UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATíSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTíFICA

Aplicações Harmônicas e Martingales em Variedades

Fabiano Borges da Silva

Dissertação de Mestrado orientada pelo
Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino

Aplicações Harmônicas e Martingales em Variedades

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação de mestrado devidamente corrigida e defendida por Fabiano Borges da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 18 de fevereiro de 2005 .

Paulo Régis Caron Ruffino

Banca Examinadora:
1. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino
2. Dr. Pedro José Catuogno
3. Dr. Artur Oscar Lopes

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Dissertação de Mestrado defendida por **Fabiano Borges da Silva** e aprovada em **18** de **Fevereiro** de **2005** pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Dr. Paulo Régis Caron Ruffino

Dr. Pedro José Catuogno

Dr. Artur Oscar Lopes

Resumo

Este trabalho tem por finalidade explorar resultados de aplicações harmônicas, através do cálculo estocástico em variedades. Está organizado da seguinte forma: Nos dois primeiros capítulos são introduzidos conceitos e resultados sobre cálculo estocástico no $\mathbb{R}^n$, geometria diferencial e grupos de Lie. No terceiro capítulo temos as definições de aplicações harmônicas e a equação de Euler-Lagrange. E finalmente, no último, damos uma caracterização para aplicações harmônicas através de martingales, que será importante para explorar alguns resultados sobre aplicações harmônicas do ponto de vista do cálculo estocástico em variedades.

Abstract

In this work we explore results of harmonic mappings, via stochastic calculus in manifolds. The text is organized as follows: In the first two chapters, we introduce concepts and results about stochastic calculus in $\mathbb{R}^n$, differential geometry and Lie groups. In the third chapter we have the definitions of harmonic mappings and the Euler-Lagrange equation. Finally, in the last chapter, we give a characterization of harmonic mappings via martingales, this will be important to explore some results about harmonic mappings from the point of view of stochastic calculus in manifolds.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à DEUS por este sonho ter se tornado realidade.

Em segundo, quero agradecer ao meu orientador e amigo Ruffino, que nunca duvidou que eu seria capaz de me adequar ao programa de mestrado, mesmo tendo feito na graduação o curso de Licenciatura em Matemática (noturno). Ainda agradeço muito, pelas n vezes em que me ajudou com diversos tipos de problemas, sem perder a paciência, e ainda sendo modesto dizendo que a gente tem que saber mais matemática do que ele. E também ao Pedro Catuogno, que colaborou muito com a realização desta dissertação, e que também foi um amigo que me ajudou muito desde a época de graduação.

Sou eternamente grato a minha noiva (Lívia) que me ajudou muito no decorrer destes dois anos de mestrado, principalmente no primeiro semestre e posteriormente com o exame de qualificação. Peço desculpas pelos inumeráveis fins de semanas em que passei estudando e não pude lhe dar atenção.

A minha mãe eu não sei nem como agradecer, todas as palavras que tentar encaixar neste texto não serão suficientes para descrever o quanto eu a admiro e o quanto ela representa para mim. Ela tem sido mãe, pai, amiga,..., enfim, eu a amo muito e sou muito grato por tudo. Também devo muito ao meu pai, que mesmo nunca entendendo o que realmente faço, e o que representa a UNICAMP, me ensinou que podemos colher frutos maravilhosos através do trabalho, e que neste momento, mesmo passando por muitos problemas de saúde, me passa uma energia muito positiva.

Agradeço muito a minha irmã Fer, que sempre está preocupada, querendo saber se está correndo tudo bem comigo em termos de estudo, e que apesar de ser mais nova, dá ótimas orientações. E todos os demais parentes que de uma forma indireta também contribuíram muito na minha vida. Por fim, não poderia deixar de agradecer aos amigos: Israel, Leandro, Marquinho, Wellington, Rinaldo, Simão e Daniel Miranda.

Agradeço também à FAPESP pela bolsa de mestrado.

Fabiano Borges da Silva

18 de Fevereiro de 2004

Sumário

Introdução

O objetivo principal deste trabalho foi explorar alguns resultados de aplicações harmônicas através do cálculo estocástico. Entre eles, temos que dadas as aplicações harmônicas $\phi_j : M_j \to G$, $j = 1, 2, \ldots, n$, definidas em variedades riemannianas M_j e tomando valores num grupo de Lie com a métrica riemanniana bi-invariante, então o produto $\phi_1\phi_2 \ldots \phi_n$ é uma aplicação harmônica entre $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ e G.

Para isto, foi utilizada como ferramenta principal, a caracterização de que uma aplicação é harmônica se, e somente se, aplicada em qualquer movimento browniano, resulta num martingale. Portanto, boa parte deste projeto se destina a resgatar alguns conceitos de cálculo estocástico e da geometria diferencial necessários para estudar esta caracterização.

No primeiro capítulo apresentamos uma introdução ao cálculo estocástico, contendo as principais definições, exemplos e resultados considerados importantes. Entre eles, devemos destacar como essenciais para os capítulos posteriores a fórmula de Itô, propriedades da integral de Itô, da integral de Stratonovich e da variação quadrática.

Os focos do segundo capítulo são algumas definições da geometria diferencial e de grupos de Lie que foram utilizadas posteriormente. Uma delas, é a definição de fibrado induzido, que tem sua importância na construção conceitual de aplicação harmônica. Em seguida, temos a definição e algumas propriedades da forma de Maurer-Cartan, que se encontra na seção de grupos de Lie. Este será importante para o resultado sobre produto de aplicações harmônicas, que foi citado acima.

No terceiro capítulo abordamos a teoria de aplicações harmônicas do ponto de vista analítico, como ponto crítico de um funcional chamado de energia. Como parte desta teoria, foi estudada a definição de campo de tensão, a qual envolve, basicamente, os conceitos de fibrado e transporte paralelo. Por fim, daremos o resultado que uma aplicação é harmônica se, e somente se, satisfaz a equaçaõ de Euler-Lagrange.

O último capítulo é dedicado, num primeiro momento, às definições de martingales e movimentos brownianos numa variedade. Para tanto, foi utilizado um conceito de conexão a partir da aplicação hessiana, e através deste, ainda definimos aplicações afins, geodésicas e subvariedades totalmente geodésicas. Em seguida, caracterizamos as aplicações harmônicas através de martingales e exploramos alguns resultados de aplicações harmônicas citados acima.

Capítulo 1

Cálculo Estocástico em $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo daremos uma introdução à analise estocástica. Primeiramente estaremos abordando algumas definições básicas da teoria de probabilidade necessárias para definir movimento browniano, martingale e integral de Itô. Em seguida, trabalharemos com a fórmula de Itô para obter alguns resultados que serão necessários para o último capítulo. As principais referências são Oksendal [10], Protter [11] e Revus e Yor [12].

1.1 Introdução à Teoria de Probabilidade

Apresentaremos de forma sucinta os conceitos fundamentais da teoria de probabilidade. Dado Ω um conjunto, uma $\sigma-$*álgebra* $\mathcal{F}$ em Ω é uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω com as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^c \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

O par $(\Omega, \mathcal{F})$ é dito espaço mensurável. Uma *medida de probabilidade* P em $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma função $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ tal que:

1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$

2. Dados $A_1, A_2, \dots A_n, \dots \in \mathcal{F}$ disjuntos então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$$

A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é denominado *espaço de probabilidade*. É usual denominar Ω como espaço amostral, um conjunto $A \in \mathcal{F}$ como *evento* e $P\left(A\right)$ como a probabilidade do evento A. Dado $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, diremos que uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é *mensurável* se:

$$X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$$

para todo aberto $U \in \mathbb{R}^n$. Dada uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, então a $\sigma-$álgebra $\mathcal{H}_X$ gerada por X é a menor $\sigma-$álgebra contendo os conjuntos:

$$X^{-1}\left(U\right),\ U \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto.}$$

Por *variável aleatória* (randômica) entenderemos uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mensurável. Uma variável aleatória induz a medida de probabilidade μ_X em $\mathbb{R}^n$

$$\mu_X(U) = P(X^{-1}(U)) = P_*(U),$$

$\mu_X\left(U\right)$ é denominada distribuição de X. A integral

$$E\left[X\right] = \int_{\Omega} X(w)dP(w) = \int_{\mathbb{R}^n} xd\mu(x),$$

quando existe, é denominada *esperança* da variável aleatória X. Dados dois eventos A e B $\in \mathcal{F}$ eles são ditos independentes se

$$P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) P\left(B\right).$$

Dadas duas $\sigma-$álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ elas são ditas independentes se dados quaisquer dois eventos $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ eles forem independentes. Finalmente dada uma família de variáveis aleatórias $\{X_i; i \in I\}$ é independente se a família de σ-álgebras $\mathcal{H}_{X_i}$, é independente.

Proposição 1.1. *Se duas variáveis aleatórias X, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ são independentes, e se $E\left[|X|\right] < \infty$ e $E\left[|Y|\right] < \infty$, então*

$$E\left[XY\right] = E\left[X\right] E\left[Y\right].$$

1.1.1 Processos estocásticos

O que fizemos até agora foi bastante estático. Um processo estocástico é um fenômeno que evolui no tempo de uma maneira randômica, ou seja, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias indexadas pelo tempo.

Definição 1.2. *Seja T um conjunto. Um processo estocástico X é uma família de aplicações mensuráveis X_t com $t \in T$ de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tomando valores em $(E, \mathcal{E})$, onde E é dito espaço de estados e $\mathcal{E}$ é uma $\sigma-$álgebra sobre E.*

Para todo $\omega \in \Omega$, a aplicação $t \to X_t(\omega)$ é uma curva em E, que chamaremos de trajetória de X.

Observação 1.3. *No que segue, sempre tomaremos $T = \mathbb{R}_+$ e $(E, \mathcal{E}) = \mathbb{R}^n$ com a $\sigma-$álgebra de Borel (neste caso é comum denotar um processo estocástico por $(X_t)_{t\geq 0}$).*

Daremos agora uma definição de quando um processo é quase sempre contínuo.

Definição 1.4. *Seja $X : T\times\Omega \to E$, um processo estocástico, sendo T e E espaços topológicos. Dizemos que X é quase sempre contínuo (q.s. contínuo) se*

$$P\{\omega : \text{ a trajetória } t \to X_t(\omega) \text{ é contínua}\} = 1.$$

Precisamos de definições de igualdades entre dois processos estocásticos. Para isto, devemos antes definir as distribuições finito-dimensionais de um processo.

Definição 1.5. *Dada uma seqüência $(t_1, \ldots, t_n)$ de tempos e $(A_1, \ldots, A_n)$ uma seqüencia A_i de abertos de $\mathbb{R}^n$, definimos a distribuição finito-dimensional $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ por*

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1, \ldots A_n) = P(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{tn} \in A_n)$$

Dados dois processos X e X' definidos respectivamente dos espaços de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ tomando valores no mesmo espaço de estados, eles são ditos *equivalentes* se as probabilidades finito-dimensionais forem iguais:

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n} = \mu'_{t_1,\ldots,t_n}.$$

Diremos então que temos *versões* do mesmo processo. Estamos agora interessados na construção de processos estocásticos X, a partir de distribuições finito-dimensionais $\nu_{t_i,\ldots,t_k}$.

Teorema 1.6 (de extensão de Kolmogorov). *Para todo* $t_1, ..., t_k \in T$*,* $k \in \mathbb{N}$ *, seja* $\nu_{t_i,...,t_k}$ *uma medida de probabilidade em* $(\mathbb{R}^n)^k$ *, tal que, para toda permutação* σ *de* $\{1, ..., k\}$*,*

$$\nu_{t_{\sigma(1)},...,t_{\sigma(k)}} (F_1, ..., F_k) = \nu_{t_1,...,t_k} \left(F_{\sigma^{-1}(1)}, ..., F_{\sigma^{-1}(k)}\right) \tag{1.1}$$

e

$$\nu_{t_1,...,t_k} (F_1 \times ... \times F_k) = \nu_{t_1,...,t_k,...,t_{k+m}} (F_1 \times ... \times F_k \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n) \tag{1.2}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$*. Então existe um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e um processo estocástico* X*, tal que*

$$\nu_{t_1,...,t_k} (F_1 \times ... \times F_k) = P\{X_{t_1} \in F_1, ..., X_{t_k} \in F_k\},$$

para todo $t_i \in T$*,* $k \in \mathbb{N}$ *e todo aberto* F_i *de* $\mathbb{R}^n$*.*

1.2 Movimento Browniano

O exemplo básico de movimento browniano é o movimento de partículas de pólen num líquido. Este fenômeno foi descoberto pelo botânico inglês R. Brown em 1827 e se deve às constantes colisões do pólen com as partículas, bem menores, do líquido. Para descrever matematicamente o movimento é natural usar o conceito de processos estocástico para $B_t(\omega)$, como sendo a posição no tempo t da partícula de pólen ω.

Observação 1.7. *O movimento browniano n-dimensional é a n-upla* $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, ..., B_t^{(n)})$*, onde* $\{B_t^{(j)}\}_{t\geq 0}, 1 \leq j \leq n$*, é um movimento browniano 1-dimensional.*

Para construir $\{B_t(\omega)\}_{t\geq 0}$ é suficiente, pelo teorema de extensão de Kolmogorov, encontrar uma família de probabilidades $\{\nu_{t_1,...,t_k}\}$ satisfazendo as equações (1.1) e (1.2). Sendo assim, fixando $x \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$p(t, x, y) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right), \text{ para } y \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Então, dados $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ definimos

$$\nu_{t_1,...,t_k} (F_1 \times ... \times F_k) =$$

$$= \int_{F_1\times...\times F_k} p(t_1, x, x_1)\, p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k)\, dx_1 \cdots dx_k \tag{1.3}$$

onde dx_i é a medida de Lebesgue e $p(0,x,y)dy$ é o ponto de massa unitário em x. Em seguida estendemos esta definição para toda sequência de $t_i's$ usando (1.1). Como $\int_{\mathbb{R}^n} p\,(t,x,y)\,dy = 1$ para todo $t \geq 0$, a equação (1.2) é satisfeita, e portanto pelo teorema de extensão de Kolmogorov existe o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$ e o processo estocástico $\{B_t\}_{t\geq 0}$ em Ω tal que a distribuição finito-dimensional de B_t é dada por (1.3), ou seja,

$$P^x\left(B_{t_1} \in F_1, ..., B_{t_k} \in F_k\right) =$$

$$= \int_{F_1\times...\times F_k} p\,(t_1, x, x_1)\,p\,(t_2 - t_1, x_1, x_2)\ldots p\,(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k)\,dx_1 \cdots dx_k. \tag{1.4}$$

Observe que $P^x(B_0 = x) = 1$. Tal processo é uma versão do movimento browniano iniciado em x. Ele não é único, existem várias quádruplas $(B_t, \Omega, \mathcal{F}, P^x)$ que satisfazem (1.4), o que não causará maiores problemas para nossos propósitos, apenas escolheremos alguma versão para trabalhar. O seguinte teorema é importante para responder se o movimento browniano é contínuo.

Teorema 1.8 (de continuidade de Kolmogorov). *Suponha que o processo $X = \{X_t\}_{t>0}$ satisfaz a condição: para todo $T > 0$ existem constantes α, β, D, tais que*

$$E\left[|X_t - X_s|^\alpha\right] \leq D\,|t-s|^{1+\beta}\,,\ \textit{para}\ 0 < s, t < T$$

então existe uma modificação contínua de X.

Para o movimento browniano B_t em $\mathbb{R}^n$, não é difícil provar que

$$E^x\left[|B_t - B_s|^4\right] \leq 3n^2\,|t-s|^2\,,$$

e que portanto tem uma modificação contínua. Daqui em diante estaremos assumindo que B_t é a tal versão contínua. Para maiores detalhes ver Oksendal [10] ou Revuz e Yor [12].

Propriedades do movimento browniano.

