subespaço vetorial graduado de A. Pela Proposição 2.15, temos que $J = Ae$ e o idempotente central e é uma unidade para J. Donde concluímos que J tem uma estrutura de anel graduado. Identificando F com eF em J, obtemos que J é uma F-álgebra graduada. Resta mostrar que os únicos ideais homogêneos bilaterais de J são os triviais. Seja $I \neq \{0\}$ um ideal bilateral homogêneo de J. Como $J = Ae$, para algum idempotente homogêneo central $e \in A$, I também é um ideal homogêneo bilateral de A. Pela minimalidade de J, concluímos que $I = \{0\}$ ou $I = J$. □

Proposição 2.17. *Sejam $J_1, \ldots, J_r$ ideais homogêneos minimais bilaterais de A, dois a dois distintos. Então a soma $J_1 + \cdots + J_r$ é direta.*

Demonstração: Pela Proposição 2.15, temos que $J_i = e_iA = Ae_i$, para $i = 1, \ldots, r$, onde e_i é um idempotente homogêneo central. Para cada $i \neq j$, temos que $J_i \cap J_j$ é um ideal homogêneo bilateral de A. Pela minimalidade de J_i e J_j, concluímos que $e_ie_j = 0$. Suponhamos agora que $e_1a_1 + \cdots + e_ra_r = 0$, com $a_i \in A$. Multiplicando essa expressão à esquerda por e_i, concluímos que $e_ia_i = e_i^2a_i = 0$. Portanto a soma $J_1 + \cdots + J_r$ é direta. □

Segue da Proposição 2.17 que A contém apenas um número finito de ideais homogêneos minimais bilaterais.

Teorema 2.18. *Toda álgebra graduada semi-simples A é um produto direto de álgebras graduadas simples, que são unicamente determinadas.*

Demonstração: Sejam $J_1, \ldots, J_k$ todos os ideais homogêneos minimais bilaterais de A. Pela Proposição 2.16, cada J_i é uma F-álgebra graduada simples. Desta forma, pela Proposição 2.17, basta mostrarmos que $A = J_1 + \cdots + J_k$. Como na demonstração da Proposição 2.17, seja $J_i = Ae_i$ onde e_i é um idempotente homogêneo central e $e_ie_j = 0$ para $i \neq j$. Seja $e = e_1 + \cdots + e_k$. Um calculo direto mostra que e é idempotente homogêneo central em A e $e_ie = e_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Vamos mostrar que $e = 1$, a unidade de A. Suponhamos por absurdo que $e \neq 1$. Então $J = (1-e)A = A(1-e)$ é um ideal homogêneo bilateral não nulo de A. Então J contém um ideal homogêneo minimal bilateral, digamos J_ℓ, para algum $1 \leq \ell \leq k$. Logo podemos escrever $e_\ell = (1-e)a$ para algum $a \in A$. Multiplicando à esquerda por e_ℓ, obtemos

$$e_\ell = e_\ell^2 = e_\ell(1-e)a = 0,$$

pois $e_\ell = e_\ell e$. Com esta contradição, concluímos que $e = 1$. Portanto, para todo $a \in A$, temos $a = a \cdot 1 = ae_1 + \cdots + ae_k \in J_1 + \cdots + J_k$. □

2.3. Extensões de corpos graduados

O objetivo desta seção é fornecer uma demonstração para [**TW1**, Remark 1.27]. Este resultado é fundamental na demonstração do Teorema 5.22, que é um dos resultados principais do nosso trabalho. Começaremos introduzindo algumas propriedades sobre extensões de corpos graduados. Para isso, utilizamos como referência [**HW1**].

Seja $F = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$ um corpo graduado. Como observado em (2.5), F não tem divisores de zero. Logo o corpo de frações pode ser formado, o qual denotamos por $q(F)$. Um corpo graduado K é chamado uma *extensão graduada* de um corpo graduado F se F é um subcorpo graduado de K. Note que neste caso K_0 é uma extensão de F_0, Γ_F é um subgrupo de Γ_K e $q(K)$ é uma extensão de $q(F)$.

Proposição 2.19. *Seja K uma extensão graduada de F com $[K:F] < \infty$. Então*

$$[K:F] = [K_0:F_0]|\Gamma_K:\Gamma_F| = [q(K):q(F)], \tag{2.20}$$

e $q(K) \cong q(F) \otimes_F K$.

A primeira igualdade de (2.20) segue da Proposição 2.9. A segunda igualdade segue do isomorfismo $q(K) \cong q(F) \otimes_F K$. Ver [**HW1**, Prop. 2.1] para uma demonstração do isomorfismo $q(K) \cong q(F) \otimes_F K$.

Seja K uma extensão graduada de F com $[K : F] < \infty$. Dizemos que K é uma extensão graduada mansa de F se K_0 é uma extensão separável de F_0 e $\mathrm{car}(F_0) \nmid |\Gamma_K : \Gamma_F|$.

Proposição 2.21. *Seja K uma extensão graduada de F com $[K : F] < \infty$. Então K é uma extensão graduada mansa F se e somente se $q(K)$ é uma extensão separável de $q(F)$.*

Ver [**Bo1**, Thm. 4] para uma demonstração da Proposição 2.21. O resultado seguinte é o objetivo central desta seção.

Proposição 2.22. *Seja L uma extensão graduada mansa de F e K uma extensão graduada de F. Seja $A = L \otimes_F K$. Então A é um produto direto de corpos graduados.*

Demonstração: Pela Proposição 2.21, temos que $q(L)$ é uma extensão separável finita de $q(F)$. Logo $q(L) \otimes_{q(F)} q(K)$ é um produto direto de corpos (ver demonstração do Lema B.8). Segue da Proposição 2.20 que

$$\begin{aligned} A \otimes_K q(K) &= (L \otimes_F K) \otimes_K q(K) \\ &\cong L \otimes_F q(K) \\ &\cong (L \otimes_F q(F)) \otimes_{q(F)} q(K) \\ &\cong q(L) \otimes_{q(F)} q(K). \end{aligned}$$

Logo $A \otimes_K q(K)$ é um produto direto de corpos. Agora se I é um ideal bilateral homogêneo nilpotente de A, então $I \otimes_K q(K)$ é também um ideal bilateral homogêneo nilpotente de $A \otimes_K q(K)$. Como $A \otimes_K q(K)$ é semi-simples, temos que $I \otimes_K q(K) = \{0\}$. Como $\dim_K I = \dim_{q(K)} I \otimes_K q(K) = 0$, concluímos que $I = \{0\}$. Portanto, A é uma K-álgebra graduada semi-simples. Como A é comutativa, segue do Teorema 2.18 que A é um produto direto de corpos graduados.

□

2.4. Funções valorização em espaços vetoriais

Seja D um anel de divisão de dimensão finita sobre seu centro com uma valorização $v : D \to \Gamma \cup \{\infty\}$. Esta valorização define uma filtração em D da seguinte forma: para cada $\gamma \in \Gamma$ seja

$$D^{\geq\gamma} = \{d \in D \mid v(d) \geq \gamma\}, \quad D^{>\gamma} = \{d \in D \mid v(d) > \gamma\} \text{ e } D_\gamma = D^{\geq\gamma}/D^{>\gamma}.$$

A partir daí, definimos o *anel graduado associado*

$$\mathrm{gr}_v(D) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} D_\gamma,$$

cuja multiplicação é definida em cada componente por

$$\begin{array}{rcl} D_\gamma \times D_\delta & \to & D_{\gamma+\delta} \\ (c + D^{>\gamma}, d + D^{>\delta}) & \mapsto & cd + D^{>\gamma+\delta}, \end{array}$$

e estendida aditivamente para todo o $\mathrm{gr}_v(D)$. Quando a valorização envolvida v for clara, escreveremos simplesmente $\mathrm{gr}(D)$ no lugar de $\mathrm{gr}_v(D)$. Note que $\Gamma_{gr(D)} = \Gamma_v$ e $D_0 = \overline{D}$. Desta forma, notamos que o anel graduado é um objeto natural para estudar valorizações, tendo em vista que este carrega simultaneamente informações sobre o grupo de valores e o anel de resíduos da valorização.

Para cada $d \in D^\times$, escrevemos d' para a imagem de d em $\mathrm{gr}(D)$, isto é, $d' = d + D^{>v(d)} \in D_{v(d)}$. Como $(d')^{-1} = (d^{-1})'$, temos que $\mathrm{gr}(D)$ é um anel de divisão graduado. No caso em que D é comutativo então $\mathrm{gr}(D)$ é também comutativo e então $\mathrm{gr}(D)$ é um corpo graduado.

Exemplo 2.23. Seja F com corpo com uma valorização discreta v. Seja $t \in F$ tal que $v(t) = 1$. Então para todo elemento homogêneo $a \in \mathrm{gr}_v(F)$ com $\deg(a) = n$, temos $a = (a(t')^{-n})(t')^n \in F_0 \cdot (t')^n$. Portanto, $\mathrm{gr}_v(F) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F_0 \cdot (t')^n$, que é o anel dos polinômios de Laurent $F_0[t', (t')^{-1}]$. Em particular, o corpo graduado associado a valorização 5-ádica em $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{F}_5[s, s^{-1}]$, onde s é a imagem do número primo 5 na álgebra graduada.

Agora seja M um D-espaço vetorial à esquerda. Uma aplicação

$$\alpha : M \to \Gamma \cup \{\infty\}$$

é dita uma *v-função valorização* se para todo $x, y \in M$ e $d \in D$ temos:

(i) $\alpha(x) = \infty$ se e somente se $x = 0$,

(ii) $\alpha(x + y) \geq \min\{\alpha(x), \alpha(y)\}$,

(iii) $\alpha(dx) = v(d) + \alpha(x)$.

Da mesma forma, α define uma filtração em M: para cada $\gamma \in \Gamma$ definimos

$$M^{\geq\gamma} = \{x \in M \mid \alpha(x) \geq \gamma\}, \quad M^{>\gamma} = \{x \in M \mid \alpha(x) > \gamma\}, \text{ e } M_\gamma = M^{\geq\gamma}/M^{>\gamma}.$$

Defina

$$\mathrm{gr}_\alpha(M) = \mathrm{gr}(M) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma.$$

Para cada $\gamma, \delta \in \Gamma$ existe uma multiplicação bem definida

$$\begin{array}{rcl} D_\delta \times M_\gamma & \to & M_{\gamma+\delta} \\ (d + D^{>\delta}, x + M^{>\gamma}) & \mapsto & dx + M^{>\gamma+\delta}. \end{array}$$

Esta operação é estendida distributivamente para uma operação $\mathrm{gr}(D) \times \mathrm{gr}(M) \to \mathrm{gr}(M)$ que faz de $\mathrm{gr}(M)$ um $\mathrm{gr}(D)$-espaço vetorial graduado à esquerda. Da mesma forma, todo elemento $x \in M \setminus \{0\}$ tem uma imagem x' em $\mathrm{gr}(M)$, definida por $x' = x + M^{>\alpha(x)} \in M_{\alpha(x)}$.

Uma v-função valorização α é dita uma *v-norma* se M é de dimensão finita e tem uma base $(x_i)_{i=1}^n$ tal que para todo $d_1, \dots, d_n \in D$,

$$\alpha(\sum_{i=i}^{n} d_i x_i) = \min_{1 \le i \le n} (v(d_i) + \alpha(x_i)). \tag{2.24}$$

A base $(x_i)_{i=1}^n$ é dita uma *base de decomposição* de M para α.

Nota 2.25. Note que sempre podemos construir uma norma em um espaço vetorial M de dimensão finita sobre um anel de divisão D com uma valorização v. Para isso, basta tomarmos uma D-base $(x_i)_{i=1}^n$ de M e elementos arbitrários $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ em Γ. Definimos $\alpha(x_i) = \gamma_i$ e então definimos α para todo M pela fórmula (2.24). Definida desta forma, α é uma v-norma em M e $(x_i)_{i=1}^n$ é uma base de decomposição de M para α.

O resultado seguinte estabelece que uma v função valorização α é uma v-norma se e somente se $[\mathrm{gr}_\alpha(M) : \mathrm{gr}_v(D)] = [M : D]$ (cf. [**RTW**, Prop. 2.2 e Cor 2.3]).

Proposição 2.26. *Seja α uma v-função valorização em M. Sejam $x_1, \dots, x_\ell \in M \setminus \{0\}$.*

(i) *$x'_1, \dots, x'_\ell$ são $\mathrm{gr}_v(D)$-linearmente independentes em $\mathrm{gr}_\alpha(M)$ se e somente se $\alpha(\sum_{i=1}^{\ell} d_i x_i) = \min_{1 \le i \le \ell}(v(d_i) + \alpha(x_i))$ para todo $d_1, \dots, d_\ell \in D$. Quando isto ocorre, $x_1, \dots, x_\ell$ são D-linearmente independentes em M.*

(ii) *$\dim_{\mathrm{gr}_v(D)}(\mathrm{gr}_\alpha(M)) \le \dim_D(M)$. A igualdade vale se e somente se α é uma v-norma em M.*

2.5. Funções valorização em álgebras

Seja F um corpo com uma valorização v e A uma F-álgebra de dimensão finita. Uma v-função valorização α em A é dita *multiplicativa* se $\alpha(1) = 0$ e

$\alpha(xy) \geq \alpha(x) + \alpha(y)$. Neste caso, $\mathrm{gr}_\alpha(A)$ é uma álgebra graduada sobre $\mathrm{gr}(F)$, cuja multiplicação é definida para todo $x, y \in A$ por

$$x'y' = xy + A^{>\alpha(x)+\alpha(y)} = \begin{cases} (xy)' & \text{se } \alpha(xy) = \alpha(x) + \alpha(y), \\ 0 & \text{se } \alpha(xy) > \alpha(x) + \alpha(y). \end{cases} \tag{2.27}$$

A seguir temos um lema fácil que é muito útil para verificarmos quando uma norma em uma álgebra é multiplicativa.

Lema 2.28 ([**TW1**], Lemma 1.2). *Suponhamos que $\alpha : A \to \Gamma \cup \{\infty\}$ é uma v-norma em A tal que $\alpha(1) = 0$. Seja $(m_i)_{i=1}^k$ uma base de decomposição de A para α. Se $\alpha(m_i m_j) \geq \alpha(m_i) + \alpha(m_j)$, para todo i, j, então α é uma v-função valorização multiplicativa em A.*

Demonstração: Seja $a = \sum_{i=1}^k a_i m_i$ e $b = \sum_{j=1}^k b_j m_j$ em A, com $a_i, b_j \in F$. Então

$$\begin{aligned} \alpha(ab) &= \alpha(\sum_{i,j=1}^k a_i b_j m_i m_j) \\ &\geq \min_{1\leq i,j\leq k} (\alpha(a_i b_j m_i m_j)) \\ &\geq \min_{1\leq i,j\leq k} (v(a_i) + v(b_j) + \alpha(m_i) + \alpha(m_j)) \\ &\geq \min_{1\leq i\leq k} (v(a_i) + \alpha(m_i)) + \min_{1\leq j\leq k} (v(b_j) + \alpha(m_j)) \\ &= \alpha(a) + \alpha(b). \end{aligned}$$

□

A seguir temos um lema que caracteriza os elementos invertíveis da álgebra graduada associada a uma função valorização multiplicativa. Este resultado será usado frequentemente no decorrer do texto.

Lema 2.29. *Seja α uma v-função valorização em uma álgebra de dimensão finita A. Para todo elemento não nulo $u \in A$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $u' \in \mathrm{gr}(A)^\times$, *o grupo de unidades de* $\mathrm{gr}(A)$;

(ii) $\alpha(au) = \alpha(a) + \alpha(u)$ *para todo* $a \in A$;

(ii') $\alpha(ua) = \alpha(u) + \alpha(a)$ *para todo* $a \in A$;

(iii) $u \in A^\times$ *e* $\alpha(u) + \alpha(u^{-1}) = 0$;

Ver [**TW1**, Lemma 1.3] para uma demonstração do Lema 2.29.

Nota 2.30. Sejam α e β duas v-funções valorização multiplicativas em A. Suponhamos que $\alpha(x) \leq \beta(x)$ para todo $x \in A$. A aplicação identidade induz um homomorfismo de $\mathrm{gr}_v(F)$-álgebras graduadas $\varphi : \mathrm{gr}_\alpha(A) \to \mathrm{gr}_\beta(A)$ tal que $a+A^{\alpha>\alpha(a)} \mapsto a + A^{\beta>\alpha(a)}$. Note que se $a + A^{\alpha>\alpha(a)} = b + A^{\alpha>\alpha(a)}$ então $\alpha(a-b) \geq \alpha(a)$. Como $\beta(a-b) \geq \alpha(a-b)$, concluímos que $a + A^{\beta>\alpha(a)} = b + A^{\beta>\alpha(a)}$. Portanto, φ está bem definida. Observe que $\varphi(a + A^{\alpha>\alpha(a)}) = 0$ se e somente se $a + A^{\beta>\alpha(a)} = 0$ se e somente se $\beta(a) > \alpha(a)$. Assim o homomorfismo φ é injetivo se e somente se $\beta = \alpha$.

Lema 2.31. *Seja $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ uma família de v-funções valorização multiplicativa em A. Então*

$$\alpha(x) = \min(\alpha_1(x), \ldots, \alpha_k(x)) \tag{2.32}$$

é uma v-função valorização multiplicativa em A e existe um homomorfismo injetivo de $\mathrm{gr}_v(F)$-álgebras graduadas

$$\mathrm{gr}_\alpha(A) \to \mathrm{gr}_{\alpha_1}(A) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\alpha_k}(A), \tag{2.33}$$

que satisfaz

$$x + A^{\alpha>\alpha(x)} \mapsto (x + A^{\alpha_1>\alpha(x)}, \ldots, x + A^{\alpha_k>\alpha(x)}). \tag{2.34}$$

Demonstração: Uma verificação direta mostra que α é uma v-função valorização multiplicativa. Por exemplo, para todo $x, y \in A$ temos

$$\begin{aligned} \alpha(xy) &= \min_{1\leq i\leq k}(\alpha_i(xy)) \geq \min_{1\leq i\leq k}(\alpha_i(x) + \alpha_i(y)) \\ &= \min_{1\leq i\leq k}(\alpha_i(x)) + \min_{1\leq i\leq k}(\alpha_i(y)) = \alpha(x) + \alpha(y). \end{aligned}$$

Agora, como $\alpha(x) \leq \alpha_i(x)$, para todo $x \in A$ e $1 \leq i \leq k$, temos de (2.30) que existe um homomorfismo de álgebras graduadas $\mathrm{gr}_\alpha(A) \to \mathrm{gr}_{\alpha_i}(A)$. Esses homomorfismos combinados nos dá um homomorfismo de álgebras graduadas de (2.33). Agora para todo $a \in A \setminus \{0\}$ existe algum índice i tal que $\alpha(x) = \alpha_i(x)$, o que implica que o homomorfismo de (2.33) é injetivo. □

2.6. Gauges

Como já definimos na Introdução, uma v-função valorização multiplicativa α em uma F-álgebra de dimensão finita A é dita uma v-*gauge* se α é uma v-norma em A e $\mathrm{gr}_\alpha(A)$ é uma $\mathrm{gr}_v(F)$-álgebra graduada semi-simples. Para facilitar referências futuras, vamos listar as propriedades que definem uma gauge.

(2.35) $\alpha(1) = 0$ e $\alpha(x) = \infty$ se e somente se $x = 0$.

(2.36) $\alpha(cx) = v(c) + \alpha(x)$, para todo $x \in A$ e $c \in F$.

(2.37) $\alpha(x + y) \geq \min(\alpha(x), \alpha(y))$, para todo $x, y \in A$.

(2.38) $\alpha(xy) \geq \alpha(x) + \alpha(y)$, para todo $x, y \in A$.

(2.39) $[\mathrm{gr}_\alpha(A) : \mathrm{gr}_v(F)] = [A : F]$.

(2.40) $\mathrm{gr}_\alpha(A)$ é uma álgebra graduada semi-simples.

Nota 2.41. Note que se A tem uma gauge α, então A tem que ser semi-simples. Para isso, seja I um ideal bilateral nilpotente não nulo de A. Sem perda de generalidade podemos supor que $I^2 = \{0\}$. O ideal I pode ser visto como um F-subespaço vetorial de A. Pela Proposição 3.34, restrição $\alpha|_I$ é uma v-norma. Temos que $\mathrm{gr}(I)$ é um $\mathrm{gr}(F)$-subespaço graduado de $\mathrm{gr}(A)$, com a identificação $a + I^{>\alpha(a)} = a + A^{>\alpha(a)}$ para todo $a \in I$ (Ver Nota 3.35). Segue que $\mathrm{gr}(I)$ é um ideal bilateral homogêneo não nulo de $\mathrm{gr}(A)$ e $\mathrm{gr}(I)^2 = \{0\}$. Donde teríamos que $\mathrm{gr}(A)$ não é semi-simples.

Concluiremos este capítulo apresentando uma série de exemplos fundamentais de gauges.

Exemplo 2.42. O exemplo mais natural de gauge são valorizações em álgebras de divisão, sob certas condições restritivas. Seja D uma álgebra de divisão com dimensão finita sobre seu centro $Z(D) = F$. Suponhamos que D tem uma valorização w estendendo uma valorização v de F. Então pela definição de valorização, já temos que w satisfaz as propriedades (2.35), (2.36), (2.37) e (2.38) da definição de gauge acima. Além disso, como $\mathrm{gr}_w(D)$ é uma álgebra de divisão graduada, ela é graduada semi-simples. Temos pela Proposição 2.9 que

$$[\mathrm{gr}_w(D) : \mathrm{gr}_v(F)] = [\overline{D} : \overline{F}]|\Gamma_w : \Gamma_v|. \tag{2.43}$$

Assim, w é uma v-gauge se e somente se

$$[D : F] = [\overline{D} : \overline{F}]|\Gamma_w : \Gamma_v|. \tag{2.44}$$

Portanto nem toda valorização é uma gauge. Veremos na Seção 3.5 que a condição (2.44) significa que a valorização w é sem defeito. Portanto, toda valorização sem defeito em uma álgebra de divisão é uma gauge, mas nem toda valorização é gauge. Exemplos de álgebras de divisão que tem uma valorização com defeito são dados em [**M4**].

No Exemplo 2.42 vimos que toda valorização sem defeito em uma álgebra de divisão é uma gauge. Entretanto, existem gauges em álgebras de divisão que não são valorizações como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.45 (Gauges em álgebras de quatérnios). Veremos agora que sempre podemos construir uma gauge em uma álgebra de quatérnios. Seja (F, v) um corpo valorizado tal que $\mathrm{car}(F) \neq 2$ e $\mathrm{car}(\overline{F}) \neq 2$. Seja $Q = (a, b)_F$ uma F-álgebra de quatérnios. Defina a v-norma α em Q por

$$\alpha(x+yi+zj+wk) = \min(v(x), v(y)+\frac{1}{2}v(a), v(z)+\frac{1}{2}v(b), v(w)+\frac{1}{2}v(a)+\frac{1}{2}v(b)).$$

Desta forma, $\{1, i, j, k\}$ é uma base de decomposição de D para α. Agora note que $\alpha(ij) = \alpha(i) + \alpha(j)$, $\alpha(ik) = \alpha(i) + \alpha(k)$ e $\alpha(jk) = \alpha(j) + \alpha(k)$. Então segue do Lema 2.28 que α é multiplicativa. Como α é uma v-norma, temos pela Proposição 2.26 que as imagens $1', i', j', k'$ formam uma $\mathrm{gr}(F)$-base da álgebra graduada $\mathrm{gr}_\alpha(Q)$. Como $\alpha(i^2) = 2\alpha(i)$, $\alpha(j^2) = 2\alpha(j)$ e $\alpha(ij) = \alpha(i)+\alpha(j)$, segue que

$$(i')^2 = (i^2)' = a', \quad (j')^2 = (j^2)' = b' \quad \text{e} \quad i'j' = k' = -j'i'.$$

Então $\mathrm{gr}_\alpha(Q)$ é a álgebra de quatérnios graduada $(a', b')_{\mathrm{gr}(F)}$, que é uma álgebra graduada simples pelo Exemplo 2.10. Portanto α é uma v-gauge na álgebra de quatérnios $(a, b)_F$.

