

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática

Aplicações de Álgebra Linear em
Ruídos Quânticos

por

Leandro Bezerra de Lima

Mestrado Profissional em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Carlile Campos Lavor

Aplicações de Álgebra Linear em Ruídos Quânticos

Este exemplar corresponde redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Leandro Bezerra de Lima** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 08 de Agosto de 2007



Prof. Dr. Carlile Campos Lavor

Orientador

Banca Examinadora

1. *Prof. Dr.* Carlile Campos Lavor (DMA/IMECC/UNICAMP)
2. *Prof.^a Dr.^a* Sueli Irene Rodrigues da Costa (DM/IMECC/UNICAMP)
3. *Prof. Dr.* Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho (DMA/IME/UERJ)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, como requisito parcial para obtenção do Título de **Mestre Profissional em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

L628a Lima, Leandro Bezerra de
Aplicações de álgebra linear em ruídos quânticos / Leandro Bezerra
de Lima -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Carlile Campos Lavor
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

I. Álgebra linear. 2. Computação quântica. 3. Informação quântica. I.
Lavor, Carlile Campos. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Applications of linear algebra in quantum noise.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Linear algebra. 2. Quantum computation.
3. Quantum information.

Área de concentração: Computação Quântica

Titulação: Mestre Profissional em Matemática

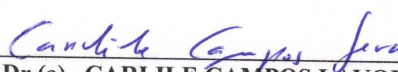
Banca examinadora: Prof. Dr. Carlile Campos Lavor (IMECC-UNICAMP)
Profª. Dra. Sueli Irene Rodrigues da Costa (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho (IME-UERJ)

Data da defesa: 08/08/2007

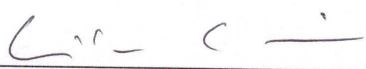
Programa de pós-graduação: Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 08 de agosto de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.


Prof. (a). Dr (a). CARLILE CAMPOS LAVOR


Prof. (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA


Prof. (a). Dr (a). LUIZ MARIANO PAES DE CARVALHO FILHO

Os primeiros passos em qualquer ramo da pesquisa quase sempre são muito imperfeitos e não raro terminam em fracasso. As verdades às vezes são como os recantos mais inacessíveis de alguma localidade, cuja descoberta do acesso exige que tenhamos todos caminhos possíveis. Cumpre porém que um certo número de pessoas se disponha a correr os riscos que a busca envolve a fim de deixar os rastros desses caminhos....A busca da verdade é indissociável das experiências frustradas. *D.Diderot.*

Não conseguimos encontrar respostas para todos os nossos problemas. As que encontramos apenas nos levaram a formular novas questões. Dê uma certa maneira sentimo-nos tão confusos como antes, mas acreditamos que agora estamos confusos num nível mais alto e sobre coisas mais importantes.

Aviso na porta do Instituto de Matemática da Universidade de Tronso-Noruega.

Nem tudo que se enfrenta pode ser modificado, mas nada pode ser modificado enquanto não é enfrentado. *J.Baldwin.*

Aprendeí a conduzir vossa imaginação e a vida vos será mais fácil.
Ruy Madsen Barbosa.

A todos que amam Matemática.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de Agradecer a Deus, pela Saúde, Paz e Harmonia.

Agradeço a minha esposa Alessandra e minha filha Ana Clara pelo companherismo, amor, carinho e apoio.

Agradeço ao professor e orientador Prof. Dr. Carlile, pelo incentivo, entusiasmo e confiança.

Agradeço a todo corpo docente do programa, em especial aos professores Vera, Zoraide, Plínio, Mariano, Edson, Carlile, Sueli, Sandra, Biloti e aos tutores João, Cristiano, Andréia, Robson e Carina.

Agradeço a todos os colegas da pós-graduação, pelos momentos agradáveis de aprendizagem.

Agradeço a todos os professores da UNIRP, em especial, Hygino, Ruy Madsen, Eurípides, Marcos Lourenço, Rita, Débora, Helaine Munia, Sueli Ceron, Márcio Marques e ao meu sempre amigo Antônio Espada Filho(In Memoriam).

Agradeço a todos os meus alunos e aos professores da UFMT pela experiência da primeira instituição de ensino superior que prestei meus serviços.

Agradeço a UNEMAT e a UNICAMP, pela oportunidade.

Agradeço ao meu pai José, minha mãe Joana, minhas irmãs Alessandra, Karen, Karina, meu sogro Orivaldo, minha sogra Maria, meus cunhados João, Tó, Dé, pelo apoio e pelo carinho.

Resumo

Neste trabalho, usando conceitos de álgebra linear e de operações quânticas, obtemos algumas propriedades de ruído quântico (para o caso particular de um q-bit), a fim de apresentar uma interpretação geométrica dos diferentes ruídos em canais quânticos, cujo processo é fundamental para a compreensão do processamento da informação quântica.

Abstract

In this work, using concepts of linear algebra and quantum operations, we obtain some properties of quantum noise (for the one qubit case), in order to present a geometrical interpretation of different noises in quantum channels, which process is fundamental to the comprehension of the quantum information processing.

Índice

Agradecimentos	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
Notações Utilizadas	xii
Introdução	1
1 Noções de Mecânica Quântica	3
1.1 Postulados da Mecânica Quântica	3
1.2 Esfera de Bloch	11
2 Ruídos Quânticos	15
2.1 Operações Quânticas	15
2.2 Liberdade na Representação de Operador-Soma	17
3 Exemplos de Ruídos Quânticos sobre um q-bit	19
3.1 Descrição Geométrica de Operações Quânticas sobre um q-bit	19
3.2 Canal de Inversão de q-bit	20
3.3 Canal de Inversão de Fase	24
3.4 Canal de Inversão de q-bit e Inversão de Fase	27
3.5 Canal de Despolarização	31

3.6	Canal de Atenuação de Amplitude	37
3.7	Canal de Atenuação de Fase	45
4	Conclusões	49

Notações Utilizadas

Notação	Descrição
z^*	Conjugado complexo de z .
$ \psi\rangle$	Vetor, também chamado de Ket.
$\langle\psi $	Vetor dual de $ \psi\rangle$, também chamado de Bra.
$\langle\varphi \psi\rangle$	Produto interno entre $ \varphi\rangle$ e $ \psi\rangle$.
$ \varphi\rangle\langle\psi $	Produto externo entre $ \varphi\rangle$ e $ \psi\rangle$.
$ \varphi\rangle\otimes \psi\rangle$	Produto tensorial entre $ \varphi\rangle$ e $ \psi\rangle$.
$ \varphi\rangle \psi\rangle$	Notação abreviada para o produto tensorial entre $ \varphi\rangle$ e $ \psi\rangle$.
A^*	Conjugado complexo da matriz A .
A^T	Transposta da matriz A .
$A^\dagger$	Conjugado hermitiano ou matriz adjunta de A .
$\langle\varphi A \psi\rangle$	Produto interno entre $ \varphi\rangle$ e $A \psi\rangle$.

Introdução

Richard Feynman observou [11], em meados de 1980, que certos efeitos da mecânica quântica não poderiam ser simulados eficientemente em computadores clássicos. Isso o levou a especular que talvez existisse um modelo de computação mais geral que pudesse simular de maneira eficiente os efeitos quânticos. A questão era saber como usar os efeitos quânticos para realizar tal procedimento. Em 1994, Peter Shor [21, 22] descreveu um algoritmo quântico para fatorar números inteiros em tempo polinomial, ou seja, de maneira eficiente. Esta descoberta atraiu experimentalistas e teóricos da mecânica quântica, além de ter impulsionado a área de computação e informação quântica.

Nossa proposta é apresentar, utilizando conhecimentos básicos de álgebra linear (espaços vetoriais de dimensão finita com produto interno, autovalores, autovetores, transformações unitárias, produto tensorial, etc.) e geometria (transformações geométricas: rotação, contração, etc.), uma descrição detalhada dos cálculos necessários para a representação geométrica de vários tipos de ruídos quânticos. Os ruídos quânticos podem ser vistos como os erros e perdas de informação presentes em qualquer sistema de processamento de informação quântica. Uma compreensão dos possíveis ruídos permitiria evitar (ou controlar) os efeitos do meio sobre o processamento de informação que o sistema realiza.

A primeira parte desse trabalho inicia-se com as noções básicas de mecânica quântica, onde descrevemos os postulados que formam o alicerce para desenvolver toda a teoria e a formulação matemática necessárias. Na segunda parte, apresentamos uma breve introdução sobre operações quânticas, através da representação do operador soma, que permite descrever a grande maioria dos sistemas quânticos. Na terceira parte, apresentamos os cálculos detalhados de diversos canais quânticos e exemplos concretos de ruídos quânticos,

através de sua representação na esfera de Bloch. Finalmente, apresentamos as considerações finais, apontando novos trabalhos que podem ser desenvolvidos na linha dessa dissertação.

Capítulo 1

Noções de Mecânica Quântica

1.1 Postulados da Mecânica Quântica

A mecânica quântica é a parte da física que descreve o comportamento de átomos e moléculas, cujos postulados foram desenvolvidos através de um longo processo de tentativa e erro. Mesmo para os especialistas, a compreensão do real significado dos postulados é uma questão não resolvida. Iremos considerá-los como sendo a estrutura matemática que usaremos para estudar o ruído quântico [17, 19].

Postulado 1: Existe um espaço vetorial complexo, com produto interno, associado a qualquer sistema físico *fechado* (sistema que não interage com outros sistemas). Um estado desse sistema é completamente descrito por um vetor unitário, chamado *vetor de estado*.

O sistema quântico que nos interessa é o *bit quântico*, ou *q-bit*, cujo espaço vetorial associado é o $\mathbb{C}^2$, com o produto interno usual. Uma base ortonormal para esse espaço pode ser dada pelos vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$, que serão representados usando a *notação de Dirac* [8, 17, 19, 20]:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Existem várias maneiras para a representação física de um q-bit. Entretanto, direcionaremos nosso estudo apenas sobre a sua representação matemática [7, 14, 15, 18]. Ou seja, um q-bit é um vetor unitário de $\mathbb{C}^2$. Um estado arbitrário $|\psi\rangle$ nesse sistema pode ser descrito por

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

onde α e β são números complexos. A base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ é chamada de *base computacional* e o vetor $|\psi\rangle$ é chamado de uma *superposição* dos vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$, com *amplitudes* α e β (usaremos os termos vetor e estado indistintamente).

O nome q-bit vem do fato de que o bit quântico pode ser visto como uma generalização do bit clássico, que assume apenas 2 estados: 0 ou 1. A diferença entre eles é que um q-bit pode, além dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, assumir uma quantidade infinita de estados!

Postulado 2: A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por um operador linear que preserva o produto interno (operador *unitário*). O estado $|\psi_1\rangle$ do sistema, no tempo t_1 , está relacionado ao estado $|\psi_2\rangle$, no tempo t_2 , através de um operador unitário U que depende apenas de t_1 e t_2 . Ou seja,

$$|\psi_2\rangle = U|\psi_1\rangle.$$

Existe um operador unitário que transforma o estado $|0\rangle$ em $|1\rangle$ e o estado $|1\rangle$ em $|0\rangle$. Esse operador é denotado por X e sua representação matricial, na base computacional, é dada por

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Outro exemplo de um operador unitário sobre um q-bit é o operador Z , cuja representação matricial, também na base computacional, é dada por:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Os operadores X e Z , quando aplicados sobre o estado $|0\rangle$, ainda retornam estados da base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Ou seja,

$$X|0\rangle = |1\rangle$$

e

$$Z|0\rangle = |0\rangle.$$

Entretanto, o operador unitário *Hadamard* H , cuja representação matricial, na base computacional, é dada por

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

produz uma superposição de estados, quando aplicado sobre um estado da base computacional. Ou seja,

$$H|0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle$$

e

$$H|1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle.$$

Para prosseguirmos, precisamos definir três conceitos: *dual*, *produto interno* e *produto externo*. O dual de um vetor $|\varphi\rangle \in \mathbb{C}^n$, denotado por $\langle\varphi|$, é o vetor transposto de $|\varphi\rangle$ com os elementos substituídos pelos seus conjugados. Ou seja,

$$\langle\varphi| = (|\varphi\rangle)^\dagger.$$

Matricialmente, no caso de um q-bit, dado por

$$|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix},$$

temos que

$$\langle\varphi| = \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right)^\dagger = [\alpha^* \ \beta^*].$$

Dados dois vetores $|\varphi\rangle, |\psi\rangle \in \mathbb{C}^n$, o produto interno $\langle\varphi|\psi\rangle$ e o produto externo $|\varphi\rangle\langle\psi|$ são definidos, respectivamente, por

$$\langle\varphi|\psi\rangle = (|\varphi\rangle)^\dagger |\psi\rangle$$

e

$$|\varphi\rangle\langle\psi| = |\varphi\rangle(|\psi\rangle)^\dagger.$$

Note que $|\varphi\rangle, |\psi\rangle$ são vetores “coluna” e $\langle\varphi|, \langle\psi|$ são vetores “linha”.