Para um processo $\{B_t\}_{t\geq 0}$ em $\mathbb{R}$, $T = [0, +\infty)$, e $0 \leq s < t < u < v$, para $s, t, u, v \in [0, +\infty)$ temos que (assumindo $B_0 \equiv 0$):

(B1) O incremento $B_t - B_s$ é um processo gaussiano $N(0, (t-s))$. Em particular,

$$E\left[B_t\right] = E\left[B_t - B_0\right] = 0 \text{ e } E\left[(B_t)^2\right] = t.$$

(B2) B tem incrementos independentes, isto é,

$$E\left[\left(B_t - B_s\right)\left(B_v - B_u\right)\right] = E\left[\left(B_t - B_s\right)\right]\, E[\left(B_v - B_u\right)].$$

E ainda, como uma consequência deste, temos também que para $s < t$:

$$E\left[B_s B_t\right] = E\left[B_s\left(B_s + B_t - B_s\right)\right] = E\left[\left(B_s\right)^2\right] + E\left[\left(B_s - B_0\right)\left(B_t - B_s\right)\right] = s = \inf(s,t),$$

(para tais resultados veja Revuz e Yor [12]).

Com relação a um movimento browniano n-dimensional $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, ..., B_t^{(n)})$ em $\mathbb{R}^n$, estas propriedades que acabamos de apresentar, também valem para cada coordenada B_t^i. O que precisamos acrescentar para o leitor, é que os movimentos brownianos de coordenadas diferentes são independentes (veja Oksendal [10]).

1.3 Martingales

1.3.1 Filtrações

Definição 1.9. *Uma filtração num espaço mensurável* $(\Omega, \mathcal{F})$ *é uma família crescente* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de* $\sigma-$*álgebras de* $\mathcal{F}$*, em outras palavras, para cada t,* $\mathcal{F}_t$ *é uma* $\sigma-$*álgebra e* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ *se* $s < t$*. Um espaço mensurável* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dotado de uma filtração* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *é dito um espaço filtrado.*

Definição 1.10. *Um processo* X *de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *é dito adaptado à filtração* $(\mathcal{F}_t)$ *se* X_t *é* $\mathcal{F}_t$ *mensurável para todo* t*.*

Todo processo estocástico X é adaptado à filtração natural $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\left(X_s, s \leq t\right)$, isto é, gerado pela família $\{X_s^{-1}(U_i), U_i \in \mathcal{F}_s, s \leq t\}$, e $\mathcal{F}_t^0$ é a menor filtração à qual X é adaptada. Dizer que X é adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}$ é o mesmo que dizer que $\mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_t$ para cada t (veja Revuz e Yor [12]). É a introdução de uma filtração que permite interpretar o parâmetro t realmente como tempo. Heuristicamente, a $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}_t$ é a coleção de eventos que poderiam ter ocorrido antes ou no tempo t, ou de outra forma, o conjunto de todos os possíveis passados até o tempo t. Dada uma filtração $(\mathcal{F}_t)$, podemos associar duas outras filtrações

$$\mathcal{F}_{t^-} = \bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s \text{ e } \mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

Daí, claramente, temos

$$\mathcal{F}_{t^-} \subseteq \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t^+}$$

Pode-se pensar, ainda, em $\mathcal{F}_t$ como o conhecimento adquirido por um observador. Assim, por exemplo, dadas duas filtrações $\mathcal{F}_t$ e $\mathcal{G}_t$ tais que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, podemos interpretar as duas filtrações como o conhecimento que dois observadores podem adquirir até o tempo t, sendo o $\mathcal{G}_t-$ observador mais perspicaz do que o $\mathcal{F}_t-$ observador. Seguindo nesta linha, o $\mathcal{F}_{t^+}-$ observador pode prever o futuro imediato.

1.3.2 Esperança condicional

Dado X uma variável aleatória $\mathcal{F}$-mensurável e $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ uma sub-σ-álgebra. Então, a *esperança condicional* $E[X|\mathcal{A}]$ de X em relação a $\mathcal{A}$ é a variável aleatória (única quase sempre) que satisfaz:

- $E[X|\mathcal{A}]$ é $\mathcal{A}-$mensurável;
- $\int_A E[X|\mathcal{A}]\, dP = \int_A X dP$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Intuitivamente $E[X|\mathcal{A}]$ é a esperança da variável aleatória X sabendo que os eventos $A \subset \mathcal{A}$ ocorrerão.

1.3.3 Tempo de parada

Como o próprio nome diz, tempo de parada é frequentemente usado com a finalidade de parar um determinado processo. Formalmente, temos:

Definição 1.11. *Dado um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ equipado com uma filtração $\{\mathcal{F}_t\}$, uma variável aleatória T é um tempo de parada da filtração se o evento*

$$\{T \leq t\} = \{\omega : T(\omega) \leq t\}$$

pertence à $\sigma-$ álgebra $\mathcal{F}_t$ para todo $t \geq 0$.

O exemplo abaixo é paradigmático. **Exemplo:** Dado E um espaço métrico, $A \subset E$

fechado e X, um processo de trajetórias contínuas que é adaptada à filtração $\{\mathcal{F}_t\}$, definimos o tempo de "batida"

$$H_E(\omega) = \inf\{t \geq 0, X_t(\omega) \in A\}$$

Então $H_E(\omega)$ é um tempo de parada.

1.3.4 Martingales

Definição 1.12. *Dada $\mathcal{F}_t$ uma filtração em $(\Omega, \mathcal{F})$ e X_t um processo $\mathcal{F}_t$ adaptado, X_t é um $(\mathcal{F}_t)-$martingale (respectivamente supermartingale, submartingale), se*

1. $E[|X_t|] < \infty$;
2. $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$, *quase sempre, para todo $s < t$ (respectivamente $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$, respec. $\geq X_s$).*

Definição 1.13. *Um martingale local é um processo adaptado contínuo X tal que cada (novo processo) $X_{\min\{T_n,t\}}$ é um martingale, onde T_n é o tempo de parada* $\inf\{t : |X_t| \geq n\}$.

Quando temos que para os processos X, Y a diferença $X - Y$ é um martingale local, denotaremos por $X \overset{m}{=} Y$. **Exemplo:** Dado (B_t) um movimento browniano, então são martingales:

1. B_t;
2. $(B_t)^2 - t$;
3. $\exp\left(B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.4 Integral de Itô

1.4.1 Variação finita

Seja $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua (à direita), e denotamos por A_t seu valor em t. E tome $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t\}$ como sendo uma partição de $[0, t]$ e o seu módulo dado por $|\mathcal{P}| = \sup |t_{i+1} - t_i|$. Dizemos então que a função A tem *variação finita* se, para todo t,

$$S_t = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left|A_{t_{i+1}} - A_{t_i}\right| < \infty.$$

Neste caso S_t é a variação total de A até o tempo t. Dada uma função de variação finita, podemos construir uma teoria de integração: a integral de Stieltjes. Para isso, consideraremos uma função f mensurável e localmente limitada, então

$$\int_0^t f(s)\, dA(s) := \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum f(t_i) \left(A_{t_i} - A_{t_{i-1}}\right).$$

A função $\int f dA$ também tem variação finita.

Definição 1.14. *Um processo X é de variação finita (respectivamente crescente) se é adaptado e suas trajetórias $t \mapsto X_t(\omega)$ são finitas, contínuas à direita e de variação finita (crescente) para quase todo ω.*

Definimos um *semimartingale* como sendo a soma de um martingale contínuo e um processo de variação finita, que possui uma única decomposição (chamada de *decomposição de Doob-Meyer*)

$$X = M + A$$

onde M é um martingale contínuo e A um processo de variação finita.

Proposição 1.15. *Um semimartingale que se decompõe em um martingale contínuo e um processo de variação finita crescente é um submartingale (veja Emery [5]).*

Teorema 1.16. *Dado M um martingale contínuo. Se M tem variação finita, então M é constante (veja Revuz e Yor, Teorema 1.2, página 114).*

Com este teorema é fácil verificar que a decomposição de um semimartingale é unica, pois se supuzermos que existe outra, $X = N + B$ (N um martingale, B processo de variação finita) então

$$M - N = B - A,$$

mas $M - N$ é um martingale, e como podemos supor $M_0 \equiv 0$ (e portanto $N_0 \equiv 0$), temos pelo teorema que $M - N \equiv 0$ e assim que $M = N$ e $A = B$. Além disso, voltando para a integral de Stieltjes, já que as trajetórias não têm variação finita, podemos concluir que a integração trajetória a trajetória como possível definição para integral estocástica, não é apropriada se a integral for feita em relação à um martingale. Sendo assim, necessitaremos de um outro tipo de variação para definirmos uma teoria de integração com relação a um martingale.

1.4.2 Variação quadrática

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dizemos que f tem *variação quadrática* finita se, para todo t

$$V_t = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum \left(f\left(t_{i+1}\right) - f\left(t_i\right)\right)^2 < \infty.$$

Dizemos que um processo estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ tem variação quadrática finita se, existe um processo crescente $[X,X]_t$ tal que, para todo t e todo $|\mathcal{P}|$ com ($|\mathcal{P}| \to 0$), temos

$$\mathbb{P} - \lim_{n\to\infty} \sum_i \left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)^2 = [X,X]_t.$$

Teorema 1.17. *Todo martingale contínuo e limitado M é de variação quadrática finita (veja [12]).*

Proposição 1.18. *Se um dos processos $(A_t)_{t\geq 0}$ ou $(B_t)_{t\geq 0}$ é de variação finita, então*

$$[A,B]_t = 0.$$

Teorema 1.19. *(Caracterização de Lévy) Dado um movimento browniano n-dimensional $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, ..., B_t^{(n)})$ em $\mathbb{R}^n$, então $[B_t^i, B_t^j] = t\delta_{ij}$ (ver [12]).*

Definimos então, para os martingales contínuos M e N, a variação quadrática:

$$[M,N] = \frac{1}{4}([M+N, M+N] - [M-N, M-N]).$$

Temos que a variação quadrática [,] é um "produto interno"nos martingales, a valores nos processos crescentes, isto é:

1. Bilinear;
2. Simétrico;
3. $[M,M] = 0$ então M é uma variável aleatória constante no tempo.

Proposição 1.20. *Se M, N são martingales contínuos, então $MN - [M,N]$ é martingale contínuo.*

Tomemos os seguintes conjuntos que serão importantes na definição de integral estocástica que veremos na próxima seção:

1. .$\mathbb{H}^2$ = martingales limitados em L^2, isto é, espaço dos martingales
$$\sup_t E\left[M_t^2\right] < \infty.$$
2. $H^2 \subset \mathbb{H}^2$ = martingales contínuos.

3. $H_0^2 \subseteq \mathbb{H}^2 =$ martingales contínuos com $M_0 \equiv 0$.

Quando $M \in \mathbb{H}^2$ temos que existe $M_\infty = \sup_t |M_t| \in L^2$ tal que $M_t = E\left[M_\infty | \mathcal{F}_t\right]$. $\mathbb{H}^2$ é um espaço de Hilbert com a norma

$$\|M\|_{\mathbb{H}^2} = E\left[M_\infty^2\right]^{\frac{1}{2}} = \lim_{t\to\infty} E\left[M_t^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

e H^2 é fechado em $\mathbb{H}^2$ (veja [12]).

1.4.3 Integral estocástica

Apresentaremos agora nossa classe de integrandos via integral de Stieltjes, uma vez que $[M, M]$ é de variação finita (ver Emery [5], cap. I, pág. 5).

Definição 1.21. *Dado $M \in H^2$, denominamos $\mathcal{L}^2(M)$ o espaço dos processos K adaptados e contínuos à direita, tais que*

$$\|K\|_M^2 = E\left[\int_0^\infty K_s^2 d\,[M, M]_s\right] < \infty$$

e por $L^2(M)$, o conjunto das classes de equivalência de $\mathcal{L}^2(M)$, definidas pela seguinte relação:

$$P \sim Q \Leftrightarrow \int |P - Q|^2 d[M, M] = 0$$

onde $P, Q \in \mathcal{L}^2(M)$.

Teorema 1.22. *Dado $M \in H^2$, para cada $K \in L^2(M)$, existe um único elemento de H_0^2 denotado por $K \cdot M$ tal que*

$$[K \cdot M, N] = K \cdot [M, N]$$

para todo $N \in H^2$ (ver [12]).

Definição 1.23. *O martingale $K \cdot M$ é denominado integral estocástica (ou integral de Itô) de K com respeito M e geralmente é denotada por*

$$\int_0^t K_s dM_s.$$

Observação 1.24. *Por construção temos que a integral de Itô em relação a um martingale é um martingale. A recíproca também é verdadeira, todo martingale pode ser representado por uma integral de Itô (ver Oksendal [10]).*

Agora que já temos a definição de uma integral com relação a um martingale, naturalmente podemos definir a integral de um semimartingale X, já que ele se decompõe num martingale M e mais um processo de variação finita A. Ou seja,

$$\int KdX = \int KdM + \int KdA,$$

onde esta última integral, do lado direito, é a integral de Stieltjes.

Teorema 1.25 (Fórmula de Itô). *Dado $F \in C^2\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$ e $X = \left(X^1, ..., X^d\right)$ um semimartingale contínuo em $\mathbb{R}^d$. Então $F(X)$ é um semimartingale contínuo e*

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_i \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s)\, dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\, [dX_s^i, dX_s^j].$$

Corolário 1.26 (Integração por partes). *Se X e Y são dois semimartingales contínuos, então*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + [X, Y]_t$$

Em particular

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + [X, X]_t \ .$$

Exemplo: Como o movimento browniano B é um semimartingale, temos que:

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right).$$

Mostraremos agora uma proposição que será muito útil para o último capítulo desta dissertação.

Proposição 1.27. *Para os movimentos brownianos B^1, B^2 independentes, temos que para quaisquer funções F, $G \in C^\infty$, a variação quadrática $[F(B^1), G(B^2)]$ é nula.*

Demonstração: Utilizando a fórmula de Itô para F e G temos que:

$$F\left(B_t^1\right) = F\left(B_0^1\right) + \int_0^t \frac{dF}{dt}\left(B_s^1\right) dB_s{}^1 + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2F}{dt^2}\left(B_s^1\right) dt$$

e também,

$$G\left(B_t^2\right) = G\left(B_0^2\right) + \int_0^t \frac{dG}{dt}\left(B_s^2\right) dB_s{}^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2G}{dt^2}\left(B_s^2\right) dt.$$

Para obtermos $[F(B^1), G(B^2)]_t = 0$ basta usar a bilinearidade de $[\ ,\ ]$, o Teorema 1.22 , a hipótese que $[B^1, B^2] = 0$ e a Proposição 1.18 (veja exemplos a seguir). $\square$

Exemplos:

1.
$$\left[\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2F}{dt^2}\left(B_s^1\right)dt, \int_0^t \frac{dG}{dt}\left(B_s^2\right)dB_s^{\,2}\right] = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2F}{dt^2}\left(B_s^1\right)\frac{dG}{dt}\left(B_s^2\right)\, d[t, B_s^2] = 0.$$

2.
$$\left[\int_0^t \frac{dF}{dt}\left(B_s^1\right)dB_s^{\,1}, \int_0^t \frac{dG}{dt}\left(B_s^2\right)dB_s^{\,2}\right] = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{dF}{dt}\left(B_s^1\right)\frac{dG}{dt}\left(B_s^2\right)\, d[B_s^1, B_s^2] = 0.$$

Definição 1.28. *Dados dois semimartingales X, Y, definimos a integral de Stratonovich de X em relação a Y, a qual denotaremos por $\int X \circ dY$, pela relação:*

$$\int X \circ dY = \int X dY + \frac{1}{2}\left[X, Y\right].$$

Proposição 1.29. *Para $F \in C^3\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$ e $X = \left(X^1, ..., X^d\right)$ um semimartingale contínuo em $\mathbb{R}^d$, temos a seguinte fórmula para mudança de variável (ou fórmula de Itô para a integral de Stratonovich):*

$$F \circ X_t = F \circ X_0 + \sum_i \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(X_s\right) \circ dX_s^{\,i}.$$

Note que esta fórmula tem a mesma característica da fórmula ordinária para mudança de variáveis, sendo assim, podemos trabalhar com a integral de Stratonovich, formalmente, como se o integrando fosse um termo determinístico, o que já não acontece com a integral de Itô. Por outro lado, a integral de Stratonovich com relação a um martingale não é necessariamente um martingale, como as integrais de Itô. Portanto, estaremos usando aquela que for mais adequada em cada situação.