Comparando o Exemplo 1.6 com o Exemplo 2.45 podemos ver que gauges em álgebra de divisão são objetos muito mais abundantes do que valorizações. Em particular, vimos no Exemplo 1.6 que a valorização 5-ádica v em $\mathbb{Q}$ não se estende para uma valorização na álgebra de quatérnios $(-1, -1)_\mathbb{Q}$. Por outro lado, aplicando a construção do Exemplo 2.45, obtemos que

$$\alpha(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = \min(v(a_0), v(a_1), v(a_2), v(a_3)).$$

é uma v-gauge na álgebra de quatérnios $(-1, -1)_\mathbb{Q}$.

Exemplo 2.46. Gauges também podem ser construídas em álgebras de matrizes com coeficientes em anéis de divisão. Seja D uma F-álgebra de divisão com uma valorização sem defeito w, conforme veremos na Seção 3.5. Suponhamos que M é um D-espaço vetorial à esquerda com $\dim_D M = k$. Seja α uma w-norma em M com uma base de decomposição $(m_i)_{i=1}^k$ (que sempre existe por (2.25)). Seja $A = \mathrm{End}_D M \cong M_k(D)$. A função $\mathrm{End}(\alpha) : A \to \Gamma \cup \{\infty\}$ definida por

$$\mathrm{End}(\alpha)(f) = \min_{1\leq i\leq k}(\alpha(f(m_i)) - \alpha(m_i)) \tag{2.47}$$

é uma v-gauge em A. A verificação não é trivial e uma prova pode ser encontrada em [**TW1**, Prop. 1.19].

Exemplo 2.48. Seja (F, v) um corpo valorizado e seja K uma extensão finita de F. Sejam $v_1, \ldots, v_k$ todas as extensões de v em K. A função $y : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ definida por

$$y(x) = \min_{1 \leq i \leq k} (v_i(x)) \tag{2.49}$$

é uma v-gauge se e somente se vale a igualdade na desigualdade fundamental, isto é,

$$[K : F] = \sum_{i=1}^{k} [\overline{K}^{v_i} : \overline{F}^{v}] |\Gamma_{v_i} : \Gamma_v|, \tag{2.50}$$

onde $\overline{F}^{v}$ (resp. $\overline{K}^{v_i}$) é o corpo de resíduos de v (resp. v_i) e Γ_v (resp. Γ_{v_i}) é o grupo de valores de v (resp. v_i). Além disso, y é a única possível v-gauge em K. Mais ainda, temos um isomorfismo de álgebras graduadas

$$\mathrm{gr}_y(K) \cong_g \mathrm{gr}_{v_1}(K) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{v_k}(K). \tag{2.51}$$

A verificação de que y é uma v-gauge também não é trivial. Um prova é dada em [**TW1**, Prop. 1.8 e Cor. 1.9]. A demonstração do isomorfismo (2.51) usa a forma mais geral do Teorema da aproximação obtido por Ribenboim em [**R**, Théorème 5]. No caso particular em que v é henseliana e $\mathrm{car}(\overline{F}^{v}) \nmid [K : F]$, temos que a extensão única de v em K é uma v-gauge.

2.7. Funções valorização de Morandi

Morandi definiu em [**M2**] uma função valorização associada aos anéis de valorização de Dubrovin que são integrais sobre o centro, que chamaremos de função valorização de Morandi.

Seja A um anel artiniano simples e Γ um grupo totalmente ordenado. Uma aplicação $w : A \to \Gamma \cup \{\infty\}$ é dita uma *função valorização de Morandi* se satisfaz as seguintes propriedades para todo $a, b \in A$:

(i) $w(-1) = 0$ e $w(a) = \infty$ se e somente se $a = 0$.

(ii) $w(a + b) \geq \min\{w(a), w(b)\}$,

(iii) $w(ab) \geq w(a) + w(b)$,

(iv) $\Gamma_w = w(\mathrm{st}(w))$, onde $\mathrm{st}(w) = \{a \in A^{\times} \mid w(a^{-1}) = -w(a)\}$.

Exemplo 2.52. Seja D um anel de divisão com uma valorização w. Pela definição de valorização, temos que w satisfaz as propriedades (i)-(iii) da definição acima. Além disso, como $w(ab) = w(a) + w(b)$ para todo $a, b \in D$, temos que $\mathrm{st}(w) = D^{\times}$. Portanto w também satisfaz a propriedade (iv) e então w é uma função valorização de Morandi.

Exemplo 2.53. Vimos no Exemplo 1.6 que a valorização 5-ádica v em $\mathbb{Q}$ não se estende para uma valorização na álgebra de quatérnios $(-1,-1)_{\mathbb{Q}}$. Uma verificação direta permite mostrar que a função $\alpha : (-1,-1)_{\mathbb{Q}} \to \Gamma \cup \{\infty\}$, definida por

$$\alpha(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = \min(v(a_0), v(a_1), v(a_2), v(a_3)),$$

satisfaz as propriedades (i)-(iii) (cf. Exemplo 2.45). Como $\mathbb{Q}^{\times} \subseteq \mathrm{st}(\alpha)$ e $\Gamma_\alpha = \mathbb{Z}$, temos que $\alpha(\mathrm{st}(\alpha)) = \Gamma_\alpha$. Portanto, α é uma função valorização de Morandi na álgebra de quatérnios $(-1,-1)_{\mathbb{Q}}$ e α não é uma valorização.

O resultado seguinte estabelece que existe uma função valorização associada a cada anel de valorização de Dubrovin integral sobre seu centro. Para uma prova ver [**MMU**, Thm. 23.2 e Thm. 23.3].

Teorema 2.54 (Morandi). *Seja A um anel artiniano simples com dimensão finita sobre seu centro F e seja R um anel de valorização de Dubrovin de A. Então existe uma função valorização de Morandi w em A com $R = \{a \in A \mid w(a) \geq 0\}$ e $J(R) = \{a \in A \mid w(a) > 0\}$ se e somente se R é integral sobre seu centro. Neste caso, w é unicamente determinada por R e $w|_F$, que é uma valorização em F.*

O resultado seguinte relaciona funções valorização de Morandi com gauges. Uma demonstração pode ser encontrada em [**TW1**, Prop. 2.5].

Proposição 2.55. *Seja A uma álgebra central simples sobre um corpo F com uma valorização v e seja α uma v-função valorização multiplicativa em A. Então α é uma função valorização de Morandi em A com $\delta(R_\alpha/V) = 1$ (ver Prop. 3.47) se e somente se α é uma v-gauge em A com A_0 simples.*

Capítulo 3

Propriedades fundamentais de gauges

3.1. O anel da gauge

Assim como em valorizações em corpos ou em álgebras de divisão, podemos definir um anel associado a uma gauge, que chamaremos de *anel da gauge*. Nesta seção estudaremos propriedades aritméticas desses anéis. O resultado principal desta seção é o Teorema 3.6, o qual estabelece que o anel de uma gauge é uma ordem semi-local.

Seja (F, v) um corpo valorizado. Vamos denotar sempre por V o anel de valorização associado a valorização v. Seja A uma F-álgebra de dimensão finita. Se α é uma v-gauge em A, então definimos

$$R_\alpha = \{x \in A \mid \alpha(x) \geq 0\} \quad \text{e} \quad J_\alpha = \{x \in A \mid \alpha(x) > 0\}. \tag{3.1}$$

Proposição 3.2. *R_α é um subanel de A e J_α é um ideal bilateral de R_α.*

Demonstração: Pelas propriedades (2.37) e (2.38), R_α é fechado para adição e multiplicação. A propriedade (2.36) implica que $\alpha(-x) = \alpha(x)$ para todo $x \in A$, logo R_α também é fechado para subtração. Além disso, $1 \in R_\alpha$ pois $\alpha(1) = 0$. Portanto, R_α é um subanel de A. Da mesma forma, pelas condições (2.37) e (2.38), J_α é fechado para soma e para a multiplicação por elementos de R_α à direita e à esquerda. Além disso, $0 \in J_\alpha$ porque $\alpha(0) = \infty$. Portanto, J_α é um ideal bilateral de R_α. □

O subanel $R_\alpha \subseteq A$ é dito o *anel da gauge* α. Veremos que o ideal bilateral J_α coincide com o radical de Jacobson de R_α. Lembre que o *radical de Jacobson* $J(S)$ de um anel S é definindo como a interseção dos ideais maximais à direita (ou à esquerda) de S. O resultado seguinte fornece uma útil caracterização do radical de Jacobson em termos dos elementos invertíveis de S, que será utilizado na demonstração do Lema 3.4.

Lema 3.3. *Seja S um anel e seja $x \in S$. Então são equivalentes:*

(i) $x \in J(S)$

(ii) $1 + yxz \in S^\times$ *(o grupo das unidades de S) para todo $y, z \in S$.*

Ver [**L**, Lemma 4.3] para uma demonstração do Lema 3.3.

Lema 3.4. *Para R_α e J_α como em (3.1), tem-se $J_\alpha = J(R_\alpha)$.*

Demonstração: Sejam $x \in J_\alpha$ e $y, z \in R_\alpha$. Como J_α é um ideal bilateral, temos que $yxz \in J_\alpha$. Assim, a imagem de $1 + yxz$ na álgebra graduada $\mathrm{gr}_\alpha(A)$ será dada por

$$(1 + yxz)' = (1 + yxz) + J_\alpha = 1 + J_\alpha = 1' \in \mathrm{gr}_\alpha(A)^\times.$$

Então pelo Lema 2.29, temos $1 + yxz \in A^\times$ e $\alpha((1+yxz)^{-1}) = -\alpha(1+yxz)$. Como $0 = \alpha(1) \le \alpha(yxz)$, segue da propriedade (2.37) que

$$\alpha(1 + yxz) = \min(\alpha(1) + \alpha(yxz)) = \alpha(1) = 0.$$

Logo $1 + yxz \in R_\alpha^\times$. Então, pelo Lema 3.3, $J_\alpha \subseteq J(R_\alpha)$. Para a outra inclusão, note que $J(R_\alpha/J_\alpha) = J(R_\alpha)/J_\alpha$. Como R_α/J_α é a parte de grau 0 da álgebra graduada $\mathrm{gr}_\alpha(A)$, que é semi-simples pela Proposição 2.13, concluímos que $J(R_\alpha/J_\alpha) = 0$. Portanto $J_\alpha = J(R_\alpha)$. □

Proposição 3.5. *$R_\alpha \cap F = V$ e $J(R_\alpha) \cap V = J(V)$.*

Demonstração: Para todo $x \in F$ temos pela propriedade (2.36) que $\alpha(x) = v(x)$. Logo $x \in R_\alpha$ se e somente se $x \in V$, o que implica $R_\alpha \cap F = V$. Da mesma forma, para $x \in V$ temos $x \in J(R_\alpha)$ se e somente se $x \in J(V)$. Portanto $J(R_\alpha) \cap V = J(V)$. □

Em álgebra comutativa, um anel é dito semi-local quando possui um número finito de ideais maximais. A generalização deste conceito no caso não-comutativo é dada por uma condição mais fraca, a saber, um anel S é *semi-local* se $S/J(S)$ é artiniano à esquerda (à direita), ou equivalentemente, $S/J(S)$ é semi-simples. Está demonstrado em [**L**, Prop. 20.2] que se um anel R tem apenas um número finito de ideais maximais à esquerda, então R é semi-local. A recíproca vale quando $R/J(R)$ é comutativo. Um subanel R de uma F-álgebra A é dita uma *ordem* em A se $FR = A$ e F é o anel quociente de V, onde $V = R \cap F$. Além disso, se R é integral sobre V, então dizemos que R é uma *V-ordem* em A.

Teorema 3.6. *Seja α uma v-gauge em A tal que $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Então R_α é uma V-ordem semi-local em A.*

Demonstração: Como $R_\alpha/J(R_\alpha)$ é a parte de grau 0 da álgebra graduada $\mathrm{gr}_\alpha(A)$, que é semi-simples, concluímos que $R_\alpha/J(R_\alpha)$ também é semi-simples pela Proposição 2.13. Logo R_α é um anel semi-local. Vamos mostrar agora que R_α é uma ordem em A. A inclusão $FR_\alpha \subseteq A$ é clara. Para a outra inclusão, seja $x \in A \setminus \{0\}$. Como $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, existe um inteiro positivo n tal que $n\alpha(x) \in \Gamma_v$. Seja $c \in F$ tal que $v(c) = n|\alpha(x)|$. Como $\alpha(cx) = v(c) + \alpha(x) = n|\alpha(x)| + \alpha(x) \geq 0$, concluímos que $x = c^{-1}(cx) \in FR_\alpha$. Como $V = R_\alpha \cap F$ é um anel de valorização de F, temos que F é o anel quociente de V. Resta mostrar que R_α é integral sobre V. Seja $B = \mathrm{End}_F(A)$. Para cada $a \in A$ considere $\ell_a \in B$ dada por $\ell_a(x) = ax$. Como α é uma v-norma, temos de (2.24) que existe uma base de decomposição $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de A para α. Logo podemos construir uma gauge y_α em B como em (2.47), dada por

$$y_\alpha(f) = \min_{1 \leq i \leq n} (\alpha(f(a_i)) - \alpha(a_i)), \tag{3.7}$$

para todo $f \in B$. Note que se $a \in R_\alpha$, então

$$y_\alpha(\ell_a) = \min_{1 \leq i \leq n} (\alpha(aa_i) - \alpha(a_i)) \geq \min_{1 \leq i \leq n} (\alpha(a) + \alpha(a_i) - \alpha(a_i)) = \alpha(a) \geq 0.$$

Logo $\ell_a \in R_{y_\alpha}$, o anel da gauge y_α. Para concluir a demonstração, é suficiente mostrar que R_{y_α} é integral sobre V. Seja $f \in R_{y_\alpha}$. Podemos escrever f como uma matriz $(f_{ij})_{i,j=1}^n$ com relação à base $(a_j)_{j=1}^n$, isto é, $f(a_j) = \sum_{i=1}^n a_i f_{ij}$ para $j = 1, \ldots, n$. Então, de (3.7) temos

$$y_\alpha(f) = \min_{1 \leq i,j \leq n} (\alpha(a_i) + v(f_{ij}) - \alpha(a_j)).$$

Como $y_\alpha(f) \geq 0$, segue que $v(f_{ij}) \geq \alpha(a_j) - \alpha(a_i)$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. O polinômio característico de f é dado por

$$p(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} c_{\sigma(i)i},$$

onde $c_{ij} = -f_{ij}$ se $i \neq j$ e $c_{ii} = X - f_{ii}$. Para cada $\sigma \in S_n$ podemos escrever $\{1, \ldots, n\}$ como uma união disjunta $\{r_1, \ldots, r_k\} \cup \{r_{k+1}, \ldots, r_n\}$ de forma que $\sigma(r_i) \neq r_i$ para $1 \leq i \leq k$ e $\sigma(r_i) = r_i$ para $k+1 \leq i \leq n$. Então temos

$$\prod_{i=1}^{n} c_{\sigma(i)i} = (-1)^k \left(\prod_{i=1}^{k} f_{\sigma(r_i), r_i} \right) \left(\prod_{i=k+1}^{n} (X - f_{r_i, r_i}) \right).$$

Como $v(f_{r_i,r_i}) \geq \alpha(a_{r_i}) - \alpha(a_{r_i}) = 0$, segue que $X - f_{r_i,r_i} \in V[X]$. Além disso,

$$v(\prod_{i=1}^{k} f_{\sigma(r_i),r_i}) = \sum_{i=1}^{k} v(f_{\sigma(r_i),r_i}) \geq \sum_{i=1}^{k} \alpha(a_{r_i}) - \alpha(a_{\sigma(r_i)}) = 0,$$

pois $\sigma|_{\{r_1,\ldots,r_k\}}$ é uma bijeção. Logo $\prod_{i=1}^{k} f_{\sigma(r_i),r_i} \in V$. Portanto, $p(X) \in V[X]$. $\square$

Corolário 3.8. *Sob as hipóteses do Teorema 3.6, com $F = Z(A)$, temos $V = Z(R_\alpha)$.*

Demonstração: Se $x \in V \subseteq F$ então x comuta com todo elemento de A. Logo x comuta com todo elemento de R_α. Então $V \subseteq Z(R_\alpha)$. Para a inclusão contrária, seja $x \in Z(R_\alpha)$. Como R_α é uma V-ordem em A, todo elemento $a \in A$ pode ser escrito da forma $a = \sum_{i=1}^{r} c_i y_i$, com $c_i \in F$ e $y_i \in R_\alpha$. Note que x comuta com cada c_i e y_i. Logo $x \in Z(A) = F$. Portanto, $x \in R_\alpha \cap F = V$. $\square$

Nota 3.9. Note que a restrição sobre o grupo de valores Γ_α no Teorema 3.6 só foi utilizada para mostrar que R_α é uma ordem. Veremos no Exemplo 3.10 que essa condição é de fato necessária. Entretanto, diríamos que essa não chega a ser uma condição tão restritiva. Na verdade gauges poderiam ter sido definidas assumindo sempre valores no fecho divisível $\Gamma_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Essa condição aparece naturalmente nos exemplos fundamentais. Além disso, vamos mostrar no Teorema 5.22 que gauges sempre existem sob essa condição. Uma demonstração de que R_{y_α} é integral V já tinha sido obtida por Tignol e Wadsworth em [**TW1**, Lemma 1.2]. Entretanto, a demonstração de [**TW1**, Lemma 1.2] faz uso de um resultado profundo de Amitsur e Small [**AS**, Thm. 2.3], enquanto que a demonstração dada cima é basicamente elementar.

Exemplo 3.10. Vamos aplicar a construção da gauge do Exemplo 2.46 para o caso particular em que $D = F$ e $\dim_F M = 2$. Seja $\{m_1, m_2\}$ uma F-base de M e definimos a v-norma α em M tal que $\alpha(m_1) = 0$ e $\alpha(m_2) = \delta \in \Gamma$. Cada $f \in \mathrm{End}_D M$ pode ser identificado a uma matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ tal que

$$f(m_1) = a_{11}m_1 + a_{21}m_2 \qquad \text{e} \qquad f(m_2) = a_{12}m_1 + a_{22}m_2.$$

Nestas condições, a fórmula (2.47) nos dá uma v-gauge em $M_2(F)$

$$y_\delta\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \min(v(a_{11}), v(a_{21}) + \delta, v(a_{12}) - \delta, v(a_{22})). \tag{3.11}$$

Então o anel da gauge y_δ é dado por

$$R_{y_\delta} = \begin{pmatrix} F^{\geq 0} & F^{\geq -\delta} \\ F^{\geq \delta} & F^{\geq 0} \end{pmatrix}.$$

Suponhamos agora que $\delta \geq 0$ e que δ não pertence ao fecho convexo de Γ_v. Então δ é maior do que todo elemento em Γ_v. Logo $F^{\geq \delta} = \{0\}$ e $F^{\geq -\delta} = F$. Assim,

$$R_{y_\delta} = \begin{pmatrix} V & F \\ 0 & V \end{pmatrix}.$$

Logo

$$FR_{y_\delta} = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix} \subsetneq M_2(F).$$

Portanto, R_{y_δ} não é uma ordem em $M_2(F)$.

Exemplo 3.12. Seja (F, v) um corpo valorizado e L uma extensão finita de F com v sem defeito em L. Então pelo Exemplo 2.48 existe uma única v-gauge em L definida por

$$y(x) = \min_{1 \leq i \leq k} (v_i(x)),$$

onde $v_1, \ldots, v_k$ são todas as extensões de v em L. Portanto a anel da gauge y é a interseção dos anéis de valorização $R_y = \bigcap_{i=1}^k V_i$, que é o fecho integral de V em L.

Exemplo 3.13. Se uma gauge α é também uma função valorização de Morandi, que acontece se e somente se $R_\alpha / J(R_\alpha)$ é simples, então o anel da gauge é um anel de valorização de Dubrovin integral sobre o centro. Este é o caso do Exemplo 2.45 e do Exemplo 3.10 com $\delta = 0$.

Exemplo 3.14. Seja K um corpo com $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Seja x um elemento transcendente sobre K e seja $F = K(x)((y))$ o corpo das séries de Laurent sobre $K(x)$. Considere a álgebra de quatérnios $D = (x+1, y)_K$ sobre F. Seja w a valorização y-ádica em F. Temos que $\Gamma_w = \mathbb{Z}$ e $\overline{F}^w = K(x)$. Além disso, como w é henseliana, temos que esta se estende para uma valorização w' em D. Note que

$$w'(i) = \frac{1}{2}w'(i^2) = \frac{1}{2}w(x+1) = 0, \qquad w'(j) = \frac{1}{2}w'(j^2) = \frac{1}{2}w(y) = \frac{1}{2} \quad \text{e}$$

$$w'(k) = w'(i) + w'(j) = \frac{1}{2}.$$

Então $\Gamma_{w'} = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Note também que $\bar{i} \in \overline{D}^{w'} \setminus \overline{F}^w$. Como

$$[\overline{D}^{w'} : \overline{F}^w]|\Gamma_{w'} : \Gamma_v| = [D : F] = 4,$$

devemos ter $\overline{D}^{w'} = \overline{F}^w(\bar{i}) = K(x)(\sqrt{x+1})$. Além disso, $\{1', i', j', k'\}$ formam uma base homogênea para a álgebra graduada $\mathrm{gr}_{w'}(D)$. Então temos pela Proposição 2.26 que $\{1, i, j, k\}$ é uma base de decomposição de D para w' logo

$$w'(a + bi + cj + dk) = \min\big(w(a), w(b), w(c) + \frac{1}{2}, w(d) + \frac{1}{2}\big).$$

Com isso temos uma descrição do anel de valorização invariante de D associado a w'

$$\text{(3.15)} \quad R_{w'} = W \oplus Wi \oplus Wj \oplus Wk \quad \text{e} \quad J(R_{w'}) = J(W) \oplus J(W)i \oplus Wj \oplus Wk.$$

Agora seja u a valorização x-ádica em $K(x)$. Temos que $\Gamma_u = \mathbb{Z}$ e $\overline{K(x)} = K$. A composição de w com u dá uma valorização v em F tal que $\Gamma_v = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (com a ordem lexicográfica da direita para a esquerda) e $\overline{F}^v = K$. A valorização u tem duas extensões distintas u_1 e u_2 em $K(x)(\sqrt{x+1})$, pois $x = (\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)$ em $K(x)(\sqrt{x+1})$. Segue que a valorização v tem duas extensões distintas em $F(\sqrt{x+1})$. Portanto, v não se estende para uma valorização em D. Podemos usar o Exemplo 2.45 para construir uma gauge α na álgebra de quatérnios $(x+1, y)_F$. Neste caso, temos

$$\alpha(a + bi + cj + dk) = \min(v(a), v(b), v(c) + (0, \frac{1}{2}), v(d) + (0, \frac{1}{2})).$$

Note que $v(x) \geq (0, -\frac{1}{2})$ se e somente se $w(x) \geq 0$. Então o anel da gauge α é dado por

$$R_\alpha = V \oplus Vi \oplus Wj \oplus Wk.$$

Vamos agora mostrar que R_α é a interseção de dois anéis de valorização de Dubrovin de $(x+1, y)_F$. Para isso, vamos obter uma descrição dos anéis de valorização U_1 e U_2. Primeiro vamos mostrar que $U_1 \cap U_2 = U[\sqrt{x+1}]$. É bem conhecido que $U_1 \cap U_2$ é o fecho integral de U em $K(x)(\sqrt{x+1})$ (cf. [**EP**, Thm. 3.1.3]). Como $\sqrt{x+1}$ é raiz do polinômio mônico $P(X) = X^2 - (x+1)$, temos a inclusão $U[\sqrt{x+1}] \subseteq U_1 \cap U_2$. Para a outra inclusão, seja $a + b\sqrt{x+1} \in U_1 \cap U_2$. Note que o polinômio minimal de $a + b\sqrt{x+1}$ é dado por $P(X) = X^2 - 2aX + (a^2 - (x+1)b^2)$. Mas então $P(X)$ deve ter coeficientes em $U_1 \cap U_2$, (cf. [**E2**, Teorema 1.9]) donde obtemos que $a, b \in U_1 \cap U_2$. Como $U_i \cap K(x) = U$ para $i = 1, 2$, segue que $a, b \in U$. Portanto $a + b\sqrt{x+1} \in U[\sqrt{x+1}]$. Agora como $x = (\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+1)$ em $K(x)(\sqrt{x+1})$, concluímos que os anéis de valorização U_1 e U_2 são as localizações de $U[\sqrt{x+1}]$ pelos ideais primos $(\sqrt{x+1}+1)$ e $(\sqrt{x+1}-1)$. Agora seja

$$\pi : R_{w'} \to R_{w'}/J(R_{w'}) = K(x)\sqrt{x+1}$$

a projeção canônica. Seja $B_i = \pi^{-1}(U_i)$ para $i = 1, 2$. Segue de (1.12) que B_1 e B_2 são anéis de valorização de Dubrovin de D. Como U_1 e U_2 são anéis de valorização independentes, temos pelo Corolário A.4 que B_1, B_2 tem a propriedade da interseção. Também podemos mostrar que B_1 e B_2 são anéis de valorização totais. Para isso, seja $x \in D \backslash B_i$. Como $R_{w'}$ é um anel de valorização total, $x \in R_{w'}$ ou $x^{-1} \in R_{w'}$. Se $x \notin R_{w'}$, então $x^{-1} \in J(R_{w'})$, logo $x^{-1} \in B_i$. Se $x \in R_{w'}$ então $\pi(x) \notin U_i$. Como U_i é anel de valorização, devemos ter $\pi(x)^{-1} = \pi(x^{-1}) \in U_i$. Logo $x^{-1} \in B_i$. Além disso, B_1, B_2 não podem ser invariantes pois $Z(B_i) = V$ e já vimos que V não pode se extender para um anel de valorização invariante em D. Agora como

$$B_1 \cap B_2 = \pi^{-1}(U_1) \cap \pi^{-1}(U_2) = \pi^{-1}(U_1 \cap U_2) = \pi^{-1}(U \oplus Ui),$$

e temos $\pi^{-1}(U) = V$, concluímos que $R_\alpha = B_1 \cap B_2$.

