

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
TESE DE DOUTORAMENTO

Estabilidade de curvas tipo-tempo fechadas em
variedades lorentzianas

Autor: VALÉRIA MATTOS DA ROSA

Orientador: PROF. DR. PATRICIO A. LETELIER SOTOMAYOR

Título: Estabilidade de curvas tipo-tempo fechadas em variedades lorentzianas.

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por

Valéria Mattos da Rosa e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 9 de outubro de 2007



Prof. Dr. Patricio A. Letelier Sotomayor
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Patricio A. Letelier Sotomayor
2. Prof. Dr. Waldir A. Rodrigues Júnior
3. Prof. Dr. George E. A. Matsas
4. Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa
5. Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

Rosa, Valéria Mattos da
R71e Estabilidade de curvas tipo-tempo fechadas em variedades
lorentzianas / Valéria Mattos da Rosa -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Patricio Aníbal Letelier Sotomayor
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Estabilidade linear. 2. Curvas tipo-tempo fechadas. 3. Geodésicas
tipo-tempo fechadas. 4. Máquinas do tempo. I. Sotomayor, Patricio
Aníbal Letelier. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Stability of closed timelike curves in Lorentzian manifolds

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Linear stability. 2. Closed timelike curves. 3. Closed
timelike geodesics. 4. Time machines.

Área de concentração: Física-Matemática

Titulação: Doutora em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Patricio Aníbal Letelier Sotomayor (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Waldir Alves Rodríguez Junlor (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. George Emanuel Abraham Matsas (UNESP)
Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin (UFABC)

Data da defesa: 09/10/2007

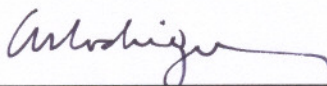
Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 09 de outubro de 2007 e aprovada

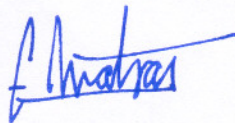
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



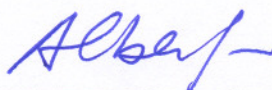
Prof. (a). Dr (a). PATRÍCIO ANÍBAL LETELIER SOTOMAYOR



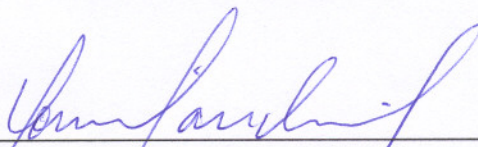
Prof. (a). Dr (a). WALDIR ALVES RODRIGUES JÚNIOR



Prof. (a). Dr (a). GEORGE EMANUEL AVRAAM MATSAS



Prof. (a). Dr (a). ALBERTO VAZQUEZ SAA



Prof. (a) Dr. (a) VILSON TONIN ZANCHIN

“Just think of all those hungry mouths we have to feed
Take a look at all the suffering we breed
So many lonely faces scattered all around
Searching for what they need.
Is this the world we created, what did we do it for
Is this the world we invaded, against the law
So it seems in the end
Is this what we’re all living for today
The world that we created.
You know that everyday a helpless child is born
Who needs some loving care inside a happy home
Somewhere a wealthy man is sitting on his throne
Waiting for life to go by.
Is this the world we created, we made it on our own
Is this the world we devastated, right to the bone
If there’s a God in the sky looking down
What can he think of what we’ve done
To the world that He created.” (Queen)

Dedico esta tese à minha irmã Marília,
que trabalhou para tornar este,
um mundo melhor.

Agradecimentos

“Exaltar-te-ei o Senhor, porque tu me exaltaste, e não fizeste com que meus inimigos se alegrassem sobre mim.” (Sl 30,2)

Agradeço, inicialmente, ao Prof. Patricio A. Letelier a orientação séria, completa e de qualidade inquestionável.

Agradeço a todos os amigos, cuja amizade tornou o caminho menos árduo. Em especial, quero agradecer ao Luis Alberto, cuja intervenção no momento certo foi providencial.

Gostaria de agradecer a todos os funcionários do IMECC/Unicamp e do DMA/UFV. E também a todos os meus colegas do Departamento de Matemática da UFV, que nunca deixaram de me incentivar. Em especial à Lucy e ao Frederico.

Agradeço aos meus pais Simplício e Maria José, que me ensinaram a não desistir, e meus irmãos Patrícia e Renato, que me ajudaram a prosseguir.

Finalmente, agradeço o apoio financeiro do PICDT-CAPES.

“Até aqui nos tem ajudado o Senhor.” (1Sm 7,12b)

Resumo

Várias soluções das equações de Einstein admitem curvas tipo-tempo fechadas (CTCs). Estudamos o comportamento deste tipo de curva quanto à estabilidade linear. Analisando as CTCs no universo de Gödel, encontramos que elas são linearmente estáveis, assim como as curvas desse tipo encontradas em um exemplo particular de métrica tipo-Gödel com fundo plano. As CTCs que aparecem no modelo contendo uma única corda cósmica girante também apresentam estabilidade linear. Estudamos todos os exemplos conhecidos de soluções das equações de Einstein que possuem geodésicas tipo-tempo fechadas (CTGs). Encontramos que a CTG apresentada pelos autores da solução dos dois perjeons não é linearmente estável, mas obtivemos condições, para os parâmetros desse modelo, sob as quais ela admite outras CTGs e, sob condições mais restritivas, obtivemos CTGs linearmente estáveis. As CTGs apresentadas por Soares em seu modelo topológico e por Grøn e Johannesen em seu modelo da núvem de cordas não possuem estabilidade linear. Já as CTGs de uma das soluções dada por van Stockum foram analisadas e verificamos que são linearmente estáveis. Encontramos CTGs em um exemplo particular de métrica tipo-Gödel com fundo conformemente plano, e estas também são estáveis. Analisamos, também, a deformação provocada pelo buraco negro de Schwarzschild ao ser colocado em um espaço-tempo com uma corda cósmica girante. Encontramos as CTGs desse espaço-tempo e determinamos as condições para que estas sejam estáveis.

Abstract

Several solutions of Einstein's field equations admit closed timelike curves (CTCs). We study the linear stability of this kind of curve. We analyze the CTCs in Gödel universe and we find that these curves are stable. The same occurs with the CTCs of a particular case of Gödel-type metric with flat background and with CTCs of a model that contains a single spinning cosmic string. We study all known solutions of Einstein's equations that contain closed timelike geodesics (CTGs). We find that the CTG presented by Bonnor and Steadman in their model of two Perjeons is not stable under linear perturbations, but we present conditions to have stable CTGs in this model. The CTGs presented by Soares in his topological model and those presented by Grøn and Johannensen in their model of the cloud of strings are not stable. But, analyzing the CTGs presented by Steadman in a solution gave by van Stockum, we conclude that these curves are stable. Besides these known CTGs, we find this kind of curve in a particular case of Gödel-type metric with conformally flat background and we also find that they are stable. We also study the deformation that a Schwarzschild black hole causes in the spacetime of a single spinning cosmic string. We find the CTGs of this new spacetime and we determine conditions to have linear stability.

Sumário

1	Introdução	1
2	Relatividade Geral	7
2.1	Equações da relatividade geral	7
2.2	O tensor energia-momento	9
2.3	Estabilidade linear	10
2.4	Soluções das Equações de Einstein.	11
3	Aspectos Matemáticos	31
4	Conjectura da Proteção à Cronologia e Buracos de Minhoca	39
4.1	Buracos de minhoca	39
4.2	Conjectura da Proteção à Cronologia	40
5	Resultados	43
5.1	O universo de Gödel.	43
5.2	Os perjeons - Quase uma máquina do tempo.	44
5.3	As CTGs em vários outros exemplos.	45
5.4	O buraco negro espetado.	46

6	Conclusão e Perspectivas	49
A	Stability of Closed Timelike Curves in Gödel Universe.	57
B	Stability of Closed Timelike Geodesics.	79
C	Spinning Strings, Black Hole and Stable Closed Timelike Geodesics.	89
D	Stability of Closed Timelike Geodesics in different Spacetimes.	101

Introdução

A primeira descrição científica do tempo foi feita em 1689, por Sir Isaac Newton. Na teoria de Newton o tempo era absoluto e passava incessantemente. Não havia como dar a volta e retornar para um tempo anterior. Mas a situação se modificou quando Einstein formulou a sua teoria da relatividade geral, em 1915. O tempo agora estava ligado ao espaço em uma nova entidade denominada espaço-tempo. O espaço-tempo não era um local fixo e absoluto onde os eventos tinham lugar. Ao contrário, espaço e tempo tornavam-se dinâmicos nas equações de Einstein, que descreviam como a matéria e a energia do universo os curvavam e os distorciam. O tempo sempre se somava, em cada lugar, mas havia agora a possibilidade de que o espaço-tempo se curvasse de tal modo que uma pessoa pudesse seguir um caminho que a trouxesse de volta antes que ela tivesse partido [1].

Uma forma de se fazer essa viagem seria utilizar um buraco de minhoca, tubos hipotéticos de espaço-tempo que podem conectar diferentes regiões do espaço e do tempo. A idéia é entrar por uma boca do buraco de minhoca e sair pela outra em um lugar diferente e em um tempo diferente [2]. Outra forma seria encontrar uma curva tipo-tempo fechada no nosso espaço-tempo.

Em relatividade geral, uma curva tipo-tempo no espaço-tempo representa um possível caminho de um objeto físico. Normalmente tal curva corre do passado para o futuro, mas em

alguns espaço-tempos tais curvas podem se interceptar suavemente, gerando um laço temporal, ou uma *curva tipo-tempo fechada* (CTC¹) [3]. Já que todos os eventos são funções do espaço-tempo, todos os acontecimentos ao longo da CTC são periódicos com um período dado pela integral sobre a diferencial do parâmetro que mede o tempo próprio tomada de um evento inicial indo para frente, e então, voltando a esse evento. A noção de causalidade e a crença no livre arbítrio, a habilidade de afetar o futuro mas não o passado, são mudadas pela existência das curvas tipo-tempo fechadas. Além dos paradoxos usuais, parece que a existência de CTCs induz a impossibilidades físicas, como a necessidade de se trabalhar com densidade de energia negativa. Poderia se especular que essas impossibilidades seriam eliminadas por efeitos quânticos-gravitacionais, mas pelo que sabemos até agora, nossa experiência parece indicar que as leis da física não permitem o aparecimento de CTCs. Isto é o que, essencialmente, diz a Conjectura da Proteção à Cronologia (CPC) proposta por Hawking em 1992 [4].

A princípio, a existência de CTCs foi tomada como mera curiosidade proveniente das equações de Einstein já que as primeiras métricas estudadas que continham estas curvas eram não-realistas [3]. Em 1949 Gödel encontrou uma solução para as equações de campo de Einstein com constante cosmológica não-nula que admite curvas tipo-tempo fechadas [5]. Pode-se argumentar que a solução de Gödel não tenha significado físico, já que corresponde a uma cosmologia estacionária em rotação, embora o universo atual esteja em expansão e aparentemente não esteja em rotação. A solução de van Stockum [6], que também contém CTCs, é fisicamente inadmissível pois se refere a um cilindro infinitamente longo. Mas já são conhecidos exemplos de soluções das equações de Einstein no vácuo, as quais contêm CTCs, que podem representar o exterior de fontes fisicamente admissíveis [7] [8]. Em [7] é descrito o caso de uma barra sem massa de comprimento finito em rotação. Em [8] é analisada as CTCs no espaço-tempo de Kerr-Newman e numa solução para as equações de Einstein chamada de Perjeon, devido à Perjés [9], a qual representa um objeto carregado, magnetizado, em rotação. Esta solução foi também estudada independentemente por Israel e Wilson [10]. Refere-se a ela como um espaço-tempo PIW.

¹*closed timelike curve*

Em alguns casos as CTCs podem ser descartadas, ou porque a fonte cobre a região onde elas aparecem, ou porque para tê-las precisamos de uma força externa atuando ao longo de toda curva, processo que poderá consumir uma grande quantidade de energia. A energia necessária para se viajar numa CTC no universo de Gödel, por exemplo, é calculada em [11]. Mas esse não é o caso para geodésicas já que a força externa é nula. Conseqüentemente, as considerações sobre energia não se aplicam neste caso e temos, então, potencialmente, um problema de quebra da causalidade ainda maior.

Pelo que conhecemos, só existem quatro soluções das equações de Einstein geradas por matéria com densidade de energia positiva, isto é, que satisfaçam à condição fraca de energia [12], que contém geodésicas tipo-tempo fechada (CTGs²), são elas: (a) Soares [13] encontrou uma classe de modelos cosmológicos, soluções das equações de Einstein-Maxwell, com uma subclasse onde os caminhos tipo-tempo da matéria são fechados. Para esse modelo a existência de CTGs é demonstrada e exemplos são dados explicitamente. (b) Steadman [14] descreveu o comportamento de CTGs em um vácuo exterior da solução de van Stockum para um cilindro de poeira infinito em rotação. Para essa solução são mostrados exemplos de CTCs e CTGs explicitamente. (c) O caso de uma métrica tipo-Gödel com “fundo” conformemente plano é estudado em [15], a existência de CTGs neste modelo é demonstrada no presente trabalho. (d) O caso com dois pérjeons dado em [8] onde é exibida uma CTG explicitamente. Como um exemplo do problema da quebra da causalidade, temos em [16] CTGs em um espaço-tempo associado a uma nuvem de cordas, mas para termos um espaço-tempo conexo a densidade de energia deve ser negativa.

