Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC
Departamento de Matemática

O Problema de Cauchy para o Sistema de Liu-Kubota-Ko

Dissertação de Mestrado

Luciana Maria Mendonça Soares

Orientador: Prof.(a) Dr.(a) Márcia A. Guimarães Scialom

Campinas
Março, 2002

O Problema de Cauchy para o Sistema de Liu-Kubota-Ko

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Luciana Maria Mendonça Soares, e aprovado pela Comissão Julgadora.

Campinas, Março de 2002

Márcia Scialom

Prof(a). Dr(a).Márcia A. Guimarães Scialom
Orientadora

Banca Examinadora:

1. Prof(a). Dr(a).Márcia Assumpção G. Scialom
2. Prof. Dr. Orlando Lopes
3. Prof. Dr. Rafael José Iório Júnior

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Soares, Luciana Maria Mendonça

So11p O Problema de Cauchy para o Sistema de Liu-Kubota-Ko/Luciana Maria Mendonça Soares -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Márcia Assumpção Guimarães Scialom.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cauchy, Problemas de. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Semigrupos de operadores. I. Scialom, Márcia Assumpção Guimarães. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 26 de março de 2002 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). MARCIA ASSUMPÇÃO GUIMARÃES SCIALOM

Prof (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES

Prof (a). Dr (a). RAFAEL JOSÉ IÓRIO JÚNIOR

Dedico este trabalho aos meus queridos pais
José Mendonça Lara e Rizoleta Soares Lara
pelo dom maior: a vida.

Agradecimentos

Agradeço:

A Deus, pela coragem que me deste nos momentos difíceis.

À Márcia Scialom, por seus preciosos ensinamentos, sugestões e críticas . Também por sua compreensão, conselhos e amizade no decorrer de todo este trabalho.

À banca examinadora pelos conselhos que vieram a enriquecer mais o trabalho.

Ao Felix Soriano pelas sugestões dadas por e-mail para a solução do problema.

Ao meu noivo, Fábio do Carmo Bragança, pela sua paciência, seu companheirismo e seus conselhos nas horas de cansaço e dificuldades.

Aos amigos, Rogério Picanço, Rogério Casagrande e Gilberlândio Dias, pelo apoio nos estudos, principalmente às vésperas das provas.

Aos amigos, Mércio Botelho, Benaia e Lucy Tiemi Takarashi, pela amizade demonstrada durante esta fase que estou concluindo.

À Fapesp pelo suporte financeiro indispensável.

A todos meus professores pelas lições e em especial à: Hebe de Azevedo Biagioni e Orlando Lopes.

À minha irmã e madrinha Ana Maria Mendonça, pelo constante incentivo e pelo apoio financeiro suficiente para minha permanência na vida estudantil durante os momentos mais difíceis.

Abstract

In this work we consider the initial value problem for the Liu-Kubota-Ko system

$$\begin{cases} u_t + auu_x - \gamma_1 \left(M_{H_1}\right) u_x - \gamma_2 \left(M_{H_2}\right) u_x + \gamma_2 \left(N_{H_2}\right) v_x = 0 \\ v_t + bvv_x - \gamma_3 \left(M_{H_3}\right) v_x - \gamma_4 \left(M_{H_2}\right) v_x + \gamma_4 \left(N_{H_2}\right) u_x = 0 \\ u(x,0) = u_0 \in H^s, s > \frac{3}{2} \\ v(x,0) = v_0 \in H^s, s > \frac{3}{2} \end{cases} \tag{LKK}$$

where the symbol of the operator N_{H_2} is $n(k) = \frac{k}{\sinh kH_2}$, and the symbol of the operator M_{H_i} is $m_i(k) = kcoth(kH_i) - \frac{1}{H_i}$.

The above system is a physical model for waves in laboratory studies and in certain regime in oceans and lakes. In natural environments, various effects conspire to produce water basins having density variations with regard to depth. Often these variations consist of rather thin regions of substantial variation concatenated with larger regions of essentially homogeneous fluid. In this situation a region of sharp variation is named a pycnocline.

A more complex situation is such that the underlying stratification features two pycnoclines. In the case the pycnoclines are relatively far apart, but not so distant that motion on one is decoupled from the other, Liu, Kubota & Ko have derived the above model consisting of a coupled pair of intermediate long wave-type equations.

In [ABS], this system was treated mainly from the point of view of solitary waves. In this work we use Kato's theory (see [K1] and [K4]) for quasi linear evolution equation to show the local well-posedness of the initial value problem associated to the LKK system in the Sobolev space $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ for $s > \frac{3}{2}$.

Resumo

Neste trabalho consideramos o seguinte modelo para o movimento de ondas longas internas:

$$\begin{cases} u_t + auu_x - \gamma_1 \left(M_{H_1}\right) u_x - \gamma_2 \left(M_{H_2}\right) u_x + \gamma_2 \left(N_{H_2}\right) v_x = 0 \\ v_t + bvv_x - \gamma_3 \left(M_{H_3}\right) v_x - \gamma_4 \left(M_{H_2}\right) v_x + \gamma_4 \left(N_{H_2}\right) u_x = 0 \end{cases} \tag{LKK}$$

onde o símbolo do operador N_{H_2} é $n(k) = \frac{k}{\sinh kH_2}$, e o símbolo do operador M_{H_i} é $m_i(k) = k coth(kH_i) - \frac{1}{H_i}$.

Este sistema composto de duas equações acopladas foi deduzido por Liu, Kubota & Ko (Ver [LKK]). Ele descreve a evolução das amplitudes da onda longa interna ao longo de duas Pycnoclines vizinhas.

Estudamos o problema de cauchy associado ao modelo descrito acima. Para demontrar que o problema é localmente bem posto, usamos a teoria de T. Kato para Equações de Evolução Quase Lineares (Ver [K1]). Neste trabalho mostramos que o problema de valor inicial associado ao sistema LKK possui solução local no espaço $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, com $s > \frac{3}{2}$ e além disso a solução depende continuamente dos dados iniciais.

Índice

Introdução

Neste trabalho consideramos um sistema físico que serve como modelo para ondas estudadas em laboratório e em certos regimes de oceanos e lagos.

Em ambientes naturais, vários efeitos colaboram para a ocorrência de bacias de água contendo densidades diferentes de acordo com a profundidade. A região entre dois fluidos de densidades diferentes é chamada "Pycnocline". Por causa das variações de densidade ao redor da pycnocline, elas podem agir como condutoras do movimento de ondas gravitacionais, como ocorre com a variação de densidade na interface água-ar. Tais movimentos de ondas internas são características comuns de oceanos e lagos naturais (veja [HF] e [ABPC]). Podemos citar, por exemplo, o Lago Seneca no estado de Nova Yorque, o qual durante o verão e outono é termicamente estratificado, isto é, possui uma camada superficial quente (máxima de 23°C) e uma camada imersa de baixa temperatura chegando a 4°C, temperatura de densidade máxima da água. Nesse lago ondas internas foram detectadas e são comuns no verão e inverno ([HF]). Quando a variação de densidade é causada pela diferença de temperatura, a pycnocline é denominada "Termocline".

A. K. Liu, T. Kubota e D. R. S. Ko em [LKK] deduziram o modelo descrito abaixo formado de um sistema de equações acopladas que descreve a evolução das amplitudes da onda longa interna ao longo de cada uma das duas pycnoclines vizinhas, com velocidades bem próximas:

$$\begin{cases} u_t + \alpha_1 u u_x - \gamma_1 \partial_x^2 \mathcal{H}_1(u) - \gamma_2 \left(\partial_x^2 \mathcal{H}_2(u) - \partial_x^2 \mathcal{J}(v)\right) = 0 \\ v_t - \Delta c v_x + \alpha_2 v v_x - \gamma_3 \partial_x^2 \mathcal{H}_3(v) - \gamma_4 \left(\partial_x^2 \mathcal{H}_2(v) - \partial_x^2 \mathcal{J}(u)\right) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

onde o operador $\mathcal{H}_i$ ($i = 1, 2,$ ou 3) é definido como sendo a convolução com o núcleo G_i

dado por

$$G_i(x) = \frac{1}{2H_i}\left\{\coth\left(\frac{\pi x}{2H_i}\right) - sgn(x)\right\}$$

e $\mathcal{J}$ é a convolução com o núcleo J dado por

$$J(x) = \frac{1}{2H_2}\tanh\left(\frac{\pi x}{2H_2}\right).$$

Em outras palavras,

$$(\mathcal{H}_i u)(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(x-\xi)u(\xi,t)d\xi \qquad \text{e} \qquad (\mathcal{J}u)(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} J(x-\xi)u(\xi,t)d\xi.$$

O modelo em questão descreve um fluido confinado entre dois planos horizontais que possui uma estratificação uniforme ρ dependendo somente da coordenada z. São consideradas duas pycnoclines distintas e vizinhas, que estão separadas mas não o bastante para serem consideradas desacopladas (veja figura 1).O deslocamento da onda é considerado uniforme na coordenada y do plano cartesiano canônico, o plano xy é coplanar com a superfície confinada e z é orientada positivamente na direção oposta à ação gravitacional. Em consequência, uma análise bidimensional é apropriada já que as ondas propagam na direção do eixo x com uma estrutura uniforme na variável y.

A variável dependente $u(x,t)$ representa o desvio do centro da pycnocline superior de sua posição de equilíbrio no ponto x e no tempo t. A variável dependente $v(x,t)$ representa o desvio do centro da pycnocline inferior de seu ponto de equilíbrio no ponto x e no tempo t.

O sistema está escrito num referencial móvel com a velocidade c_1 das ondas longas infinitesimais na pycnocline superior. Os parâmetros físicos $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4 correspondem à natureza da onda, as constantes α_1, γ_1 e γ_2 estão relacionadas com a pycnocline superior e as constantes α_2, γ_3 e γ_4 com a pycnocline inferior, enquanto Δc é a diferença $c_1 - c_2$ entre as velocidades das ondas longas nas duas pycnoclines.

Liu, Kubota & Ko estavam enteressados na interação e na transferência de energia entre as ondas das duas pycnoclines. Os resultados numéricos obtidos mostraram a existência de soluções não lineares periódicas em cada pycnocline, e a transferência de energia entre elas foi completa somente quando se moviam juntas ou com velocidades muito próximas. Eles notaram que a amplitude da onda na pycnocline superior decrescia à medida que a da pycnocline inferior crescia e vice-versa. Isto devido à transferência de energia entre as ondas das duas pycnoclines. O sistema modelo que eles desenvolveram predisse o fenômeno "leapfrogging" para ondas solitárias internas que foi posteriormente observado em laboratório por Weidman & Johnson [WJ].

O sistema de Liu-Kubota-Ko que estamos considerando foi estudado por J. P. Albert, J. L. Bona e J. -C. Saut em [ABS]. Neste trabalho o principal interesse de Albert et al. foi o estudo da existência de ondas solitárias. No contexto de uma única equação, uma onda solitária é uma solução especial da forma $u(x,t) = \varphi(x - ct)$, onde φ é uma função real. Estas ondas têm a notável propriedade de se propagarem sem mudar de forma com uma velocidade constante. No trabalho acima foi mostrado a existência de ondas solitárias acopladas para o sistema (1) impondo algumas condições sobre os parâmetros físicos.

De acordo com [ABS], o sistema de Liu-Kubota-Ko pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} u_t + \alpha_1 u u_x - \gamma_1 (M_1 u)_x - \gamma_2[(M_2 u)_x - (Nv)_x] = 0 \\ v_t - \Delta c v_x + \alpha_2 v v_x - \gamma_3 (M_3 v)_x - \gamma_4 [M_2 v)_x - (Nu)_x] = 0 \end{cases} \tag{2}$$

onde M_i ($i = 1, 2$ ou 3) é o operador multiplicador de Fourier definido por

$$\widehat{M_i u}(\xi) = m_i(\xi)\widehat{u}(\xi)$$

cujo símbolo m_i é dado por

$$m_i(\xi) = \xi \coth(\xi H_i) - \frac{1}{H_i}.$$

O operador N é o operador de Fourier com símbolo n definido por

$$n(\xi) = \frac{\xi}{\sinh(\xi H_2)}.$$

Nosso trabalho consiste em estudar o problema de valor inicial para o sistema de Liu-Kubota-Ko usando a teoria para Equações de Evolução Quase-lineares desenvolvida por T. Kato em [K1], a qual foi adaptada para o estudo de sistemas. Mostramos a existência, unicidade e a dependência contínua da solução dos dados iniciais.

Em [ABS] o resultado sobre existência de solução para o problema de Cauchy associado ao sistema de Liu-Kubota-Ko é enunciado sem demonstração, apenas com a observação de que a demonstração segue como consequência dos argumentos usados por Abdelouhab et al. em [ABFS]. Não está claro para nós de que os procedimentos indicados levem ao resultado esperado. Por esse motivo resolvemos atacar o problema de valor inicial usando uma ferramenta totalmente diferente daquela sugerida em [ABFS].

Inicialmente, o Teorema do Kato foi utilizado por vários pesquisadores para provar resultados de existência de solução de equações dispersivas não lineares no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$. T. Kato no mesmo trabalho onde demonstrou o Teorema abstrato para Equações de Evolução Quase-lineares [K1] apresentou uma aplicação do Teorema mostrando em particular a existência de solução local para a equação de Korteweg-de Vries (KdV) no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3$. Posteriormente, Kato em [K2] refinou seu trabalho mostrando existência de solução para a KdV no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$. Esse valor $s = \frac{3}{2}$ foi chamado por Rafael Iório em [ILS] de Barreira de Sobolev. A justificativa para o nome é simples. De fato, pelo Teorema da Imersão de Sobolev (ver Teorema 1.6.6) se u é uma função em $H^s(\mathbb{R})$ então uu_x é uma função contínua em $H^{s-1}(\mathbb{R})$ para $s-1 > \frac{1}{2}$, ou seja, $s > \frac{3}{2}$. A aplicação da teoria do Kato é feita sem muita dificuldade em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, com s grande. Mostrar que um problema de Cauchy é bem posto em $H^s(\mathbb{R})$, $s \leq \frac{3}{2}$ é um problema mais delicado e requer uma aplicação cuidadosa da teoria.

Até agora, vários pesquisadores deram contribuições ao estudo do problema de Cauchy associado a Equações diferenciais parciais não lineares ou a sistemas de Equações diferenciais parciais não lineares utilizando a Teoria do Kato tem sido feitas em espaços de Sobolev H^s de ordem $s > \frac{3}{2}$.

Em [So], Félix Soriano estudou o problema de Cauchy para o seguinte sistema que é um modelo físico de ondas longas em canais largos ou mar aberto

$$\begin{cases} \partial_t u + \nu u + \partial_x v + u\partial_x u = \mu \Delta u \\ \partial_t v + \nu v + \partial_x(uv + u - \partial_x^2 u) + \partial_x^{-1}\partial_y^2 u = \mu \Delta v \\ u(x,y,0) = \phi(x,y) \\ v(x,y,0) = \psi(x,y). \end{cases}$$

Ele usou uma mudança de variável que permitiu reescrever o sistema de uma tal forma que o Teorema do Kato pudesse ser aplicado. Apesar do sistema de Liu-Kubota-Ko ter característica diferente do sistema utilizado por F. Soriano, uma mudança de variável semelhante permitiu-nos obter um resultado satisfatório em $H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$.