O Teorema 3.6, juntamente com os Exemplos 3.14 e 3.12, 3.13 motivaram a nossa conjectura de que o anel da gauge estaria relacionado com uma interseção de anéis de valorização de Dubrovin.

Em valorizações de corpos, a valorização é determinada pelo anel de valorização a menos de isomorfismo do grupo de valores. Então é natural questionar se o mesmo acontece com gauges. Tem-se uma resposta positiva no caso em que a parte de grau zero da álgebra graduada associada é simples. Sabemos pela Proposição 2.55 que uma gauge com essa propriedade é também uma função valorização de Morandi. O Teorema 2.54 garante que toda função valorização de Morandi é unicamente determinada pelo anel e pela valorização do centro. O Exemplo 3.16 a seguir mostra que o mesmo não acontece quando a parte de grau zero da álgebra graduada tem mais de uma componente simples.

Exemplo 3.16. Temos construído no Exemplo 3.14 uma gauge na álgebra de quatérnios de divisão $D = (x+1, y)_F$. Utilizando um outro método, outras gauges podem ser construídas em D. Seja $L = F(t)$, onde $t^2 = x + 1$. Como (L, v') é uma extensão imediata de (F, v) então $\mathrm{gr}(L) = \mathrm{gr}(F)$. Também temos que L é um subcorpo maximal de D. Então D pode ser vista como uma F-subálgebra de $S = M_2(L)$ através das identificações

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & ty \\ -t & 0 \end{pmatrix}.$$

Como notamos no Exemplo 3.14 a valorização v de F tem duas extensões distintas em L. Seja v' a extensão tal que $\bar{t} = 1$ no corpo de resíduos. Vamos fixar algum valor $\gamma \in \mathbb{Q}$ tal que $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$ e seja $\delta = (\gamma, \frac{1}{2})$. Podemos construir uma v'-gauge em S como no Exemplo 3.10 definida por

$$\alpha' \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \min(v'(p), v'(q) - \delta, v'(r) + \delta, v'(s)).$$

Seja $\alpha = \alpha'|_D$, que é uma v-função valorização multiplicativa em D. Precisamos verificar que α é um gauge. Note que para cada $z = a + bi + cj = dk \in D$, temos $z = \begin{pmatrix} a+bt & (c+dt)y \\ c-dt & a-bt \end{pmatrix}$ em S. Como $v(y) = (0, 1)$, temos

$$\alpha(z) = \min(v'(a + bt), v'((c + dt)y) - \delta, v'(c - dt) + \delta, v'(a - bt)).$$

Segue que $\alpha(1) = \alpha(i) = 0$ e

$$\alpha(j) = \alpha(k) = \min((-\gamma, \frac{1}{2}), (\gamma, \frac{1}{2})) = (-\gamma, \frac{1}{2}).$$

Como $v'(1 - t) = (1, 0)$, temos

$$\alpha(j - k) = \min((-\gamma, \frac{1}{2}) + (1, 0), (\gamma, \frac{1}{2})) = (\gamma, \frac{1}{2}).$$

Como notado em (3.35), $\mathrm{gr}_\alpha(D)$ é uma $\mathrm{gr}(F)$-subálgebra de $\mathrm{gr}_{\alpha'}(S)$. Note que

$$(1 + i)' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in D_0, \qquad (1 - i)' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in D_0$$

$$j' = k' = \begin{pmatrix} 0 & y' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in D_{(-\gamma, \frac{1}{2})}, \qquad (j - k)' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in D_{(\gamma, \frac{1}{2})}.$$

Como $1 + i, 1 - i, j, j - k$ tem imagens em $\mathrm{gr}_\alpha(D)$ que são $\mathrm{gr}(F)$-linearmente independentes, então $\{1 + i, 1 - i, j, j - k\}$ é uma base de decomposição de D para α. Logo α é uma norma em D. Além disso,

$$[\mathrm{gr}_\alpha(D) : \mathrm{gr}(F)] = 4 = [\mathrm{gr}_{\alpha'}(S) : \mathrm{gr}(K)] = [\mathrm{gr}_{\alpha'}(S) : \mathrm{gr}(F)].$$

Assim, $\mathrm{gr}_\alpha(D) = \mathrm{gr}_{\alpha'}(S)]$, que é uma álgebra graduada simples. Portanto, α é uma gauge em D. Agora note que

$$\begin{aligned} R_\alpha = \{a + bi + c_j + d_k \quad | \quad & v'(a+bt) \geq 0, v'(a-bt) \geq 0, \\ & v'(c+dt) \geq (\gamma, -\frac{1}{2}), v'(c+dt) \geq (-\gamma, -\frac{1}{2})\}. \end{aligned}$$

Mas $v'(c+dt) \geq (\gamma, -\frac{1}{2})$ se e somente se $w'(c+dt) \geq 0$, onde w' é a valorização menos fina que v' estendendo w em L. Da mesma forma, $v'(c-dt) \geq (-\gamma, -\frac{1}{2})$ se e somente se $w'(c-dt) \geq 0$. Assim, independentemente da escolha de γ a gauge α tem sempre o mesmo anel da gauge. Por outro lado,

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_{\alpha'} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cup (\delta + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \cup (-\delta + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}).$$

Desta forma, diferentes escolhas de γ nos dá gauges tendo conjuntos de valores distintos. Portanto, o anel da gauge R_α não determina a gauge α.

3.2. Composição

Nesta seção vamos estudar a composição de funções valorização em espaços vetoriais e em álgebras de dimensão finita. Tudo que aparece nesta seção, com exceção das Proposições 3.25 e 3.27, está em [**TW2**, § 4].

Seja $v\colon F \to \Gamma \cup \{\infty\}$ uma valorização em um corpo F e seja $\Delta \subset \Gamma$ um subgrupo convexo, isto é, se $\gamma \in \Gamma$, $\delta \in \Delta$ e $0 \leq \gamma \leq \delta$, então $\gamma \in \Delta$. Seja $\Lambda = \Gamma/\Delta$, e seja $\varepsilon\colon \Gamma \to \Lambda$ a projeção canônica. A ordem de Γ induz uma ordem total em Λ tal que para $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, se $\gamma_1 \leq \gamma_2$, então $\varepsilon(\gamma_1) \leq \varepsilon(\gamma_2)$. Consequentemente,

$$\text{se} \quad \varepsilon(\gamma_2) < \varepsilon(\gamma_1) \quad \text{então} \quad \gamma_2 < \gamma_1. \tag{3.17}$$

Como Γ é assumido ser divisível, segue que Δ e Λ são também divisíveis. A composição de v com ε fornece uma *valorização menos fina* em F

$$w = \varepsilon \circ v\colon F \to \Lambda \cup \{\infty\}.$$

Neste caso, escrevemos $v \leq w$. Seja $\overline{F}^v$ (resp. $\overline{F}^w$) o corpo de resíduos de F com relação a valorização v (resp. w). A valorização v induz uma valorização quociente

$$u : \overline{F}^w \to \Delta \cup \{\infty\},$$

dada por $u(\overline{x}) = v(x)$ e que tem corpo de resíduos

$$\overline{\overline{F}^w}^u = \overline{F}^v.$$

Detalhes do que foi dito acima pode ser encontrado em [**EP**, pp. 44-45].

Agora seja M um espaço vetorial sobre F e seja $\alpha : M \to \Gamma \cup \{\infty\}$ uma v-função valorização. Então definimos

$$\beta = \varepsilon \circ \alpha : M \to \Lambda \cup \{\infty\}. \tag{3.18}$$

O fato de α ser uma v-função valorização implica naturalmente que β é uma w-função valorização. A composição $\beta = \varepsilon \circ \alpha$ é dita uma *função valorização menos fina* que α. Esta relação será denotada por $\alpha \leq \beta$.

Cada elemento $\lambda \in \Lambda = \Gamma/\Delta$ é uma classe lateral de Δ, logo pode ser visto como um subconjunto de Γ. Desta forma, para cada $x \in M$, teremos

$$\beta(x) \;=\; \lambda \in \Lambda \quad \text{se e somente se} \quad \alpha(x) \in \lambda \subset \Gamma.$$

Para cada $\lambda \in \Lambda$, seja

$$M^{\beta \geq \lambda} \;=\; \{x \in M \mid \beta(x) \geq \lambda\}, \quad M^{\beta > \lambda} \;=\; \{x \in M \mid \beta(x) > \lambda\}, \quad M^{\beta}_{\lambda} \;=\; M^{\beta \geq \lambda}/M^{\beta > \lambda}.$$

O grupo M^{β}_{λ} é um $\overline{F}^{w}$-espaço vetorial. Agora para cada $\lambda \in \Lambda$ seja

$$\alpha_\lambda \colon M^{\beta}_{\lambda} \to \lambda \cup \{\infty\} \quad \text{por} \quad x + M^{\beta > \lambda} \mapsto \begin{cases} \alpha(x) & \text{se } \beta(x) = \lambda, \\ \infty & \text{se } \beta(x) > \lambda. \end{cases} \tag{3.19}$$

A aplicação α_λ está bem definida pois se $x,\, y \in M^{\beta \geq \lambda}$ são tais que $x \equiv y \not\equiv 0 \bmod M^{\beta > \lambda}$, então $x - y \in M^{\beta > \lambda}$. Logo $\beta(x-y) > \lambda = \beta(y)$. Como $\beta = \varepsilon \circ \alpha$, (3.17) implica que $\alpha(x-y) > \alpha(y)$. Assim, $\alpha(x) = \min\big(\alpha(x-y), \alpha(y)\big) = \alpha(y)$. Além disso, como α é uma v-função valorização, concluímos que α_λ é uma u-função valorização em M^{β}_{λ}. Para $\gamma \in \lambda$ temos

$$(M^{\beta}_{\lambda})^{\alpha_\lambda}_{\gamma} \;=\; M^{\alpha}_{\gamma}.$$

Consequentemente,

$$\mathrm{gr}_{\alpha}(M) \;=\; \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{gr}_{\alpha_\lambda}(M^{\beta}_{\lambda}) \quad \text{onde} \quad \mathrm{gr}_{\alpha_\lambda}(M^{\beta}_{\lambda}) \;=\; \bigoplus_{\gamma \in \lambda} M^{\alpha}_{\gamma} \tag{3.20}$$

enquanto

$$\mathrm{gr}_{\beta}(M) \;=\; \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M^{\beta}_{\lambda}.$$

Proposição 3.21 (TW2, Prop. 4.3). *Suponhamos que M é um espaço vetorial sobre F de dimensão finita. Se α é uma v-norma, então β é uma w-norma e α_λ é uma u-norma.*

A construção da função valorização menos fina pode ser aplicada para álgebras de dimensão finita. Seja A uma F-álgebra de dimensão finita e suponhamos que α uma v-função valorização multiplicativa em A. Então a w-função valorização menos fina β, definida como em (3.18), é também multiplicativa, pois para todo $x, y \in A$,

$$\beta(xy) = \varepsilon(\alpha(xy)) \geq \varepsilon(\alpha(x) + \alpha(y)) = \varepsilon(\alpha(x)) + \varepsilon(\alpha(y)) = \beta(x) + \beta(y).$$

Proposição 3.22 (TW2, Prop. 4.4). *Se α é uma v-gauge, então a composição $\beta = \varepsilon \circ \alpha$ é uma w-gauge.*

Pela Proposição 3.22, se α é uma gauge, então β é um gauge e então A_0^β é uma álgebra semi-simples. Portanto, a função valorização α_0 está definida não apenas em um espaço vetorial, mas em uma álgebra semi-simples. Note que por (3.19), a função valorização α_0 é descrita por

$$\alpha_0 \colon A_0^\beta \to \Delta \cup \{\infty\} \quad \text{por} \quad x + A^{\beta > 0} \mapsto \begin{cases} \alpha(x) & \text{se } \beta(x) = 0, \\ \infty & \text{se } \beta(x) > 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Além disso,

$$\mathrm{gr}_{\alpha_0}(A_0^\beta) = \bigoplus_{\gamma \in \Delta} A_\gamma^\alpha, \tag{3.24}$$

que é um subanel graduado de $\mathrm{gr}_\alpha(A)$. O resultado seguinte estabelece que α_0 é de fato uma gauge.

Proposição 3.25. *Se α é uma v-gauge em A então α_0 é uma u-gauge em A_0^β.*

Demonstração: A Proposição 3.21 estabelece que α_0 é uma u-norma. Além disso, como α e β são multiplicativas, segue que α_0 é multiplicativa. De fato, sejam $x', y' \in A_0^\beta \setminus \{0\}$. Então $\beta(xy) \geq \beta(x) + \beta(y) = 0$. Se $\beta(xy) > 0$, então, como definido em (2.27), temos $x'y' = 0'$. Logo

$$\alpha_0(x'y') = \infty \geq \alpha_0(x') + \alpha_0(y').$$

Caso $\beta(xy) = 0$, temos que $x'y' = (xy)'$. Então

$$\alpha_0(x'y') = \alpha_0((xy)') = \alpha(xy) \geq \alpha(x) + \alpha(y) = \alpha_0(x') + \alpha_0(y').$$

Desta forma, para concluir a demonstração, resta mostrar que $\mathrm{gr}_{\alpha_0}(A_0^\beta)$ é uma álgebra graduada semi-simples. É suficiente considerar o caso em que $E = \mathrm{gr}_\alpha(A)$ é uma álgebra simples. Neste caso, pelo versão graduada do Teorema Wedderburn (Teorema 2.12), podemos identificar E com $\mathrm{End}_D(J)$, onde D é um anel de divisão graduado e J é um D-espaço vetorial graduado de dimensão finita. Seja $\{b_1, \dots, b_n\}$ uma D-base de J formada por elementos homogêneos e seja $\gamma_i = \deg(b_i)$. Agora particionamos o conjunto dos γ_i em classes laterais de $\Gamma_D + \Delta$. Desta forma, escrevemos $\{b_1, \dots, b_n\}$ como uma união disjunta $S_1 \cup \cdots \cup S_k$, onde b_i e b_j estão no mesmo S_r se e somente se $\gamma_i - \gamma_j \in \Gamma_D + \Delta$. Seja J_i o D-espaço vetorial gerado por S_i. Então temos uma decomposição $J = \bigoplus_{i=1}^k J_i$. Seja $E' = \mathrm{gr}_{\alpha_0}(A_0^\beta)$. Por (3.24), cada elemento homogêneo $f \in E'$ pode ser visto como um elemento de $\mathrm{End}_D(J)$, tal que $\deg(f) \in \Delta$. Desta forma, f aplica cada J_i nele próprio. Logo podemos escrever

$$E' = \prod_{i=1}^{k} B_i, \qquad \text{onde} \qquad B_i = \bigoplus_{\gamma \in \Delta} \mathrm{End}_D(J_i)_\gamma. \tag{3.26}$$

A demonstração estará completa ao mostrarmos que cada B_i é uma álgebra graduada simples. Seja

$$D' = \bigoplus_{\gamma \in \Delta} D_\gamma,$$

que é um subanel de divisão graduado de D. Pela forma como o D-espaço vetorial J_i foi construído, o seu conjunto de graduação está contido em uma classe lateral $\lambda_i + (\Gamma_D + \Delta)$. Seja

$$J_i' = \bigoplus_{\gamma \in \lambda_i + \Delta} J_\gamma \subseteq J_i,$$

que é um D'-espaço vetorial graduado. Note que toda D'-base de J_i' também será uma D-base de J_i. Então podemos identificar J_i com $J_i' \otimes_{D'} D$. Note que toda aplicação de B_i aplica J_i' nele próprio. Então existe um homomorfismo de anéis graduados $B_i \to \mathrm{End}_{D'}(J_i')$, definido por $g \mapsto g|_{J_i'}$. Esta aplicação tem uma inversa dada pela aplicação que envia $h \in \mathrm{End}_{D'}(J_i')$ para $h \otimes \mathrm{id} \in \mathrm{End}_D(J_i' \otimes_{D'} D)$. Então $B_i \cong_g \mathrm{End}_{D'}(J_i')$, que é uma álgebra graduada simples. $\square$

Lembre que se w é uma valorização menos fina que v, então temos a inclusão $V \subseteq W$ entre os anéis de valorização associados. Mais ainda, W é a localização de V com relação ao ideal primo $P = J(W)$ de V. A Proposição 3.27 mostra que anéis de gauges tem um comportamento análogo ao caso comutativo.

Proposição 3.27. *Seja α uma v-gauge em uma F-álgebra central simples A. Suponhamos que $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Seja β uma gauge menos fina que α tal que $\beta|_F = w$. Então o anel da gauge R_β é a localização central de R_α por $P = J(W)$, isto é, $R_\beta = R_\alpha V_P$.*

Demonstração: Note que para cada $x \in A$, se $\alpha(x) \geq 0$, então $\beta(x) = \varepsilon \circ \alpha(x) \geq 0$. Logo $R_\alpha \subseteq R_\beta$. Como $W = V_P \subset R_\beta$, segue que $R_\alpha V_P \subset R_\beta$. Para a inclusão contrária, seja $b \in R_\beta$. Se $\beta(x) > 0$, então $\alpha(x) > 0$, logo $x \in R_\alpha$. Suponhamos então que $\beta(x) = 0$. Assim, $\alpha(x) \in \Delta$. Como $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, existe um inteiro positivo n tal que $n\alpha(x) \in \Gamma_v$. Logo $n\alpha(x) \in \Gamma_v \cap \Delta$. Seja $c \in F$ tal que $v(c) = n|\alpha(x)|$. Como $-n|\alpha(x)| \leq \alpha(x) \leq n|\alpha(x)|$, temos $\alpha(cx) = v(c) + \alpha(x) \geq 0$. Como $w(c) = \varepsilon(v(c)) = 0$, concluímos que $x = (xc)c^{-1} \in R_\alpha V_P$. □

3.3. Extensão de escalares

Seja A uma F-álgebra de dimensão finita com uma v-gauge α e seja L uma extensão de F. Nesta seção discutiremos quando α pode se estender para uma gauge na álgebra $A \otimes_F L$. Começaremos apresentando um resultado geral sobre funções valorização no produto tensorial de espaços vetoriais.

Sejam P e Q espaços vetoriais graduados sobre um corpo graduado K. Então $P \otimes_K Q$ tem uma graduação dada por $(P \otimes_K Q)_\gamma = \sum_{\delta \in \Gamma} P_\delta \otimes_{K_0} Q_{\gamma - \delta}$.

Proposição 3.28 (TW1, Prop. 1.23). *Seja (F, v) um corpo valorizado e sejam M e N dois F-espaços vetoriais tais que M tem uma v-norma α e N tem uma v-função valorização β. Então existe uma única v-função valorização ρ em $M \otimes_F N$ tal que existe um isomorfismo de $\mathrm{gr}(F)$-espaços vetoriais*

$$\mathrm{gr}_\rho(M \otimes_F N) \cong_g \mathrm{gr}_\alpha(M) \otimes_{\mathrm{gr}(F)} \mathrm{gr}_\beta(N) \tag{3.29}$$

satisfazendo $(m \otimes n)' \mapsto m' \otimes n'$ para todo $m \in M$ e $n \in N$. Então $\rho(m \otimes n) = \alpha(m) + \beta(n)$. Se β é uma v-norma, então ρ também é uma v-norma.

A única função valorização ρ em $M \otimes_F N$ satisfazendo as condições da Proposição 3.28 será denotada por $\alpha \otimes \beta$.

Proposição 3.30 (TW1, Cor 1.26). *Suponhamos que (F, v) é um corpo valorizado e A é uma F-álgebra semi-simples com uma v-gauge α. Seja (L, w) uma extensão de (F, v). Então $\alpha \otimes w$, é uma w-função valorização multiplicativa em $A \otimes_F L$ e o isomorfismo*

$$\mathrm{gr}(A) \otimes_{\mathrm{gr}(F)} \mathrm{gr}(L) \cong_g \mathrm{gr}(A \otimes_F L) \tag{3.31}$$

é um isomorfismo de $\mathrm{gr}(L)$-álgebras. Além disso, se α é uma v-gauge em A, então $\alpha \otimes w$ é uma w-gauge se e somente se $\mathrm{gr}(A) \otimes_{\mathrm{gr}(F)} \mathrm{gr}(L)$ é semi-simples, se e somente se $Z(\mathrm{gr}(A)) \otimes_{\mathrm{gr}(F)} \mathrm{gr}(L)$ é uma soma direta de corpos graduados.

O resultado seguinte é uma consequência direta da Proposição 3.30 e e da Proposição 2.22.

Proposição 3.32. *Suponhamos que (F, v) é um corpo valorizado e A é uma F-álgebra de dimensão finita com uma v-gauge α. Suponhamos que (L, w) é uma extensão de (F, v) tal que $\overline{L}^w$ é uma extensão separável de $\overline{F}^v$ e car$(\overline{F}^v) \nmid |\Gamma_w : \Gamma_v|$. Então $\alpha \otimes w$ é uma w-gauge em $A \otimes_F L$.*

A proposição a seguir estabelece que quando temos uma extensão $(L, w)/(F, v)$ não-ramificada, o anel da gauge $\alpha \otimes w$ pode ser descrito em termos do anel da gauge α e do anel de valorização associado a w.