A existência de CTCs em um espaço-tempo cuja fonte é uma corda girante tem sido investigada por muitos autores (veja por exemplo [17]-[20]). A interpretação dessas cordas como defeitos de linha de torção podem ser encontrada em [21], veja também [22][23]. Esses objetos aparecem de forma natural quando se tenta estabilizar dois buracos negros mantidos a parte pela repulsão de spin [25]. Essas linhas de torção parecem ser responsáveis pelo aparecimento das CTCs em vários casos estudados.

²*closed timelike geodesics*

A existência física das CTCs é um problema de experimentação. Caso seja possível encontrá-las será necessário rever a nossa noção de causalidade. Caso elas não possam ser encontradas em um modelo fisicamente viável previsto pela Relatividade Geral essa teoria então apresenta grandes problemas.

Mas um fato que constatamos é que não podemos eliminar as CTCs por questões dinâmicas, pois encontramos que elas são estáveis, na sua grande maioria, após perturbações lineares. Para chegarmos a essa conclusão estudamos o comportamento dessas curvas em vários modelos, realistas ou não. Encontramos que as CTCs no universo de Gödel são linearmente estáveis, assim como as curvas desse tipo encontradas em um exemplo particular de métrica tipo-Gödel com fundo plano. Também encontramos estabilidade linear nas CTCs do modelo contendo uma corda cósmica girante. Na análise de geodésicas tipo-tempo fechadas, esgotamos todos os exemplos conhecidos de soluções da equação de Einstein que possuíssem esse tipo de curva. Encontramos que a CTG apresentada pelos autores da solução dos dois pérjeons não é linearmente estável, mas obtivemos condições, para os parâmetros desse modelo, sob as quais ele admite outras CTGs e, sob condições mais restritivas, obtivemos CTGs linearmente estáveis. Nos casos do modelo topológico de Soares e da núvem de cordas de Grøn e Johannesen, verificamos que as CTGs por eles apresentados não possuem estabilidade linear. Já as CTGs de uma das soluções dada por van Stockum foram analisadas e verificamos que são linearmente estáveis. Encontramos CTGs em um exemplo particular de métrica tipo-Gödel com fundo conformemente plano, e estas também são estáveis. Analisamos, também, a deformação provocada pelo buraco negro de Schwarzschild ao ser colocado em um espaço-tempo com uma corda cósmica girante. Encontramos as CTGs desse espaço-tempo e determinamos as condições para que estas sejam estáveis.

Este trabalho se divide da seguinte forma: No Capítulo 1 introduzimos os conceitos básicos de relatividade geral e estabilidade linear utilizados. No Capítulo 2 fizemos uma rápida revisão sobre as condições usuais para um espaço-tempo ser causalmente bem definido globalmente e de como o problema da existência de CTGs em variedades lorentzianas é tratado na literatura matemática. No Capítulo 3 descrevemos uma outra forma de se viajar no tempo, os buracos de

minhoca, e a maior opositora à construção das máquinas do tempo, a Conjectura da Proteção à Cronologia. No Capítulo 4 é exposto um resumo do estudo de casos que fizemos, que são encontrados nos anexos e que foram brevemente descritos nesta introdução. Por fim, no Capítulo 5, fechamos o trabalho com conclusões e perspectivas.

Relatividade Geral

2.1 Equações da relatividade geral

Segundo o princípio de equivalência, junto a pontos não singulares sempre existe uma transformação de coordenadas capaz de anular o “campo gravitacional” localmente, tal que o espaço-tempo, composto de três coordenadas espaciais e uma temporal, é aproximado neste local pelo espaço-tempo de Minkowski da relatividade especial. A incorporação do campo gravitacional na relatividade é então feita através da curvatura do espaço-tempo realizado como uma variedade 4-dimensional pseudo-riemanniana com assinatura $(+, -, -, -)$, a mesma da métrica de Minkowski.

Neste Capítulo convencionamos que índices gregos vão de 0 a 3, índices latinos vão de 1 a 3 e índice repetidos são somados de acordo com a convenção de Einstein. Escolhemos as unidades nas quais $G = 1$ e $c = 1$, onde G é a constante gravitacional, e c é a velocidade da luz no vácuo.

O produto de dois vetores, bem como a distância entre pontos vizinhos do espaço-tempo, são definidos por um tensor simétrico de ordem 2, o tensor métrico (ou simplesmente métrica):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

onde $g_{\mu\nu}$ são funções das coordenadas x^α que parametrizam a variedade. Tal como no caso de Minkowski, ds^2 pode assumir valores positivos, negativos ou nulos. A métrica define proprie-

dades locais do espaço-tempo. As propriedades globais dependem também da escolha de uma topologia compatível com (2.1).

A equação de movimento de uma partícula-teste em um campo gravitacional definido pela métrica (2.1) pode ser obtida a partir do princípio variacional

$$\delta \int ds = 0. \quad (2.2)$$

O resultado é a equação da geodésica que, para uma escolha adequada do parâmetro τ , pode ser escrita como

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.3)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ é o símbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\delta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\delta} \right), \quad (2.4)$$

e $g^{\mu\nu}$ denota as componentes contravariantes do tensor métrico, obtidas pela inversão da matriz $g_{\mu\nu}$.

Na Eq.(2.3) o parâmetro τ , chamado de parâmetro afim, pode ser identificado como o tempo-próprio da partícula. No caso geral temos a equação

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = \lambda \frac{dx^\alpha}{d\sigma}, \quad (2.5)$$

onde λ é função de x^μ , $dx^\mu/d\sigma$ e $d^2 x^\mu/d\sigma^2$.

A métrica, por sua vez, é descrita pelas equações de Einstein,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (2.6)$$

onde

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^\mu \text{ e } R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (2.7)$$

são o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente;

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha + \Gamma_{\beta\delta}^\mu \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \Gamma_{\mu\delta}^\alpha. \quad (2.8)$$

são as componentes do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, com a vírgula denotando derivação parcial e $T_{\alpha\beta}$ é o tensor energia-momento.

As equações de Einstein descrevem a interação entre o campo gravitacional, representado pelos termos de curvatura no lado esquerdo da Eq.(2.6), e a distribuição de matéria representada pelo tensor de energia-momento. Estas equações admitem soluções não triviais mesmo quando $T_{\alpha\beta}$ é identicamente nulo. Do ponto de vista matemático, (2.6) forma um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares acopladas. Em geral estas equações só podem ser resolvidas numericamente. Soluções analíticas são obtidas somente em casos particulares, tipicamente quando o sistema apresenta alguma simetria.

2.2 O tensor energia-momento

Em um universo realista o tensor energia-momento deverá ser constituído por contribuições de um grande número de diferentes campos de matéria. Dessa forma, não é simples descrever exatamente o tensor energia-momento mesmo se conhecemos a forma precisa da contribuição isolada de cada campo de matéria e as equações de movimento que os governam, já que podemos ter iterações entre os campos e a matéria. Entretanto, existem certas desigualdades que são fisicamente razoáveis de se assumir para o tensor energia-momento. Elas são, em muitas circunstâncias, suficientes para excluir certas soluções das equações de Einstein como não realistas, independentemente da forma exata do tensor energia-momento [12]. A primeira dessas desigualdades nos dá a *condição de energia fraca*. O tensor energia-momento $T_{\alpha\beta}$ em cada ponto p do espaço-tempo M obedece à desigualdade $T_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \geq 0$ para todo vetor tipo-tempo $\mathbf{u} \in T_p M$. Por continuidade isso também deve ser verdadeiro para todo vetor nulo $\mathbf{u} \in T_p M$ [12].

Para um observador cuja linha-mundo em p tem vetor tangente unitário $\mathbf{v}$, a densidade de energia local é $T_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta$. Assim, supor a desigualdade anterior é equivalente a dizer que a densidade energia medida por qualquer observador é não-negativa, o que é aceitável do ponto de vista da física clássica [12].

Se uma condição sutilmente mais forte é imposta, então a criação é impossível no sentido de que o espaço-tempo deve permanecer vazio se ele está vazio em algum momento e nenhuma

matéria vem do infinito. Reciprocamente, matéria presente em algum momento não pode desaparecer e conseqüentemente deve estar presente em outro momento. Esta é a *condição de energia dominante*, que diz que dado um vetor tipo-tempo $\mathbf{w}$, então $T_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta \geq 0$ e $T_{\alpha\beta}w^\alpha$ não é um vetor tipo-espaço. Isto pode ser interpretado como dizendo que a qualquer observador a densidade de energia local parece não-negativa e o vetor do fluxo de energia local não é tipo-espaço. Uma afirmação equivalente é que em qualquer base ortonormal a energia domine as outras componentes de $T_{\alpha\beta}$, isto é, $T^{00} \geq |T^{\alpha\beta}|$ para cada α e β . Em outras palavras, a condição de energia dominante é a condição de energia fraca com o requerimento adicional que a pressão, ou a tensão, não deve exceder a densidade de energia [12].

A importância da condição de energia fraca é que ela implica que a matéria sempre tem um efeito de convergência (pelo menos de não-divergência) sobre as geodésicas nulas, isto é, a gravidade é uma força atrativa. Dizemos que o tensor energia-momento satisfaz a *condição de energia forte* se dado um vetor tipo-tempo $\mathbf{w}$, então $T_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta \geq w^\alpha w_\alpha T/2$ [12].

2.3 Estabilidade linear

Como é conhecido da Teoria da Relatividade Geral a equação do desvio geodésico toma a forma:

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{ds^2} + R^\mu_{\alpha\beta\nu} u^\alpha u^\beta \xi^\nu = 0, \quad (2.9)$$

onde D/ds é a derivada covariante, $R^\mu_{\alpha\beta\nu}$ é o tensor de curvatura, $u^\nu = dx^\nu/ds$ é o 4-vetor da velocidade tangencial à geodésica, e o desvio dela é dado por um 4-vetor com norma muito pequena ξ^ν . De acordo com as regras da diferenciação covariante temos

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{ds^2} = \frac{d^2 \xi^\mu}{ds^2} + 2\Gamma^\mu_{\nu\alpha} u^\nu \frac{d\xi^\alpha}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\lambda} u^\nu \xi^\alpha u^\lambda - \Gamma^\mu_{\nu\alpha} \Gamma^\nu_{\beta\delta} u^\beta u^\delta \xi^\alpha + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha_{\beta\delta} u^\nu u^\delta \xi^\beta. \quad (2.10)$$

Por outro lado temos que

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} u^\beta u^\gamma \xi^\delta = [\Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\mu_{\beta\delta} \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha_{\mu\delta}] u^\beta u^\gamma \xi^\delta. \quad (2.11)$$

Agora, substituindo (2.10) e (2.11) em (2.9), temos uma expressão relativamente simples para o desvio geodésico, como a que se segue

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{ds^2} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha \frac{d\xi^\beta}{ds} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\lambda} u^\alpha u^\beta \xi^\lambda = 0. \quad (2.12)$$

Uma curva generica γ satisfaz o sistema de equações dado por

$$\frac{D}{ds}\dot{X}^\mu = F^\mu(X), \quad (2.13)$$

onde $\frac{D}{ds}() é a derivada covariante do campo de vetores $()^\alpha$ ao longo de $\gamma(s)$ e F^μ é uma força externa dada.$

Seja $\tilde{\gamma}$ a curva obtida de γ após uma perturbação ξ , isto é, $\tilde{X}^\mu = X^\mu + \xi^\mu$. Seja e_α uma base dada. Nesta base (2.13) é representado pela equação $\frac{D\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{F}$, onde $\frac{D\mathbf{u}}{ds} = (\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha u^\beta u^\mu)e_\alpha$, $\mathbf{F} = F^\alpha e_\alpha$, $\mathbf{u} = u^\alpha e_\alpha$ e $u^\alpha = \dot{X}^\alpha$. De forma a estabelecer o comportamento de ξ calculamos a variação, em primeira aproximação, de ambos os lados de $\frac{D\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{F}$. Encontramos,

$$\frac{\delta D\mathbf{u}}{ds} = \left(\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2} + 2\Gamma_{\beta\mu}^\alpha \frac{d\xi^\beta}{ds} u^\mu + \Gamma_{\beta\mu,\lambda}^\alpha \xi^\lambda u^\beta u^\mu\right)e_\alpha + F^\alpha \delta e_\alpha \quad (2.14)$$

$$\delta \mathbf{F} = F^\alpha{}_{,\beta} \xi^\beta e_\alpha + F^\alpha \delta e_\alpha. \quad (2.15)$$

onde $()_{,\lambda} = \frac{\partial ()}{\partial x^\lambda}$. Comparando as duas últimas equações chegamos ao sistema de equações diferenciais satisfeito pela perturbação ξ

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2} + 2\Gamma_{\beta\mu}^\alpha \frac{d\xi^\beta}{ds} u^\mu + \Gamma_{\beta\mu,\lambda}^\alpha \xi^\lambda u^\beta u^\mu = F^\alpha{}_{,\beta} \xi^\beta. \quad (2.16)$$

Esta última equação pode ser colocada em uma forma covariante notando-se que seu lado esquerdo é a bem conhecida equação do desvio geodésico como colocado acima [27] e seu lado direito é a derivada de Lie da força ao longo de ξ^μ .