1.5 Equações Diferenciais Estocásticas (EDE)

Sejam $Y = (Y^1, ..., Y^n)$ um semimartingale e $f_1, ..., f_n : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ campos de vetores. Então, definimos a *equação diferencial estocástica*

$$\begin{cases} dX_t = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\left(t, X_t\right) dY_t^k \\ X_0 = X\left(0\right) \end{cases} \tag{1.5}$$

ou em notação vetorial

$$dX_t = F\left(t, X_t\right) dY_t$$

sendo

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^{d+n} = M_{d\times n} \\ (t, x) &\rightarrow \left(f_1\left(t, x\right), ..., f_n\left(t, x\right)\right) \end{aligned}$$

Dizemos que o processo $(X_t)_{t\geq 0}$ é solução da equação diferencial se

$$X_t = X_0 + \int_0^t F\left(s, X_s\right) dY_s$$

Detalhes sobre a unicidade da equação (1.5), a menos de indistinguibilidade, pode ser encontrado em Protter [11] ou Revuz e Yor [12].

Capítulo 2

Geometria Diferencial e Grupos de Lie

Neste capítulo, estaremos abordando alguns tópicos que serão importantes no contexto de capítulos posteriores. Entre eles, destacamos a definição de fibrado induzido, que será usado diretamente na definição de aplicações harmônicas e a introdução da forma de Maurer-Cartan, que será relevante para o resultado que conheceremos como produto de aplicações harmônicas num grupo de Lie. Foram utilizadas as referências Kobayashi e Nomizu [9], Manfredo [1], e Urakawa [14]. Para uma variedade diferenciável M, denotaremos por T_pM o conjunto de vetores tangentes a M no ponto p. Se $(x^1, ..., x^n)$ é um sistema de coordenada local em p, dada uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, com $\alpha(0) = p$, e a função $f \in C^\infty(M)$, o vetor tangente $\alpha'(0)$ em p tem a forma

$$f \mapsto \alpha'(0)\ f = \left(\sum_i (x^i)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_0 \right) f.$$

Onde $(\partial/\partial x^i)_0$ é vetor tangente em p à curva coordenada x^i.

2.1 Fibrados

Citaremos agora as definições de fibrado vetorial, induzido e tangente. Para tais definições foi utilizado o livro Urakawa [14]. O leitor, que estiver interessado em explorar ainda mais a estrutura e outros exemplos de fibrados, pode utilizar como uma boa referência, o Kobayashi e Nomizu [9].

2.1.1 Fibrado vetorial, induzido e tangente.

Definição 2.1. *Sejam E e M variedades C^k. Dizemos que E é um fibrado vetorial C^k sobre M se*

(i) *existe uma aplicação $\pi : E \to M$, C^k (chamada de projeção);*

(ii) *para cada $p \in M$, $E_p := \pi^{-1}(p)$ (chamado de fibra sobre p) tem uma estrutura de espaço vetorial;*

(iii) *(trivialidade local) para cada ponto $p_0 \in M$, existe uma vizinhança U em M de p_0 e um difeomorfismo Ψ, C^k, de $U \times E_{p_0}$ sobre $\pi^{-1}(U)$ tal que*

$$\pi(\Psi(p, v)) = p, \quad p \in U,\ v \in E_{p_0},$$

e para cada $p \in U$, a aplicação $E_{p_0} \ni v \mapsto \Psi(p, v) \in E_p$ é um isomorfismo linear entre os espaços vetoriais E_{p_0} e E_p.

Definição 2.2. *Dado um fibrado vetorial C^k, $\pi : E \to M$ e uma aplicação C^k, $\phi : M' \to M$, onde M' é outra variedade C^k, podemos construir o seguinte fibrado vetorial $\pi' : E' \to M'$*

$$E' := \{(p', v) \in M' \times E; \phi(p') = \pi(v)\}, \quad \pi'((p', v)) := p' .$$

Isto é, a fibra deste fibrado sobre $p' \in M'$ é a fibra de E sobre $\phi(p')$ (denotada por $E'_{\phi(p')}$). Denotaremos E' por $\phi^* E$ ou $\phi^{-1}E$ e o chamaremos de fibrado vetorial induzido de E por ϕ. Sua trivialidade local segue do fato que

$$\phi^{-1}(U) \times E_{\phi(p_0)} \cong (\pi')^{-1}(\phi^{-1}(U)) \text{ se } U \times E_{\phi(p_0)} \cong \pi^{-1}(U).$$

$$\begin{array}{ccc} \phi^{-1}E & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle \pi'} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \pi} \\ M' & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

Definição 2.3. *Para o fibrado vetorial C^k, $\pi : E \to M$, uma aplicação C^k $s : M \to E$ é uma seção se $\pi \circ s = id$, isto é, $\pi(s(p)) = p$, $p \in M$. Uma seção s para o fibrado induzido $\phi^{-1}E$, é uma aplicação $s : M' \to E$ tal que $s(p') \in E_{\phi(p')}$, $p' \in M'$.*

2.1.2 Campos de vetores

Definição 2.4. *Para uma variedade C^{k+1}, seja $T(M) := \cup_{p \in M} T_pM$, e defina $\pi : T(M) \to M$ por $\pi(T_p(M)) = p$. Não é difícil verificar que esta aplicação π é um fibrado vetorial C^k. E ao conjunto TM, chamamos de fibrado tangente.*

Definição 2.5. *Um campo de vetores C^k numa variedade M (C^{k+1}) é uma seção X, isto é, uma aplicação $X : M \to T(M)$, C^k, tal que $\pi \circ X = id$ (ou seja, $X(p) \in T_pM$, $p \in M$). O valor $X(p)$ de X no ponto p também será denotado por $X_p \in T_pM$.*

Um campo de vetores X age em funções por $Xf(p) = X_pf$. Assim, os campos são exatamente operadores diferenciáveis de primeira ordem com termos não constantes. Daremos agora uma versão da fórmula de Leibniz para campos de vetores, que pode ser vista com maiores detalhes em Emery [5].

Proposição 2.6. *Uma aplicação $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ é um campo de vetores se e somente se, para todo $p \in M$,*

$$X_p(f^2) = 2f(p)X_pf.$$

Mais geral ainda, temos a seguinte fórmula para mudança de variável: Seja $(f^1, ..., f^p)$ é um sistema de p funções em M e $\phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, então

$$X_p(\phi \circ (f^1, ..., f^p)) = \sum_i D_i\phi \circ (f^1, ..., f^p)X_pf^i$$

onde D_i denota a derivada parcial da i-ésima variável.

2.2 Formas

Para $a \in M$, o espaço dual T_a^*M de T_aM é chamado de espaço cotangente de M em a, e seus elementos são chamados de formas diferenciais de grau 1 ou vetores cotangentes. Uma 1-forma muito comum em a é $df(a)$ (onde $f \in C^\infty$) definida por

$$(df(a), A) = Af \quad \text{para } A \in T_aM.$$

Em coordenada local $(x^1, ..., x^n)$, toda forma α em a pode ser escrita como

$$\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i(a)$$

onde α_i são funções em M. Quando $\alpha = df(a)$, então $\alpha_i = D_if(a)$. O conjunto $T^*M = \cup_{a \in M} T_a^*M$ é chamado de campos de vetores cotangentes ou simplesmente formas, onde uma forma é uma aplicação $\alpha : M \to T^*M$ tal que $\alpha(a) \in T_a^*M$ para cada $a \in M$.

2.2.1 Formas bilineares

Daremos nesta seção alguns resultados, que podem ser encontrados em Emery [5] , os quais serão utilizados posteriormente. Uma forma bilinear b é uma aplicação

$$b : M \to T^*M \otimes T^*M$$

tal que cada $b(a) \in T_a^*M \otimes T_a^*M$. Se A e B são vetores tangentes em a, então $b(A, B)$ ou $b(a)(A, B)$ denota o valor de b no ponto a agindo em A e B. Quando A, B são campos de vetores usaremos a mesma notação $b(A, B)$ para denotar a função $a \mapsto b(a)(A(a), B(a))$.

Lema 2.7. *Existe uma família finita de funções $\{h^1, ..., h^p\}$ em M (dim $M = n$) tal que toda forma bilinear pode ser escrita como uma soma finita*

$$b = \sum_{i,j} b_{ij} dh^i \otimes dh^j.$$

(Ver [5]).

Proposição 2.8. *O pull back de uma forma bilinear b em N pela aplicação $\phi : M \to N$ é a forma bilinear em M, denotada por $(d\phi^* \otimes d\phi^*)b$ e definida por*

$$(d\phi^* \otimes d\phi^*)b(p)(A, B) = b(\phi(p))(d\phi_a\ A, d\phi_a\ B).$$

Além disso,

(a) *se f é uma função em N, $(d\phi^* \otimes d\phi^*)(fb) = f \circ \phi(d\phi^* \otimes d\phi^*)b$;*

(b) *se α e β são formas em N, $(d\phi^* \otimes d\phi^*)(\alpha \otimes \beta) = (d\phi^*)\alpha \otimes (d\phi^*)\beta$;*

(c) *se temos uma outra aplicação entre variedades $\psi : N \to P$,*

$$d(\psi \circ \phi)^* \otimes d(\psi \circ \phi)^* = (d\phi^* \otimes d\phi^*)(d\psi^* \otimes d\psi^*).$$

2.3 Variedade Riemanniana

Definição 2.9. *Uma métrica riemanniana em uma variedade diferenciável M de dimensão n é uma correspondência g que associa a cada ponto $x \in M$ um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_x$ (ou seja, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente de M em x. Isto é,*

$$g : M \to (\ \langle , \rangle_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}\ )$$

dada por $g(x)(u, v) = \langle u, v\rangle_x$, onde $u, v \in T_xM$. E dizemos que uma variedade é riemanniana quando a variedade possui uma métrica riemanniana, e denotaremos por (M, g).

Seja $(U,(x^1,...,x^n))$ uma carta local em torno de $x\in U$ (ou sistema de coordenada), $U\subset M$. Se $\{X_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ é uma base natural de TU e $\{dx^i\}$ sua base dual, então $g=\sum_{i,j} g_{ij}dx^i\otimes dx^j$, onde $g_{ij}=g(X_i,X_j)$ são funcões $C^\infty(M)$. Além disso, iremos denotar os elementos da matriz inversa de $[g_{ij}]$ por g^{ij}. Para uma forma bilinear qualquer b e $\{e_i\}$ uma base ortonormal com relação a g, ambos no espaço tangente T_xM, definimos o seu traço (Tr b) como sendo $\sum_i b(e_i,e_i)$. E ainda temos que b pode ser escrito da forma $b=\sum_{i,j} b_{ij}dx^i\otimes dx^j$, onde $b_{ij}=b(X_i,X_j)$. Assim, no sistema de coordenada $(U,(x^1,...,x^n))$, podemos escrever para todo $1\leq i\leq n$,

$$e_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ X_j$$

e daí, pela bilinearidade,

$$\begin{aligned} b\ (e_i,e_i) &= b(a_{i1}X_1+...+a_{in}X_n,\ a_{i1}X_1+...+a_{in}X_n) \\ &= \sum_{k,\ l} a_{ik}\ a_{il}\ b_{kl}\ . \end{aligned} \tag{2.1}$$

ou matricialmente na base $\{X_i\}$

$$=\begin{bmatrix} a_{i1} & . & . & . & a_{in}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b(X_1,X_1) & . & . & . & b(X_1,X_n) \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ . & & & . & . \\ b(X_n,X_1) & . & . & . & b(X_n,X_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{i1} \\ . \\ . \\ . \\ a_{in}\end{bmatrix}.$$

Mas também temos, usando o fato que $g(e_i,e_i)=1$, a equação

$$\sum_{k,\ l} a_{ik}\ a_{il}\ g_{kl}=1.$$

Ou ainda,

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & . & . & . & a_{in}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} g(X_1,X_1) & . & . & . & g(X_1,X_n) \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ . & & & . & . \\ g(X_n,X_1) & . & . & . & g(X_n,X_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{i1} \\ . \\ . \\ . \\ a_{in}\end{bmatrix}=1\ .$$

O que implica

$$\begin{bmatrix} a_{i1}\ a_{i1} & a_{i1}\ a_{i2} & . & . & a_{i1}\ a_{in} \\ a_{i2}\ a_{i1} & a_{i2}\ a_{i2}. & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ a_{in}\ a_{i1} & . & & . & . \ a_{in}\ a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & . & . & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ g_{n1} & . & . & . & g_{nn} \end{bmatrix} = [Id]. \tag{2.2}$$

Logo, observando (2.1) e (2.2), temos que o traço de uma forma bilinear qualquer b, em (M, g), e em coordenada local, é dado por

$$\mathrm{Tr} b = \sum_{i,j} g^{ij}\ b_{ij}\ . \tag{2.3}$$

2.4 Conexão

Definição 2.10. *Seja $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de todos os campos em M. Definimos a conexão (derivada covariante) ∇ numa variedade M, C^∞, como sendo a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) & \rightarrow & \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(1) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(2) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

(3) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,

(4) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,

para $f \in C^\infty(M)$, X, Y, $Z \in \mathcal{X}(M)$.

Definição 2.11. *O comutador ou colchete $[X, Y]$ de dois campos X e Y, num ponto $x \in M$, é definido por*

$$[X, Y](x) = \frac{d}{dt}(d(X_{-t})_{X_t(x)}(Y(X_t(x))))_{|t=0}$$

onde X_t ($t \in \mathbb{R}$) é o fluxo do campo X.

Supondo M como um aberto de $\mathbb{R}^n$, o colchete de Lie, tem a seguinte expressão:

$$[X,Y](x) = dY_x(X(x)) - dX_x(Y(x)).$$

Pois os espaços T_xM e $\mathbb{R}^n$ se identificam, e portanto um campo de vetores passa a ser uma aplicação $X : M \to \mathbb{R}^n$.

Proposição 2.12. *Sejam $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e X, Y, campos de vetores. Então*

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf),$$

onde Xf é a derivada direcional de f em relação a X. E analogamente para Yf.

Definição 2.13. *A torsão T da conexão ∇ é definida como sendo um (1,2)-tensor tal que*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \quad X,Y \in \mathcal{X}(M).$$

Teorema 2.14. *Dada uma variedade riemanniana (M,g), existe uma única conexão ∇ em M satisfazendo, para X, Y, $Z \in \mathcal{X}(M)$, as seguintes condições:*

(i) ∇ é compatível com a métrica, isto é,

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z); \tag{2.4}$$

(ii) ∇ não tem torsão, isto é,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0. \tag{2.5}$$

E ainda usando o fato que ∇ é compatível com a métrica para X, Y, $Z \in \mathcal{X}(M)$, temos que:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]), \end{aligned} \tag{2.6}$$

A conexão dada pelo teorema acima é denominada *conexão de Lévi-Civita* de M (ver Manfredo [1]). Usando coordenadas locais $(U,(x^1,...,x^n))$, temos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U),$$

onde pela equação (2.6) e $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, as funções Γ_{ij}^k são dadas por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right).$$

Γ_{ij}^k é chamado de *símbolo de Cristoffel*. Somente para lembrar, estamos denotando os elementos da matriz inversa de $[g_{ij}]$ por g^{ij} e $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$.

Definição 2.15. *A curvatura de ∇ é um (1,3)-tensor definido por*

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

2.4.1 Transporte paralelo

Definição 2.16. *Para uma curva C^1 $\sigma : [a, b] \to M$, X é chamado de campo de vetores ao longo de σ se:*

(1) $X(t) \in T_{\sigma(t)}M$, para todo $t \in [a, b]$;

(2) se expressarmos $X(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t)(\frac{\partial}{\partial x_i})_{\sigma(t)}$ usando coordenadas locais $(U, (x^1, ..., x^n))$, então cada função $\xi_i(t)$ é C^1.

Definição 2.17. *Um campo de vetores X ao longo da curva C^1 $\sigma : [a, b] \to M$, é chamado de paralelo ao longo de σ se*

$$\nabla_{\alpha'(t)} X = 0, \quad t \in (a, b). \tag{2.7}$$

Um campo de vetores paralelo ao longo de σ é determinado unicamente pelo seu valor inicial $X(a)$ em $\sigma(a)$ da seguinte maneira: Em termos de coordenada local $(x^1, ..., x^n)$, escrevemos σ por $\sigma(t) = (\sigma_1(t), ..., \sigma_n(t))$, então temos $\sigma'(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i'(t)(\frac{\partial}{\partial x_i})_{\sigma(t)}$. Pelas propriedades (1)-(4) da definição de conexão, a equação (2.7) é equivalente a

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{jk}^i(\sigma(t))\frac{d\sigma_j(t)}{dt}\xi_k(t) = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Portanto, se é dada a condição inicial $(\xi_1(a), ..., \xi_n(a))$ em $p = \sigma(a)$, então $\xi_i(t)$ é determinado unicamente devido à existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias.