Proposição 3.33. *Suponhamos que (F, v) é um corpo valorizado e A é uma F-álgebra de dimensão finita com uma v-gauge α. Suponhamos que (L, w) é uma extensão não-ramificada de (F, v), isto é, $\Gamma_w = \Gamma_v$ e $\overline{L}^w$ é uma extensão separável de $\overline{F}^v$. Então $\alpha \otimes w$ é uma w-gauge em $A \otimes_F L$ e $R_{\alpha\otimes w} = R_\alpha \otimes_V W$. O resultado vale em particular quando (L, w) é a henselização de (F, v).*

Demonstração: Para simplificar a notação vamos escrever $\alpha' = \alpha \otimes w$ e $A' = A \otimes_F L$. Segue imediatamente da Proposição 3.32 que α' é uma w-gauge em A'. Então temos pelas propriedades (2.37) e (2.36) que para todo $\sum_{i=1}^r x_i \otimes c_i \in A \otimes_F L$,

$$\alpha'(\sum_{i=1}^r x_i \otimes c_i) \geq \min_{1\leq i\leq r} \alpha'(x_i \otimes c_i) = \min_{1\leq i\leq r} (\alpha(x_i) + w(c_i)).$$

Assim, $R_\alpha \otimes_V W \subseteq R_{\alpha'}$. Para mostrar a inclusão contrária, seja $\{m_1, \ldots, m_k\}$ uma base de decomposição de A para α. Então, pela Proposição 2.26, $m_1', \ldots, m_k'$ são gr(F)-linearmente independentes em gr(A). Assim, $m_1' \otimes 1', \ldots, m_k' \otimes 1'$ são gr(L)-linearmente independentes em gr$(A) \otimes_{\mathrm{gr}(F)} \mathrm{gr}(L)$. Segue do isomorfismo (3.31) que $(m_1 \otimes 1)', \ldots, (m_k \otimes 1)'$ são gr(L)- linearmente independentes em gr(A'). Como α' é uma w-norma, temos

$$[\mathrm{gr}(A') : \mathrm{gr}(L)] = [A' : L] = [A : F] = k.$$

Logo $\{(m_1 \otimes 1)', \ldots, (m_k \otimes 1)'\}$ é gr(L)-base de gr(A'). Assim, $\{m_1 \otimes 1, \ldots, m_k \otimes 1\}$ é uma base de decomposição de A' para α', pela Proposição 2.26. Logo todo elemento $x \in R_{\alpha'}$ pode ser escrito da forma $x = \sum_{i=1}^k m_i \otimes c_i$, com $c_1, \ldots, c_k \in L$. Como $\alpha'(x) \geq 0$, segue que $w(c_i) \geq -\alpha'(m_i \otimes 1) = -\alpha(m_i)$, para cada $i = 1, \ldots, k$. Agora para cada $c_i \neq 0$, como $\Gamma_w = \Gamma_v$, existe $d_i \in F$ tal que $v(d_i) = w(c_i)$. Então $\alpha(d_i m_i) = \alpha(m_i) + v(d_i) = \alpha(m_i) + w(c_i) \geq 0$ e $w(c_i d_i^{-1}) = 0$. Assim, $m_i \otimes c_i = d_i m_i \otimes c_i d_i^{-1} \in R_\alpha \otimes_V W$. Logo $x \in R_\alpha \otimes_V W$. Portanto $R_{\alpha'} \subseteq R_\alpha \otimes_V W$, o que completa a demonstração. □

3.4. Restrição

Nesta seção vamos discutir quando a restrição de uma gauge a uma subálgebra é também uma gauge. Infelizmente, não se tem uma resposta positiva em geral. Um contra-exemplo é dado em (3.36). Entretanto, obteremos uma resposta positiva em pelo menos um caso fundamental. Começamos com um resultado geral sobre a restrição de normas a subespaços vetoriais (cf. [**RTW**, Prop. 2.5]).

Proposição 3.34. *Seja D um anel de divisão com uma valorização v. Seja M um D-espaço vetorial de dimensão finita e α uma v-norma em M. Então para todo subespaço $N \subseteq M$, a restrição $\alpha|_N$ é uma v-norma.*

Nota 3.35. Sob as hipóteses da Proposição 3.34, note que para cada $\gamma \in \Gamma$, temos $N^{\geq\gamma} = M^{\geq\gamma} \cap N$ e $N^{>\gamma} = M^{>\gamma} \cap N$. Assim, existe uma aplicação injetiva $N_\gamma \hookrightarrow M_\gamma$, que pode ser vista como uma inclusão. Então $\mathrm{gr}(N)$ é um $\mathrm{gr}(D)$-subespaço graduado de $\mathrm{gr}(M)$.

O exemplo seguinte mostra que a Proposição 3.34 não se aplica para gauges.

Exemplo 3.36. Vimos no Exemplo 2.45 que $\alpha : (-1,-1)_{\mathbb{Q}} \to \Gamma \cup \{\infty\}$ definida por

$$\alpha(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = \min(v(a_0), v(a_1), v(a_2), v(a_3)).$$

é uma v-gauge em $(-1,-1)_{\mathbb{Q}}$. Seja $L = \mathbb{Q}(2i - j)$, que é uma extensão quadrática de $\mathbb{Q}$ em $(-1,-1)_{\mathbb{Q}}$. Seja v' uma valorização em L estendendo a valorização 5-ádica v de $\mathbb{Q}$. Como $(2i-j)^2 = -5$, segue que $v'(2i - j) = 1/2$. Portanto $(L, v')/(\mathbb{Q}, v)$ é uma extensão totalmente ramificada. Logo v' é a única extensão v em L. Como vimos no Exemplo 2.48, se $\alpha|_L$ fosse uma gauge em L, então deveríamos ter $\alpha|_L = v'$, o que não é possível porque $\alpha(2i - j) = 0$. Outra forma de ver que $\alpha|_L$ não é uma gauge é observar que a imagem de $(2i - j)$ na álgebra graduada $\mathrm{gr}_{\alpha|_L}(L)$ é nilpotente pois $\alpha((2i-j)^2) = 1 > 2\alpha(2i - j)$. Portanto $\mathrm{gr}_{\alpha|_L}(L)$ não pode ser semi-simples.

Proposição 3.37. *Seja (F, v) um corpo valorizado e seja A uma F-álgebra de dimensão finita com uma v-gauge α. Seja $K = Z(A)$ e seja L um corpo tal que $F \subseteq L \subseteq K$. Então $\alpha|_L$ é uma v-gauge em L.*

Demonstração: Pela Proposição 3.34, $\alpha|_L$ é uma v-norma. Como α é multiplicativa, $\alpha|_L$ também é multiplicativa. Além disso, como $L \subseteq Z(A)$, temos que $\mathrm{gr}_{\alpha|_L}(L) \subset Z(\mathrm{gr}_\alpha(A))$. Logo $\mathrm{gr}_{\alpha|_L}(L)$ é graduada semi-simples pois se existisse um elemento homogêneo não nulo nilpotente $x \in gr_{\alpha|_L}(L)$ então $x\mathrm{gr}_\alpha(A)$ seria um ideal bilateral não nulo nilpotente de $\mathrm{gr}_\alpha(A)$, o que não é possível pois $\mathrm{gr}_\alpha(A)$ é graduada semi-simples. Portanto, $\alpha|_L$ é uma v-gauge em L. □

Proposição 3.38. *Sob as hipóteses da Proposição 3.37, suponha que v tem extensão única para uma valorização v_L em L. Então $\alpha|_L = v_L$ e α é uma v_L-gauge.*

Demonstração: Pela Proposição 3.37, $\alpha|_L$ é uma v-gauge em L. Como v_L é a única extensão de v para L, temos por (2.48) que $\alpha|_L = v_L$. Para mostrar que α é uma v_L-gauge, basta verificarmos que α satisfaz as condições (2.36) e (2.39). Assim, para $c \in L^\times$, temos

$$\alpha(c^{-1}) = v_L(c^{-1}) = -v_L(c) = -\alpha(c).$$

Pelo Lema 2.29, temos

$$\alpha(ca) = \alpha(c) + \alpha(a) = v_L(c) + \alpha(a).$$

Como α e v_L são normas, temos

$$\begin{aligned} [L : F][\mathrm{gr}_\alpha(A) : \mathrm{gr}_{v_L}(L)] &= [\mathrm{gr}_{v_L}(L) : \mathrm{gr}_v(F)][\mathrm{gr}_\alpha(A) : \mathrm{gr}_{v_L}(L)] \\ &= [\mathrm{gr}_\alpha(A) : \mathrm{gr}_v(F)] = [A : F] = [A : L][L : F]. \end{aligned}$$

Portanto, $[\mathrm{gr}_\alpha(A) : \mathrm{gr}_{v_L}(L)] = [A : L]$. □

3.5. Valorizações sem defeito

Nesta seção introduziremos o conceito de uma valorização ser sem defeito em uma álgebra semi-simples, em generalização aos conhecidos conceitos valorização sem defeito em relação a extensões finitas de corpos e álgebras de divisão. Veremos que esse conceito está relacionado a existência de uma gauge na álgebra. Começamos lembrando do caso de extensões finitas de corpos.

Seja K/F uma extensão finita de corpos e seja v uma valorização em F. Sejam $v_1, \ldots, v_k$ as extensões de v em K. Então, vale a *desigualdade fundamental*:

$$[K : F] \geq \sum_{i=1}^{k} [\overline{K}^{v_i} : \overline{F}] \cdot |\Gamma_{v_i} : \Gamma_v|. \tag{3.39}$$

Se tivermos a igualdade em (3.39) então dizemos que v é *sem defeito* em K.

Suponhamos agora que K/F é uma extensão normal de corpos. Neste caso, todos os índices de ramificação $|\Gamma_{v_i} : \Gamma_v|$ e todos os graus residuais $[\overline{K}^{v_i} : \overline{F}]$ coincidem. Seja $e = |\Gamma_{v_i} : \Gamma_v|$ e $f = [\overline{K}^{v_i} : \overline{F}]$ para todo $1 \leq i \leq k$. Nestas condições, temos um resultado mais forte, que é conhecido como *Teorema de Ostrowski* :

$$[K : F] = k \cdot e \cdot f \cdot \delta(W/V), \tag{3.40}$$

onde $\delta(W/V)$ é um inteiro positivo, que é chamado de *defeito* da extensão $(K, w)/(F, v)$. Além disso, $\delta(W/V) = p^\ell$, onde ℓ é um inteiro positivo e $p = \max(1, \mathrm{car}(\overline{F}))$. Logo v é sem defeito em K se $\delta(W/V) = 1$.

Detalhes do que foi dito acima pode ser encontrado em [**EP**, pp. 119-122] e [**Ef**, pp. 151-158].

Agora seja D uma álgebra de divisão com dimensão finita sobre seu centro F. Suponhamos que F tem uma valorização v que se estende para uma valorização w em D. Nestas condições, temos também uma versão do *Teorema de Ostrowski* ([**D**, Thm. 2], [**M1**, Thm. 3]):

$$[D : F] = [\overline{D} : \overline{F}] \cdot |\Gamma_w : \Gamma_v| \cdot \delta(R_w/V) \tag{3.41}$$

Como no caso comutativo, $\delta(R_w/V)$ é chamado de *defeito* de D/F. Também temos $\delta(R_w/V) = p^\ell$, onde ℓ é um inteiro positivo e $p = \max(1, \mathrm{car}(\overline{F}))$. Se $\delta(R_w/V) = 1$, então dizemos que D é *sem defeito* sobre (F, v).

A seguir temos dois resultados fundamentais sobre defeito em álgebras de divisão. Estes resultados serão utilizados na demonstração da Proposição 3.52.

Proposição 3.42. *Sejam $B \subset R$ anéis de valorização invariantes de uma F-álgebra de divisão central D. Sejam $V = Z(B)$ e $W = Z(R)$. Seja $\widetilde{B} = B/J(R)$, que é um anel de valorização invariante de $\overline{R} = R/J(R)$. Seja $\widetilde{V} = V/J(W)$ e seja U a única extensão de $\widetilde{V}$ para $Z(\overline{R})$. Então*

$$\delta(B/V) = \delta(R/W) \cdot \delta(\widetilde{B}/U) \cdot \delta(U/\widetilde{V}).$$

Ver [**M4**, Lemma 1] para uma demonstração da Proposição 3.42. Agora de [**JW**, Thm. 3.1 e Remark 3.4] temos o seguinte resultado.

Proposição 3.43. *Seja (F, v) um corpo henseliano e seja D uma F-álgebra de divisão central. Suponhamos que (K, w) é uma extensão algébrica inercial de (F, v), isto é, $\overline{K}^w$ é uma extensão separável de $\overline{F}^v$ e para todo corpo L tal que $F \subseteq L \subseteq K$*

e $[L : F] < \infty$, temos $[\overline{L}^{w'} : \overline{F}^{v}] = [L : F]$, onde $W' = W \cap K$. Seja D_K a K-álgebra de divisão central associada a $D \otimes_F K$. Seja v' (resp. w') a valorização em D (resp. D_K) estendendo a valorização henseliana v (resp. w). Então $\delta(R_{v'}/V) = \delta(R_{w'}/W)$.

A seguir temos um resultado que caracteriza gauges em álgebras simples sobre corpos henselianos. Ver [**TW1**, Thm. 3.1] para uma demonstração.

Teorema 3.44. *Seja F um corpo com uma valorização henseliana v. Seja A uma F-álgebra simples com uma v-gauge α. Seja D a álgebra de divisão associada a A e seja v_D a valorização invariante em D estendendo v. Então $\mathrm{gr}_\alpha(A)$ é uma álgebra graduada simples e D é sem defeito sobre F. Além disso, com a identificação $A = End_D(M)$ para algum D-espaço vetorial M, existe uma v_D-norma α_M em M tal que*

$$(3.45) \qquad \alpha = End(\alpha_M) \qquad e \qquad \mathrm{gr}_\alpha(A) = End_{\mathrm{gr}(D)}(\mathrm{gr}_{\alpha_M}(M)).$$

Considere agora uma F-álgebra central simples A. Seja (F^h, v^h) a henselização de (F, v) e seja D^h a F^h-álgebra de divisão Brauer equivalente a $A \otimes_F F^h$. Dizemos que v é sem defeito em A se D^h é sem defeito sobre F^h. O resultado seguinte é uma consequência direta do Teorema 3.44 e estabelece que v ser sem defeito em A é uma condição necessária para a existência de uma gauge em A. Veremos no Teorema 5.22 que esta é também uma condição suficiente.

Corolário 3.46. *Seja A uma F-álgebra central simples. Se A tem uma v-gauge α então v é sem defeito em A.*

Demonstração: Seja (F^h, v^h) a henselização de (F, v). Então, pela Proposição 3.33, $\alpha \otimes v^h$ é uma v^h-gauge em $A \otimes_F F^h$. Segue do Teorema 3.44 que D^h é sem defeito sobre F^h. Logo v é sem defeito em A. □

A relação estabelecida em (1.15) para o anel de resíduos e o grupo de valores do anel de valorização de Dubrovin e do anel de valorização invariante na henselização, permite obter uma versão do *Teorema de Ostrowski* para anéis de valorização de Dubrovin, que foi obtido originalmente em [**W2**].

Proposição 3.47. *Seja A uma F-álgebra central simples e seja v uma valorização em F. Suponhamos que R é um anel de valorização de Dubrovin de A tal que*

$Z(R) = V$. Então

$$[A : F] = [\overline{R} : \overline{F}] \cdot |\Gamma_R : \Gamma_v| \cdot \xi(V, A)^2 \cdot \delta(R/V), \tag{3.48}$$

com $\delta(R/V) = p^\ell$, onde ℓ é um inteiro positivo e $p = \max(1, car(\overline{F}^v))$.

Demonstração: Seja (F^h, v^h) a henselização de (F, v) e seja D^h a F^h-álgebra de divisão Brauer equivalente a $A \otimes_F F^h$. Seja w a valorização em D^h estendendo a valorização henseliana v^h. Pela versão do Teorema de Ostrowski para álgebra de divisão temos que

$$[D^h : F^h] = [\overline{D} : \overline{F}] \cdot |\Gamma_w : \Gamma_v| \cdot \delta(R_w/V). \tag{3.49}$$

Por (A.10) $A \otimes_F F^h = M_{n_R}(D^h)$ então

$$[A : F] = [A \otimes_F F^h : F^h] = n_R^2 [D^h : F^h]. \tag{3.50}$$

Segue de (1.15) e (A.9) que $\overline{R} = M_{t_R}(\overline{D})$ e $\Gamma_w = \Gamma_R$ então juntando isso com (3.49) e (3.50) obtemos

$$\begin{aligned} [A : F] &= n_R^2 [\overline{D} : \overline{F}] \cdot |\Gamma_w : \Gamma_v| \cdot \delta(R_w/V) \\ &= (n_R/t_R)^2 [\overline{R} : \overline{F}] \cdot |\Gamma_R : \Gamma_v| \cdot \delta(R_w/V). \end{aligned}$$

Como $\xi(V, A) = n_B/t_B$, a fórmula (3.48) é obtida ao tomarmos $\delta(R/V) = \delta(R_w/V)$. □

Nota 3.51. Segue da demonstração da Prop 3.48 que v é sem defeito em A se e somente se temos que o defeito $\delta(R/V) = 1$ para todo anel de Dubrovin R de A estendendo V.

Proposição 3.52. *Seja A uma F-álgebra central simples e seja v uma valorização em F. Suponhamos que w é uma valorização menos fina que v. Nestas condições, se v é sem defeito em A então w é sem defeito em A.*

Demonstração: Seja (F_v^h, v^h) (resp. (F_w^h, w^h)) a henselização de (F, v) (resp. (F, w)). Seja w' a valorização de F_v^h que tem como anel $W' = WV^h$. Então, pela Proposição B.2, temos que (F_v^h, w') é uma extensão henseliana de (F_w^h, w^h) (ver diagrama B.5). Seja D_v^h (resp. D_w^h) a álgebra de divisão associada a $A \otimes_F F_v^h$ (resp. $A \otimes_F F_w^h$). Para simplificar a notação, vamos usar os mesmos símbolos (v^h, w^h e w') para denotar tanto a valorização no corpo henseliano quando a sua única extensão na álgebra de divisão. Como estamos supondo que v é sem defeito em A, temos que

$\delta(R_{v^h}/V^h) = 1$. Logo, pela Proposição 3.42, devemos ter $\delta(R_{w'}/W') = 1$. Lembre da Proposição B.6 que (F_v^h, w') é uma extensão inercial de (F_w^h, w^h). Então segue da Proposição 3.43 que D_w^h é sem defeito sobre F_w^h. Portanto, w é sem defeito em A. $\square$

Agora considere A uma F-álgebra simples de dimensão finita e seja $K = Z(A)$, que é uma extensão finita de F. Sejam $v_1, \ldots, v_k$ as extensões de v em K. Nestas condições, dizemos que v é *sem defeito* em A se v for sem defeito em K e cada v_i for sem defeito em A. Agora seja Q uma F-álgebra semi-simples de dimensão finita. Dizemos que v é *sem defeito* em Q se v for sem defeito em cada componente simples de Q.

Capítulo 4

Gauges em álgebras simples e semi-simples

Neste capítulo, obteremos alguns resultados fundamentais sobre a estrutura de gauges em álgebras simples e semi-simples. Como notado em (2.41), se uma álgebra de dimensão finita tem uma gauge, então ela deve ser semi-simples. Os dois resultados seguintes estabelecem que o estudo de gauges pode ser reduzido a álgebras simples.

Proposição 4.1 (TW1, Prop. 1.6). *Seja (F, v) um corpo valorizado e seja A uma F-álgebra semi-simples com uma v-gauge α. Suponhamos que A é o produto direto de F-subálgebras*

$$A = B_1 \times \cdots \times B_k.$$

Então, $\alpha_i = \alpha|_{B_i}$ é uma v-gauge em B_i, para $1 \le i \le k$. Além disso,

$$\alpha(b_1, \ldots, b_k) = \min(\alpha_1(b_1), \ldots, \alpha_k(b_k)) \quad e \quad \mathrm{gr}_\alpha(A) = \mathrm{gr}_{\alpha_1}(B_1) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\alpha_k}(B_k).$$

O resultado seguinte é a recíproca da Proposição 4.1.

Proposição 4.2. *Seja (F, v) um corpo valorizado. Suponhamos que $A_1, \ldots, A_k$ são F-álgebras simples de dimensão finita. Para cada $i = 1, \ldots, k$, seja $\alpha_i : A_i \to \Gamma \cup \{\infty\}$ uma v-gauge em A_i. Seja $A = A_1 \times \ldots \times A_k$. Então, a aplicação $\alpha : A \to \Gamma \cup \{\infty\}$ definida por*

$$\alpha(x_1, \ldots, x_k) = \min(\alpha_1(x_1), \ldots, \alpha_k(x_k)), \quad para \quad a_1 \in A_1, \ldots, a_k \in A_k, \tag{4.3}$$

é uma v-gauge em A e existe uma identificação canônica de $\mathrm{gr}(F)$-álgebras

$$\mathrm{gr}_\alpha(A) = \mathrm{gr}_{\alpha_1}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\alpha_k}(A_k).$$

Demonstração: A verificação de que α é uma v-função valorização multiplicativa é direta e pode ser feita nos moldes da demonstração do Lema 2.31. Note que para $\gamma \in \Gamma$, temos que $\alpha(x_1, \ldots, x_k) \geq \gamma$ se e somente se $\alpha_i(x_i) \geq \gamma$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Logo $A^{\geq \gamma} = A_1^{\geq \gamma} \times \cdots \times A_k^{\geq \gamma}$. Da mesma forma, temos $A^{>\gamma} = A_1^{>\gamma} \times \cdots \times A_k^{>\gamma}$. Consequentemente,

$$\mathrm{gr}_\alpha(A) = \mathrm{gr}_{\alpha_1}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\alpha_k}(A_k). \tag{4.4}$$

Agora, como cada α_i é uma v-norma, $[A_i : F] = [\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A_i) : \mathrm{gr}(F)]$. Então

$$\begin{aligned} [\mathrm{gr}_\alpha(A) : \mathrm{gr}(F)] &= \sum_{i=1}^{k} [\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A_i) : \mathrm{gr}(F)] \\ &= \sum_{i=1}^{k} [A_i : F] \\ &= [A : F], \end{aligned}$$

o que implica que α é uma v-norma em A. Seja I é um ideal bilateral homogêneo nilpotente de $\mathrm{gr}_\alpha(A)$. Seja I_i a projeção de I em $\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A_i)$, através da identificação (4.4). Então I_i é também um ideal bilateral homogêneo nilpotente de $\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A_i)$, que tem que ser trivial pois $\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A_i)$ é semi-simples. Portanto $\mathrm{gr}_\alpha(A)$ é semi-simples, que era o que faltava para concluirmos que α é uma v-gauge em A. □

Para o restante deste capítulo vamos supor que (F, v) é um corpo valorizado e A é uma F-álgebra simples de dimensão finita. Seja K o centro de A. Então K é uma extensão finita de F. Sejam $v_1, \ldots, v_n$ todas as extensões distintas de v para K. O Teorema seguinte caracteriza v-gauges em A em termos de v_i-gauges.

Teorema 4.5. *Suponhamos que v é uma valorização de posto 1. Seja α uma v-gauge em A satisfazendo $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Então existem v_i-gauges α_i em A, para $i = 1, \ldots, n$, unicamente determinadas, tais que*

$$\alpha(a) \;=\; \min\big(\alpha_1(a), \ldots, \alpha_n(a)\big), \qquad \textit{para todo} \quad a \in A. \tag{4.6}$$

Além disso,

$$\mathrm{gr}_\alpha(A) \;\cong_g\; \mathrm{gr}_{\alpha_1}(A) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\alpha_n}(A). \tag{4.7}$$

Demonstração: Seja (F^h, v^h) a henselização de (F, v) e seja $A^h = A \otimes_F F^h$. Pelo Teorema B.7, temos $K \otimes_F F^h \cong \prod_{i=1}^n K_i$, onde cada (K_i, v_i') é a henselização de (K, v_i). Segue que

$$A^h \cong A \otimes_K (K \otimes_F F^h) \cong A \otimes_K (K_1 \times \cdots \times K_n) \cong A \otimes_K K_1 \times \cdots \times A \otimes_K K_n.$$

Pela Proposição 3.33, $\alpha^h = \alpha \otimes v^h$ é uma v^h-gauge em A^h satisfazendo

$$\mathrm{gr}_{\alpha^h}(A^h) \cong_g \mathrm{gr}_\alpha(A) \otimes_{\mathrm{gr}(F)} \mathrm{gr}(F^h) \cong_g \mathrm{gr}_\alpha(A). \tag{4.8}$$

Seja $A_i = A \otimes_K K_i$, que é uma K_i-álgebra central simples. Seja $\pi_i : A^h \to A_i$ a projeção canônica. Desta forma, obtemos pela Proposição 4.1 que $\beta_i = \alpha^h|_{A_i}$ é uma v^h-gauge em A_i para $1 \leq i \leq n$. Além disso,

$$\alpha^h(x) = \min_{1 \leq i \leq n} (\beta_i(\pi_i(x))), \text{ para todo } x \in A^h, \tag{4.9}$$

e

$$\mathrm{gr}_{\alpha^h}(A^h) = \mathrm{gr}_{\beta_1}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\beta_n}(A_n). \tag{4.10}$$

Como v_i' é a única extensão da valorização henseliana v^h para K_i, temos pela Proposição 3.38 que β_i é uma v_i'-gauge. Como $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, segue que $\Gamma_{\beta_i} \subseteq \Gamma_{v_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Como cada v_i tem posto 1, por [TW2, Prop. 5.4] temos que $\alpha_i = \beta_i|_A$ é uma v_i-norma em A tal que $\beta_i = \alpha_i \otimes v_i'$. Então pela Proposição 3.30, existe um isomorfismo de álgebras graduadas

$$\mathrm{gr}_{\beta_i}(A^h) \cong_g \mathrm{gr}_{\alpha_i}(A) \otimes_{\mathrm{gr}_{v_i}(K)} \mathrm{gr}_{v_i'}(K_i).$$

Como a extensão $(K_i, v_i')/(K, v_i)$ é imediata, $\mathrm{gr}_{v_i}(K) = \mathrm{gr}_{v_i'}(K_i)$. Logo

$$\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A) \cong_g \mathrm{gr}_{\beta_i}(A^h). \tag{4.11}$$

Como β_i é uma v_i'-gauge, a álgebra graduada $\mathrm{gr}_{\beta_i}(A^h)$ é semi-simples. Assim, $\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A)$ é também graduada semi-simples, o que implica que α_i é uma v_i-gauge em A. Segue de (4.9) que para todo $a \in A$,

$$\alpha(a) = \alpha^h(a \otimes 1) = \min_{1 \leq i \leq n} (\beta_i(a \otimes 1)) = \min_{1 \leq i \leq n} (\alpha_i(a)). \tag{4.12}$$

Além disso, a partir de (4.8), (4.10) e (4.11), concluímos que

$$\mathrm{gr}_\alpha(A) \cong_g \mathrm{gr}_{\alpha_1}(A) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\alpha_n}(A). \tag{4.13}$$

Para mostrar que as gauges α_i são unicamente determinadas, vamos verificar que para cada $a \in A$ tem-se

$$\alpha_i(a) = \max\{\alpha(ca) \mid c \in K^\times \text{ e } v_i(c) = 0\}. \tag{4.14}$$

Primeiro note que se $v_i(c) = 0$ então $\alpha(ca) \leq \alpha_i(ca) = \alpha_i(a)$. Resta-nos mostrar que $\alpha_i(a) = \alpha(ca)$ para algum $c \in K^\times$ com $v_i(c) = 0$. Para cada $j = 1, \ldots, n$, seja $\delta_j = \alpha_i(a) - \alpha_j(a)$. Como Γ_α/Γ_v é de torsão, existe um inteiro positivo m tal que $m|\delta_j| \in \Gamma_v$, para todo j. Como as valorizações $v_1, \ldots, v_n$ são duas a duas independentes, temos pelo Teorema da aproximação [**EP**, Thm. 2.4.1] que existe $c \in K^\times$ tal que $v_i(c+1) > 0$ e $v_j(c) > m|\delta_j|$, para $j \neq i$. Segue que $v_i(c) = 0$ e

$$\alpha_j(ca) = v_j(c) + \alpha_j(a) > \delta_j + \alpha_j(a) = \alpha_i(a) = \alpha_i(ca).$$

Portanto, $\alpha(ca) = \alpha_j(a)$. □

O Teorema 4.5 foi utilizado originalmente na nossa pesquisa para demonstrarmos o Teorema 5.17 com a hipótese de que a valorização do centro tem posto finito. Posteriormente, Wadsworth obteve uma demonstração do Teorema 4.5 que vale para valorizações de posto arbitrário. Este é o Teorema C.1, que incluímos com uma demonstração no apêndice desse trabalho, uma vez que trata-se de um resultado recente e ainda não publicado. Esta generalização nos permitiu demonstrar o Teorema 5.17 sem restrição sobre o posto da valorização do centro.

