

AUTOMORFISMOS DE DOMÍNIOS
LIMITADOS EM ESPAÇOS NORMADOS

Renato Sollani

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mario Carvalho de Matos

Dezembro de 1976

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Para Suelli

e

meus pais

Agradeço ao Prof. Dr. Mario Carvalho de Matos pela orientação e incentivo recebidos, à Bibliotecária Sueli Duarte de Oliveira Soliani pelo auxílio na preparação técnica deste trabalho, e ao CAPES que através de bolsa custeou parcialmente meus estudos de Pós-Graduação no IMECC.

SUMÁRIO

1. Notas Preliminares	1
1.1 Notação e Terminologia	1
1.2 Polinômios	2
1.3 Séries de Potência	4
1.4 Aplicações Holomorfas	6
1.5 A Integral de Cauchy	9
1.6 Alguns Teoremas de Análise Funcional . .	10
2. Automorfismos e Funções Biholomorfas em Domí nios Limitados	13
2.1 Automorfismos e Funções Biholomorfas . .	13
2.2 Alguns Resultados no Espaço de Banach c_0	27
2.3 Biholomorfismos Preservando o Zero da Bo la Unitária	34
3. Automorfismos da Bola Unitária de um Espaço de Hilbert	47
3.1 Grupo dos Automorfismos da Bola Unitária	48
3.2 Grupo dos Automorfismos da Bola Unitária em Função de uma Base Ortonormal	58
3.3 Uma Caracterização para o Conjunto dos Pontos Fixos de um Automorfismo da Bola Unitária	65
Bibliografia	72

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é descrever no contexto de espaços normados (dimensão infinita) alguns resultados básicos sobre biholomorfismos e automorfismos holomorfos. Procuramos apresentar de modo didático as semelhanças e as diferenças que aparecem entre os resultados de dimensão finita e infinita, descrevendo e relacionando trabalhos de diversos autores. Esperando que este trabalho venha a ser útil para aqueles estudantes que se iniciam no estudo de Holomorfia em Dimensão Infinita, procuramos tornar o nosso texto o mais claro e simples possível.

Na primeira parte do trabalho procuramos introduzir de modo sucinto as definições e resultados iniciais sobre Holomorfia Infinita, material amplamente conhecido pelos especialistas nesta área. Na segunda parte procuramos generalizar para um espaço normado, alguns resultados obtidos por Henri Cartan. As demonstrações de tais resultados, que aparecem no livro *Several Complex Variables* de R. Narasimhan [7], foram por nós adaptadas para o caso normado. Posteriormente procuramos investigar algumas propriedades sobre os biholomorfismos que

fixam o zero da bola unitária de um espaço normado e que podem ser encontradas no artigo de S.J. Greenfield e N.R. Wallach [12]. Já na terceira parte fazemos um estudo bastante amplo sobre o conjunto dos pontos fixos de um automorfismo da bola unitária, agora de um espaço de Hilbert. Aqui vai aparecer uma dualidade com respeito à existência de pontos fixos para funções C^∞ (no sentido real) e automorfismos em espaços de Hilbert. S. Kakutani mostrou que existe homeomorfismos da bola unitária fechada do espaço de Hilbert (ℓ^2) sobre si mesma sem pontos fixos. Uma pequena modificação neste exemplo mostra que existe difeomorfismo com esta mesma propriedade. Nossos resultados mostrarão que no caso complexo todo automorfismo da bola unitária fechada de um espaço de Hilbert tem ponto fixo. Chegamos a estes resultados, fundindo as idéias básicas de A. Renaud [13] e Suffridge & Hayden [14] que fazem o mesmo tipo de estudo sob diferentes pontos de vista.

1. Notas Preliminares

1.1. Notação e Terminologia

Nestas notas preliminares pretendemos agrupar os conceitos e resultados básicos estritamente necessários para o trabalho a que propomo-nos a desenvolver.

Por N , R e C denotaremos, respectivamente o conjunto dos números naturais, dos números reais e dos números complexos. E e F serão dois espaços normados complexos. Em alguns casos serão espaços de Banach e em outros serão espaços de Hilbert.

As bolas aberta e fechada com centro ξ e raio ρ num espaço normado serão denotadas por $B_\rho(\xi)$ e $\bar{B}_\rho(\xi)$ respectivamente; quando não houver perigo de confusão usaremos simplesmente B e $\bar{B}$. Temos ainda $B_\rho(X) = \bigcup_{x \in X} B_\rho(x)$ e $\bar{B}_\rho(X) = \bigcup_{x \in X} \bar{B}_\rho(x)$ para um subconjunto X não vazio de um espaço normado qualquer.

Seja U um sub-conjunto aberto não vazio de um espaço normado E . $\mathcal{C}(U, F)$ e $\mathcal{B}(U, F)$ representarão o espaço vetorial de todas as funções contínuas e de todas as funções homomorfas (vide (1.4.1)) de U em F respectivamente.

1.2 Polinômios

1.2.1 Definição

Para cada $m \in \mathbb{N}$ $\mathcal{L}_a^{(m)}(E; F)$ será o espaço vetorial de todas as aplicações m -lineares de $E^m = E \times \dots \times E$ (m -vezes) em F , relativamente às operações pontuais. Por $\mathcal{L}_{as}^{(m)}(E; F)$ denotaremos o sub-espaço vetorial de $\mathcal{L}_a^{(m)}(E; F)$ formado pelas aplicações simétricas. Se $A \in \mathcal{L}_a^{(m)}(E; F)$ o simetrizado de A será o elemento $A_s \in \mathcal{L}_{as}^{(m)}(E; F)$ e definido por:

$$A_s(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \tau_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_m \in E$, onde τ_m será o grupo simétrico de ordem m . Para $m=0$ colocaremos $\mathcal{L}_a^{(0)}(E; F) = \mathcal{L}_{as}^{(0)}(E; F)$ igual ao espaço vetorial F e faremos $A_s = A$ para todo $A \in \mathcal{L}_a^{(0)}(E; F)$. Para $m=1, 2, \dots$, $\mathcal{L}^{(m)}(E; F)$ será o sub-espaço vetorial de $\mathcal{L}_a^{(m)}(E; F)$ formado pelas aplicações contínuas. Temos também $\mathcal{L}_s^{(m)}(E; F) = \mathcal{L}^{(m)}(E; F) \cap \mathcal{L}_{as}^{(m)}(E; F)$ para $m=1, 2, \dots$

1.2.2 Definição

Se $A \in \mathcal{L}_a^{(m)}(E; F)$, $x \in E$, $m=1, 2, \dots$, Ax^m será uma

notação para $A(x, \dots, x)$, onde x é repetido m -vezes. Se $m=0$ colocamos $A x^0 = A$. Um polinômio m -homogêneo P de E em F é uma função $P: E \rightarrow F$ para a qual existe $A \in \mathcal{L}_a^{(m)}(E; F)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in E$. Para representar esta correspondência entre P e A escrevemos $P = \hat{A}$. Por $\mathcal{P}_a^{(m)}(E; F)$ entenderemos o espaço vetorial complexo, relativamente às operações pontuais, de todos os polinômios m -homogêneos de E em F . $\mathcal{P}^{(m)}(E; F)$ será o sub-espaço vetorial de $\mathcal{P}_a^{(m)}(E; F)$ formado pelos polinômios contínuos m -homogêneos de E em F . $\mathcal{P}^{(0)}(E; F) = \mathcal{P}_a^{(0)}(E; F)$ será o espaço vetorial de todas as funções constantes de E em F . Temos $\hat{A} = \hat{A}_s$.

1.2.3 Observação

A aplicação $A \mapsto \hat{A}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais entre $\mathcal{L}_{as}^{(m)}(E; F)$ e $\mathcal{P}_a^{(m)}(E; F)$ que leva $\mathcal{L}_s^{(m)}(E; F)$ homeomorficamente sobre $\mathcal{P}^{(m)}(E; F)$.

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [5].

1.2.4 Definição

Um polinômio P de E em F é uma aplicação que pode ser escrita na forma $P = P_0 + \dots + P_m$ para determinados

$P_k \in \mathcal{P}^k(E; F)$, $k=0, \dots, m$. Denotaremos por $\mathcal{P}_a(E; F)$ o espaço vetorial, relativamente às operações pontuais de todos os polinômios de E em F . O sub-espaço vetorial de $\mathcal{P}_a(E; F)$ dos polinômios contínuos de E em F será indicado por $\mathcal{P}(E; F)$.

1.2.5 Observação

Se $P \in \mathcal{P}_a(E; F)$, $P \neq 0$, existe uma e somente uma maneira de escrever $P = P_0 + \dots + P_m$, com $m=0, 1, \dots$, $P_k \in \mathcal{P}^k(E; F)$ $k=0, \dots, m$ e $P_m \neq 0$.

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [5].

1.3 Séries de Potências

1.3.1 Definição

Uma série de potências de E em F em torno de $\xi \in E$ é uma série da forma $\sum_{m=0}^{\infty} A_m (x-\xi)^m$ onde $A_m \in \mathcal{P}_a^m(E; F)$, $m=0, 1, \dots$ ou então da forma $\sum_{m=0}^{\infty} A_m (x-\xi)$ com $P_m = \hat{A}_m$, $\hat{A}_m \in \mathcal{P}_a^m(E; F)$ $m=0, 1, \dots$. Tanto A_m como P_m são chamados coeficientes da série.

1.3.2. Definição

O raio de convergência de uma série de potências de E em F em torno de ξ é o maior r , $0 \leq r \leq +\infty$, tal que a série converge uniformemente em toda bola fechada $\overline{B}_\rho(\xi)$ de centro ξ e raio $\rho < r$. A série de potências é dita convergente se seu raio de convergência é estritamente positivo, isto é, se existe $\rho > 0$ tal que a série de potências converge uniformemente em $\overline{B}_\rho(\xi)$.

1.3.3 Fórmula de Cauchy-Radamard

O raio de convergência de uma série de potências $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi)$ de E em F em torno de $\xi \in E$ é dado por:

$$r = \frac{1}{\limsup_{m \rightarrow \infty} \|P_m\|^{1/m}}$$

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [5].

1.3.4 Observação

Se para algum $\rho > 0$ a série $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi)$ converge e tem soma zero para todo $x \in \bar{B}_\rho(\xi)$; então $P_m = 0$ para $m=0, 1, \dots$.