Sejam $|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ e $|\psi\rangle = \gamma|0\rangle + \xi|1\rangle$, dois vetores pertencentes a $\mathbb{C}^2$, temos para o produto interno e para o produto externo, respectivamente:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = (|\varphi\rangle)^\dagger |\psi\rangle = [\alpha^* \ \beta^*] \begin{bmatrix} \gamma \\ \xi \end{bmatrix} = \alpha^* \gamma + \beta^* \xi.$$

e

$$|\varphi\rangle\langle\psi| = |\varphi\rangle(|\psi\rangle)^\dagger = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} [\gamma^* \ \xi^*] = \begin{bmatrix} \alpha\gamma^* & \alpha\xi^* \\ \beta\gamma^* & \beta\xi^* \end{bmatrix}.$$

Outro exemplo pode ser dado por:

$$\langle 0|1\rangle = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

e

$$|0\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A interpretação física do q-bit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, para α e β não nulos, é que ele está simultaneamente nos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$! Pelo postulado 2, já sabemos que, aplicando um operador unitário sobre o estado $|\psi\rangle$, o novo estado ainda será uma superposição dos estados

$|0\rangle$ e $|1\rangle$. Isso faz com que a quantidade de informação armazenada no estado $|\psi\rangle$ possa ser infinita. Entretanto, essa quantidade infinita de informação está no nível quântico. Para torná-la acessível no nível clássico, precisamos fazer uma medida. Para considerar esse fato, existe um terceiro postulado.

Postulado 3: As medidas sobre sistemas quânticos são descritas por operadores *hermitianos* M ($M^\dagger = M$), chamados *observáveis*. Pelo fato de M ser hermitiano, podemos escrever

$$M = \sum_{i=1}^n \lambda_i |i\rangle\langle i|,$$

onde $\{|i\rangle\}$, $i = 1, \dots, n$, é uma base ortonormal de autovetores de M com os respectivos autovalores λ_i . Os possíveis resultados da medida correspondem aos autovalores λ_i de M . Supondo que o resultado da medida seja “ λ_i ”, o estado $|\psi_{\lambda_i}\rangle$, após a medida, é dado por

$$|\psi_{\lambda_i}\rangle = \frac{(|i\rangle\langle i|)|\psi\rangle}{\sqrt{p_{\lambda_i}}}, \quad (1.3)$$

onde $|\psi\rangle$ é o estado anterior à medida e p_{λ_i} é a probabilidade de se obter “ λ_i ”, dada por

$$p_{\lambda_i} = \langle\psi|(|i\rangle\langle i|)|\psi\rangle. \quad (1.4)$$

Na realidade, a medida descrita no Postulado 3, chamada *medida projetiva*, é um caso particular de uma medida mais geral [17, 19].

Vejamos um exemplo. Façamos uma medida de um q-bit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, usando o observável Z , dado em (1.2), que pode ser escrito como

$$Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|.$$

Usando (1.3) e (1.4), temos:

$$p_1 = (\alpha^\dagger\langle 0|0\rangle + \beta^\dagger\langle 1|0\rangle)(\alpha\langle 0|0\rangle + \beta\langle 0|1\rangle) = |\alpha|^2$$

e

$$|\psi_1\rangle = \frac{\alpha\langle 0|0\rangle|0\rangle + \beta\langle 0|1\rangle|0\rangle}{|\alpha|} = \frac{\alpha}{|\alpha|}|0\rangle.$$

De forma similar, podemos obter

$$p_{-1} = |\beta|^2$$

e

$$|\psi_{-1}\rangle = \frac{\beta}{|\beta|}|1\rangle.$$

Resumindo: usando o observável Z para fazer uma medida de um q-bit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, podemos obter o estado $\frac{\alpha}{|\alpha|}|0\rangle$, com probabilidade $|\alpha|^2$, ou o estado $\frac{\beta}{|\beta|}|1\rangle$, com probabilidade $|\beta|^2$ (em termos de observação, os estados $\frac{\alpha}{|\alpha|}|0\rangle$ e $|0\rangle$ são idênticos, assim como os estados $\frac{\beta}{|\beta|}|1\rangle$ e $|1\rangle$).

Para descrever estados com mais de um q-bit, temos o postulado 4.

Postulado 4: O estado composto por n estados, $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$, é o produto tensorial $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$.

Para os nossos propósitos, definimos o produto tensorial $A \otimes B$, entre as matrizes $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$, como sendo a matriz

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mn}B \end{bmatrix},$$

onde A_{ij} é o elemento da linha i e da coluna j de A . Note que a dimensão da matriz $A \otimes B$ é $mp \times nq$ e que o produto tensorial não é comutativo. Por exemplo,

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Usaremos também a notação $|v\rangle|w\rangle$ ou $|vw\rangle$ para o produto tensorial $|v\rangle \otimes |w\rangle$.

Para prosseguirmos, necessitamos de algumas definições da álgebra linear [2, 4, 16, 17]:

Definição 1 *O traço de uma matriz A é a soma dos elementos da sua diagonal principal,*

$$\text{tr}(A) \equiv \sum_i A_{ii}.$$

Definição 2 *Um operador positivo A é aquele para o qual $\langle\psi|A|\psi\rangle \geq 0$ para todo $|\psi\rangle$.*

Uma segunda alternativa para a formulação dos postulados da mecânica quântica é em termos do *operador densidade* [1, 5, 17, 19]. Essa nova formulação é útil para descrever sistemas quânticos cujos estados não são completamente conhecidos. Por exemplo, suponha que um sistema quântico esteja em um dos estados $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$, com as respectivas probabilidades $p_1, \dots, p_n$. Chamaremos o conjunto $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, um “ensemble” de estados puros. O operador densidade do sistema é dado por

$$\rho = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|.$$

Por exemplo, a representação de um q-bit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, na forma de operador densidade, ficaria no seguinte formato:

$$\rho = |\alpha|^2 |0\rangle \langle 0| + \alpha\beta^* |0\rangle \langle 1| + \alpha^*\beta |1\rangle \langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle \langle 1|.$$

Os operadores que podem representar operador densidade são caracterizados pelo seguinte teorema, demonstrado em [17].

Teorema 3 *Um operador ρ é operador densidade do “ensemble” $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ se, e somente se, satisfizer as seguintes condições:*

1-(Condição sobre o traço) O traço de ρ deve ser igual a 1.

2-(Condição de positividade) ρ deve ser positivo.

Dizemos ainda que ρ está num *estado puro* se $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ e, neste caso, vale a propriedade $\text{tr}(\rho^2) = 1$. Quando o estado não é puro, ele é chamado *estado misturado ou misto* e, neste caso, temos $\text{tr}(\rho^2) < 1$.

Baseado nessa nova formulação, iremos reescrever os postulados da mecânica quântica [17].

Postulado 1: Associado a qualquer sistema físico existe um espaço vetorial complexo (ou seja, um espaço de Hilbert) conhecido como espaço de estados do sistema. O sistema é completamente descrito pelo seu operador densidade, que é um operador positivo com traço 1 atuando no espaço de estados. Se o sistema está no estado ρ_i , com probabilidade p_i , o seu operador densidade será $\sum_i p_i \rho_i$.

Postulado 2: A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por transformações unitárias. Isto é, o estado ρ do sistema em um instante t_1 está relacionado ao estado ρ' em um instante t_2 por um operador unitário U que depende somente de t_1 e t_2 ,

$$\rho' = U\rho U^\dagger.$$

Postulado 3: Medidas quânticas são descritas por uma coleção de operadores de medidas $\{M_n\}$. Esses operadores atuam sobre o espaço de estados do sistema sendo medido. O índice n refere-se a um resultado possível da medida. Se o estado do sistema imediatamente antes da medida for ρ , a probabilidade de o resultado n ocorrer será

$$p(n) = \text{tr}(M_n^\dagger M_n \rho)$$

e o estado do sistema após a medida será

$$\frac{M_n \rho M_n^\dagger}{\text{tr}(M_n^\dagger M_n \rho)}.$$

Os operadores de medida satisfazem a equação de completitude

$$\sum_n M_n^\dagger M_n = I.$$

Postulado 4: O espaço de estados de um sistema físico composto é o produto tensorial dos espaços de estados das suas componentes. Além disso, se tivermos sistemas numerados de 1 até n , e o i -ésimo sistema for preparado em ρ_i , o estado do sistema composto será $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_n$.

1.2 Esfera de Bloch

Na equação

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (1.5)$$

considere $\alpha = a + i b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) e $\beta = c + i d$ ($c, d \in \mathbb{R}$). Como $|\alpha|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2$ e $|\beta|^2 = (\sqrt{c^2 + d^2})^2$, podemos escrever

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \quad (1.6)$$

Nesse caso, podemos interpretar um q-bit como sendo um vetor unitário de $\mathbb{R}^4$. Entretanto, existe uma representação geométrica de um q-bit em $\mathbb{R}^3$: a *esfera de Bloch* (Figura 1.1) [10, 18]. Para tanto, passemos o q-bit

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1.7)$$

de coordenadas cartesianas para coordenadas polares (como anteriormente, $\alpha = a + i b$ e $\beta = c + i d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$)). Usando as representações polares de α e β ,

$$\alpha = |\alpha| \exp(i\gamma) \quad \text{e} \quad \beta = |\beta| \exp(i(\gamma + \varphi)),$$

e definindo

$$\cos(\xi) = |\alpha| \quad \text{e} \quad \sin(\xi) = |\beta|,$$

ou ainda

$$\begin{aligned}\xi &= \arccos(\sqrt{a^2 + b^2}) = \arcsen(\sqrt{c^2 + d^2}), \\ \varphi &= \arg(\beta) - \arg(\alpha), \\ \gamma &= \arg(\alpha),\end{aligned}\tag{1.8}$$

podemos, finalmente, escrever

$$|\psi\rangle = \exp(i\gamma)[\cos(\xi) |0\rangle + \exp(i\varphi) \sin(\xi) |1\rangle].\tag{1.9}$$

Para fins de representação, vamos desconsiderar o termo externo aos colchetes, $\exp(i\gamma)$, também chamado *fator de fase global*. Uma razão que permite essa simplificação é que sabemos que a evolução de um q-bit é descrita, matematicamente, pela aplicação sucessiva de operadores unitários. Ao aplicarmos uma matriz unitária U em um q-bit $|\psi\rangle = \exp(i\gamma)[\cos(\xi) |0\rangle + \exp(i\varphi) \sin(\xi) |1\rangle]$, obtemos:

$$U|\psi\rangle = \exp(i\gamma)U[\cos(\xi) |0\rangle + \exp(i\varphi) \sin(\xi) |1\rangle].$$

Note que o fator de fase global não se modifica pela aplicação de um operador unitário. Logo, podemos desprezar o fator $\exp(i\gamma)$ e, a partir daí, tentar encontrar uma representação geométrica para um q-bit em $\mathbb{R}^3$. Fazendo a mudança de variável $\xi \rightarrow \frac{\theta}{2}$, na equação

$$|\psi\rangle = \exp(i\gamma)[\cos(\xi) |0\rangle + \exp(i\varphi) \sin(\xi) |1\rangle],$$

chegamos à forma para a representação polar de um q-bit mais comum na literatura da área:

$$|\psi\rangle = \exp(i\gamma)[\cos(\frac{\theta}{2}) |0\rangle + \exp(i\varphi) \sin(\frac{\theta}{2}) |1\rangle].$$

Ficamos, então, com uma representação de três parâmetros: dois explícitos, θ e φ , e um implícito, o comprimento do vetor, que é sempre igual a um. Ou seja, sua representação polar no $\mathbb{R}^3$, será da forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Usando essas convenções, a representação da base computacional, na esfera de Bloch (Figura 1.1), será:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $|0\rangle$ será o pólo norte da esfera e $|1\rangle$ será seu pólo sul.

Dessa forma, todos os estados de um q-bit podem ser representados (a menos de um fator multiplicativo) na esfera de Bloch.

Observação: Essa seção foi escrita baseada no artigo [7], onde pode-se encontrar mais detalhes sobre a esfera de Bloch. Agradecemos aos autores pelo envio do artigo e do arquivo relacionado a figura da esfera de Bloch [18] (figura 1.1).

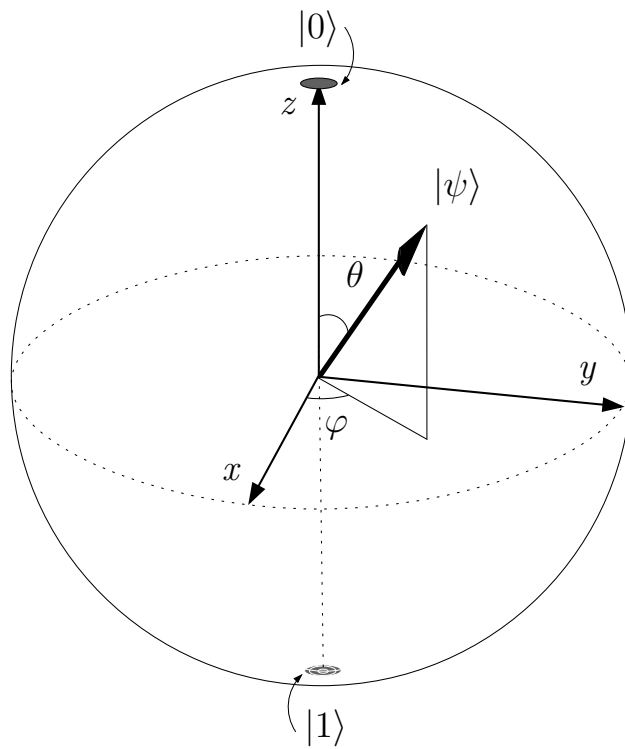


Fig. 1.1: Esfera de Bloch.

Capítulo 2

Ruídos Quânticos

2.1 Operações Quânticas

Usaremos o formalismo matemático das operações quânticas para a descrição da dinâmica de sistemas abertos, ou seja, sistemas que interagem com um sistema-meio, no qual essas interações aparecem como ruído nos sistemas de processamento da informação quântica.