Em particular, o mesmo acontece para o valor $(\xi_1(b), ..., \xi_n(b))$ em $q = \sigma(b)$, e assim, $X(b)$ é determinado unicamente. Então, obtemos a seguinte correspondência

$$\begin{aligned} P_\sigma : T_{\sigma(a)}M &\rightarrow T_{\sigma(b)}M \\ X(a) &\longmapsto X(b) \end{aligned}$$

a qual é um isomorfismo linear e satisfaz

$$g_{\sigma(b)}(P_\sigma(u), P_\sigma(v)) = g_{\sigma(a)}(u, v), \quad u, v \in T_{\sigma(a)}M.$$

De fato, em (i) do Teorema 2.14, substituindo por Y, Z, dois campos de vetores paralelos ao longo de σ satisfazendo $Y(a) = u$, $Z(a) = v$ e $X = \sigma'(t)$, obtemos

$$\frac{d}{dt} g_{\sigma(t)}(Y(t), Z(t)) = g(\nabla_{\sigma'(t)}Y, Z) + g(Y, \nabla_{\sigma'(t)}Z) = 0$$

o que implica que $g_{\sigma(t)}(Y(t), Z(t))$ é constante em t. Esta aplicação é chamado de *transporte paralelo* ao longo de σ. Através do transporte paralelo podemos definir a derivada covariante ∇ do seguinte modo: Para $u \in T_pM$, $X \in \mathcal{X}(M)$ e $p \in M$,

$$\nabla_u X := \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, P_{\sigma_t}^{-1} X(\sigma(t)),$$

onde σ é uma curva C^1 em M tal que $\sigma(0) = p$, $\sigma'(0) = u$, e para todo t,

$$\sigma_t(s) := \sigma(s), \quad 0 \leq s \leq t.$$

$P_{\sigma_t} : T_pM \rightarrow T_{\sigma(t)}M$ é o transporte paralelo ao longo de σ_t, e portanto $P_{\sigma_t}^{-1}X(\sigma(t))$ uma curva C^1 em T_pM.

Definição 2.18. *Uma curva C^1 em M, $\sigma : I \rightarrow M$ é geodésica se*

$$\nabla_{\sigma'}\sigma' = 0, \tag{2.8}$$

para todo t do intervalo I.

Em coordenadas locais $(x^1, ..., x^n)$, denotando σ por $\sigma(t) = (\sigma_1(t), ..., \sigma_n(t))$ e $\sigma'(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i'(t)(\frac{\partial}{\partial x_i})_{\sigma(t)}$ temos da equação (2.8) que

$$\frac{d^2\sigma_i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \frac{d\sigma_j}{dt}\frac{d\sigma_k}{dt} = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{2.9}$$

2.4.2 Laplaciano Δ

Para definir o laplaciano Δ, precisamos das definições de divergência de um campo de vetores e do campo gradiente. Para tais definições, estaremos tomando uma variedade diferenciável M com a métrica riemanniana g.

Definição 2.19. *Para um campo (diferenciável) $X \in \mathcal{X}(M)$, definimos o divergente de X* $(\mathrm{div}(X) \in C^\infty(M))$ *por*

$$\mathrm{div}(X)(p) := \sum_{i=1}^{n} g(e_i, \nabla_{e_i} X)(p), \quad p \in M,$$

onde $\{e_i(x)\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal para (T_xM, g_x). Assim $\mathrm{div}(X)(p) = \mathrm{Tr}(\nabla X)(p)$.

Definição 2.20. *Para $f \in C^\infty(M)$, definimos o campo gradiente* $(\mathrm{grad} f \in \mathcal{X}(M))$ *sendo aquele que:*

$$g(Y, \mathrm{grad} f) = df(Y) = Yf, \quad Y \in \mathcal{X}(M)$$

Se escrevermos $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ em termos de coordenadas locais $(x^1, ..., x^n)$ então temos a seguinte expressão:

$$\mathrm{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{\overline{g}} X_i),$$

onde $\overline{g} = \det(g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}))$. E para o gradiente temos:

$$\mathrm{grad} f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definição 2.21. *Definimos o operador diferencial elíptico de segunda ordem agindo em $C^\infty(M)$, chamado de laplaciano, por*

$$\Delta\ f = \mathrm{div\ grad}\ f = \sum_{i=1}^{n} \left(e_i(e_i f) - (\nabla_{e_i} e_i) f\right), \quad f \in C^\infty(M).$$

Em termos de coordenadas locais,

$$\Delta\ f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).$$

O laplaciano depende da métrica riemanniana g, então escreveremos Δ_g quando for necessário ressaltar a métrica g.

2.5 Grupos de Lie

Um *grupo de Lie* é um grupo G com uma estrutura diferenciável tal que a aplicação $G \times G \to G$ dada por $(a, b) \longmapsto ab^{-1}$, a, $b \in G$, é diferenciável. Associado a um grupo de Lie existe uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$, que consiste num espaço vetorial munido de um produto (colchete) $[.,.] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ que satisfaz as propriedades:

a) bilinearidade;

b) anti-simetria;

c) Identidade de Jacobi: para A, B, $C \in \mathcal{G}$,

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]].$$

Um exemplo de álgebra de Lie é dado pelo espaço vetorial dos campos de vetores sobre uma variedade diferenciável munido do colchete de Lie de campos de vetores. Decorre da definição, que as translações à esquerda L_x e à direita R_x dadas por :

$$\begin{aligned} L_a &: G \to G, \text{ dada por } L_a(b) = ab; \\ R_a &: G \to G, \text{ dada por } R_a(b) = ba \end{aligned}$$

são difeomorfismos. Daí, a diferencial $d(L_g \circ R_{g^{-1}})_1 = d(R_{g^{-1}} \circ L_g)_1$, chamada de adjunta de g (e denotada por$Ad(g)$), é um isomorfismo na álgebra de Lie $\mathcal{G}$, pois as diferenciais de L_g e $R_{g^{-1}}$ também são isomorfismos.

2.5.1 Conexão invariante à esquerda ∇^L

Definição 2.22. *Dizemos que uma métrica riemanniana em G é invariante à esquerda se $\langle u, v\rangle_b = \langle d(L_a)_b u, d(L_a)_b v\rangle_{L_a(b)}$ para todo a, $b \in G$, u, $v \in T_bG$, isto é, se L_x é uma isometria. Analogamente definimos métrica riemanniana invariante à direita. Quando a métrica é invariante à direita e à esquerda ela é dita bi-invariante.*

Definição 2.23. *Um campo de vetores X em G é dito invariante à direita se para todo $g \in G$, $(R_g)_*X = X$ (de forma mais detalhada, $d(R_g)_h X(h) = X(hg)$ para todo g, $h \in G$). De forma análoga, X é invariante à esquerda se para todo $g \in G$, $(L_g)_*X = X$.*

Os campos invariantes à direita ou à esquerda são completamente determinados por seus valores na identidade e. Portanto cada elemento do espaço tangente T_1G determina um único campo invariante à direita e um único campo invariante à esquerda. Além disso, o conjunto dos campos invariantes à esquerda (denotaremos por $\mathcal{X}(L)$), é um subespaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$) do espaço de todos os campos de vetores em G, já que $(L_g)_*$ é uma aplicação linear sobre os campos de vetores. O mesmo acontece para os campos invariantes à direita ($\mathcal{X}(R)$).

Proposição 2.24. *Sejam X e Y campos invariantes à esquerda num grupo de Lie G. Então o colchete de Lie $[X,Y]$ é invariante à esquerda. A mesma afirmação vale para campos invariantes à direita.*

Proposição 2.25. *Os espaços vetoriais $\mathcal{X}(L)$ e T_1G são isomorfos (o mesmo vale para $\mathcal{X}(R)$ e T_1G).*

Em resumo, o que temos é que os espaços $\mathcal{X}(L)$ e $\mathcal{X}(R)$ são subálgebras da algebra de Lie de todos os campos de vetores de G (denotado por $\mathcal{X}(G)$). A álgebra de Lie do grupo G é qualquer uma das álgebras de Lie $\mathcal{X}(L)$ ou $\mathcal{X}(R)$. Daremos agora uma proposição que pode ser encontrada na referência Cheeger e Ebin [2].

Proposição 2.26. *Seja G um grupo de Lie com a métrica riemanniana bi-invariante. Então a conexão associada (Levi-Civita), a qual denotaremos por ∇^L e chamaremos de conexão invariante à esquerda, satisfaz $\nabla^L_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$ para campos invariantes à esquerda na álgebra de Lie $\mathcal{G}$.*

2.5.2 Forma de Maurer-Cartan ω

Nesta subseção, além da definição da forma de Maurer-Cartan, construíremos alguns resultados que serão necessários à abordagem de um teorema sobre produto de aplicações harmônicas num grupo de Lie G com a métrica riemanniana bi-invariante, que será apresentado formalmente no último capítulo desta dissertação.

Definição 2.27. *Seja G um grupo de Lie com a associada álgebra de Lie $\mathcal{G}$. Definimos a forma $\omega : G \to TG$ da seguinte maneira: Para $v \in T_gG$, então $\omega_g(v) = L_{g^{-1}*}(v)$. Esta forma ω chamamos de forma à esquerda de Maurer-Cartan. Ela corresponde a uma única 1-forma invariante à esquerda em $\mathcal{G}$.*

Lema 2.28. *Sejam G, H grupos de Lie, ω_G, ω_H suas formas de Maurer-Cartan respectivamente, e $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie. Então o pull-back $\varphi^*\omega_H$ satisfaz, para $v \in T_gG$:*

$$(\varphi^*\omega_H)v = \varphi_*(\omega_G(v)).$$

Demonstração: Como $\varphi(L_{g^{-1}}(h)) = L_{\varphi(g)^{-1}}(\varphi(h))$, pois φ é homomorfismo, temos pela regra da cadeia que

$$L_{\varphi(g)^{-1}*}(\varphi_*(v)) = \varphi_*(L_{g^{-1}*}(v))$$

e portanto

$$\omega_H(\varphi_*(v)) = \varphi_*(\omega_G(v)).$$

□

Para um grupo de Lie G, com uma conexão, a sua forma conexão ω é tal que $R_g^*\,\omega = Ad(g^{-1})\omega$ (veja Kobayashi e Nomizu [9]). Assim o pull-back da forma de Maurer-Cartan pelas operações multiplicação e inversa do grupo são dadas por:

Proposição 2.29. *Sejam $m : G \times G \to G$ a operação multiplicação e $i : G \to G$ a operação inversa do grupo. Então os pull-backs satisfazem:*

a) $m^*\omega = Ad^{-1}(\pi_2)(\pi_1^*\omega) + \pi_2^*\omega$;

b) $i^*\omega = -Ad\ \omega$.

onde π_1 e π_2 são projeções dadas por $\pi_1(a,b) = a$ e $\pi_2(a,b) = b$.

Demonstração: Seja $w = (u,v) \in T_{(g,h)}G \times G \simeq T_gG \times T_hG$. Então

$$\begin{aligned} m^*\omega(w) &= \omega(m_*w) = \omega(R_{h*}u + L_{g*}v) \\ &= L_{(gh)^{-1}*}(R_{h*}u + L_{g*}v) \\ &= L_{h^{-1}*}R_{h*}L_{g^{-1}*}u + L_{h^{-1}*}L_{g^{-1}*}L_{g*}v \\ &= Ad(h^{-1})\omega(u) + \omega(v). \end{aligned}$$

Para a operação inversa, consideremos a aplicação diagonal $\Delta : G \to G \times G$ dada por $\Delta(g) = (g,g)$ Como temos a identidade $m \circ (Id \times i) \circ \Delta = e$, então o pull-back $(m \circ (Id \times i) \circ \Delta)^*\omega = 0$, o que implica, usando o fato que

$$(m \circ (Id \times i) \circ \Delta)^*\omega = \ \Delta^* \circ (Id \times i)^* \circ m^*\omega$$

e a fórmula de item (a), que

$$Ad\omega + i^*\omega = 0.$$

$\square$

Capítulo 3

Teoria das Aplicações Harmônicas

A teoria de aplicações harmônicas começou com o estudo de J. Eells em 1958, o qual mostrou que o espaço das aplicações pode ser visto como uma variedade de dimensão infinita e com o questionamento de qual aplicação seria um ponto crítico de alguma função (chamada de energia) neste espaço. Este é o trabalho de J. Eells e J. H. Sampson, em 1964 (ver Eells [3]). Neste capítulo estaremos abordando o conceito de aplicações harmônicas do ponto de vista analítico. Além disso daremos como resultado principal, a caracterização que diz que uma aplicação é harmônica se, e somente se, satisfizer a equação de Euler-Lagrange. Boa parte dos resultados que estaremos explorando são encontrados em Urakawa [14]. Consideraremos as dimenões das variedades M e N como sendo m e n, respectivamente. Frequentemente iremos mergulhar (N, h) isometricamente no espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$, com k suficientemente grande para tal mergulho, e a métrica riemanniana h sendo o pull back da métrica canônica g_0 em $\mathbb{R}^k$ pela inclusão $i : N \to \mathbb{R}^k$,

$$h = i^* g_0.$$

Estaremos usando os índices

$$1 \leq i, j, ..., \leq m, \quad 1 \leq \alpha, \beta, ..., \leq n, \quad 1 \leq A, B, ..., \leq k \ .$$

As conexões de Levi-Civita para (M, g), (N, h) e $(\mathbb{R}^k, g_0)$, serão denotadas por ∇, ${}^N\nabla$ e ${}^0\nabla$, respectivamente.

3.1 Definições

Nesta seção, definiremos a quantidade chamada de energia para uma aplicação diferenciável entre duas variedades riemannianas compactas (M, g) e (N, h), e a aplicação harmônica como sendo seu ponto crítico.

3.1.1 A função densidade da energia.

Definição 3.1. *Seja $\{e_i\}$ uma base ortonormal para o espaço tangente T_xM em x, com relação ao tensor métrico g. Para a aplicação $\phi \in C^1(M, N)$, definimos a função densidade da energia para ϕ, $e(\phi) \in C^0(M)$, por*

$$\begin{aligned} e(\phi)(x) &= \frac{1}{2}Tr_g(\phi^*h)(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\phi^*h)(e_i, e_i)(x) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} h(\phi_* e_i, \phi_* e_i)(x), \qquad\qquad x \in M. \end{aligned}$$

Para a continidade da função $e(\phi)$ veja [14]. **Exemplo:** Quando temos o mergulho $i : N \to \mathbb{R}^k$ e $h = i^*g_0$, então temos a seguinte expressão para $e(\phi)$,

$$e(\phi) = \frac{1}{2}\|d\phi\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{k}\|d\phi_A\|^2. \tag{3.1}$$

Aqui estamos usando a notação

$$\phi(x) = i \circ \phi(x) = (\phi_1(x), ..., \phi_k(x)) \in \mathbb{R}^k, \quad x \in M.$$

Assim, $\phi_A \in C^1(M)$ e $d\phi_A$, $1 \leq A \leq k$ são k 1-formas em M. Como $h = i^*g_0$ e o pull back ϕ^*g_0 de $\phi = i \circ \phi$ é dado por

$$\phi^*g_0 = \sum_{A=1}^{k} d\phi_A \otimes d\phi_A,$$

obtemos a equação (3.1) usando a definição de função densidade da energia:

$$\begin{aligned} e(\phi) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\phi^* h)(e_i, e_i) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{A=1}^{k} d\phi_A(e_i) d\phi_A(e_i) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{k} \|d\phi_A\|^2 . \end{aligned}$$

Definição 3.2. *Para a aplicação $\phi \in C^1(M,N)$, a integral*

$$E(\phi) = \int_M e(\phi) v_g$$

é chamada de energia de ϕ, onde v_g é o volume riemanniano dado por $v_g = \sqrt{\det[g_{ij}]} dx_1, \ldots, dx_k$.

3.1.2 Aplicação harmônica.

Entenderemos por variação diferenciável ϕ_t a existência da aplicação

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to N, \text{ definida por } F(t,x) = \phi_t(x),$$

satisfazendo: $F(0,x) = \phi(x)$ e F uma aplicação C^∞. E por

$$V(x) := \frac{d}{dt} |_{t=0}\, \phi_t(x), \quad x \in M,$$

ou seja, V é uma aplicação de M para o fibrado tangente TN, tal que $V(x) \in T_{\phi(x)}N$ (V é chamado de campo vetorial de variação).