O teorema seguinte é um dos resultados principais do nosso trabalho e generaliza para álgebras simples não necessariamente centrais a Proposição 2.55, que relaciona gauges com as funções valorização de Morandi.

Teorema 4.15. *Suponhamos que v é sem defeito em A. Para $i = 1, \dots, n$, seja α_i uma v_i-função valorização de Morandi em A e seja B_i o anel de valorização de Dubrovin associado a α_i. Seja $\alpha = \min(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Então α é uma v-gauge em A se e somente se $B_1, \dots, B_n$ tem a propriedade da interseção.*

Demonstração: ($\Longleftarrow$) Pelo Lema 2.31, temos que $\alpha = \min(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é uma v-função valorização multiplicativa e existe um homomorfismo injetivo de $\mathrm{gr}(F)$-álgebras graduadas

$$\varphi: \quad \mathrm{gr}_\alpha(A) \to \mathrm{gr}_{\alpha_1}(A) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\alpha_n}(A). \tag{4.16}$$

Afirmação: O homomorfismo φ é sobrejetivo.

Suponhamos por um momento que a afirmação acima é verdadeira. Neste caso, temos que φ é um isomorfismo de $\mathrm{gr}(F)$-álgebras graduadas. Como estamos assumindo que v é sem defeito em A, temos por definição que cada v_i é sem defeito em A. A Proposição 2.55 nos dá que cada α_i é uma v_i-gauge em A e então $\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A)$ é uma álgebra graduada simples. Assim, o isomorfismo φ nos dá que $\mathrm{gr}_\alpha(A)$ é uma álgebra graduada semi-simples. Para concluirmos que α é uma gauge, resta-nos mostrar que $[\mathrm{gr}_\alpha(A) : \mathrm{gr}_v(F)] = [A : K]$. Como α_i é uma v_i-gauge, $[\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A) : \mathrm{gr}_{v_i}(K)] = [A : K]$. Como v é sem defeito em A, devemos ter

v sem defeito em K. Logo $[K : F] = \sum_{i=1}^{n}[\mathrm{gr}_{v_i}(K) : \mathrm{gr}_v(F)]$. Juntando estas informações obtemos que

$$\begin{aligned}
[\mathrm{gr}_\alpha(A) : \mathrm{gr}_v(F)] &= \sum_{i=1}^{n}[\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A) : \mathrm{gr}_v(F)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}[\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A) : \mathrm{gr}_{v_i}(K)][\mathrm{gr}_{v_i}(K) : \mathrm{gr}_v(F)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}[A : K][\mathrm{gr}_{v_i}(K) : \mathrm{gr}_v(F)] \\
&= [A : K][K : F] \\
&= [A : F].
\end{aligned}$$

Demonstração da Afirmação: A demonstração da sobrejetividade da aplicação φ usa o Teorema da aproximação de Morandi para anéis de valorização de Dubrovin (Teorema A.19). Vamos fixar algum k, com $1 \leq k \leq n$ e algum $b \in A \setminus \{0\}$. Seja $\gamma_i = \alpha_i(b)$. Para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, com $i \neq j$, seja V_{ij} o menor subanel de K contendo V_i e V_j. Seja Δ_{ij} o subgrupo convexo do fecho divisível Γ de Γ_v associado a V_{ij}. Vamos mostrar que $\gamma_i - \gamma_j \in \Delta_{ij}$. Para isso, considere as composições $\theta_{ij} \circ \alpha_i$ e $\theta_{ij} \circ \alpha_j$, onde $\theta_{ij} : \Gamma \to \Gamma/\Delta_{ij}$ é a aplicação canônica. Pela Proposição 3.22, temos que $\theta_{ij} \circ \alpha_i$ e $\theta_{ij} \circ \alpha_j$ são v_{ij}-gauges em A. Além disso, pela Proposição 3.27, $R_{\theta_{ij} \circ \alpha_i} = B_i V_{ij}$ e $R_{\theta_{ij} \circ \alpha_j} = B_j V_{ij}$. Como $B_i \subseteq B_i V_{ij}$ e $B_j \subseteq B_j V_{ij}$, segue que $B_i V_{ij}$ e $B_j V_{ij}$ são anéis de valorização de Dubrovin de A integrais sobre V_{ij}. Logo $\theta_{ij} \circ \alpha_i$ e $\theta_{ij} \circ \alpha_j$ são também funções valorização de Morandi em A. Além disso, note que $B_i V_{ij}$ e $B_j V_{ij}$ tem a IP pelo Teorema A.3. Com isso concluímos pela Proposição A.6 que $B_i V_{ij} = B_j V_{ij} = B_{ij}$, que é o menor subanel de A contendo B_i e B_j. Portanto, devemos ter $\theta_{ij} \circ \alpha_i = \theta_{ij} \circ \alpha_j$, pois as funções valorização de Morandi são unicamente determinadas pelo anel de valorização de Dubrovin associado e pela restrição ao centro. Assim, $\theta_{ij}(\gamma_i - \gamma_j) = \theta_{ij} \circ \alpha_i(b) - \theta_{ij} \circ \alpha_j(b) = 0$, o que nos dá $\gamma_i - \gamma_j \in \Delta_{ij}$. Agora seja $\varepsilon_i = \gamma_k - \gamma_i$. Então também temos que $\varepsilon_i - \varepsilon_j \in \Delta_{ij}$. Além disso, como $0 \leq ||\varepsilon_i| - |\varepsilon_j|| \leq |\varepsilon_i - \varepsilon_j|$ e Δ_{ij} é convexo, obtemos $||\varepsilon_i| - |\varepsilon_j|| \in \Delta_{ij}$. Suponhamos que Γ_i é o grupo de valores de v_i. Como Γ/Γ_i é de torsão, podemos encontrar um inteiro positivo m tal que $m|\varepsilon_i| \in \Gamma_i$. Seja $c_i \in K^\times$ tal que $v_i(c_i) = m|\varepsilon_i|$. Em particular, podemos tomar $c_k = 1$. Para $i \neq j$, temos $c_i c_j^{-1} \in V_{ij} \setminus J(V_{ij})$, porque $v_{ij}(c_i c_j^{-1}) = \theta_{ij}(m|\varepsilon_i| - m|\varepsilon_j|) = 0$. Para aplicarmos o Teorema de Aproximação de Morandi, considere $I_i = bc_i J(B_i)$, que é um ideal a direita de B_i. Para cada $i \neq j$ temos que V_i e V_j são anéis de valorização incomparáveis. Então $J(V_{ij}) \subsetneq J(V_i)$. Seja $a \in J(V_i) \setminus J(V_{ij})$. Logo $1 = aa^{-1} \in J(V_i)V_{ij} \subseteq J(B_i)B_{ij}$. Assim, $J(B_i)B_{ij} = B_{ij}$. O mesmo argumento nos dá $J(B_j)B_{ij} = B_{ij}$. Com isso concluímos que

$$I_iB_{ij} = bc_iJ(B_i)B_{ij} = bc_iB_{ij} = bc_j(c_j^{-1}c_i)B_{ij} = bc_jB_{ij} = bc_jJ(B_j)B_{ij} = I_jB_{ij}.$$

Agora seja $q_k = b$ e $q_i = 0$ se $i \neq k$. Pelo Teorema de Aproximação de Morandi, existe $x \in A$ com $x \equiv q_i \pmod{I_i}$ para todo i. Agora se $i \neq k$ então $x \in I_i$. Assim,

$$\alpha_i(x) > \alpha_i(bc_i) = v_i(c_i) + \alpha_i(b) = m|\varepsilon_i| + \gamma_i \geq \varepsilon_i + \gamma_i = \gamma_k = \alpha_k(b).$$

Por outro lado, $x \equiv b \pmod{I_k}$. Assim, $\alpha_k(x - b) > \alpha_k(b)$. Então $\alpha_k(x) = \alpha_k(b)$ e $x' = b'$ em $\mathrm{gr}_{\alpha_k}(A)$. Consequentemente, $\alpha(x) = \alpha_k(b)$ e $x' \in \mathrm{gr}_\alpha(A)$ é levado em $(0, \ldots, 0, b', 0, \ldots, 0) \in \mathrm{gr}_{\alpha_1}(A) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\alpha_n}(A)$ (b' na k-ézima posição) através do homomorfismo φ de (4.16). Como as n-uplas $(0, \ldots, 0, b', 0, \ldots, 0)$, para todo k e b, geram $\mathrm{gr}_{\alpha_1}(A) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\alpha_n}(A)$, a aplicação φ é sobrejetiva.

($\Longrightarrow$) Suponhamos agora que α é uma v-gauge em A. Pelo Teorema A.3, para mostrarmos que $B_1, \ldots, B_n$ tem a IP, é suficiente verificarmos que B_i, B_j tem a IP para cada $i, j \in \{1, \ldots n\}$, com $i \neq j$. Como cada B_i é integral sobre V_i, temos pela Proposição A.6 que B_i e B_j tem a IP se e somente se $B_iV_{ij} = B_jV_{ij} = B_{ij}$, onde V_{ij} (resp. B_{ij}) denota o menor sobreanel de V_i e V_j (resp. B_i e B_j). Como $V_i, V_j \subseteq B_{ij}$, temos $V_{ij} \subseteq Z(B_{ij})$. Assim, as inclusões $B_iV_{ij} \subseteq B_{ij}$ e $B_jV_{ij} \subseteq B_{ij}$ são claras. Desta forma, a demonstração estará completa ao mostrarmos que $B_iV_{ij} = B_jV_{ij}$, pois teríamos que B_iV_{ij} é um anel contendo B_i e B_j, o que implica $B_{ij} \subseteq B_iV_{ij}$. Seja então $W = V_{ij} \cap F$, que é um anel de valorização contendo V. Associado a W temos um subgrupo convexo $\Delta \subseteq \Gamma$ e um homomorfismo canônico $\varepsilon : \Gamma \to \Gamma/\Delta$ tal que $w = \varepsilon \circ v$. Também temos $v_{ij} = \varepsilon \circ v_i$ e $v_{ij} = \varepsilon \circ v_j$. Agora seja $\beta = \varepsilon \circ \alpha$. Como $\alpha = \min(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ temos

$$\beta = \varepsilon \circ \alpha = \min(\varepsilon \circ \alpha_1, \ldots, \varepsilon \circ \alpha_n). \tag{4.17}$$

Pela Proposição 3.22, cada $\varepsilon \circ \alpha_i$ é uma $\varepsilon \circ v_i$-gauge em A. Por outro lado, se $w_1, \ldots, w_r$ são todas as extensões de w para K, pelo Teorema C.1, existem w_i-gauges β_i em A para $i = 1, \ldots, r$ tais que

$$\beta(a) \;=\; \min\big(\beta_1(a), \ldots, \beta_r(a)\big) \qquad \text{para todo } a \in A. \tag{4.18}$$

Além disso,

$$\mathrm{gr}_\beta(A) \;\cong_g \mathrm{gr}_{\beta_1}(A) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\beta_r}(A). \tag{4.19}$$

A valorização v_{ij} coincide com w_ℓ, para algum $\ell \in \{1,\ldots,r\}$. Logo $\varepsilon \circ \alpha_i$ e $\varepsilon \circ \alpha_j$ são w_ℓ-gauges em A. Como, pela Proposição 3.27, $R_{\varepsilon\circ\alpha_i} = B_i V_{ij}$ e $R_{\varepsilon\circ\alpha_j} = R_{\alpha_j} V_{ij}$, a demonstração estará completa ao mostramos que $\varepsilon \circ \alpha_i$ e $\varepsilon \circ \alpha_j$ coincidem com β_ℓ. Por (4.17), temos que $\varepsilon \circ \alpha_i(a) \geq \beta(a)$ para todo $a \in A$. Seja $\{b'_1,\ldots,b'_m\}$ uma base homogênea de $\mathrm{gr}_{\beta_\ell}(A)$ como $\mathrm{gr}_{w_\ell}(K)$-espaço vetorial graduado. Então existem $a_1,\ldots,a_m \in A$ tais que

$$a'_t \mapsto (0,\ldots,0,b'_t,0,\ldots,0), \qquad \text{(com } b'_t \text{ na } \ell\text{-ézima posição)}, \tag{4.20}$$

através do isomorfismo (4.19). Então, de (4.20), concluímos que para cada t temos

$$\beta_\nu(a_t) > \beta_\ell(a_t), \quad \text{para} \quad \nu \neq \ell, \qquad \text{e} \qquad \beta(a_t) = \beta_\ell(a_t) = \beta_\ell(b_t).$$

Logo $\varepsilon \circ \alpha_i(a_t) \geq \beta(a_t) = \beta_\ell(a_t)$, para todo t. Além disso, como (4.20) também implica que $a'_t = b'_t$ em $\mathrm{gr}_{\beta_\ell}(A)$, temos que $\{a'_1,\ldots,a'_m\}$ é $\mathrm{gr}_{w_\ell}(K)$-linearmente independente. Logo, pela Proposição 2.26, temos que $\{a_1,\ldots,a_m\}$ é uma base de decomposição de A para β_ℓ. Portando, todo $a \in A$ pode ser escrito como $a = \sum_{t=1}^m c_t a_t$, com $c_t \in K$. Segue que

$$\begin{aligned}\beta_\ell(a) &= \min_{1\leq t\leq m}(w_\ell(c_t) + \beta_\ell(a_t)) \leq \min_{1\leq t\leq m}(w_\ell(c_t) + \varepsilon\circ\alpha_i(a_t)) \\ &\leq \varepsilon\circ\alpha_i(\sum_{t=1}^m c_t a_t) = \varepsilon\circ\alpha_i(a).\end{aligned}$$

Como observado em (2.30), existe um homomorfismo de álgebras graduadas $\varphi : \mathrm{gr}_{\beta_\ell}(A) \to \mathrm{gr}_{\varepsilon\circ\alpha_i}(A)$, que é injetivo porque $\mathrm{gr}_{\beta_\ell}(A)$ é uma álgebra graduada simples. Logo $\varepsilon \circ \alpha_i = \beta_\ell$. Da mesma forma, podemos verificar que $\varepsilon \circ \alpha_j = \beta_\ell$. Portanto, $\varepsilon \circ \alpha_i = \varepsilon \circ \alpha_i$, o que completa a demonstração. □

Como consequência do Teorema 4.15, temos um resultado sobre a existência de gauges em álgebras semi-simples sobre corpos com uma valorização de posto 1.

Corolário 4.21. *Seja F um corpo com uma valorização v de posto 1. Seja A uma F-álgebra semi-simples de dimensão finita. Suponhamos que v é sem defeito em A. Então existe uma v-gauge α em A.*

Demonstração: Pelo Teorema 4.2, basta considerar o caso em que A é uma F-álgebra simples, pois se obtivermos uma v-gauge para cada componente simples, a fórmula 4.3 fornece uma v-gauge para a álgebra semi-simples. Seja $K = Z(A)$ e sejam $V_1,\ldots,V_k$ os prolongamentos de V para K. Como cada valorização V_i tem posto 1, existe um anel de valorização de Dubrovin B_i em A integral sobre seu centro V_i. Seja α_i a função valorização de Morandi associada a B_i. Como os anéis de valorização $V_1, \ldots, V_k$ são dois a dois independentes, temos pela Proposição A.1 que $B_1, \ldots, B_k$ tem a IP. Então pelo Teorema 4.15 a função valorização $\alpha = \min(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ é uma v-gauge em A. $\square$

Nota 4.22. Recentemente, Tignol e Wadsworth obtiveram uma generalização do Corolário 4.21 para valorizações de posto arbitrário. Trata-se de um resultado profundo que aparecerá em um livro sobre valorizações não-comutativas que está sendo escrito por Tignol e Wadsworth.

Capítulo 5

Gauges em álgebras centrais simples

Neste capítulo, concentraremos nosso estudo de gauges em álgebras centrais simples e suas relações com anéis de valorização de Dubrovin. Introduziremos o conceito de gauges minimais, que são gauges cuja parte de grau zero da álgebra graduada tem o menor número possível de componentes simples. Veremos que o anel dessas gauges correspondem a interseção de uma família de anéis de Dubrovin satisfazendo a propriedade da interseção.

Seja α uma gauge em A. Pela Proposição 2.13, A_0, a parte de grau zero de $\mathrm{gr}_\alpha(A)$, é semi-simples. Vamos denotar por $\omega(\alpha)$ o número de componentes simples de A_0.

(5.1) Agora vamos compor um quadro que relaciona grande parte dos objetos e resultados vistos até aqui. Estas relações serão fundamentais para o restante do capítulo. Seja (F, v) um corpo valorizado e A uma F-álgebra central simples com uma v-gauge α. Seja w uma valorização menos fina que v e $u = v/w$ a valorização quociente em $\overline{F}^w$. Seja β a gauge menos fina que α tal que $\beta|_F = w$ e seja α_0 a u-gauge em A_0^β induzida por α, como descrito da Seção 3.2. Sejam $C_1, \ldots, C_{\omega(\beta)}$ as componentes simples de A_0^β. Pela Proposição 4.1, existem u-gauges α_0^i em C_i para $i = 1, 2, \ldots, \omega(\beta)$ tais que

$$\alpha_0(a_1, \ldots, a_{\omega(\beta)}) = \min\left(\alpha_0^1(a_1), \ldots, \alpha_0^{\omega(\beta)}(a_{\omega(\beta)})\right) \tag{5.2}$$

para $a_1 \in C_1, \dots, a_{\omega(\beta)} \in C_{\omega(\beta)}$, e

$$\mathrm{gr}_{\alpha_0}(A_0^\beta) \ \cong_g \mathrm{gr}_{\alpha_0^1}(C_1) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\alpha_0^{\omega(\beta)}}(C_{\omega(\beta)}). \tag{5.3}$$

Por (3.24), as álgebras graduadas associadas a α e α_0 tem as mesmas partes de grau zero. Juntando isso com (5.3), obtemos que

$$\omega(\alpha) = \omega(\alpha_0) = \omega(\alpha_0^1) + \cdots + \omega(\alpha_0^{\omega(\beta)}). \tag{5.4}$$

No que segue, vamos obter uma descrição das componentes simples C_i. Seja (F_w^h, w^h) a henselização de (F, w). Considere extensão de escalares $A^h = A \otimes_F F_w^h \cong \mathrm{M}_n(D^h)$, onde n é algum inteiro positivo e D^h é uma F_w^h-álgebra de divisão central. Então a valorização henseliana w^h se estende para uma valorização w' em D^h. Seja $R_{w'}$ o anel de valorização invariante de D^h associado a w' e $\overline{D^h} = R_{w'}/J(R_{w'})$ o anel de resíduos. Por outro lado, temos da Proposição 3.33 que $\beta^h = \beta \otimes w^h$ é uma w^h-gauge em A^h e $\mathrm{gr}_{\beta_h}(A^h) \cong_g \mathrm{gr}_\beta(A)$. Pelo Teorema 3.44, $\mathrm{gr}_{\beta^h}(A^h) = \mathrm{End}_{\mathrm{gr}_{w'}(D^h)}(\mathrm{gr}_{\alpha_M}(M))$. Pela Proposição 2.13, temos

$$A_0^\beta = \Big(\mathrm{End}_{\mathrm{gr}_{w'}(D^h)}(\mathrm{gr}_{\alpha_M}(M))\Big)_0 = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{M}_{r_i}(D_0), \tag{5.5}$$

onde D_0 é a parte de grau zero de $\mathrm{gr}_{w'}(D^h)$, que é $\overline{D^h}$. Comparando (5.5) com a decomposição $A_0^\beta = C_1 \times \cdots \times C_{\omega(\beta)}$ estabelecida acima, temos que $k = \omega(\beta)$ e $C_i = \mathrm{M}_{r_i}(D_0)$, após uma possível alteração dos índices. Então temos $Z(C_1) = \cdots = Z(C_{\omega(\beta)}) = Z(\overline{D^h})$. Vamos chamar esse corpo comum de K. Também temos por (1.15) que $K = Z(\overline{S})$, onde S é qualquer anel de valorização de Dubrovin de A com $Z(S) = W$. Então o número de extensões de u para K é dado por $\ell(v, w)$, como definido em (A.13). Sejam $u_1, \dots, u_{\ell(v,w)}$ estas extensões. Pelo Teorema C.1, existem u_j-gauges α_0^{ij} em C_i para $j = 1, \dots, \ell(v, w)$ tais que

$$\alpha_0^i(a) \ = \ \min\big(\alpha_0^{i1}(a), \dots, \alpha_0^{i\ell(v,w)}(a)\big) \qquad \text{para todo} \ \ a \in C_i. \tag{5.6}$$

Além disso,

$$\mathrm{gr}_{\alpha_0^i}(C_i) \ \cong_g \mathrm{gr}_{\alpha_0^{i1}}(C_i) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\alpha_0^{i\ell(v,w)}}(C_i). \tag{5.7}$$

Logo

$$\omega(\alpha_0^i) = \omega(\alpha_0^{i1}) + \cdots + \omega(\alpha_0^{i\ell(v,w)}). \tag{5.8}$$

O diagrama abaixo ilustra parte do que foi dito acima.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dd, dash] & \alpha \arrow[dd, dash] & \leq & \beta \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & & & & A_0^{\beta} \arrow[d, dash] & \alpha_0 \arrow[dd, dash] \\
F & v & \leq & w \arrow[dr, dash] & Z(A_0^{\beta}) \arrow[d, dash] & \\
 & & & & \overline{W} & u
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_i \arrow[d, dash] & \alpha_0^{i1}, \arrow[d, dash] & \dots & ,\alpha_0^{i\ell(v,w)} \arrow[d, dash] \\
K \arrow[d, dash] & u_1, \arrow[dr, dash] & \dots & ,u_{\ell(v,w)} \arrow[dl, dash] \\
\overline{W} & & u &
\end{tikzcd}
$$

As notações e relações estabelecidas acima serão utilizadas livremente na demonstração dos três teoremas seguintes.