As operações quânticas são ferramentas muito poderosas que permitem que sejam consideradas simultaneamente várias possibilidades físicas. Elas podem ser usadas para descrever quase todos os sistemas quânticos, incluindo sistemas fechados, sistemas fracamente interagentes com o ambiente, sistemas fortemente interagentes com o ambiente e sistemas que estão sujeitos à mensuração. Uma outra característica interessante das operações quânticas é que elas são particularmente bem adaptadas para descrever mudanças discretas de estados, ou seja, transformações entre um estado inicial ρ e um estado final ρ' , sem referência explícita à passagem do tempo. Essa análise de tempo discreto é diferente das ferramentas tradicionalmente usadas para a descrição de sistemas quânticos abertos (tais como “equações mestras”, “equações de Langevin” e “equações diferenciais estocásticas”), que tendem a ser descrições de tempo contínuo [1, 17, 19].

Podemos definir uma operação quântica como um mapeamento que transforma um sistema quântico, definido por um operador (matriz) densidade ρ , em um outro sistema ρ' na forma $\epsilon(\rho)$, ou seja,

$$\rho' = \epsilon(\rho),$$

onde ϵ é a operação quântica envolvida.

Dois exemplos simples de operações quânticas que já vimos são as transformações unitárias e as medidas, para as quais temos $\epsilon(\rho) = U\rho U^\dagger$ e $\epsilon_n(\rho) = M_n\rho M_n^\dagger$, respectivamente.

Existem três maneiras diferentes de descrever operações quânticas, todas matematicamente equivalentes [17, 19]. No nosso trabalho, usaremos apenas o método de representação de operador-soma. A representação de operador soma é interessante pois atribui toda a importância da descrição da dinâmica do sistema conjunto (principal x ambiente) ao sistema principal. Tudo o que é preciso está nos operadores, que atuam somente sobre o sistema principal. Isso simplifica os cálculos e frequentemente leva a um maior entendimento teórico.

Usando a representação de operador soma, a definição de *operação quântica* será dado por:

$$\epsilon(\rho) = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger,$$

onde os operadores $\{E_k\}$ são chamados de *elementos de operação* da operação quântica ϵ , que satisfazem uma importante relação

$$\sum_k E_k E_k^\dagger = I,$$

chamada de *relação de completitude*.

Observação: A equação acima é satisfeita por operações quânticas que preservam o traço, ou seja, $\text{tr}(\epsilon(\rho)) = 1$. Porém, existem operações quânticas que não preservam o traço, nesse caso, temos $\text{tr}(\epsilon(\rho)) < 1$.

2.2 Liberdade na Representação de Operador-Soma

Considere as operações quânticas E e F , atuando sobre um único q-bit, com representações de operador-soma

$$E(\rho) = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger$$

e

$$F(\rho) = \sum_k F_k \rho F_k^\dagger,$$

em que os elementos de operações de E e de F são definidos por:

$$E_1 = \frac{I}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_2 = \frac{Z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

e

$$F_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad F_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Apesar de parecerem operações quânticas diferentes, E e F são, na verdade, a mesma operação quântica. Para ver isso, note que $F_1 = \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{2}}$ e $F_2 = \frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}}$. Logo,

$$F(\rho) = F_1 \rho F_1^\dagger + F_2 \rho F_2^\dagger = E_1 \rho E_1^\dagger + E_2 \rho E_2^\dagger = E(\rho).$$

Esse exemplo mostra que os elementos de operação que aparecem em uma representação de operador-soma não são únicos. Entender quando isso acontece é importante, pelo menos, por duas razões. Primeira: do ponto de vista físico, compreender a liberdade na representação nos ajuda a entender como diferentes processos físicos dão origem à mesma dinâmica no sistema. Segunda: essa compreensão é crucial para o desenvolvimento dos métodos de correções quânticas de erro. Esse exemplo de liberdade na representação de operador-soma é um exemplo da completa liberdade enunciada no seguinte teorema, demonstrado em [17].

Teorema 4 *Sejam $\{E_1, \dots, E_m\}$ e $\{F_1, \dots, F_n\}$ elementos de operação que originam as operações quânticas E e F , respectivamente. Adicionando operadores nulos na lista menor, pode-se assegurar que $m = n$. Portanto, $E = F$ se, e somente se, existirem números complexos u_{ij} tais que $E_i = \sum_j u_{ij} F_j$, e u_{ij} sejam os elementos de uma matriz unitária m por m .*

O teorema anterior pode levar a uma outra questão interessante: qual o tamanho máximo do ambiente necessário para simular um dada operação quântica?

A resposta é dada pelo seguinte teorema, também demonstrado em [17].

Teorema 5 *Todas as operações quânticas ϵ em um espaço de Hilbert com dimensão n podem ser geradas por uma representação de operador-soma contendo no máximo n^2 elementos:*

$$\epsilon(\rho) = \sum_{k=1}^m E_k \rho E_k^\dagger,$$

onde $1 \leq m \leq n^2$.

Capítulo 3

Exemplos de Ruídos Quânticos sobre um q-bit

Sob o ponto de vista da teoria da informação quântica [6, 14], a informação é transmitida através de *canais quânticos*, que podem ser definidos como sistemas quânticos que levam alguma informação de um ponto X para um ponto Y . Matematicamente, um canal quântico pode ser definido por uma operação quântica. Os canais quânticos de maior interesse são aqueles que apresentam ruídos, no nosso caso *ruídos quânticos*, ou perda de informação [3, 12, 15, 17, 19]. Apresentaremos alguns exemplos concretos de ruídos quânticos que desempenham um papel muito importante na compreensão dos efeitos práticos do ruído em sistemas quânticos.

3.1 Descrição Geométrica de Operações Quânticas sobre um q-bit

Existe um elegante método geométrico que permite a visualização de operações quânticas sobre um q-bit [5, 7, 9, 10, 12, 17]. Esse método ajuda a desenvolver uma noção intuitiva do comportamento das operações em termos da *esfera de Bloch*. Para uma operação quântica que preserva o traço, podemos interpretá-la como uma ação sobre o raio da esfera de Bloch.

Desta forma, após atravessar o canal, o raio sofre uma deformação de acordo com o tipo de operação determinada pelos elementos de operação.

Usaremos o fato de que o estado de um único q-bit ρ , representado na forma de operador densidade, pode sempre ser escrito na seguinte forma [17, 19]:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1 - r_z \end{bmatrix},$$

onde (r_x, r_y, r_z) são as coordenadas de ρ na esfera de Bloch.

A seguir, daremos uma interpretação geométrica de vários tipos de canais quânticos [1, 3, 17, 19].

3.2 Canal de Inversão de q-bit

O *canal de inversão de q-bit* inverte o estado de um q-bit de $|0\rangle$ para $|1\rangle$ (e vice-versa) com probabilidade $1-p$. Seus elementos de operações são [1, 3, 17]:

$$E_0 = \sqrt{p}I = \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$E_1 = \sqrt{1-p}X = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Antes de observarmos o efeito geométrico do canal de inversão de q-bit, iremos fazer os cálculos referentes à operação quântica em questão, que será representada na forma de operador soma, ou seja,

$$\epsilon(\rho) = E_0\rho E_0^\dagger + E_1\rho E_1^\dagger.$$

Tendo em mente que $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e usando os elementos de operação acima, temos:

$$\begin{aligned}
\epsilon(\rho) &= \sqrt{p}I\rho\sqrt{p}I + \sqrt{1-p}X\rho\sqrt{1-p}X \\
&= \sqrt{p}I^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \sqrt{p}I + (1-p) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} p(1+r_z) & p(r_x - ir_y) \\ p(r_x + ir_y) & p(1-r_z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-p)(1+r_z) & (1-p)(r_x - ir_y) \\ (1-p)(r_x + ir_y) & (1-p)(1-r_z) \end{bmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p + pr_z + 1 - r_z - p + pr_z & pr_x - ipr_y + r_x + ir_y - pr_x - pir_y \\ pr_x + ipr_y + r_x - ir_y - pr_x + pir_y & p - pr_z + 1 + r_z - p - pr_z \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + (2p-1)r_z & r_x + (-2pi + i)r_y \\ r_x + (2pi - i)r_y & 1 + (-2p+1)r_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + (2p-1)r_z & r_x + (1-2p)ir_y \\ r_x + (2p-1)ir_y & 1 + (-2p+1)r_z \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Igualando a $\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \hat{r}_z & \hat{r}_x - i\hat{r}_y \\ \hat{r}_x + i\hat{r}_y & 1 - \hat{r}_z \end{bmatrix}$, temos:

$1 + \hat{r}_z = 1 + r_z(2p-1)$ implica que $\boxed{\hat{r}_z = r_z(2p-1)}$, de $\hat{r}_x - i\hat{r}_y = r_x + ir_y(1-2p)$ e

$\hat{r}_x + i\hat{r}_y = r_x + ir_y(2p-1)$, temos $\boxed{\hat{r}_x = r_x}$ e $\boxed{\hat{r}_y = r_y(2p-1)}$.

Logo, teremos $\boxed{(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x, r_y(2p-1), r_z(2p-1))}$.

Ou seja, os estados sobre o eixo $\hat{x}$ não são alterados, enquanto aqueles no plano $\hat{y}$ - $\hat{z}$ são contraídos e/ou refletidos por um fator $1 - 2p$.

Agora, iremos ilustrar o efeito geométrico do canal de inversão de q-bit para as probabilidades $p = 0$, $p = 0.3$, $p = 0.5$, $p = 0.7$ e $p = 1$.

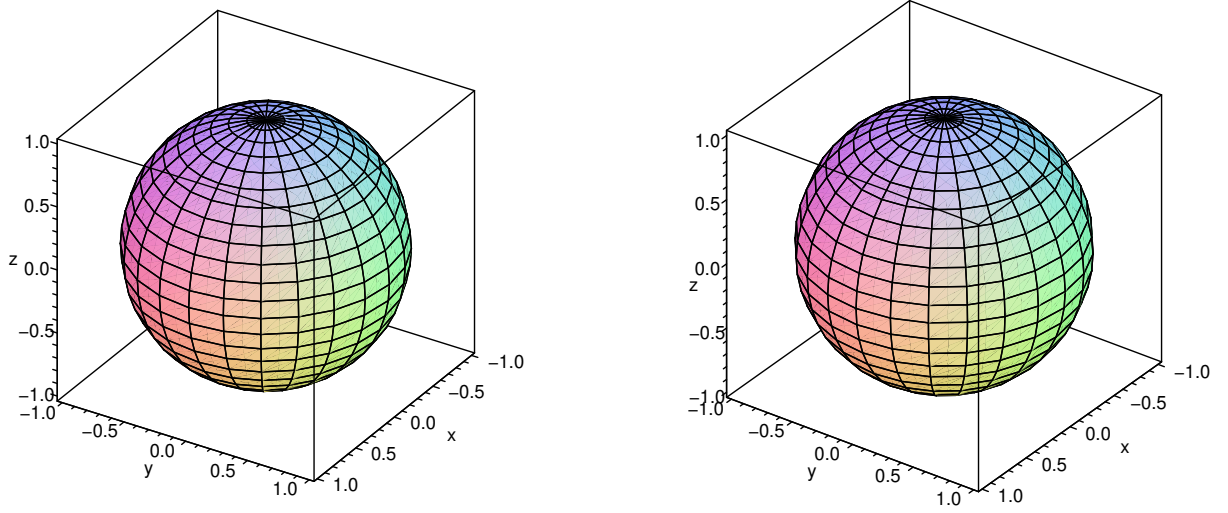


Fig. 3.1: Esfera de Bloch e o efeito do canal de inversão de q-bit com $p = 0$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x, -r_y, -r_z)$.

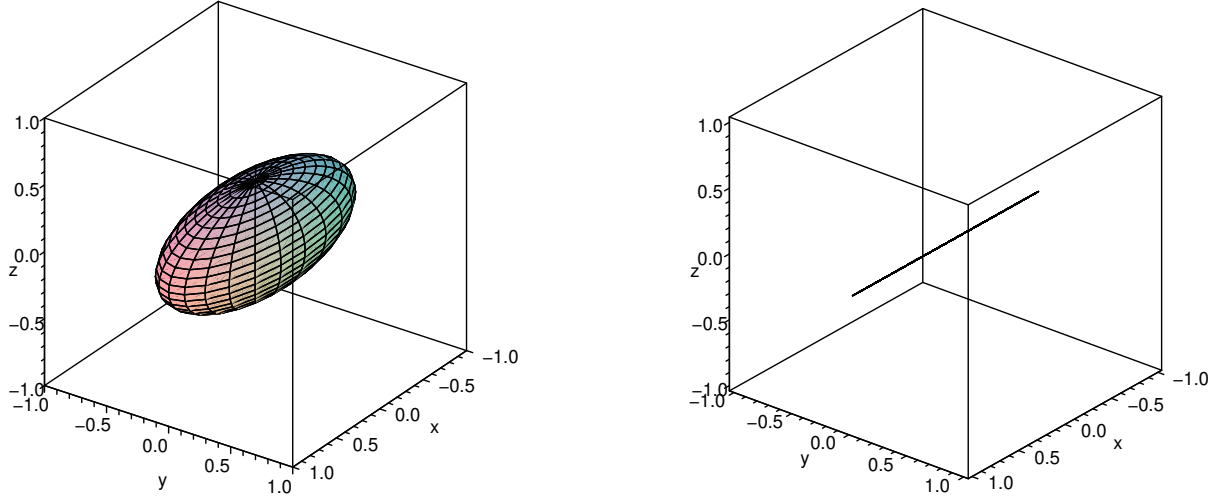


Fig. 3.2: Efeito do canal de inversão de q-bit para $p = 0.3$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x, -0.4r_y, -0.4r_z)$, e para $p = 0.5$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x, 0, 0)$.