Esse trabalho é composto de três capítulos. No primeiro capítulo apresentamos alguns resultados de Análise Funcional e Teoria de Semigrupos que serão utilizados nos capítulos seguintes. O segundo capítulo é dedicado ao Teorema do Kato. No terceiro capítulo estudamos o Sistema de Liu-Kubota-Ko.

Estaremos usando a mesma notação encontrada nos livros e artigos que tratam desse assunto, mas não existe uma notação totalmente padrão. Daremos abaixo uma lista das principais notações que serão utilizadas no texto e que podem causar alguma dúvida.

$B(Y, X)$ = Espaço dos operadores lineares limitados de Y em X.

$Dom(A)$ =Domínio do operador A.

$\mathrm{Im}(A)$ = Imagem do operador A.

$\mathrm{Re}(z)$ = Parte real de z.

X^* = O dual topológico de X.

$C([0, T]; X)$ = Espaço das funções contínuas de $[0, T]$ em X.

$L^p(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < \infty\}$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Cálculo em Espaços de Banach

Nesta seção apresentaremos definições e alguns resultados em espaços de Banach que serão utilizados nos capítulos seguintes. No que segue X e Y representam dois espaços de Banach.

Definição 1.1.1 *Seja u uma função definida no conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ com valores em X. Dizemos que u é fracamente contínua em $t_0 \in I$ se*

$$\lim_{t \to t_0} |\varphi(u(t)) - \varphi(u(t_0))| = 0, \qquad \forall \varphi \in X^*. \tag{1.1}$$

Dizemos que u é fortemente contínua em $t_0 \in I$ se

$$\lim_{t \to t_0} \|u(t) - u(t_0)\|_X = 0. \tag{1.2}$$

Definição 1.1.2 *Seja T uma aplicação do conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ com valores em $B(Y, X)$, dizemos que T é fracamente contínua em $t_0 \in I$ se*

$$\lim_{t \to t_0} |\varphi[T(t)u] - \varphi[T(t_0)u]| = 0, \qquad \forall u \in Y \quad e \quad \forall \varphi \in X^*. \tag{1.3}$$

T é fortemente contínua em $t_0 \in I$ se

$$\lim_{t \to t_0} \|T(t)u - T(t_0)u\|_X = 0, \qquad \forall u \in Y.$$

Definição 1.1.3 *Seja (I, β, m) um espaço mensurável, onde m é de medida completa e $m(I) < \infty$. Uma função $u : I \to X$ é fortemente mensurável se existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples tal que*

$$\|u_n(t) - u(t)\|_X \to 0$$

para quase todo $t \in I$ quando $n \to \infty$. A função u é fracamente mensurável se $\varphi \circ u$ é mensurável para toda $\varphi \in X^*$.

Definição 1.1.4 *A função $u : I \to X$ é dita de imagem separável se $u(I)$ é separável em X, e de imagem quase separável se existe um conjunto $J \subseteq I$ de medida nula tal que $u(I - J)$ é separável em X.*

Note que se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo fechado e u é fracamente contínua, então u é fortemente mensurável. De fato, como $\varphi \circ u$ é contínua para toda $\varphi \in X^*$, segue que $\varphi \circ u$ é mensurável, ou seja, u é fracamente mensurável. E mais, como $u(I)$ está contido no espaço separável gerado por $\{u(t) : t \in \mathbb{Q} \cap I\}$, temos que u é de imagem separável. Segue do teorema de Pettis[1]que u é fortemente mensurável.

1.2 Semigrupos de Classe C_0

Nesta seção estaremos considerando uma família a um parâmetro$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares em $B(X)$. Alguns resultados serão enunciados sem demonstração já que estão disponíveis em [Pa].

Definição 1.2.1 *A família $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares em X se*

(i) $T(0) = I$, *(I é o operador identidade em X).*

(ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$ *para todo $t, s \geq 0$.*

Definição 1.2.2 *Um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares é de classe C_0 em X se*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0 \quad \text{para cada } x \in X. \tag{1.4}$$

[1]Uma aplicação é fortemente mensurável se, e somente se, é fracamente mensurável de imagem quase separável. Ver [RS].

Proposição 1.2.3 *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 em X. Então existem constantes $\beta \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\|_{B(X)} \leq Me^{\beta t} \qquad \textit{para todo } t \geq 0.$$

Demonstração: Inicialmente mostraremos que existe $\mu > 0$ tal que $\|T(t)\|_{B(X)}$ é limitado para $0 \leq t \leq \mu$. Suponha que isto seja falso; então existe uma sequência $\{t_n\}$ satisfazendo $t_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ e $\|T(t_n)\|_{B(X)} \geq n$. Do Teorema da Limitação Uniforme segue que para algum $x \in X$, $\|T(t_n)x\|_X$ não é limitado, o que contraria o fato de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ser um semigrupo de classe C_0 (pois $\lim_{n\to\infty} \|T(t_n)x\|_X = \|x\|_X$). Assim, $\|T(t)\|_{B(X)} \leq M$ para $0 \leq t \leq \mu$. Como $\|T(0)\|_{B(X)} = 1$ segue que $M \geq 1$. Considere $\beta = \mu^{-1}\log M \geq 0$. Dado $t \geq 0$ nós temos $t = n\mu + \delta$ onde $0 \leq \delta \leq \mu$. Logo, pela propriedade de semigrupo, temos

$$\begin{aligned}
\|T(t)\|_{B(X)} &= \|T(n\mu + \delta)\|_{B(X)} = \|T(n\mu)T(\delta)\| \\
&= \|T(\mu)^n T(\delta)\| \leq M^n M \\
&\leq MM^{\frac{t}{\mu}} = Me^{\beta t}.
\end{aligned}$$

□

Definição 1.2.4 *Se $\beta = 0$ e $M = 1$ então o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é dito semigrupo de classe C_0 de contração.*

Corolário 1.2.5 *Se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 então para cada $x \in X$, a aplicação $t \to T(t)x$ é uma função contínua.*

Demonstração: Sejam $t, h \geq 0$. A continuidade da função $t \to T(t)x$ segue da seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\|T(t+h)x - T(t)x\|_X &\leq \|T(t)\|_{B(X)} \|T(h)x - x\|_X \\
&\leq Me^{\beta t} \|T(h)x - x\|_X ,
\end{aligned}$$

e para $t \geq h \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}\|T(t-h)x - T(t)x\|_X &\leq \|T(t-h)\|_{B(X)} \|x - T(h)x\|_X \\ &\leq Me^{\beta t} \|x - T(h)x\|_X .\end{aligned}$$

□

O corolário 1.2.5 afirma que os semigrupos de classe C_0 tem a propriedade da continuidade forte, ou seja, para cada $x \in X$, $\|T(t)x - T(s)x\|_X \to 0$ quando $t \to s$. Assim são também chamados fortemente contínuos.

Definição 1.2.6 *O gerador infinitesimal do semigrupo de classe C_0 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ em X é o operador linear A em X definido por*

$$Dom(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} existe \right\}$$

e

$$A(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x \bigg|_{t=0}, \quad para\ x \in Dom(A).$$

Proposição 1.2.7 *Seja A o gerador infinitesimal do semigrupo de classe C_0 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Então*

a) Para $x \in X$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x \tag{1.5}$$

b) Para $x \in X$, $\int_0^t T(s)xds \in Dom(A)$ e

$$A\left(\int_0^t T(s)xds \right) = T(t)x - x \tag{1.6}$$

c) Se $x \in Dom(A)$ então $T(t)x \in Dom(A)$ e

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax \tag{1.7}$$

d) Para $x \in Dom(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau \tag{1.8}$$

Demonstração: A parte (a) segue diretamente do Teorema do Valor Médio para integrais (veja [Mu]), pois

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}T(\tau)xh \\ &= \lim_{h\to 0}T(\tau)x,\end{aligned}$$

onde $\tau \in [t, t+h]$. Assim, $\tau \to t$ quando $h \to 0$. Pela continuidade da aplicação $t \to T(t)x$ temos que $\lim\limits_{h\to 0}T(\tau)x = T(t)x$.

Para provar (b) seja $x \in X$ e $h > 0$. Então

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}\int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)ds \\ &= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds.\end{aligned}$$

Pelo item (a) o lado direito da expressão acima tende a $T(t)x - x$ quando $h \to 0$, o que prova (b).

Para provar (c) seja $x \in Dom(A)$ e $h > 0$. Então

$$\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x \to T(t)Ax \quad \text{quando} \quad h \to 0.$$

Assim, $T(t)x \in Dom(A)$ e $\frac{d^+}{dt}T(t) = AT(t)x = T(t)Ax$. Falta mostrar que, para $t \geq 0$, a derivada à esquerda de $T(t)x$ existe e é igual a $T(t)Ax$. Isto segue de

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right] \\ &= \lim_{h\to 0}T(t-h)\left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right] + \lim_{h\to 0}(T(t-h)Ax - T(t)Ax)\end{aligned}$$

e do fato de ambos os termos do lado direito da igualdade valerem zero. De fato, o primeiro termo vale zero pois $x \in Dom(A)$ e $\|T(t-h)\|_{B(X)}$ é limitado para $0 \leq h \leq t$ e o segundo pela continuidade forte de $T(t)$.

A parte (d) é obtida diretamente por integração da expressão (1.7) de s a t . $\square$

Proposição 1.2.8 *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, então $Dom(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração: Para cada $x \in X$ considere $x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds$. Da parte (b) da Proposição 1.2.7, $x_t \in Dom(A)$ para $t > 0$ e da parte (a) da mesma Proposição $x_t \to x$ quando $t \to 0$. Segue que $\overline{Dom(A)} = X$. A linearidade de A é evidente. Para mostrar que A é fechado, seja $x_n \in Dom(A)$ tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$ quando $n \to \infty$. Da parte (d) da Proposição 1.2.7 temos

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds. \tag{1.9}$$

O integrando do lado direito de (1.9) converge uniformemente para $T(s)Ay$ em intervalos limitados. Consequentemente, fazendo $n \to \infty$ em (1.9) temos

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ayds. \tag{1.10}$$

Dividindo (1.10) por $t > 0$ e fazendo $t \to 0$, nós vemos, usando a parte (a) da Prop.1.2.7, que $x \in Dom(A)$ e $A(x) = y$. □

Definição 1.2.9 *O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ tal que $(\lambda I - A)$ é invertível e $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear em X. A família $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ é chamada de resolvente de A.*

Proposição 1.2.10 *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\|_{B(X)} \leq Me^{\beta t}$se, e somente se,*

(i) A é fechado e $Dom(A)$ é denso em X.

(ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ contém (β, ∞) e $\|R(\lambda : A)^n\|_{B(X)} \leq \frac{M}{(\lambda-\beta)^n}$ para $\lambda > \beta$ e $n = 1, 2, \ldots$.

Demonstração: A demonstração desta proposição segue dos argumentos utilizados na prova do Teorema de Hille-Yosida(Veja [Pa], Teor 3.1, pag 8) e pode ser encontrada com detalhes em [Pa], pag 20. □

Definição 1.2.11 *Seja X^* o espaço dual de X e S um operador linear com domínio denso em X. O adjunto S^* de S é um operador linear que vai de $Dom(S^*) \subset X^*$ em X^* definido como segue: $Dom(S^*)$ é o conjunto de todos os elementos $x^* \in X^*$ tal que existe um $y^* \in X^*$ satisfazendo*

$$x^*(Sx) = y^*(x), \qquad \text{para todo } x \in Dom(S)$$

e se $x^* \in Dom(S^*)$ então $y^* = S^*x^*$.

Definição 1.2.12 *Seja X^* o espaço dual de X e $F_x = \{x^* : x^* \in X^* \text{ e } x^*(x) = \|x\|^2$. Um operador A é dissipativo se para cada $x \in Dom(A)$, existe um $x^* \in F_x$ tal que* $\mathrm{Re}(x^*(Ax)) \leq 0$.
Em particular, se X é um espaço de Hilbert munido do produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, temos que A é dissipativo se para cada $x \in Dom(A)$, $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \leq 0$.

É importante notar que um operador linear A é dissipativo se, e somente se,

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \qquad \text{para todo } \ x \in Dom(A) \ \text{ e } \lambda > 0.$$

A demonstração desta equivalência se encontra em [Pa].

Teorema 1.2.13 *(Lumer-Phillips): Seja A um operador linear com domínio denso em X.*

a) Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem de $(\lambda_0 I - A)$ é X, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contração em X.

b) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contração em X então a imagem de $(\lambda I - A)$ é X, para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada de forma detalhada em [Pa], pag 14. □

Teorema 1.2.14 *Seja A um operador dissipativo tal que $I - A$ é sobrejetor. Se X é reflexivo então A tem domínio denso em X.*

Demonstração: Consulte [Pa], pag 16. □

Teorema 1.2.15 *Seja A um operador linear fechado densamente definido. Se A e A^* são ambos dissipativos, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contração.*

Demonstração: Pelo Teorema de Lumer-Philips é suficiente provar que $\mathrm{Im}(I - A)$ é X. Como A é fechado e dissipativo, temos que $\mathrm{Im}(I - A)$ é um subespaço fechado de X. De fato, seja $y_n = (I - A)x_n$ uma sequência em $\mathrm{Im}(I - A)$ tal que $(I - A)x_n \to y$ em X. Então $(I - A)x_n$ é uma sequência de Cauchy em X. Como A é dissipativo, $\|(I - A)(x_n - x_m)\| \geq \|x_n - x_m\|$. Daí, x_n é de Cauchy em X e consequentemente existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Como A é fechado, $(I - A)x_n \to (I - A)x$ e pela unicidade do limite, $y = (I - A)x \in \mathrm{Im}(I - A)$. Portanto, $\mathrm{Im}(I - A)$ é um subespaço fechado de X. Suponha , por absurdo, que $\mathrm{Im}(I - A) = \overline{\mathrm{Im}(I - A)} \neq X$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ tal que $x^*(y) = 0$, para todo $y \in \mathrm{Im}(I - A)$. Ou seja, $x^*(x - Ax) = 0$, para todo $x \in Dom(A)$. Segue que,

$$\begin{aligned} 0 &= x^*(x) - x^*(Ax) = x^*(x) - A^*x^*(x) \\ &= (x^* - A^*x^*)(x), \quad \text{para todo } x \in Dom(A), \end{aligned}$$

ou seja, $(x^* - A^*x^*) = 0$. Como A^* é também dissipativo, temos que

$$0 = \|x^* - A^*x^*\| \geq \|x^*\|$$

e portanto, $x^* = 0$, contradizendo a construção de x^*. □

1.3 Grupos de operadores limitados

Definição 1.3.1 *Uma família a um parâmetro $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ de operadores lineares limitados sobre um espaço de Banach X é um grupo de classe C_0 de operadores limitados se satisfaz as condições:*

(i) $T(0) = I$

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s),$ *para todo* $t,\ s \in \mathbb{R}$

(iii) $\lim\limits_{t\to 0} T(t)x = x$ *para* $x \in X$.

Definição 1.3.2 *O gerador infinitesimal A de um grupo $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é definido por*

$$A(x) = \lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t}$$

quando o limite existe. O domínio de A é o conjunto de todos os elementos $x \in X$ tal que o limite existe.

Lema 1.3.3 *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 de operadores limitados. Se para cada $t > 0$, $T(t)^{-1}$ existe e é um operador limitado, então $S(t) = T(t)^{-1}$ é um C_0 semigrupo com gerador infinitesimal $-A$. Além disso, se*

$$U(t) = \begin{cases} T(t), & \text{para } t \geq 0 \\ T(-t)^{-1}, & \text{para } t \leq 0, \end{cases}$$

então $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um C_0 grupo de operadores limitados.