O resultado seguinte estabelece que $\omega(\alpha)$ é limitado inferiormente pelo número da extensão $\xi(v)$ de v em A.

Teorema 5.9. *Seja (F, v) um corpo valorizado e A uma F-álgebra central simples. Então para toda v-gauge α em A, temos $\omega(\alpha) \geq \xi(v)$.*

Demonstração: A demonstração é por indução em $\xi(v)$. Se $\xi(v) = 1$, então temos claramente $\omega(\alpha) \geq \xi(v)$. Podemos então assumir que $\xi(v) > 1$. Pelo Teorema A.7 existe uma família de anéis de valorização de Dubrovin $R_1, \dots, R_{\xi(v)}$ em A tendo a IP tais que $Z(R_t) = V$. Pela Proposição A.17, para cada $t = 1, \dots, \xi(v)$ existe um anel de valorização de Dubrovin S_t de A, minimal com a propriedade que S_t é integral sobre $W_t = Z(S_t)$. Pela Proposição A.18, temos $S_1 = \cdots = S_{\xi(v)} = S$. Logo $W_1 = \cdots = W_{\xi(v)} = W$. Além disso, pela Proposição A.17, temos $\ell(v, w) \geq 2$. Podemos agora aplicar a construção de (5.1) com a valorização w que obtivemos acima. Note que $Z(\widetilde{R}_1), \dots, Z(\widetilde{R}_{\xi(v)})$ são todas as extensões de $\widetilde{V}$ em $K = Z(\overline{S})$, com possíveis repetições, que correspondem às extensões $U_1, \dots, U_{\ell(v,w)}$ em (5.1). Desta forma, pelo Teorema A.15, temos que para cada $j = 1, \dots, \ell(v, w)$,

$$\xi(v) = \xi(w) \cdot \xi(u_j, \overline{S}) \cdot \ell(v, w) = \xi(u_j, \overline{S}) \cdot \ell(v, w), \tag{5.10}$$

onde a última igualdade vem de $\xi(w) = 1$, pois S é integral sobre W. Então segue de (5.10) que $\xi(u_j, \overline{S}) < \xi(v)$, pois $\ell(v, w) \geq 2$. Como já notamos em (5.1), cada C_i é Brauer equivalente a $\overline{S}$. Como o número da extensão depende apenas da valorização do centro e da classe de Brauer equivalência da álgebra, temos que $\xi(u_j, \overline{S}) = \xi(u_j, C_i)$. Como cada α_0^{ij} obtida em (5.1) é uma u_j-gauge em C_i, temos por hipótese de indução que $\omega(\alpha_0^{ij}) \geq \xi(u_j, C_i)$. Note que (5.10) implica que todas as valorizações u_j tem o mesmo número da extensão, isto é,

$\xi(u_1, \overline{S}) = \cdots = \xi(u_{\ell(v,w)}, \overline{S})$. Então segue de (5.4) e (5.8) que

$$\omega(\alpha) \geq \omega(\beta) \cdot \ell(v,w) \cdot \xi(u_1, \overline{S}) \geq \ell(v,w) \cdot \xi(u_1, \overline{S}) = \xi(v),$$

com queríamos. □

Uma v-gauge α em A é dita uma *gauge minimal* quando a parte de grau zero da álgebra graduada tem o menor número possível de componentes simples, isto é, $\omega(\alpha) = \xi(v)$.

Exemplo 5.11. Se uma gauge é também uma função valorização de Morandi então é uma gauge minimal pois $\omega(\alpha) = \xi(v) = 1$.

Exemplo 5.12. A gauge construída no Exemplo 3.14 é também minimal pois $\omega(\alpha) = \xi(v) = 2$.

Exemplo 5.13. No Exemplo 3.10 construímos uma gauge na álgebra de matrizes $M_2(F)$ definida por

$$y_\delta\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \min(v(a_{11}), v(a_{21}) + \delta, v(a_{12}) - \delta, v(a_{22})). \tag{5.14}$$

Suponhamos agora que v é uma valorização discreta. Como todo anel de valorização de Dubrovin estendendo uma valorização de posto 1 é sempre integral, temos que $\xi(v) = 1$. Tome $\delta = 1/2$. Segue que

$$R_{y_{\frac{1}{2}}} = \begin{pmatrix} V & F^{\geq -\frac{1}{2}} \\ F^{\geq \frac{1}{2}} & V \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J(R_{y_{\frac{1}{2}}}) = \begin{pmatrix} J(V) & F^{> -\frac{1}{2}} \\ F^{> \frac{1}{2}} & J(V) \end{pmatrix}.$$

Note que para $x \in F$ temos $v(x) \geq 0$ se e somente se $v(x) > 0$. Logo $F^{\geq \frac{1}{2}} = F^{> \frac{1}{2}}$. Com isso obtemos que $A_0 = R_{y_{\frac{1}{2}}}/J(R_{y_{\frac{1}{2}}}) \cong \overline{F} \times \overline{F}$. Portanto $\omega(y_{\frac{1}{2}}) = 2 > \xi(v)$ e então $y_{\frac{1}{2}}$ não é uma gauge minimal.

O resultado seguinte estabelece que uma gauge menos fina que uma gauge minimal é também minimal.

Teorema 5.15. *Seja (F, v) um corpo valorizado e A uma F-álgebra central simples com uma v-gauge α. Seja β uma gauge menos fina que α em A e $w = \beta|_F$, que é uma valorização menos fina que v. Então $\omega(\alpha)/\omega(\beta) \geq \xi(v)/\xi(w)$. Consequentemente, se α é uma gauge minimal, então β também é uma gauge minimal.*

Demonstração: Pela construção de (5.1), cada α_0^{ij} é uma u_j-gauge em C_i. Então pelo Teorema 5.9, $\omega(\alpha_0^{ij}) \geq \xi(u_j, C_i)$. Como já notamos em (5.1), $\xi(u_1, C_1) =$

$\xi(u_j, C_i)$ para cada $i = 1, \ldots, \omega(w)$ e $j = 1, \ldots, \ell(v, w)$. Então segue de (5.4) e (5.8) que

$$\omega(\alpha) \geq \omega(\beta)\ell(v, w)\xi(u_1, C_1). \tag{5.16}$$

Como $\xi(v) = \xi(w)\ell(v, w)\xi(u_1, C_1)$ pelo Teorema A.15, concluímos que

$$\frac{\omega(\alpha)}{\omega(\beta)} \geq \frac{\omega(\beta)\ell(v, w)\xi(u_1, C_1)}{\omega(\beta)} = \frac{\xi(w)\ell(v, w)\xi(u_1, C_1)}{\xi(w)} = \frac{\xi(v)}{\xi(w)}.$$

□

O teorema a seguir é um dos resultados principais desse trabalho e estabelece que o anel de uma gauge minimal corresponde a uma interseção de anéis de valorização de Dubrovin satisfazendo a propriedade da interseção.

Teorema 5.17. *Seja (F, v) um corpo valorizado e A uma F-álgebra central simples. Suponhamos que α é uma v-gauge minimal em A. Então o anel da gauge $R_\alpha = \bigcap_{i=1}^{\xi(v)} B_i$, onde $B_1, \ldots, B_\xi$ é uma família de anéis de valorização de Dubrovin de A com $Z(B_i) = V$ e tendo a propriedade da interseção.*

Demonstração: A demonstração é por indução sobre o posto degrau $j(A, v)$. Se $j(A, v) = 1$, então pelo Teorema A.11 todo anel de valorização de Dubrovin de A com centro V é integral, logo $\omega(\alpha) = \xi(v) = 1$. Então segue da Proposição 2.55 que α é uma função valorização de Morandi. Logo R_α é um anel de valorização de Dubrovin integral sobre V. Podemos então assumir que $j(A, v) > 1$. Seja

$$Q_1 \subsetneq Q_2 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_k = J(V)$$

os ideais degrau de V com respeito a A. Seja $W = V_{Q_{k-1}}$, a localização de V pelo ideal primo Q_{k-1}. Temos que W é um anel de valorização de F contendo V e que tem Q_{k-1} como ideal maximal. Então os ideais degrau de W com respeito a A são

$$Q_1 \subsetneq Q_2 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_{k-1} = J(W).$$

Logo $j(A, w) = j(A, v) - 1$. Seja β a gauge menos fina que α tal que $\beta|_F = w$, como descrito na Seção 3.2. Pelo Teorema 5.15, β também é uma gauge minimal. Então, por hipótese de indução temos $R_\beta = \bigcap_{i=1}^{\xi(w)} R_i$, onde $R_1, \ldots, R_{\xi(w)}$ são anéis de valorização de Dubrovin tendo a IP tais que $Z(R_i) = W$. Assim $J(R_\beta) = \bigcap_{i=1}^{\xi(w)} J(R_i)$. Como $A_0^\beta = R_\beta / J(R_\beta)$, existe um isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} A_0^\beta & \to & R_1/J(R_1) \times \cdots \times R_{\xi(w)}/J(R_{\xi(w)}) \\ x + J(R_\beta) & \mapsto & (x + J(R_1), \ldots, x + J(R_{\xi(w)})). \end{array} \tag{5.18}$$

Desta forma, após uma possível alteração nos índices, podemos escrever $C_i = R_i/J(R_i)$, seguindo a notação de (5.1). Note que pelo Corolário A.16,

$$j(C_i, u_j) = j(A, v) - j(A, w) = 1.$$

Logo $\xi(u_j) = 1$. Então segue do Teorema A.15 que $\xi(v) = \xi(w)\ell(v, w)$. Como $\omega(\alpha) = \xi(v)$ e $\omega(\beta) = \xi(\beta)$, temos por (5.4) e (5.8) que $\omega(\alpha_0^{ij}) = 1$, para todo $i = 1, \ldots, \xi(w)$ e $j = 1, \ldots, \ell(v, w)$. Assim, pela Proposição 2.55 cada α_0^{ij} é uma função valorização de Morandi. Seja S_{ij} o anel de valorização de Dubrovin de C_i associado a α_0^{ij}. Seja

$$B_{ij} = \{a \in A \mid a + J(R_i) \in S_{ij}\},$$

que é um anel de valorização de Dubrovin de A com $Z(B_{ij}) = V$ por (1.12). Vamos mostrar que a família formada pelos anéis de Dubrovin B_{ij}, para $i = 1, \ldots, \xi(w)$ e $j = 1, \ldots, \ell(v, w)$, tem a IP. Pelo Teorema 4.15 $S_{i1}, \ldots, S_{i\ell(v,w)}$ são dois a dois incomparáveis e tem a IP para todo i. Assim, $B_{i1}, \ldots, B_{i\ell(v,w)}$ são dois a dois incomparáveis e tem a IP para todo i, pela Proposição A.2. Agora seja $i, h \in \{1, \ldots, \xi(w)\}$ com $i \neq h$. Note que $B_{ij} \subseteq R_i$ e $B_{ht} \subseteq R_h$ para $j, t = 1, \ldots, \ell(v, w)$. Como R_i e R_h são incomparáveis e tem a IP, B_{ij} e B_{ht} são também incomparáveis e tem a IP pelo Teorema A.3. Consequentemente, a família de anéis de Dubrovin $\{B_{ij}\}_{i,j}$ são dois a dois incomparáveis e tem a IP pelo Teorema A.3. Para completar a demonstração, resta mostrarmos que $A_\alpha = \bigcap_{i=1 j=1}^{\xi(w)\ell(v,w)} B_{ij}$. Note que

$$J(R_\beta) \subseteq J(R_\alpha) \subseteq R_\alpha \subseteq R_\beta, \tag{5.19}$$

pois $\alpha(x) \geq 0$ implica $\beta(x) \geq 0$ e $\beta(x) > 0$ implica $\alpha(x) > 0$. Por outro lado, para cada $i = 1, \ldots, \xi(w)$ temos

$$J(R_i) \subseteq J(B_{ij}) \subseteq B_{ij} \subseteq R_i,$$

para todo $j \in \{1, \ldots, \ell(v, w)\}$. Então

$$J(R_\beta) = \bigcap_{i=1}^{\xi(w)} J(R_i) \subseteq \bigcap_{i,j=1}^{\xi(w),\ell(v,w)} B_{ij} \subseteq \bigcap_{i=1}^{\xi(w)} R_i = R_\beta. \tag{5.20}$$

Seja $a \in R_\beta \backslash J(R_\beta)$. Observe que pelas inclusões que temos em (5.19) e (5.20), a demonstração estará completa ao mostrarmos que $a \in R_\alpha$ se e somente se $a \in \bigcap_{i=1 j=1}^{\xi(w)\ell(v,w)} B_{ij}$. Pela forma como α_0 foi definido em (3.23), temos que $\alpha(a) = \alpha_0(a + J(R_\beta))$. Usando a identificação de A_0^β com $R_1/J(R_1) \times \cdots \times R_{\xi(w)}/J(R_{\xi(w)})$, dada pelo isomorfismo (5.18), obtemos

$$\begin{aligned} \alpha(a) &= \alpha_0(a + J(R_\beta)) \\ &= \alpha_0(a + J(R_1), \ldots, a + J(R_{\xi(w)})) \\ &= \min_{1 \leq i \leq \xi(w)} (\alpha_0^i(a + J(R_i))). \end{aligned}$$

Assim, $\alpha(a) \geq 0$ se e somente se $\alpha_0^i(a + J(R_i)) \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, \xi(w)$. Note que por (5.6), o anel da gauge $R_{\alpha_0^i} = \bigcap_{j=1}^{\ell(v,w)} S_{ij}$. Então $a \in R_\alpha$ se e somente se $a + J(R_i) \in \bigcap_{j=1}^{\ell(v,w)} S_{ij}$, para todo $i = 1, \ldots, \xi(w)$. Mas $a + J(R_i) \in S_{ij}$ se e somente se $a \in B_{ij}$. Portanto, $a \in R_\alpha$ se e somente se $a \in \bigcap_{i=1}^{\xi(w)} \bigcap_{j=1}^{\ell(v,w)} B_{ij}$, como queríamos. □

Nota 5.21. Note que os B_i do Teorema 5.17 são unicamente determinados por α pois estes são as localizações de R_α pelos seus ideais maximais.

O restante deste capítulo será dedicado a obtermos uma recíproca do Teorema 5.17 para o caso em que a valorização do centro tem posto finito. O passo fundamental nesse sentido é o resultado seguinte, que é um teorema de existência de gauges minimais.

Teorema 5.22. *Seja F um corpo com uma valorização v de posto finito e seja A uma F-álgebra central simples. Suponhamos que v é sem defeito em A. Então existe uma v-gauge minimal em A.*

Demonstração: A demonstração é por indução sobre $\mathrm{rk}(\Gamma)$, o posto de v. Se $\mathrm{rk}(\Gamma) = 1$, então todo anel de valorização de Dubrovin de A com centro V é integral. Então existe uma função valorização de Morandi em A, que é também uma gauge minimal pela Proposição 2.55. Podemos então assumir que $\mathrm{rk}(\Gamma) > 1$. Seja $\Delta \subseteq \Gamma$ um subgrupo convexo de posto 1. Seja $\Lambda = \Gamma/\Delta$ e $\varepsilon \colon \Gamma \to \Lambda$ o homomorfismo canônico. Seja

$$w = \varepsilon \circ v \colon F \to \Lambda \cup \{\infty\},$$

que é uma valorização menos fina que v em F tal $\mathrm{rk}(w) = \mathrm{rk}(v) - 1$. Como estamos assumindo que v é sem defeito em A, temos pela Proposição 3.52, que w também é sem defeito em A. Assim, por hipótese de indução, existe uma w-gauge minimal β em A. Agora seja (F_v^h, v^h) (resp. (F_w^h, w^h)) a henselização de (F, v) (resp. (F, w)). Seja w' a valorização menos fina que v^h dada por

$$w' = \varepsilon \circ v^h \colon F_v^h \to \Lambda \cup \{\infty\}.$$

Como v^h é henseliana, temos pela Proposição B.2 que w' também é henseliana e $(F_w^h, w^h) \subseteq (F_v^h, w')$. Pela Proposição 3.30, temos uma w'-função valorização multiplicativa

$$\beta \otimes w' \colon A_h \to \Lambda \cup \{\infty\},$$

e um isomorfismo de álgebras graduadas

$$\mathrm{gr}_{\beta\otimes w'}(A_h) = \mathrm{gr}_\beta(A) \otimes_{\mathrm{gr}_w(F)} \mathrm{gr}_{w'}(F_v^h).$$

Pela Proposição B.6, (F_v^h, w') é uma extensão inercial de (F_w^h, w^h). Logo a extensão $\overline{F_v^h}^{w'}/\overline{F}^w$ é separável e $\Gamma_{w'} = \Gamma_{w^h}$. Portanto, $\beta \otimes w'$ é uma w'-gauge em A^h, pela Proposição 3.32. Para o restante da prova, a idéia é construir a partir de $\beta \otimes w'$ uma v^h-gauge α em A^h. A restrição $\alpha|_A$ nos dará a v-gauge em A desejada. Seja então D_v^h (resp. D_w^h) a álgebra de divisão central sobre F_v^h (resp. F_w^h) associada a $A \otimes_F F_v^h$ (resp. $A \otimes_F F_w^h$). Por simplificação, vamos usar v^h e w' (resp. w^h) para denotar as valorizações nas álgebras de divisão D_v^h (resp. D_w^h) estendendo as valorizações henselianas v^h e w' (resp. w^h). Podemos identificar $A^h = \mathrm{End}_{D_v^h} M$, onde M é algum D_v^h-espaço vetorial. Com essa identificação, obtemos pelo Teorema 3.44 que existe uma w'-norma $\beta_M \colon M \to \Lambda \cup \{\infty\}$ tal que

$$\beta \otimes w' = \mathrm{End}(\beta_M) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{gr}_{\beta\otimes w'}(A^h) \cong_g \mathrm{End}_{\mathrm{gr}_{w'}(D_{h,v})}(\mathrm{gr}_{\beta_M}(M)). \tag{5.23}$$

Como na seção 2.1, o conjunto de valores $\Lambda_M = \beta_M(M)$ é uma união $\Lambda_M = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_k$, onde cada Λ_i é uma classe lateral do grupo $\Lambda_{D_v^h, w'} = w'(D_v^{h\times})$. Segue que $\mathrm{gr}_{\beta_M}(M)$ tem um decomposição em $\mathrm{gr}_{w'}(D_{h,v})$-espaços vetoriais graduados:

$$\mathrm{gr}_{\beta_M}(M) = \bigoplus_{i=1}^{k} M_{\Lambda_i} \qquad \text{onde} \qquad M_{\Lambda_i} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_i} M_\lambda. \tag{5.24}$$

Além disso, temos ela Proposição 2.13,

$$(A^h)_0^{\beta\otimes w'} \cong \prod_{i=1}^{k} \mathrm{End}_{\overline{D_{h,v}}^{w'}}(M_{\lambda_{i1}}). \tag{5.25}$$

Seja $(e_i)_{i=1}^n$ uma base de decomposição de M para β_M. Pela Proposição 2.26, $(e_i')_{i=1}^n$ é uma $\mathrm{gr}_{w'}(D_{h,v})$-base de $\mathrm{gr}_{\beta_M}(M)$. Então, usando a decomposição como soma direta de (5), podemos alterara os índices

$$(e_i)_{i=1}^n = \{e_{11}, \ldots, e_{1t_1}, \ldots, e_{k1}, \ldots, e_{kt_k}\},$$

de tal forma que $e_{i1}', \ldots, e_{it_i}' \in M_{\Lambda_i}$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por , para cada i, os valores $\beta_M(e_{i1}), \ldots, \beta_M(e_{it_i})$ estão numa mesma classe lateral de $\Lambda_{D_v^h, w'}$. Então podemos alterar os elementos da base $(e_i)_{i=1}^n$, multiplicando adequadamente por elementos de D_v^h, de modo que $\beta_M(e_{i1}) = \cdots = \beta_M(e_{it_i})$, para cada i. A valorização v (resp. v^h) induz uma valorização u (resp u') no corpo de resíduos $\overline{F}^w$ (resp. $\overline{F_v^h}^{w'}$). Da Proposição B.6 temos que $(\overline{F_v^h}^{w'}, u')$ é a henselização de $(\overline{F^h}^w, u)$. Seja $L = Z(\overline{D_{h,w}}^{w^h})$, que é uma extensão finita de $\overline{F_h}^w$. Temos também que u tem $\ell(v,w)$ extensões para L, como descrito na seção A.1. No que segue, vamos mostrar que $\omega(\beta \otimes w') = \omega(\beta)\ell(v,w)$ Sejam $u_1, \ldots, u_{\ell(v,w)}$ todas extensões distintas de u para L. Pelo Teorema B.7,

$$L \otimes_{\overline{F}^w} \overline{F_v^h}^{w'} \cong \prod_{i=1}^{\ell(v,w)} L_i, \tag{5.26}$$

onde cada L_i is a henselização L com relação a u_i. Pela Proposição 2.13, podemos escrever

$$A_0^\beta = \prod_{j=1}^{\omega(\beta)} B_j, \tag{5.27}$$

onde cada B_j é uma L-álgebra central simples. Como $\Gamma_{w'} = \Gamma_{w^h}$, temos que

$$\mathrm{gr}_{w'}(F_v^h) \cong_g \mathrm{gr}_{w^h}(F_w^h) \otimes_{\overline{F_w^h}^{w^h}} \overline{F_v^h}^{w'} = \mathrm{gr}_w(F) \otimes_{\overline{F}^w} \overline{F_v^h}^{w'}.$$

Assim,

$$\mathrm{gr}_{\beta\otimes w'}(A^h) \cong_g \mathrm{gr}_\beta(A) \otimes_{\overline{F}^w} \overline{F_v^h}^{w'}. \tag{5.28}$$

Segue que

$$(A^h)_0^{\beta\otimes w'} \cong A_0^\beta \otimes_{\overline{F}^w} \overline{F_v^h}^{w'} \cong A_0^\beta \otimes_L (L \otimes_{\overline{F}^w} \overline{F_v^h}^{w'}). \tag{5.29}$$

Juntando as informações de (5.26), (5.27) e (5.29), obtemos que

$$(A^h)_0^{\beta\otimes w'} \cong A_0^\beta \otimes_L (\prod_{i=1}^{\ell(v,w)} L_i) \tag{5.30}$$

$$\cong (\prod_{j=1}^{\omega(\beta)} B_j) \otimes_L (\prod_{i=1}^{\ell(v,w)} L_i) \tag{5.31}$$

$$\cong \prod_{j=1}^{\omega(\beta)} \prod_{i=1}^{\ell(v,w)} B_j \otimes_L L_i. \tag{5.32}$$

Como cada $B_j \otimes_L L_i$ é uma L_i-álgebra central simples, ao compararmos (5.25) e (5.32), obtemos que

$$k = \omega(\beta \otimes w') = \omega(\beta)\ell(v,w). \tag{5.33}$$

Agora, para cada $i = 1, \ldots, k$, seja algum $\gamma_i \in \Gamma$, tal que $\varepsilon(\gamma_i) = \beta_M(e_{i1})$. Definimos a v^h-norma $\alpha_M : M \to \Gamma \cup \{\infty\}$ pela condição que $\{e_{11}, \ldots, e_{1t_1}, \ldots, e_{k1}, \ldots, e_{kt_k}\}$ é uma base de decomposição de M para α_M e

$$\alpha_M(e_{ij}) = \gamma_i \qquad \text{para} \quad i = 1, \ldots, k \quad \text{e} \quad j = 1, \ldots, t_i.$$

Então, $\varepsilon \circ \alpha_M = \beta_M$ e o conjunto de valores $\Gamma_M = \alpha_M(M)$ é uma união disjunta de classes laterais $\Gamma_M = \gamma_1 + \Gamma_{D_v^h, v^h} \cup \cdots \cup \gamma_k + \Gamma_{D_v^h, v^h}$. A função valorização $\alpha = \mathrm{End}(\alpha_M)$, definida como (2.47) é uma v^h-gauge em A^h, pois $D_{h,v}$ é sem defeito sobre (F_v^h, v^h). Novamente pela Proposição 2.13 o número de componentes simples da parte de grau zero da álgebra graduada $\mathrm{gr}_\alpha(A^h) \cong \mathrm{End}_{\mathrm{gr}_{v^h}(D_v^h)}(\mathrm{gr}_{\alpha_M}(M))$ corresponde a decomposição de Γ_M em classes laterais distintas de $\Gamma_{D_v^h, v^h}$, logo $\omega(\alpha) = k$. Como $\beta_M = \varepsilon \circ \alpha_M$, segue da fórmula (2.47) que $\mathrm{End}(\beta_M) = \varepsilon \circ \mathrm{End}(\alpha_M)$, isto é,

$$\beta \otimes w' = \varepsilon \circ \alpha.$$

Por [**TW2**, Prop. 5.5] temos que $\alpha|_A$ é uma v-norma em A tal que $\alpha = \alpha|_A \otimes v^h$. Consequentemente, usando o fato que F_v^h/F é uma extensão imediata, temos que

$$\mathrm{gr}_\alpha(A^h) = \mathrm{gr}_{\alpha|_A}(A) \otimes_{\mathrm{gr}(F)} \mathrm{gr}_{v^h}(F^h) = \mathrm{gr}_{\alpha|_A}(A).$$

Como α é uma v^h-gauge, a álgebra graduada $\mathrm{gr}_\alpha(A^h)$ é semi-simple. Assim, $\mathrm{gr}_{\alpha|_A}(A)$ é uma álgebra graduada semi-simples, logo $\alpha|_A$ é uma v-gauge em A. Além disso, $\omega(\alpha|_A) = \omega(\alpha) = k = \omega(\beta)\ell(v, w)$. Pelo Teorema A.15, temos $\xi(v) = \xi(w)\ell(v, w)$. Como estamos assumindo que β é uma gauge minimal, que é, $\omega(\beta) = \xi(w)$, temos

$$\omega(\alpha|_A) = \omega(\beta)\ell(v, w) = \xi(w)\ell(v, w) = \xi(v),$$

donde concluímos que $\alpha|_A$ é uma v-gauge minimal em A, como queríamos. $\square$

O resultado seguinte é a recíproca do Teorema 5.17 para o caso em que a valorização do centro tem posto finito.