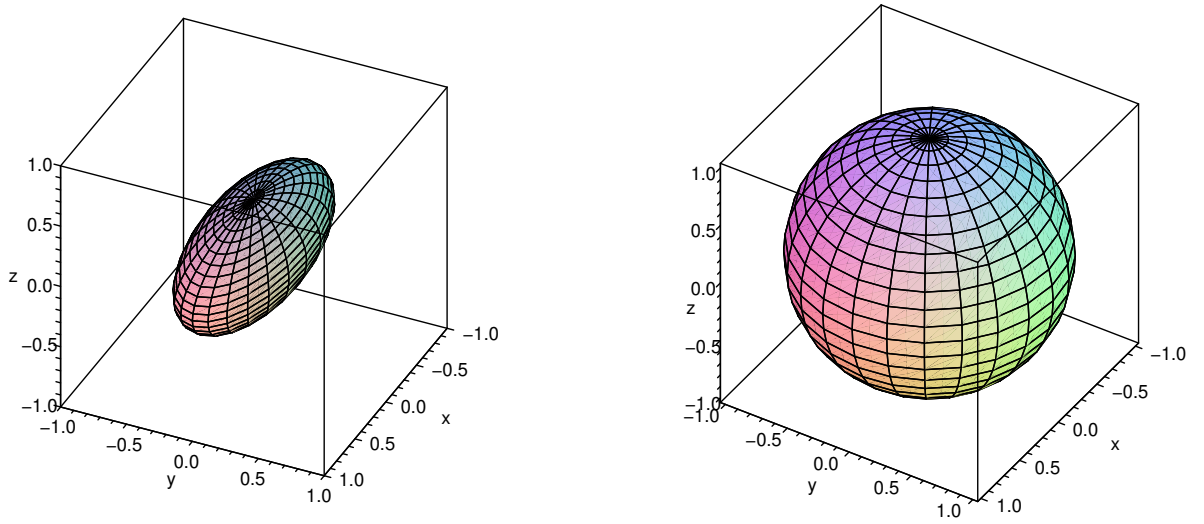


Fig. 3.3: Efeito do canal de inversão de q-bit com $p = 0.7$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x, 0.4r_y, 0.4r_z)$, e para $p = 1$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x, r_y, r_z)$, a própria Esfera de Bloch.

3.3 Canal de Inversão de Fase

O *canal de inversão de fase* tem os seguintes elementos de operação [1, 17]:

$$E_0 = \sqrt{p}I = \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$E_1 = \sqrt{1-p}Z = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Iremos fazer os cálculos referentes à operação quântica em questão, que será representada na forma de operador soma, ou seja,

$$\epsilon(\rho) = E_0\rho E_0^\dagger + E_1\rho E_1^\dagger.$$

Tendo em mente que $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e usando os elementos de operação acima, temos:

$$\begin{aligned} \epsilon(\rho) &= \sqrt{p}I\rho\sqrt{p}I + \sqrt{1-p}Z\rho\sqrt{1-p}Z \\ &= \sqrt{p}I^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \sqrt{p}I + (1-p) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} p(1+r_z) & p(r_x - ir_y) \\ p(r_x + ir_y) & p(1-r_z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-p)(1+r_z) & -(1-p)(r_x - ir_y) \\ -(1-p)(r_x + ir_y) & (1-p)(1-r_z) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p + pr_z + 1 + r_z - p - pr_z & pr_x - ipr_y - r_x + ir_y + pr_x - pir_y \\ pr_x + ipr_y - r_x - ir_y + pr_x + pir_y & p - pr_z + 1 - r_z - p + pr_z \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + r_z & (2p - 1)r_x + (-2pi + i)r_y \\ (2p - 1)r_x + (2pi - i)r_y & 1 - r_z \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + r_z & (2p - 1)r_x + (1 - 2p)ir_y \\ (2p - 1)r_x + (2p - 1)ir_y & 1 - r_z \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Igualando a $\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \hat{r}_z & \hat{r}_x - i\hat{r}_y \\ \hat{r}_x + i\hat{r}_y & 1 - \hat{r}_z \end{bmatrix}$, temos:

$1 + \hat{r}_z = 1 + r_z$ implica que $\boxed{\hat{r}_z = r_z}$, de $\hat{r}_x - i\hat{r}_y = (2p - 1)r_x + ir_y(1 - 2p)$

e $\hat{r}_x + i\hat{r}_y = (2p - 1)r_x + ir_y(2p - 1)$, temos $\boxed{\hat{r}_x = (2p - 1)r_x}$ e $\boxed{\hat{r}_y = (2p - 1)r_y}$.

Logo, teremos $\boxed{(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x(2p - 1), r_y(2p - 1), r_z)}$.

Ou seja, os estados sobre o eixo $\hat{z}$ não são alterados, enquanto aqueles no plano $\hat{x}$ - $\hat{y}$ são contraídos e/ou refletidos por um fator $1 - 2p$.

Será mostrado agora o efeito geométrico do canal de inversão de fase para as probabilidades $p = 0$, $p = 0.3$, $p = 0.5$, $p = 0.7$ e $p = 1$.

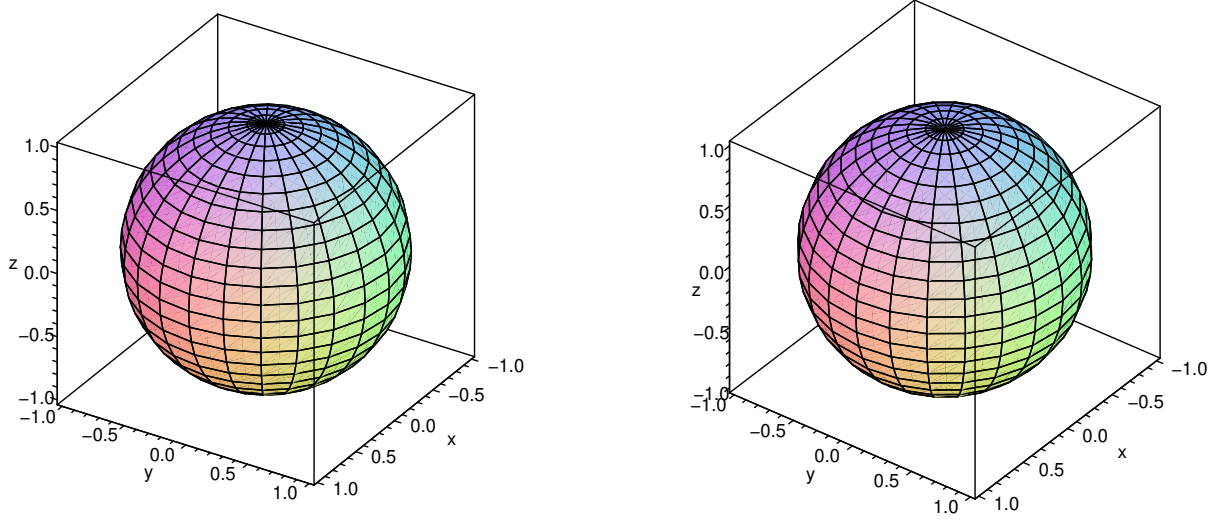


Fig. 3.4: Esfera de Bloch e o efeito do canal de inversão de fase com $p = 0$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (-r_x, -r_y, r_z)$.

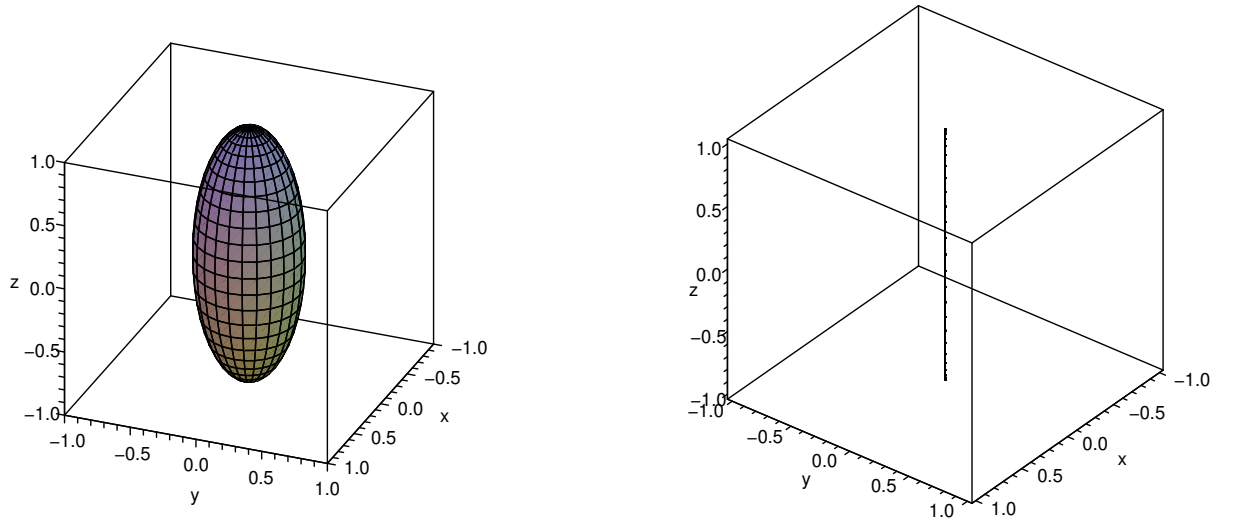


Fig. 3.5: Efeito do canal de inversão de fase para $p = 0.3$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (-0.4r_x, -0.4r_y, r_z)$, e para $p = 0.5$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (0, 0, r_z)$.

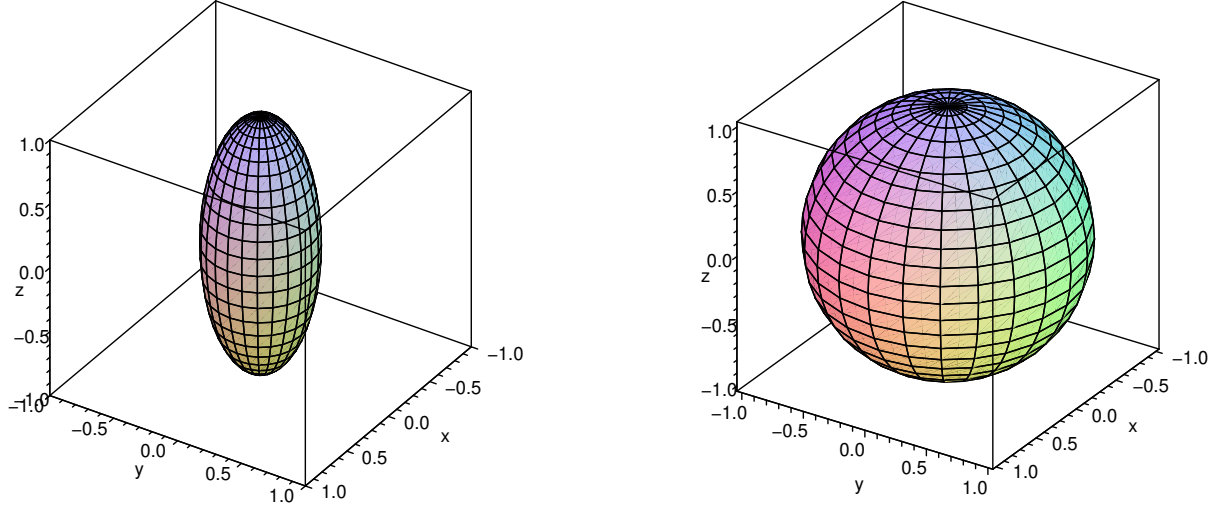


Fig. 3.6: Efeito do canal de inversão de fase para $p = 0.7$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (0.4r_x, 0.4r_y, r_z)$, e para $p = 1$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x, r_y, r_z)$, a própria Esfera de Bloch.

3.4 Canal de Inversão de q-bit e Inversão de Fase

O canal de inversão de q-bit e fase tem os seguintes elementos de operação [17]:

$$E_0 = \sqrt{p}I = \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$E_1 = \sqrt{1-p}Y = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Como o nome indica, trata-se de uma combinação de inversão de q-bit e fase, pois $Y = iXZ$ [17].

Os cálculos detalhados referente à operação quântica de canal de inversão de q-bit e fase, serão realizados abaixo, onde sua representação de operador soma é dada por:

$$\epsilon(\rho) = E_0 \rho E_0^\dagger + E_1 \rho E_1^\dagger.$$

Tendo em vista que $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ e usando os elementos de operação acima temos:

$$\begin{aligned} \epsilon(\rho) &= \sqrt{p} I \rho \sqrt{p} I + \sqrt{1-p} Y \rho \sqrt{1-p} Y \\ &= \sqrt{p} I^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \sqrt{p} I + (1-p) \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} p(1+r_z) & p(r_x - ir_y) \\ p(r_x + ir_y) & p(1-r_z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-p)(1-r_z) & -(1-p)(r_x + ir_y) \\ -(1-p)(r_x - ir_y) & (1-p)(1+r_z) \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p + pr_z + 1 - r_z - p + pr_z & pr_x - ipr_y - r_x - ir_y + pr_x + p ir_y \\ pr_x + ipr_y - r_x + ir_y + pr_x - p ir_y & p - pr_z + 1 + r_z - p - pr_z \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + (2p-1)r_z & (2p-1)r_x - ir_y \\ (2p-1)r_x + ir_y & 1 + (1-2p)r_z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Igualando a $\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \hat{r}_z & \hat{r}_x - i\hat{r}_y \\ \hat{r}_x + i\hat{r}_y & 1 - \hat{r}_z \end{bmatrix}$, temos:

$1 + \hat{r}_z = 1 + (2p-1)r_z$ implica que $\boxed{\hat{r}_z = (2p-1)r_z}$, de $\hat{r}_x - i\hat{r}_y = (2p-1)r_x - ir_y$

e $\hat{r}_x + i\hat{r}_y = (2p - 1)r_x + ir_y$ temos $\boxed{\hat{r}_x = (2p - 1)r_x}$ e $\boxed{\hat{r}_y = r_y}$.