Demonstração: A demonstração é bem simples e consiste em verificar as condições da definição de semigrupo e de grupo fortemente contínuos. □

Definição 1.3.4 *Seja S um operador linear em X e seja Y um subespaço de X. O operador $\widetilde{S}$ definido por $Dom(\widetilde{S}) = \{x \in Dom(S) \cap Y : Sx \in Y\}$ e $\widetilde{S}x = Sx$ para $x \in Dom(\widetilde{S})$ é chamado a parte de S em Y. Note que se $Y \subset Dom(S)$, então $\widetilde{S} : Y \to Y$.*

Teorema 1.3.5 *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 em X com gerador infinitesimal A e seja $\{T(t)^*\}_{t\geq 0}$ o semigrupo adjunto. Se A^* é o adjunto de A e Y^* é o fecho de $Dom(A^*)$ em X^* então $T(t)^+$, a restrição de $T(t)^*$ a Y^*, é um semigrupo de classe C_0 em Y^*. O gerador infinitesimal A^+ de $T(t)^+$ é a parte de A^* em Y^*.*

Demonstração: A demonstração deste Teorema se encontra em [Pa], pag 39. □

Definição 1.3.6 *Seja H um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Um operador A é simétrico se $\overline{Dom(A)} = H$ e $A \subset A^*$, isto é, $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ para todo x, $y \in Dom(A)$. A é auto-adjunto se $A = A^*$. Um operador limitado U sobre H é dito unitário se $U^* = U^{-1}$.*

Relembremos que cada operador adjunto é fechado e que U é unitário se, e somente se, $\mathrm{Im}(U) = H$ e U é uma isometria. Ver [Br].

Lema 1.3.7 *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se S é um operador fechado densamente definido em X então $Dom(S^*)$ é denso em X^*.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $Dom(S^*)$ não é denso em X^*. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \neq 0$ e $x^*(x_0) = 0$, para todo $x^* \in Dom(S^*)$. Como S é fechado, o gráfico de S em $X \times X$ é fechado e não contém $(0, x_0)$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existem $x_1^*, x_2^* \in X^*$ tais que $x_1^*(x) - x_2^*(Sx) = 0$, para todo $x \in Dom(S)$ e $x_1^*(0) - x_2^*(x_0) \neq 0$. Segue que $x_2^* \neq 0$ e $x_2^* \in Dom(S^*)$, o que implica que $x_2^*(x_0) = 0$, que é uma contradição. □

Como consequência do Teorema 1.3.5 e do Lema 1.3.7 temos

Corolário 1.3.8 *Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0 semigrupo em X com gerador infinitesimal A. O semigrupo adjunto $\{T(t)^*\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 em X^* cujo gerador infinitesimal é A^*, o adjunto de A.*

O próximo teorema nos dá uma caracterização do operador A que gera um grupo de operadores unitários.

Teorema 1.3.9 (Stone)*: O operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0 grupo de operadores unitários sobre um espaço de Hilbert H se, e somente se iA é auto-adjunto.*

Demonstração: Se A é o gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0 de operadores unitários $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, então A está densamente definido (Proposição 1.2.8) e para $x \in Dom(A)$ segue do corolário 1.3.8 que

$$-Ax = \lim_{t\to 0}\frac{U(-t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{U(t)^*x - x}{t} = A^*x$$

o que implica que $A = -A^*$ e portanto $iA = (iA)^*$. Logo iA é auto-adjunto. Se iA é auto-adjunto então A está densamente definido e $A = -A^*$, isto é, A é anti-auto-adjunto. Então para cada $x \in Dom(A)$ temos

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = -\langle x, Ax\rangle = -\overline{\langle Ax, x\rangle}$$

e assim $\text{Re}\langle Ax, x\rangle = 0$ para cada $x \in Dom(A)$, isto é, A é dissipativo. Como $A = -A^*$, $\text{Re}\langle A^*x, x\rangle = 0$ para cada $x \in Dom(A^*) = Dom(A)$ e portanto A^* é também dissipativo. Como A e A^* são fechados e $A^{**} = A$, segue do Teorema 1.2.15 que A e $A^* = -A$ são geradores infinitesimais de C_0 semigrupos de contração em H. Se $U_+(t)$ e $U_-(t)$ são os semigrupos gerados por A e $-A$ respectivamente, definimos

$$U(t) = \begin{cases} U_+(t) & \text{para } t \geq 0 \\ U_-(-t) & \text{para t} \leq 0 \end{cases}$$

Então $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um grupo gerado por A e como $U(-t) = U(t)^{-1}$, $\|U(t)\| \leq 1$, $\|U(-t)\| \leq 1$, segue que $\text{Im}(U(t)) = H$ e $U(t)$ é uma isometria para cada t. De fato, para cada $x \in H$ temos $\|x\| = \|U(-t)U(t)x\| \leq \|U(t)x\| \leq \|x\|$, ou seja, $\|U(t)x\| = \|x\|$. Portanto $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um grupo de operadores unitários em H. □

Lema 1.3.10 *Sejam $A : Dom(A) \to X$ e $B : Dom(B) \to X$ dois operadores lineares em um espaço de Banach X tal que $Dom(A)$ é denso em X. Suponhamos que $AB = BA$ e que A seja o gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0 de operadores limitados $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ em X. Então $T(t)B = BT(t)$.*

Demonstração: Consideremos o operador $S(t) = T(t)B - BT(t)$, para $t \in \mathbb{R}$.

Notemos que

$$\begin{aligned}\partial_t S(t) &= AT(t)B - BAT(t) \\ &= AT(t)B - ABT(t) \\ &= A(T(t)B - BT(t)) \\ &= AS(t).\end{aligned}$$

Assim, $S(t) = T(t)S(0) = 0$. Portanto, $T(t)B = BT(t)$. □

1.4 Subespaços Invariantes e Admissíveis

Seja X um espaço de Banach, $Y \subseteq X$ um subespaço e $S : Dom(S) \subset X \to X$ um operador linear. O subespaço Y de X é um subespaço invariante por S se $S : Dom(S) \cap Y \to Y$.

Definição 1.4.1 *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 em X com gerador infinitesimal A. Um subespaço Y de X é chamado A-admissível se é invariante por $T(t)$, $t \geq 0$, e a restrição de $T(t)$ a Y é um C_0 semigrupo em Y.*

Teorema 1.4.2 *Seja $\overline{Y}$ o fecho de Y na norma de X. Seja S um isomorfismo de Y em $\overline{Y}$. Y é A- admissível se, e somente se, $A_1 = SAS^{-1}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em $\overline{Y}$. Neste caso temos em $\overline{Y}$,*

$$T_1(t) = ST(t)S^{-1},$$

onde $\{T_1(t)\}_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado por A_1.

Demonstração: A demonstração deste Teorema se encontra em [Pa], pag124. □

1.5 Equações lineares de evolução

Nesta seção consideramos o problema abstrato de Cauchy para a equação linear

$$\begin{cases} \partial_t u + A(t)u = f(t), & 0 \leq t \leq T \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{L}$$

em um espaço de Banach X. Estamos assumindo que $-A(t)$ gera um semigrupo de classe C_0 para cada $t \in [0, T]$.

Em seguida daremos duas definições de solução para o problema (L). Neste trabalho, usaremos a palavra solução no sentido da Definição 1.5.2 abaixo.

Definição 1.5.1 *A função $u \in C([0, T]; X)$ é uma solução clássica do problema (L) se $u \in C^1([0, T]; X)$, $u(t) \in Dom(A(t))$ para $t \in [0, T]$ e (L) é satisfeita em X.*

Definição 1.5.2 *Seja $Y \subseteq X$ um subespaço de Banach. A função $u \in C([0,T];Y)$ é uma solução com valores em Y do problema (L) se $u \in C^1([0,T];X)$ e (L) é satisfeita em X.*

As soluções com valores em Y são diferentes das soluções clássicas. De fato, para $t \in [0,T]$, a solução satisfaz a condição $u(t) \in Y \subseteq Dom(A(t))$ e é contínuas na norma de Y.

Nosso objetivo nesta seção é garantir, sob certas condições, a existência e unicidade de solução com valores em Y para (L). Este resultado será utilizado como base para o estudo das equações quase-lineares do tipo hiperbólico, que faremos no próximo capítulo.

A partir de agora, ao nos referir a um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal A utilizaremos a notação exponencial $T(t) = e^{tA}$.

Denotamos por $G(X, M, \beta)$ o conjunto de todos os operadores lineares A em X tal que $-A$ gera um semigrupo de classe C_0 $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ satisfazendo $\left\|e^{-tA}\right\|_{B(X)} \leq Me^{\beta t}$, $0 \leq t < \infty$.

Definição 1.5.3 *Seja $\{A(t)\}_{\,t\in[0,T]}$ uma família em $G(X, M, \beta)$. A família $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ é dita estável se existem constantes $M \geq 1$ e β tais que $\rho(A(t)) \supset (\beta, \infty)$, para $t \in [0,T]$, e*

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} (A(t_j) + \lambda I)^{-1} \right\| \leq M(\lambda - \beta)^{-k}, \qquad \lambda > \beta,$$

para cada sequência finita $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_k \leq T$, $k = 1, 2, \ldots$.

Definição 1.5.4 *Uma família a dois parâmetros de operadores limitados $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\triangle}$ em X, onde $\triangle = \{(t,s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$, é dito um sistema de evolução se as seguintes condições são satisfeitas*

(i) $U(t,t) = I$, $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$ *para* $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$.

(ii) $t \to U(t,s)$ *é fortemente contínua para* $0 \leq s \leq t \leq T$*, ou seja, para todo* $x \in X$*, temos* $\|U(t,s)x - U(t_0,s_0)x\|_X \to 0$ *quando* $(t,s) \to (t_0,s_0)$.

Teorema 1.5.5 *Sejam X e Y dois espaços de Banach com Y densamente contido em X, isto é, $Y \subseteq X$ tal que $\overline{Y} = X$ e existe uma constante $c > 0$ tal que $\| \,.\, \|_X \leq c \| \,.\, \|_Y$. Suponhamos que*

(H_1) *$\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ é uma família de operadores em $G(X, M, \beta)$.*

(H_2) *Existe um isomorfismo S de Y para X tal que*

$$SA(t)S^{-1} = A(t) + B(t), \quad B(t) \in B(X), \quad \textit{para cada} \;\; t \in [0,T],$$

onde $t \to B(t)x$ é fortemente mensurável e limitada de $[0,T]$ em $B(X)$.

(H_3) *$Y \subseteq Dom(A(t))$ para todo $t \in [0,T]$, $A(t) \in B(Y, X)$, (mais precisamente, a restrição de $A(t)$ a Y está em $B(Y, X)$), a aplicação $t \to A(t) \in B(Y, X)$ é contínua na norma.*

Então existe um único sistema de evolução $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\triangle}$ com as seguintes propriedades

(E_1) *$\|U(t,s)\|_{B(X)} \leq Me^{w(t-s)}$ para todo $(t,s) \in \triangle$.*

(E_2) *$\partial_t U(t,s)y = -A(t)U(t,s)y, \quad \partial_s U(t,s)y = U(t,s)A(s)y \quad$ para todo $y \in Y$.*

Demonstração: A demonstração segue dos mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 4.6 e Corolário 4.7 em [Pa], pag143. Pode ser também encontrada em [K3]. □

Note que se $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ é uma família de operadores em $G(X, 1, \beta)$ segue da Proposição 1.2.10 que $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ é uma família estável.

Teorema 1.5.6 *Suponhamos que as condições do Teorema 1.5.5 sejam satisfeitas, que $u_0 \in Y$ e $f \in C([0,T]; X) \cap L^1([0,T]; Y)$, então*

$$u(t) = U(t,0)u_0 + \int_0^t U(t,s)f(s)ds$$

é a única solução do problema (L) na classe $C([0,T]; Y) \cap C^1([0,T]; X)$.

Demonstração: Inicialmente vamos provar que se o problema de valor inicial (L) possui alguma solução na classe $C([0,T];Y) \cap C^1([0,T];X)$ então a solução é unica e é dada por (1.11). De fato, seja u tal solução de (L) e $U_n(t,s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ o sistema de evolução que podemos obter a partir do Teorema 1.5.5 quando aproximamos a família $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ pela $\{A_n(t)\}_{t\in[0,T]}$, $n = 1, 2, ...$definida da seguinte forma: seja $t_k^n = \frac{k}{n}T$, $k = 0, 1, ..., n$ e

$$\begin{aligned} &A_n(t) = A(t_k^n) \qquad \text{para} \quad t_k^n \leq t \leq t_{k+1}^n, \quad k = 0, 1, ..., n-1 \\ &A_n(T) = A(T). \end{aligned}$$

Desta forma temos

$$\|A(t) - A_n(t)\|_{B(Y,X)} \to 0 \qquad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.12}$$

Das propriedades de $U_n(t,s)$ (ver [Pa], Teorema 3.1, pag 136) segue que a aplicação $r \to U_n(t,r)u(r)$ é continuamente diferenciável em X, exceto para um número finito de valores de r, e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial_r} U_n(t,r)u(r) = U_n(t,r)A_n(r)u(r) - U_n(t,r)A(r)u(r) \\ + U_n(t,r)f(r). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Integrando (1.13) de 0 a t obtemos

$$u(t) = U_n(t,0)u_0 + \int_0^t U_n(t,r)f(r)dr + \int_0^t U_n(t,r)[A_n(r) - A(r)]u(r)dr$$

Denotando por $c = \max\limits_{0\leq r\leq T} \|u(r)\|_Y$ e usando o fato de que $\|U_n(t,s)\| \leq Me^{\beta(t-s)}$ temos

$$\begin{aligned} \left\| u(t) - U_n(t,0)u_0 - \int_0^t U_n(t,r)f(r)dr \right\| &= \left\| \int_0^t U_n(t,r)[A_n(r) - A(r)]u(r)dr \right\| \\ &\leq cMe^{\beta t} \int_0^t \|A_n(r) - A(r)\|_{B(Y,X)}\, dr \end{aligned} \tag{1.14}$$

Fazendo $n \to \infty$ em (1.14) e usando o fato de que $U(t,s)v = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(t,s)v$ para $v \in X$, segue que

$$u(t) = U(t,0)u_0 + \int_0^t U(t,s)f(s)ds.$$

A unicidade de u é uma consequência da representação de (1.11).

Vamos provar agora a existência da solução u. Como $U(t,0)u_0$ é uma solução na classe $C([0,T];Y)\cap C^1([0,T];X)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u = A(t)u, & 0\leq t\leq T \\ u(0)=u_0 \end{cases}$$

(ver [Pa], Teorema 4.3, pag 141), para provar que $u(t)$ dada em (1.11) é a soluçào de (L) basta mostrar que

$$w(t)=\int_0^t U(t,s)f(s)ds$$

é uma solução na classe $C([0,T];Y)\cap C^1([0,T];X)$ de (L) com valor inicial $w(0)=0$.