Corolário 5.34. *Seja F um corpo com uma valorização de posto finito v. Seja A uma F-álgebra central simples. Suponhamos v seja sem defeito em A. Seja $B_1, \ldots, B_n$ uma família de anéis de valorização de Dubrovin de A, com $Z(B_i) = V$, tendo a IP e tal que $B = \bigcap_{i=1}^n B_i$ é integral sobre V. Então existe uma v-gauge minimal α em A tal que $R_\alpha = \bigcap_{i=1}^n B_i$.*

Demonstração: Pelo Teorema 5.22 existe uma v-gauge minimal β em A. Podemos aplicar o Teorema 5.17 com a gauge β e obter que o anel da gauge $R_\beta = \bigcap_{i=1}^{\xi(v)} R_i$, onde $R_1, \ldots, R_\xi$ é uma família de anéis de valorização de Dubrovin de A com $Z(B_i) = V$ e tendo a IP. Pelo Teorema da Conjugação (Teorema A.8), B e R_α são anéis conjugado, isto é, existe $q \in A^\times$ tal que $B = qR_\beta q^{-1}$. A composição de β com o automorfismo interno $\imath_q : A \to A$ definido por $x \mapsto q^{-1}xq$, nos dá uma v-gauge minimal $\alpha = \beta \circ \imath_q$ em A tal que $R_\alpha = qR_\beta q^{-1} = B$. $\square$

.

Apêndice A

Anéis de valorização de Dubrovin

A.1. A propriedade da interseção

Nesta seção estudaremos a intersecção de um número finito de anéis de valorização de Dubrovin, que satisfazem uma condição introduzida por Grater em [**G**] e chamada *propriedade da interseção*. Tudo que aparece nesta seção foi extraído do livro de Marubayashi, Miyamoto e Ueda [**MMU**], que é uma referência completa sobre a Teoria de anéis de valorizações de Dubrovin.

Seja A uma álgebra simples de dimensão finita sobre seu centro F e sejam $B_1, \ldots, B_k$ anéis de valorização de Dubrovin de A. Seja $R = \bigcap_{i=1}^{k} B_i$. Dizemos que $B_1, \ldots, B_k$ tem a *Propriedade da Intersecção* (IP) se $J(S) \cap R$ é um ideal primo de R, para cada anel S contendo B_i, para algum $i = 1, \ldots, k$.

A propriedade da interseção foi definida originalmente por Gräter em [**G**]. Gräter definiu a propriedade da interseção em termos de três condições que incluía a condição utilizada acima (cf. [**MMU**, pg. 89]). Mais recentemente, Y. Zhao mostrou em [**Z**] que a condição que usamos acima implica as outras duas.

Note que um único anel de valorização de Dubrovin B tem a IP, pois se S é um subanel de A contendo B, então temos pela propriedade (1.11) que $J(S)$ é um ideal primo de B.

A seguir listamos alguns resultados que fornecem condições para que a Propriedade da Interseção seja detectada. Estes resultados serão utilizados com frequência ao longo do texto. Para demonstrações, ver [**MMU**, §16 e §17]. Para o restante desta seção, A denota sempre uma álgebra simples de dimensão finita sobre seu centro F e $B_1, \ldots, B_k$ é uma família de anéis de valorização de Dubrovin de A.

Proposição A.1. *Seja $V_i = Z(B_i)$, para $i = 1, \ldots, k$. Se $V_1, \ldots, V_k$ são dois a dois independentes em F, então $B_1, \ldots, B_k$ tem a IP.*

Proposição A.2. *Sejam $S, B_1, \ldots, B_k$ anéis de valorização de Dubrovin de A com $B_i \subseteq S$, para $i = 1, \ldots, k$. Seja $\widetilde{B_i} = B_i/J(S)$, para $i = 1, \ldots, k$. Então $B_1, \ldots, B_k$ tem a IP se e somente se $\widetilde{B_1}, \ldots, \widetilde{B_k}$ tem a IP.*

Teorema A.3. *Sejam $B_1, \ldots, B_k$ anéis de valorização de Dubrovin de A.*

(i) *Sejam S e S' os anéis de valorização de Dubrovin de A com $B_i \subseteq S$, $B_j \subseteq S'$ para algum i, j com $1 \leq i, j \leq k$. Se $B_1, \ldots, B_k$ tem a IP então S e S' tem a IP.*

(ii) *Se B_i e B_j tem a IP para todo i, j, com $1 \leq i, j \leq k$ e $i \neq j$, então $B_1, \ldots, B_k$ tem a IP.*

(iii) *Seja B' um anel de valorização de Dubrovin de A contido em B_1 e suponhamos que B_1, B_i são incomparáveis para cada $i = 2, \ldots, k$. Se $B_1, \ldots, B_k$ tem a IP, então $B', B_2, \ldots, B_k$ tem a IP.*

Corolário A.4. *Sejam $B_1, \ldots, B_k$ anéis de valorização de Dubrovin de A, dois a dois incomparáveis, e seja B_{ij} o menor subanel de A contendo B_i e B_j. Sejam $\widetilde{B_i} = B_i/J(B_{ij})$ e $\widetilde{B_j} = B_j/J(B_{ij})$. Então $B_1, \ldots, B_k$ tem a IP se e somente se $Z(\widetilde{B_i})$ e $Z(\widetilde{B_j})$ são independentes em $Z(\overline{B_{ij}})$ para todo $i \neq j$.*

O diagrama abaixo ajuda a visualizarmos os anéis considerados no Corolário A.4.

(A.5)
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dd, dash] & B_i \arrow[ddr, dash] & , & B_j \arrow[ddl, dash] & \subseteq & B_{ij} \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & & & & \\
& & & & & & \overline{B_{ij}} \arrow[d, dash] & \widetilde{B_i} \arrow[d, dash] & , & \widetilde{B_j} \arrow[d, dash] \\
F & & V & & \subseteq & W \arrow[dr, dash] & Z(\overline{B_{ij}}) \arrow[d, dash] & Z(\widetilde{B_i}) \arrow[dr, dash] & , & Z(\widetilde{B_j}) \arrow[dl, dash] \\
& & & & & & \overline{W} & & \widetilde{V} &
\end{tikzcd}$$

O seguinte resultado fornece um critério para a IP fácil de ser verificado no caso em que os anéis de valorização de Dubrovin são integrais sobre o centro.

Proposição A.6. *Sejam $B_1, \ldots, B_k$ anéis de valorização de Dubrovin de A, dois a dois incomparáveis, e seja $B = \cap_{i=1}^k B_i$. Suponhamos que B_i é integral sobre V_i para todo i. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *$Z(\widetilde{B_i})$ e $Z(\widetilde{B_j})$ são independentes em $Z(\overline{B_{ij}})$ para todo $i \neq j$.*

(ii) *$B_i V_{ij} = B_j V_{ij} = B_{ij}$.*

(iii) *$B_i = BV_i$.*

onde V_{ij} (resp. B_{ij}) denota o menor sobreanel de V_i e V_j (resp. B_i e B_j).

A.2. O número da extensão

Nesta seção vamos definir o número da extensão de um anel de valorização para uma álgebra central simples. Para isso, precisamos de dois teorema fundamentais obtidos por Gräter, os quais estabelecem a existência e unicidade (a menos de conjugação) de uma família de anéis de valorização de Dubrovin em um anel artiniano simples, tendo a Propriedade da Interseção. Para demonstrações, ver [**MMU**, Thm. 16.14 e Thm. 16.15].

Teorema A.7 (**Teorema da Existência**). *Seja A um anel artiniano simples com dimensão finita sobre seu centro F. Suponhamos que $V_1, \ldots, V_n$ são anéis de valorização de F, dois a dois incomparáveis, e seja $D = \bigcap_{i=1}^n V_i$.*

(i) *Sejam $B_1, \ldots, B_k$ anéis de valorização de Dubrovin de A tendo a IP e seja $B = \bigcap_{i=1}^k B_i$. Suponhamos que $Z(B) = V_1 \cap \cdots \cap V_\ell$, para algum ℓ com $1 \leq \ell \leq n$. Então existem anéis de valorização de Dubrovin $B_{k+1}, \ldots, B_m$ de A tais que $B_1, \ldots, B_m$ tem a IP, e se $B' = \bigcap_{i=1}^m B_i$, então $Z(B') = D$ e B' é integral sobre D.*

(ii) *Sejam $B_1, \ldots, B_k$ (resp. $B'_1, \ldots, B'_m$) anéis de valorização de Dubrovin de A, dois a dois incomparáveis, tendo a IP, e sejam $B = \bigcap_{i=1}^k B_i$ e $B' = \bigcap_{i=1}^m B'_i$. Se $Z(B) = Z(B') = D$ e B' e B são ambos integrais sobre D, então $k = m$.*

Teorema A.8 (**Teorema da Conjugação**). *Seja B (resp. B') a interseção de um número finito de anéis de valorização de Dubrovin de A tendo a IP. Se $Z(B) = Z(B') = D$ e B e B' são ambos integrais sobre D, então B e B' são conjugados, que é, $B = qB'q^{-1}$, para algum $q \in A^\times$.*

Seja A um anel artiniano simples com dimensão finita sobre seu centro F e seja V um anel de valorização de F. Pela parte (i) do Teorema A.7, existe uma família de anéis de valorização de Dubrovin $B_1, \dots, B_n$ de A tendo a IP, tais que $Z(B_i) = V$ e $B = \bigcap_{i=1}^n B_i$ é integral sobre V. O inteiro n é chamado o *número da extensão* de V para A. Pela parte (ii) do Teorema A.7, o número da extensão está bem definido.

Existe uma outra definição para o número da extensão introduzida por Wadsworth em [**W2**]. Seja B um anel de valorização de Dubrovin de uma álgebra simples A de dimensão finita sobre seu centro F e seja $V = B \cap F = Z(B)$. Como $\overline{B} = B/J(B)$ é um anel artiniano simples, podemos definir

$$t_B = \text{tamanho matricial de } \overline{B}, \tag{A.9}$$

isto é, $\overline{B} \cong M_{t_B}(E)$, para algum anel de divisão E. Agora seja F^h a henselização de F com respeito ao anel de valorização V. Definimos

$$n_B = \text{tamanho matricial de } A \otimes_F F^h, \tag{A.10}$$

isto é, $A \otimes_F F^h \cong M_{n_B}(D^h)$, onde D^h é um anel de divisão com centro F^h. Acontece que n_B/t_B é sempre um inteiro positivo e coincide com o número da extensão de V para A definido acima.

Note que n_B só depende da álgebra A e da valorização do centro. O mesmo acontece com t_B, uma vez que dois anéis de Dubrovin sobre o mesmo centro são sempre conjugados, logo isomorfos. Então escreveremos $\xi(V, A)$ para denotar o número da extensão de V para A, ou simplesmente $\xi(V)$, quando a álgebra A envolvida estiver fixada.

Para sermos mais precisos, $\xi(V, A)$ depende apenas de V e da classe de Brauer equivalência de A. De fato, se B é um anel de valorização de Dubrovin de A, com centro V, então $S = M_k(B)$ é anel de valorização de Dubrovin de $M_k(A)$ com centro V. Como

$$M_k(A) \otimes_F F^h \cong M_k(A \otimes_F F^h),$$

temos que $n_S = k \cdot n_B$. Por outro lado,

$$\overline{S} = M_k(B)/J(M_k(B)) \cong M_k(B/J(B)),$$

o que implica $t_S = k \cdot t_B$. Portanto, $\xi(V, M_k(A)) = \xi(V, A)$.

No que segue, vamos introduzir o conceito de *posto degrau* e *ideal degrau* e estudar a sua relação com o número da extensão descrito acima. Esses conceitos apareceram originalmente em [**W2**], que usamos como referência aqui.

Seja (F, V) um corpo valorizado e seja A uma F-álgebra central simples. Seja $\{P_i\}_{i \in I}$ o conjunto linearmente ordenando dos ideais primos de V. Para cada $i \in I$, seja (F_i, V_i) a henselização de (F, V_{P_i}) e seja $A \otimes_F F_i \cong M_{n_i}(D_i)$, onde D_i é uma F_i-álgebra de divisão central. Como $[A \otimes_F F_i : F_i] = [A : F]$, temos que $n_i \leq [A : F]$. Além disso, se $P_i \subseteq P_j$, então $V_{P_i} \supseteq V_{P_j}$. Então por (B.5), podemos escolher $F_i \subseteq F_j$, e assim $n_i | n_j$. Então, se $n \in \{n_i \mid i \in I\}$, então existe um ideal primo P_j de V maximal tal que $n_j = n$. Para verificar isso, seja $I_n = \{i \in I \mid n_i = n\}$ e seja $P_j = \bigcup_{i \in I_n} P_i$, que é um ideal primo de V pois os P_i são linearmente ordenados. Como F_j é o limite direto dos F_i, com $i \in I_n$, concluímo que $n_j = n$. O ideal primo P_j é dito um *ideal degrau* de V com respeito a álgebra A. Note que P_j é um ideal degrau se e somente se para cada $P_s \supsetneq P_j$ temos $n_s > n_j$. Denotamos por $j(V, A)$ o número de ideais degrau. $j(V, A)$ é chamado de *posto degrau* de V com respeito a A. Note que o posto degrau é sempre finito pois podemos ter apenas um número finito de $n_i \leq [A : F]$ distintos. Isso torna o posto degrau muito útil para argumentos indutivos, principalmente quando o posto da valorização é infinito. Seja B um anel de valorização de Dubrovin de A com $Z(B) = V$. Como existe uma correspondência entre os ideais primos de B e os ideais primos de V (cf. [**MMU**, Thm. 7.8]), dizemos que Q é um *ideal degrau* de B se $Q \cap V$ é ideal degrau de V com respeito a A.

O resultado seguinte estabelece que os anéis de valorização de Dubrovin cujo centro tem posto degrau igual a 1 são sempre integrais. Para uma demonstração ver [**MMU**, Thm. 11.5].

Teorema A.11 (Wadsworth). *Seja A uma F-álgebra central simples. Seja R um anel de valorização de Dubrovin de A e seja $V = Z(A)$. Suponhamos que $j(V, A) = 1$. Então R é integral sobre V.*

No que segue, vamos relacionar os ideais degrau com o número da extensão introduzido na Seção A.2. Para isso, precisemos fixar alguma notação:

(A.12) Seja B um anel de valorização de Dubrovin de A tal que $Z(B) = V$. Seja S um subanel de A contendo B. Então S é um anel de valorização de Dubrovin de A e $W = Z(S)$ é um anel de valorização de F contendo V. Seja $\widetilde{B} = B/J(S)$, que é um anel de valorização de Dubrovin de $\overline{S} = S/J(S)$. Seja $\widetilde{V} = V/J(W)$, que é um anel de valorização de $\overline{W} = W/J(W)$.

Nas condições de (A.12), definimos

(A.13) $\qquad \ell(V, W) =$ o número de extensões de $\widetilde{V}$ para $Z(\overline{S})$.

Como dois anéis de valorização de Dubrovin sobre o mesmo centro são sempre conjugados, $\ell(V,W)$ depende apenas dos anéis de valorização V e W e da álgebra A.

Teorema A.14 (Wadsworth). *Sob as condições de (A.12), sejam $Q_1 \subsetneq Q_2 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_k$ um conjunto finito de ideais primos de V que contém todos os ideais degrau. Seja $V_i = V_{Q_i}$ e $\ell_i = \ell(V_{Q_i}, V_{Q_{i-1}})$. Então*

$$\xi(V,A) = \ell_2\ell_3\cdots\ell_k.$$

Teorema A.15 (Wadsworth). *Sob as hipóteses de (A.12), temos*

(i) $t_B = t_{\widetilde{B}} \geq t_S$;

(ii) $n_B = n_{\widetilde{B}}(n_S/t_S)\ell(V,W)$;

(iii) $\xi(V) = \xi(W)(n_{\widetilde{B}}/t_{\widetilde{B}})\ell(V,W)$.

Corolário A.16 (Wadsworth). *Sob as hipóteses de (A.12), seja Q um ideal primo de B contendo $J(S)$. Se $Q/J(S)$ é um ideal degrau de $\widetilde{B}$, então Q é um ideal degrau de B.*

Para concluir esta seção, temos dois resultados sobre sobreanéis de anéis de valorização de Dubrovin que são integrais. Esses resultados serão úteis em argumentos indutivos. Para demonstrações da Proposição A.17 e Proposição A.18 ver [**MMU**, Prop. 12.4] e [**MMU**, Cor. 16.6], respectivamente.

Proposição A.17. *Seja R um anel de valorização de Dubrovin de A com $V = Z(R)$, tal que R não é integral sobre V. Então existe um anel de valorização de Dubrovin S de A contendo R, tal que S é integral sobre $W = Z(S)$ e é minimal com essa propriedade. Além disso, temos*

(i) $\overline{W} \subsetneq Z(\overline{S})$.

(ii) *$\widetilde{V}$ tem pelo menos duas extensões para $Z(\overline{S})$, isto é, $\ell(V,W) \geq 2$.*

Proposição A.18. *Sejam $R_1, \ldots, R_n$ anéis de valorização de Dubrovin de A, dois a dois incomparáveis e tendo a IP, tais que $V = Z(\cap R_i)$ é um anel de valorização de F. Seja S_i um anel de valorização de Dubrovin de A contendo R_i, integral sobre $W_i = Z(S_i)$ e minimal com essa propriedade, para todo $1 \leq i \leq n$. Então $S_1 = \cdots = S_n$.*

A.3. Teorema da aproximação de Morandi

Nesta seção apresentamos o Teorema da aproximação para anéis de valorização de Dubrovin obtido por Morandi em [**M3**]. Morandi estava trabalhando independentemente de Gräter, tentando obter para anéis de valorização de Dubrovin uma versão do Teorema da aproximação baseada na versão mais geral do Teorema da aproximação no caso comutativo, que foi obtido por Ribenboim em [**R**, Théorème 5]. A condição sobre a família de anéis de Dubrovin utilizada por Morandi para o estabelecimento do teorema mostrou-se equivalente a Propriedade da Intersecção introduzida por Gräter (Compare o enunciado abaixo com [**M3**, Thm. 2.3] e o Corolário A.4 acima).

Teorema A.19. ***(Teorema da aproximação de Morandi)*** *Sejam $B_1, \ldots, B_k$ anéis de valorização de Dubrovin de A, dois a dois incomparáveis e tendo a IP. Seja B_{ij} o menor subanel de A contendo B_i e B_j. Assumimos que para todo $1 \leq i \leq k$ existe um ideal à direita I_i de B_i para os quais vale $I_iB_{ij} = I_jB_{ij}$ para todo $i \neq j$. Sejam $a_1, \ldots, a_k \in A$ tais que $a_i - a_j \in I_iB_{ij}$ para todo $i \neq j$. Então existe $x \in A$ tal que $x - a_i \in I_i$ para todo i.*

Para uma demonstração do Teorema A.19, ver [**MMU**, Thm. 15.2].

.

Henselização e produto tensorial

Reunimos neste apêndice algumas propriedades importantes sobre henselização que são utilizadas com frequência ao longo do texto.

Um corpo valorizado (F, V) é dito henseliano quando vale o Lema de Hensel, isto é, para todo polinômio mônico $f \in V[x]$, tal que sua imagem $\overline{f} \in \overline{F}^v[x]$ tem uma fatoração $\overline{f} = \overline{g}\overline{h}$, com $\overline{g}$ e $\overline{h}$ relativamente primos em $\overline{F}^v[x]$, existem $g_1, h_1 \in V[x]$ tais que $f = g_1 h_1$, $\overline{g} = \overline{g_1}$, $\overline{h} = \overline{h_1}$ e $\deg(g_1) = \deg(g)$. Neste caso, a valorização v é dita henseliana. A seguir temos uma útil caracterização de corpos henselianos.

Proposição B.1 ([**EP**], Thm. 4.1.3). *Um corpo valorizado (F, V) é henseliano se e somente se V tem prolongamento único para toda extensão algébrica L de F.*

O resultado seguinte estabelece que a composição de valorizações tem um bom comportamento com relação a propriedade de ser henseliano.

Proposição B.2 ([**EP**], Cor. 4.1.4). *Seja (F, V) um corpo valorizado e W um anel de valorização de F contendo V e $U = V/J(W)$ o anel de valorização quociente em $\overline{F}^w$. Então (F, V) é henseliano se e somente se (F, W) e $(\overline{F}^w, U)$ são ambos henselianos.*

A henselização de um corpo valorizado pode ser definida em termos de uma propriedade universal: Uma henselização de um corpo valorizado (F, V) é uma extensão henseliana (F^h, V^h) de (F, V), tal que para toda extensão henseliana

(F', V') de (F, V), existe um único F-mergulho $\varphi : (F^h, V^h) \to (F', V')$, isto é, φ é um homomorfismo injetivo tal que $\varphi(V^h) = V'$ e $\varphi|_F = \mathrm{id}$.

(B.3)
$$\begin{tikzcd}
(F_v^h, V^h) \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[d, dash] & (F', V') \arrow[dl, dash] \\
(F, V) &
\end{tikzcd}$$

Como estabelecido em [**E1**, (17.10)], todo corpo valorizado tem uma única henselização a menos de F-isomorfismo. Dessa forma, faz sentido escrevermos que (F^h, V^h) é a henselização de (F, V).

Proposição B.4 ([**E1**], Thm. 17.19). *A henselização (F^h, V^h) é uma extensão imediata de (F, V), isto é, $\overline{F^h} = \overline{F}$ e $\Gamma_v = \Gamma_{v^h}$.*

Seja (F, V) um corpo valorizado e W um anel de valorização de F contendo V. Seja (F_v^h, V^h) (resp. (F_w^h, W^h)) a henselização de (F, V) (resp. (F, W)). Seja $W' = WV^h$, que é um anel de valorização de F_v^h contendo V^h. Então, pela Proposição B.2, temos que (F_v^h, W') é uma extensão henseliana de (F, W). Segue da propriedade universal da henselização que existe um mergulho $\varphi : (F_w^h, W^h) \to (F_v^h, W')$. Assim, podemos identificar (F_w^h, W^h) com sua cópia isomorfa dentro de (F_v^h, W'). Desta forma, podemos ver (F_v^h, W') como uma extensão de (F_w^h, W^h). Seja $V' = V^h \cap F_w^h \subseteq W' \cap F_w^h = W^h$. Seja $\widetilde{V'} = V'/J(W^h)$, que é um anel de valorização do corpo de resíduos $\overline{F_w^h}^{w^h} = \overline{F}^w$. Da mesma forma, seja $\widetilde{V^h} = V^h/J(W') \subseteq \overline{F_v^h}^{w'}$.