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [5].

1.4 Aplicações Holomorfas

1.4.1 Definição

Uma função $f: U \rightarrow F$ é dita holomorfa em U , se correspondendo a cada $\xi \in U$, existem; uma série de potências $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi)$ de E em F em torno de ξ e alguma bola aberta $B_\rho(\xi) \subset U$, $\rho > 0$, onde a série de potências converge uniformemente a $f(x)$ com $x \in B_\rho(\xi)$. Por (1.3.4) em cada ponto $\xi \in U$, a série $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi)$ é única. Tal série é denominada a série de Taylor de f em ξ . Para representar esta relação entre f e a série de potências escreveremos $f(x) \cong \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi)$. $\mathcal{H}(U; F)$ denotará o espaço vetorial de todas as funções holomorfas de U em F , relativamente às operações pontuais.

Observação:

Uma definição equivalente a (1.4.1) é a seguinte: $f: U \rightarrow F$ é holomorfa em U se, correspondendo a cada $\xi \in U$, existe uma única transformação $A \in \mathcal{L}^1(E; F)$ tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(\xi+h) - f(\xi) - A(h)\|}{\|h\|} = 0$$

1.4.2 Definição

Seja $f \in \mathcal{H}^p(U; F)$ e $f(x) \approx \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi)$ a série de Taylor de f em $\xi \in U$. Seja $P_m \in \mathcal{P}^p({}^m E; F)$ correspondendo a $A_m \in \mathcal{L}_s({}^m E; F)$ por $P_m = \hat{A}_m$ ($m=0, 1, \dots$). Utilizaremos as notações:

$$d^m f(\xi) = m! A_m,$$

$$\hat{d}^m f(\xi) = m! P_m,$$

temos assim as aplicações diferenciais

$$d^m f: x \in U \mapsto d^m f(x) \in \mathcal{L}_s^m({}^m E; F) \quad ,$$

$$\hat{d}^m f: x \in U \mapsto \hat{d}^m f(x) \in \mathcal{P}({}^m E; F)$$

e os operadores diferenciais.

$$d^m: f \in \mathcal{H}(U; F) \mapsto d^m f \in \mathcal{H}(U; \mathcal{L}_s^m({}^m E; F)) \quad ,$$

$$\hat{d}^m: f \in \mathcal{H}(U; F) \mapsto \hat{d}^m f \in \mathcal{H}(U; \mathcal{P}({}^m E; F))$$

de ordem $m = 0, 1, \dots$.

O polinômio de Taylor $\tau_{m, f, \xi}$ de ordem m de f em ξ é definido por

$$\begin{aligned} \tau_{m, f, \xi}(x) &= \sum_{\ell=0}^m \frac{1}{\ell!} d^\ell f(\xi) (x-\xi)^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \hat{d}^\ell f(\xi) (x-\xi) \quad , \end{aligned}$$

onde $x \in E$.

As normas se relacionam do seguinte modo:

$$\|d^m f(\xi)\| \leq \frac{m^m}{m!} \|\hat{d}^m f(\xi)\|$$

1.4.3 Definição

Seja $U \subset E$ aberto. $\mathcal{K}(U)$ indicará a família de todos os sub-conjuntos compactos de U . τ_0 será a topologia localmente convexa, em $\mathcal{B}(U; F)$ determinada pela família de semi-normas $\{p_K$ tal que $K \in \mathcal{K}(U)\}$, onde $p_K(f) = \sup \{\|f(t)\| \text{ tal que } t \in K\}$, para toda $f \in \mathcal{B}(U; F)$.

1.5 A Integral de Cauchy

1.5.1 Fórmula Integral de Cauchy

Seja $f \in \mathcal{B}(U; F)$, $\xi \in U$, $x \in E$ e $\rho > 0$ tal que $\xi + \lambda x \in U$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq \rho$. Então:

$$\frac{1}{m!} \partial^m f(\xi)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi + \lambda x)}{\lambda^{m+1}} d\lambda$$

para $m = 0, 1, \dots$.

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [5].

1.5.2 Desigualdade de Cauchy

Seja $f \in \mathcal{H}(U; F)$, $\rho > 0$ e $\bar{B}_\rho(\xi) \subset U$.

Então

$$\left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(\xi) \right\| \leq \frac{1}{\rho^m} \sup_{\|x-\xi\| = \rho} \|f(x)\|$$

para $m = 0, 1, \dots$.

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [5].

1.6 Alguns Teoremas de Análise Funcional

1.6.1 Teorema de Montel

Seja X um sub-conjunto de $\mathcal{H}(U; F)$. São equivalentes as seguintes afirmações:

- (i) X é τ_0 -relativamente compacto

- (ii) X é τ_0 - limitado e o conjunto $X(u)$ de to dos os $f(u)$ tal que $f \in X$ é relativamente compacto em F para todo $u \in U$.
- (iii) X é equicontínuo e $X(u)$ é relativamente compacto em F para todo $u \in U$.

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [10].

1.6.2 Definição

Um espaço topológico X possui a propriedade do ponto fixo, se para toda aplicação contínua $T: X \rightarrow X$, existe $a \in X$ tal que $T(a) = a$.

1.6.3 Teorema de Schauder-Tychonoff

Todo subconjunto compacto convexo de um espaço topológico linear localmente convexo possui a propriedade do ponto fixo.

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [3].

1.6.4 Teorema da Função Inversa

Sejam E e F espaços de Banach, U um subconjunto aberto de E , e $f:U \rightarrow F$ função holomorfa. Suponha que para algum ponto $x_0 \in U$, $df(x_0):E \rightarrow F$ seja um isomorfismo. Então f é um biholomorfismo local em x_0 ; isto é: existem vizinhanças U de x_0 e V de $f(x_0)$ tal que $f:U \rightarrow V$ é bijetora, holomorfa com inversa também holomorfa.

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [4].

2. Automorfismos e Funções Biholomorfas em Domínios Limitados

2.1 Automorfismos e Funções Biholomorfas

2.1.1 Definição

Seja E um espaço normado. A todo subconjunto D aberto conexo de E , chamaremos um domínio em E . Se além disso D for limitado teremos um domínio limitado em E .

2.1.2 Definição

Sejam E e F espaços normados, $D \subset E$, $D' \subset F$ dois domínios. Uma aplicação holomorfa $f: D \rightarrow D'$ será um biholomorfismo de D em D' , se existir $g: D' \rightarrow D$ holomorfa tal que $f \circ g = \text{id}_{D'}$, e $g \circ f = \text{id}_D$. No caso em que $D = D'$ então f se diz um automorfismo de D . Com a notação $\text{Aut}(D)$ entenderemos o conjunto de todos os automorfismos de D . Diremos que D e D' são equivalentes quando houver um biholomorfismo entre eles.

2.1.3 Proposição

$\text{Aut}(D)$ é grupo, sob a operação de composição de funções.

Demonstração:

Temos que $\text{id}: D \rightarrow D$ pertence a $\text{Aut}(D)$; e se $f, g \in \text{Aut}(D)$ então $f_1 = f \circ g^{-1} \in \text{Aut}(D)$ pois $f_2 = g \circ f^{-1}: D \rightarrow D$ é holomorfa e $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = \text{id}$. Daí $\text{Aut}(D)$ é grupo para a composição de funções.

2.1.4 Proposição

Seja D um domínio limitado em um espaço normado E e $f: D \rightarrow D$ função holomorfa. Suponha que exista $a \in D$ tal que $f(a) = a$ e $df(a) = \text{id}$; então $f = \text{id}$.

Demonstração:

$$\text{Temos que } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k f(a)}{k!} (z-a) \text{ para to-}$$

do $z \in B_r(a)$, onde $B_r(a)$ é a maior bola aberta de centro

a e raio r contida em D.

Como por hipótese $f(a) = a$ e $df(a) = id$ segue que

$$f(z) = z + \sum_{K=2}^{\infty} \frac{\hat{d}^K f(a)}{K!} (z-a)$$

para todo $z \in B_r(a)$.

Suponhamos que f seja diferente da aplicação identidade. Seja então $N \geq 2$ o menor inteiro tal que

$$f(z) = z + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\hat{d}^n f(a)}{n!} (z-a)$$

para todo $z \in B_r(a)$, com

$$\frac{\hat{d}^N f(a)}{N!} \neq 0.$$

Seja $A_N \in \mathcal{L}_s(N; E; E)$ tal que $A_N = \frac{\hat{d}^N f(a)}{N!}$.

Para cada $K \in \mathbb{N}$, $K \geq 1$ façamos $f^1 = f$ e $f^K = f^{K-1} \circ f$. Mostremos agora que:

$$f^K(z) = z + K \frac{\hat{d}^N f(a)}{N!} (z-a) + \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n^K (z-a)$$

para todo $z \in B_r(a)$ onde

$$p_n^K \in \mathcal{P}({}^n E, E) \quad .$$

Para $K = 1$ é imediato.

Vamos supor que seja válido para $K \geq 1$ e mostrar que vale para $K+1$.

Assim temos:

$$f^{K+1}(z) = f^K(f(z)) = f(z) + K A_N(f(z)-a)^N + \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n^K(f(z)-a)$$

$$= z + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\hat{d}^n f(a)}{n!} (z-a) + K A_N \left[(z-a) + \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\hat{d}^n f(a)}{n!} (z-a)}_{b(z)} \right] + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} p_n^K (z-a)}_{B(z)}$$

$$= z + A_N (z-a)^N + K A_N \left[(z-a) + b(z) \right]^N + B(z) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\hat{d}^n f(a)}{n!} (z-a)$$

$$= z + A_N (z-a)^N + K \sum_{j=0}^N A_N (z-a)^j (b(z))^{N-j} + \dots$$

$$= z + (K+1) A_N (z-a)^N + \dots$$

$$= z + (K+1) \frac{\hat{d}^N f(a)}{N!} (z-a) + \dots$$

Seja M tal que $D \subset B_M(0)$. Se $\overline{B_R(a)} \subset D$ pela desigualdade de Cauchy (1.5.2) temos:

$$\left\| \frac{K \hat{d}^N f(a)}{N!} \right\| \leq \frac{M}{R^N}$$

para todo $K \geq 1$.