Das hipóteses feitas sobre a função f temos que $w(t)\in Y$ para $0\leq t\leq T$ e que a aplicação $r\to U(t,r)f(r)$ é contínua em Y, o que implica na continuidade da aplicação $t\to w(t)$ em Y e da aplicação $r\to A(r)U(t,r)f(r)$ em X. Segue então que $w(t)$ é continuamente diferenciável em X e que $\partial_t w = A(t)w+f(t)$ para $0\leq t\leq T$. $\square$

1.6 Os Espaços de Sobolev em $\mathbb{R}$

Nesta seção consideramos o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle f,g\rangle_{L^2}=\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

e com a norma correspondente

$$\|f\|_{L^2}=\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definição 1.6.1 *O espaço de Schwartz (ou das funções C^∞ rapidamente decrescentes) denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tais que*

$$f\in C^\infty \quad e \quad \|f\|_{\alpha,\beta}=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^\alpha f^{(\beta)}(x)\right|<\infty,$$

para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$. Denotamos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, chamado o conjunto das distribuições temperadas.

Definição 1.6.2 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. A transformada de Fourier de f é a função $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ dada por*

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Proposição 1.6.3 (Identidade de Parseval) *Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ então vale a seguinte identidade*

$$\|f\|_{L^2} = \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2}.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi \\ &= \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle_{L^2},\end{aligned}$$

para todo par $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Na verdade, a Transformada de Fourier é um operador unitário em $L^2(\mathbb{R})$ e a sua inversa é dada por

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = f^{\vee}(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{i\xi x}d\xi.$$

Definições e propriedades básicas da Transformada de Fourier são encontradas em vários livros de Equações diferenciais podendo citar [I1].

Definição 1.6.4 *Seja $s \in \mathbb{R}$. Os espaços de Sobolev (de tipo L^2) em $\mathbb{R}$ são os seguintes subconjuntos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:*

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

O espaço $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$, é de Hilbert quando munido do produto interno

$$\langle f, g\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \left(1 + |\xi|^2\right)^s \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi,$$

com a norma correspondente

$$\|f\|_s = \int_{\mathbb{R}} \left(1 + |\xi|^2\right)^s \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Em particular, $H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$.

Proposição 1.6.5 *Sejam s_1, $s_2 \in \mathbb{R}$ tal que $s_1 \geq s_2$, então $H^{s_1}(\mathbb{R}) \subseteq H^{s_2}(\mathbb{R})$. Além disso, a inclusão é contínua (na verdade, $\|f\|_{s_2} \leq \|f\|_{s_1}$ para toda $f \in H^s(\mathbb{R})$) e densa.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [I1]. □

Em particular, para $s \geq 0$ temos $H^s(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ densamente $(\overline{H^s(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R}))$ e continuamente, isto é, para cada $f \in H^s(\mathbb{R})$ temos

$$\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_s .$$

Teorema 1.6.6 *Seja $s > \frac{1}{2}$, então $H^s(\mathbb{R})$ pode ser imerso continuamente em $C_\infty(\mathbb{R})$ (a coleção das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ que tendem a zero quando $|x| \to \infty$) e vale a desigualdade*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \|f\|_s .$$

Demonstração: A desigualdade acima é uma consequência das definições das normas e pode ser encontrada em [I1]. □

Lema 1.6.7 *Seja $s > \frac{3}{2}$ e $f \in H^s(\mathbb{R})$. Então*

$$\begin{aligned}
\|\partial_x f\|_{s-1}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^{s-1} \left|\widehat{\partial_x f}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^{s-1} \xi^2 \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^{s} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \|f\|_s^2 .
\end{aligned}$$

Vamos agora definir um operador linear importante na teoria das Equações Diferenciais: a transformada de Hilbert.

Definição 1.6.8 *A transformada de Hilbert é o operador integral definido por*

$$(\sigma f)(x) = v.p.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{y-x} dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x|>\epsilon} \frac{f(y)}{y-x} dy$$

onde v.p. denota o valor principal da integral.

Teorema 1.6.9 *σ é um operador limitado em $L^2(\mathbb{R})$ e além disso*

$$\begin{cases} (\widehat{\sigma f})(\xi) = ih(\xi)\widehat{f}(\xi), & \xi \text{ q.t.p., onde} \\ h(\xi) = \begin{cases} -1 & \text{se } \xi < 0 \\ 1 & \text{se } \xi > 0 \end{cases} \end{cases}$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$. Portanto σ comuta com o operador derivação e

$$\begin{cases} \sigma^2 = -1 \\ \sigma^* = -\sigma = \sigma^{-1}. \end{cases}$$

Os mesmos fatos valem em $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$.

Capítulo 2

Equações de Evolução Quase lineares do tipo Hiperbólico

Neste capítulo discutiremos o problema de Cauchy para a equação de evolução quase linear

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + A(t,u)u(t) = f(t,u), & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{Q}$$

num espaço de Banach X. Vamos supor que para cada t e u, $-A(t,u)$ é um operador linear em X que gera um semigrupo de classe C_0, $f : [0,T] \times X \longrightarrow X$ é uma função dada e $u : [0,T] \longrightarrow X$.

Apresentaremos dois teoremas devidos a T. Kato [K1]. Um deles garante a existência e unicidade de soluções para o problema (Q) sob certas hipóteses que enunciaremos adiante. O outro versa sobre a dependência contínua da solução do dado inicial. A demonstração do teorema de existência e unicidade está baseada na teoria desenvolvida para (L). A idéia básica envolvida é a seguinte: para cada função $t \longrightarrow v(t)$ em um certo espaço de Banach consideramos o problema de Cauchy linear

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + A(t,v(t))u(t) = f(t,v(t)), & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{L^v}$$

Da teoria estudada para (L) obtemos uma única solução u_v de (L^v), e assim temos definida a função $\phi : E \longrightarrow E$ tal que $\phi(v) = u_v$. Provaremos que o espaço de Banach E pode ser escolhido de modo que ϕ seja uma contração. Logo, pelo teorema do ponto fixo, existe uma única $u \in E$ tal que $\phi(u) = u$, que é a solução procurada para (Q).

2.1 Teorema de Existência e unicidade

Consideremos as seguintes hipóteses:

(X) Seja X é um espaço de Banach reflexivo. Existe um outro espaço de Banach reflexivo Y continuamente e densamente contido em X. Existe um isomorfismo S de Y em X onde a norma em Y é escolhida de modo que S torne uma isometria.

(A_1) A é uma função de $[0,T] \times W$ em $G(X,1,\beta)$ onde W é uma bola aberta em Y e β é um número real. Em outras palavras,

$$\left\|e^{-sA(t,y)}\right\|_{B(X)} \leq e^{\beta s}, \qquad s \in [0,\infty), \qquad t \in [0,T], \qquad y \in W. \tag{2.1}$$

(A_2) Para cada t, $y \in [0,T] \times W$, temos

$$SA(t,y)S^{-1} = A(t,y) + B(t,y) \tag{2.2}$$

onde $B(t,y) \in B(X)$, $\|B(t,y)\|_{B(X)} \leq \lambda_1$ e $\lambda_1 > 0$ uma constante.

(A_3) Para cada t, $y \in [0,T] \times W$, nós temos $A(t,y) \in B(Y,X)$ (no sentido de que $Dom(A(t,y)) \supset Y$ e a restrição de $A(t,y)$ a Y está em $B(Y,X)$.

Para cada $y \in W$, $t \longrightarrow A(t,y)$ é contínua na norma de $B(Y,X)$.

Para cada $t \in [0,T]$, $y \longrightarrow A(t,y)$ é Lipschitz-contínua no seguinte sentido

$$\|A(t,y) - A(t,z)\|_{B(Y,X)} \leq \mu_1 \|y - z\|_X, \tag{2.3}$$

onde μ_1 é uma constante.

(A_4) Seja y_0 o centro de W. Então $A(t,y)y_0 \in Y$ para todo t, $y \in [0,T] \times W$, com

$$\|A(t,y)y_0\|_Y \leq \lambda_2, \qquad t \in [0,T], \qquad y \in W. \tag{2.4}$$

(f_1) f é uma função limitada de $[0,T] \times W$ em Y, ou seja,

$$\|f(t,y)\|_Y \leq \lambda_3, \quad t \in [0,T], \quad y \in W. \tag{2.5}$$

Para cada $y \in W$, $t \longrightarrow f(t,y)$ é contínua de $[0,T]$ em X.

Para cada $t \in [0,T]$, $y \longrightarrow f(t,y)$ é X-Lipschitz contínua, ou seja,

$$\|f(t,y) - f(t,z)\|_X \leq \mu_2 \|y-z\|_X. \tag{2.6}$$

Vejamos algumas observações:

1. A condição (A_4) é trivialmente satisfeita se $y_0 = 0$.

2. No caso em que $A(t,y)$ estiver definida para todo $y \in Y$, W pode ser escolhido como uma bola arbitária de centro 0. Neste caso as constantes β, λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2 dependerão do raio da bola.

3. A condição (2.2) pode ser satisfeita no sentido estrito, incluindo a relação de domínio. Assim, $x \in X$ está no $Dom(A(t,y))$ se, e somente se, $S^{-1}x \in Dom(A(t,y))$ com $A(t,y))S^{-1}x \in Y$.

4. Na hipótese (A_3) podemos provar que a função $t \longrightarrow A(t,y) \in B(Y,X)$ é fortemente contínua, ao invés da continuidade na norma de $B(Y,X)$. (Ver [K2]).

5. No caso em que X é um espaço de Hilbert, é possível mostrar que $A \in G(X,1,\beta)$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

a) $\langle A\phi, \phi\rangle_X \geq -\beta \|\phi\|_X^2$ para cada $\phi \in Dom(A)$.

b) $(A + \lambda I)$ é sobrejetora para algum $\lambda > \beta$.

De fato, se $A \in G(X,1,\beta)$ então o operador $(-A - \beta I)$ gera um C_0 semigrupo de Contração. Pelo Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 1.2.13) o operador $\alpha I - (-A - \beta I)$ é sobrejetor, para todo $\alpha > 0$. Tomando $\lambda = \alpha + \beta > \beta$ temos que $(A + \lambda I)$ é sobrejetor o que mostra o item (b). Além disso, o operador $(-A - \beta I)$ é dissipativo, ou seja, $\langle(-A - \beta I)\phi, \phi\rangle_X \leq 0$, para cada $\phi \in Dom(A)$. Assim, $\langle A\phi, \phi\rangle_X \geq -\beta \|\phi\|_X^2$ para cada

$\phi \in Dom(A)$ o que mostra o item (a). Por outro lado, se vale o item (a) então $(-A-\beta I)$ é dissipativo. Tomando $\lambda_0 = \lambda - \beta > 0$ (onde λ é o mesmo do item (b)) temos que $\lambda_0 I - (-A-\beta I)$ é sobrejetor. Segue do Teorema (1.2.14) que $(-A-\beta I)$ está densamente definido e pelo Teorema de Lumer-Phillips temos que $(-A-\beta I)$ gera um C_0 semigrupo de Contração e portanto $A \in G(X, 1, \beta)$.

O seguinte resultado será utilizado na demontração do próximo teorema.

Lema 2.1.1 *Se a função $g : [0,T] \to Y$ é limitada na norma de Y e contínua na norma de X, então g é fracamente contínua (logo fortemente mensurável) como uma função com valores em Y.*

Demonstração: Seja $t_n \to t_0$ em $[0,T]$. Como g é contínua na norma de X, temos que $g(t_n) \to g(t_0)$ em X e $\|g(t_n)\|_Y \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por um resultado de Análise Funcional[2], existe uma subsequência (t_{n_k}) e $y \in Y$ tal que $g(t_{n_k}) \to y$ fracamente em Y. Segue então que $g(t_{n_k}) \to y$ fracamente em X. Mas $g(t_n) \to g(t_0)$ fracamente em X e pela unicidade do limite temos $y = g(t_0)$. Precisamos mostrar $g(t_n) \to g(t_0)$ fracamente em Y. Suponhamos que isto não aconteça. Então existe $y^* \in Y^*$ tal que $|y^*(g(t_n)) - y^*(g(t_0)| \nrightarrow 0$ quando $n \to \infty$. Neste caso é possível encontrar uma subsequência (t_{n_j}) tal que $\left|y^*(g(t_{n_j})) - y^*(g(t_0)\right| \nrightarrow 0$ quando $j \to \infty$. Novamente, como g é contínua na norma de X temos $g(t_{n_j}) \to g(t_0)$ em X e $\left\|g(t_{n_j})\right\|_Y \leq M$, segue do mesmo resultado de Análise Funcional que existe uma subsequência $g(t_{n_{j_m}})$ tal que para todo $z^* \in Y^*$ temos que $\left|z^*(g(t_{n_{j_m}})) - z^*(g(t_0)\right| \to 0$ quando $m \to \infty$. Em particular, para $z^* = y^*$, que é uma contradição. □

Agora estamos em condições de enunciar e demonstrar o teorema devido a T. Kato ([K1]). Na demonstração vamos intercalar vários lemas para destacar os resultados utilizados.

[2]Seja X um espaço de Banach reflexivo e x_n uma sequência limitada em X. Então existe uma subsequência de x_n que converge fracamente em X. (Ver [Br]).

Teorema 2.1.2 *Suponhamos que as hipóteses (X), $(A_1)-(A_4)$, e (f_1) são satisfeitas. Se $u_0 \in W$, então (Q) tem uma única solução*

$$u \in C([0,T_0];W) \cap C^1([0,T_0];X)$$

para algum $T_0 > 0$, $T \leq T_0$.

Demonstração: Como W é uma bola aberta em Y contendo u_0, podemos escolher $R > 0$ tal que $\|u_0 - y_0\|_Y < R$ e que $\|y - y_0\|_Y < R$ implica $y \in W$. Consideremos o conjunto

$$E = \{v : [0,T_0] \longrightarrow Y \quad \text{tal que} \quad \|v(t) - y_0\|_Y \leq R \quad \text{e} \quad v \in C([0,T_0];X)\} \tag{2.7}$$

onde T_0 será determinado adiante.
Para $v \in E$ definimos $A^v(t) = A(t, v(t))$, $t \in [0,T_0]$.
Pela hipótese (A_1), $A^v(t) \in G(X,1,\beta)$, para cada $t \in [0,T_0]$. Segue da proposição 1.2.10 que $\{A^v(t)\}_{t\in[0,T_0]}$ é uma família estável com constantes de estabilidade $1,\beta$.

Lema 2.1.3 *A aplicação $t \longrightarrow A^v(t)$ é contínua na norma de $B(Y,X)$.*

Demonstração: De (A_3) temos que $A^v(t) \in B(Y,X)$ para cada $t \in [0,T_0]$. Além disso,

$$\begin{aligned} &\|A^v(t) - A^v(t_0)\|_{B(Y,X)} \\ &\leq \|A(t,v(t)) - A(t,v(t_0))\|_{B(Y,X)} + \|A(t,v(t_0)) - A(t_0,v(t_0))\|_{B(Y,X)} \\ &\leq \mu_1 \|v(t) - v(t_0)\|_X + \|A(t,v(t_0)) - A(t_0,v(t_0))\|_{B(Y,X)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Pelo fato de $v \in C([0,T_0];X)$ e a aplicação $t \longrightarrow A(t,y)$ ser contínua na norma de $B(Y,X)$, segue de (2.8) que $\|A^v(t) - A^v(t_0)\|_{B(Y,X)} \to 0$ quando $t \to t_0$, o que encerra a demonstração. □

Notemos que da hipótese (A_2) temos

$$SA^v(t)S^{-1} = A^v(t) + B^v(t) \tag{2.9}$$

onde $B^v(t) = B(t,v(t)) \in B(X)$ e $\|B(t,v(t))\|_{B(X)} \leq \lambda_1$.