2.4 Soluções das Equações de Einstein.

Apresentamos a seguir algumas soluções das equações de Einstein que contêm CTCs.

O universo de Gödel.

Todas as soluções cosmológicas com densidade de matéria não-nula conhecidas, na época em que Gödel desenvolveu a sua solução, tinham em comum a propriedade de que, de certo modo, elas continham uma coordenada de tempo “absoluto”, devido ao fato que existia um sistema de variedades espaciais tridimensionais a um parâmetro ortogonais em toda parte às linhas-mundo

da matéria. A não existência de um sistema desse tipo é equivalente à rotação da matéria com relação ao compasso de inércia. Gödel propôs uma solução que exibia essa rotação [5]. Em seu modelo, a velocidade angular desta rotação é proporcional à raiz quadrada da densidade de matéria [5][12].

O universo de Gödel é um espaço-tempo no qual a matéria toma a forma de um fluido sem pressão com constante cosmológica negativa. Este universo é a solução das equações de campo de Einstein mais celebrada que contém curvas tipo-tempo fechadas (CTCs). O espaço-tempo tem um grupo de isometrias de dimensão cinco que é transitivo [28]. Condições dinâmicas para viagem no tempo neste espaço-tempo não são suficientes para excluir a existência de CTCs [11].

No espaço-tempo de Gödel as geodésicas tipo-tempo não podem ser fechadas, como foi demonstrado independentemente por Kunt [29] e Chandrasekhar e Wrigth [30]. Entretanto existem curvas tipo-tempo sujeitas a uma força externa que são fechadas.

Seja o elemento de linha

$$ds^2 = a^2((dx^0)^2 - (dx^1)^2 + \frac{e^{2x^1}}{2}(dx^2)^2 - (dx^3)^2 + 2e^{x^1}dx^0dx^2), \quad (2.17)$$

onde a é um número positivo. A inversa de $g_{\mu\nu}$ é dada por

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2}[-\delta_\mu^0\delta_\nu^0 - \delta_\mu^1\delta_\nu^1 - \delta_\mu^2\delta_\nu^2e^{-2x^1} - \delta_\mu^3\delta_\nu^3 + 2\delta_\mu^0\delta_\nu^2e^{-x^1}]. \quad (2.18)$$

Baseando-se no fato de que as únicas derivadas parciais da métrica $g_{\mu\nu}$ em relação às coordenadas são $\partial g_{02}/\partial x^1$ e $\partial g_{22}/\partial x^1$, os símbolos de Christoffel são facilmente computados. Os elementos não-nulos são dados a seguir:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= 1, \quad \Gamma_{12}^0 = \Gamma_{02}^1 = \frac{e^{x^1}}{2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{e^{2x^1}}{2}, \quad \Gamma_{01}^2 = -e^{-x^1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Usando para o cálculo do tensor de Ricci a expressão

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \frac{\partial^2 \ln g}{2\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{\partial \ln g}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\mu\tau}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\tau, \quad (2.20)$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$ e levando em conta que a única derivação parcial não-nula é em relação a x^1 e que $g = (a^8/2)e^{2x^1}$, reescrevemos o tensor de Ricci como

$$R_{\mu\nu} = \partial_1 \Gamma_{\mu\nu}^1 + \Gamma_{\mu\nu}^1 - \Gamma_{\mu\tau}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\tau. \quad (2.21)$$

Isso nos leva que as componentes não-nulas de $R_{\mu\nu}$ são dadas por

$$R_{00} = 1, \quad R_{22} = e^{2x^1}, \quad R_{02} = e^{x^1}. \quad (2.22)$$

Então o escalar de Ricci é dado por $R = 1/a^2$. O vetor unitário u^μ na direção das x^0 -linhas é dado por $u^\mu = [1/a, 0, 0, 0]$ e assim $u_\mu = [a, 0, e^{x^1}, 0]$. Desse modo podemos escrever

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} u_\mu u_\nu. \quad (2.23)$$

Como, além disso, R é constante, as equações de campo relativísticas (com as x^0 -linhas como sendo as linhas mundo da matéria), ou seja, as equações

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi \rho u_\mu u_\nu + \lambda g_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

são satisfeitas (para uma densidade de matéria ρ dada) se colocarmos

$$\frac{1}{a^2} = 8\pi \rho, \quad \lambda = -\frac{R}{2} = -\frac{1}{a^2}. \quad (2.25)$$

Para determinar a região do espaço-tempo que contém CTCs é mais simples trabalhar com a métrica nas coordenadas de Gödel. Seja o elemento de linha:

$$ds^2 = \frac{4}{a^2} (dt^2 - dr^2 + (\sinh^4 r - \sinh^2 r) d\phi^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2 r dt d\phi). \quad (2.26)$$

Seja uma curva fechada γ dada sua na forma paramétrica por:

$$t = t_0, \quad r = r_0, \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad z = z_0, \quad (2.27)$$

onde t_0 , r_0 e z_0 são constante. A curva fechada é tipo-tempo quando $g_{\phi\phi} > 0$, isto é,

$$\sinh^4 r_0 - \sinh^2 r_0 > 0 \Rightarrow \sinh^2 r_0 - 1 > 0. \quad (2.28)$$

A desigualdade (2.28) é satisfeita para $r_0 > \ln(\sqrt{2}+1)$. A única componente não nula da quadri-aceleração é $a^r = 8 \sinh^2 r_0 \cosh^2 r_0 (2 \sinh r_0 - 1)/a^2$, e $a^r = 0$ quando $r_0 = \ln(1 + \sqrt{5}) - \ln 2 < \ln(1 + \sqrt{2})$, logo não há geodésica fechada que seja tipo-tempo.

As métricas tipo-Gödel.

As métricas tipo-Gödel foram introduzidas no intuito de produzir soluções com poeira carregada em várias dimensões, D [15]. Aqui o nosso interesse se restringe às soluções quadridimensionais, $D = 4$. A característica principal de uma métrica tipo-Gödel é a geometria tridimensional riemanniana, tomada como o “fundo”, a qual é empregada na construção de soluções para as equações de campo de Einstein-Maxwell com uma distribuição de poeira em quatro dimensões. A única equação de campo essencial no procedimento é a equação de Maxwell sem fonte no fundo dado. Similarmente as geodésicas deste tipo de métrica são descritas pela equação de força de Lorentz para uma partícula carregada na geometria de dimensão três. Métricas tipo-Gödel são usadas para construir espaço-tempos que possuem curvas tipo-tempo fechadas.

Seja M uma variedade quadridimensional com uma métrica da forma

$$g_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - h_{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

Aqui $h_{\mu\nu}$ é uma matriz degenerada 4×4 com posto igual a 3. Assume-se que isso ocorre por se tomar $h_{k\mu} = 0$, onde x^k é uma coordenada fixada com $0 \leq k \leq 3$, e mantendo o resto de $h_{\mu\nu}$, isto é, $\mu \neq k$ e $\nu \neq k$, dependendo de todas as outras coordenadas x^α , com exceção de x^k , de forma que $\partial_k h_{\mu\nu} = 0$. Além disso, u^μ é um vetor tipo-tempo unitário, $u^\mu u_\mu = 1$, e não depende da coordenada fixada especial x^k , ou seja, $\partial_k u_\mu = 0$. Isto implica que pode-se tomar $u^\mu = \delta_k^\mu / u_k$.

Em geral, u_k não é constante e nem u^μ é necessariamente um vetor de Killing. Entretanto se, além das características antes assumidas, também tomamos u_k constante, então u^μ se torna um vetor de Killing. Seguindo [15], de agora em diante, considera-se u_k constante.

Primeiramente faz-se o estudo para $h_{\mu\nu}$ sendo plana. Dessa forma toma-se $h_{0\mu} = 0$, $h_{ij} = \bar{\delta}_{ij}$ e $\partial_0 h_{\mu\nu} = 0$. O determinante de $g_{\mu\nu}$ é então $g = -u_0^2$ e além disso $u^\mu = \delta_0^\mu / u_0$. No que se segue $u_0 = 1$ e $\partial_0 u_\mu = 0$.

Desse modo tem-se que $u^\mu h_{\mu\nu} = 0$. A inversa da métrica é dada por

$$g^{\mu\nu} = -\bar{h}^{\mu\nu} - (\bar{h}^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta - 1) u^\mu u^\nu - u^\mu \bar{h}^{\alpha\nu} u_\alpha - u^\nu \bar{h}^{\alpha\mu} u_\alpha. \quad (2.30)$$

Aqui $\bar{h}^{\mu\nu}$ é a inversa tridimensional de $h_{\mu\nu}$, isto é, $\bar{h}^{\mu\nu}h_{\nu\alpha} = \bar{\delta}_\alpha^\mu$ onde $\bar{\delta}_\alpha^\mu$ denota o delta de Kronecker tridimensional: $\delta_\alpha^\mu = \bar{\delta}_\alpha^\mu + \delta_\alpha^0\delta_0^\mu$.

Os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} (u_\alpha f_\beta^\mu + u_\beta f_\alpha^\mu) - \frac{1}{2} (u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha}) u^\mu, \quad (2.31)$$

onde $f_{\alpha\beta} \equiv u_{\alpha;\beta} - u_{\beta;\alpha}$, $u_{\alpha;\beta} \equiv \partial_\beta u_\alpha$ e $f_\nu^\mu = g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu}$. O ponto e vírgula denota derivação covariante em relação aos símbolos de Christoffel dados acima, $u_{\alpha;\beta} \equiv \nabla_\beta u_\alpha$. Tem-se então que $u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = 0$ e que $\nabla_\beta u_\alpha = \frac{1}{2} f_{\beta\alpha}$. Daí segue que u^μ é tangente a uma curva tipo-tempo e é um vetor de Killing.

O tensor de Ricci é dado por

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} f_\mu^\alpha f_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} (u_\mu j_\nu - u_\nu j_\mu) + \frac{1}{4} f^2 u_\mu u_\nu, \quad (2.32)$$

onde $f^2 \equiv f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}$ e $j_\mu \equiv \partial_\alpha f_\mu^\alpha$. O escalar de Ricci é dado por $R = \frac{1}{4} f^2 - u^\mu j_\mu$. Fazendo $j_\mu = 0$ o tensor de Einstein é escrito da seguinte forma

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^f + \frac{1}{4} f^2 u_\mu u_\nu, \quad (2.33)$$

onde $T_{\mu\nu}^f \equiv f_{\mu\alpha} f_\nu^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} f^2$ é o tensor energia-momento de Maxwell para $f_{\mu\nu}$. Sendo assim, vê-se que a métrica tipo-Gödel $g_{\mu\nu}$ (2.29) é uma solução para as equações de campo com poeira com carga em quatro dimensões. A densidade de energia do fluido de poeira é então $\frac{1}{4} f^2$. Agora precisa-se apenas assegurar que $j_\mu = 0$ seja satisfeito. Entretanto isso implica que se deve escolher u_μ tal que

$$\partial_i f_{ij} = 0. \quad (2.34)$$

Sobra-nos então resolver a equação de Maxwell sem fonte tridimensional euclidiana. Na sua forma covariante (2.34) pode ser escrita como

$$J^\nu \equiv \nabla_\mu f^{\mu\nu} = \frac{1}{2} f^2 u^\nu. \quad (2.35)$$

Um primeiro exemplo desse tipo de espaço-tempo com CTC pode ser obtido fazendo $u_i = Q_{ij} x^j$, onde Q_{ij} é totalmente anti-simétrico com componentes constantes [31][15]. Dado dessa

forma u_μ é solução de (2.34). Por simplicidade, faz-se $Q_{13} = Q_{23} = 0$ mas $Q_{12} \neq 0$. Então

$$u_\mu dx^\mu = dt + Q_{12}(x^2 dx^1 - x^1 dx^2), \quad (2.36)$$

e usando coordenadas cilíndricas ordinárias (r, ϕ, z) isto pode ser escrito como

$$u_\mu dx^\mu = dt - Q_{12}r^2 d\phi. \quad (2.37)$$

Considere a curva $\gamma = \{(t, r, \phi, z) \mid t = t_0, r = r_0, \phi \in [0, 2\pi], z = z_0\}$ na variedade M , onde t_0, r_0 e z_0 são constantes. A norma do vetor tangente $v^\mu = (\partial/\partial\phi)^\mu$ a esta curva é então

$$v^2 \equiv v_\mu v^\mu = g_{\phi\phi} = r_0^2(Q_{12}^2 - 1). \quad (2.38)$$

Já que ϕ é uma coordenada periódica, com $\phi = 0$ e $\phi = 2\pi$ identificados, teremos CTCs quando $r_0 > 1/|Q_{12}|$. A única componente não-nula da aceleração de uma partícula sobre essa curva é dada por $a^r = r_0(r_0^2(Q_{12}^2 - 1)\dot{\phi}^2)$, ou seja, γ é uma geodésica quando $r_0 = 1/(\sqrt{2}|Q_{12}|)$, logo não existe uma CTC que seja geodésica.