Logo

$$\left\| \frac{\hat{d}^N f(a)}{N!} \right\| = 0$$

e daí

$$\frac{\hat{d}^N f(a)}{N!} = 0$$

o que é uma contradição. Portanto temos $f = id$.

2.1.5 Corolário

Sejam E e F espaços normados, $D \subset E$, $D' \subset F$ domínios limitados. Sejam ainda $f: D \rightarrow D'$ e $g: D' \rightarrow D$ funções holomorfas tais que $(g \circ f)(a) = a$ para algum $a \in D$, $dg(f(a)) \circ df(a) = id$ e $df(a) \circ dg(f(a)) = id$. En-

tão g é um biholomorfismo de D' em D .

Demonstração:

As hipóteses fornecem $d(g \circ f)(a) = id$ e $(g \circ f)(a) = a$, por (2.1.4) segue que $g \circ f = id_D$.

Temos também

$$\begin{aligned}(f \circ g)(f(a)) &= f(g(f(a))) = f(a) \text{ e } d(f \circ g)(f(a)) = \\ &= d(f(g(f(a)))) \circ dg(f(a)) = df(a) \circ dg(f(a)) = id,\end{aligned}$$

ou seja:

$$(f \circ g)(f(a)) = f(a) \text{ e } d(f \circ g)f(a) = id,$$

então ainda por (2.1.4) segue que $f \circ g = id_{D'}$. Daí g é um biholomorfismo de D' em D .

Observação:

Se em (2.1.5) não admitirmos a hipótese de que $df(a) \circ dg(f(a)) = id$ então g poderá deixar de ser

um biholomorfismo de D' em D . Para isso definamos a seguinte função:

$$f: B_1(0) \subset c_0 \rightarrow B_1(0) \subset c_0$$

$$(z_1, z_2, \dots, z_n, \dots) \mapsto \left(\frac{1}{2} z_1 + \frac{1}{2} z_2, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\right)$$

onde c_0 é o conjunto das sequências complexas convergentes a zero na norma do sup e $B_1(0)$ é a bola unitária de c_0 .

Consideremos

$$g: B_1(0) \subset c_0 \rightarrow B_1(0) \subset c_0$$

$$(w_1, w_2, \dots, w_n, \dots) \mapsto (w_2, w_3, \dots, w_n, \dots)$$

f e g são lineares contínuas, logo holomorfas. f e g sendo lineares temos $df(0) = f$ e $dg(f(0)) = g$ daí $d(g \circ f)(0) = dg(f(0)) \circ df(0) = g \circ f = \text{id}$ e $(g \circ f)(0) = 0$.

Mas aqui não temos $f = g^{-1}$ em $B_1(0)$ pois

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots\right) \in B_1(0) \text{ e } (f \circ g)\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots\right) =$$

$$= f(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots, 0, \dots)$$

logo $f \circ g \neq \text{id}$.

2.1.6 Corolário

Seja D um domínio limitado em um espaço normado E ; sejam f e g dois automorfismos de D tais que $f(a)=g(a)=a$. Se $df(a)=dg(a)$ em D , então $f=g$ em D .

Demonstração:

Seja $h = g^{-1}$. Então h é automorfismo de D . Como temos $h \circ g = \text{id}_D$ então $dh(g(a)) \circ dg(a) = \text{id}$. Mas pelas hipóteses vem que $dh(f(a)) \circ df(a) = \text{id}$ ou seja $d(h \circ f)(a) = \text{id}$; como $(h \circ f)(a) = a$, segue de (2.1.4) que $h \circ f = \text{id}_D$ ou seja $f = g$ em D .

2.1.7 Definição

Um domínio D em um espaço normado E é chamado um domínio circular se $e^{i\theta}z \in D$ para todo $z \in D$ e todo $\theta \in \mathbb{R}$.

2.1.8 Proposição

Seja D um domínio circular limitado em E e $f \in \text{Aut}(D)$. Se $0 \in D$ e $f(0) = 0$, então f é linear.

Demonstração:

Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ seja $K_\theta \in \text{Aut}(D)$ dado por

$$K_\theta(z) = e^{i\theta} z \quad \text{para todo } z \in D,$$

K_θ assim definida é linear e temos que $K_{-\theta}(z) = e^{-i\theta} z = K_\theta^{-1}(z)$, ou seja $K_{-\theta} = K_\theta^{-1}$.

Como $f \in \text{Aut}(D)$, consideremos $g = f^{-1}$ e daí definamos

$$\phi = K_{-\theta} \circ g \circ K_\theta \circ f$$

Pela regra da cadeia e do fato de K_θ ser linear e comutar com aplicações lineares segue que:

$$d\phi(0) = K_{-\theta} \circ K_\theta \circ dg(f(0)) \circ df(0) = \text{id}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\phi(0) &= (K_{-\theta} \circ g \circ K_{\theta} \circ f)(0) = (K_{-\theta} \circ g \circ K_{\theta})(f(0)) = (K_{-\theta} \circ g)(K_{\theta}(0)) = \\ &= K_{-\theta}(g(0)) = K_{-\theta}(0) = 0\end{aligned}$$

então por (2.1.4) temos que $\phi = \text{id}$, ou seja:

$$K_{-\theta} \circ g \circ K_{\theta} \circ f = \text{id}$$

o que implica

$$K_{\theta} \circ f = f \circ K_{\theta}$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Temos então $e^{i\theta} f(z) = f(e^{i\theta} z)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e $z \in D$. Tomando agora o desenvolvimento em série de potências em torno da origem de ambos os membros temos:

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{i\theta} \frac{\tilde{d}^j f(0)}{j!} z = \sum_{j=0}^{\infty} e^{i j \theta} \frac{\tilde{d}^j f(0)}{j!} z \text{ para todo } \theta \in \mathbb{R} \text{ e } z \in D,$$

mas devido à unicidade do desenvolvimento da série segue que

$$e^{i\theta} \frac{\hat{d}^j f(0)}{j!} z = e^{ij\theta} \frac{\hat{d}^j f(0)}{j!} z \text{ para todo } \theta \in \mathbb{R} \text{ e } z \in D.$$

e daí temos $\hat{d}^j f(0) = 0$ para todo $j \geq 2$, o que nos leva a concluir que $f(z) = \hat{d}f(0)z$ para todo $z \in D$, ou seja, f é linear.

2.1.9 Corolário

Seja D um domínio circular limitado de um espaço normado complexo E e f um automorfismo de D , conservando a origem. Então f tem uma extensão a E que é um isomorfismo.

Demonstração:

De (2.1.8) segue que f é linear, o mesmo valendo para sua inversa f^{-1} que também é um automorfismo que fixa a origem. Como ambas são lineares contínuas então f admite uma extensão a E que é um isomorfismo.

2.1.10 Corolário

Seja D a bola unitária de um espaço normado

complexo E , e f um automorfismo de D conservando a origem. Então f é uma isometria.

Demonstração:

Sabemos de (2.1.8) que f é linear; então
 $\|f(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|$. Seja $y = f(x)$.

$$\|y\| = \|f(f^{-1}(y))\| \leq \|f\| \cdot \|f^{-1}\| \cdot \|y\|,$$

daí

$$1 \leq \|f\| \cdot \|f^{-1}\| \quad (I)$$

$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$. Como $f(x)$ pertence à bola unitária
 então $\|f\| \leq 1$, o mesmo valendo para f^{-1} ; isto é

$$\|f^{-1}\| \leq 1,$$

daí

$$\|f\| \cdot \|f^{-1}\| \leq 1 \quad (II)$$

De (I) e (II) obtemos $\|f\| \cdot \|f^{-1}\| = 1$. Como temos $\|f\| \leq 1$ e $\|f^{-1}\| \leq 1$, segue que $\|f\| = 1 = \|f^{-1}\|$ e daí f é isometria.

2.1.11 Teorema

Seja D um domínio limitado de um espaço de Banach E . Se $\mathfrak{F} \subset \text{Aut}(D)$ e $\mathfrak{F}^{-1} = \{g \in \text{Aut}(D) \text{ tal que } g = f^{-1} \text{ para alguma } f \in \mathfrak{F}\}$ são τ_0 -relativamente compactos no conjunto das aplicações holomorfas de D em E , então toda aplicação $f \in \mathfrak{F}$ é tal que:

$f \in \text{Aut}(D)$ se e somente se existe $a \in D$ tal que $df(a)$ é um isomorfismo de E .

Demonstração:

Suponhamos que f seja um automorfismo de D , então existe $g: D \rightarrow D$ holomorfa tal que $f \circ g = g \circ f = \text{id}_D$. De $g \circ f = \text{id}_D$ temos $dg(f(a)) \circ df(a) = \text{id}_E$ ou seja $dg(b) \circ df(a) = \text{id}_E$ onde $b = f(a)$. De $f \circ g = \text{id}_D$ temos $df(g(b)) \circ dg(b) = \text{id}_E$, como $g(b) = a$ segue que $df(a) \circ dg(b) = \text{id}_E$. Segue então que $df(a)$ é inversível,

como é linear contínua temos que $df(a)$ é isomorfismo de E .

Reciprocamente se $df(a)$ é isomorfismo de E , pelo teorema da função inversa (1.6.4) f é um automorfismo local em a . Seja G o inverso local de f . $G \circ f = id$ em uma vizinhança V de a . Como $f \in \mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}$ é τ_0 -relativamente compacto existe net f_α , $f_\alpha \in \mathfrak{F}$ tal que $f = \lim_{\alpha \in A} f_\alpha$. Como $\mathfrak{F}^{-1}$ é τ_0 -relativamente compacto podemos passar a um sub-net $(g_\beta)_{\beta \in A}$ de $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ onde $g_\alpha = f_\alpha^{-1}$ tal que $g_\beta \rightarrow g$ em τ_0 , $g: D \rightarrow E$ holomorfa. Temos também $f = \lim_{\tau_0} f_\beta$. Como $G \circ f = id_V$ temos $(g \circ f)(x) = \lim g_\beta(f(x))$ para todo $x \in V$. Daí

$$\begin{aligned} |(g \circ f)(x) - x| &= |g(f(x)) - g_\beta(f(x)) + g_\beta(f(x)) - g_\beta(f_\beta(x))| \leq \\ &\leq |g(f(x)) - g_\beta(f(x))| + |g_\beta(f(x)) - g_\beta(f_\beta(x))| \end{aligned}$$

para todo $\beta \in A$.