Definição 3.3. *Dizemos que $\phi \in C^\infty(M,N)$ é uma aplicação harmônica se ϕ é um ponto crítico de E em $C^\infty(M,N)$, isto é, para qualquer variação diferenciável $\phi_t \in C^\infty(M,N)$ com $-\varepsilon < t < \varepsilon$ para ϕ, tivermos*

$$\frac{d}{dt} |_{t=0}\, E(\phi_t) = 0.$$

O conjunto de todas as seções C^∞ de $\phi^{-1}TN$, denotado por $\Gamma(\phi^{-1}TN)$, é o conjunto de todos os campos vetoriais de variação:

$$\Gamma(\phi^{-1}TN) = \{V : M \to TN,\ \ V(x) \in T_{\phi(x)}N,\ \ x \in M\}.$$

3.2 Campo de Tensão e a Equação de Euler-Lagrange

Denotemos por ∇, ${}^N\nabla$, a conexão de Levi-Civita em (M,g), (N,h) respectivamente. Então para $\phi \in C^\infty(M,N)$, podemos definir a *conexão induzida* $\widetilde{\nabla}$ no fibrado induzido $E = \phi^{-1}TN = \cup_{x\in M} T_{\phi(x)}N$ da seguinte maneira: Para um campo vetorial X em M, $V \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$, define $\widetilde{\nabla}_X V \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$ por

$$\widetilde{\nabla}_X V(x) =^N \nabla_{\phi_* X} V := \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ \ {}^N P_{\phi\circ\sigma}{}^{-1} V(\sigma(t)), \quad x \in M,$$

onde $t \mapsto \sigma(t) \in M$ é uma curva C^1 em M satisfazendo $\sigma(0) = x$, $\sigma'(0) = X_x \in T_xM$, e σ_t é uma curva dada por $\sigma_t(s) := \sigma(s)$, $0 \leq s \leq t$. E ${}^N P_{\phi\circ\sigma} : T_{\phi(x)}N \to T_{\phi(\sigma(t))}N$ é o transporte paralelo ao longo da curva C^1 $\phi\circ\sigma_t$ com respeito a conexão ${}^N\nabla$.

Definição 3.4. *Seja $\{e_i\}_{i=1}^m$ um campo de base ortonormal em M. Definimos o campo de tensão para ϕ (denotado por $\tau(\phi)$) como sendo um elemento de $\Gamma(\phi^{-1}TN)$ dado por*

$$\tau(\phi)(x) = \sum_{i=1}^{m} (\widetilde{\nabla}_{e_i}\phi_* e_i - \phi_* \nabla_{e_i} e_i)(x),\ x \in M.$$

E chamamos $\tau(\phi)(x) = 0$ de equação de Euler-Lagrange para ϕ em x.

Teorema 3.5. *Seja $\phi \in C^\infty(M,N)$. Para qualquer variação diferenciável ϕ_t, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, para ϕ, seja $V(x) := \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ \phi_t(x)$, $x \in M$, então*

$$\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ E(\phi_t) = -\int_M h(V, \tau(\phi)) v_g.$$

E portanto, ϕ é harmônica se e somente se, satisfaz a equação de Euler-Lagrange para todo $x \in M$.

Demonstração: ver Urakawa [14]. □

O campo de tensão $\tau(\phi)$ pode ser expresso usando coordenadas locais $(x_1, ..., x_m)$, $(y_1, ..., y_n)$ em M, N. Seja $\phi^\alpha = y_\alpha \circ \phi$ e escreva $\tau(\phi)(x) \in T_{\phi(x)}N$ como

$$\tau(\phi)(x) = \sum_{\gamma=1}^{n} \tau(\phi)^\gamma \frac{\partial}{\partial y_\gamma}\ ,$$

daí temos que:

$$\begin{aligned}\tau(\phi)^\gamma(x) &= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\left\{\frac{\partial^2\phi^\gamma}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{k=1}^{m}\Gamma_{ij}^k(x)\frac{\partial\phi^\gamma}{\partial x_k} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} {}^N\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\phi(x))\frac{\partial\phi^\alpha\partial\phi^\beta}{\partial x_i\partial x_j}\right\} \\ &= \Delta\phi^\gamma + \sum_{i,j,\alpha,\beta} g^{ij}\, {}^N\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\phi(x))\frac{\partial\phi^\alpha\partial\phi^\beta}{\partial x_i\partial x_j}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Aqui Γ_{ij}^k, ${}^N\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ são símbolos de Cristoffel em (M, g), (N, h), respectivamente.

3.2.1 Exemplos de aplicações harmônicas

1. Aplicações constantes. Sejam (M, g), (N, h) variedades riemannianas e tomemos um ponto $q \in N$. Então a aplicação constante $\phi : M \to N$, tal que $\phi(x) = q$, para todo $x \in M$, é harmônica.

2. Caracterização para aplicações em $\mathbb{R}^n$. $\phi : (M, g) \to (\mathbb{R}^n, g_0)$ é harmônica se, e somente se, $\Delta\phi^i = 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

3. Geodésicas. Seja (N, h) uma variedade riemanniana (compacta), e $M = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$. Então $C^\infty(S^1, N)$ são curvas periódicas em N (período 1). Para o campo $e_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $x \in \mathbb{R}$, temos que $\nabla_{e_1} e_1 = 0$. Seja $\phi' = \phi_* e_1$, então para ϕ ser harmônica, isto é, $\tau(\phi) = 0$, em todo M, é equivalente a

$$\widetilde{\nabla}_{e_1}\phi_* e_1 =^N \nabla_{\phi_* e_1}\phi_* e_1 =^N \nabla_{\phi'}\phi' = 0$$

que é a equação das geodésicas.

Veremos mais exemplos de aplicações harmônicas sobre grupos de Lie no próximo capítulo.

Capítulo 4

Martingales e Aplicações Harmônicas em Variedades

Este capítulo aborda, principalmente, os conceitos de martingale e movimento browniano numa variedade. Pois através deles, podemos explorar as aplicações harmônicas, do ponto de vista do cálculo estocástico. A referência mais utilizada foi o Emery [5], porém os mesmos resultados também são encontrados no Hsu [7], a diferença esta essencialmente, na maneira escolhida para definir conexão.

4.1 Martingale e Conexão

4.1.1 Definição de conexão pelo hessiano

Seguindo a referência Emery [5], estaremos definindo conexão a partir do hessiano, o qual será denotado por Hess.

Definição 4.1. *Uma conexão em uma variedade M é uma aplicação linear* Hess*, do espaço das funções diferenciáveis para as formas bilineares simétrica, tal que para toda $f \in C^\infty(M)$,*

$$\mathrm{Hess}(f^2) = 2f\mathrm{Hess}f + 2df \otimes df, \tag{4.1}$$

(onde $f^2(x)$ denota o produto $f(x)f(x)$). E denotaremos esta variedade por (M, Hess).

Mais adiante veremos que a aplicação hessiana é relacionada com a derivada covariante da seguinte maneira:

$$\mathrm{Hess}f(A,B) = (AB - \nabla_A^B)f$$

para os campos $A, B \in \mathcal{X}(M)$. E daí que utilizando a fórmula acima e mais o fato que

$$AB(f^2) = A(2fBf) = 2AfBf + 2fA(Bf)$$

é fácil obtermos a expressão (4.1). **Exemplos:**

1. Se M é o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ ou mais geral ainda, um subconjunto aberto de um espaço afim, a conexão (chamada de *flat*) pode ser definida pela fórmula $(\mathrm{Hess}f)_{ij} = D_{ij}f$, para algum sistema global de coordenadas, onde a verificação de (4.1) é direta.

2. Se M é uma subvariedade do $\mathbb{R}^n$, podemos definir a conexão, chamada de *induzida*, que depende do mergulho $i : M \to \mathbb{R}^n$ (onde i é a aplicação inclusão) e da estrutura euclidiana do $\mathbb{R}^n$, do seguinte modo: para $x \in M$ e $f \in C^\infty(M)$, f restrita a uma vizinhança U de x em M, pode ser estendida unicamente em U, para uma $\overline{f}$ que é constante na interseção do fibrado normal com o aberto U. Daí definimos, para A e B em $T_xM \subset T_x\mathbb{R}^n$,
$$\mathrm{Hess}_M f(A, B) = \mathrm{Hess}_{\mathbb{R}^n}\overline{f}(A, B).$$
O qual verifica (4.1):
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathrm{Hess}_M f^2(A, B) &= \frac{1}{2}\mathrm{Hess}_{\mathbb{R}^n}\overline{f}^2(A, B) \\ &= \overline{f}(x)\mathrm{Hess}_{\mathbb{R}^n}\overline{f}(A, B) + d\overline{f}(A)d\overline{f}(B) \\ &= f(x)\mathrm{Hess}_M f(A, B) + df(A)df(B). \end{aligned}$$

Citaremos agora um lema do Emery [5], importante para estendermos a expressão (4.1).

Lema 4.2. *Sejam A e B dois campos vetoriais em (M, Hess). Definimos o operador C em funções diferenciáveis por $Cf = ABf - \mathrm{Hess}f(A, B)$. Este operador é um campo vetorial em M (denotado por ∇_A^B), e tem a seguinte fórmula para mudança de variável: para qualquer função diferenciável $f = (f^1, ..., f^p) : M \to \mathbb{R}^p$ e $\phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,*

$$C(\phi \circ f) = \sum_i D_i\phi \circ f Cf^i.$$

Demonstração: Usando a expressão (4.1) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}C(f^2) &= \frac{1}{2}ABf^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Hess}f^2(A,B) \\
&= A(fBf) - f\mathrm{Hess}f(A,B) - (df \otimes df)(A,B) \\
&= fABf + AfBf - f\mathrm{Hess}f(A,B) - AfBf \\
&= fCf.
\end{aligned}$$

Logo pela Proposição 2.6 temos que C é um campo vetorial e portanto temos a fórmula para mudança de variável. □

Sendo assim, dado os vetores A e B em T_xM, eles podem ser considerados como valores de dois campos vetoriais no ponto x, e temos a extensão de (4.1) dada por:

$$\mathrm{Hess}(\phi \circ f) = \sum_i (D_i\phi) \circ f \ \mathrm{Hess}f^i + \sum_{i,j} (D_{ij}\phi) \circ f \ df^i \otimes df^j. \tag{4.2}$$

De fato, com o lema acima temos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}(\phi \circ f)(A,B) &= AB(\phi \circ f) - C(\phi \circ f) \\
&= \sum_i A(D_i\phi \circ fBf^i) - \sum_i D_i\phi \circ fCf^i \\
&= \sum_{i,j} D_{ij}\phi \circ fAf^jBf^i + \sum_i D_i\phi \circ fABf^i - \sum_i D_i\phi \circ fCf^i \\
&= \sum_{i,j} D_{ij}\phi \circ f(df^i \otimes df^j)(A,B) + \sum_i D_i\phi \circ f\mathrm{Hess}f^i(A,B).
\end{aligned}$$

4.1.2 Semimartingales numa variedade

Um processo contínuo X tomando valores em M, definido num espaço de probabilidade com filtração $(\Omega,\ F,\ \mathbb{P},\ (F_t)_{t\geq 0})$, é chamado de *semimartingale* se, para toda $f \in C^\infty(M)$, o processo real $f \circ X$ é um semimartingale. Se M é a reta real ou $\mathbb{R}^n$, esta definição coincide com a usual. Quando temos um sistema de coordenada local $(x^1, ..., x^n)$, para M, então o processo X em M, é um semimartingale se, e somente se, todas suas coordenadas $X^i = x^i \circ X$ também são.

Proposição 4.3. *Seja $\phi : M \to N$ uma aplicacão diferenciável. Se X é um semimartingale em M, então $\phi \circ X$ é um semimartingale em N.*

Daremos nesta subseção, uma definição que, a grosso modo, corresponde a variação quadrática para semimartingales na reta real. Porém, no caso real, tínhamos o produto de números reais, já na variedade, usaremos a forma bilinear.

Teorema 4.4. *Seja X um semimartingale com valores em M. Existe uma única aplicação linear, denotada por $b \longmapsto \int b(dX, dX)$, do espaço de todas formas bilineares em M para o espaço dos processos contínuos reais com variação finita, tal que, para todas funções diferenciáveis f e g em M,*

(i) $\int (fb)(dX, dX) = \int (f \circ X) d(\int b(dX, dX))$;

(ii) $\int (df \otimes dg)(dX, dX) = [f \circ X, g \circ X]$.

(ver [5])

O processo real $\int b(dX, dX)$ é chamado de integral de b ao longo de X (ou variação quadrática de b ao longo de X). Seu valor no tempo t será denotado por $\int_0^t b(dX, dX)$. A integral $\int (fb)(dX, dX)$ será frequentemente denota por $\int f \circ X \, b(dX, dX)$. Para a demonstração deste teorema, necessitaremos do seguinte lema:

Lema 4.5. *Sejam u^λ, f^λ e g^λ, $1 \leq \lambda \leq m$, um conjunto finito de funções definidas em M tal que a forma bilinear $\sum_\lambda u^\lambda df^\lambda \otimes dg^\lambda$ é identicamente nula. Então o processo*

$$\sum_\lambda u^\lambda \circ X \ d[f^\lambda \circ X, g^\lambda \circ X]$$

é também nulo.

Este lema decorre do fato de que para uma única carta local $(x^1, ..., x^n)$ para o aberto U de M, temos que, usando a fórmula de Itô, como na Proposição 1.27,

$$\sum_\lambda \int_0^t u^\lambda \circ X_s d[f^\lambda \circ X, g^\lambda \circ X]_s = \sum_{i,j\lambda} \int_0^t u^\lambda \circ X_s D_i f^\lambda \circ X_s D_j g^\lambda \circ X_s d[X^i, X^j]_s = 0.$$

(Maiores detalhes ver [5]). **Demonstração do Teorema 4.4**. Pelo Lema 2.7, toda forma

bilinear b pode ser escrita como uma soma finita $b = \sum_{i,j} b_{ij} dh^i \otimes dh^j$, na base $\{dh^i \otimes dh^j\}$. Daí temos por (i) e (ii) do Teorema 4.4 que:

$$\int b(dX, dX) = \sum_{i,j} \int b_{ij} \circ X \ d[h^i \circ X, h^j \circ X],$$

e portanto temos a unicidade. Para mostrar a existência, notemos novamente pelo mesmo Lema 2.7, que toda forma bilinear b é uma soma finita da forma $\sum_\lambda u^\lambda df^\lambda \otimes dg^\lambda$. Definimos então a integral de b ao longo de X por

$$\int b(dX, dX) = \sum_\lambda \int u^\lambda \circ X \; d[f^\lambda \circ X, g^\lambda \circ X]. \tag{4.3}$$

Se tomarmos uma outra decomposição para b, por exemplo, $\sum_\lambda v^\lambda dy^\lambda \otimes dz^\lambda$, temos que

$$\sum_\lambda (u^\lambda df^\lambda \otimes dg^\lambda - v^\lambda dy^\lambda \otimes dz^\lambda)$$

é identicamente nulo, e portanto pelo Lema 4.5,

$$\sum_\lambda \int (u^\lambda \circ X \; d[f^\lambda \circ X, g^\lambda \circ X] - v^\lambda \circ X \; d[y^\lambda \circ X, z^\lambda \circ X]) = 0$$

e portanto a integral de b está bem definida. A propriedade (i) do teorema, segue da equação 4.3 usando a decomposição

$$f\, b = \sum_\lambda (f \; u^\lambda) df^\lambda \otimes dg^\lambda, \text{ se } b = \sum_\lambda u^\lambda df^\lambda \otimes dg^\lambda \; .$$

E tomando a decomposição trivial $df \otimes dg = df \otimes dg$, temos a propriedade (ii). $\square$

Proposição 4.6. *Se ϕ é uma aplicação diferenciável de M para outra variedade N, X um semimartingale em M e b uma forma bilinear em N, então*

$$\int_M (d\phi^* \otimes d\phi^*) b(dX, dX) = \int_N b(d(\phi \circ X), d(\phi \circ X)). \tag{4.4}$$

Demonstração: Utilizando as identidades da Proposição 2.8 podemos obter as seguintes caracterizações, no sentindo do Teorema 4.4, para os processos:

(i) $\int b(d(\phi \circ X), d(\phi \circ X))$ é caracterizado por:

$$\begin{aligned} \int (fb)(d(\phi \circ X), d(\phi \circ X)) &= \int (f \circ \phi \circ X) \; d(\int b(d(\phi \circ X), d(\phi \circ X))) \\ &= \int (f \circ \phi \circ X) \; d(\int (d\phi^* \otimes d\phi^*) b(dX, dX)) \end{aligned}$$

e também,

$$\int (df \otimes dg)(d(\phi \circ X), d(\phi \circ X)) = [(f \circ \phi \circ X), (f \circ \phi \circ X)];$$

(ii) $\int (d\phi^* \otimes d\phi^*) b(dX, dX)$ é caracterizado por:

$$\begin{aligned} \int (d\phi^* \otimes d\phi^*) f b(dX, dX) &= \int (f \circ \phi)(d\phi^* \otimes d\phi^*) b(dX, dX) \\ &= \int (f \circ \phi \circ X) d(\int (d\phi^* \otimes d\phi^*) b(dX, dX)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int (d\phi^* \otimes d\phi^*)(df \otimes dg)(dX, dX) &= \int (d(f \circ \phi) \otimes d(g \circ \phi))(dX, dX) \\ &= [(f \circ \phi) \circ X, (f \circ \phi) \circ X]. \end{aligned}$$

Logo, por (i) e (ii) vemos que as caracterizações coincidem, logo a igualdade é garantida pela unicidade do Teorema 4.4. □

Proposição 4.7. *O processo $\int b(dX, dX)$ depende somente da parte simétrica de b. E se b é antisimétrico, $\int b(dX, dX) = 0$.*

(Ver [5]).