Um outro exemplo, encontrado em [15], é obtido tomando $u_i = s(x^j)\omega_i$, onde $\omega^i = \delta^{ij}\omega_j$ é um vetor constante e s é uma função suave das coordenadas espaciais x^j ($i, j = 1, 2, 3$). Daí $f_{ij} = (\partial_i s)\omega_j - (\partial_j s)\omega_i$ e (2.34) leva a

$$\partial_i f_{ij} = (\nabla^2 s)\omega_j - (\partial_i \partial_j s)\omega_i = 0. \quad (2.39)$$

Então (2.34) é satisfeita se a função s e o vetor ω^i são escolhidos de forma que $\nabla^2 s = 0$ e $\omega_i \partial_i s$ é igual a uma constante, que pode ser escolhida como sendo zero. Por simplicidade, faz-se $w_i = \delta_i^3$. Então qualquer função s que seja harmônica em (x^1, x^2) atende às condições acima propostas. Agora

$$u_\mu dx^\mu = dt + s(x^1, x^2)dx^3, \quad (2.40)$$

e usando coordenadas cilíndricas o elemento de linha pode ser escrito como

$$ds^2 = (dt + s(r, \phi)dz)^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (2.41)$$

Em [15] é visto que uma curva γ dada como no exemplo anterior não pode ser tipo-tempo já que neste caso a norma do seu vetor velocidade é dada por $v^2 = -r_0^2$. Em [31] considera-se

curvas suaves γ no espaço-tempo descrito por (2.41) com r_0 e ϕ_0 constantes de tal forma que $(t(\eta), r_0, \phi_0, z(\eta))$ é a parametrização de γ com um vetor tangente normalizado

$$\left(\frac{dt}{d\eta} - s_0 \frac{dz}{d\eta}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2 = 1 \quad (2.42)$$

onde $s_0 \equiv s(r_0, \phi_0)$. Resolvendo a equação acima em função de $dt/d\eta$ e integrando formalmente sobre η obtém-se

$$t(\eta) = t(0) - s_0[z(\eta) - z(0)] + \epsilon \int_0^\eta \left[1 + \left(\frac{dz}{d\eta^*}\right)^2\right]^{1/2} d\eta^*, \quad (2.43)$$

onde $\epsilon = \pm 1$. Já que a integral em (2.43) é uma função crescente em η , tem-se que não existe curvas tipo-tempo suaves ao longo das quais tanto t quanto z retornem simultaneamente aos seus valores iniciais e, conseqüentemente não há também CTCs desse tipo para a métrica (2.41).

Entretanto, permitindo que r e/ou ϕ também variem é possível encontrar CTCs para a métrica (2.41). Por exemplo, seja $s(r, \phi) = s_0 + s_1(r - r_0)$, onde s_0 e s_1 são constantes. Seja a curva Γ cujas equações paramétricas são dadas por

$$\begin{aligned} t(\eta) &= -a \left[s_0 + \frac{as_1}{2} \cos \eta \right] \sin \eta, \\ r(\eta) &= r_0 + a \cos \eta, \\ \phi &= \phi_0, \quad z(\eta) = a \sin \eta. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Esta será uma curva tipo-tempo suave parametrizada pelo tempo próprio, desde que $v^\mu v_\mu = 1$, para isso é necessário que

$$\begin{aligned} v^\mu v_\mu &= (-a \cos \eta \left[s_0 + \frac{as_1}{2} \cos \eta \right] + \frac{a^2 s_1}{2} \sin^2 \eta + (s_0 + as_1 \cos \eta) a \cos \eta)^2 - \\ &\quad - a^2 \cos^2 \eta - a^2 \sin^2 \eta \\ \Rightarrow 1 &= v^\mu v_\mu = \frac{a^4 s_1^2}{4} - a^2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Isto acontece, por exemplo, quando

$$a = \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 + s_1^2}}}{s_1}, \quad s_1 \neq 0. \quad (2.46)$$

Como as coordenadas (t, r, z) são periódicas em η , chega-se que (2.44) mais (2.46) dão uma CTC para a métrica (2.29).

Em [31] encontramos outros exemplos de CTCs para a métrica (2.29).

Até então só foram apresentadas métricas tipo-Gödel com o “fundo” plano. Agora trabalha-se com $h_{\mu\nu}$ sendo uma métrica para um espaço-tempo tridimensional não-plano geral e, por simplicidade, continua-se assumindo $u_k = 1$ [15].

De novo, tem-se que $u^\mu h_{\mu\nu} = 0$. A inversa da métrica é dada por (2.30). Entretanto, agora o determinante de $g_{\mu\nu}$ é dado por $g = -h$, onde h é o determinante da submatriz 3×3 obtida apagando a linha k e a coluna k de $h_{\mu\nu}$. Os novos símbolos de Christoffel de $g_{\mu\nu}$ são dados por

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu = \gamma_{\alpha\beta}^\mu + u^\mu u_\sigma \gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \frac{1}{2}(u_\alpha f_\beta^\mu + u_\beta f_\alpha^\mu) - \frac{1}{2}u^\mu(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad (2.47)$$

onde $\gamma_{\alpha\beta}^\mu$ são os símbolos de Christoffel de $h_{\mu\nu}$ e assume-se que os índices de u_μ e de $h_{\mu\nu}$ sejam erguidos e abaixados pela métrica $g_{\mu\nu}$. Usando uma barra vertical para denotar a diferenciação covariante com relação à métrica $h_{\mu\nu}$, de forma que $u_{\alpha|\beta} = u_{\alpha,\beta} - \gamma_{\alpha\beta}^\mu u_\mu$, o símbolo (2.47) pode ser escrito como

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu = \gamma_{\alpha\beta}^\mu + \frac{1}{2}(u_\alpha f_\beta^\mu + u_\beta f_\alpha^\mu) - \frac{1}{2}u^\mu(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}). \quad (2.48)$$

Para evitar ambiguidade denota-se a derivada covariante com relação à métrica $g_{\mu\nu}$ por $\tilde{\nabla}_\mu$, de forma que

$$\tilde{\nabla}_\mu u_\nu = u_{\nu,\mu} - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha u_\alpha. \quad (2.49)$$

Com essas definições pode-se obter que $u^\beta \tilde{\nabla}_\beta u_\alpha = 0$ e que $\tilde{\nabla}_\beta u_\alpha = \frac{1}{2}f_{\beta\alpha}$. Vê-se que u^μ continua sendo tangente a uma geodésica tipo-tempo e que ele é ainda um vetor de Killing.

O tensor de Ricci é dado por

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \tilde{r}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}f_\mu^\alpha f_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}(u_\mu \tilde{j}_\nu - u_\nu \tilde{j}_\mu) + \frac{1}{4}f^2 u_\mu u_\nu \quad (2.50)$$

onde $f^2 \equiv f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}$, como antes, e $\tilde{j}_\mu \equiv f_{\mu|\alpha}^\alpha$ e $\tilde{r}_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci de $h_{\mu\nu}$. O escalar de Ricci é agora dado por

$$\tilde{R} = \tilde{r} + \frac{1}{4}f^2 - u^\mu j_\mu, \quad (2.51)$$

onde $\tilde{r}$ denota o escalar de Ricci de $h_{\mu\nu}$. Fazendo $\tilde{j}_\mu = 0$ o tensor de Einstein é escrito da seguinte forma

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{r}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\tilde{r} + \frac{1}{2}T_{\mu\nu}^f + \frac{1}{4}f^2u_\mu u_\nu, \quad (2.52)$$

onde $T_{\mu\nu}^f$ denota o tensor energia-momento de Maxwell para $f_{\mu\nu}$ como antes. E daí tem-se que

$$\partial_\alpha(\bar{h}^{\alpha\mu}\bar{h}^{\beta\nu}\sqrt{|h|}f_{\mu\nu}) = 0. \quad (2.53)$$

Tem-se então que o tensor de Einstein da métrica de fundo tridimensional age como um termo de fonte para as equações de Einstein obtidas para a métrica tipo-Gödel quadridimensional e que o escalar de curvatura da métrica de fundo contribui para a densidade de energia do fluido de poeira desde que a equação de Maxwell sem-fonte tridimensional (2.53) do fundo seja satisfeita.

Como um exemplo desse tipo de métrica que contém CTCs, em [15], toma-se a coordenada especial fixada x^k como sendo x^0 e h_{ij} sendo conformemente plana de modo que $h_{ij} = e^{2\psi}\bar{\delta}_{ij}$. Denotando a distância radial de $\mathbb{R}^3$ por $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, tomando $\psi = \psi(\rho)$ e usando $(\cdot)' = d(\cdot)/d\rho$, então tem-se que (ver por exemplo [36])

$$\tilde{r}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\tilde{r} = \bar{\delta}_{ij}\left(\psi'' + \frac{\psi'}{\rho}\right) + x_i x_j \left(\left(\frac{\psi'}{\rho}\right)^2 - \frac{\psi''}{\rho^2} + \frac{\psi'}{\rho^3}\right), \quad (2.54)$$

e

$$\tilde{r} = -2e^{-2\psi}(2\nabla^2\psi + (\nabla\psi)^2) = -2e^{-2\psi}\left(\frac{2}{\rho^2}(\rho^2\psi')' + (\psi')^2\right). \quad (2.55)$$

Se $\psi'' + \frac{\psi'}{\rho} = 0$, então pode-se encontrar que $\psi = a \ln \rho + b$ para algumas constantes a e b . Tomando $b = 0$, isto dá

$$\tilde{r}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\tilde{r} = \frac{a(a+2)}{\rho^4}x_i x_j. \quad (2.56)$$

Se é escolhido $a = -2$, então $h_{ij} = \bar{\delta}_{ij}/\rho^4$ e agora tanto $\tilde{r}_{\mu\nu}$ quanto $\tilde{r}$ são nulos. Precisa-se agora resolver (2.53) no espaço de fundo para encontrar uma métrica tipo-Gödel $g_{\mu\nu}$ que resolve (2.52) com $\tilde{r}_{\mu\nu} = \tilde{r} = 0$. Para construir tal solução, toma-se $u_i = s(\rho)Q_{ij}x^j$ onde Q_{ij} é totalmente anti-simétrico com componentes constantes. A equação (2.53) implica que $(\rho^2 s'' + 6\rho s' + 4s)Q_{jl}x^l$, e em geral obtém-se $u_i = (A/\rho^4 + B/\rho)Q_{ij}x^j$ para algumas constantes reais A e B .

O elemento de linha, correspondendo a métrica de Gödel neste fundo tridimensional conformemente plano que resolve as equações de campo de Einstein-Maxwell com poeira, é então dado por

$$ds^2 = \left(dt + \left(\frac{A}{\rho^4} + \frac{B}{\rho} \right) Q_{ij} x^j dx^i \right)^2 - \frac{1}{\rho^4} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.57)$$

Se além disso, se faz $Q_{13} = Q_{23} = 0$ mas $Q_{12} \neq 0$, por simplicidade, e se usa coordenadas cilíndricas, o elemento de linha acima se escreve

$$ds^2 = \left(dt - \left(\frac{A}{\rho^4} + \frac{B}{\rho} \right) Q_{ij} r^2 d\phi \right)^2 - \frac{1}{\rho^4} (dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2). \quad (2.58)$$

Usando de novo a curva $\gamma = \{(t, r, \phi, z) \mid t = t_0, r = r_0, \phi \in [0, 2\pi], z = z_0\}$, onde t_0 , r_0 e z_0 são constantes, e seu vetor tangente v^μ , encontramos que

$$v^2 = g_{\phi\phi} = \frac{r_0^2}{\rho_0^4} \left(\frac{r_0^2}{\rho_0^4} (Q_{12})^2 (A + B\rho_0^3)^2 - 1 \right), \quad (2.59)$$

com $\rho^2 = r_0^2 + z_0^2$. Neste espaço-tempo a condição para se ter uma CTC não é tão simples como no caso do fundo plano, mas tomando, por exemplo, $A = B = Q_{12} = 1$ encontramos uma geodésica tipo-tempo em $r_0 = 1.138684455$.

A solução Perjés-Israel-Wilson.