Lema 2.1.4 *A aplicação $t \to B^v(t) \in B(X)$ é fracamente contínua (e portanto fortemente mensurável).*

Demonstração: Seja $y \in Y$. De (2.9) temos

$$S^{-1}B^v(t)y = A^v(t)S^{-1}y - S^{-1}A^v(t)y \tag{2.10}$$

Como $S^{-1}y \in Y$, segue do Lema 2.1.3 que $\|A^v(t)S^{-1}y - A^v(t_0)S^{-1}y\|_X \to 0$ quando $t \to t_0$, ou seja, a aplicação $t \to A^v(t)S^{-1}y$ é contínua em t na norma de X. O mesmo ocorre para a aplicação $t \to S^{-1}A^v(t)y$. Portanto, de (2.10) segue que $t \to S^{-1}B^v(t)y$ é contínua na norma de X, para cada $y \in Y$. E mais, como Y é denso em X e do fato de que

$$\left\|S^{-1}B^v(t)\right\|_{B(X)} \leq \lambda_1 S^{-1}_{B(X)} \left\|S^{-1}\right\|_{B(X)}$$

segue que $t \to S^{-1}B^v(t)x$ é contínua em t na norma de X, para cada $x \in X$.
Temos também que $t \to S^{-1}B^v(t)x$ é limitada na norma de Y, pois

$$\left\|S^{-1}B^v(t)x\right\|_Y = \|B^v(t)x\|_X \leq \lambda_1 \|x\|_X$$

Segue do Lema 2.1.1 que a aplicação $t \to S^{-1}B^v(t)x$ é fracamente contínua. Consequentemente, $t \to B^v(t)x$ é também fracamente contínua. □

Os Lemas 2.1.3 e 2.1.4 mostram que as hipóteses H_1, H_2 e H_3 do Teorema 1.5.5 são satisfeitas para a família $\{A^v(t)\}_{t\in[0,T_0]}$. Logo existe um único sistema de evolução $U^v = \{U^v(t,s)\}$ definido em $0 \leq s \leq t \leq T_0$ com as propriedades E_1 e E_2.

Lema 2.1.5 *Seja $f^v(t) = f(t, v(t))$, $t \in [0, T_0]$ e $v \in E$. Então $\|f^v(t)\|_Y \leq \lambda_3$ e a aplicação $t \to f^v(t)$ é contínua na norma de X e fracamente contínua (logo fortemente mensurável) na norma de Y.*

Demonstração: A primeira desigualdade segue imediatamente de (f_1). A continuidade segue de:

$$\begin{aligned}\|f^v(t) - f^v(t_0)\|_X &\leq \|f(t, v(t)) - f(t, v(t_0))\|_X + \|f(t, v(t_0)) - f(t_0, v(t_0))\|_X \\ &\leq \mu_2 \|v(t) - v(t_0)\| + \|f(t, v(t_0)) - f(t_0, v(t_0))\|_X ,\end{aligned}$$

já que $v \in C([0,T_0];X)$ e pelo fato da aplicação $t \longrightarrow f(t,v(t_0))$ ser contínua. $\square$

Devido ao lema anterior, podemos aplicar o Teorema 1.5.6 para obtermos a solução única para a equação de evolução linear

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + A^v(t)u(t) = f^v(t), & 0 \leq t \leq T \\ u(0) = u_0 \in W \subset Y. \end{cases} \tag{L^v}$$

A solução é dada por

$$u^v(t) = U^v(t,0)u_0 + \int_0^t U^v(t,s)f^v(s)ds. \tag{2.11}$$

Como $u_0 \in Y$ e $f^v \in L^\infty([0,T_0];Y) \cap C([0,T_0];X)$, temos que

$$u^v \in C([0,T_0];Y) \cap C^1([0,T_0];X).$$

Por outro lado, nós temos as seguintes estimativas:

(i) $\|U^v(t,s)\|_X \leq e^{\beta T_0}$.

(ii) $\|U^v(t,s)\|_Y \leq e^{(\beta+\lambda_1)T_0}$.

A demonstração dessas estimativas pode ser encontrada em ([Pa], Lema 4.5 e Teorema 4.6, pag 143, considerando Q(t)=S).

Consideramos agora uma função ϕ que a cada $v \in E$ associa a $\phi(v) = u^v$.

Lema 2.1.6 *Existe* $T_0 \in (0,T]$ *tal que* $\phi : E \to E$.

Demonstração: Vimos que $u^v \in C([0,T_0];Y)$qualquer que seja $T_0 \in [0,T]$. Resta-nos mostrar que T_0 pode ser escolhido de modo que $\|u^v(t) - y_0\|_Y \leq R$, para todo $t \in [0,T_0]$. Note que:

$$u^v(t) - y_0 = U^v(t,0)(u_0 - y_0) + U^v(t,0)y_0 - y_0 + \int_0^t U^v(t,r)f^v(r)dr. \tag{2.12}$$

Como $\{U^v(t,s)\}$ satisfaz (E_2) do teorema 1.5.5, ou seja, é diferenciável em relação ao parâmetro s, temos que

$$\begin{aligned} U^v(t,0)y_0 - y_0 &= U^v(t,0)y_0 - U^v(t,t)y_0 \\ &= -\int_0^t \partial_r U^v(t,r)y_0 dr \\ &= -\int_0^t U^v(t,r)A^v(r)y_0 dr. \end{aligned} \tag{2.13}$$

De (2.12), (2.13), da estimativa (ii) e do Lema 2.1.5, temos

$$\begin{aligned}
\|u^v(t) - y_0\|_Y &= \left\| U^v(t,0)(u_0 - y_0) + \int_0^t U^v(t,r)[A^v(r)y_0 + f^v(r)]dr \right\|_Y \\
&\leq \|U^v(t,0)(u_0 - y_0)\|_Y + \int_0^t \|U^v(t,r)\|_{B(Y)} \|A^v(r)y_0 + f^v(r)\|_Y \, dr \\
&\leq e^{(\beta+\lambda_1)T_0} \|u_0 - y_0\|_Y + \int_0^t e^{(\beta+\lambda_1)T_0}[\|A^v(r)y_0\|_Y + \|f^v(r)\|_Y]dr \\
&\leq e^{(\beta+\lambda_1)T_0}[R + (\lambda_2 + \lambda_3)T_0]. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Portanto é possível escolher T_0 tal que o lado direito de (2.14) seja menor que R, o que prova a afirmação. $\square$

Se $v,\, w \in E$, considere a métrica $d(v,w) = \sup \|v(t) - w(t)\|_X$. Munido desta norma, o conjunto E se torna um espaço métrico completo.

Vamos mostrar que existe $T_0 \in (0,T]$ tal que $\phi : E \to E$ seja uma contração. De fato, utilizando as equações:

$$\phi(v)(t) = u^v(t) = U^v(t,0)u_0 + \int_0^t U^v(t,r)f^v(r)dr,$$

$$\phi(w)(t) = u^w(t) = U^w(t,0)u_0 + \int_0^t U^w(t,r)f^w(r)dr,$$

temos que

$$\begin{aligned}
u^v(t) - u^w(t) = [U^v(t,0) - U^w(t,0)]u_0 + \int_0^t U^v(t,r)[f^v(r) - f^w(r)]dr \qquad (2.15) \\
+ \int_0^t [U^v(t,r) - U^w(t,r)]f^w(r)dr.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\partial_r U^v(t,r)U^w(r,s)u_0 = U^v(t,r)[A^v(r) - A^w(r)]U^w(r,s)u_0. \qquad (2.16)$$

Integrando de s a t a expressão (2.16), obtemos

$$U^v(t,s)u_0 - U^w(t,s)u_0 = \int_s^t U^v(t,r)[A^w(r) - A^v(r)]U^w(r,s)u_0 dr. \qquad (2.17)$$

Fazendo $s = 0$ em (2.17) temos

$$U^v(t,0)u_0 - U^w(t,0)u_0 = \int_0^t U^v(t,r)[A^w(r) - A^v(r)]U^w(r,0)u_0 dr. \qquad (2.18)$$

De forma análoga,

$$\partial_r U^v(t,r)U^w(r,s)f^w(s) = U^v(t,r)[A^v(r) - A^w(r)]U^w(r,s)f^w(s). \tag{2.19}$$

Integrando de s a t a expressão (2.19), obtemos

$$U^v(t,s)f^w(s) - U^w(t,s)f^w(s) = \int_s^t U^v(t,r)[A^v(r) - A^w(r)]U^w(r,s)f^w(s)dr. \tag{2.20}$$

Integrando de 0 a t a equação (2.20), temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t U^v(t,s)f^w(s) - U^w(t,s)f^w(s)ds \\
&= \int_0^t \int_s^t U^v(t,r)[A^w(r) - A^v(r)]U^w(r,s)f^w(s)drds \\
&= \int_0^t \int_0^r U^v(t,r)[A^w(r) - A^v(r)]U^w(r,s)f^w(s)dsdr.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Fazendo $r = s$ em (2.21), temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t [U^v(t,r) - U^w(t,r)]f^w(r)dr \\
&= \int_0^t \int_0^s U^v(t,s)[A^w(s) - A^v(s)]U^w(s,r)f^w(r)drds \\
&= \int_0^t U^v(t,s)[A^w(s) - A^v(s)] \int_0^s U^w(s,r)f^w(r)drds \\
&= \int_0^t U^v(t,s)[A^w(s) - A^v(s)](u^w(s) - U^w(s,0)u_0)ds.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Substituindo (2.18) e (2.22) em (2.15), obtemos

$$\begin{aligned}
u^v(t) - u^w(t) &= \int_0^t U^v(t,s)[A^w(s) - A^v(s)]U^w(s,0)u_0 ds + \int_0^t U^v(t,s)[f^v(s) - f^w(s)]ds \\
&+ \int_0^t U^v(t,s)[A^w(s) - A^v(s)](u^w(s) - U^w(s,0)u_0)ds \\
&= \int_0^t U^v(t,s)[A^w(s) - A^v(s)]u^w(s)ds + \int_0^t U^v(t,s)[f^v(s) - f^w(s)]ds \\
&= \int_0^t U^v(t,s)[A^w(s)u^w(s) - A^v(s)u^w(s) + f^v(s) - f^w(s)]ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\|u^v(t) - u^w(t)\|_X &\leq \int_0^t \|U^v(t,s)\|_{B(X)} \left[\|(A^w(s) - A^v(s))u^w(s)\|_X + \|f^v(s) - f^w(s)\|_X\right] ds \\
&\leq e^{\beta T_0} \int_0^t [\|A^w(s) - A^v(s)\|_{B(Y,X)} \|u^w(s)\|_Y + \|f^v(s) - f^w(s)\|_X] ds \\
&\leq e^{\beta T_0} \int_0^t [\mu_1 \|w(s) - v(s)\|_X (\|y_0\|_Y + R) + \mu_2 \|v(s) - w(s)\|_X \\
&\leq e^{\beta T_0} T_0 (\mu_1 \|y_0\|_Y + \mu_1 R + \mu_2) d(v,w).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
d(\phi(u), \phi(w)) \leq e^{\beta T_0} T_0 (\mu_1 \|y_0\|_Y + \mu_1 R + \mu_2) d(v,w),
$$

o que mostra que ϕ é uma contração para T_0 suficientemente pequeno. Segue então que ϕ tem um único ponto fixo, que é automaticamente a única solução de (Q). □

2.2 Dependência contínua

Para mostrarmos a dependência contínua da solução u do problema (Q), no dado inicial u_0, vamos considerar uma sequência de equações

$$
\begin{cases} \partial_t u^n(t) + A^n(t, u^n) u^n(t) = f^n(t, u^n), & 0 \leq t \leq T \\ u^n(0) = u_0^n \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{Q^n}
$$

Para as funções A^n e f^n nós assumiremos as mesmas condições (A_1)-(A_4) e (f_1) com os mesmos X, Y, S e W considerados no teorema de existência, adicionando as seguintes condições:

(A_5) Existe $\mu_3 > 0$ tal que $\|B(t,y) - B(t,z)\|_{B(X)} \leq \mu_3 \|y - z\|_Y$ para todo $t \in [0,T]$ e y, z em W.

(f_2) Existe $\mu_4 > 0$ tal que $\|f(t,y) - f(t,z)\|_Y \leq \mu_4 \|y - z\|_Y$ para todo $t \in [0,T]$ e y, z em W.

Teorema 2.2.1 *Suponhamos que (Q^n) satisfaz as hipóteses* (X), (A_1)-(A_5), (f_1)*e* (f_2) *uniformemente em* $n \in N$. *Suponhamos também que para cada* t, $y \in [0,T] \times W$

$$\begin{array}{ll} A^n(t,y) \to A(t,y) & \textit{fortemente em } B(Y,X), \\ B^n(t,y) \to B(t,y) & \textit{fortemente em } B(X), \\ f^n(t,y) \to f(t,y) & \textit{em } Y, \end{array}$$

quando $n \to \infty$. *Se* u_0, $u_0^n \in W$ *e* $u_0^n \to u_0$ *na norma de* Y *quando* $n \to \infty$, *então existem únicas soluções*

$$u^n \in C([0,T_1];W) \cap C^1([0,T_1];X) \quad \textit{com } u^n(0) = u_0^n$$

para (Q^n), $n = 1, 2, ...$*e uma única solução* u *para* (Q) *na mesma classe. E mais,*

$$u^n(t) \to u(t) \quad \textit{em } Y, \textit{ uniformemente em } t \in [0,T_1].$$

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [K1]. $\square$

Na verdade este teorema é muito mais geral. Utilizaremos em nosso problema o caso particular em que para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n(t,y) = A(t,y)$, $B^n(t,y) = B(t,y)$ e $f^n(t,y) = f(t,y)$.

Capítulo 3

O Problema de Cauchy para o Sistema de Liu-Kubota-Ko

Neste capítulo vamos considerar o problema de valor inicial associado ao sistema de Liu-Kubota-Ko para $c_1 - c_2 = 0$. Do ponto de vista físico isto quer dizer que as ondas nas duas pycnoclines se propagam com a mesma velocidade. Vamos mostrar que o problema de valor inicial é localmente bem posto no espaço $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, para $s > \frac{3}{2}$, utilizando os Teoremas do Kato para Equações de Evolução Quase-lineares (Teoremas 2.1.2 e 2.2.1 do capítulo anterior). Ao longo deste capítulo vamos supor que todas as funções são reais.

Consideramos o problema de valor inicial para o sistema de Liu-Kubota-Ko:

$$\begin{cases} u_t + auu_x - \gamma_1 \left(M_{H_1}\right) u_x - \gamma_2 \left(M_{H_2}\right) u_x + \gamma_2 \left(N_{H_2}\right) v_x = 0 \\ v_t + bvv_x - \gamma_3 \left(M_{H_3}\right) v_x - \gamma_4 \left(M_{H_2}\right) v_x + \gamma_4 \left(N_{H_2}\right) u_x = 0 \\ u(x,0) = u_0 \in H^s, s > \frac{3}{2} \\ v(x,0) = v_0 \in H^s, s > \frac{3}{2} \end{cases} \tag{LKK}$$

onde M_{H_i} é o operador definido por

$$\widehat{M_{H_i}u}(\xi) = m_i(\xi)\widehat{u}(\xi) \tag{3.1}$$

cujo símbolo m_i é

$$m_i(\xi) = \xi \coth(\xi H_i) - \frac{1}{H_i} \tag{3.2}$$

para $i = 1, 2$; o operador N_{H_2} tem símbolo n definido por

$$n(\xi) = \frac{\xi}{\sinh \xi H_2}. \tag{3.3}$$

Temos que $|n(\xi)| \leq \frac{1}{H_2}$. (Ver gráfico 1 no apêndice).