4.1.3 Martingale na variedade

Agora que temos o conceito de conexão pela aplicação hessiana, podemos definir um martingale numa variedade:

Definição 4.8. *Seja (M, Hess) uma variedade com uma conexão, e X um semimartingale em M. Dizemos que X é um martingale se, para toda $f \in C^\infty(M)$,*

$$f \circ X - f \circ X_0 \stackrel{m}{=} \frac{1}{2} \int \text{Hess} f(dX, dX). \tag{4.5}$$

Note que se temos um martingale X definido em $\mathbb{R}^n$ (daí podemos escrever $X = (X^1, \dots, X^n)$), pela fórmula de Itô, temos que para toda $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^2:

$$f\left(X_t\right) = f\left(X_0\right) + \sum_i \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(X_s\right) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(X_s\right) [dX_s^i, dX_s^j]. \tag{4.6}$$

Mas como cada X^i é um martingale, temos que cada integral de Itô $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i} X_s dX_s^i$ é um martingale e portanto um martingale local. E tomando a conexão flat para a variedade $\mathbb{R}^n$, temos por definição que $(\text{Hess})_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Além disso, se usarmos o Teorema 4.4 para $M = \mathbb{R}^n$, obtemos que a equação (4.6) é um caso particular da expressão (4.5). Ou seja, a definição que apresentamos acima para martingales em variedades, é uma generalização desta propriedade que os martingales possuem em $\mathbb{R}^n$.

4.1.4 Expressão em coordenada local para conexão e martingale

Cada x^i de um um sistema de coordenada local $(x^1, ..., x^n)$, tem uma representação única para a aplicação hessiana dada por

$$\text{Hess}(x^i) = -\sum_{j,k} \Gamma^i_{jk}(x) dx^j \otimes dx^k \tag{4.7}$$

com n^3 funções Γ^i_{jk}, com $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ (pois $\text{Hess}(x^i)$ é uma bilinear simétrica). Estas funções são chamada de *símbolos de Christoffel* da conexão. Da expressão (4.2) temos que

$$\text{Hess}(f \circ (x^1, ..., x^n)) = \sum_{i,j} (D_{ij} f - \Gamma^k_{ij} D_k f) dx^i \otimes dx^j \tag{4.8}$$

ou ainda,

$$(\text{Hess}(f \circ (x^1, ..., x^n)))_{ij} = (D_{ij} - \Gamma^k_{ij} D_k) f.$$

Usando o fato de que $\nabla^{X_j}_{X_i} = \sum_k \Gamma^k_{ij} X_k$, (onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$) e da expressão coordenada (4.8), temos que dados os campos vetoriais A e B em M, com $A = \sum_i a_i X_i$ e $B = \sum_j b_j X_j$,

$$\text{Hess} f(A, B) = (AB - \nabla^B_A) f. \tag{4.9}$$

De fato,

$$AB(f) - \nabla^B_A(f) = \sum_{i,j} a_i b_j (D_{ij} f - \Gamma^k_{ij} X_k f)$$

enquanto que

$$
\begin{aligned}
\text{Hess}f(A,B) &= \sum_{i,j}(D_{ij}f - \Gamma_{ij}^k D_k f)dx^i \otimes dx^j(a_\alpha X_\alpha, b_\beta X_\beta) \\
&= \sum_{i,j} a_i b_j (D_{ij}f - \Gamma_{ij}^k X_k f).
\end{aligned}
$$

Também podemos caracterizar em coordenada local um martingale. Mas antes necessitaremos da seguinte proposição:

Proposição 4.9. *Seja $f = (f^1, ..., f^p) : M \to \mathbb{R}^p$ onde cada função $f^i : M \to \mathbb{R}$ é diferenciável e satisfaz a propriedade (4.5). Então para qualquer $\phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ diferenciável, temos que a propriedade (4.5) também é satisfeita para $\phi \circ f$.*

Demonstração: Utilizando a fórmula de Itô, a equação (4.5), o Teorema 4.4 e a expressão (4.2), exatamente nesta ordem, temos:

$$
\begin{aligned}
\phi \circ f \circ X - \phi \circ f \circ X_0 &= \sum_i \int D_i\phi \circ f(X) d(f^i \circ X) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int D_{ij}\phi \circ f(X) d[f^i \circ X, f^j \circ X] \\
&\overset{m}{=} \frac{1}{2}\sum_i \int D_i\phi \circ f(X)\text{Hess}f^i(dX, dX) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int D_{ij}\phi \circ f(X)(df^i \otimes df^j)(dX, dX) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int (D_i\phi \circ f\text{Hess}f^i + D_{ij}\phi \circ f df^i \otimes df^j)(dX, dX) \\
&= \frac{1}{2}\int \text{Hess}(\phi \circ f)(dX, dX)
\end{aligned}
$$

e portanto $\phi \circ f$ verifica (4.5). □

Suponha que $(x^1, ..., x^n)$ são coordendas locais. Então pela proposição acima, um semimartingale $X = (X^1, .., X^n)$ é um martingale se, e somente se, para algum martingale local real

M^i,

$$\begin{aligned} X_t^i &= X_0^i + M_t^i + \frac{1}{2}\int_0^t (\text{Hess}(x^i))(dX, dX)_s \\ &= X_0^i + M_t^i - \frac{1}{2}\sum_{j,k}\int_0^t \Gamma_{jk}^i(X_s)d[X^j, X^k]_s \end{aligned}$$

e portanto, calculando a variação quadrática $[X^j, X^k]$ temos a equação integral

$$X^i = X_0^i + M^i - \frac{1}{2}\sum_{j,k}\int_0^t \Gamma_{jk}^i(X)d[M^j, M^k]_s. \tag{4.10}$$

O resultado disto, é que dado um martingale local M com valores em $\mathbb{R}^n$, a solução X da equação (4.5) é um martingale em (M, Hess), e todos os martingales são obtidos desta maneira.

4.1.5 Aplicações afins e geodésicas

Definição 4.10. *Sejam* $(\overline{M}, \overline{\text{Hess}})$ *e* (M, Hess) *duas variedades com conexões. Uma aplicação diferenciável* $\phi : \overline{M} \to M$ *é afim se para toda* $f : M \to \mathbb{R}$*,*

$$\overline{\text{Hess}}(f \circ \phi) = (d\phi^* \otimes d\phi^*)(\text{Hess} f). \tag{4.11}$$

Quando na definição acima, a variedade M é a reta real com a conexão flat, temos que ϕ é afim se, e somente se, $\overline{\text{Hess}}\phi = 0$. A condição necessária se verifica utilizando a equação (4.2) com $f \circ \phi$. Enquanto que, para se obter condição suficiente, basta tomar na definição de afim a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sendo a identidade.

Proposição 4.11. *Sejam* $\Phi : M^1 \to M^2$ *e* $\Psi : M^2 \to M^3$ *aplicações afins. Então a composição* $\Psi \circ \Phi$ *também é afim.*

Demonstração: Denotando por Hess^1, Hess^2, Hess^3 as conexões para M^1, M^2, M^3 respectivamente, temos para toda $f \in C^\infty(M^3)$,

$$\begin{aligned} \text{Hess}^1(f \circ \Psi \circ \Phi) &= (d\Phi^* \otimes d\Phi^*)(\text{Hess}^2(f \circ \Psi)) \\ &= (d\Phi^* \otimes d\Phi^*)(d\Psi^* \otimes d\Psi^*)\text{Hess}^3 f \\ &= d(\Psi \circ \Phi)^* \otimes d(\Psi \circ \Phi)^* \text{Hess}^3 f \end{aligned}$$

□

Um caso especial de aplicação afim é quando $(\overline{M}, \overline{\text{Hess}})$ (da definição acima) é um intervalo da reta:

Definição 4.12. *A curva* $\gamma : (I, flat) \to (M, \text{Hess})$ *é chamada de geodésica se é uma aplicação afim, onde* I *é um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$.

Aplicando a expressão (4.11) nos vetores $\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt} \in T_t I$, temos que para toda $f \in C^\infty(M)$,

$$\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t) = \text{Hess}f(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)). \tag{4.12}$$

Em coordenadas locais $(x^1, ..., x^n)$, tomando $f = x^i$ obtemos

$$\ddot{\gamma}^i(t) = -\sum_{j,k} \Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\dot{\gamma}^j(t)\dot{\gamma}^k(t). \tag{4.13}$$

Esta equação da geodésica, como gostaríamos, é a mesma equação (2.9) (p. 25). **Exemplos:**

1. Se M é o espaço vetorial com a conexão flat, então (4.13) implica $d^2\gamma/dt^2 = 0$, e geodésicas são exatamente movimentos com velocidade constante em M.

2. Se M é uma subvariedade do $\mathbb{R}^n$ com a conexão induzida, então a curva γ é uma geodésica se, e somente se, sua aceleração $d^2\gamma/dt^2$ é ortogonal à $T_{\gamma(t)}M$. Este resultado se verifica basicamente, utilizando a definição de conexão induzida e geodésica (para maiores detalhes ver Emery [5]).

Daremos agora uma proposição que caracteriza uma aplicação afim através de martingales.

Proposição 4.13. *Sejam* $(\overline{M}, \overline{\text{Hess}})$ *e* (M, Hess) *duas variedades com conexões e* ϕ *uma aplicação diferenciável de* $\overline{M}$ *para* M. *São equivalentes:*

(i) ϕ *é afim;*

(ii) *para toda geodésica* (I, γ) *de* $(\overline{M}, \overline{\text{Hess}})$, *temos que* $(I, \phi \circ \gamma)$ *é geodésica de* (M, Hess);

(iii) *para qualquer espaço de probabilidade com filtração, e todo martingale* X *definido em* $(\overline{M}, \overline{\text{Hess}})$, $\phi \circ X$ *é um martingale em* (M, Hess).

Demonstração: (i)$\Rightarrow$(iii). Seja ϕ uma aplicação afim de $\overline{M}$ para M, e X um martingale em $\overline{M}$. Então para toda $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} f \circ \phi \circ X - f \circ \phi \circ X_0 &\overset{m}{=} \frac{1}{2}\int \overline{\text{Hess}}(f \circ \phi)(dX, dX) \\ = \quad & \frac{1}{2}\int (d\phi^* \otimes d\phi^*)\text{Hess}f(dX, dX) \quad \text{(pois } \phi \text{ é afim)} \\ = \quad & \frac{1}{2}\int \text{Hess}f(d(\phi \circ X), d(\phi \circ X)) \quad \text{(pela Proposição 4.6)} \end{aligned}$$

e assim $\phi \circ X$ é martingale. (iii)$\Rightarrow$(ii). Seja (I, γ) uma godésica em $\overline{M}$. Temos que mostrar que $\psi = \phi \circ \gamma$ é uma geodésica, ou seja, que para todo $t_0 \in I$ e toda $f \in C^\infty(M)$,

$$\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \psi)(t_0) = \mathrm{Hess} f(\dot{\psi}(t_0), \dot{\psi}(t_0)).$$

Tomemos um $\varepsilon > 0$ tal que $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset I$. Denotemos por W um real movimento browniano, que inicia no ponto t_0, e pára quando atinge o complementar de $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Então W é um martingale, e por ((i)$\Rightarrow$(iii)), $\gamma \circ W$ é um martingale em $\overline{M}$. Usando a hipótese (iii), $\psi \circ W$ é um martingale em M. Assim temos que

$$\int \mathrm{Hess}_I(f \circ \psi)(dW, dW) \overset{m}{=} f \circ \psi \circ W - f \circ \psi \circ W_0$$

(pois W é um martingale em I)

$$\overset{m}{=} \int \mathrm{Hess} f(d(\psi \circ W), d(\psi \circ W))$$

(pois $\psi \circ W$ é um martingale em M)

$$= \int (d\psi^* \otimes d\psi^*) \mathrm{Hess} f(dW, dW)$$

(pela Proposição 4.6). Ambos os lados tem variação finita e são nulos no tempo zero, portanto o martingale que resulta da diferença deles é uma constante igual a zero. Então denotando por T o tempo quando W pára,

$$\int_0^{t \wedge T} (f \circ \psi)''(W_s) ds = \int_0^{t \wedge T} \mathrm{Hess} f(\dot{\psi}(W_s), \dot{\psi}(W_s)) ds$$

(a variação quadrática de W é $[W, W]_t = t \wedge T$). Como $T > 0$ e $W_0 = t_0$, diferenciando ambos os lados em $t = 0$ resulta em

$$(f \circ \psi)''(t_0) = \mathrm{Hess} f(\dot{\psi}(t_0), \dot{\psi}(t_0)),$$

como queríamos mostrar. (ii)$\Rightarrow$(i). Seja $A \in T\overline{M}$, então existe uma geodésica γ com $\dot{\gamma}(0) = A$; A sendo o vetor velocidade de γ. O vetor $d\phi A$ é a velocidade de $\psi = \phi \circ \gamma$, e para toda

$f \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Hess}}(f \circ \phi)(A, A) &= \overline{\mathrm{Hess}}(f \circ \phi)(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)) \\
&= (f \circ \phi \circ \gamma)''(0) \quad (\gamma \text{ é geodésica}) \\
&= \mathrm{Hess} f(\dot{\psi}(0), \dot{\psi}(0)) \quad (\psi \text{ é geodésica}) \\
&= \mathrm{Hess} f(d\phi\ A, d\phi\ A) \\
&= (d\phi^* \otimes d\phi^*)\mathrm{Hess} f(A, A).
\end{aligned}$$

Portanto ϕ é afim e então $\phi \circ \gamma$ é geodésica. □

4.1.6 Funções convexas e martingales

Definição 4.14. *Uma função diferenciável f em (M, Hess) é convexa se a forma bilinear* $\mathrm{Hess} f$ *é positiva, ou seja,*

$$\forall x \in M, \forall A \in T_x M, \quad \mathrm{Hess} f(A, A) \geq 0.$$

Seja ϕ uma aplicação afim de $(\overline{M}, \overline{\mathrm{Hess}})$ para (M, Hess) e f uma função convexa em (M, Hess), então para $\forall x \in \overline{M}$, e $A \in T_x\overline{M}$, temos

$$\overline{\mathrm{Hess}}(f \circ \phi)(A, A) = (d\phi^* \otimes d\phi^*)\mathrm{Hess} f(A, A) = \mathrm{Hess} f(d\phi A, d\phi A) \geq 0$$

e portanto $f \circ \phi$ é uma função convexa. As aplicações afins são muito úteis no estudo de conexão, mas mesmo no caso real (exceto constantes), é muito difícil encontrá-las. E como as funções convexas se relacionam com os martingales de maneira semelhante às aplicações afins (como veremos), elas são favoritas à substituírem as afins quando for necessário.