Do fato de $\{g_\beta\}_{\beta \in A}$ ser equicontínua, pois $\mathfrak{F}^{-1}$ é equicontínuo pelo Teorema de Montel (1.6.1); e $\lim f_\beta(x) = f(x)$ temos que para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e $\beta_0 \in A$ tais que:

$$|g_{\beta}(f_{\beta}(x)) - g_{\beta}(f(x))| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \beta \geq \beta_0 \text{ e } |f_{\beta}(x) - f(x)| < \delta \quad \forall \beta \geq \beta_0$$

vale ainda

$$|g(f(x)) - g_{\beta}(f(x))| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \beta \geq \beta_0 ,$$

segue então que

$$|(g \circ f)(x) - x| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 ,$$

daí

$$(g \circ f)(x) = x$$

para todo $x \in V$. Como $f(V)$ é um aberto temos $g|_{f(V)} = G$. Logo $(g \circ f)(a) = a$ e $dg(f(a)) \circ df(a) = df(a) \circ dg(f(a)) = \text{id}$. Por (2.1.5) temos $g = f^{-1}$ e daí $f \in \text{Aut}(D)$.

2.2 Alguns Resultados no Espaço de Banach c_0

2.2.1 Proposição:

Seja c_0 o espaço de Banach de todas as sequên

cias complexas convergentes a zero com a norma do supremo. Sejam D a bola unitária centrada na origem e f um automorfismo de D . Então existem:

(i) $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijeção

(ii) $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}, \theta_j \in \mathbb{R}$

(iii) $\alpha = (\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}, \alpha \in D$ tal que:

$$f(z) = e^{i \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \left(\frac{z_{p(j)} - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j z_{p(j)}} \right)} \prod_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z_{p(j)} - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j z_{p(j)}} \right)$$

onde $z = (z_j)_{j=0}^{\infty} \in D$.

Demonstração:

Para todo $\alpha \in D$ e $z \in D$ definimos

$$\sigma_{\alpha}(z) = \prod_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z_j - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j z_j} \right)$$

σ_{α} assim definida é um automorfismo de D e $\sigma_{\alpha}(\alpha) = 0$.

Substituindo f por $\sigma_\alpha f$ onde $\alpha=f(0)$ podemos supor que $f(0) = 0$. O que devemos mostrar é que se $f(0) = 0$, então $f(z) = \left(e^{i\theta_j} z_p(j) \right)_{j=0}^\infty$ para todo $z \in D$.

Por (2.1.8) f é linear e pode ser estendida a c_0 . Então $f(z) = \left(f_k(z) \right)_{k=0}^\infty$ para todo $z \in D$ com $f_k \in c_0' = \ell_1$, onde c_0' é o dual de c_0 .

Logo $f_k(z) = \sum_{j=0}^\infty a_{kj} z_j$ com $\sum_{j=0}^\infty |a_{kj}| < \infty$. Co-

mo $\|f\| \leq 1$ e $f_k = p_k \circ f$ onde $p_k(z) = z_{k_\infty}$, temos $\|f_k\| = \|p_k \circ f\| \leq \|p_k\| \cdot \|f\| \leq 1$. Assim $\sum_{j=0}^\infty |a_{kj}| \leq 1$ para todo k .

Para cada $j \in \mathbb{N}$ fixo consideremos

$$z_n = (0, 0, \dots, 0, 1 - \frac{1}{n}, 0, \dots) \in D$$

onde o elemento $1 - \frac{1}{n}$ aparece na j -ésima posição. D sendo aberto, $\{z_n\}$ não possui ponto limite em D . Além disso $f_k(z_n) = a_{kj}(1 - \frac{1}{n})$ para todo k e todo n naturais. Logo

$$f(z_n) = (1 - \frac{1}{n})(a_{0j}, a_{1j}, \dots, a_{kj}, \dots)$$

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = (a_{0j}, a_{1j}, \dots, a_{kj}, \dots) = f(e_j)$$

onde

$$e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

com 1 na j -ésima posição. Portanto

$$f(e_j) \in \partial D, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{kj} = 0 \text{ e } \sup_K |a_{kj}| = 1.$$

Para cada j , seja $K(j) \in \mathbb{N}$ o primeiro elemento K tal que $|a_{Kj}| = 1$. Se $|a_{K(j)j}| = 1$ segue que $|a_{K(j)i}| = 0$ para todo $i \neq j$.

Temos então $K: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$j \mapsto K(j).$$

Provemos que K é aplicação bijetora.

(i) K é injetora

Consideremos $K(i) = K(j)$, então

$$|a_{K(j)j}| = 1 = |a_{K(i),j}|.$$

Se tivermos $i \neq j$ então $a_{K(i)j} = 0$ o que contradiz o fato de $|a_{K(i)j}| = 1$.

(ii) K é sobrejetora

Suponhamos que $K(N) \subsetneq N$. Seja então $\ell \in N$ tal que $\ell \notin K(N)$.

Temos

$$f(z_0, z_1, \dots, z_n, \dots) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{0j} z_j, \dots, a_{K(i)i} z_i, \dots \right)$$

Como f é sobre D , dado $w = (w_0, \dots, w_{K(i)}, \dots) \in D$ existe $z \in D$ tal que $f(z) = w$.

Mas

$$\frac{w_{K(i)}}{a_{K(i)i}} = z_i$$

com

$$|a_{K(i)i}| = 1$$

e devemos ter

$$w_{\ell} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{\ell j} \frac{w_{K(j)}}{a_{K(j)j}}$$

que é determinado univocamente.

Seja $w' = (w'_0, w'_1, \dots, w'_\ell, \dots) \in D$ com $w'_\ell \neq w_\ell$ e $w'_i = w_i$ para todo $i \neq \ell$.

Como $K(i) \neq \ell$ para todo i ; pois $\ell \notin K(N)$, então $w'_{K(i)} = w_{K(i)}$ para todo $i \in N$.

Portanto

$$z'_i = \frac{w'_{K(i)}}{a_{K(i)} i} = \frac{w_{K(i)}}{a_{K(i)} i} = z_i$$

e daí $z = z'$.

Temos então $f(z) = w$, $f(z) = w'$ com $w \neq w'$, que é impossível pois por hipótese $f \in \text{Aut}(D)$.

Se tomarmos p como sendo a inversa desta aplicação K , então $f_K(z) = a_{K,p(k)} z_{p(k)}$ com $|a_{K,p(k)}| = 1$ e daí $f(z) = \left(a_{K,p(k)} z_{p(k)} \right)_{k=0}^\infty$.

É devido a Henri Cartan o seguinte teorema:

2.2.2 Teorema:

Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}^n$ e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma aplicação holomorfa injetiva. Então f é um homeomorfismo de Ω , sobre um aberto Ω' de $\mathbb{C}^n$ e a sua inversa f^{-1} também

é holomorfa.

Uma demonstração para este teorema pode ser encontrada em [7].

A afirmação de Cartan é que em $\mathbb{C}^n$ toda função holomorfa injetiva é biholomorfa. O resultado correspondente em dimensão infinita parece não ser conhecido, mesmo assumindo que a imagem seja um conjunto aberto.

2.2.3 Observação:

Verificaremos agora que o teorema de Cartan não é válido em c_0 . Para isso consideremos a seguinte função:

$$f: B_1(0) \subset c_0 \rightarrow B_1(0) \subset c_0$$

$$(z_1, z_2, \dots, z_n, \dots) \mapsto \left(\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\right)$$

Como f é linear contínua, é holomorfa; também é injetora. Mas $f[B_1(0)]$ não é um aberto em c_0 . Para verificar esta afirmação basta observar que dado $z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots) \in B_1(0)$ sempre existem $\delta > 0$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in B_1(0)$ tais que

$$|x_1 - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)| < \delta, |x_2 - z_1| < \delta, |x_3 - z_2| < \delta, \dots, |x_n - z_{n-1}| < \delta, \dots$$

sem que $x_1 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3)$, ou seja, existem pontos arbit^{ra}riamente próximos de $f(z)$ que não pertencem a $f(B_1(0))$; isto é, $f(B_1(0))$ não é um aberto de c_0 .

2.3 Biholomorfismos preservando o zero da bola unitária

2.3.1 Proposição

Sejam E e F espaços de Banach complexos, D um domínio circular estrelado em E e D' domínio circular convexo em F . Suponhamos que $f: D \rightarrow D'$ seja holomorfa com $f(0) = 0$. Então

$$\frac{1}{K!} d^K f(0) z^K \in \overline{D'}$$

para todo $z \in D$.

Demonstração:

$$\text{Seja } G(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-K i \theta} f(e^{i\theta} z) d\theta \text{ para}$$

$z \in D$. Pela definição da integral de Riemann

$$g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n e^{-ki\theta_j} f(e^{i\theta_j} z) \Delta\theta_j$$

com

$$\sum_{j=1}^n \Delta\theta_j = 2\pi.$$

Temos que:

$$f(e^{i\theta_j} z) \in D',$$

como D' é circular então

$$b_j = e^{-ki\theta_j} f(e^{i\theta_j} z) \in D',$$

e daí

$$G(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta\theta_j}{2\pi} b_j$$

com

$$\sum_{j=1}^n \frac{\Delta\theta_j}{2\pi} = 1.$$

Concluimos que $G(z)$ é limite de combinações convexas de elementos de D' , logo $G(z) \in \overline{D}'$.

Tudo que temos de mostrar agora é que

$$\frac{1}{K!} d^K f(0) z^K = G(z) \quad .$$

Fazendo em (1.5.1), $\xi = 0$ temos:

$$\frac{1}{K!} d^K f(0) z^K = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=p} \frac{f(\lambda z)}{\lambda^{K+1}} d\lambda$$

para $\lambda = e^{i\theta}$ vem

$$\frac{1}{K!} d^K f(0) z^K = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-Ki\theta} f(e^{i\theta} z) d\theta = G(z) \quad ,$$

ficando assim provado que

$$\frac{1}{K!} d^K f(0) z^K \in \overline{D}' \quad .$$

2.3.2 Corolário

Seja $B = \{z \in E \text{ tal que } \|z\| < 1\}$ e
 $B' = \{z \in F \text{ tal que } \|z\| < 1\}$. Se $f: B \rightarrow B'$ é holo-

morfa e $f(0) = 0$, então $df(0)$ é um operador com norma me
nor ou igual a 1.