O operador M_{H_i} pode ser escrito da seguinte forma $M_{H_i} = -H\partial_x - K_i$, onde H denota a transformada de Hilbert e K_i é um operador multiplicador de Fourier com símbolo a_i dado por

$$a_i = |\xi| - \xi \coth(\xi H_i) + \frac{1}{H_i} \tag{3.4}$$

para $i = 1, 2$ ou 3 e para todo ξ,

$$0 \leq a_i(\xi) \leq \frac{1}{H_i}. \tag{3.5}$$

(Ver gráfico 2 no apêndice e [A], pag 18).

Segue de (3.4) e (3.5) que K_i é um operador linear no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$. De fato, para $f \in H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \left|\widehat{K_i f}(\xi)\right|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \left|a_i(\xi)\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leq \frac{1}{H_i^2} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Pela decomposição de M_{H_i} segue que ele é um operador linear de $H^s(\mathbb{R})$ em $H^{s-1}(\mathbb{R})$.

Por outro lado, N_{H_2} é um operador linear em $H^s(\mathbb{R})$. De fato, para $f \in H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \left|\widehat{N_{H_2} f}(\xi)\right|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \left|n(\xi)\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leq \frac{1}{H_2^2} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Agora podemos considerar o seguinte operador C definido por

$$C\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\partial_x \begin{pmatrix} \gamma_1 M_{H_1} + \gamma_2 M_{H_2} & -\gamma_2 N_{H_2} \\ -\gamma_4 N_{H_2} & \gamma_3 M_{H_3} + \gamma_4 M_{H_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

tal que $C : H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ para $s \geq 2$. Cálculos simples mostram que o operador C é anti-simétrico, ou melhor, iC é auto-adjunto com o seguinte produto interno em $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$,

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2 \times L^2} = \langle u_1, u_2 \rangle_{L^2} + \langle v_1, v_2 \rangle_{L^2}.$$

Segue portanto do Teorema de Stone que C gera um grupo de operadores unitários fortemente contínuo e^{Ct} sobre o espaço $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$.

Usando os operadores definidos anteriormente, podemos reescrever o sistema (LKK) da forma:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}_t + A(\overrightarrow{u})\overrightarrow{u} + C(\overrightarrow{u}) = 0 \\ \begin{pmatrix} u(x,0) \\ v(x,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in H^s \times H^s, \quad s > \frac{3}{2}, \end{cases} \tag{3.6}$$

onde $A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au\partial_x & 0 \\ 0 & bv\partial_x \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Fazendo a mudança de variável $\overrightarrow{w} = e^{Ct}\overrightarrow{u}$, segue que (3.6) pode ser reescrito na forma

$$\begin{cases} \overrightarrow{w}_t + \left[e^{Ct}A(e^{-Ct}\overrightarrow{w})e^{-Ct}\right]\overrightarrow{w} = 0 \\ \overrightarrow{w}(x,0) = \begin{pmatrix} u(x,0) \\ v(x,0) \end{pmatrix} \in H^s \times H^s, s > \frac{3}{2}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Observe que o problema (3.7) tem a forma abstrata do problema de evolução quase linear (Q).

Nosso objetivo agora é mostrar que o sistema (3.7) satisfaz as hipóteses (X), (A_1)-(A_5), (f_1) e (f_2) dos Teoremas 2.1.2 e 2.2.1 do capítulo anterior, com o espaço $X = L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ e $Y = H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, com $s > \frac{3}{2}$. Para tal, definimos

$$\widetilde{A}(t, \overrightarrow{w}) = e^{Ct}A(e^{-Ct}\overrightarrow{w})e^{-Ct},$$

$$S = (1 - \partial_x^2)^{\frac{s}{2}} \times (1 - \partial_x^2)^{\frac{s}{2}},$$

e W a bola aberta em Y de centro na origem e raio R. Note que X e Y são espaços de Hilbert com os produtos internos definidos por

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_X = \langle u_1, u_2 \rangle_{L^2} + \langle v_1, v_2 \rangle_{L^2}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_Y = \langle u_1, u_2 \rangle_s + \langle v_1, v_2 \rangle_s.$$

O nosso principal resultado nesse trabalho pode ser enunciado.

Teorema 3.0.2 *O problema (3.7) possui uma única solução*

$$\overrightarrow{w} \in C([0,T_0];Y) \cap C^1([0,T_0];X)$$

para algum $T_0 > 0$, $T_0 \leq T$.

Demonstração: A demonstração deste teorema consiste em verificar que as seguintes condições são satisfeitas:

1. Para cada $t \in [0,T]$ e $\overrightarrow{w} \in W$ temos que $\widetilde{A}(t,\overrightarrow{w}) \in G(X,1,\beta)$, onde β é um número real. Ou melhor, $\widetilde{A}(t,\overrightarrow{w})$ deve satisfazer as seguintes condições
a) $\langle \widetilde{A}(t,\overrightarrow{w})\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}\rangle_X \geq -\beta \left\|\overrightarrow{k}\right\|^2$, para $\overrightarrow{k} \in Dom(\widetilde{A}(t,\overrightarrow{w}))$.
b) $(\widetilde{A}(t,\overrightarrow{w}) + \lambda I)$ é sobrejetora para algum $\lambda > \beta$.

2. S é um isomorfismo isométrico de Y para X satisfazendo

$$S\widetilde{A}(t,\overrightarrow{w})S^{-1} = \widetilde{A}(t,\overrightarrow{w}) + B(t,\overrightarrow{w})$$

onde $B(t,\overrightarrow{w}) \in B(X)$.

3. $Y \subseteq Dom(\widetilde{A}(t,\overrightarrow{w}))$, $\widetilde{A}(t,\overrightarrow{w}) \in B(Y,X)$ e $t \to \widetilde{A}(t,\overrightarrow{w})$ é fortemente contínua, para cada $t \in [0,T]$ e $\overrightarrow{w} \in W$.

4. Para cada $t \in [0,T]$, $\overrightarrow{w} \to \widetilde{A}(t,\overrightarrow{w})$ é Lipschitz contínua, ou seja,

$$\left\|\widetilde{A}(t,\overrightarrow{w}) - \widetilde{A}(t,\overrightarrow{z})\right\|_{B(Y,X)} \leq \mu \left\|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{z}\right\|_X, \qquad \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z} \in W.$$

Para provar a parte (a) da primeira condição basta mostrar que $A(\overrightarrow{u}) \in G(X,1,\beta)$, para cada $\overrightarrow{u} \in Y$, já que e^{Ct} é um grupo unitário em X.

Seja $\overrightarrow{k} \in Dom(A(\overrightarrow{u}))$, onde $\overrightarrow{k} = (k_1, k_2)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\langle A(\overrightarrow{u})\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}\rangle_X &= \langle au\partial_x k_1, k_1\rangle_{L^2} + \langle bv\partial_x k_2, k_2\rangle_{L^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} au\frac{\partial_x k_1^2}{2}dx + \int_{\mathbb{R}} bv\frac{\partial_x k_2^2}{2}dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} a(\partial_x u)\frac{k_1^2}{2}dx - \int_{\mathbb{R}} b(\partial_x v)\frac{k_2^2}{2}dx \\
&\geq -\left|\frac{a}{2}\right| \|\partial_x u\|_\infty \|k_1\|_{L^2}^2 - \left|\frac{b}{2}\right| \|\partial_x v\|_\infty \|k_2\|_{L^2}^2 \\
&\geq -\beta \left\|\overrightarrow{k}\right\|_X^2,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde $\beta = \max\{\left|\frac{a}{2}\right| \|\partial_x u\|_\infty, \left|\frac{b}{2}\right| \|\partial_x v\|_\infty\}$ (ou $\beta = \max\{\left|\frac{a}{2}\right| c_1 \|u\|_s, \left|\frac{b}{2}\right| c_1 \|v\|_s\}$ com $c_1 = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}[\int_{\mathbb{R}}(1 + |\xi|^2)^{-s}]^{\frac{1}{2}}$), (Ver Teorema 1.6.6).

Para verificar a parte (b) vamos mostrar que para $\lambda > \beta$ temos que

$$\mathrm{Im}(A(\overrightarrow{u}) + \lambda I) = L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}),$$

o que é equivalente a mostrar que $A(\overrightarrow{u}) + \lambda I$ tem imagem fechada e densa em $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$. De fato, seja $\overrightarrow{v}_n$ uma seqüência no $Dom(A(\overrightarrow{u}))$ tal que $A(\overrightarrow{u})\overrightarrow{v}_n + \lambda\overrightarrow{v}_n$ converge em X então, por (3.8) $\overrightarrow{v}_n$ também é uma seqüência de Cauchy em X, pois

$$\begin{aligned}
\|(A(\overrightarrow{u}) + \lambda I)(\overrightarrow{v}_n - \overrightarrow{v}_m)\|_X \|\overrightarrow{v}_n - \overrightarrow{v}_m\|_X &\geq \langle (A(\overrightarrow{u}) + \lambda I)(\overrightarrow{v}_n - \overrightarrow{v}_m), (\overrightarrow{v}_n - \overrightarrow{v}_m)\rangle_X \\
&\geq -\beta \|\overrightarrow{v}_n - \overrightarrow{v}_m\|_X^2 + \lambda \|\overrightarrow{v}_n - \overrightarrow{v}_m\|_X^2 \\
&= (\lambda - \beta) \|\overrightarrow{v}_n - \overrightarrow{v}_m\|_X^2.
\end{aligned}$$

A desigualdade acima implica que

$$\|A(\overrightarrow{u})(\overrightarrow{v}_n - \overrightarrow{v}_m) + \lambda(\overrightarrow{v}_n - \overrightarrow{v}_m)\|_X \geq (\lambda - \beta) \|\overrightarrow{v}_n - \overrightarrow{v}_m\|_X \geq 0.$$

Fazendo $n, m \to \infty$ segue que $\overrightarrow{v}_n$ é de Cauchy em X. Decorre daí que existe $\overrightarrow{v}_0 \in X$ tal que $\overrightarrow{v}_n$ converge para $\vec{v}_0$ e $A(\overrightarrow{u})\vec{v}_n + \lambda\vec{v}_n$converge para $A(\overrightarrow{u})\overrightarrow{v}_0 + \lambda\overrightarrow{v}_0$, uma vez que $A(\overrightarrow{u}) + \lambda I$ é um operador fechado. Logo, $\mathrm{Im}(A(\overrightarrow{u}) + \lambda I)$ é fechada em X. Para mostrarmos que $\mathrm{Im}(A(\overrightarrow{u}) + \lambda I)$ é densa, seja $\overrightarrow{\varphi} \in X$ tal que

$$\langle A(\overrightarrow{u})\overrightarrow{v} + \lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{\varphi}\rangle_X = 0$$

para cada $\vec{v} \in Dom(A(\overrightarrow{u}))$. Deste modo $\overrightarrow{\varphi} \in Dom(A(\overrightarrow{u})^*)$.

Mas $A(\overrightarrow{u})^* = -A(\overrightarrow{u}) + \begin{pmatrix} -au_x & 0 \\ 0 & -bv_x \end{pmatrix}$ e portanto $Dom(A(\overrightarrow{u})^*) = Dom(A(\overrightarrow{u}))$.

Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A(\overrightarrow{u})\overrightarrow{\varphi} + \lambda\overrightarrow{\varphi}, \overrightarrow{\varphi}\rangle_X = \langle A(\overrightarrow{u})\overrightarrow{\varphi}, \overrightarrow{\varphi}\rangle_X + \lambda \left\|\overrightarrow{\varphi}\right\|_X^2 \\ &\geq (\lambda - \beta)\left\|\overrightarrow{\varphi}\right\|_{L^2}^2 . \end{aligned}$$

Como $(\lambda - \beta) > 0$ então $\overrightarrow{\varphi} = \overrightarrow{0}$. Assim, o complemento ortogonal da $Im(A(\overrightarrow{u}) + \lambda I)$ é o subespaço nulo. Segue de um resultado de Análise Funcional[3] que $\mathrm{Im}(A(\overrightarrow{u}) + \lambda I) = X$, terminando assim a verificação da primeira condição.

Vamos agora mostrar que S é um isomorfismo isométrico de Y para X. Para isso basta provar que $\Lambda^s = (1 - \partial_x^2)^{\frac{s}{2}}$é um isomorfismo isométrico de $H^s(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$. De fato, para cada $u \in H^s(\mathbb{R})$ temos que $(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$, e como a transformada de Fourier é um operador unitário de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$, temos que

$$\Lambda^s u = [(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(\xi)]^\vee \in L^2(\mathbb{R}),$$

assim a imagem de Λ^s está contida em $L^2(\mathbb{R})$. Além disso,

$$\|\Lambda^s u\|_{L^2} = \|(\Lambda^s u)^\vee\|_{L^2} = \left(\int (1 + |\xi|^2)^s \left|\widehat{u}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_s .$$

Logo Λ^s é uma isometria de $H^s(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$ (em conseqûencia injetivo), com imagem fechada. Vejamos que Λ^s é sobrejetivo. Dada uma $v \in L^2(\mathbb{R})$ considere $\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{v}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}$.

Note que

$$\int (1 + |\xi|^2)^s \left|\widehat{u}(\xi)\right|^2 d\xi = \int \left|\widehat{v}(\xi)\right|^2 d\xi = \|\widehat{v}\|_{L^2} = \|v\|_{L^2} .$$

Portanto $u \in H^s(\mathbb{R})$ e $\Lambda^s u = v$.

Note que

$$\begin{aligned} S\widetilde{A}(t, \overrightarrow{w})S^{-1} - \widetilde{A}(t, \overrightarrow{w}) &= Se^{Ct}A(e^{-Ct}\overrightarrow{w})e^{-Ct}S^{-1} - e^{Ct}A(e^{-Ct}\overrightarrow{w})e^{-Ct} \\ &= e^{Ct}SA(e^{-Ct}\overrightarrow{w})S^{-1}e^{-Ct} - e^{Ct}A(e^{-Ct}\overrightarrow{w})e^{-Ct} \qquad (3.9) \\ &= e^{Ct}[SA(e^{-Ct}\overrightarrow{w})S^{-1} - A(e^{-Ct}\overrightarrow{w})]e^{-Ct}, \end{aligned}$$

[3]Seja X um espaço de Hilbert e $M \subset X$ fechado. Se $M \neq X$ então $M^\perp \neq \{0\}$.(Ver [Br], pag149).

já que o grupo e^{Ct} comuta com S (veja Lema 1.3.10).