Proposição 4.15. *Para a função f em (M, Hess), são equivalentes:*

(i) *f é convexa;*

(ii) *para toda geodésica γ, temos que $f \circ \gamma$ é convexa;*

(iii) *para qualquer espaço de probabilidade com filtração, e todo martingale X definido em (M, Hess), o semimartingale real $f \circ X$ é um submartingale local.*

(Ver [5])

Proposição 4.16. *Todo ponto de M tem uma vizinhança U com as seguintes propriedades:*

(i) *A curva diferenciável $\gamma : I \to U$ é geodésica se, e somente se, para toda função convexa $f : U \to \mathbb{R}$, temos que $f \circ \gamma$ é convexa em I.*

(ii) *Um processo adaptado contínuo X com valores em U é um martingale se e somente se para toda função convexa $f : U \to \mathbb{R}$, é um submartingale local.*

Em geral, esta proposição vale para todo aberto U relativamente compacto em um aberto V que tem a seguinte propriedade: para quaisquer dois pontos $a, b \in V$, existe uma única geodésica $\gamma : [0,1] \to V$ tal que $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$ (ver [5]).

Teorema 4.17. *Todo ponto de M tem uma vizinhança U com as seguintes propriedades:*

(i) *A curva diferenciável $\gamma : I \to (M, \mathrm{Hess})$ é geodésica se, e somente se, para toda função f e todo aberto $U \subset M$ tal que $f|_U$ é convexa, $f \circ \gamma$ é convexa é $\gamma^{-1}(U) \subset I$.;*

(ii) *O semimartingale X em (M, Hess) é um martingale se, e somente se, para toda função f e todo aberto $U \subset M$ tal que $f|_U$ é convexa, a variação finita do semimartingale real $f \circ X$ é localmente crescente no subconjunto aberto $\{t : X_t \in U\}$.*

4.1.7 Subvariedade totalmente geodésica

Definição 4.18. *Seja $\overline{M}$ uma subvariedade de (M, Hess). Dizemos que $\overline{M}$ é uma subvariedade totalmente geodésica de M se para todo $A \in T\overline{M}$, existe uma geodésica (γ, I) de M, com $0 \in I$ e $\dot{\gamma}(0) = A$, com valores em $\overline{M}$.*

Exemplos:

1. Quando $M = \mathbb{R}^n$, com a conexão flat, qualquer subconjunto aberto é totalmente geodésico.

2. A esfera de dimensão 2 na variedade $\mathbb{R}^3$ (conexão flat), não é uma subvariedade totalmente geodésica.

Proposição 4.19. *$\overline{M}$ é uma subvariedade totalmente geodésica de M se, e somente se, existe uma única conexão $\overline{\mathrm{Hess}}$ em $\overline{M}$ tal que o mergulho $i : \overline{M} \to M$ é afim.*

Ver [5].

Corolário 4.20. *Seja $\overline{M}$ uma subvariedade totalmente geodésica de M. Então todo martingale em $(\overline{M}, \overline{\text{Hess}})$ é um martingale em (M, Hess).*

Proposição 4.21. *Dada as variedades (M, Hess_M) e (N, Hess_N), existe uma única conexão em $M \times N$ (chamada de conexão produto) caracterizada pelas condições equivalentes:*

(i) *As projeções $p : M \times N \to M$ e $q : M \times N \to N$ são afins;*

(ii) *Para $f = g \otimes h : M \times N \to \mathbb{R}$ e $A = (B, C) \in T_{(y,z)}(M \times N) \simeq T_yM \times T_zN$,*

$$\text{Hess}f(A, A) = g(y)\text{Hess}h(C, C) + h(z)\text{Hess}g(B, B) + 2(dg \otimes dh)(B, C);$$

(iii) *Se $\phi : I \to M$ e $\psi : I \to N$ são geodésicas, a curva $\gamma = (\phi, \psi)$ é uma geodésica em $M \times N$;*

(iv) *Se Y e Z são martingales em M e N respectivamente (para a mesma filtração), então $X = (Y, Z)$ é um martingale em $M \times N$.*

Ver [5]. Agora, neste final de seção, estaremos citando resuldos que podem ser encontrados

no Hsu [7]. Entre eles, daremos um teorema, o qual chamaremos de unicidade de martingale, que será importante para a observação de que, sob determinadas condições probabilísticas das variedades, uma aplicação harmônica é constante.

Proposição 4.22. *Seja M uma variedade com uma conexão. Então a aplicação diagonal $x \mapsto (x, x)$ mergulha M como uma subvariedade totalmente geodésica de $M \times M$ para a conexão produto.*

Proposição 4.23. *Suponha que M é uma subvariedade totalmente geodésica de (N, Hess_N). Então todo ponto de M tem uma vizinhança V em N com a seguinte propriedade: se X é um martingale em V no intervalo $[0, T]$ tal que seu valor terminal X_T está em M, então $X_t \in M$ para todo $t \in [0, T]$.*

A prova desta proposição decorre de um resultado que garante que dado $a \in M$, existe uma vizinhança V de a e uma função convexa f tal que

$$f(x) \begin{cases} = 0 \text{ se } x \in V \cap M \\ > 0 \text{ se } x \in V \backslash M \end{cases}$$

Daí, tomando V suficientemente pequeno, podemos supor que f é limitada. Para um martingale X com $X_T \in M$, temos que $f \circ X$ é um submartingale limitado positivo (veja Proposição 4.15) e nulo em $t = T$. Logo, $f(X_t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Portanto, $X_t \in M$ para todo $t \in [0, T]$.

Teorema 4.24 (Unicidade de martingale). *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão* Hess*. Então todo ponto de M tem uma vizinhança V com a seguinte propriedade: se $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ e $\{Y_t, 0 \leq t \leq T\}$ são dois martingales em V tal que $X_T = Y_T$, ($T \geq 0$ e limitado), então $X_t = Y_t$ (isto é, $\mathbb{P}(\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = 1$) para todo $t \in [0, T]$.*

Demonstração: Primeiramente devemos observar que em $\mathbb{R}^n$ esta demonstração é trivial, se usarmos o Teorema da Parada Opcional (ver Revuz e Yor [12], p.66), ou seja,

$$X_t = E[X_T|\mathcal{F}_t] = E[Y_T|\mathcal{F}_t] = Y_t.$$

Tome o martingale (X, Y) na variedade produto $M \times M$ e como subvariedade totalmente geodésica a diagonal de $M \times M$ (veja Proposição 4.22). Daí, aplicando a Proposição 4.23 e mais o fato que (X_T, Y_T) está na diagonal pois $X_T = Y_T$, temos que, $X_t = Y_t$ para todo $t \in [0, T]$. □

4.2 Movimento Browniano

Nesta seção estaremos interessados em definir o movimento browniano. Para isto, a grosso modo, precisamos apenas de métrica na variedade.

4.2.1 Conexão numa variedade riemanniana

Proposição 4.25. *Numa variedade riemanniana, podemos definir a conexão através da derivada de Lie do tensor métrico g dada por*

$$\text{Hess } f = \frac{1}{2} \, L_{\text{grad } f} \, g.$$

Esta conexão é chamada de *Levi-Civita* (ou canônica) associada ao tensor métrico g. Daqui em diante, para toda variedade riemanniana, esta será a conexão implícita, exceto quando mencionarmos.

Proposição 4.26. *A curva diferenciável $\gamma : [a, b] \to (M, g)$ é geodésica se e somente se, sobre todas curvas ϕ com os mesmos pontos finais $\phi(a) = \gamma(a)$ e $\phi(b) = \gamma(b)$, γ é um ponto crítico para a integral da energia $\frac{1}{2} \int_a^b \| \dot{\phi}(s) \|^2 ds$.*

4.2.2 Laplaciano e movimento browniano

Seja M uma variedade riemanniana e $\{e_i\}$ uma base ortonormal para T_xM, com relação a métrica g.

Definição 4.27. *O Laplaciano é o traço da aplicação bilinear* Hess $f(x)$ *(conexão de Levi-Civita), e é denotado por* $\Delta\ f(x)$*.*

Em coordenada local, as relações (2.3) (p.22) e (4.8) (p.42) mostra que

$$\Delta\ f(x) = \sum_{i,j} g^{ij}(x)\ ((D_{ij}\ f(x) - \sum_k \Gamma^k_{ij}(x) D_k\ f(x)). \tag{4.14}$$

É esta equação, que nos permite, mais diretamente, verificar que a definição que demos aqui para Laplaciano, é a mesma encontrada nas referências [7], [1] e [14], independente da maneira que cada autor escolheu para definir a conexão.

Definição 4.28. *Dado um espaço de probabilidade com uma filtração* $(\Omega,\ F,\ \mathbb{P},\ (F_t)_{t\geq 0})$*, um processo* X *em* M *(definido em* $\Omega \times \mathbb{R}_+$*) é chamado de movimento browniano em* (M, g) *se* X *é contínuo e adaptado e, para toda* $f \in C^\infty(M)$*,*

$$f \circ X - f \circ X_0 - \frac{1}{2}\int \Delta\ f \circ X\ dt \tag{4.15}$$

é um martingale local.

Desta definição temos que X é um semimartingale (no intervalo que é definido). Uma outra observação é que ela envolve a filtração, o que implica que X também é um movimento browniano para sua própria filtração natural.

Para um movimento browniano B em $\mathbb{R}^n$, utilizando a fórmula de Itô, mais o fato que B é um martingale e que $[B^i_t, B^j_t] = \delta_{ij} t$, obtemos a mesma expressão (4.15). Ou seja, a definição de movimento browniano numa variedade riemanniana, é uma generalização de uma propriedade que temos para movimentos brownianos em $\mathbb{R}^n$.

Daremos agora uma proposição que é uma extensão da caracterização de Lévi para movimento browniano.

Proposição 4.29. *Um semimartingale* X *em* M *é um movimento browniano se, e somente se, é um martingale e, para toda* $f \in C^\infty(M)$*,*

$$[f \circ X,\ f \circ X] = \int \|\ \text{grad}\ f(X)\|^2 dt \tag{4.16}$$

Antes de demonstrarmos esta proposição, daremos o seguinte lema que pode ser encontrado em Emery [5]:

Lema 4.30. *Se X é um semimartingale satisfazendo a propriedade (4.16), para toda $f \in C^\infty(M)$, então temos que , para toda forma bilinear b,*

$$\int b(dX, dX) = \int \operatorname{Tr} b(x)\, dt. \tag{4.17}$$

Demonstração da Proposição Aplicando o lema acima para a forma bilinear Hess$f$, temos que

$$f \circ X - f \circ X_0 \overset{m}{=} \frac{1}{2} \int \operatorname{Hess} f(dX, dX) = \frac{1}{2} \int \Delta\ f(X)\ dt$$

e X é um movimento browniano. Reciprocamente, suponha que X é movimento browniano. Como

$$\begin{aligned} \Delta\ (f^{\,2}) &= Tr\ (\text{Hess}\ f^{\,2}) = 2\ Tr\ (f\ \text{Hess}\ f + df \otimes df) \\ &= 2\ f\ \Delta\ f + 2\ \|\ \text{grad}\ f\|^2, \end{aligned}$$

temos

$$f^{\,2} \circ X - f^{\,2} \circ X_0 \overset{m}{=} \frac{1}{2} \int \Delta\ (f^{\,2})(X)\ dt = \int (f\ \Delta\ f)(X) dt + \int \|\ \text{grad}\ f\|^2\ (X)\ dt\ .$$

Por outro lado, pela fórmula de Itô,

$$\begin{aligned} f^{\,2} \circ X - f^{\,2} \circ X_0 &= 2 \int (f \circ X)\ d(f \circ X) + [f \circ X,\ f \circ X] \\ &\overset{m}{=} \int (f \circ X)\ \Delta(f \circ X)\ dt + [f \circ X,\ f \circ X]\ . \end{aligned}$$

E comparando estas duas expressões temos que

$$[f \circ X, f \circ X] = \int \|\ \text{grad}\ f\|^2(X) dt,$$

e portanto podemos aplicar o lema anterior. Para toda $f \in C^\infty(M)$

$$\int \text{Hess}\ f\ (dX, dX) = \int Tr\ \text{Hess}\ f\ (X)\ dt = \int \Delta\ f \circ X\ dt \overset{m}{=} f \circ X - f \circ X_0$$

e portanto X é um martingale. $\square$

Se X é um semimartingale em M, a integral $\int g(dX, dX)$ de g ao longo de X (também denotado por $\int \langle dX, dX\rangle$, é chamado de variação quadrática riemanniana de X, ou simplesmente variação quadrática).

Corolário 4.31. *A variação quadrática riemanniana de um movimento browniano é*

$$\int_0^t \langle dX_s, dX_s\rangle = nt$$

onde n é a dimensão de M.

Basta observar que $Trg = \sum_{i=1}^n g(e_i, e_i) = n$ e a identidade (4.17).

4.2.3 Caracterização de aplicações harmônicas através de martingales

Apresentaremos agora uma definição para aplicação harmônica utilizando a aplicação hessiana. Como veremos através de coordenadas locais, esta definição é equivalente a do capítulo anterior onde utilizamos a derivada covariante.

Definição 4.32. *Uma aplicação diferenciável ϕ de uma variedade riemanniana (M, g) para uma variedade com conexão (N, Hess) é harmônica se, para toda $f \in C^\infty(N)$,*

$$\Delta\ (f \circ \phi) = Tr\ ((d\phi^* \otimes d\phi^*)\ (\text{Hess}\ f\ ))\ . \tag{4.18}$$

Observação 4.33. *Quando uma aplicação diferenciável ϕ de (M, g) para (N, Hess) é afim, temos por definição,*

$$\text{Hess}_M(f \circ \phi) = (d\phi^* \otimes d\phi^*)\ (\text{Hess}\ f\ ),\ \ \forall\ f \in C^\infty(N)\ .$$

Logo, tomando o traço em ambos os lados desta equação, temos que a aplicação é harmônica. Ou seja, ser harmônica é uma propriedade mais fraca do que afim, já que não exigimos a igualdade das bilineares, e sim apenas igualdade dos traços.

Em coordenada local, $\overline{x}^\alpha$ em M e y^i em N, ϕ é harmônica se, e somente se,

$$\overline{\Delta}\ \phi^i + \overline{g}^{\beta\,\gamma}\ \Gamma^i_{jk} \circ \phi\ \overline{D}_\beta\ \phi^j\ \overline{D}_\gamma\ \phi^k = 0, \tag{4.19}$$

onde $\{\overline{D}_i = \frac{\partial}{\partial \overline{x}_i}\}$ e $\phi^i = y^i \circ \phi$. De fato, da definição de aplicação harmônica e da equação coordenada para o hessiano (4.7), temos que

$$\overline{\Delta}\ \phi^i = Tr\ ((-\Gamma^i_{jk} \circ \phi)(d\phi^* \otimes d\phi^*)\ (dx^j \otimes dx^k)).$$

Mas, x^i é uma zero forma e portanto $d\phi^*(dx^i) = d(x^i \circ \phi) = d\phi^i$. E usando o fato que $Trb = g^{ij} b_{ij}$, para qualquer forma bilinear b,

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}\ \phi^i &= Tr\ ((-\Gamma^i_{jk} \circ \phi)(d\phi^j \otimes d\phi^k)) = (-\Gamma^i_{jk} \circ \phi)\overline{g}^{\beta\gamma}(d\phi^j \otimes d\phi^k)(\frac{\partial}{\partial \overline{x}_\beta}, \frac{\partial}{\partial \overline{x}_\gamma}) \\ &= (-\Gamma^i_{jk} \circ \phi)\ \overline{g}^{\beta\gamma}\ \overline{D}_\beta\ \phi^j\ \overline{D}_\gamma\ \phi^k.\end{aligned}$$

Como era de se esperar, a equação 4.19 coincide com a equação de Euler-Lagrange (veja p.35).

A seguir iremos apresentar um teorema que consideramos o resultado mais importante dessa dissertação. Ele nos auxiliará nas demontrações de resultados sobre aplicações harmônicas.