Demonstração:

Por (2.3.1) $df(0)B \subset \overline{B}$. Daí se $\|z\|=1$ e $t \in \mathbb{R}$
com $|t| < 1$, então $\|df(0)tz\| \leq 1$. Segue que
 $|t| \|df(0)z\| \leq 1$, para todo $|t| < 1$. Passando ao limi-
te para t tendendo a 1, temos $\|df(0)z\| \leq 1$, o que acar-
reta $\|df(0)\| \leq 1$.

2.3.3 Corolário

Seja D um subconjunto aberto de E . Se existir
um biholomorfismo entre D e um domínio limitado de E , e
se para cada $z \in D$, definimos $F_z = \{f: D \rightarrow D \text{ tal que } f \text{ é holomorfa e } f(z) = z\}$; então existem números positi-
vos $C(k)$, $M(z)$ e $N(z)$ tais que

$$M_k(z) \leq C(k)M(z)N(z)^k$$

onde

$$M_k(z) = \sup \{ \|\hat{d}^k f(z)\| \mid \text{tal que } f \in F_z \}$$

e

$$\|\hat{d}^k f(z)\| = \sup \{ \|\hat{d}^k f(z)w\| \mid \text{tal que } \|w\| = 1 \}.$$

Demonstração:

Suponhamos que para cada $z \in D$ exista um aberto limitado D_z em E e $G_z: D_z \rightarrow D$ seja um biholomorfismo com $G_z(0) = z$, seja também $\tilde{F}_z = \{f: D_z \rightarrow D_z \mid \text{tal que } f \text{ é holomorfa e } f(0) = 0\}$. Chamemos de:

$$F = G_z: D_z \rightarrow D \text{ tal que } G_z(0) = z$$

e

$$G = f \circ G_z^{-1}: D \rightarrow D_z \text{ tal que } f \circ G_z^{-1}(0) = 0, f \in \tilde{F}_z$$

Utilizando (1.5.1) temos:

$$\frac{\hat{d}^s G}{s!}(z)(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=S(z)} \frac{G(z+\lambda w)}{\lambda^{s+1}} d\lambda$$

onde $S(z) > 0$ é tal que $\overline{B}_{S(z)}(z) \subset D$ e como D_z é limitado

do existe $N'(z)$ tal que $D_z \subset B_{N'(z)}(0)$, e daí

$$\|\hat{d}^s G(z)\| \leq \frac{s! N'(z)}{(S(z))^s}$$

analogamente temos:

$$\frac{\hat{d}^q F(G(z))}{q!}(w) = \frac{\hat{d}^q F(0)}{q!}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R(z)} \frac{F(\lambda w)}{\lambda^{q+1}} d\lambda$$

$$B_R(0) \subset D_z \text{ e } \sup_{\|t\| \in R} \|F(t)\| = M' < +\infty$$

então

$$\|\hat{d}^q F(G(z))\| \leq \frac{q! M'(z)}{(R(z))^q}$$

Utilizando agora a fórmula da função composta
([1], pg. 3)

$$\hat{d}^K (F \circ G)z = \sum_{1 \leq q \leq K} \sum \sigma_K \hat{d}^q F(G(z)) d^{i_1} G(z) \dots d^{i_q} G(z)$$

com

$$i_1 + \dots + i_q = k \text{ e } \sigma_k = \sigma_k(i_1, \dots, i_q)$$

é definido indutivamente por

$$\sigma_{k+1}(k+1) = 1 \text{ e } \sigma_{k+1}(i_1, \dots, i_j, k-q+1) = \binom{k}{q} \sigma_k(i_1, \dots, i_j)$$

onde $i_1 + \dots + i_j = q$ são inteiros positivos.

Temos então:

$$\begin{aligned} \|\hat{d}^k(F \circ G)z\| &= \sup_{\|w\|=1} \|\hat{d}^k(F \circ G)(z)w\| \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq q \leq k} \sum_{i_1 + \dots + i_q = k} \sigma_k \sup \|\hat{d}^q F(G(z))(\hat{d}^{i_1} G(z)w^{i_1}, \dots, \hat{d}^{i_q} G(z)w^{i_q})\| \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq q \leq k} \sum_{i_1 + \dots + i_q = k} \sigma_k \|\hat{d}^q F(G(z))\| \sup_{\|w\|=1} \|\hat{d}^{i_1} G(z)w^{i_1}\| \dots \|\hat{d}^{i_q} G(z)w^{i_q}\| \\ &\leq \sum_{1 \leq q \leq k} \sum_{i_1 + \dots + i_q = k} \sigma_k \frac{q^q}{q!} \|\hat{d}^k F(G(z))\| \|\hat{d}^{i_1} G(z)\| \dots \|\hat{d}^{i_q} G(z)\| \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq q \leq k} \sum_{i_1 + \dots + i_q = k} \sigma_k \cdot q^q \frac{H^k(z)}{(R(z))^q} \cdot i_1! \dots i_q! \frac{(N!(z))^q}{S(z)^k} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{1 \leq q \leq k} \sum_{i_1 + \dots + i_q = k} \sigma_k q^{q M^1(z)} \left(\frac{N^1(z)}{R(z)} \right)^q \cdot \frac{1}{(S(z))^k} i_1! \dots i_q!$$

podemos sempre tomar $N^1(z) > R(z)$ daí

$$\begin{aligned} \|\hat{d}^k(F \circ G)z\| &\leq \sum_{1 \leq q \leq k} \sum_{i_1 + \dots + i_q = k} \sigma_k q^{q M^1(z)} \left(\frac{N^1(z)}{R(z) S(z)} \right)^k q \cdot k! \leq \\ &\leq \sigma_k^{M^1(z)} \left(\frac{N^1(z)}{R(z) S(z)} \right)^k k! \sum_{1 \leq q \leq k} \sum_{i_1 + \dots + i_q = k} q^{q+1} = \\ &= \sigma_k^{M^1(z)} \left(\frac{N^1(z)}{R(z) S(z)} \right)^k k! M_k = C(k) \cdot M(z) \cdot (N(z))^k \end{aligned}$$

Encontramos a desigualdade desejada para elementos de F_Z da forma $F \circ G = G_Z \circ f \circ G_Z^{-1}$ com $f \in \tilde{F}_Z$. Mas todos os elementos de F_Z são desta forma, logo temos o resultado.

Observe que se tivermos D como sendo a bola unitária aberta em $\mathbb{C}$, então usando (2.3.1) temos $M_k(0) \leq k!$

Como uma aplicação deste corolário provaremos o seguinte resultado:

2.3.4 Proposição:

Seja $\ell^2 = \{ \{z_n\} \text{ tal que } z_n \in \mathbb{C} \text{ e } \sum |z_n|^2 < \infty \}$

e o subconjunto $D^\infty = \{\{z_n\} \in \ell^2 \text{ tal que } \sup |z_n| < 1\}$.
 D^∞ não é equivalente a um domínio limitado em ℓ^2 .

Demonstração:

Seja $F_n(\{z_j\}) = w_j$ definida por $w_j = z_1$ para $j = 1, \dots, n$, $w_{n+j} = z_2$ para $j = 1, \dots, n$; ou seja de modo geral temos $w_{(k-1)n+j} = z_k$ para $j = 1, \dots, n$.

Então $F_n \in F(0) = \{f: D^\infty \rightarrow D^\infty \text{ tal que } f \text{ é holomorfa e } f(0) = 0\}$. F_n é linear, daí $dF_n(0) = F_n$. Como $\|dF_n(0)\| = \sup \{\|dF_n(0)(z)\| \text{ tal que } \|z\| = 1\}$ então

$$\|dF_n(0)\|^2 = \sup \sum n |z_j|^2 = n \sup \sum |z_j|^2 = n, \quad ,$$

ou seja

$$\|dF_n(0)\| = \sqrt{n}.$$

Então $M_1(0) = \sup \{\|dF_n(0)\| \text{ tal que } F_n \in F(0)\} \geq \sqrt{n}$ para todo n . Daí por (2.3.3) D^∞ não é equivalente a um domínio limitado de ℓ^2 .

Observe a analogia entre (2.3.4) e o seguinte resultado em dimensão finita, conhecido como teorema de

Poincaré.

2.3.5 Teorema

Seja $D = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \text{ tal que } |z_j| < 1 \text{ para } j = 1, 2\}$ e $D' = \{z \in \mathbb{C}^2 \text{ tal que } |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$. Então não existe biholomorfismo de D em D' .

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em ([7] p. 70).

Existe também um teorema clássico devido a Riemann dizendo que dois domínios simplesmente conexos em $\mathbb{C}$ e diferentes de $\mathbb{C}$ são equivalentes. Como podemos observar o teorema anterior mostra que a situação é muito diferente para domínios em $\mathbb{C}^n$, $n > 1$.

2.3.6 Teorema

Séjam E e F espaços normados e B e B' as bolas unitárias de E e F respectivamente. Se $h: B \rightarrow B'$ é holomorfa com $dh(0)$ uma isometria de B sobre B' então h é linear, isto é $h = dh(0) \Big|_B$.

Demonstração:

Por substituição de h por $\left[dh(0) \right]^{-1} \circ h$ podemos assumir que $F = E$ e $dh(0) = I$, I sendo a aplicação identidade em E .

Temos $h(0) = 0$. Suponhamos $h(0) \neq 0$. Pelo teorema de Hahn-Banach existe transformação linear T em E , $\|T\| < 1$ com $T(h(0)) = \|h(0)\|$. Definamos

$$f(z) = T \circ h(z \|h(0)\|^{-1} h(0))$$

para todo

$$z \in B_1(0) \subset \mathbb{C}.$$

Então

$$f: B_1(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow B_1(0) \subset \mathbb{C}$$

é holomorfa. Segue do lema de Schwartz clássico ([2], p. 136 ex. 1) que

$$|f(0)|^2 \leq 1 - |f'(0)|^2.$$

Portanto

$$\|h(0)\|^2 \leq 1 - |T(\|h(0)\|^{-1}h(0))| = 0$$

o que fornece uma contradição. Daí $h(0) = 0$.