Logo, teremos $\boxed{(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x(2p - 1), r_y, r_z(2p - 1))}$.

Ou seja, os estados sobre o eixo $\hat{y}$ não são alterados, enquanto aqueles no plano $\hat{x}$ - $\hat{z}$ são contraídos e/ou refletidos por um fator $1 - 2p$.

A ilustração do efeito geométrico do canal de inversão de q-bit e fase é mostrado abaixo para as probabilidades $p = 0$, $p = 0.3$, $p = 0.5$, $p = 0.7$ e $p = 1$.

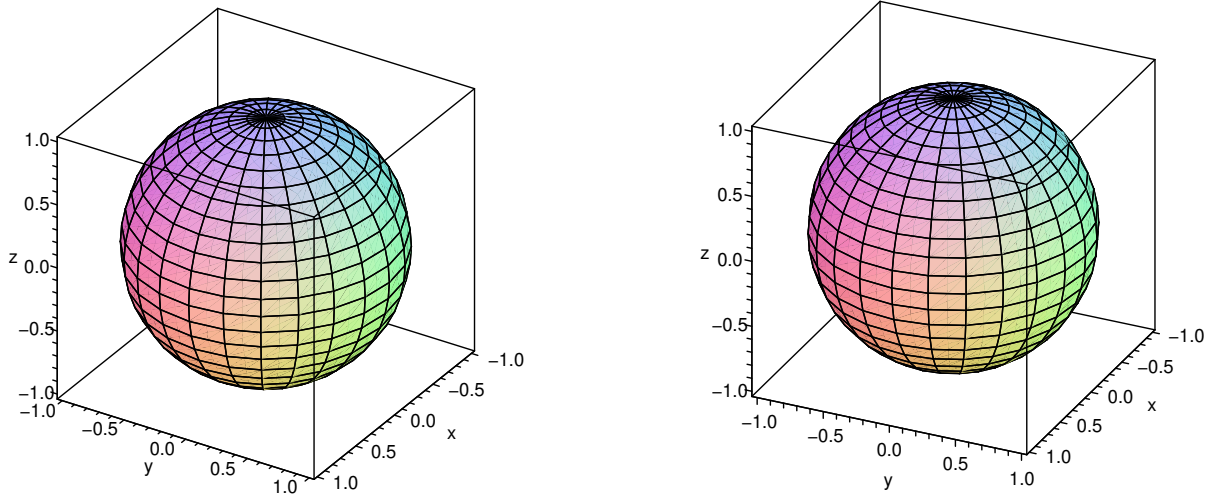


Fig. 3.7: Esfera de Bloch e o efeito do canal de inversão de q-bit e fase com $p = 0$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (-r_x, r_y, -r_z)$.

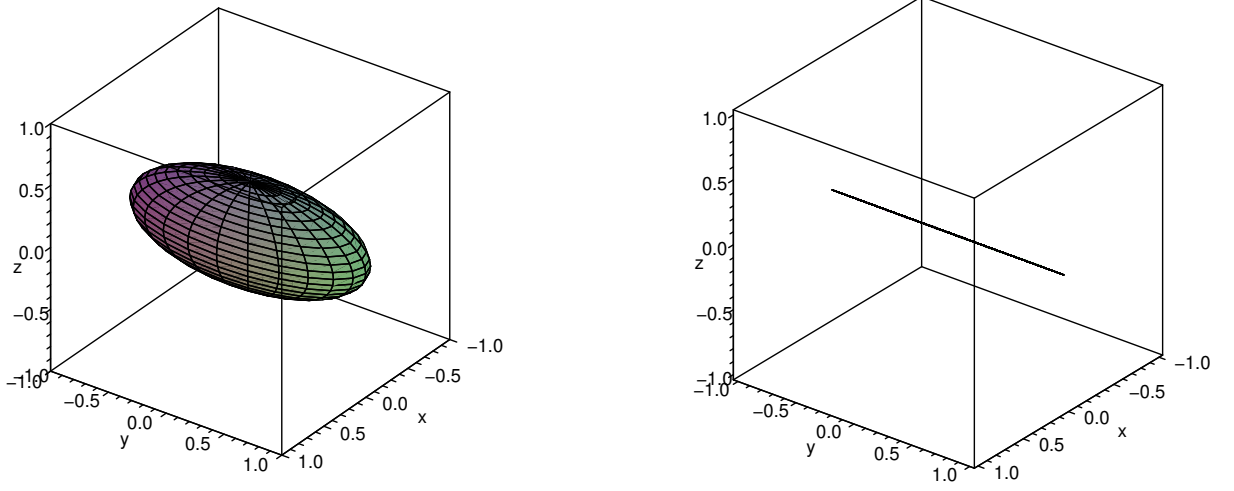


Fig. 3.8: Efeito do canal de inversão de q-bit e fase para $p = 0.3$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (-0.4r_x, r_y, -0.4r_z)$, e para $p = 0.5$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (0, r_y, 0)$.

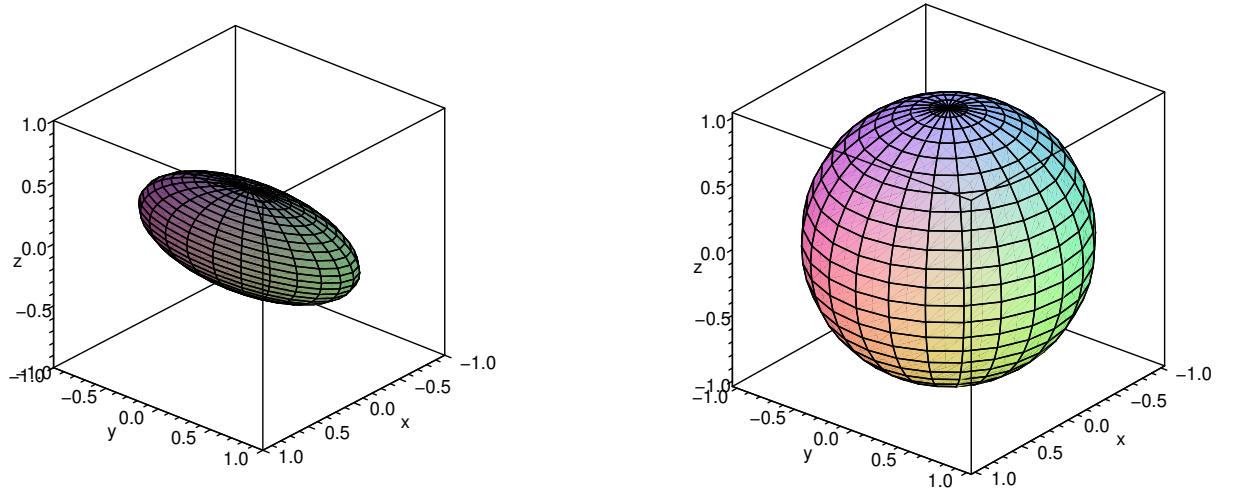


Fig. 3.9: Efeito do canal de inversão de q-bit e fase com $p = 0.7$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (0.4r_x, r_y, 0.4r_z)$, e para $p = 1$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x, r_y, r_z)$, a própria Esfera de Bloch.

3.5 Canal de Despolarização

O *canal de despolarização* é um importante tipo de ruído quântico, onde seus elementos de operação são [1, 3, 17, 19]:

$$E_0 = \sqrt{1 - \frac{3p}{4}} I = \sqrt{1 - \frac{3p}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \frac{\sqrt{p}}{2} X = \frac{\sqrt{p}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \frac{\sqrt{p}}{2} Y = \frac{\sqrt{p}}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$E_3 = \frac{\sqrt{p}}{2} Z = \frac{\sqrt{p}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, teremos:

$$\begin{aligned} \epsilon(\rho) &= \sqrt{1 - \frac{3p}{4}} I \rho \sqrt{1 - \frac{3p}{4}} I + \frac{\sqrt{p}}{2} X \rho \frac{\sqrt{p}}{2} X + \frac{\sqrt{p}}{2} Y \rho \frac{\sqrt{p}}{2} Y + \frac{\sqrt{p}}{2} Z \rho \frac{\sqrt{p}}{2} Z \\ &= \left\{ \sqrt{1 - \frac{3p}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1 - r_z \end{bmatrix} \sqrt{1 - \frac{3p}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{\sqrt{p}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1 - r_z \end{bmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{p}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{p}}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \frac{\sqrt{p}}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \\
& + \frac{\sqrt{p}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \frac{\sqrt{p}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \} \\
& = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} (1 - \frac{3p}{4})(1+r_z) & (1 - \frac{3p}{4})(r_x - ir_y) \\ (1 - \frac{3p}{4})(r_x + ir_y) & (1 - \frac{3p}{4})(1-r_z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{p}{4}(1-r_z) & \frac{p}{4}(r_x + ir_y) \\ \frac{p}{4}(r_x - ir_y) & \frac{p}{4}(1+r_z) \end{bmatrix} + \right. \\
& \left. + \begin{bmatrix} \frac{p}{4}(1-r_z) & -\frac{p}{4}(r_x + ir_y) \\ -\frac{p}{4}(r_x - ir_y) & \frac{p}{4}(1+r_z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{p}{4}(1+r_z) & -\frac{p}{4}(r_x - ir_y) \\ -\frac{p}{4}(r_x + ir_y) & \frac{p}{4}(1-r_z) \end{bmatrix} \right\} \\
& = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + (1-p)r_z & (1-p)(r_x - ir_y) \\ (1-p)(r_x + ir_y) & 1 + (p-1)r_z \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Igualando a $\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \hat{r}_z & \hat{r}_x - i\hat{r}_y \\ \hat{r}_x + i\hat{r}_y & 1 - \hat{r}_z \end{bmatrix}$, temos:

$$1 + \hat{r}_z = 1 + (1-p)r_z \text{ implica que } \boxed{\hat{r}_z = (1-p)r_z}, \text{ de } \hat{r}_x - i\hat{r}_y = (1-p)(r_x - ir_y)$$

$$\text{e } \hat{r}_x + i\hat{r}_y = (1-p)(r_x + ir_y), \text{ temos } \boxed{\hat{r}_x = (1-p)r_x} \text{ e } \boxed{\hat{r}_y = (1-p)r_y}.$$

$$\text{Portanto, teremos } \boxed{(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = ((1-p)r_x, (1-p)r_y, (1-p)r_z)}.$$

Ou seja, os estados são todos contraídos por um fator $1-p$.

Apresentaremos agora a descrição geométrica do canal de despolarização para as probabilidades $p = 0$, $p = 0.3$, $p = 0.5$, $p = 0.7$ e $p = 1$.

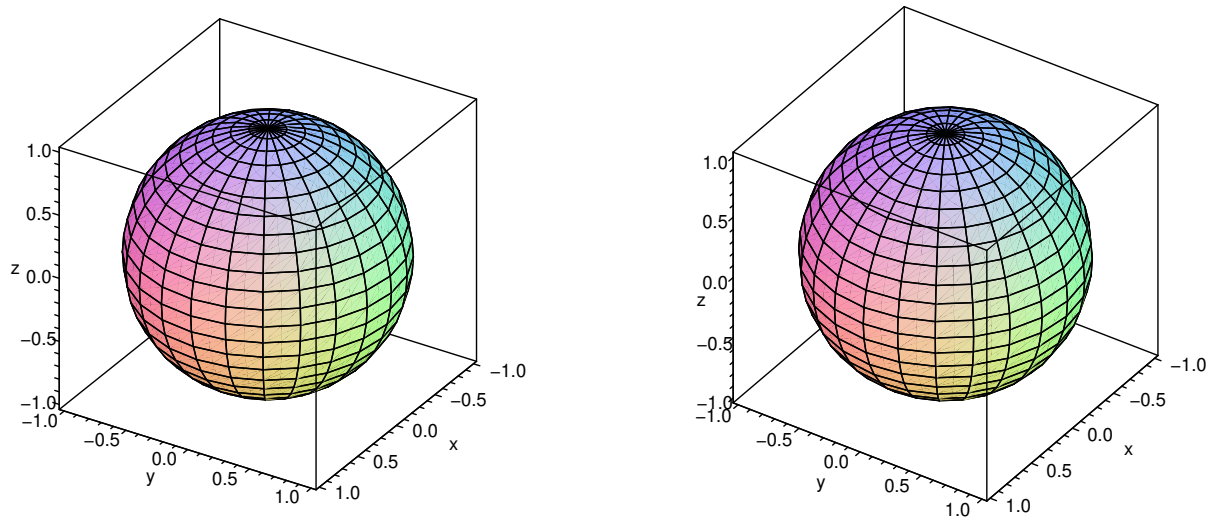


Fig. 3.10: Esfera de Bloch e o efeito do canal de despolarização com $p = 0$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x, r_y, r_z)$, a própria Esfera de Bloch.