Os espaços-tempo Perjés-Israel-Wilson (PIW) são soluções estacionárias das equações de Einstein-Maxwell no qual cada fonte P_i tem a característica de ter a massa m_i , a carga elétrica e_i e os momentos angular h_i e magnético μ_i relacionados da seguinte forma

$$e_i = \epsilon m_i, \quad h_i = \epsilon \mu_i, \quad (2.60)$$

onde $\epsilon = \pm 1$, e ϵ é o mesmo para todas as fonte. Um pérjeon é uma única fonte do tipo descrito acima. Perjés [9] e Israel e Wilson [10] deram, independentemente, a métrica exterior a um pérjeon.

A métrica $g_{\mu\nu}$ de um campo estacionário arbitrário é convenientemente expressa na forma

$$ds^2 = f(dt + \omega_i dx^i)^2 - f^{-1} h_{ij} dx^i dx^j, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.61)$$

na qual f , h_{ij} e ω_i são independentes da coordenada temporal t , e a inversa de $g_{\mu\nu}$ é dada por

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (f^{-1} - f \omega^2) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - f h^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial x^n} + 2f \omega^m \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.62)$$

No caso da métrica exterior gerada por um ou dois pérjeons podemos escrever o elemento de linha em coordenadas cartesianas como

$$ds^2 = f(dt + y w dx - x w dy)^2 - f^{-1}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.63)$$

onde $\omega_1 = y w$, $\omega_2 = -x w$, $\omega_3 = 0$ e $\gamma^{mn} = \delta^{mn}$.

Seguindo a idéia proposta em [10], podemos descrever as funções da métrica, e as que nos dão o campo eletromagnético, em função de duas funções harmônicas com respeito a h_{mn} .

Definimos, primeiramente, um “vetor torsão” invariante $\tau = -f^{-2} \nabla \times \omega$ usando h_{mn} como a métrica tridimensional base.

Consideremos agora um campo eletromagnético estacionário $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ no espaço-tempo. A condição de independência temporal $\partial_t A_\mu = 0$ nos dá para as componentes elétricas

$$F_{tn} = \partial_n A_0, \quad (2.64)$$

enquanto que as equações de Maxwell livres de fonte

$$\partial_n [\sqrt{-g} F^{\mu n}] = 0, \quad (2.65)$$

para $\mu = m$, nos dão as componentes magnéticas

$$F^{ab} = f \epsilon^{abp} \partial_p \phi, \quad (2.66)$$

em termos de um potencial escalar magnético ϕ . Todas as outras componentes são convenientemente escritas em função dessas seis, por exemplo,

$$F^{nt} = \omega_m F^{mn} + F_{tm} \delta^{mn}, \quad (2.67)$$

que segue de (2.61) e (2.62). Usando a definição para τ , (2.64), (2.66) e (2.67), a equação (2.65)

com $\mu = t$ pode ser escrita como ($\sqrt{-g} = f^{-1}$)

$$\begin{aligned} \partial_n(f^{-1})F^{tn} + f^{-1}\partial_n(F^{tn}) &= 0, \\ \Rightarrow f^{-1}\partial_n f \omega_m \epsilon^{mnp} \partial_p \phi + f^{-2}\partial_n f \partial^n A_0 - \nabla^2 A_0 f^{-1} - f^{-1}\partial_n(\omega_m f \epsilon^{mnp} \partial_p \phi) &= 0, \\ \Rightarrow -\nabla \cdot (f^{-1}\nabla A_0) - f^{-2}\tau \cdot \nabla \phi &= 0, \\ \Rightarrow \nabla \cdot (f^{-1}\nabla A_0) = -f^{-2}\tau \cdot \nabla \phi. \end{aligned}$$

Agora, escrevendo F_{mn} em função de (2.64) e (2.66) temos que

$$F_{mn} = \epsilon^{mnp} \partial_p \phi f^{-1} + \omega_m \partial_n A_0 - \omega_n \partial_m A_0, \quad (2.68)$$

e a identidade cíclica $\epsilon^{mnp} \partial_p F_{mn} = 0$ nos dá

$$\begin{aligned} \partial_1(f^{-1}\partial_1\phi + \partial_3 A_0 \omega_2) + \partial_2(f^{-1}\partial_2\phi - \partial_3 A_0 \omega_1) + \partial_3(f^{-1}\partial_3\phi + \partial_2 A_0 \omega_1 - \partial_1 A_0 \omega_2) &= 0, \\ \Rightarrow \nabla \cdot (f^{-1}\nabla \phi) + \epsilon^{mnp}(\partial_m \omega_n)(\partial_p A_0) &= 0, \\ \Rightarrow \nabla \cdot (f^{-1}\nabla \phi) = f^{-2}\tau \cdot \nabla A_0. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Se introduzimos o potencial escalar complexo $\Psi = A_0 + \imath\phi$, teremos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f^{-1}\nabla \Psi) &= \nabla \cdot (f^{-1}\nabla A_0) + \imath \nabla \cdot (f^{-1}\nabla \phi) = \\ &= f^{-2}\tau \cdot \nabla \phi - \imath f^{-2}\tau \cdot \nabla A_0 = \imath f^{-2}\tau \cdot \nabla \Psi. \end{aligned} \quad (2.70)$$

E todo o conjunto das equações de Maxwell fica assim reduzido à equação (2.70).

O tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta$ para a métrica (2.63) pode ser convenientemente escrito em função de um vetor tridimensional complexo G , definido por

$$2f G = \nabla f - \imath \tau. \quad (2.71)$$

Dessa forma suas componentes podem ser expressas como se segue em coordenadas cartesianas.

Primeiramente

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{1}{2} f^4 w_z^2 x^2 + \frac{1}{2} f^4 w_x^2 x^2 - \frac{1}{2} f_x^2 + \frac{1}{2} f f_{z,z} + 2 f^4 w_x x w + 2 f^4 w w_y y + \\ &+ f^4 w_x x w_y y + 2 f^4 w^2 + \frac{1}{2} f^4 w_y^2 y^2 - \frac{1}{2} f_z^2 + \frac{1}{2} f f_{x,x} + \frac{1}{2} f f_{y,y} - \frac{1}{2} f_y^2 + \frac{1}{2} f^4 w_z^2 y^2. \end{aligned}$$

Seja G dado por (2.71) e

$$\tau = -f^{-2} \nabla \times (y w, -x w, 0) = -f^{-2} (x \partial_z w, y \partial_z w, -2w - x \partial_x w - y \partial_y w)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot G + (G^* - G) \cdot G &= \frac{1}{2f^{-2}} \left(\nabla \cdot (f \nabla f) + \right. \\ &\left. + f^4 ((x^2 + y^2)(\partial_z w)^2 + (x \partial_x w + y \partial_y w)^2 + 2w(x \partial_x w + y \partial_y w) + 4w^2) \right). \end{aligned}$$

Comparando com R_{tt} temos que

$$\nabla \cdot G + (G^* - G) \cdot G = f^{-2} R_{tt}. \quad (2.72)$$

Avaliando R_t^m encontramos as seguintes expressões

$$\begin{aligned} R_t^x &= -\frac{1}{2} f^3 w_{z,z} y - 2 f_y f^2 w - \frac{1}{2} f^3 w_{y,y} y - \frac{1}{2} f^3 w_{x,y} x - 3/2 f^3 w_y - f_y f^2 w_x x \\ &\quad - f_y f^2 w_y y - f^2 w_z y f_z; \\ R_t^y &= 3/2 f^3 w_x + f_x f^2 w_x x + \frac{1}{2} f^3 w_{z,z} x + \frac{1}{2} f^3 w_{x,y} y + \frac{1}{2} f^3 w_{x,x} x + f_x f^2 w_y y \\ &\quad + 2 f_x f^2 w + f^2 w_z x f_z; \\ R_t^z &= -\frac{1}{2} f^2 (2 w_z x f_y - f w_{x,z} y + f w_{y,z} x - 2 f_x w_z y). \end{aligned}$$

O objetivo agora é comparar R_t^m com $\epsilon^{mpq}(\partial_q G_p - G_p G_q^*)$. Como

$$G = \left(\frac{\partial_x f}{2f} + \frac{\imath f}{2} x \partial_z w, \frac{\partial_y f}{2f} + \frac{\imath f}{2} y \partial_z w, \frac{\partial_z f}{2f} - \frac{\imath f}{2} (2w + x \partial_x w + y \partial_y w) \right), \quad (2.73)$$

para $m = 1$ escrevemos

$$\begin{aligned} \epsilon^{1pq}(\partial_q G_p - G_p G_q^*) &= -\partial_2 G_3 + \partial_3 G_2 + G_2 G_3^* - G_3 G_2^* = \\ &= \frac{\imath}{f^2} (f^2 \partial_y f (2w + x \partial_x w + y \partial_y w) - f^2 y \partial_z f \partial_z w) + \frac{\imath f}{2} (3 \partial_y w + x \partial_y \partial_x w + y \partial_y^2 w + y \partial_z^2 w) = \\ &= -\imath f^{-2} R_t^x, \end{aligned} \quad (2.74)$$

para $m = 2$ escrevemos

$$\begin{aligned} \epsilon^{2pq}(\partial_q G_p - G_p G_q^*) &= \partial_1 G_3 - \partial_3 G_1 + G_3 G_1^* - G_1 G_3^* = \\ &= -\frac{\imath}{f^2} (f^2 \partial_x f (2w + x \partial_x w + y \partial_y w) + f^2 x \partial_z f \partial_z w) + \frac{\imath f}{2} (3 \partial_x w + y \partial_y \partial_x w + x \partial_x^2 w + x \partial_z^2 w) = \\ &= -\imath f^{-2} R_t^y, \end{aligned} \quad (2.75)$$

e para $m = 3$ escrevemos

$$\begin{aligned}
\epsilon^{3pq}(\partial_q G_p - G_p G_q^*) &= \partial_2 G_1 - \partial_1 G_2 + G_1 G_2^* - G_2 G_1^* = \\
&= \frac{\imath}{f^2}(2f^2(x\partial_y f \partial_x w - y\partial_x f \partial_y w) + \frac{\imath f}{2}(x\partial_y \partial_z w - y\partial_x \partial_z w) = \\
&= -\imath f^{-2} R_t^z.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Por fim comparamos R^{pq} com $G_p G_q^* + G_p^* G_q$.

$$\begin{aligned}
R^{xz} &= -f^2 w y (f_y f w_z x - \frac{1}{2} f^2 w_{x,z} y + \frac{1}{2} f^2 w_{y,z} x - f_x f w_z y) + \\
&+ f^2 (-\frac{1}{2} f^2 w y^2 w_{x,z} - \frac{1}{2} f_z f_x / f^2 + \frac{1}{2} f^2 w x w_{y,z} y + f w_z x f_y w y + \frac{1}{2} f^2 w_z x w_y y + \\
&+ \frac{1}{2} f^2 w_z x^2 w_x + f^2 w_z x w - f_x f w y^2 w_z) = \\
&= \frac{f^{-2}}{2} (\partial_x f \partial_z f - f^4 x \partial_z w (2w + x \partial_x w + y \partial_y w)) = -f^{-2} (G_1 G_3^* + G_1^* G_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{yz} &= f^2 w x (f_y f w_z x - \frac{1}{2} f^2 w_{x,z} y + \frac{1}{2} f^2 w_{y,z} x - f_x f w_z y) + \\
&+ f^2 (f_x f w y x w_z - \frac{1}{2} f_z f_y / f^2 - \frac{1}{2} f^2 w x^2 w_{y,z} + \frac{1}{2} f^2 w_z x w_x y - f_y f w x^2 w_z + \\
&+ f^2 w_z y w + \frac{1}{2} f^2 w_z y^2 w_y + \frac{1}{2} f^2 w y w_{x,z} x) = \\
&= \frac{f^{-2}}{2} (-\partial_y f \partial_z f + f^4 y \partial_z w (2w + x \partial_x w + y \partial_y w)) = -f^{-2} (G_2 G_3^* + G_2^* G_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{zz} &= -\frac{1}{2} f_y^2 - f_z^2 + \frac{1}{2} f^4 w_z^2 x^2 + \frac{1}{2} f f_{y,y} + \frac{1}{2} f f_{z,z} - \frac{1}{2} f_x^2 + \frac{1}{2} f^4 w_z^2 y^2 + \frac{1}{2} f f_{x,x} = \\
&= \frac{f^4}{2} (\partial_z f)^2 (x^2 + y^2) + \frac{f}{2} \nabla^2 f - \frac{1}{2} \nabla f \cdot \nabla f - \frac{1}{2} (\partial_z f)^2,
\end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$R^{zz} - R_{tt} = -\frac{1}{2} (\partial_z f)^2 - \frac{f^4}{2} (2w + x \partial_x w + y \partial_y w)^2 = -2f^2 G_3 G_3^*. \tag{2.77}$$

Dessa forma a parte da “geometria” das equações de Einstein pode ser reescrita como

$$f^{-2} R_{tt} = \nabla \cdot G + (G^* - G) \cdot G, \tag{2.78}$$

$$-\imath f^{-2} R_t^m = \epsilon^{mpq} (\partial_q G_p - G_p G_q^*), \tag{2.79}$$

$$-f^{-2} (\delta_{pm} \delta_{qn} R^{mn} - \delta_{pq} R_{tt}) = G_p G_q^* + G_p^* G_q. \tag{2.80}$$

Para o tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (2.81)$$

chegamos às seguintes equações que chamaremos de “matéria”

$$F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2((\nabla\phi)^2 - (\nabla A_0)^2),$$

$$2f^{-1}T_{tt} = (\nabla\phi)^2 + (\nabla A_0)^2, \quad (2.82)$$

$$f^{-1}T_t{}^m = \epsilon^{mpq}(\partial_p\phi)(\partial_q A_0), \quad (2.83)$$

$$-f^{-1}T^{mn} = (\partial^m\phi)(\partial^n\phi) + (\partial^m A_0)(\partial^n A_0) - \frac{1}{2}[(\nabla\phi)^2 + (\nabla A_0)^2], \quad (2.84)$$

com $\partial^m = \delta^{mn}\partial_n$.