Então temos $h: B \rightarrow B'$ holomorfa com $h(0) = 0$ e $dh(0) = I$, segue de (2.1.4) que $h = I$; ou seja $dh(0) /_B = h$.

2.3.7 Teorema

Sejam E e F espaços normados complexos e B e B' as bolas unitárias de E e F respectivamente. Se $f: B \rightarrow B'$ é biholomorfismo tal que $f(0) = 0$, então f é linear; isto é $f = df(0) /_B$. Além disso $df(0)$ é uma isometria de E em F , isto é; $\|df(0)z\| = \|z\|$ para todo $z \in E$.

Demonstração:

Seja $f: B \rightarrow B'$ biholomorfismo com $f(0) = 0$. Façamos $T = df(0)$. Por (2.3.2) temos $\|T\| \leq 1$. Desde que $df^{-1}(0) = T^{-1}$ também vale $\|T^{-1}\| \leq 1$. Se $Ty = w$ com

$\|y\| = 1$ então $\|w\| \leq 1$. Como $T^{-1}w = y$ temos

$$1 = \|T^{-1}w\| \leq \|T^{-1}\| \|w\| ,$$

daí

$$\|w\|^{-1} \leq \|T^{-1}\| .$$

Temos então

$$1 \geq \|T^{-1}\| \geq \|w\|^{-1} \geq 1$$

o que acarreta $\|w\| = 1$.

Isto prova que T é uma isometria. E agora temos exatamente as hipóteses de (2.3.6). Logo $f = df(0) / \underset{B}{}$.

Os resultados iniciais deste capítulo nasceram da tentativa de generalizar alguns resultados clássicos de Cartan para o caso de um espaço normado complexo; resultados estes que podem ser encontrados em ([7], cap. 5). A parte final deste capítulo estuda os biholomorfismos que fixam o zero da bola unitária de um espaço normado e teve seu estudo motivado pelo trabalho de Greenfield-Wallach [12].

3. Automorfismos da bola unitária de um espaço de Hilbert

O que se pretende neste capítulo é obter a expressão de todos os automorfismos da bola unitária de um espaço de Hilbert, bem como uma caracterização para o conjunto de pontos fixos destes automorfismos. Chegaremos a este grupo de automorfismos de duas maneiras. É importante observar que agora em se tratando de espaços de Hilbert, as técnicas usadas nas demonstrações que se seguem são próprias de tais espaços.

Mostraremos também que todo automorfismo da bola unitária fechada de um espaço de Hilbert tem ponto fixo, o que contrasta fortemente com o resultado de S. Kakutani que mostrou a existência de homeomorfismo da esfera unitária fechada de um espaço de Hilbert sobre si mesma sem pontos fixos. Uma ligeira modificação neste exemplo mostra que existe difeomorfismo com tal propriedade.

Pode-se ainda observar que no plano toda função holomorfa bijetiva do disco unitário que leva zero em zero é dada por uma rotação; enquanto que em espaços de Hilbert o resultado análogo é: todo automorfismo da

bola unitária que deixa o zero fixo é dado por um operador unitário.

No que se segue E designará um espaço de Hilbert, munido do produto escalar (x/y) e da norma a ele associada.

3.1 Grupo dos Automorfismos da Bola Unitária

3.1.1 Definição

Para $a \in B$, seja $\Gamma(a): E \rightarrow E$ dada por:

$$\Gamma(a)x = \frac{1}{1+v(a)} a(x/a) + v(a)x$$

onde

$$v(a) = \sqrt{1 - \|a\|^2}.$$

3.1.2 Proposição

$\Gamma(a)$ acima definida possui as seguintes propriedades:

(a) $\Gamma(a)$ é aplicação linear contínua de E em E

$$(b) \quad \|\Gamma(a)x\| \leq \|x\|$$

$$(c) \quad \Gamma(a)a = a$$

$$(d) \quad \|\Gamma(a)\| = 1$$

Demonstração:

Afirmações (a) e (c) decorrem imediatamente de (3.1.1)

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \|\Gamma(a)x\|^2 &= (\Gamma(a)x, \Gamma(a)x) = \frac{\|a\|^2 |(x/a)|^2}{(1+v(a))^2} + \frac{2v(a)}{1+v(a)} |(x/a)|^2 + v^2(a) \|x\|^2 = \\
 &= \frac{[1-v^2(a)] |(x/a)|^2 + 2v(a)[1+v(a)] |(x/a)|^2 + v^2(a) [1+v(a)]^2 \|x\|^2}{[1+v(a)]^2} = \\
 &= \frac{[1+v(a)]^2 |(x/a)|^2 + [1+v(a)]^2 v^2(a) \|x\|^2}{[1+v(a)]^2} = \\
 &= |(x/a)|^2 + v^2(a) \|x\|^2 \leq \\
 &\leq \|x\|^2 \|a\|^2 + v^2(a) \|x\|^2 =
 \end{aligned}$$

$$= \left[\|a\|^2 + v^2(a) \right] \|x\|^2 =$$

$$= \|x\|^2$$

Tomando a raiz quadrada positiva de ambos os membros, temos

$$\|\Gamma(a)x\| \leq \|x\|$$

(d) Como $\Gamma(a)a = a$ e $\Gamma(a)$ é linear temos

$$\Gamma(a) \frac{a}{\|a\|} = \frac{a}{\|a\|}$$

segue que

$$\|\Gamma(a)\| = 1.$$

3.1.3 Proposição:

Sejam $a \in B = \{x \in E / \|x\| < 1\}$ e U um operador unitário sobre E . A aplicação α_a definida para todo $x \in E$, tal que $(x/a) \neq 1$ por:

$$\alpha_a(x) = U\Gamma(a) \frac{x-a}{1-(x/a)}$$

é um automorfismo de B.

Demonstração:

Como α_a é linear e contínua, α_a é holomorfa na bola aberta de centro zero e raio $\frac{1}{\|a\|}$, que contém B.

Mostremos agora que α_a aplica B em B.

Colocando $y = \Gamma(a) \frac{x-a}{1-(x/a)}$, verifica-se com um cálculo um pouco trabalhoso que:

$$1 - \|y\|^2 = \frac{(1 - \|a\|^2)(1 - \|x\|^2)}{(1 - (x/a))^2} \quad (1)$$

Como $\|a\| < 1$, se tivermos $\|x\| < 1$, segue que $1 - \|y\|^2 > 0$, de onde tiramos $\|y\| < 1$. Daí

$$\|\alpha_a(x)\| = \|uy\| = \|y\| < 1,$$

ou seja α_a aplica B em B.

Para completar a prova é suficiente mostrar

que a aplicação

$$x \mapsto \Gamma(a) \frac{x-a}{1-(x/a)} = y$$

é inversível em B.

Para isso calculemos $\Gamma^2(a)x$.

$$\begin{aligned} \Gamma^2(a)x &= \Gamma(a) \left[\Gamma(a)x \right] = \Gamma(a) \left[\frac{1}{1+v(a)} a(x/a) + v(a)x \right] = \\ &= \frac{1}{1+v(a)} a \left[\frac{1}{1+v(a)} a(x/a) + v(a)x/a \right] + \\ &+ v(a) \left[\frac{1}{1+v(a)} a(x/a) + v(a)x \right] = \\ &= a(x/a) \left[\frac{\|a\|^2}{[1+v(a)]^2} + \frac{v(a)}{1+v(a)} + \frac{v(a)}{1+v(a)} \right] + v^2(a)x \\ &= a(x/a) + v^2(a)x \end{aligned}$$

$$\text{ou seja } \Gamma^2(a)x = a(x/a) + v^2(a)x \quad (2)$$

De (2) segue que

$$\Gamma(a)(y+a)(1-(x/a)) = v^2(a)x \quad (3)$$

pois

$$(y+a)(1-(x/a)) = \left[\Gamma(a) \left(\frac{x-a}{1-(x/a)} \right) + a \right] (1-(x/a)) = \Gamma(a)(x-a(x/a))$$

daí

$$\Gamma(a)(y+a)(1-(x/a)) = \Gamma(a) \left[\Gamma(a)(x-a(x/a)) \right] = \Gamma^2(a)(x-a(x/a)) \quad (2)$$

$$= a((x-a(x/a))/a) + v^2(a) [x-a(x/a)] = v^2(a)x$$

verifica-se também que

$$(y/a) = \frac{(x/a) - \|a\|^2}{1 - (x/a)}$$

de onde tiramos

$$1 + (y/a) = \frac{1 - \|a\|^2}{1 - (x/a)} \quad (4)$$

De (3) segue que

$$x = \frac{1}{v^2(a)} \Gamma(a)(y+a)(1-(x/a)) \quad (5)$$

Substituindo o valor de $1-(x/a)$ de (4) em (5) tiramos

$$x = \Gamma(a) \frac{y+a}{1+(y/a)}$$

Consequentemente se

$$y = \alpha_a(x) = U\Gamma(a) \frac{x-a}{1-(x/a)}$$

vem que

$$x = \alpha_a^{-1}(y) = \Gamma(a) \frac{Uy^{-1} + a}{1+(Uy^{-1}/a)}$$

α_a é então uma aplicação bijetiva de B em B , e como α_a e α_a^{-1} são holomorfas segue que $\alpha_a \in \text{Aut}(B)$.

3.1.4 Proposição

Sejam E e F dois espaços de Hilbert, B e B' as bolas unitárias abertas, respectivamente de E e F e f uma aplicação holomorfa de B em B' tal que $f(0) = 0$. Então para qualquer $x \in B$ temos:

$$\|f(x)\|_F \leq \|x\|_E$$

Demonstração:

Sejam $a \in E$, $b \in F$ e ponhamos $\phi_{a,b}(\xi) = (f(\xi a)/b)_F$ com $\xi \in \mathbb{C}$. $\phi_{a,b}(\xi)$ é uma aplicação holomorfa na bola $|\xi| < \frac{1}{\|a\|_E}$. Temos ainda:

$$|\phi_{a,b}(\xi)| = |(f(\xi a)/b)_F| \leq \|f(\xi a)\|_F \cdot \|b\|_F \leq \|b\|_F$$

se

$$|\xi| < \frac{1}{\|a\|_E}$$

e

$$\phi_{a,b}(0) = (f(0)/b)_F = (0, b)_F = 0$$

Aplicando então o lema de Schwarz para funções de uma variável ([2], p. 135) vem,

$$(1) \quad |\phi_{a,b}(\xi)| \leq \frac{\|b\|_F}{\frac{1}{\|a\|_E}} |\xi|$$

para todo ξ tal que

$$|\xi| < \frac{1}{\|a\|_E}.$$

Se em (1) valer a igualdade para algum $\xi \neq 0$, temos

$$(2) \quad \phi_{a,b}(\xi) = e^{i\theta} \|a\|_E \|b\|_F |\xi|$$

com $\theta \in \mathbb{R}$.