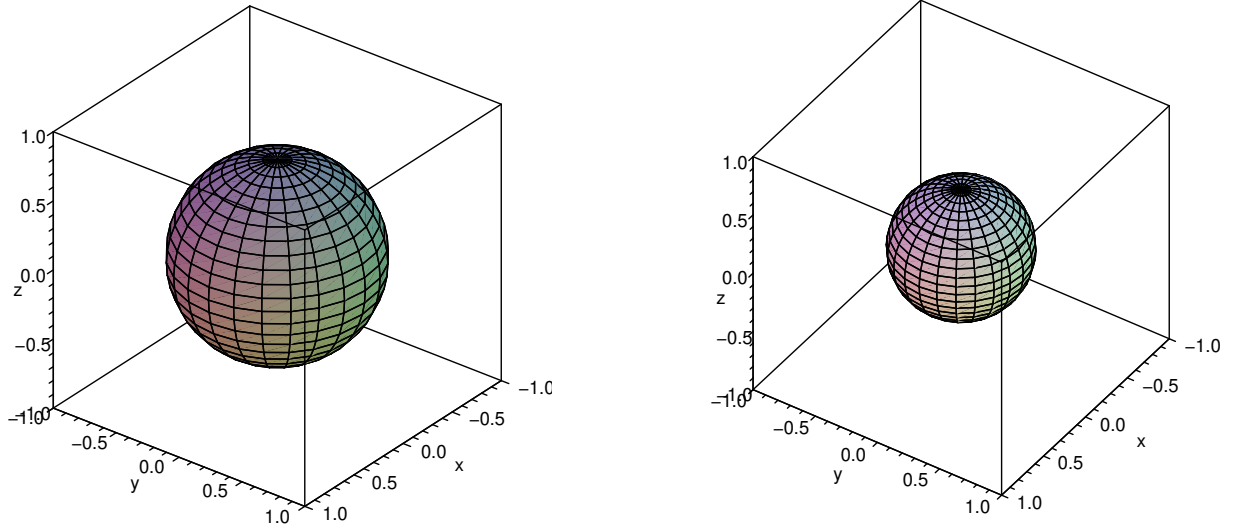


Fig. 3.11: Efeito do canal de despolarização para $p = 0.3$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (0.7r_x, 0.7r_y, 0.7r_z)$, e para $p = 0.5$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (0.5r_x, 0.5r_y, 0.5r_z)$.

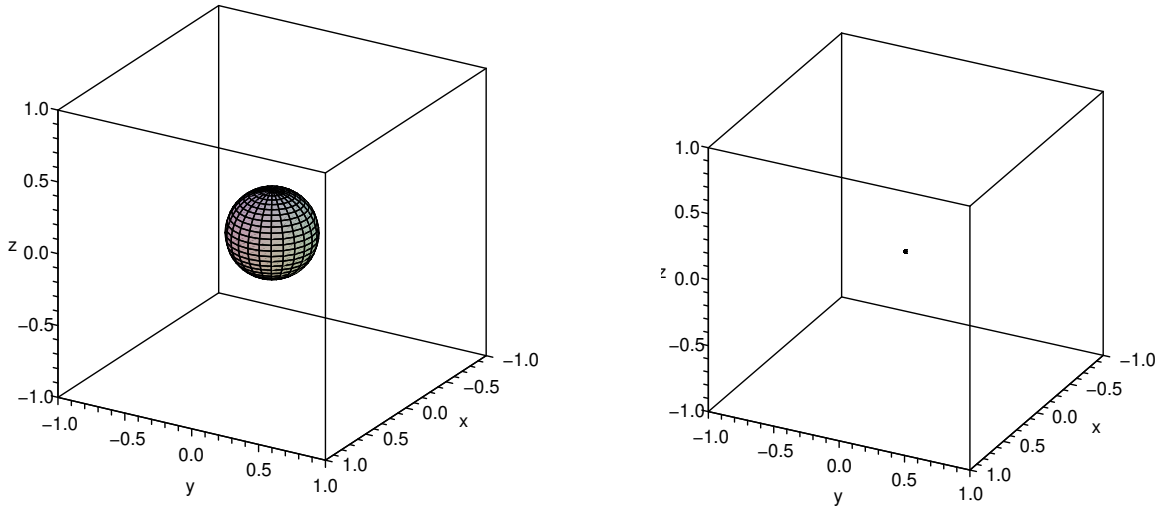


Fig. 3.12: Efeito do canal de despolarização para $p = 0.7$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (0.3r_x, 0.3r_y, 0.3r_z)$, e para $p = 1$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (0, 0, 0)$.

Existe uma outra parametrização do canal de despolarização, onde os elementos de operação são [17]:

$$E_0 = \sqrt{1-p}I = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}X = \frac{\sqrt{3p}}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \sqrt{\frac{p}{3}}Y = \frac{\sqrt{3p}}{3} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$E_3 = \sqrt{\frac{p}{3}}Z = \frac{\sqrt{3p}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tendo em mente que $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e

usando os elementos de operação acima, temos:

$$\begin{aligned} \epsilon(\rho) &= \sqrt{1-p}I\rho\sqrt{1-p}I + \frac{\sqrt{3p}}{3}X\rho\frac{\sqrt{3p}}{3}X + \frac{\sqrt{3p}}{3}Y\rho\frac{\sqrt{3p}}{3}Y + \frac{\sqrt{3p}}{3}Z\rho\frac{\sqrt{3p}}{3}Z \\ &= \left\{ \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{\sqrt{3p}}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \right\}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \frac{\sqrt{3p}}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{3p}}{3} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \frac{\sqrt{3p}}{3} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \\
& + \frac{\sqrt{3p}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \frac{\sqrt{3p}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \} \\
& = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} (1-p)(1+r_z) & (1-p)(r_x - ir_y) \\ (1-p)(r_x + ir_y) & (1-p)(1-r_z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{p}{3}(1-r_z) & \frac{p}{3}(r_x + ir_y) \\ \frac{p}{3}(r_x - ir_y) & \frac{p}{3}(1+r_z) \end{bmatrix} + \right. \\
& \left. + \begin{bmatrix} \frac{p}{3}(1-r_z) & -\frac{p}{3}(r_x + ir_y) \\ -\frac{p}{3}(r_x - ir_y) & \frac{p}{3}(1+r_z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{p}{3}(1+r_z) & -\frac{p}{3}(r_x - ir_y) \\ -\frac{p}{3}(r_x + ir_y) & \frac{p}{3}(1-r_z) \end{bmatrix} \right\} \\
& = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + (1 - \frac{4p}{3})r_z & (1 - \frac{4p}{3})(r_x - ir_y) \\ (1 - \frac{4p}{3})(r_x + ir_y) & (1 - \frac{4p}{3})r_z \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Igualando a $\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \hat{r}_z & \hat{r}_x - i\hat{r}_y \\ \hat{r}_x + i\hat{r}_y & 1 - \hat{r}_z \end{bmatrix}$, temos:

$1 + \hat{r}_z = 1 + (1 - \frac{4p}{3})r_z$ implica que $\hat{r}_z = (1 - \frac{4p}{3})r_z$, de $\hat{r}_x - i\hat{r}_y = (1 - \frac{4p}{3})(r_x - ir_y)$

e $\hat{r}_x + i\hat{r}_y = (1 - \frac{4p}{3})(r_x + ir_y)$, temos $\hat{r}_x = (1 - \frac{4p}{3})r_x$ e $\hat{r}_y = (1 - \frac{4p}{3})r_y$.

Logo, teremos $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = ((1 - \frac{4p}{3})r_x, (1 - \frac{4p}{3})r_y, (1 - \frac{4p}{3})r_z)$.

Ou seja, os estados são todos contraídos uniformemente por um fator $1 - \frac{4p}{3}$, para $0 \leq p \leq \frac{3}{4}$, ou contração seguida de inversão na origem para $\frac{3}{4} \leq p \leq 1$.

3.6 Canal de Atenuação de Amplitude

Uma importante aplicação das operações quânticas é a descrição de processos de dissipação de energia. Cada um desses processos tem características particulares, mas o comportamento geral de todos eles é bem caracterizado por uma operação conhecida como atenuação de amplitude, cujos os elementos de operação são [3, 17]:

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix}$$

e

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde o γ pode ser visto como a probabilidade de um fóton ser perdido numa cavidade sujeita à atenuação.

Os cálculos referentes à operação quântica de atenuação de amplitude, que será representada na forma de operador soma, são:

$$\begin{aligned} \epsilon(\rho) &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix} + \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+r_z+\gamma-\gamma r_z & \sqrt{1-\gamma}(r_x - ir_y) \\ \sqrt{1-\gamma}(r_x + ir_y) & (1-\gamma)(1-r_z) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Igualando a $\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \hat{r}_z & \hat{r}_x - i\hat{r}_y \\ \hat{r}_x + i\hat{r}_y & 1 - \hat{r}_z \end{bmatrix}$, temos:

$1 + \hat{r}_z = 1 + \gamma + (1 - \gamma)r_z$ implica que $\hat{r}_z = \gamma + (1 - \gamma)r_z$, de $\hat{r}_x - i\hat{r}_y = \sqrt{1 - \gamma}(r_x - ir_y)$ e

$\hat{r}_x + i\hat{r}_y = \sqrt{1 - \gamma}(r_x + ir_y)$, temos $\hat{r}_x = \sqrt{1 - \gamma}r_x$ e $\hat{r}_y = \sqrt{1 - \gamma}r_y$.

Logo, teremos: $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x\sqrt{1 - \gamma}, r_y\sqrt{1 - \gamma}, \gamma + r_z(1 - \gamma))$.

Neste caso, temos que o pólo norte (o estado $|0\rangle$) é um ponto fixo nesta deformação, cujo processo é uma contração da esfera de Bloch de fator $\sqrt{1 - \gamma}$ nas direções perpendiculares ao eixo norte-sul, composta com uma translação de γ no sentido sul-norte.

Iremos ilustrar o efeito geométrico da atenuação de amplitude para as probabilidades $p = 0$, $p = 0.3$, $p = 0.5$, $p = 0.7$ e $p = 1$.

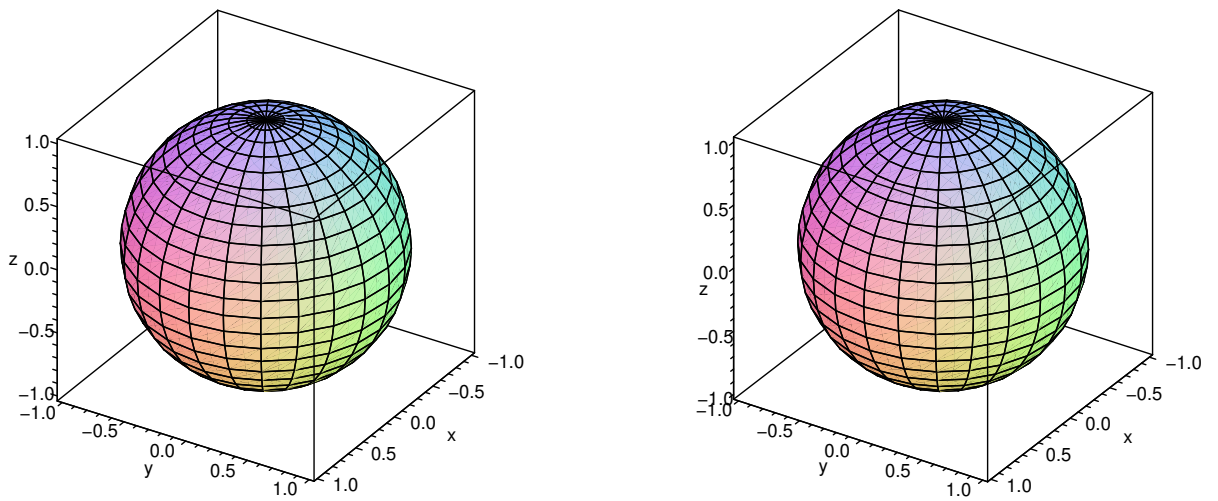


Fig. 3.13: Esfera de Bloch e o efeito da atenuação de amplitude com $p = 0$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x, r_y, r_z)$, a própria Esfera de Bloch.

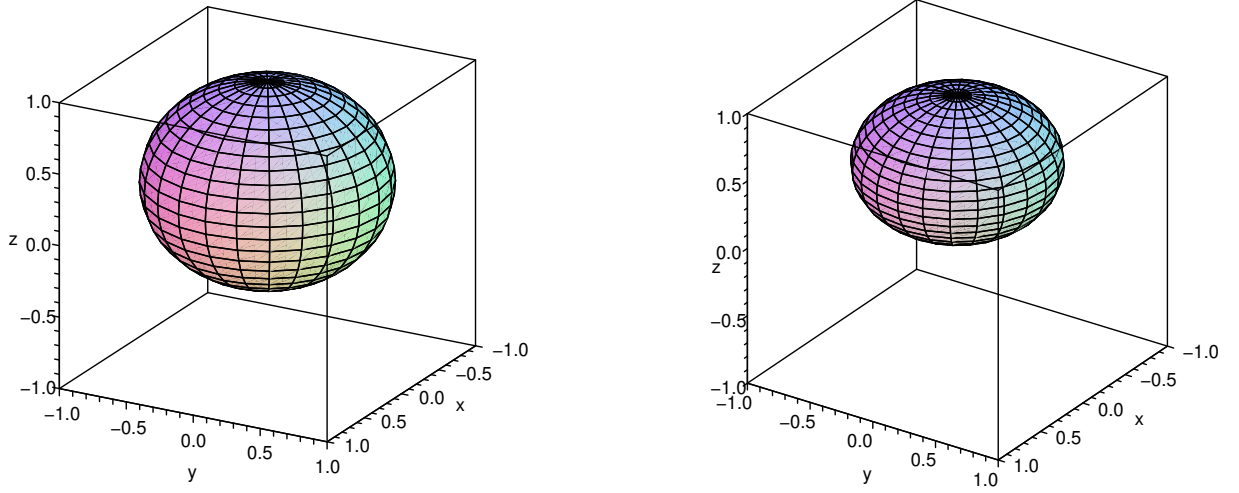


Fig. 3.14: Efeito da atenuação de amplitude com $p = 0.3$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (\frac{\sqrt{70}}{10}r_x, \frac{\sqrt{70}}{10}r_y, 0.3 + 0.7r_z)$, e para $p = 0.5$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (\frac{\sqrt{2}}{2}r_x, \frac{\sqrt{2}}{2}r_y, 0.5 + 0.5r_z)$.