Para mostrar que as equações em (2.82-2.84) são válidas para a métrica estudada, calculamos

$$F^{nt} = y w F^{xn} - x w F^{yn} + F_{tn},$$

e as combinações

$$\begin{aligned} F_{tx}F^{tx} &= -(\partial_x A_0)^2 - f x w \partial_x A_0 \partial_z \phi, \\ F_{ty}F^{ty} &= -(\partial_y A_0)^2 - f y w \partial_y A_0 \partial_z \phi, \\ F_{tz}F^{tz} &= -(\partial_z A_0)^2 + f \partial_z A_0 (y w \partial_y \phi + x w \partial_x \phi), \\ F_{xy}F^{xy} &= (\partial_z \phi)^2 + f w \partial_z \phi (y \partial_y A_0 + x \partial_x A_0), \\ F_{xz}F^{xz} &= (\partial_y \phi)^2 + f w \partial_y \phi x \partial_z A_0, \\ F_{yz}F^{yz} &= (\partial_x \phi)^2 + f w \partial_x \phi y \partial_z A_0, \end{aligned} \quad (2.85)$$

de forma que podemos escrever

$$F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2((\nabla\phi)^2 - (\nabla A_0)^2). \quad (2.86)$$

Usando o tensor energia-momento dado em (2.81) temos que

$$\begin{aligned} T_{tt} &= g^{xx} F_{tx} F_{xt} + g^{yy} F_{ty} F_{yt} + g^{zz} F_{tz} F_{zt} + g_{tt} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \\ &= f(\partial_x A_0)^2 + f(\partial_y A_0)^2 + f(\partial_z A_0)^2 + \frac{f}{2}((\nabla\phi)^2 - (\nabla A_0)^2), \\ &= \frac{f}{2}((\nabla\phi)^2 + (\nabla A_0)^2). \end{aligned} \quad (2.87)$$

E ainda que

$$\begin{aligned} T_t^x &= f(\partial_z A_0 \partial_y \phi - \partial_y A_0 \partial_z \phi), \\ T_t^y &= f(\partial_x A_0 \partial_z \phi - \partial_z A_0 \partial_x \phi), \\ T_t^z &= f(\partial_y A_0 \partial_x \phi - \partial_x A_0 \partial_y \phi), \end{aligned} \quad (2.88)$$

o que nos dá a equação (2.83).

Por fim calculamos as componentes T^{mn} do tensor energia-momento:

$$\begin{aligned} T^{xx} &= f\left[\frac{1}{2}((\nabla\phi)^2 + (\nabla A_0)^2) - (\partial_x \phi)^2 - (\partial_x A_0)^2\right], \\ T^{yy} &= f\left[\frac{1}{2}((\nabla\phi)^2 + (\nabla A_0)^2) - (\partial_y \phi)^2 - (\partial_y A_0)^2\right], \\ T^{zz} &= f\left[\frac{1}{2}((\nabla\phi)^2 + (\nabla A_0)^2) - (\partial_z \phi)^2 - (\partial_z A_0)^2\right], \\ T^{xy} &= -f[(\partial_x \phi)(\partial_y \phi) + (\partial_x A_0)(\partial_y A_0)], \\ T^{yz} &= -f[(\partial_y \phi)(\partial_z \phi) + (\partial_y A_0)(\partial_z A_0)], \\ T^{xz} &= -f[(\partial_x \phi)(\partial_z \phi) + (\partial_x A_0)(\partial_z A_0)], \end{aligned} \quad (2.89)$$

que nos dá a equação (2.84).

Comparando (2.79) com (2.83), encontramos

$$\nabla \times \tau = -4\nabla\phi \times \nabla A_0 = \imath \nabla \times (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi), \quad (2.90)$$

de forma que a equação

$$\tau + \imath(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = \nabla \psi \quad (2.91)$$

define uma função escalar real ψ a menos de uma constante aditiva. Define-se agora uma função complexa

$$\varepsilon = f - \Psi \Psi^* + i\psi. \quad (2.92)$$

Em virtude de (2.71) e (2.91) temos

$$fG = \frac{1}{2}\nabla\varepsilon + \Psi^* \nabla \Psi. \quad (2.93)$$

Substituindo (2.93) na primeira equação as equações de Maxwell são escritas usando o potencial complexo

$$f\nabla^2\Psi = \nabla\Psi \cdot (\nabla\varepsilon + 2\Psi^*\nabla\Psi), \quad (2.94)$$

onde

$$\begin{aligned} \varepsilon &= f - \Psi^*\Psi; \\ \nabla\Psi &= \tau + \imath(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*); \\ \tau &= -f^2\nabla \times \omega; \\ \Psi &= A_0 + \imath\Phi. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Comparando (2.78) e (2.82), e usando (2.70) temos que

$$f\nabla^2\varepsilon = \nabla\varepsilon \cdot (\nabla\varepsilon + 2\Psi^*\nabla\Psi), \quad (2.96)$$

enquanto que as equações de Maxwell são escritas usando o potencial complexo da seguinte forma

$$f\nabla^2\Psi = \nabla\Psi \cdot (\nabla\varepsilon + 2\Psi^*\nabla\Psi), \quad (2.97)$$

e podemos escrever f usando (2.92)

$$f = \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^*) + \Psi\Psi^*. \quad (2.98)$$

Por fim, as equações de Einstein restantes são escritas como

$$-f^{-2}R_{mn}(h) = \frac{1}{2}\varepsilon_{(m}\varepsilon_{,n)}^* + \Psi\varepsilon_{,(m}\Psi_{,n)}^* + \Psi^*\varepsilon_{,(m}^*\Psi_{,n)}^* - (\varepsilon + \varepsilon^*)\Psi_{,(m}\Psi_{,n)}^*. \quad (2.99)$$

Dada a métrica (2.63), a situação física que ela descreve, como visto em [32], é de uma solução das equações de Einstein-Maxwell onde temos $\psi = 0$ e $\varepsilon = 0$. Dessa forma teremos $f = \Psi^*\Psi$, $R_{mn}(h) = 0$ e $\tau = \imath(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi)$. E assim $f^2\nabla \times \omega = \imath(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*)$.

Seja $V = 1/\Psi$. Então $\nabla^2V = 0$, $f = 1/|V|^2$ e

$$\frac{1}{V^*V}\nabla \times \omega = \imath\left(\frac{\nabla V^*}{V^*} - \frac{\nabla V}{V}\right). \quad (2.100)$$

Escrevendo $V = 2L + 2M$ onde L e M são funções reais, temos que

$$f = \frac{1}{4(L^2 + M^2)}, \quad (2.101)$$

como $\nabla^2 V = 0$, temos que L e M são funções harmônicas. Substituindo (2.101) em (2.100) obtemos que

$$\nabla \times \omega = \frac{8}{L^2 + M^2} (M \nabla L - L \nabla M). \quad (2.102)$$

Em suma, a solução PIW para as equações de campos de Einstein-Maxwell é dada pela métrica (2.61), onde o tensor tridimensional positivo definido h_{mn} gera um tensor de Ricci nulo e é tomado como a métrica euclidiana tridimensional usual, f é dada por (2.101) e ω por (2.102). O campo eletromagnético é dado em termos de dois potenciais escalares:

$$F_{0n} = \partial_n A_0, \quad F^{ab} = \eta^{abm} f \partial \phi, \quad (2.103)$$

η^{abm} sendo o tensor de Levi-Civita tensor relacionado a h_{mn} . Além disso

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon M}{L^2 + M^2}, \\ \Phi &= -\frac{1}{2} \frac{\epsilon L}{L^2 + M^2}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Um pérjeon é uma fonte fisicamente possível, a solução com um objeto desse possui CTCs, mas se espera que a fonte cubra a região onde essas curvas aparecem. O mesmo não ocorre quando trabalhamos com dois pérjeons pois CTCs irão aparecer entre as fontes. Esta última solução possui CTGs [8].

A solução de Bonnor-Ward (BW) [33] se refere dois pérjeons, com massas m_1 e m_2 , colocadas sobre o eixo dos z 's nas posições $z = \pm a$, ($a > 0$), com momentos magnéticos (μ_1 and μ_2)

também paralelos ao eixo dos z 's, e

$$\begin{aligned} L &= (1 + m_1/r_1 + m_2/r_2)/2, \\ M &= (\mu_1(z - a)/r_1^3 + \mu_2(z + a)/r_2^3)/2, \\ r_1 &= \sqrt{\rho^2 + (z - a)^2}, \\ r_2 &= \sqrt{\rho^2 + (z + a)^2}, \\ \omega_a &= -\rho^2 \Omega \delta_a^\varphi. \end{aligned} \tag{2.105}$$

Um caso particular da solução BW [8] é dado quando se toma

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\mu_1}{r_1^3} \left(2 + \frac{m_1}{r_1} \right) + \frac{m_1 \mu_2}{\rho^2} \left(\frac{r_1}{2a^2 r_2} + \frac{(z + a)(\rho^2 + z^2 - a^2)}{a r_1 r_2^3} \right) \\ &+ \frac{\mu_2}{r_2^3} \left(2 + \frac{m_2}{r_2} \right) + \frac{m_2 \mu_1}{\rho^2} \left(\frac{r_2}{2a^2 r_1} - \frac{(z - a)(\rho^2 + z^2 - a^2)}{a r_2 r_1^3} \right) \\ &+ \frac{\alpha}{\rho^2}, \end{aligned} \tag{2.106}$$

com α restrito somente aos valores $\alpha = \pm(m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1)/(2a^2) (\neq 0)$. Se $\alpha = 0$ não há CTCs no espaço-tempo. Quando $\alpha = (m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1)/(2a^2)$ o espaço-tempo tem uma singularidade de linha de torção (TLS¹) sobre $\rho = 0$ para $z^2 > a^2$ e no outro caso a singularidade aparece entre as fontes. Em ambos os caso não teremos singularidades de escoras [8]. A presença de TLSs é inevitável pois, neste caso, elas mantêm as duas fontes magnéticas girantes, com carga e estacionárias em equilíbrio (sobre linhas de torção veja [24][25]).

Seja a curva $\gamma = \{(t, \rho, \phi, z) \mid t = t_0, \rho = \rho_0, \phi \in [0, 2\pi], z = 0\}$, onde t_0 e r_0 são constantes. Para γ ser uma CTC precisamos que

$$g_{\varphi\varphi} = \Omega^2 f^2 \rho^2 - 1 > 0. \tag{2.107}$$

A única componente não nula da quadri-aceleração é a^ρ . Em [34] apresentamos as condições necessárias para se ter uma CTG. Por exemplo, um modelo com dois pérjeons, onde $m_1 = m_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 864,26963$ e as partículas colocadas a uma distância $2a = 15$, apresenta uma geodésica tipo-tempo fechada γ com raio $\rho_0 = 11,25$.

¹torsion line singularity

Aspectos Matemáticos

Um espaço-tempo (M, g) é uma variedade quadri-dimensional conexa de Hausdorff sem fronteira C^∞ munida de uma métrica C^∞ lorentziana g . Por lorentziano queremos dizer que para todo ponto $p \in M$ existe uma base no espaço tangente à M em p , $T_p M$ relativa à qual $g(p)$ tem como matriz $diag(1, -1, -1, -1)$. Seja X um vetor pertencente a $T_x M$, X é dito ser: *tipo-tempo*, *tipo-espaço* ou *nulo* caso com o sinal de $g(X, X)(= g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu)$ seja, respectivamente, positivo, negativo ou nulo. O cone de luz em p é o conjunto de todos os vetores nulos em $T_p M$. O cone de luz desconecta os vetores tipo-tempo em duas componentes conexas separadas [35].

Em cada ponto p da variedade M o seu espaço tangente é isomórfico ao espaço de Minkowski, onde podemos fazer uma escolha local da direção do futuro. Se pudermos escolher continuamente a direção do futuro, em todo M , então dizemos que o espaço é temporalmente orientável, neste caso podemos provar que [12][35][36]:

Lema 3.1 *Seja (M, g) temporalmente orientável. Então existe um campo vetorial tipo-tempo, u^μ , analítico e diferente do vetor nulo, em M . Em contrapartida se existe um campo vetorial tipo-tempo, contínuo, então (M, g) é temporalmente orientável.*

Consideramos que um espaço-tempo uma variedade orientável e temporalmente orientável.