Como

$$\|f(\xi a)\|_F = \sup_{\|b\|_F=1} |(f(\xi a)/b)_F| = \sup_{\|b\|_F=1} |\phi_{a,b}(\xi)|$$

De (1) temos:

$$\|f(\xi a)\|_F \leq \|\xi a\|_E$$

para todo $\xi a \in B$.

3.1.5 Teorema

O grupo dos automorfismos de B é o conjunto das aplicações α_a definidas pela fórmula:

$$\alpha_a(x) = U\Gamma(a) \frac{x-a}{1-(x/a)}$$

onde $\|a\| < 1$ e U é um operador unitário de E . Em particular, o subgrupo dos automorfismos que conservam a origem é constituído de operadores unitários; fato este que também pode ser observado de (2.3.7).

Demonstração:

Seja u um automorfismo de B que transforma $x = a$ em $y = 0$. Então:

$$y = u(\Gamma(a) \frac{z+a}{1+(z/a)}) = v(z) \text{ é um automorfismo de } B$$

por (3.1.3). v conserva a origem pois $v(0) = u(\Gamma(a)a) = u(a) = 0$. De (3.1.4) temos $\|v(x)\| \leq \|x\|$, o mesmo valendo para v^{-1} que também conserva a origem isto é $\|v^{-1}(x)\| \leq \|x\|$, ou seja $\|x\| \leq \|v(x)\|$.

Então $\|v(x)\| = \|x\|$, e daí v é um operador unitário de E . Chamemo-lo de U .

Pondo

$$x = \Gamma(a) \frac{z+a}{1+(z/a)}$$

de (5) de (3.1.3) segue que

$$z = \Gamma(a) \frac{x-a}{1-(x/a)}$$

e daí

$$y=u(x)=u(\Gamma(a) \frac{z+a}{1+(z/a)}) = U(z) = \alpha_a(x) \quad .$$

3.2 Grupos dos automorfismos da bola unitária em função de uma base ortonormal

Daremos agora uma caracterização para o grupo de automorfismos obtido em (3.1.5), em termos de uma base ortonormal $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de E .

3.2.1 Definição

Seja $\alpha_0 \in I$ fixo. Definimos $f: B \rightarrow E$ por

$$f(ze_{\alpha_0} + \sum_{\alpha \neq \alpha_0} z_\alpha e_\alpha) = \frac{z-\beta}{1-\bar{\beta}z} e_{\alpha_0} + \frac{\sqrt{1-|\beta|^2}}{1-\bar{\beta}z} \sum_{\alpha \neq \alpha_0} z_\alpha e_\alpha$$

onde β é um número complexo fixo com $|\beta| < 1$.

3.2.2 Proposição

A função f acima definida é um automorfismo da bola unitária que se estende biholomorficamente ao conjunto $\{x \in E \text{ tal que } \|x\| < \frac{1}{|\beta|}\}$ onde $\beta \in \mathbb{C}$ com $|\beta| < 1$.

Demonstração

Inicialmente mostremos que $f: B \rightarrow B$ é bijetora.

Suponhamos que $\|x\| = r < 1$ e $x = ze_{\alpha_0} + \sum_{\alpha \neq \alpha_0} z_\alpha e_\alpha$.

Então

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= (f(x)/f(x)) = \left(\frac{z-\beta}{1-\bar{\beta}z} e_{\alpha_0} + \frac{\sqrt{1-|\beta|^2}}{1-\bar{\beta}z} \sum_{\alpha \neq \alpha_0} z_\alpha e_\alpha \right) / \left(\frac{z-\beta}{1-\bar{\beta}z} e_{\alpha_0} + \frac{\sqrt{1-|\beta|^2}}{1-\bar{\beta}z} \sum_{\alpha \neq \alpha_0} z_\alpha e_\alpha \right) \\ &= \left(\frac{z-\beta}{1-\bar{\beta}z} e_{\alpha_0} / \frac{z-\beta}{1-\bar{\beta}z} e_{\alpha_0} \right) + \left(\frac{\sqrt{1-|\beta|^2}}{1-\bar{\beta}z} \sum_{\alpha \neq \alpha_0} z_\alpha e_\alpha / \frac{\sqrt{1-|\beta|^2}}{1-\bar{\beta}z} \sum_{\alpha \neq \alpha_0} z_\alpha e_\alpha \right) = \\ &= \frac{|z-\beta|^2}{|1-\bar{\beta}z|^2} + \left(\frac{1-|\beta|^2}{|1-\bar{\beta}z|^2} \right) \sum_{\alpha \neq \alpha_0} |z_\alpha|^2 = \\ &= \frac{|z-\beta|^2 + (1-|\beta|^2) \sum_{\alpha \neq \alpha_0} |z_\alpha|^2}{|1-\bar{\beta}z|^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{|z|^2 - (z/\beta) - (\beta/z) + |\beta|^2 + \sum_{\alpha \neq \alpha_0} |z_\alpha|^2 - |\beta|^2 \sum_{\alpha \neq \alpha_0} |z_\alpha|^2}{|1 - \bar{\beta}z|^2} \\
&= \frac{r^2 - (\bar{\beta}z/1) - (1/\bar{\beta}z) + |\beta|^2 - |\beta|^2 r^2 + |\beta|^2 |z|^2}{|1 - \bar{\beta}z|^2} \\
&= \frac{|1 - \bar{\beta}z|^2 - (1 - |\beta|^2)(1 - r^2)}{|1 - \bar{\beta}z|^2} = 1 - \frac{(1 - |\beta|^2)(1 - r^2)}{|1 - \bar{\beta}z|^2} \leq 1
\end{aligned}$$

Daí $f(B) \subset B$.

Consideremos agora

$$g(x) = \frac{z + \beta}{1 + \bar{\beta}z} e_{\alpha_0} + \frac{\sqrt{1 - |\beta|^2}}{1 + \bar{\beta}z} \sum_{\alpha \neq \alpha_0} z_\alpha e_\alpha$$

temos $g \circ f = f \circ g = \text{id}$.

Repetindo agora o argumento usado acima para f e trocando β por $-\beta$ obtemos $g(B) \subset B$. Então f é injetora e sobre B .

Calculando a derivada $Df(x, \cdot)$ de f em x , obtemos:

$$Df(x, y) = \frac{1 - |\beta|^2}{|1 - \bar{\beta}z|^2} y_{\alpha_0} e_{\alpha_0} + \sum_{\alpha \neq \alpha_0} \left[\frac{\beta \sqrt{1 - |\beta|^2}}{(1 - \bar{\beta}z)^2} z_\alpha e_\alpha + \frac{\sqrt{1 - |\beta|^2}}{1 - \bar{\beta}z} y_\alpha \right] e_\alpha$$

para todo

$$\|x\| < \frac{1}{|\beta|}$$

onde

$$y = y_{\alpha_0} + \sum_{\alpha \neq \alpha_0} y_{\alpha} e_{\alpha}.$$

Temos então que $f: B \rightarrow B$ é um automorfismo que se estende biholomorficamente ao conjunto

$$\{x \in E / \|x\| < \frac{1}{|\beta|}\}, \beta \in \mathbb{C}$$

com

$$|\beta| < 1.$$

3.2.3 Teorema

Suponhamos que $h: B \rightarrow B$ seja um automorfismo com $h(a) = 0$ para algum $a \in B$. Então $h = U \circ f \circ T$ onde U e T são operadores unitários, U definido como em

(3.1.5) e f dada por (3.2.1) com $|\beta| = \|a\|$. Ainda mais, h é biholomorfa no conjunto $\{x \in E \text{ tal que } \|x\| < \frac{1}{|\beta|}\}$ e tem ponto fixo em $\overline{B}$.

Demonstração:

Das hipóteses e de (3.1.5) segue que

$$h = U \circ \alpha_a$$

onde

$$\alpha_a(x) = T(a) \frac{x - a}{1 - (x/a)}$$

para algum $a \in B$.

Agora então temos que mostrar que podemos escrever $\alpha_a = f \circ T$, com T operador unitário de E .

Para isso consideremos $g = f^{-1} \circ \alpha_a$. g assim definida é automorfismo de B e temos $f^{-1}(-\beta e_{\alpha_0}) = 0$. Seja $a = \beta e_{\alpha_0}$, daí $g(0) = f^{-1}(\alpha_a(0)) = f^{-1}(-\beta e_{\alpha_0}) = 0$. Por (3.1.5) segue que $f^{-1} \circ \alpha_a = T$, onde T é operador unitário de E . Logo $\alpha_a = f \circ T$.

Como $h = U \circ \alpha_a$ segue que $h = U \circ f \circ T$.

Mostraremos agora que h tem ponto fixo em $\tilde{B}$.

Com $x_k \xrightarrow{w} x_0$ indicaremos que o net $x_k = z^{(k)} e_{\alpha_0} + \sum_{\alpha \neq \alpha_0} z_{\alpha}^{(k)} e_{\alpha}$ converge na topologia fraca w a $x_0 = z^{(0)} e_{\alpha_0} + \sum_{\alpha \neq \alpha_0} z_{\alpha}^{(0)} e_{\alpha}$ temos que $x_k \xrightarrow{w} x_0$ se e somente se para algum $a \in E$,

$$(x_k/a) \rightarrow (x_0/a)$$

Vamos verificar que f é contínua na topologia w ; isto é se $x_k \xrightarrow{w} x_0$ então $f(x_k) \xrightarrow{w} f(x_0)$.