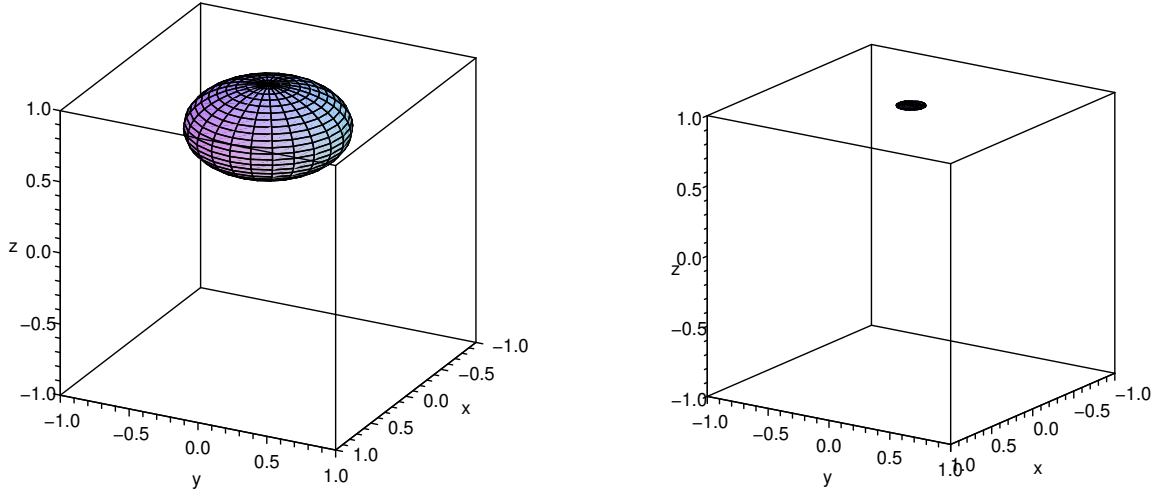


Fig. 3.15: Efeito da atenuação de amplitude para $p = 0.7$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (\frac{\sqrt{30}}{10}r_x, \frac{\sqrt{30}}{10}r_y, 0.7 + 0.3r_z)$, e para $p = 1$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (0, 0, 1)$.

A atenuação de amplitude pode ser generalizada, onde os elementos de operação são [17]:

$$E_0 = \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \sqrt{p} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$E_3 = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{bmatrix}.$$

Na representação de operador soma, temos:

$$\epsilon(\rho) = E_0 \rho E_0^\dagger + E_1 \rho E_1^\dagger + E_2 \rho E_2^\dagger + E_3 \rho E_3^\dagger.$$

Logo, teremos:

$$\begin{aligned} \epsilon(\rho) = & \left\{ \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix} + \\ & + \sqrt{p} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \sqrt{p} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{bmatrix} + \\ & + \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \} \\
& = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} p(1+r_z) & \sqrt{1-\gamma}(r_x - ir_y) \\ \sqrt{1-\gamma}(r_x + ir_y) & p(1-\gamma)(1-r_z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p\gamma(1-r_z) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\
& \quad \left. + \begin{bmatrix} (1-p)(1-\gamma)(1+r_z) & (1-p)\sqrt{1-\gamma}(r_x - ir_y) \\ (1-p)\sqrt{1-\gamma}(r_x + ir_y) & (1-p)(1-r_z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1-p)\gamma(1+r_z) \end{bmatrix} \right\} \\
& = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + (2p-1)\gamma + (1-\gamma)r_z & \sqrt{1-\gamma}(r_x - ir_y) \\ \sqrt{1-\gamma}(r_x + ir_y) & 1 - (2p-1)\gamma - (1-\gamma)r_z \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Igualando a $\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \hat{r}_z & \hat{r}_x - i\hat{r}_y \\ \hat{r}_x + i\hat{r}_y & 1 - \hat{r}_z \end{bmatrix}$, temos:

$1 + \hat{r}_z = 1 + (2p-1)\gamma + (1-\gamma)r_z$ implica que $\hat{r}_z = (2p-1)\gamma + (1-\gamma)r_z$, de $\hat{r}_x - i\hat{r}_y =$

$\sqrt{1-\gamma}(r_x - ir_y)$ e $\hat{r}_x + i\hat{r}_y = \sqrt{1-\gamma}(r_x + ir_y)$, temos $\hat{r}_x = \sqrt{1-\gamma}r_x$ e $\hat{r}_y = \sqrt{1-\gamma}r_y$.

Portanto $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x\sqrt{1-\gamma}, r_y\sqrt{1-\gamma}, \gamma(2p-1) + r_z(1-\gamma))$.

Ou seja, os estados são contraídos para pontos ao longo do eixo $\hat{z}$ por um fator $2p-1$.

Uma observação importante é que o estado $\rho_\infty = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}$ é invariante (estacionário) [17] pelos elementos de operação da atenuação de amplitude generalizada,

ou seja :

$\epsilon(\rho_\infty) = \rho_\infty$. De fato:

$$\begin{aligned}
\epsilon(\rho_\infty) &= \left\{ \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix} \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix} + \right. \\
&+ \sqrt{p} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \sqrt{p} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{bmatrix} + \\
&+ \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \\
&+ \left. \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \sqrt{1-p} \left\{ \begin{bmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & p(1-\gamma)(1-p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p\gamma(1-p) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\
&+ \left. \begin{bmatrix} p(1-\gamma)(1-p) & 0 \\ 0 & (1-p)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p(1-p)\gamma \end{bmatrix} \right\} \\
&= \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} = \rho_\infty.
\end{aligned}$$

O efeito da atenuação de amplitude generalizada pode ser visualizado na esfera de Bloch nas figuras abaixo.

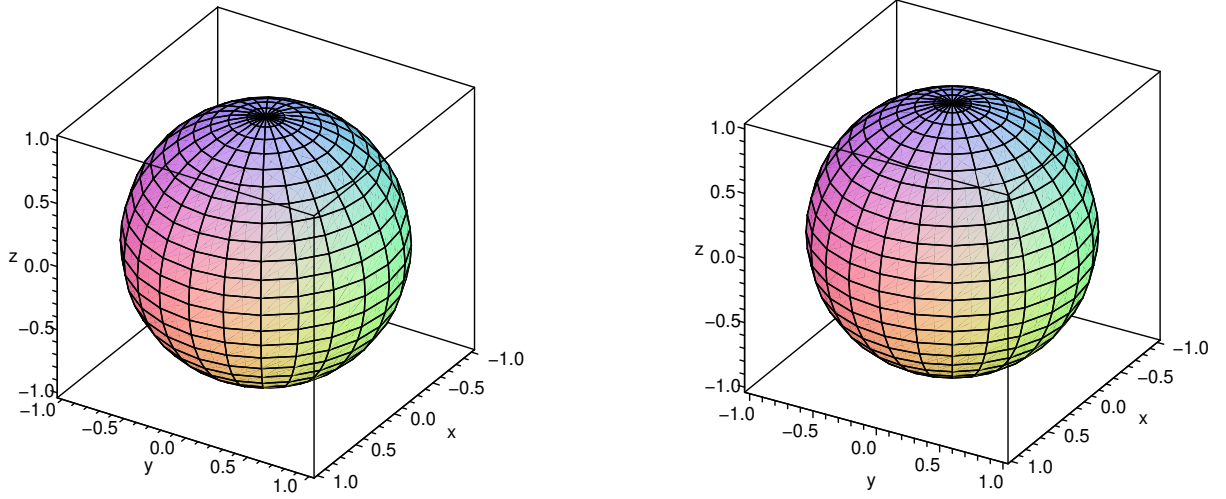


Fig. 3.16: Esfera de Bloch e o efeito da atenuação de amplitude generalizada com $p = 0$ e $\gamma = 0$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x, r_y, r_z)$, a própria Esfera de Bloch.

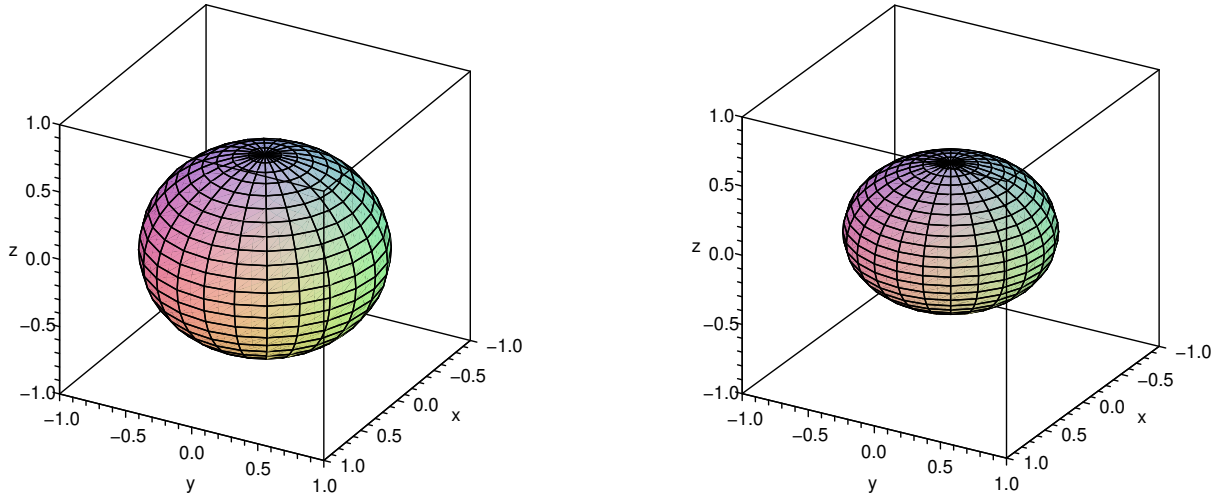


Fig. 3.17: Efeito da atenuação de amplitude generalizada para $p = 0.3$ e $\gamma = 0.3$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (\frac{\sqrt{70}}{10}r_x, \frac{\sqrt{70}}{10}r_y, -0.12 + 0.7r_z)$, e para $p = 0.5$ e $\gamma = 0.5$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (\frac{\sqrt{2}}{2}r_x, \frac{\sqrt{2}}{2}r_y, 0.5r_z)$.

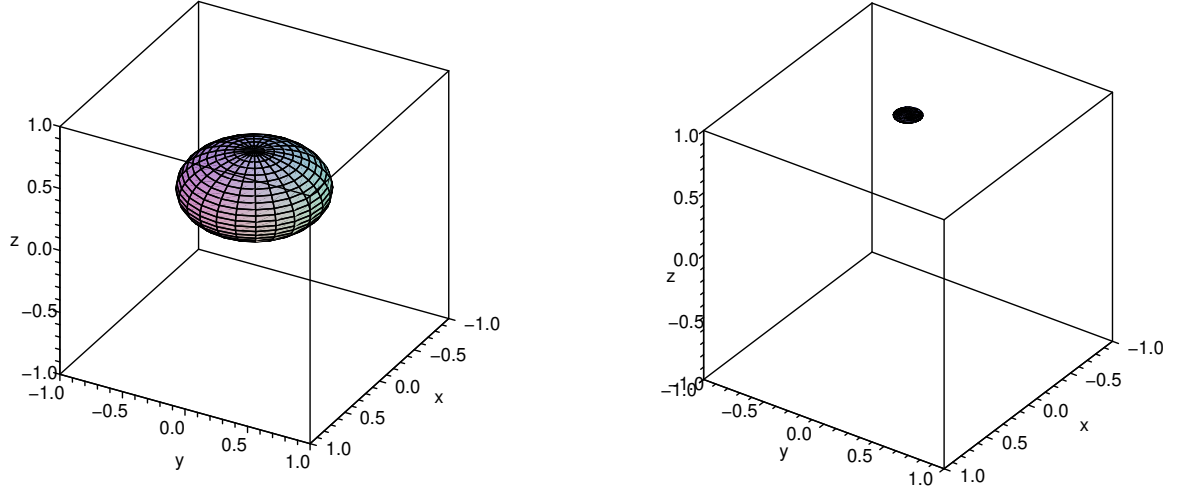


Fig. 3.18: Efeito da atenuação de amplitude generalizada para $p = 0.7$ e $\gamma = 0.7$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (\frac{\sqrt{30}}{10}r_x, \frac{\sqrt{30}}{10}r_y, 0.28 + 0.3r_z)$, e para $p = 1$ e $\gamma = 1$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (0, 0, 1)$.

Obs.: Note que se $p = 1$, na atenuação de amplitude generalizada, obtemos a atenuação de amplitude. Portanto, torna-se claro que a diferença entre as duas atenuações é somente em relação ao ponto fixo para onde se dá o fluxo; o estado final é ao longo do eixo z , no ponto $(2p - 1)$, que é um estado misto.

3.7 Canal de Atenuação de Fase

Um processo de ruído inteiramente quântico [1, 3, 17, 19], que descreve a perda de informação quântica sem perda de energia, é a atenuação de fase. Os elementos de operação são:

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{bmatrix}$$

e

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix},$$

onde λ pode ser interpretado como a probabilidade de um fóton do sistema ter sido espalhado (sem perda de energia). Como no caso da atenuação de amplitude, E_0 deixa $|0\rangle$ invariante, mas reduz a amplitude de $|1\rangle$. Contudo, de forma diferente da atenuação de amplitude, E_1 destrói $|0\rangle$ e reduz a amplitude $|1\rangle$, mas não o inverte para $|0\rangle$.