(B.5)
$$\begin{tikzcd}
(F_v^h, V^h) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, dash] & (F_v^h, W') \arrow[d, dash] & \\
(F_w^h, V') \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, dash] & (F_w^h, W^h), \arrow[d, dash] & (\overline{F_v^h}^{w'}, \widetilde{V^h}) \arrow[d, dash] \\
(F, V) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & (F, W) & (\overline{F}^w, \widetilde{V'})
\end{tikzcd}$$

Proposição B.6 ([**M1**], Thm. 2). *Sob as hipóteses do parágrafo acima, temos que (F_v^h, W') é uma extensão inercial de (F_w^h, W^h), isto é, $\overline{F_v^h}^{w'}$ é uma extensão separável de $\overline{F}^w$ e para todo corpo K tal que $F_w^h \subseteq K \subseteq F_v^h$ e $[K : F_w^h] < \infty$, temos $[\overline{K}^{w''} : \overline{F}^w] = [K : F_w^h]$, onde $W'' = W' \cap K$. Além disso, $(\overline{F_v^h}^{w'}, \widetilde{V^h})$ é a henselização de $(\overline{F}^w, \widetilde{V'})$.*

É bem conhecido que se L/F é uma extensão finita de corpos, v é uma valorização discreta em F e $v_1, \ldots, v_k$ são todas as extensões distintas de v em L, então existe um isomorfismo $L \otimes_F \widehat{F} \to \prod_{i=1}^{k} \widehat{L_i}$, onde $\widehat{F}$ (resp. $\widehat{L_i}$) é o completamento de F (resp. L) com respeito a v (resp. v_i) (ver [**B**, Chapter VI, §8, no. 6, Prop. 11]). O teorema a seguir é um análogo ao resultado mencionado acima, que vale para valorizações de posto arbitrário, trocando-se o completamento pela henselização. No caso em que a extensão finita é separável, este resultado está implícito em [**E1**, Thm. 17.17]. A demonstração do caso geral, que apresentamos aqui, foi obtida por Wadsworth.

Teorema B.7. *Seja (F, v) um corpo valorizado e seja L uma extensão finita de F. Sejam $y_1, \ldots, y_\ell$ todas as extensões de v para L. Seja F^h a henselização de F com respeito a v. Então, $L \otimes_F F^h \cong \prod_{i=1}^{r} L_i$, onde cada L_i é a henselização de L com respeito a y_i.*

Para demonstrar a Proposição precisaremos do seguinte lema técnico.

Lema B.8. *Seja N/F uma extensão galoisiana de corpos (possivelmente de grau infinito) e seja o grupo de Galois $G = G(N/F)$. Seja L e K corpos intermediários com $[L : F] < \infty$. Seja $H = G(N/L) \leq G$ e $Z = G(N/K) \leq G$. Suponhamos que $\tau_1, \ldots, \tau_\ell$ representantes das $Z - H$ classes laterais distintas em G, isto é, $G = \bigcup_{i=1}^{\ell} Z\tau_i H$ é uma união disjunta. Então $L \otimes_F K \cong \prod_{i=1}^{\ell} \tau_i(L)K$.*

Demonstração: Como L é separável sobre F, temos que $L = F(a)$ para algum $a \in L$. Seja f o polinômio minimal de a sobre F. Então f se fatora em $N[X]$ como um produto de polinômios mônicos $f(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$, com os a_i todos distintos. Podemos supor que $a_1 = a$. Seja $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Seja $f = g_1 \cdots g_\ell$ a fatoração em polinômios mônicos irredutíveis de f em $K[X]$ e seja $b_i \in \mathcal{A}$ alguma raiz de g_i em N para cada $1 \leq i \leq \ell$. Enquanto G age transitivamente em $\mathcal{A}$, temos que $\mathcal{A}$ se decompõe em ℓ órbitas disjuntas $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_\ell$, onde $\mathcal{B}_i = Zb_i = \{$ raízes de g_i em $N\}$. Para cada i, escolha $\tau_i \in G$ com $\tau_i(a) = b_i$. Então $Z\tau_i H = \{\sigma \in G \mid \sigma(a) \in \mathcal{B}_i\}$, pois $H = \{\sigma \in G \mid \sigma(a) = a\}$. Então, $Z\tau_1 H, \ldots, Z\tau_\ell H$ são todos as $Z - H$ classes laterais distintas em G. Como g_i e g_j são primos entre si, para $i \neq j$, temos pelo Teorema chinês dos restos

$$\begin{aligned} L \otimes_F K &= F[X]/(f) \otimes_F K \cong K[X]/fK[X] \\ &\cong K[X]/(g_1) \cdots (g_\ell) \cong K[X]/(g_1) \times \cdots \times K[X]/(g_\ell) \\ &\cong K(b_1) \times \cdots \times K(b_\ell) \cong \tau_1(L)K \times \cdots \times \tau_\ell(L)K. \end{aligned}$$

□

Demonstração da Proposição(caso separável): Suponhamos primeiro que L é uma extensão separável de F. Seja F^s o fecho separável de F e seja $G = G(F^s/F)$. Fixe alguma extensão w de v em F^s e seja $Z = \{\sigma \in G \mid \sigma \circ w = w\}$. Podemos supor que $Z = G(F^s/F^h)$. Seja Ω o conjunto das extensões de v para F^s. Temos que G age transitivamente à direita em Ω. Para cada $i = 1, \ldots, \ell$, seja $\Omega_i = \{y \in \Omega \mid y|_L = y_i\}$. Seja $H = G(F^s/L)$. Note $\Omega_1, \ldots, \Omega_\ell$ são as distintas H-órbitas em Ω. Para cada $1 \leq i \leq \ell$ escolha $\tau_i \in G$ tal que $w \circ \tau_i|_L = y_i$. Seque que

$$\{\sigma \in G \mid w \circ \sigma|_L = y_i\} = \{\sigma \in G \mid w \circ \sigma \in \Omega_i\} = Z\tau_i H.$$

Então G se escreve como uma união disjunta $G = \bigcup_{i=1}^{\ell} Z\tau_i H$ de $Z - H$ classes laterais. Podemos então aplicar o Lema B.8 com $N = F^s$ e $K = F^h$. Então

$$L \otimes_F F^h \cong \prod_{i=1}^{\ell} \tau_i(L) F^h \cong \prod_{i=1}^{\ell} L\tau_i^{-1}(F^h).$$

Note que o número de fatores diretos de $L \otimes_F F^h$ é o número de $Z - H$ classes laterais, que neste caso é o número de extensões de v para L. Agora note que

$$G(F^s/L\tau_i^{-1}(F^h)) = G(F^s/L) \cap G(F^s/\tau_i^{-1}(F^h)) = H \cap \tau_i^{-1} Z \tau_i.$$

Como Z é o estabilizador de w em G, temos que $\tau_i^{-1} Z \tau_i$ é o estabilizador de $w \circ \tau_i$ em G. Logo $H \cap \tau_i^{-1} Z \tau_i$ é o grupo de decomposição de $w \circ \tau_i$ sobre y_i. Assim, $L\tau_i^{-1}(F^h)$ é a henselização de $w \circ \tau_i$ sobre y_i. Isso completa a prova do caso em que L é separável sobre F. □

Para demonstrarmos o caso em que L é não é separável sobre F, precisaremos do seguinte lema.

Lema B.9. *Seja (F^h, v^h) uma henselização do corpo valorizado (F, v). Seja K uma extensão de F dentro do fecho algébrico de F^h e seja w a única extensão de v^h para $K \cdot F^h$. Então $(K \cdot F^h, w)$ é uma henselização de $(K, w|_K)$.*

Demonstração: A valorização w em $K \cdot F^h$ é henseliana pois $K \cdot F^h$ é uma extensão algébrica de F^h e v^h é henseliana. Seja (K^h, w^h) uma henselização $(K, w|_K)$. Pela propriedade universal acima existe um mergulho $(K^h, w^h) \hookrightarrow (K \cdot F^h, w)$. Então podemos assumir que $K \subseteq K^h \subseteq K \cdot F^h$ e $w^h = w|_{K^h}$. Novamente pela propriedade universal, existe um mergulho $(F^h, v^h) \hookrightarrow (K^h, w^h)$, donde obtemos um mergulho $F^h \cdot K \hookrightarrow K^h$. Como $K^h \subseteq K \cdot F^h$, concluímos que $K^h = K \cdot F^h$ e

$w = w^h$. Portanto, $(K \cdot F^h, w)$ é uma henselização de $(K, w|_K)$. $\square$

Demonstração da Proposição(caso não separável): Suponhamos agora que L não é separável sobre F e seja S o fecho separável de F em L. Seja $u_i = y_i|_S$, para $1 \leq i \leq \ell$. Como L é puramente inseparável sobre S, temos que as valorizações $u_1, \ldots, u_\ell$ são todas distintas e estas são todas as extensões de v para S. Podemos então aplicar o caso separável com S no lugar de L. Então temos $S \otimes_F F^h \cong \prod_{i=1}^{\ell} E_i$, onde cada (E_i, u_i^h) é a henselização de (S, u_i). Segue que

$$L \otimes_F F^h \cong L \otimes_S (S \otimes_F F^h) \cong L \otimes_S (\prod_{i=1}^{\ell} E_i) \cong (\prod_{i=1}^{\ell} L \otimes_S E_i).$$

Como L é puramente inseparável sobre S, enquanto que E_i é separável sobre S, estes corpos são linearmente disjuntos. Logo $L \otimes_S E_i$ é um corpo, que é isomorfo a $L \cdot E_i$. Seja w_i a única extensão de u_i^h para $L \otimes_S E_i$. Como $w_i|_S = u_i$ então $w_i|_L = y_i$. Concluímos então pelo Lema B.9 que $(L \otimes_S E_i, w_i)$ é a henselização de (L, y_i) para $1 \leq i \leq \ell$. $\square$

Um teorema sobre a estrutura de gauges em álgebras simples

O teorema seguinte é uma generalização do Teorema 4.5 que vale para valorizações de posto arbitrário. A demonstração que incluímos aqui foi obtida por Wadsworth.

Teorema C.1 (Wadsworth). *Seja (F, v) é um corpo valorizado e A é uma F-álgebra simples de dimensão finita. Sejam $v_1, \ldots, v_r$ todas as extensões distintas de v para $K = Z(A)$. Então existem v_i-gauges α_i em A para $i = 1, \ldots, r$ tais que*

(C.2) $$\alpha(a) \;=\; \min\big(\alpha_1(a), \ldots, \alpha_r(a)\big) \qquad \textit{para todo } a \in A.$$

Além disso,

(C.3) $$\mathrm{gr}_\alpha(A) \;\cong_g \mathrm{gr}_{\alpha_1}(A) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\alpha_r}(A).$$

Demonstração: Seja (F^h, v^h) a henselização de (F, v) e seja

$$B = A \otimes_F F^h \qquad \text{e} \qquad L = Z(B) = K \otimes_F F^h.$$

Pelo Teorema B.7, L é um produto direto de uma quantidade finita de corpos. Seja $e_1, \ldots, e_r$ os idempotentes primitivos de de L, então

$$L = L_1 \times \cdots \times L_r, \qquad \text{onde} \qquad L_i = e_i L,$$

e cada L_i é um corpo. Os L_i são indexados pelos v_i. Consequentemente, B é um produto de álgebras simples

$$B = B_1 \times \cdots \times B_r, \qquad \text{onde} \qquad B_i = e_i B,$$

Então, cada B_i é uma L_i-álgebra central simples. Vamos identificar K, A, F^h com suas cópias isomorfas $K \otimes 1, A \otimes 1, 1 \otimes F^h$ em B. Mas não vamos identificá-los com suas cópias isomorfas $e_i K, e_i A, e_i F^h$ em B_i. Para cada i temos inclusões canônicas

$$p_i : A \hookrightarrow B_i, \quad a \mapsto e_i(a \otimes 1) \qquad \text{e} \qquad q_i : F^h \hookrightarrow B_i, \quad c \mapsto e_i(1 \otimes c).$$

Então, B_i tem subálgebras $p_i(A), p_i(K)$, e L_i, com

$$B_i = p_i(A) \otimes_{p_i(K)} L_i \cong A \otimes_K L_i, \qquad \text{assim,} \qquad [B_i : L_i] = [A : K].$$

Cada corpo L_i é um compositum de corpos, $L_i = p_i(K) \cdot q_i(F^h)$. A composição $v^h \circ q_i^{-1}$ é uma valorização henseliana em $q_i(F^h)$, que se estende unicamente para uma valorização henseliana w_i em L_i. A restrição de w_i para K dá uma valorização $w_i \circ p_i$ que estende v de F. As valorizações $w_i \circ p_1, \ldots, w_r \circ p_r$ são todas distintas e são todas as extensões de v para K. Desta forma, após renumerarmos os e_i se necessário, podemos assumir $w_i \circ p_i = v_i$, para $i = 1, \ldots, r$, isto é,

$$v_i(d) = w_i(e_i(d \otimes 1)), \quad \text{para todo} \quad d \in K. \tag{C.4}$$

O Teorema B.7 também nos dá que (L_i, w_i) é a henselização de (K, v_i).

Seja $\beta = \alpha \otimes v^h$, que é uma v^h-gauge em B, satisfazendo

$$\mathrm{gr}_\beta(B) \cong_g \mathrm{gr}_\alpha(A) \otimes_{\mathrm{gr}(F)} \mathrm{gr}(F^h) \cong_g \mathrm{gr}_\alpha(A), \tag{C.5}$$

pela Proposição 3.33. Seja $\beta_i = \beta|_{B_i}$, que é uma v^h-gauge em B_i através do mergulho $q_i : F^h \hookrightarrow B_i$. Pela Proposição 4.1,

$$\beta(b) = \min_{1 \le i \le r} (\beta_i(e_i b)), \text{ para todo } b \in B, \tag{C.6}$$

e

$$\mathrm{gr}_\beta(A) = \mathrm{gr}_{\beta_1}(B_1) \times \cdots \times \mathrm{gr}_{\beta_r}(B_r). \tag{C.7}$$

Como w_i é a única extensão da valorização henseliana v^h para L_i, temos pela Proposição 3.38 que cada β_i é uma w_i-gauge.

Defina as v-funções valorização $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ em A por

$$\alpha_i(a) = \beta(p_i(a)) = \beta_i(e_i(a \otimes 1)).$$

Então, cada α_i é multiplicativa pois β_i é multiplicativa e para todo $a \in A$,

$$\alpha(a) = \beta(a \otimes 1) = \min_{1 \le i \le r} (\beta_i(e_i(a \otimes 1))) = \min_{1 \le i \le r} (\alpha_i(a)). \tag{C.8}$$

Além disso, como β_i é uma w_i-função valorização, segue que para todo $c \in K$ e $a \in A$,

$$\begin{aligned} \alpha_i(ca) &= \beta_i(e_i(ca \otimes 1)) = \beta_i(e_i(c \otimes 1) \cdot e_i(a \otimes 1)) \\ &= w_i(e_i(c \otimes 1)) + \beta_i(e_i(a \otimes 1)) = v_i(c) + \alpha_i(a). \end{aligned}$$

Logo α_i é uma v_i-função valorização em A. O seguinte diagrama mostra as álgebras relacionadas a B_i e as funções valorização associadas.

$$\begin{tikzcd} & B_i, \beta_i \arrow[dr, dash] & & \\ A, \alpha_i \arrow[ur, hook, "p_i"] \arrow[dr, dash] & & L_i, w_i & \\ & K, v_i \arrow[ur, hook, "p_i"] & & F^h, v^h \arrow[ul, hook', "q_i"'] \end{tikzcd} \tag{C.9}$$

Agora, para todo $\gamma \in \Gamma$ a definição dos β_i e (C.6) e (C.8) mostram que temos um diagrama comutativo para cada i:

$$\begin{tikzcd} A^{\alpha}_{\ge\gamma} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & A^{\alpha_i}_{\ge\gamma} \arrow[d] \\ B^{\beta}_{\ge\gamma} \arrow[r, "e_i"] & B^{\beta_i}_{i,\ge\gamma}. \end{tikzcd} \tag{C.10}$$

A aplicação vertical da direita é $a \mapsto e_i(a \otimes 1)$. Também existe um diagrama comutativo correspondente com $> \gamma$ no lugar de $\ge \gamma$. Estes dois diagramas juntos dão um diagrama comutativo de $\mathrm{gr}(F)$ álgebras:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{gr}_{\alpha}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \displaystyle\prod_{i=1}^{r} \mathrm{gr}_{\alpha_i}(A) \arrow[d] \\ \mathrm{gr}_{\beta}(B) \arrow[r, "\cong"] & \displaystyle\prod_{i=1}^{r} \mathrm{gr}_{\beta_i}(B_i). \end{tikzcd} \tag{C.11}$$

A aplicação superior é injetiva por (C.8). A aplicação vertical da esquerda é o isomorfismo de (C.5). A aplicação vertical da direita é injetiva, pois para cada i, a definição de α_i mostra que $\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A) \to \mathrm{gr}_{\beta_i}(B_i)$ é injetiva. A aplicação de baixo é o isomorfismo de (C.7). Consequentemente, todas as aplicações do diagrama devem ser isomorfismos. Assim, para cada i, $\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A) \cong_g \mathrm{gr}_{\beta_i}(B_i)$, que é semi-simples pois

β_i é uma gauge. Como (L_i, v_i') (resp. (F^h, v^h)) é uma extensão imediata de (K, v_i) (resp. (F, v)), temos

$$[L_i : F^h] \geq [\mathrm{gr}_{w_i}(L_i) : \mathrm{gr}_{v^h}(F^h)] = [\mathrm{gr}_{v_i}(K) : \mathrm{gr}_v(F)].$$

Assim, como β_i é uma v^h-norma,

$$\begin{aligned}
[\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A) : \mathrm{gr}_{v_i}(K)][\mathrm{gr}_{v_i}(K) : \mathrm{gr}_v(F)] &= [\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A) : \mathrm{gr}_v(F)] \\
&= [\mathrm{gr}_{\beta_i}(B_i) : \mathrm{gr}_{v^h}(F^h)] = [B_i : F^h] \\
&= [B_i : L_i][L_i : F^h] = [A : K][L_i : F^h] \\
&\geq [A : K][\mathrm{gr}_{v_i}(K) : \mathrm{gr}_v(F)].
\end{aligned}$$

Assim, $[\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A) : \mathrm{gr}_{v_i}(K)] \geq [A : K]$. Como a desigualdade contrária é sempre verdade para toda função valorização, temos que $[\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A) : \mathrm{gr}_{v_i}(K)] = [A : K]$. Logo α_i é uma v_i-norma em A. Como notamos anteriormente, $\mathrm{gr}_{\alpha_i}(A)$ é semi-simples. Portanto, α_i é uma v_i-gauge. $\square$

Referências Bibliográficas

[AS] Amitsur, A. S.; Small, L. W. Prime ideals in PI-rings, *J. Algebra*, **62** (1980), 358–383.

[Bo1] Boulagouaz, M. The graded and tame extensions, in "Commutative Ring Theory, (Fès, 1992)"(P. J. Cahen et al., Eds.), *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics,* Vol. 153, pp. 27–46, Dekker, New York, 1994.

[B] Bourbaki, N. *Commutative Algebra,* Chap. 1-7, Springer Verlag, 2nd printing, 1989.

[BG] Brungs, H.-H.; Gräter, J. Extensions of valuation rings in central simple algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), no. 1, 287–302.

[C] Cohn, P. M. On extending valuations in division algebras. *Studia Sci. Math. Hungar.* **16** (1981), 65-70.

[D] Draxl, P. K. Ostrowski's theorem for Henselian valued skew fields. *J. Reine Angew. Math.* **354** (1984), 213-218.

[Du1] Dubrovin, N. I. Noncommutative valuation rings. (Russian) *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* **45** (1982), 265–280. English transl.: *Trans. Moscow Math. Soc.* **45** (1984), 273-287.

[Du2] Dubrovin, N. I. Noncommutative valuation rings in simple finite-dimensional algebras over a field. (Russian) *Mat. Sb.* (N.S.) **123(165)** (1984), no. 4, 496–509. English transl.: *Math. USSR Sb.* **51** (1985) 493-505.

[E1] Endler, O. *Valuation theory.* Universitext. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

[E2] Endler, O. *Teoria dos números algébricos.* Projeto Euclides, 15. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1986.

[EP] Engler, A. J.; Prestel, A. *Valued fields.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[Ef] Efrat, I. *Valuations, orderings, and Milnor K-theory.* Mathematical Surveys and Monographs, **124**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[Er] Ershov Yu. L. Valued division rings. Fifth All Union Symposium, it Theory of Rings, Algebras and Modules. Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel, Inst. Mat., Novosibirsk, pp 53 - 55, 1982.

[F] Felzenszwalb, B. *Álgebras de dimensão finita.* IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), 1979.

[G] Gräter, J. The "Defektsatz" for central simple algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* **330** (1992), no. 2, 823–843.

[Ha] Hasse, H. Über $\wp$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlensysteme. *Math. Annalen.* **104** (1931) 495–534.

[HW1] Hwang, Y.-S.; Wadsworth, A. R. Algebraic extensions of graded and valued fields. *Comm. Algebra.* **27** (1999), no. 2, 821–840.

[HW2] Hwang, Y.-S.; Wadsworth, A. R. Correspondences between valued division algebras and graded division algebras. *J. Algebra.* **220** (1999), no. 1, 73–114.

[JW] Jacob, B.; Wadsworth, A. R. Division algebras over Henselian fields. *J. Algebra* **128** (1990), no. 1, 126–179.

[K] Kulshrestha, A. Strongly Anisotropic Involutions on Central Simple Algebras. *Comm. Algebra.* **39** (2011), 1686–1704.

[L] Lam, T. Y. *A first course in noncommutative rings.* Graduate Texts in Mathematics, 131. Springer-Verlag, New York, 1991.

[MMU] Marubayashi, H.; Miyamoto, H.; Ueda, A. *Non-commutative valuation rings and semi-hereditary orders.* K-Monographs in Mathematics, 3. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[M1] Morandi, P. J. The Henselization of a valued division algebra. *J. Algebra* **122** (1989), 232-243.

[M2] Morandi, P. J. Value functions on central simple algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1989), no. 2, 605–622.

[M3] Morandi, P. J. An approximation theorem for Dubrovin valuation rings. *Math. Z.* **207** (1991), no. 1, 71–81.

[M4] Morandi, P. J. On defective division algebras. K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992), 359–367, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **58**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[NvO1] Nătăsescu, C.; van Oystaeyen, F. *Graded ring theory.* North-Holland Mathematical Library, 28. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982.

[NvO2] Nătăsescu, C.; van Oystaeyen, F. *Methods of graded rings.* Lecture Notes in Mathematics, 1836. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[P] Pierce, R. S. *Associative algebras.* Graduate Texts in Mathematics, 88. Studies in the History of Modern Science, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[RTW] Renard, J.-F.; Tignol, J.-P.; Wadsworth, A. R. Graded Hermitian forms and Springer's theorem. *Indag. Math. (N.S.)* **18** (2007), no. 1, 97–134.

[R] Ribenboim, P. Le Théorème d'Approximation pour les Valuations de Krull. *Math. Z.* **68** (1957), 1–18.

[Ro] Roquette, P. History of valuation theory I. *Valuation theory and its applications,* Vol. I (Saskatoon, SK, 1999), 291–355, *Fields Inst. Commun.*, **32**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[Sch] Schilling, O. F. G. *The Theory of Valuations.* Mathematical Surveys, No. 4. American Mathematical Society, New York, N. Y., 1950.

[TW1] Tignol, J.-P.; Wadsworth A. R. Value functions and associated graded rings for semisimple algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362** (2010), 687–726.

[TW2] Tignol, J.-P; Wadsworth, A. R. Valuations on algebras with involution. *Math. Ann.*, **351** (2011), no. 1, 109–148.

[W1] Wadsworth, A. R. Extending valuations to finite-dimensional division algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.* 98 (1986), no. 1, 20–22.

[W2] Wadsworth, A. R. Dubrovin valuation rings and Henselization. *Math. Annalen*, **283** (1989), 301–328.

[W3] Wadsworth, A. R. Valuation theory on finite dimensional division algebras. *Valuation theory and its applications*, Vol. I (Saskatoon, SK, 1999), 385–449, Fields Inst. Commun., 32, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[Z] Zhao, Y. On the intersection property of Dubrovin valuation rings. *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), no. 10, 2825–2830.

Índice Remissivo