Seja então $y \in E$; $y = y_0 e_{\alpha_0} + \sum_{\alpha \neq \alpha_0} y_{\alpha} e_{\alpha}$, então

$$(f(x_k)/y) = \left(\frac{z^{(k)} - \beta}{1 - \bar{\beta} z^{(k)}} \right) \bar{y}_0 + \frac{\sqrt{1 - |\beta|^2}}{1 - \bar{\beta} z^{(k)}} \sum_{\alpha \neq \alpha_0} z_{\alpha}^{(k)} \bar{y}_{\alpha}$$

Mas como $x_k \xrightarrow{w} x_0$ então $(x_k/e_{\alpha_0}) \rightarrow (x_0/e_{\alpha_0})$, ou seja $z^{(k)} \rightarrow z_0$ e também

$$(x_k/y - y_0 e_{\alpha_0}) \rightarrow (x_0/y - y_0 e_{\alpha_0})$$

ou seja

$$\sum_{\alpha \neq \alpha_0} z_{\alpha}^{(k)} \overline{y}_{\alpha} \longrightarrow \sum_{\alpha \neq \alpha_0} z_{\alpha}^{(0)} \overline{y}_{\alpha}$$

e daí temos que

$$(f(x_k)/y) \longrightarrow (f(x_0)/y) \quad .$$

Portanto

$$f(x_k) \xrightarrow{w} f(x_0) \quad .$$

Com isso temos que f é fracamente contínua. Desde que U e T são fracamente contínuas, h o é. Pelo teorema de Schauder-Tyckonoff (1.6.3) temos que h tem ponto fixo em $\overline{B}$, desde que $\overline{B}$ é fracamente compacto.

A partir deste teorema fica claro então que sempre que tivermos um automorfismo h da bola unitária de um espaço de Hilbert, podemos representá-lo pelas expressões:

$$h(x) = U\Gamma(a) \frac{x - a}{1 - (x/a)}$$

para algum $a \in B$, segundo (3.1.5) ou por $h = U \circ f \circ T$ segundo (3.2.3). Destas expressões usaremos a que for mais conveniente.

3.3 Uma Caracterização para o Conjunto dos Pontos Fixos de um Automorfismo da Bola Unitária

3.3.1 Definição

Seja B a bola unitária aberta de um espaço de Hilbert E . Um sub-espço afim de B será a intersecção de B com um sub-espço afim complexo fechado de E ; e o fecho de um sub-espço afim de B será a intersecção do fecho de B com um sub-espço afim complexo fechado de E .

3.3.2 Teorema

Tódo automorfismo de B preserva sub-espços afins bem como sua dimensão.

Demonstração

Se h é automorfismo de B , sabemos que $h=U \circ f \circ T$

com U e T operadores unitários de E e f dada por (3.2.1).

Para f assim definida vale $f(a+V) = f(a) + df(a)(V)$ com $a \in B$ e $a+V$ sub-espaco afim de B . Isto é válido pois para $a+t \in a+V$ temos:

$$f(a+t) - f(a) = \lambda_t df(a)t$$

como

$$\lambda_t df(a)t \subset df(a)(V)$$

segue que

$$f(a+V) - f(a) \subset df(a)(V)$$

ou seja

$$f(a+V) \subset f(a) + df(a)(V) \quad (1)$$

Para provar a inclusão contrária basta observar que também

$$g(b+W) \subset g(b) + dg(b)(W)$$

com $g = f^{-1}$, $b \in B$ e W sub-espaco afim de B . Em particular para $b = f(a)$ e $W = df(a)(V)$ temos

$$f^{-1}(f(a) + df(a)(V)) \subset a + df^{-1}(f(a))(df(a)(V)) = a+V$$

daí

$$f(a) + df(a)(V) \subset f(a+V) \quad (2)$$

De (1) e (2) segue que

$$f(a+V) = f(a) + df(a)(V)$$

f preservando sub-espacos afins, temos que h tambem preserva e como $df(a)$ e linear as dimensoes tambem sao preservadas.

3.3.3 Teorema

Se $h: B \rightarrow B$ e automorfismo e tem ponto fixo em B , entao o conjunto destes pontos fixos e um sub-espaço afim.

Demonstração

Seja $y \in B$ ponto fixo de h . Consideremos g automorfismo de B que leva y em 0 . Então $\alpha = ghg^{-1}$ fixa 0 e assim é linear.

O conjunto dos pontos fixos de α é um sub-espaço afim C , pois

$$\{x/\alpha(x)=x\} = \{x/(\alpha-I)(x)=0\} = \text{Ker}(\alpha-I)$$

que é um sub-espaço vetorial e portanto sub-espaço afim.

O conjunto de pontos fixos de h é $g^{-1}(C)$ pois se $h(y) = y$ então $g(h(y)) = g(y)$ e existe $z \in B$ tal que $g^{-1}(z) = y$. Temos

$$\alpha(z) = g(h(g^{-1}(z))) = g(g^{-1}(z)) = z,$$

então $z \in C$ e daí $y \in g^{-1}(C)$. Mas $g^{-1}(C)$ é sub-espaço afim por (3.3.2).

3.3.4 Teorema

Se $h: B \rightarrow B$ é automorfismo de B e não tem ponto fixo em B , então $\bar{B}$ intercepta o conjunto dos pontos fixos de h em um ou dois pontos.

Demonstração

Se h não tem ponto fixo em B , por (3.2.3) existe então pelo menos um ponto fixo de h em $\bar{B}$. Se existir mais do que dois pontos fixos, consideremos dois deles. Temos que h deixa invariante o sub-espaco afim C de dimensão um que os contém, pois por (3.3.2) h preserva sub-espacos afins, bem como sua dimensão.

Seja g automorfismo de B tal que $g(C)$ contenha a origem. A função $h_0 = ghg^{-1}$ então leva o sub-espaço de dimensão um, $g(C)$ sobre si mesmo fixando dois pontos fronteira, pois

$$ghg^{-1}(g(C)) = gh(C) = g(C) \quad .$$

Seja x_0 um destes pontos fixos. Consideremos $\beta \neq 0 \in C$ com $|\beta| < 1$, tal que $h_0(-\beta x_0) = 0$, daí

$$h_o(f^{-1}(0)) = h_o(-\beta x_o) = 0$$

e como $h_o \circ f^{-1}$ é automorfismo de B temos por (3.1.5) que $h_o \circ f^{-1} = U$, ou seja $h_o = U \circ f$ onde U é operador unitário, e

$$f(x) = \left(\frac{(x/x_o - \beta)}{1 - \bar{\beta}(x/x_o)} \right) x_o + \frac{\sqrt{1 - |\beta|^2}}{1 - \bar{\beta}(x/x_o)} (x - (x/x_o)x_o) \quad .$$

Escolhemos aqui x_o como primeiro elemento de uma base $\{f_\alpha\}$ de E .

Provemos agora que h_o possui apenas dois pontos fixos na fronteira de B , daí h também terá apenas dois pontos fixos em $\bar{B}$. Como U é unitário o número de pontos fixos de h_o será igual ao de f . Mas se $f(y) = y$ onde $y = y_o f_{\alpha_o} + \sum_{\alpha \neq \alpha_o} y_\alpha f_\alpha$, então $f(y)$ tem na direção da componente $f_{\alpha_o} = x_o$ o coeficiente $\frac{y_o - \beta}{1 - \bar{\beta}y_o}$ que deve ser igual a y_o que é o coeficiente de y na direção de x_o .

Então

$$\frac{y_o - \beta}{1 - \bar{\beta}y_o} = y_o$$

ou

$$\overline{\beta} y_0^2 - \beta = 0 \quad .$$

Então

$$\Delta = 4|\beta|^2 > 0 \quad ,$$

temos então duas raízes distintas para y_0 que são

$$y_0 = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\overline{\beta}}} \quad ,$$

como $|y_0| = 1$ segue que y só possui a primeira coordenada y_0 , provando então que f possui apenas dois pontos fixos em $\overline{B}$.

Os estudos deste capítulo foram baseados nos trabalhos de A. Renaud [13], e de Suffridge & Hayden [14], o primeiro trabalhando com a função $\Gamma(a)$ e o segundo utilizando bases ortonormais para um espaço de Hilbert.

Com estas idéias pudemos obter resultados sobre o conjunto dos pontos fixos de um automorfismo da bola unitária em tal espaço.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ABRAHAM, R. & ROBBIN, J. Transversal mappings and flows. New York, W. A. Benjamin, 1967. 161p.
- [2] AHLFORS, L. V. Complex analysis; an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. 2.ed. New York, McGraw-Hill [c1966] 317p.
- [3] DUNFORD, N. & SCHWARTZ, J. T. Linear operators. Part I. general theory. New York, Interscience, 1957 (data pref.) 858p. (Pure and Applied Mathematics, v.7).
- [4] LANG, S. Differential manifolds. Reading, Addison Wesley [c1972] 230p. (Addison-Wesley Series in Mathematics).
- [5] NACHIBIN, L. Topologia dos espaços de aplicações holomorfas. Colóquio Brasileiro de Matemática, 6., Poços de Caldas, 1967. 68p. (Org. IMPA).
- [6] _____. Lectures on the theory of distributions. Recife, Univ. Fed. Pernambuco, Inst. Fis. Mat., 1964. 280p. (Textos em Matemática, v.15).
- [7] NARASIMHAN, R. Several complex variables. Chicago, Univ. Chicago [c1971] 174p. (Chicago Lectures in Mathematics).

- [8] ROBERTSON, A.P. & ROBERTSON, W. Topological vector spaces. 2.ed. [New Rochelle] Cambridge, 1973. 172p.
- [9] CHAE, S. B. Infinite dimensional holomorphy and applications. Proceedings of the symposium on infinite dimensional holomorphy, Campinas, 1975. North Holland (a aparecer).
- [10] MATOS, M.C. Compacidade e holomorfia infinita. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática - COPPE, Univ. Fed. Rio de Janeiro [s.d.]
- [11] _____. Notas de aula. [s.n.t.]
- [12] GREENFIELD, S. J. & Wallach, N. R. Automorphism groups of bounded domains in Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 166: 45-57, 1972.
- [13] RENAUD, A. Quelques propriétés des applications analytiques d'une boule de dimension infinie dans une autre. Bull. Sc. Mat., 2e. Sér., 97: 129-159, 1973.
- [14] SUFFRIDGE, T. J. & HAYDEN, T. L. Biholomorphic maps in Hilbert space have a fixed point. Lexington, Univ. Kentucky [s.d.] 5p.