Em um espaço temporalmente orientável podemos definir os seguintes conceitos:

- Uma curva tipo-tempo $\lambda(s)$ é dita ser orientada para o futuro, se para qualquer $p \in \lambda$ o vetor tangente u^μ é tipo-tempo direcionado para o futuro;
- Uma curva causal $\lambda(s)$ é dita ser orientada para o futuro, se para qualquer $p \in \lambda$ o vetor tangente u^μ é tipo-tempo ou nulo direcionado para o futuro;
- O futuro cronológico $I^+(p)$ é o conjunto de todos os pontos $q \in M$ tais que existe uma curva tipo-tempo direcionada para o futuro λ tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda(1) = q$, podemos também definir o futuro cronológico de um conjunto $S \subset M$ como $I^+(S) = \bigcup_{p \in S} I^+(p)$;
- O futuro causal $J^+(p)$ é o conjunto de todos os pontos $q \in M$ tais que existe uma curva causal direcionada para o futuro λ tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda(1) = q$, e da mesma forma para $S \subset M$ temos $J^+(S) = \bigcup_{p \in S} J^+(p)$.

Definições análogas podem ser feitas para conceitos equivalentes direcionados ao passado (I^- e J^-), bastando apenas substituir o termo futuro por passado, nas definições acima. Podemos notar que $I^+(p)$ é um subconjunto aberto de M e que $p \in I^+(p)$ somente se existe uma curva tipo-tempo orientada para o futuro fechada que começa e termina em p . Em contraste, qualquer que seja $p \in M$, $p \in J^+(p)$. O mesmo sendo válido para I^- e J^- .

Definimos também uma vizinhança normal convexa de $p \in M$, que consiste em um conjunto aberto U com $p \in U$, tal que para todo $q, r \in U$ existe uma única geodésica conectando q e r contida totalmente em U .

Outro conceito importante é a idéia de conjunto atemporal, que se define como sendo um conjunto $S \subset M$ onde não existem $p, q \in S$ tais que $q \in I^+(p)$, ou seja, $S \cap I^+(S) = \emptyset$.

Imediatamente percebemos que para que um espaço-tempo possuir uma estrutura temporal bem definida globalmente ele não pode possuir curvas tipo tempo fechadas, pois se $p \in I^+(p)$ então este evento estaria influenciando seu próprio passado. Porém, eliminar apenas os espaços onde isso ocorre não elimina todas as possibilidades de mau comportamento temporal. É possível construir espaços que estão à beira de possuírem uma curva tipo-tempo fechada, e estes espaços a princípio também não podem ser considerados fisicamente aceitáveis, pois

são instáveis, podendo ganhar uma curva tipo-tempo fechada com uma pequena perturbação. Exibiremos aqui três condições de estabilidade para um espaço-tempo: causalidade forte, causalidade estável e hiperbolicidade global.

Um espaço-tempo (M, g) é considerado *fortemente causal* se para todo $p \in M$ e toda vizinhança U de p existe outra vizinhança V de p , com $V \subset U$, tal que nenhuma curva causal intercepta V mais de uma vez.

Esta definição elimina o que intuitivamente consideramos como a beira de possuir uma curva tipo-tempo fechada, mas é possível construir espaços, que satisfazem a condição de causalidade forte, mas ainda são instáveis.

Outra tentativa para caracterizar adequadamente os espaços é dada pela causalidade estável. Considere um espaço (M, g) , tomemos agora $p \in M$ e um vetor tipo-tempo u^μ em p . Se definirmos $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$, teremos uma nova métrica em p , ainda com assinatura de Lorentz, porém todos os vetores tipo-tempo ou nulos em g são tipo-tempo em $\tilde{g}$, ou seja, esta operação “abre” o cone de luz no ponto p . Agora se tivermos um espaço-tempo à beira de possuir uma curva tipo-tempo fechada e abrirmos todos os seus cones de luz então teremos uma curva fechada no novo espaço, com a métrica $\tilde{g}$. Assim, dizemos que um espaço é *causalmente estável* se existe um campo vetorial tipo-tempo, não nulo, u^μ , tal que o espaço $(M, \tilde{g}_{\mu\nu})$ não possui nenhuma curva tipo-tempo fechada.

O teorema seguinte exhibe uma importante característica de espaços causalmente estáveis.

Teorema 3.1 *Um espaço-tempo é causalmente estável se e, somente se, existe uma função diferenciável f em M , tal que $\nabla^a f$ é um campo vetorial tipo-tempo direcionado ao passado. A função f é chamada de “função de tempo global”.*

Como corolário deste teorema temos que causalidade estável implica em causalidade forte.

Outra condição, ainda mais forte, sobre os espaço-tempos é a hiperbolicidade global. Um espaço (M, g) é considerado *globalmente hiperbólico* se possui uma *superfície de Cauchy*. Uma superfície de Cauchy é uma subvariedade atemporal Σ mergulhada em M tal que o domínio de dependência de Σ $D(\Sigma)$ seja M . Chamamos de domínio de dependência de S o conjunto de todos os pontos $p \in M$ tais que toda curva causal não-estendível passando por p intercepta S .

A superfície de Cauchy pode ser considerada como um instante de tempo ao longo do espaço. Existem razões para supor que todo espaço-tempo fisicamente aceitável é globalmente hiperbólico.

Dados (M, g) um espaço-tempo fortemente causal, e $p, q \in M$, definimos $C(p, q)$ como sendo o conjunto de todas as curvas contínuas tipo-tempo direcionadas ao futuro que ligam p a q . Curvas que diferem apenas pela parametrização são consideradas iguais. Note que se $q \notin J^+(p)$ então $C(p, q) = \emptyset$. Podemos também definir uma topologia $\mathcal{T}$ em $C(p, q)$. Para isso definimos que conjunto aberto em $C(p, q)$ é todo conjunto $O \subset C(p, q)$, que pode ser escrito como

$$O = \bigcup O(U),$$

onde $U \subset M$ é um conjunto aberto e $O(U) \subset C(p, q)$ é definido como

$$O(U) = \{\lambda \in C(p, q) \mid \lambda \subset U\}.$$

Com esta topologia em $C(p, q)$ podemos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.2 *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico e $p, q \in M$. Então $C(p, q)$ é compacto.*

A compacidade de $C(p, q)$ implica diretamente na compacidade correspondente do conjunto $J^+(p) \cap J^-(q)$ na topologia de M . Reescrevendo temos:

Teorema 3.3 *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico e $p, q \in M$. Então $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto.*

Podemos também definir o espaço $C(\Sigma, p)$, para $p \in D(\Sigma)$, que consiste no conjunto de todas as curvas causais contínuas direcionadas ao futuro entre Σ e p . É possível demonstrar, pelos mesmos argumentos do Teorema 3.2, que $C(\Sigma, p)$ é compacto.

Este é o teorema final sobre condições de estabilidade de um espaço-tempo:

Teorema 3.4 *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Então (M, g) é causalmente estável. A função global de tempo f pode ser escolhida de forma que cada superfície onde f é constante seja uma superfície de Cauchy. Assim, M pode ser folheado por superfícies de Cauchy Σ de forma que sua topologia seja $\mathbb{R} \times \Sigma$.*

Considere um espaço-tempo (M, g) onde está definida uma conexão ∇_a e γ é uma geodésica com tangente v^a . A solução da equação do desvio geodésico u^μ

$$v^\mu \nabla_\mu (v^\nu \nabla_\nu u^\alpha) = -R^\alpha_{\mu\nu\delta} u^\nu v^\mu v^\delta$$

é chamada de campo de Jacobi. Dois pontos $p, q \in \gamma$ são considerados conjugados se existe um campo de Jacobi não nulo, que se anule em p e q . Isso significa que uma geodésica infinitesimalmente próxima de γ a interceptaria em p e q , embora não seja necessário que exista uma geodésica com esta propriedade, pois a definição exige apenas a existência do campo de Jacobi.

Os pontos conjugados são importantes pois eles caracterizam as situações em que uma geodésica deixa de ser uma curva extrema, ou seja, uma geodésica tipo-tempo deixa de ser um máximo local do tempo próprio, ou uma geodésica nula deixa de estar na fronteira do futuro de um evento, como mostra o seguinte teorema:

Teorema 3.5 *Seja γ uma curva analítica tipo-tempo conectando $p, q \in M$. Então uma condição necessária e suficiente para que γ maximize localmente o tempo próprio entre p e q , sobre a variação suave de um parâmetro, é que γ seja uma geodésica sem pontos conjugados entre os pontos p e q .*

Seja o tempo próprio entre dois pontos $p, q \in M$ dado por

$$\tau[\lambda] = \int_p^q \sqrt{u^\mu u_\mu} dl,$$

onde u^μ é o vetor tangente da curva causal analítica, ou pelo menos C^1 , λ .

Uma característica importante dos espaços globalmente hiperbólicos é que $C(p, q)$ é compacto, além disso sabemos que τ é semi contínua superior então podemos aplicar os teoremas de existência do máximo. O que implica diretamente no seguinte teorema.

Teorema 3.6 *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico, com $p, q \in M$ e $q \in J^+(p)$. Então existe uma curva $\gamma \in C(p, q)$ para a qual τ assume seu valor máximo em $C(p, q)$.*

Mesmo se as leis da física proíbam as máquinas do tempo, o esforço de compreendê-las pode trazer-nos muitos ensinamentos e ajudar-nos, em particular, a desenvolver nossa compreensão da causalidade.

Observa-se que em nossa região local do espaço-tempo que a partir de qualquer evento P somos capazes de influenciar somente aqueles eventos que estão dentro do cone de luz futuro de P . Supondo que esta seja uma propriedade global do espaço-tempo então uma restrição global sobre as geometrias (aqui uma geometria é uma variedade quadri-dimensional munida de uma métrica de assinatura $(+, -, -, -)$) as quais são de interesse físico. Sem a restrição de estarmos em um espaço-tempo, podemos ter um resultado como

Teorema 3.7 *Toda geometria compacta (sem bordo) tem uma curva tipo-tempo fechada.*

Nosso interesse está na existência de geodésicas tipo-tempo fechadas no espaço-tempo (M, g) . Pelo que já vimos, (M, g) não possui uma estrutura causal bem definida globalmente.

O problema clássico de existência de geodésicas tipo-tempo fechadas (CTGs) na geometria riemanniana foi resolvido por Hadamard [37] em duas dimensões e por Cartan [38] em um número arbitrário de dimensões. Este resultado estabelece que dentro de qualquer classe de homotopia livre (não-trivial) de uma variedade riemanniana compacta existe uma curva de menor comprimento, a qual deve ser uma geodésica fechada (não-trivial).

Um primeiro resultado para variedades lorentzianas foi dado por Tipler [39] cujo enunciado se segue

Teorema 3.8 *Seja (M, g) um espaço-tempo compacto com uma cobertura contendo uma superfície de Cauchy compacta. Então (M, g) uma geodésica tipo-tempo fechada.*

Em uma variedade pseudo-riemanniana com assinatura lorentziana (variedade lorentziana) Galloway [40] encontrou condições suficientes para se ter CTGs.

Uma curva tipo-tempo $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ é uma curva suave por partes tal que (1) cada segmento suave de γ é tipo-tempo e (2) as tangentes nos pontos finais comuns de dois segmentos consecutivos de γ apontam para o mesmo cone de luz. Sejam γ_1 e γ_2 curvas tipo-tempo fechadas em M . Dizemos que γ_1 é livremente t -homotópica a γ_2 se existe uma homotopia que deforma γ_1 em γ_2 via curvas tipo-tempo fechadas.

Sejam g e g_0 métricas lorentzianas sobre M . Então g é dita mais larga que (*wider than*) g_0 , e denotado por $g > g_0$, se e somente se para todo vetor não-nulo X , X é g -tipo-tempo

$(g(X, X) > 0)$ sempre que X é g_0 -não-tipo-espaço ($g_0(X, X) \geq 0$). Intuitivamente os cones de luz em (M, g) abrem mais do que os cones de luz em (M, g_0) . Seja $\mathcal{C}$ uma classe de t -homotopia livre de curvas tipo-tempo fechadas na variedade lorentziana (M, g_0) . Então $\mathcal{C}$ é dita estável se e somente se existe uma métrica lorentziana $g > g_0$ tal que $\sup_{\gamma \in \mathcal{C}} L_g(\gamma) < \infty$, where $L_g(\gamma)$ é o comprimento de γ usando a métrica g .

Teorema 3.9 *Seja (M, g_0) uma variedade lorentziana compacta. Então cada classe de t -homotopia livre estável em (M, g_0) contém uma curva tipo-tempo fechada mais longa. Esta curva é necessariamente uma geodésica tipo-tempo fechada.*

A exigência de que M seja compacta pode ser enfraquecida, sendo suficiente que exista um aberto U de M com fecho compacto tal que cada curva $\gamma \in \mathcal{C}$ esteja contida em U .