Portanto, para terminar a demonstração da segunda condição, basta mostrar que $SA(e^{-Ct}\overrightarrow{w})S^{-1} - A(e^{-Ct}\overrightarrow{w})$ é um operador limitado em X. Vejamos primeiro o seguinte resultado:

Lema 3.0.3 *Seja $f \in H^s(R), s > \frac{3}{2}$ e M_f o operador multiplicação por f, isto é, $M_f u = fu$. Se $T = [\Lambda^s M_f - M_f \Lambda^s]\Lambda^{1-s}$ então T é um operador linear limitado em $L^2(\mathbb{R})$ e*

$$\|T\|_{B(X)} \leq c \|grad\ f\|_{s-1}. \tag{3.10}$$

Demonstração: A demonstração do lema segue exatamente os passos de Pazy em [Pa], pág 250. $\square$

Um cálculo simples mostra que para $\overrightarrow{u} = e^{-tC}\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{k} \in Dom(A(\overrightarrow{u}))$ temos que

$$\begin{aligned} SA(\overrightarrow{u})S^{-1}\overrightarrow{k} - A(\overrightarrow{u})\overrightarrow{k} &= \begin{pmatrix} a[\Lambda^s u \Lambda^{-s} - u]\partial_x k_1 \\ b[\Lambda^s v \Lambda^{-s} - v]\partial_x k_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a[\Lambda^s M_u \Lambda^{-s} - M_u]\partial_x k_1 \\ b[\Lambda^s M_v \Lambda^{-s} - M_v]\partial_x k_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a[\Lambda^s M_u - M_u\Lambda^s]\Lambda^{1-s}\Lambda^{-1}\partial_x k_1 \\ b[\Lambda^s M_v - M_v\Lambda^s]\Lambda^{1-s}\Lambda^{-1}\partial_x k_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\left\|SA(\overrightarrow{u})S^{-1}\overrightarrow{k} - A(\overrightarrow{u})\overrightarrow{k}\right\|_X \\ &= \|a[\Lambda^s M_u - M_u\Lambda^s]\Lambda^{1-s}\Lambda^{-1}Dk_1\|_{L^2} + \|b[\Lambda^s M_v - M_v\Lambda^s]\Lambda^{1-s}\Lambda^{-1}Dk_2\|_{L^2} \\ &\leq |a|\, c \|grad\ u\|_{s-1} \|\Lambda^{-1}Dk_1\|_{L^2} + |b|\, c\|grad\ v\|_{s-1} \|\Lambda^{-1}Dk_2\|_{L^2} \\ &\leq |a|\, c\|\partial_x u\|_{s-1} \|\Lambda^{-1}k_1\|_1 + |b|\, c\|\partial_x v\|_{s-1}\|\Lambda^{-1}k_2\|_1 \\ &\leq |a|\, c\|u\|_s \|k_1\|_{L^2} + |b|\, c\|v\|_s\|k_2\|_{L^2} \\ &\leq c.c_0\{\|u\|_s\|k_1\|_{L^2} + \|v\|_s\|k_2\|_{L^2}\} \leq c.c_0\|\overrightarrow{u}\|_Y \left\|\overrightarrow{k}\right\|_X \end{aligned}$$

onde $c_0 = \max\{|a|, |b|\}$.

O seguinte resultado será utilizado logo a seguir:

Lema 3.0.4 *O grupo e^{tC} é também um grupo unitário em Y (no seguinte sentido: a restrição do grupo e^{tC} ao subespaço Y é um grupo em Y).*

Demonstração: Nesta demonstração utilizaremos algumas idéias desenvolvidas na demonstração do Teorema de Stone (Teorema 1.3.9).

Como iC é um operador auto-adjunto, ou melhor, $C^* = -C$, segue da demonstração do Teorema de Stone que o grupo $\{e^{tC}\}_{t\in\mathbb{R}}$ é definido por

$$e^{tC} = \begin{cases} U_+(t) & \text{para } t \geq 0 \\ U_-(-t) & \text{para t} \leq 0 \end{cases}$$

onde $U_+(t)$ e $U_-(t)$ são os C_0 semigrupos de contração gerados por C e $-C$, respectivamente. Considerando $S = \Lambda^s \times \Lambda^s$ o isomorfismo de Y em X, é fácil ver que $SU_+(t)S^{-1}$ e $SU_-(t)S^{-1}$são semigrupos de classe C_0 em X gerados por SCS^{-1} e $-SCS^{-1}$, respectivamente. Segue do Teorema 1.4.2 que $U_+(t)|_Y$ e $U_-(t)|_Y$, as restrições de $U_+(t)$ e $U_-(t)$ ao subespaço Y, são semigrupos de classe C_0 em Y. Portanto $e^{tC}\big|_Y$, a restrição de e^{tC} a Y, é um grupo em Y. De forma análoga podemos mostrar que $e^{-tC}\big|_Y$ é um grupo em Y. Falta provar que o grupo $e^{tC}\big|_Y$ é unitário. Mas, pela observação feita após a Definição 1.3.6, basta mostrar que $e^{tC}\big|_Y$ preserva a norma. Isto realmente ocorre, pois,

$$\left\|e^{tC}\overrightarrow{y}\right\|_Y = \left\|Se^{tC}\overrightarrow{y}\right\|_X = \left\|e^{tC}S\overrightarrow{y}\right\|_X = \|S\overrightarrow{y}\|_X = \|\overrightarrow{y}\|_Y,$$

o que encerra a demonstração do lema. $\square$

Segue dos lemas 3.0.3 e 3.0.4 que

$$\begin{aligned}\left\|B(t,\overrightarrow{w})\overrightarrow{k}\right\|_X &= \left\|SA(e^{-tC}\overrightarrow{w})S^{-1}\overrightarrow{k} - A(e^{-tC}\overrightarrow{w})\overrightarrow{k}\right\|_X \leq c.c_0\left\|e^{-tC}\overrightarrow{w}\right\|_Y\left\|\overrightarrow{k}\right\|_X \\ &= c.c_0\|\overrightarrow{w}\|_Y\left\|\overrightarrow{k}\right\|_X \\ &\leq c.c_0.R\left\|\overrightarrow{k}\right\|_X.\end{aligned}$$

A desigualdade acima finaliza a verificação da segunda condição.

Passando à terceira condição, segue da definição de $\widetilde{A}(t,\overrightarrow{w})$ e do fato de que e^{-tC} é um grupo unitário em Y que $Y \subseteq Dom(\widetilde{A}(t,\overrightarrow{w}))$.

Seja $\overrightarrow{y} \in Y$, $\overrightarrow{k} = e^{-tC}\overrightarrow{y}$ e $\overrightarrow{u} = e^{-tC}\overrightarrow{w}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{A}(t,\overrightarrow{w})\overrightarrow{y}\right\|_X = \left\|A(\overrightarrow{u})\overrightarrow{k}\right\|_X &= \|au\partial_x k_1\|_{L^2} + \|bv\partial_x k_2\|_{L^2} \\
&\le |a|\,\|u\|_{L^2}\,\|\partial_x k_1\|_\infty + |b|\,\|v\|_{L^2}\,\|\partial_x k_2\|_\infty \\
&\le c_1\left[|a|\,\|\partial_x k_1\|_{s-1}\,\|u\|_{L^2} + |b|\,\|\partial_x k_2\|_{s-1}\,\|v\|_{L^2}\right] \qquad (3.12)\\
&\le c_1.c_0.\left[\|k_1\|_s\,\|u\|_{L^2} + \|k_2\|_s\,\|v\|_{L^2}\right] \\
&\le c_1.c_0\left\|\overrightarrow{k}\right\|_Y \|\overrightarrow{u}\|_X = c_1.c_0\,\|\overrightarrow{y}\|_Y\,\|\overrightarrow{w}\|_X \\
&\le c_1.c_0\,\|\overrightarrow{y}\|_Y\,\|\overrightarrow{w}\|_Y \le c_1.c_0.R\,\|\overrightarrow{y}\|_Y\,,
\end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{A}(t,\overrightarrow{w}) \in B(Y,X)$.

Seja $\overrightarrow{z} \in W$, $\overrightarrow{y} \in Y$ e $t_0 \in [0,T]$. Temos que

$$\begin{aligned}
&\left\|[\widetilde{A}(t,\overrightarrow{z}) - \widetilde{A}(t_0,\overrightarrow{z})]\overrightarrow{y}\right\|_X \\
&\le \left\|A(e^{-Ct}\overrightarrow{z})e^{-Ct}\overrightarrow{y} - A(e^{-Ct_0}\overrightarrow{z})e^{-Ct_0}\overrightarrow{y}\right\|_X + \left\|(e^{tC} - e^{t_0C})\overrightarrow{v}\right\|_X \\
&\le \left\|A(e^{-tC}\overrightarrow{z})(e^{tC} - e^{t_0C})\overrightarrow{y}\right\|_X + \left\|[A(e^{-Ct}\overrightarrow{z}) - A(e^{-Ct_0}\overrightarrow{z})]e^{-Ct_0}\overrightarrow{y}\right\|_X \\
&\quad + \left\|(e^{tC} - e^{t_0C})\overrightarrow{v}\right\|_X \qquad (3.13)\\
&\le c_1.c_0\,\|\overrightarrow{z}\|_X\left\|(e^{tC} - e^{t_0C})\overrightarrow{y}\right\| + \left\|[A(e^{-Ct}\overrightarrow{z} - e^{-Ct_0}\overrightarrow{z})]e^{-Ct_0}\overrightarrow{y}\right\|_X \\
&\quad + \left\|(e^{tC} - e^{t_0C})\overrightarrow{v}\right\|_X \\
&\le c_1.c_0\,\|\overrightarrow{z}\|_X\left\|(e^{tC} - e^{t_0C})\overrightarrow{y}\right\|_Y + c_2\left\|(e^{-Ct} - e^{-Ct_0})\overrightarrow{z}\right\|_X\|\overrightarrow{y}\|_Y \\
&\quad + \left\|(e^{tC} - e^{t_0C})\overrightarrow{v}\right\|_X\,,
\end{aligned}$$

onde $\overrightarrow{v} = A(e^{-Ct_0}\overrightarrow{z})e^{-Ct_0}\overrightarrow{y}$. Usando o fato de que e^{Ct} é um grupo unitário fortemente contínuo, segue que cada parcela da última desigualdade de (3.13) tende a zero quando $t \to t_0$, portanto a aplicação $t \to \widetilde{A}(t,\overrightarrow{w})$ é fortemente contínua.

A quarta condição segue do seguinte fato:

$$\begin{aligned}
\left\|[\widetilde{A}(t,\overrightarrow{w}) - \widetilde{A}(t,\overrightarrow{z})]\overrightarrow{y}\right\|_X &= \left\|A(e^{-Ct}\overrightarrow{w} - e^{-Ct}\overrightarrow{z})e^{-Ct}\overrightarrow{y}\right\|_X \\
&\le c_1.c_0\left\|e^{-Ct}\overrightarrow{w} - e^{-Ct}\overrightarrow{z}\right\|_X\left\|e^{-Ct}\overrightarrow{y}\right\|_Y \\
&= c_1.c_0\,\|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{z}\|_X\,\|\overrightarrow{y}\|_Y\,,
\end{aligned}$$

o que encerra a demonstração do teorema. □

O teorema seguinte mostra a dependência contínua da solução obtida no Teorema 3.0.2. dos dados iniciais.

Teorema 3.0.5 *A solução $\overrightarrow{w}$ do problema (3.7) depende continuamente do dado inicial $u_0 \in Y$.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.1 basta mostrar que a seguinte condição é satisfeita para cada $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{z}$ em W:

$$\|B(t,\overrightarrow{w}) - B(t,\overrightarrow{z})\|_{B(X)} \leq \mu_3 \|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{z}\|_Y .$$

Como $B(t,\overrightarrow{w}) = e^{Ct}[SA(e^{-Ct}\overrightarrow{w})S^{-1} - A(e^{-Ct}\overrightarrow{w})]e^{-Ct}$, para $\overrightarrow{k} \in X$, temos

$$\left\|[B(t,\overrightarrow{w}) - B(t,\overrightarrow{z})]\overrightarrow{k}\right\|_X$$
$$= \left\|e^{Ct}[SA(e^{-Ct}\overrightarrow{w})S^{-1} - A(e^{-Ct}\overrightarrow{w}) - SA(e^{-Ct}\overrightarrow{z})S^{-1} + A(e^{-Ct}\overrightarrow{z})]e^{-Ct}]e^{-Ct}\overrightarrow{k}\right\|.$$

Chamando $\overrightarrow{u} = e^{-Ct}\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{y} = e^{-Ct}\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{l} = e^{-Ct}\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ temos que

$$\left\|[B(t,\overrightarrow{w}) - B(t,\overrightarrow{z})]\overrightarrow{k}\right\|_X = \left\|\begin{pmatrix} a[\Lambda^s(u-y_1)\Lambda^{-s} - (u-y_1)]\partial_x l_1 \\ b[\Lambda^s(v-y_2)\Lambda^{-s} - (v-y_2)]\partial_x l_2 \end{pmatrix}\right\|_X$$

$$= \left\|\begin{pmatrix} a[\Lambda^s M_{(u-y_1)} - M_{(u-y_1)}\Lambda^s]\Lambda^{-s}\partial_x l_1 \\ b[\Lambda^s M_{(v-y_2)} - M_{(v-y_2)}\Lambda^s]\Lambda^{-s}\partial_x l_2 \end{pmatrix}\right\|_X$$

$$= \left\|\begin{pmatrix} a[\Lambda^s M_{(u-y_1)} - M_{(u-y_1)}\Lambda^s]\Lambda^{1-s}\Lambda^{-1}\partial_x l_1 \\ b[\Lambda^s M_{(v-y_2)} - M_{(v-y_2)}\Lambda^s]\Lambda^{1-s}\Lambda^{-1}\partial_x l_2 \end{pmatrix}\right\|_X$$

$$= \left\|a[\Lambda^s M_{(u-y_1)} - M_{(u-y_1)}\Lambda^s]\Lambda^{1-s}\Lambda^{-1}\partial_x l_1\right\|_{L^2} + \left\|b[\Lambda^s M_{(v-y_2)} - M_{(v-y_2)}\Lambda^s]\Lambda^{1-s}\Lambda^{-1}\partial_x l_2\right\|_{L^2}$$

$$\leq c.c_0\{\|u-y_1\|_s \|l_1\|_{L^2} + \|v-y_2\|_s \|l_2\|_{L^2}\} \leq c.c_0 \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{y}\|_Y \left\|\overrightarrow{l}\right\|_X$$

$$= c.c_0 \|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{z}\|_Y \left\|\overrightarrow{k}\right\|_X. \qquad \square$$

Apêndice

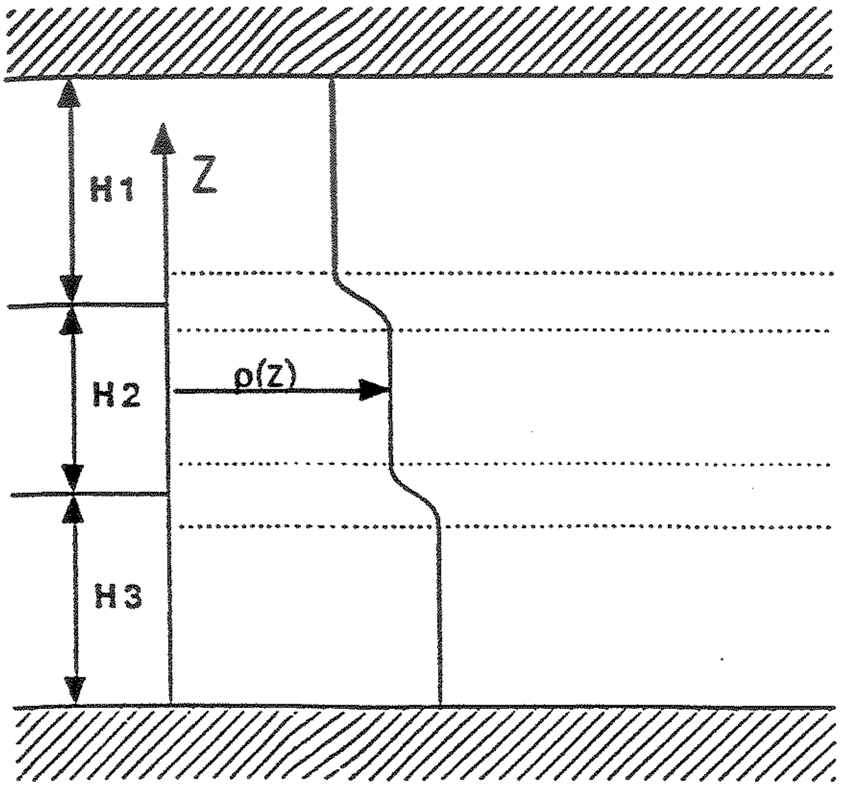

Figura 1. Sistema de dois fluidos com um par de pycnoclines.