Iremos realizar agora os cálculos detalhados da operação quântica de atenuação de fase.

$$\begin{aligned} \epsilon(\rho) &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix} + \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+r_z & \sqrt{1-\gamma}(r_x - ir_y) \\ \sqrt{1-\gamma}(r_x + ir_y) & 1-r_z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Igualando a $\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \hat{r}_z & \hat{r}_x - i\hat{r}_y \\ \hat{r}_x + i\hat{r}_y & 1 - \hat{r}_z \end{bmatrix}$, temos:

$1 + \hat{r}_z = 1 + r_z$ implica que $\hat{r}_z = r_z$, de $\hat{r}_x - i\hat{r}_y = \sqrt{1 - \gamma}(r_x - ir_y)$ e $\hat{r}_x + i\hat{r}_y = \sqrt{1 - \gamma}(r_x + ir_y)$,

temos $\hat{r}_x = \sqrt{1 - \gamma}r_x$ e $\hat{r}_y = \sqrt{1 - \gamma}r_y$.

Logo, teremos: $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (\sqrt{1 - \gamma}r_x, \sqrt{1 - \gamma}r_y, r_z)$.

O efeito geométrico desse canal será descrito abaixo, para as probabilidades $p = 0$, $p = 0.3$, $p = 0.5$, $p = 0.7$ e $p = 1$.

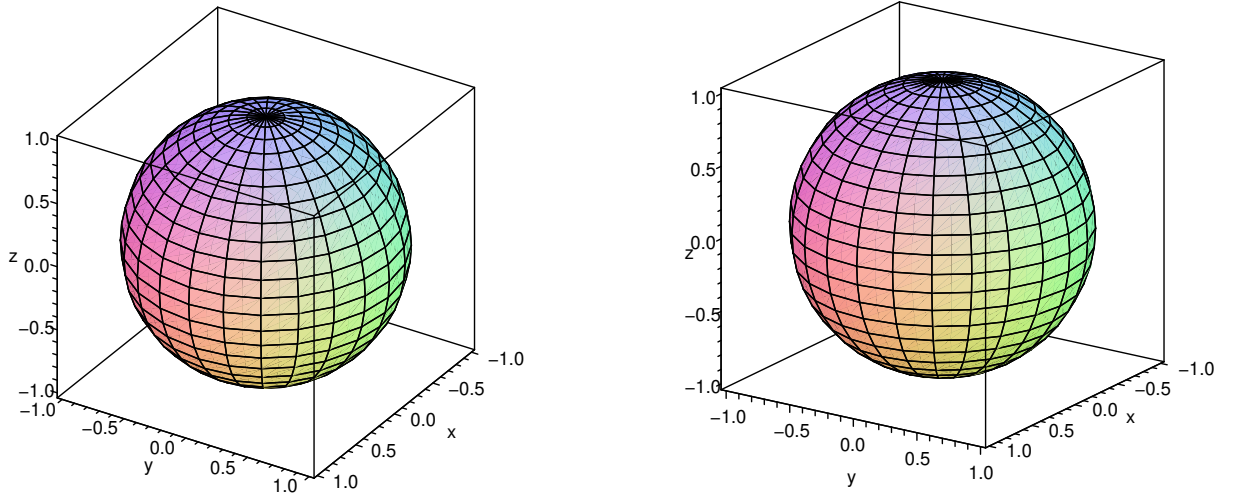


Fig. 3.19: Esfera de Bloch e o efeito da Atenuação de Fase com $p = 0$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (r_x, r_y, r_z)$, a própria Esfera de Bloch.

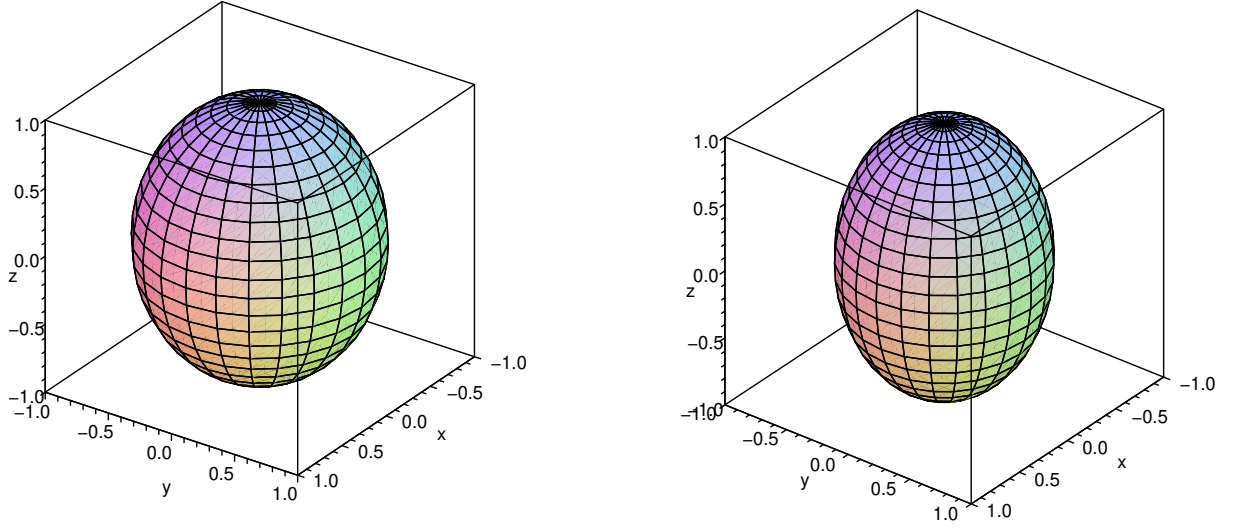


Fig. 3.20: Efeito da Atenuação de Fase para $p = 0.3$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (\frac{\sqrt{70}}{10}r_x, \frac{\sqrt{70}}{10}r_y, r_z)$, e para $p = 0.5$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (\frac{\sqrt{2}}{2}r_x, \frac{\sqrt{2}}{2}r_y, r_z)$.

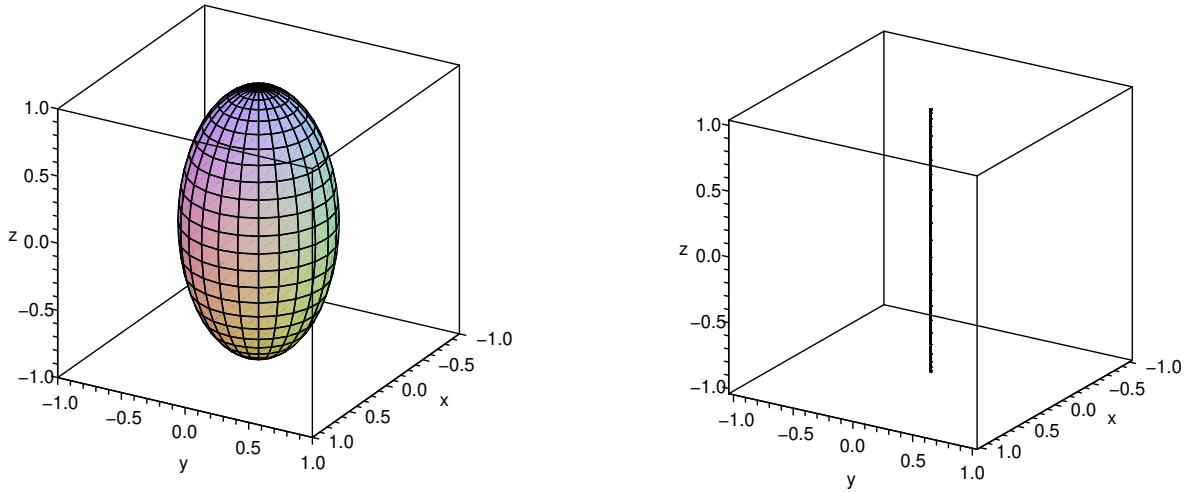


Fig. 3.21: Efeito da Atenuação de Fase para $p = 0.7$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (\frac{\sqrt{30}}{10}r_x, \frac{\sqrt{30}}{10}r_y, r_z)$, e para $p = 1$, ou seja $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z) = (0, 0, r_z)$.

Percebemos que a descrição geométrica do canal de atenuação de fase apresenta certa semelhança com o canal de inversão de fase. Na verdade, se usarmos os teoremas sobre liberdade na representação de operador soma do capítulo 2, conseguiremos uma recombinação dos elementos de operação, dados abaixo [1, 17]:

$$\hat{E}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha} \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{E}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\alpha} & 0 \\ 0 & -\sqrt{1-\alpha} \end{bmatrix},$$

onde $\alpha = \frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{2}$. Concluimos, então, que a operação quântica de atenuação de fase é exatamente a mesma do canal de inversão de fase, vista anteriormente.

Capítulo 4

Conclusões

Apresentamos nessa dissertação de mestrado uma aplicação de álgebra linear em ruídos quânticos, onde descrevemos detalhadamente os cálculos necessários para a representação geométrica de vários tipos de ruídos quânticos em canais quânticos, tais como, canal de inversão de q-bit, canal de inversão de fase, canal de inversão de q-bit e fase, canal de despolarização, canal de atenuação de amplitude e canal de atenuação de fase.

Um aspecto importante foi mostrar que, usando conceitos básicos de álgebra linear, podemos estudar um tópico importante da área de informação quântica, com ênfase na interpretação geométrica dos efeitos dos ruídos quânticos.

De uma maneira geral, acreditamos que uma possibilidade para estudo posterior seria investigar os aspectos algébricos e geométricos de canais quânticos para mais de um q-bit.

Um objetivo mais específico poderia ser direcionado para a obtenção de uma representação geométrica que explique todas as representações geométricas de ruídos quânticos obtidas neste trabalho. Essa idéia é baseada no fato de que uma operação quântica ϵ pode ser representada por [13]:

$$\epsilon(\rho) = U\phi(\rho)U^\dagger,$$

onde $U \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ é um operador unitário e $\phi : \mathbb{C}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ é uma transformação linear, cuja

representação matricial na base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

O fato mais importante é que a imagem de ϕ sobre ρ está associada a um elipsóide, dado por

$$\left(\frac{x_1 - t_1}{\lambda_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - t_2}{\lambda_2} \right)^2 + \left(\frac{x_3 - t_3}{\lambda_3} \right)^2 = 1,$$

e que o operador U , por sua vez, está associado a uma rotação desse elipsóide. Ou seja, podemos interpretar o efeito do canal quântico, descrito por ϵ , como uma deformação da esfera de Bloch em um elipsóide.

Bibliografia

- [1] J.F.F. Abreu. Computação quântica em sistemas abertos e uma aplicação ao modelo biológico de Fröhlich, Dissertação de mestrado, LNCC, maio de 2004.
- [2] H. Anton e C. Rorres. Álgebra linear com aplicações, BOOKAN, 2001.
- [3] F.M. Assis e R.A.C. Medeiros. Capacidade erro-zero de canais quânticos e estados puros, XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Campinas, setembro de 2005.
- [4] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo e H. Wetzler. Álgebra linear, Harba, 1984.
- [5] P. S. Bourdon and H. T. Willians. Unital quantum operations on the Bloch ball and Bloch region, arxiv.org, Quantum Physics, quant-ph/0308089v2, agosto de 2003.
- [6] G. A. Braga, L. M. Cioletti, M. O. T. Cunha e B.N.B. Lima. Entropia: Introdução à teoria matemática da informação, UFMG, 2004.
- [7] L.M. Carvalho, C. Lavor e V.S. Motta. Caracterização matemática e visualização da esfera de Bloch: ferramentas para computação quântica, Tendências em Matemática Aplicada e Computacional (TEMA), 2007, a ser publicado.
- [8] M. O. T. Cunha. Emaranhamento: Caracterização, manipulação e consequências, Tese de Doutorado, UFMG, 2005.
- [9] M. R. Dowling and M. A. Nielsen. The geometry of quantum computation, arxiv.org, Quantum Physics, quant-ph/0701004v1, dezembro de 2006.

- [10] R.P. Feynman, F.L. Vernon and R.W. Hellwarth. Geometrical representation of the Schöendinger equation for solving the MASER problem. *Journal of Applied Physics*, 28(1):49-52, January, 1957.
- [11] R.P. Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics* 21, 467-488, 1982.
- [12] K. Kato, M. Oto, H. Imai and K. Imai. Voronoi diagrams for pure 1-q-bit quantum states. *arxiv.org*, Quantum Physics, quant-ph/0604101v1, 2006.
- [13] C. King and M. B. Ruskai. Minimal entropy of states emerging from noisy quantum channels. *arxiv.org*, Quantum Physics, quant-ph/9911079v3, 2000.
- [14] C. Lavor. Um passeio pela teoria da informação (Clássica e Quântica), WECIQ, 2006.
- [15] C. Lavor, M. M. S. Alves, R. M. Siqueira e S. I. R. Costa. Uma introdução à teoria dos códigos, *Notas em Matemática Aplicada*, vol. 21, SBMAC, Campinas, 2006.
- [16] E. L. Lima. Álgebra linear, SBM, 1996.
- [17] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. Quantum computation and quantum information, Cambridge Univeristy Press, Cambridge, 2000.
- [18] R. Portugal, C. Lavor, N. Maculan e L. M. Carvalho. Uma Introdução à computação quântica, *Notas em Matemática Aplicada*, vol. 8, SBMAC, São Carlos, 2004.
- [19] J. Preskill. Quantum information and computation, Lectures notes, California Institute of Technology, unpublished, 1998.
- [20] D. C. Santos. Em busca de um entendimento completo acerca do emaranhamento, *Dissertação de mestrado*, UFMG, 2006.
- [21] P. W. Shor. Algorithms for quantum computation: discrete logarithm and factoring. In *Proc. 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 124-134, 1994.

- [22] P. W. Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on quantum computer. *SIAM Journal on Computing* 26, 1484-1509, 1997.