Teorema 4.34. *A aplicação $\phi : (M, g) \to (N, \text{Hess})$ é harmônica se, e somente se, para todo movimento browniano X em M, o semimartingale $\phi \circ X$ em N é um martingale.*

Demonstração: Seja ϕ uma aplicação harmônica, X um movimento browniano e denotemos por Y o semimartingale $\phi \circ X$. Então para toda $f \in C^\infty(N)$

$$\begin{aligned} f \circ Y &= f \circ \phi \circ X \overset{m}{=} \frac{1}{2}\int \Delta(f \circ \phi) \circ X dt && \text{por (4.15)} \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{Tr}((d\phi^* \otimes d\phi^*)\ \text{Hess}f) \circ X dt && \text{por (4.18)} \\ &= \frac{1}{2}\int (d\phi^* \otimes d\phi^*)\ \text{Hess}f(dX, dX) && \text{por (4.17)} \\ &= \frac{1}{2}\int \text{Hess}f(dY, dY) && \text{por (4.4)} \end{aligned}$$

e Y é um martingale. Reciprocamente, seja X um movimento browniano iniciado no ponto $a \in M$ (a existência deste movimento browniano é demonstrada no capítulo VIII do Emery

[5]), $f \in C^\infty(N)$ e Y o martingale $\phi \circ X$. Daí, com as mesmas justificativas anteriores,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int Tr\ ((d\phi^* \otimes d\phi^*)\ \text{Hess}\ f\ ) \circ X\ dt &= \frac{1}{2}\int (d\phi^* \otimes d\phi^*)\ \text{Hess}\ f\ (dX, dX) \\ &= \frac{1}{2}\int \text{Hess}\ f\ (dY, dY) \stackrel{m}{=} f \circ Y \\ &= f \circ \phi \circ X \stackrel{m}{=} \frac{1}{2}\int \Delta(f \circ \phi) \circ X dt\ . \end{aligned}$$

Isto implica que os processos de variação finita $\int Tr((d\phi^* \otimes d\phi^*)\text{Hess} f) \circ X dt$ e $\int \Delta(f \circ \phi) \circ X dt$ são idênticos (ambos nulos no $t = 0$). Diferenciando no tempo $t = 0$ temos a igualdade,

$$Tr\ ((d\phi^* \otimes d\phi^*)\ \text{Hess}\ f\ ) = \Delta(f \circ \phi)$$

num ponto arbitrário a da variedade M. E portanto ϕ é harmônica. □

Exemplo: Uma função diferenciável $f : (M, g) \to \mathbb{R}$ é harmônica se, e somente se, $\Delta f = 0$.

De fato, por definição de aplicação harmônica, temos que para toda função diferenciável $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\Delta\ (h \circ f) = Tr\ ((df^* \otimes df^*)\ (\text{Hess}\ h\ )).$$

Logo se tomarmos h como sendo a função identidade, temos $\Delta f = 0$. Agora, vamos supor que $\Delta f = 0$. Tome X um movimento browniano qualquer em (M, g). Daí temos que para $\widetilde{f} \in C^\infty(M)$

$$\widetilde{f} \circ X - \widetilde{f} \circ X_0 - \frac{1}{2}\int \Delta\ \widetilde{f} \circ X\ dt$$

é um martingale local, em particular para $\widetilde{f} = f$. Mas como $\Delta f = 0$, resulta que $f \circ X$ é um martingale local. Logo pelo Teorema 4.34, f é harmônica.

4.3 Aplicações Harmônicas e o Cálculo Estocástico

4.3.1 Produto de harmônicas

Com o objetivo de mostrar como a teoria de cálculo estocástico pode colaborar com a geometria, vamos mostrar um resultado que pode ser encontrado no artigo do Catuogno e Ruffino [13]. Mais precisamente, estaremos interessados no teorema que diz que dadas as aplicações harmônicas $\phi_j : M_j \to G$, $j = 1, 2, \ldots, n$, entre variedades riemannianas M_j e um grupo de Lie com a métrica riemanniana bi-invariante, então o produto $\phi_1\phi_2\ldots\phi_n$ é uma aplicação harmônica entre $M_1 \times M_2 \times \ldots M_n$ e G. Para tal demonstração, será necessário basicamente o Teorema 4.34 e uma fórmula de Itô para o logaritmo estocástico do produto de semimartingales num grupo de Lie. Embora, estamos considerando que o grupo G tem uma métrica bi-invariante, o que estamos mais interessados, é que sendo assim, teremos a conexão invariante à esquerda, ou seja, $\nabla^L_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ para campos invariantes à esquerda na álgebra de Lie $\mathcal{G}$.

Logaritmo de um processo estocástico

Definição 4.35. *O logaritmo de um processo X_t num grupo de Lie G (com $X_0 = e$), é a integral de Stratonovich da forma de Maurer-Cartan ao longo X_t, isto é, ele é o seguinte semimartingale na álgebra de Lie $\mathcal{G}$*

$$(\log X)_t = \int_0^t \omega \circ dX_s.$$

Teorema 4.36. *Um processo X_t em grupo de Lie com a conexão invariante à esquerda (G, ∇^L) é um martingale se, e somente se, $\log(X_t)$ é um martingale local na álgebra de Lie $\mathcal{G}$.*

(Ver Hakim [6] ou Catuogno e Ruffino [13])

Proposição 4.37. *Seja $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie. Se X é um semimartingale em G então*

$$\varphi_*(\log X) = \log(\varphi(X)). \tag{4.20}$$

Demonstração: Por definição $\log\varphi(X) = \int \varphi^*\omega_H \circ dX$. Mas pelo Lema 2.28 p.28 temos que

$$\log\varphi(X) = \int \varphi^*\omega_H \circ dX = \int \varphi_*\omega_G \circ dX = \varphi_* \log X$$

pois φ_* é linear. □

Lema 4.38. *Dados os semimartingales X e Y em G, temos as seguintes fórmulas de Itô :*

a) $\log(XY) = \int Ad(Y^{-1}) \circ d(\log X) + \log Y$;

b) $\log(X^{-1}) = -\int Ad(X) \circ d(\log X)$.

Demonstração: A fórmula do item a) decorre principalmente da Proposição 2.29:

$$\begin{aligned}
\log(XY) &= \int \omega \circ dm(X,Y) \\
&= \int m^*\omega \circ d(X,Y) \\
&= \int \big(Ad^{-1}(\pi_2)\pi_1^*\omega + \pi_2^*\omega\big) \circ d(X,Y) \\
&= \int Ad(Y^{-1}) \circ d(\int \omega \circ dX) + \int \omega \circ dY \\
&= \int Ad(Y^{-1}) \circ d\log X + \log Y.
\end{aligned}$$

Para o item b) basta aplicar a identidade a) com $Y = X^{-1}$. □

Daremos agora o teorema que foi considerado como foco para a maioria dos resultados apresentados nesta dissertação (ver Catuogno e Ruffino [13]).

Teorema 4.39. *Seja $\phi_j : M_j \to G$, $j = 1, 2, \ldots, n$, aplicações harmônicas de variedades riemannianas M_j para o grupo de Lie (G, ∇^L). Então o produto $\phi_1\phi_2\ldots\phi_n$ é uma aplicação harmônica entre $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ e G.*

Demonstração: É suficiente provar para $n = 2$. Considere $f : M_1 \to G$ e $g : M_2 \to G$ duas aplicações harmônicas. Sejam B^1 e B^2 movimentos brownianos independentes em M_1 e M_2 respectivamente. Então (B^1, B^2) é um movimento browniano no espaço produto $M_1 \times M_2$. Nós temos de provar que $f(B^1)g(B^2)$ é um martingale no grupo G (veja Teorema 4.34). Pelo Teorema 4.36 este produto é um martingale se, e somente se, seu logaritmo é um martingale local. Pela fórmula de Itô, item (a) do Lema 4.38, nós temos que

$$\log(f(B^1)g(B^2)) = \int Ad(g(B^2)^{-1}) \circ d(\log f(B^1)) + \log g(B^2). \tag{4.21}$$

Por hipótese, $\log f(B^1)$ e o último termo $\log g(B^2)$ são martingales. Agora, a integral de Stratonovich se diferencia da integral de Itô por um termo de correção (variação quadrática) que é nulo, pois B^1 e B^2 são independentes (veja Proposição 1.27, p.14). Logo, ela reduz a uma integral de Itô com relação ao martingale $\log f(B^1)$, o que implica que a integral de Stratonovich em (4.21) é um martingale. Portanto $\log(f(B^1)g(B^2))$ é um martingale na álgebra de Lie $\mathcal{G}$, e o produto $f \cdot g$ é harmônico. □

Exponencial de um processo estocástico

Definição 4.40. *Considere um semimartingale M_t na álgebra de Lie $\mathcal{G}$. Definimos a exponencial estocástica à esquerda $\epsilon(M)$ de M_t como sendo o processo estocástico X_t que é solução da equação invariante à esquerda de Stratonovich em G:*

$$\begin{cases} dX_t = L_{X_t *} \circ dM_t, \\ X_0 = e. \end{cases}$$

Proposição 4.41. *O logaritmo estocástico é a inversa da exponencial estocástica ϵ.*

Ver Hakim [6] ou Catuogno e Ruffino [13].

Exemplo: (Produto de geodésicas é harmônica): Seja G um grupo de Lie com a métrica bi-invariante. Considere $X_1, \ldots, X_n$ elementos da álgebra de Lie $\mathcal{G}$. Então a aplicação $f : (\mathbb{R}^n, <,>) \rightarrow G$ definida por

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \exp(t_1 X_1) \cdot \ldots \cdot \exp(t_n X_n)$$

é harmônica. Novamente, com $n = 2$, dado (B_t^1, B_t^2) um movimento browniano no plano $\mathbb{R}^2$, então:

$$\begin{aligned} & \log(\exp(B_t^1 X_1) \exp(B_t^2 X_2)) \\ = & \int Ad((\exp(B_s^2 X_2))^{-1}) \circ d(\log(\exp(B_t^1 X_1))) + \log(\exp B_t^2 X_2) \\ = & \int Ad((\exp(B_s^2 X_2))^{-1}) \circ d(B_t^1 X_1) + B_t^2 X_2 \end{aligned}$$

onde usando os mesmos argumentos do Teorema 4.39 temos que a integral de Stratonovich é um martingale. Além disso, $B_t^i X_i$ é um movimento browniano 1-dimensional e portanto é um martingale. Logo, através do Teorema 4.36 temos que $f(B_t^1, B_t^2)$ é um martingale, o que implica que f é harmônica. Daremos agora um corolário que é parcialmente uma recíproca do Teorema 4.39 (ver Catuogno e Ruffino [13]).

Corolário 4.42. *Sejam $f : M \rightarrow G$ e $g : N \rightarrow G$ duas aplicações diferênciáveis C^∞. Se o produto $f \cdot g$ é harmônica e uma das aplicações, f ou g é harmônica, então a outra aplicação também é harmônica.*

Demonstração: A prova segue da equação (4.21), onde a integral de Stratonovich se resume numa integral de Itô, devido a independência dos movimentos brownianos. O lado esquerdo da equação é um martingale por hipótese e pelo Teorema 4.36. Se f é harmônica então o integrando é um martingale, assim $\log g(B^2)$ também é um martingale e g é harmônica. Por outro lado, se g é harmônica, então a integral de Itô é um martingale, pois é soma de martingales. E pela decomposição de Doob-Meyer, segue que $\log(f(B^1))$ é um martingale e f é harmônica. □

Observação 4.43. *Para verificar que a recíproca do Teorema 4.39 não é verdadeira, basta tomar a função harmônica f de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ (em ambos com a conexão flat) dada por $f(x,y) = \sinh(x)\sin(y)$. Que f é harmônica é suficiente verificar que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Mas as funções $\sinh(x)$ e $\sin(y)$ não são harmônicas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

4.3.2 Condições probabilísticas nas variedades

Esta seção consiste basicamente em mostrar que, sob determinadas condições estocásticas para as variedades, uma aplicação harmônica é constante. Para isso estaremos usando o Teorema (unicidade de martingale) 4.24 e uma caracterização para variedades que chamaremos de propriedade do acoplamento. Os resultados que estaremos abordando são encontrados nas referências Emery [5], Hsu [7] e Kendall [8].

Definição 4.44. *Dizemos que uma variedade diferenciável M tem a propriedade do acoplamento, se dados x e y pertencente a M, existe um movimento browniano iniciado em x, B^x, e outro iniciado em y, B^y, tal que $B^x_T = B^y_T$ para algum tempo de parada T.*

Esta propriedade probabilística na variedade tem como equivalência na geometria a curvatura de Ricci não ser negativa (ver Kendall [8]).

Sob determinadas propriedades a aplicação harmônica é constante

Seja (M, ∇^M) uma variedade diferenciável com a propriedade do acoplamento, para um tempo de parada T limitado, e (N, ∇^N) variedade diferenciável satisfazendo o Teorema 4.24

(unicidade de martingale) no sentindo global. Então se a aplicação $F : M \to N$, C^{∞}, é harmônica temos que F é uma aplicação constante. De fato, tome x e y pertencente a variedade M, e B^x e B^y movimento browniano em M tal que $B_T^x = B_T^y$. Como F é harmônica, temos que $X_t = F(B_t^x)$ e $Y_t = F(B_t^y)$ são ∇^N-martingales. E além disso, pela unicidade de martingale

$$X_T = F(B_T^x) = F(B_T^y) = Y_T, \text{ o que implica } X_t = Y_t \text{ , para todo } t \in [0, T].$$

Logo $X_0 = Y_0$. Mas $X_0 = F(B_0^x) = F(x)$ e $Y_0 = F(B_0^y) = F(y)$, e portanto temos que F é constante.

Exemplo:

(Parte I) É conhecido (ou fácil de mostrar) que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é harmônica se, e somente se, $f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$. E portanto f não é necessariamente uma constante. Por outro lado $\mathbb{R}$ satisfaz a unicidade de martingale no sentindo global (veja o início da demonstração do Teorema 4.24). O que implica que $\mathbb{R}$ não satisfaz a propriedade do acoplamento para um tempo de parada limitado, pois do contrário, teríamos que, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é harmônica se, e somente se, é uma função constante.

(Parte II) $\mathbb{R}$ satisfaz a propriedade do acoplamento para um T não limitado: Sejam B^x, B^y movimentos brownianos independentes em $\mathbb{R}$ iniciados em x e y respectivamente. Defina

$$W(t) = \frac{1}{2}(B^x(t) - B^y(t)),$$

e temos que:

(i) $W(t)$ é um martingale, pois é soma de martingales;

(ii) Sua variação quadrática é t:

$$[W(t), W(t)] = \frac{1}{2}[B^x(t), B^x(t)] - [B^x(t), B^y(t)] + \frac{1}{2}[B^y(t), B^y(t)] = t.$$

Logo $W(t)$ é um movimento browniano e, sendo assim, existe tempo de parada T não limitado (ver Revuz e Yor [12]) tal que $W(T) = 0$, e portanto $B^x(T) = B^y(T)$.

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, M. P. – *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, 1988.

[2] Cheeger, J. and Ebin, D. – *Comparison theorems in Riemannian Geometry*, North Holland, 1975.

[3] Eells, J. and Sampson, J. H. – *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 86 (1964), 109-160.

[4] Elworthy, K. D. – *Geometric aspects of diffusions on manifolds*, in Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XV-XVII, 1985-1987, ed. by P. Diaconis et al., Lect. Notes in Math., 1382, Springer-Verlag (1982).

[5] Emery, M. – *Stochastic Calculus in Manifolds*, Springer 1990.

[6] Hakim-Dowek, M. and Lépingle, D. – L'exponentielle stochastique des groupes de Lie. Séminaire de Probabilité **XX**, *Lecture Notes in Math.*, **1059**, 352–374. Springer, 1986.

[7] Hsu, P. – *Stochastic Analysis on Manifolds*, Vol.38. Graduate Studies in Mathematics, 2002.

[8] Kendall, S. – *From Stochastic Parallel Transport to Harmonic Maps*, University of Warwick, 1998.

[9] Kobayashi, S. and Nomizu, K. – *Foundations of Differential Geometry*, Vol.1. Interscience Publishers, 1969.

[10] Oksendal, B. – *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, 2000.

[11] PROTTER, P. – *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, 1990.

[12] REVUZ, D. AND YOR, M. – *Continuos Martingale and Brownian Motion*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[13] CATUOGNO, J. P. E RUFFINO, P. R. C.– *Product of harmonic maps is harmonic: a stochastic approach*, Relatório de Pesquisa 48/04, IMECC, UNICAMP, 2004.

[14] URAKAWA, H. – *Calculus of Variations and Harmonic Maps*. Translations on Mathematical Monographs AMS, Vol. **132**, 1993.