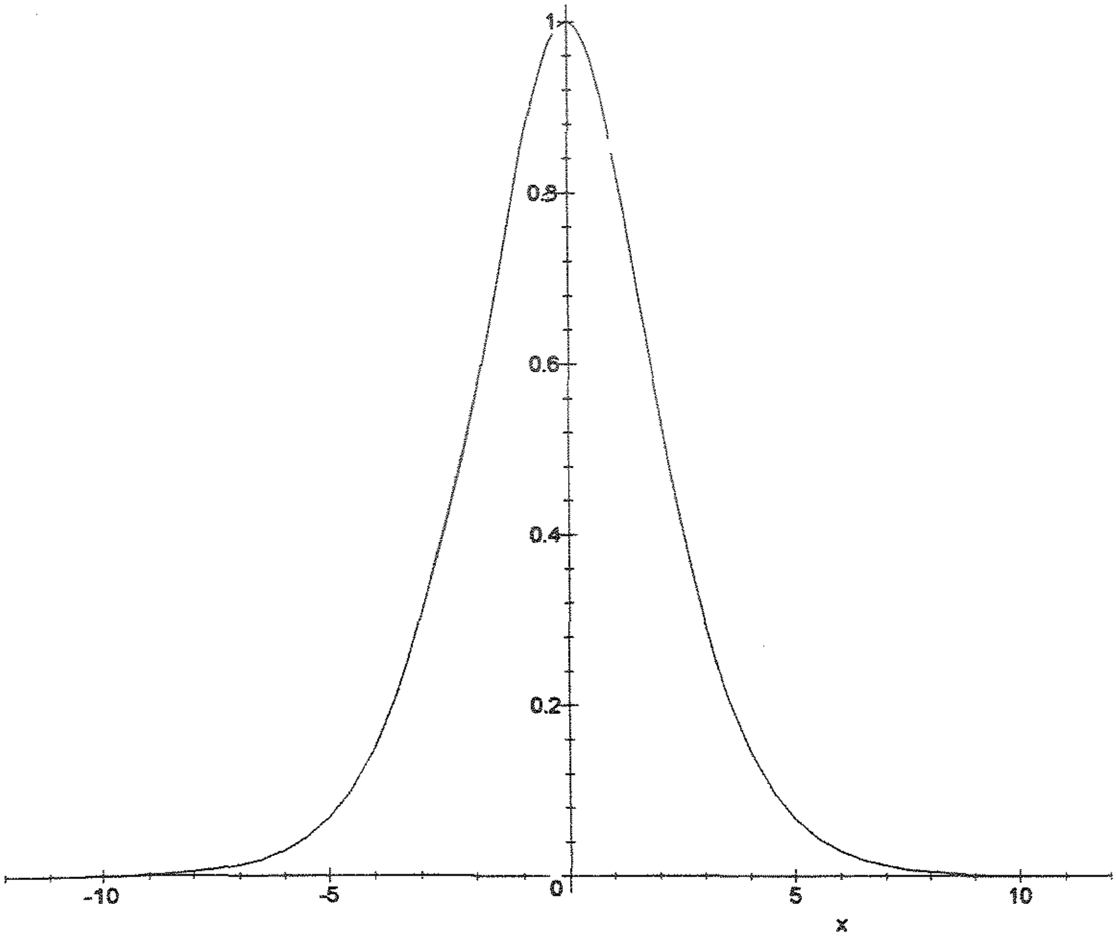

Gráfico 1. Gráfico da função $f(x) = x/sinh(x)$.

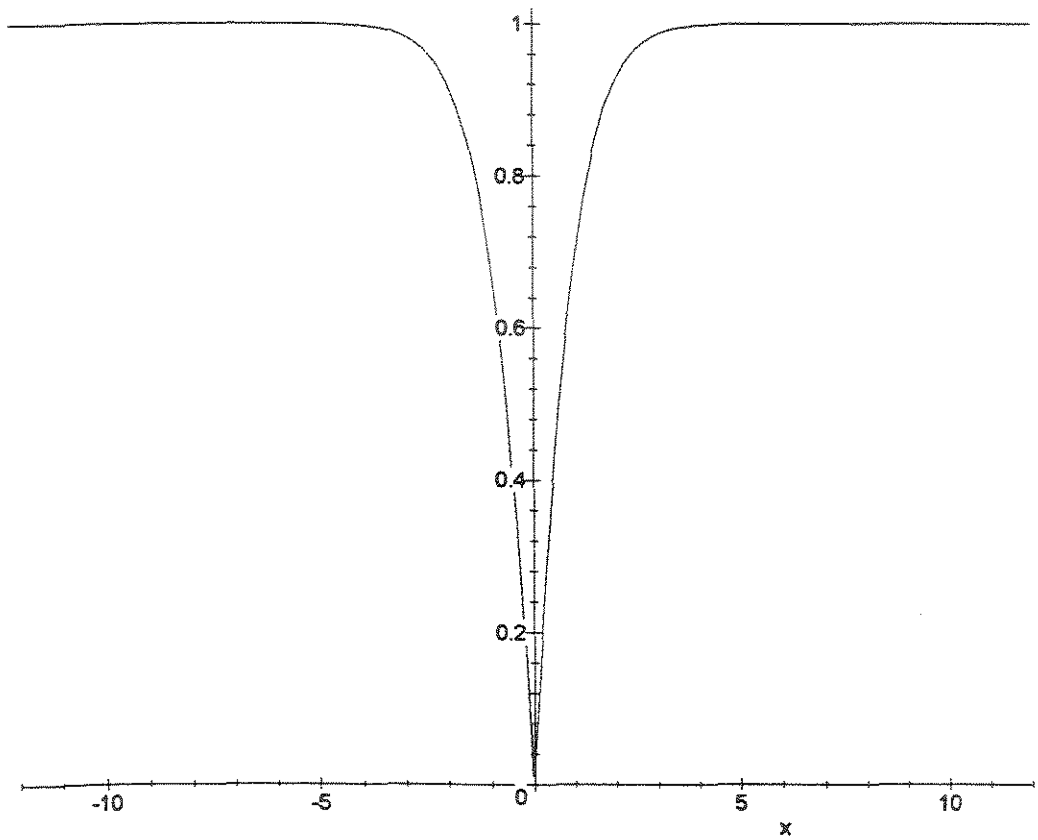

Gráfico 2. Gráfico da função $f(x) = |x| - x coth(x) + 1$.

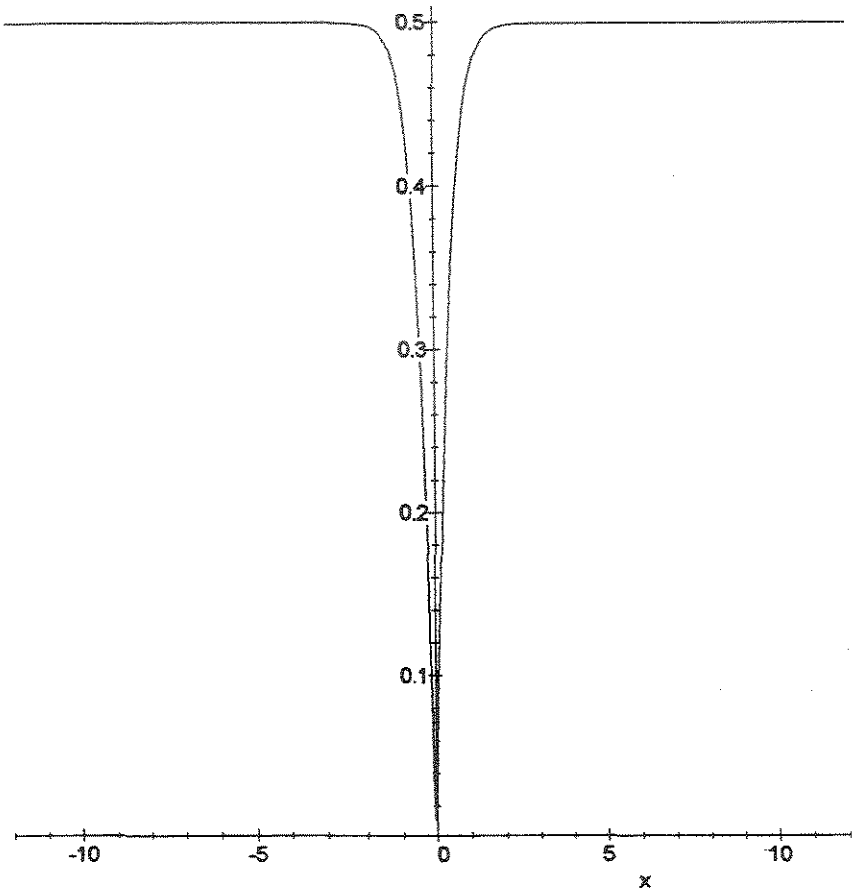

Gráfico 3. Gráfico da função $f(x) = |x| - xcoth(2x) + 1/2$.

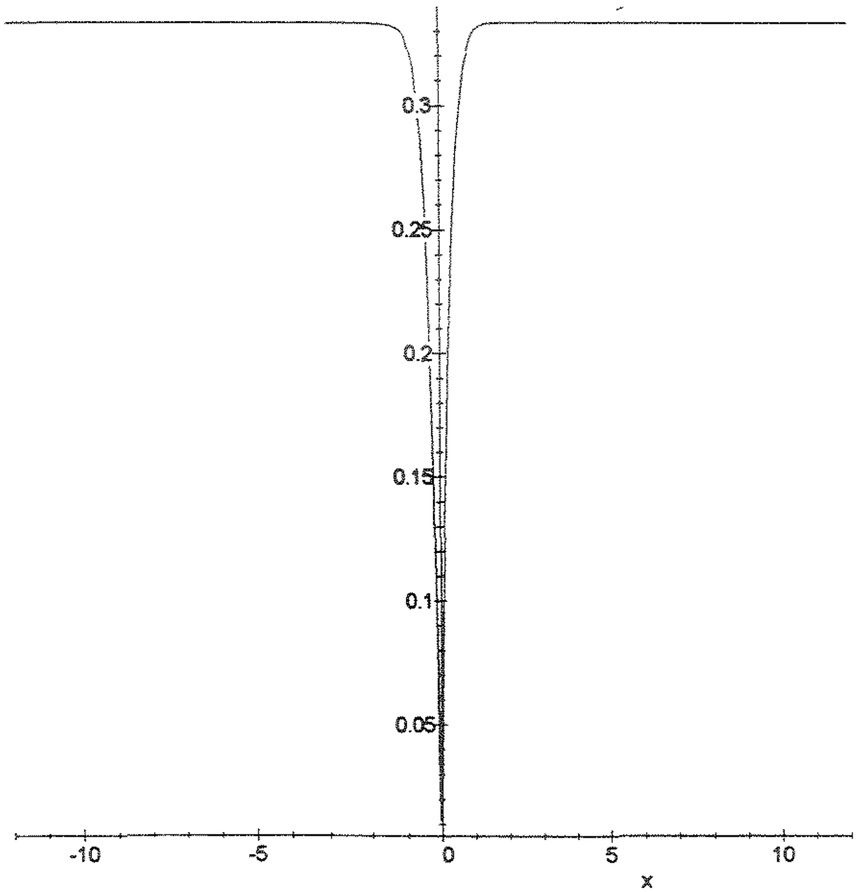

Gráfico 4. Gráfico da função $f(x) = |x| - xcoth(3x) + 1/3$.

Bibliografia

[A] J. P. Albert, *Concentration Compactness and the Stability of Solitary-Wave Solutions to Nonlocal Equation*, Contemporary Mathematics **221** (1999), 1-29.

[ABFS] L. Abdelouhab, J. Bona, M. Felland, and J. -C. Saut, *Nonlocal models for nonlinear dispersive waves*, Physica D **40** (1989), 360-392.

[ABPC] J. R. Apel, H. M. Byrne, J. R. Proni, and R. L. Charnell, *Observations of oceanic internal and surface waves from the Earth resources technology satellite*, Journal of Geophysical Research **80** (1975), 865-881.

[ABS] J. P. Albert, J. L. Bona and J. -C. Saut, *Model equation for waves in stratififield fluids*, Proc. Roy. Soc. Lodon, Ser A **453** (1997), 1233-1260.

[Br] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle*, Paris, 1993.

[Fi] D. G. de Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA/CNPq, 1977.

[HF] K. Hunkins and M. Fliegel, *Internal undular surges in Seneca lake: a natural occurrence of solitons*, Journal of Geophysical Research **78** (1973), 539-548.

[Fo] G. B. Folland, *Lectures on Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1983.

[I1] R. J. Iório Jr., *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, Projeto Euclides, IMPA/CNPq, (1998).

[I2] R. J. Iório Jr., W. V. L. Nunes, *Introdução às Equações de Evolução não lineares*, texto do curso ministrado no 18° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA/CNPq, 1991.

[ILS] R. J. Iório Jr, F. Linares and M. A. G. Scialom, *Living under the Sobolev barrier*, Memorias III Escuela de Verano Geometria Diferencial, Ecuaciones Diferenciales Parciales y Análisis Numérico (1995), 61-73.

[K1] T. Kato, *Quasilinear equations of evolution, with applications to partial differential equations*, Lecture Notes in Math. **448** (1975), 25-70.

[K2] T. Kato, *On the Korteweg-De Vries Equation*, Manuscripta Mathematica **28** (1979), 89-99.

[K3] T. Kato, *Linear Evolution Equation of "hyperbolic" type*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I **17** (1970), 241-258.

[K4] T. Kato, *Quasi-linear Equations of Evolution in non-reflexive Banach spaces*, Nonlinear PDE in Applied Sciences, US-Japan Seminar, Tokyo, Lect. Notes in Num. Appl. Anal.**5** (1982), 61-76.

[Kr] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1989.

[LKK] A. K. Liu, T. Kubota, and D. R. S. Ko, *Resonant transfer of energy between nonlinear waves in neighboring pycnoclines*, Stud. Appl. Math **63** (1980), 25-45.

[Mu] M. E. Munroe, *Introduction to Measure and Integration*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1959.

[Pa] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1983.

[RS] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics1: Functional Analysis*, Academic Press, 1972.

[So] F. H. Soriano, *On the Cauchy Problem for a KP-Boussinesq-Type System*, a aparecer em J. Differential Equation.

[WJ] P. D. Weidman and M. Johnson, *Experiments on leapfrogging internal solitary waves*, J. Fluid Mech **122** (1982), 195-213.