Sob certas condições, mudanças na topologia das seções tipo-espaço podem ocorrer se e somente se o modelo for acausal. [41]

No caso de tomar a geodésica como a curva que maximiza comprimentos, podemos olhar o problema do seguinte ângulo. Já que podemos, pelo menos nesse trabalho, escrever todas as nossas CTCs como círculos em um plano- (r, φ) , a CTG, quando ocorrer deve ter a coordenada radial $\bar{r}$ que maximiza a função $s(r, z_*) = 2\pi\sqrt{g_{\varphi\varphi}(r, z_*)}$. É importante ressaltar que para termos uma CTG razoável é necessário que $\bar{r} \neq 0$ e $g_{\varphi\varphi}(\bar{r}, z_*) > 0$, logo uma maneira de obtermos CTGs em um espaço-tempo que só possui CTCs é deformá-lo, por exemplo acrescentando matéria, de maneira que agora $g_{\varphi\varphi}(r, z_*)$ é uma função que possui um ponto de máximo local em $\bar{r}$ tal que $\bar{r} \neq 0$ e $g_{\varphi\varphi}(\bar{r}, z_*) > 0$.

Conjectura da Proteção à Cronologia e Buracos de Minhoca

4.1 Buracos de minhoca

Um buraco de minhoca é uma pequena “alça” na topologia do espaço-tempo, a qual une regiões separadas no universo que podem estar muito longe uma da outra, como aparece no esquema da Fig.(4.1). A métrica de Schwarzschild, com uma escolha adequada de topologia, descreve tal buraco de minhoca [42] [43]. Entretanto, o horizonte do buraco de minhoca de Schwarzschild previne uma viagem de ida e volta, e sua garganta se fecha tão rapidamente que não é possível atravessar nem ao menos em uma direção [43] [44]. Duas perguntas aparecem: (a) A teoria quântica de campos permite o tipo de tensor energia-momento que é necessário para manter um buraco de minhoca de mão dupla aberto? (b) As leis da física permitem a criação de buracos de minhoca em um universo cujas seções espaciais inicialmente são simplesmente conexas? Essas questões tomam um importância adicional quando se reconhece que, se as leis da física permitem buracos de minhoca atravessáveis, então elas provavelmente também permitem que um buraco de minhoca seja transformado em um máquina do tempo com a qual a causalidade pode ser violada. Um espaço-tempo com um buraco de minhoca deve servir como

um útil teste para idéias sobre causalidade, livre arbítrio, etc [2].

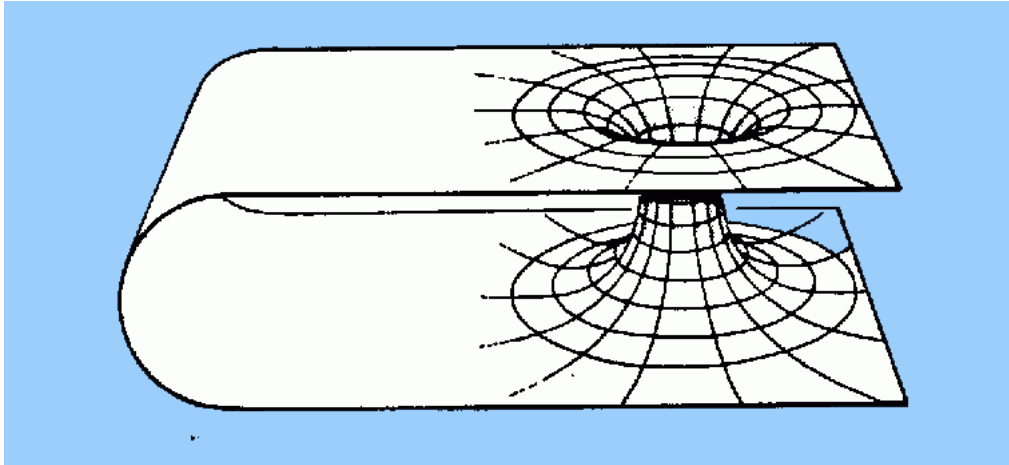


Figura 4.1: Representação de um buraco de minhoca descrito pela métrica de Schwarzschild.

4.2 Conjectura da Proteção à Cronologia

Nosso universo parece não ter sido criado de uma maneira tão encurvada a ponto de termos CTCs se estendendo desde o passado infinito até o futuro infinito [1]. Então o problema aqui é determinar se é fisicamente possível dobrar o espaço-tempo de forma que curvas tipo-tempo fechadas apareçam, permitindo a viagem pelo passado. Começa-se com a suposição de que existe uma superfície S de tempo constante onde não há CTCs no seu passado. A pergunta que se faz é a seguinte: pode-se modificar o espaço-tempo no futuro de S , de modo que CTCs apareçam em uma região finita? Para definir o que seja uma máquina do tempo finita faz-se uso da definição do futuro desenvolvimento de Cauchy de S como o conjunto dos pontos do espaço-tempo em que os eventos são completamente determinados pelo que acontece em S . Esta é a região do espaço-tempo em que todos os caminhos possíveis com velocidade inferior à da luz provêm de S .

Caso haja uma CTC γ no futuro de S , esta curva ficará dando voltas no futuro de S mas não retornará para fazer interseção com S . Isso significa que os pontos de γ não estarão no desenvolvimento de Cauchy de S . Assim, S terá um horizonte de Cauchy H , ou seja, uma

superfície que é fronteira futura do desenvolvimento de Cauchy de S .

Um horizonte de Cauchy, a priori, é formado por raios de luz que têm início ou no infinito ou em singularidades. A criação desses horizontes de Cauchy exigiria ou a capacidade de encurvar infinitamente o espaço-tempo ou a existência de uma singularidade nele. Encurvar infinitamente o espaço-tempo está além da capacidade de qualquer um e as equações de Einstein não podem ser definidas em uma singularidade, o que impede que seja previsto o que acontece do outro lado do horizonte de Cauchy, inclusive quanto a existência de CTCs.

Por essas razões trabalha-se com *horizonte de Cauchy finitamente gerado*. Trata-se de um horizonte de Cauchy gerado por raios de luz que emergem de uma região compacta, uma região finita que contém CTCs. Pode-se provar que um horizonte de Cauchy finitamente gerado contém um raio de luz fechado. Cada vez que o raio de luz volta, ele fica mais desviado para o azul, de modo que as imagens ficam cada vez mais azuladas. Cada vez que passam, os raios de luz podem ficar mais desfocados, de modo que a energia da luz não se acumula infinitamente. No entanto o desvio para o azul significa que uma partícula de luz terá uma história finita, definida por sua própria medida do tempo, ainda que ela fique dando voltas e mais voltas em uma região finita e não se envolva com nenhuma curvatura típica de uma singularidade. Pode-se também provar que haveria rotas com velocidade inferior a da luz e com duração também finita. Essa poderia ser a história dos observadores que ficam presos em uma região finita diante do horizonte de Cauchy e que ficassem “dando voltas e mais voltas”, cada vez mais depressa, até atingir a velocidade da luz em um tempo finito.

Esses resultados não dependem das equações de Einstein, e sim de como o espaço-tempo tem que se curvar para produzir CTCs em uma região finita. Mas isso não pode ser feito com matéria de densidade positiva em toda parte. Pode-se provar que, para se construir uma máquina do tempo finita, é preciso ter energia negativa [2] [45].

Os tensores clássicos de energia-momento de todos os campos fisicamente razoáveis obedecem à condição de energia fraca, segundo a qual a densidade de energia de qualquer forma é igual ou maior que zero. Dessa maneira as máquinas do tempo ficam excluídas da teoria puramente clássica.

Mas, mesmo se violações da condição de energia fraca são permitidas pela teoria quântica, o valor esperado do tensor de energia-momento deve ser muito grande se a curva tipo-tempo torna-se cada vez mais fechada. Parece haver uma reação contrária que previne CTCs de aparecerem. Estes resultados fortemente suportam a Conjectura da Proteção à Cronologia (CPC): *As leis da física não permitem o aparecimento de curvas tipo-tempo fechadas.* [4]

O que não impede a procura de um espaço-tempo onde a proposição de um modelo de máquina do tempo seja razoável. Em [46] lida-se com a possibilidade de formação de curvas causais fechadas (CCC¹) em um espaço-tempo no contexto da Relatividade Geral. Por curvas causais entende-se curvas tipo-tempo ou nulas. Aqui tenta-se responder a pergunta se é possível que CCCs evoluam espontaneamente a partir de condições iniciais não-patológicas. Ou seja, queremos que o espaço-tempo possa admitir uma hipersuperfície inicial tipo-espaço regular (uma superfície de Cauchy parcial) S , que ele seja assintoticamente plano e que a condição de energia fraca seja atendida.

Sendo assim um dos mais relevantes aspectos a se levar em conta é o conteúdo de matéria do espaço-tempo. Também em [46] trabalha-se com simples poeira como fonte. O modelo proposto para o espaço-tempo com uma máquina do tempo tem uma hipersuperfície inicial composta de três partes: uma região externa assintoticamente plana vácuo (com a geometria de Schwarzschild), o “envelope”, que é uma região intermediária composta de poeira, e um vácuo toroidal compacto no centro. Neste modelo as CCCs evoluem dentro do núcleo compacto, de forma a serem causalmente independentes das regiões circunvizinhas.

¹ *closed causal curves*

Resultados

Neste Capítulo discutimos os artigos reproduzidos nos Apêndices. Apresentamos resumos dos principais resultados.

5.1 O universo de Gödel.

O caso de Gödel foi o primeiro a ser considerado neste trabalho por sua relevância histórica como também por sua simplicidade matemática.

Começamos revisando em algum detalhe as CTCs na métrica de Gödel. Em particular, apresentamos as CTCs e suas forças correspondentes nas coordenadas usadas por Gödel e em coordenadas cartesianas. Como as CTCs se parecem com círculos, elas são comumente descritas em coordenadas cilíndricas.

Passamos então a estudar a estabilidade das CTCs quando sofrem pequenas perturbações. Resolvemos o sistema linear de equações para a evolução das perturbações no sistema de coordenadas original de Gödel de forma exata. Vimos que essa solução apresenta modos vibracionais assim como translacionais sendo que esses últimos podem ser eliminados por uma escolha adequada de condições iniciais. Estabelecemos então que as CTCs são linearmente estáveis.

Para futuras referências o mesmo sistema foi resolvido numericamente em coordenadas cartesianas para um número representativo de condições iniciais. Descrevemos os resultados apre-

sentando o comportamento de duas funções-distância, R_2 e R_3 , e uma função-ângulo em alguns gráficos. A análise deste comportamento dependeu de avaliarmos quando uma perturbação dada permanece pequena. Consideramos uma perturbação genérica δu pequena quando $\frac{(\delta u)^2}{\delta u} \leq 0.01$, isto é, $(\delta u)^2 \ll \delta u$. Todas as variações apresentadas nestes gráficos satisfazem por muito esta condição de pequenez. Temos típicos modos vibracionais para δR_2 e δR_3 e principalmente modos translacionais para $\delta \phi$. Testamos esta condição de pequenez para um número significativo de condições iniciais e valores de r_0 , encontramos que esta condição se satisfaz até mesmo para curvas que estão próximas do limite dado por $r_0 > \log(\sqrt{2} + 1)$.

Considerando que a matéria no universo de Gödel é somente poeira, apresentamos uma extensão (deformação) simples da métrica de Gödel que corresponde à adição de matéria. O tensor energia-momento do modelo foi analisado e encontramos condições para termos matéria que atende às condições de energia usuais.

Procuramos condições para que as geodésicas neste novo espaço-tempo fossem tipo-tempo e para que fossem fechadas. Provamos que essas duas condições não podem ser satisfeitas ao mesmo tempo. Apresentamos as suas CTCs em uma forma explícita junto com as forças associadas. Encontramos que a adição de matéria, seja ela usual ou seja ela exótica, não muda a estabilidade dessas CTCs. E ainda encontramos um tipo de estabilidade estrutural [47].

5.2 Os perjeons - Quase uma máquina do tempo.

Estudamos o caso especial da solução BW (2.105), onde as massas dos dois perjeons são iguais, $m_1 = m_2 = m$, assim como os momentos angulares, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, além disso nos interessamos apenas pelas curvas fechadas γ dadas na sua forma paramétrica como $\gamma = \{(t, \rho, \varphi, z) | t = t_0, \rho = \rho_0, \varphi \in [0, 2\pi], z = 0\}$ onde t_0 e ρ_0 são constantes.

Dada dessa forma, a única componente não-nula da quadri-aceleração será a^ρ , que é uma função dos parâmetros m, μ, ρ_0 (o raio da curva) e a (meia distância entre as partículas). Fixando, primeiramente, um dos dois valores possíveis para α dados em (2.106), e fazendo $a^\rho = 0$, obtivemos em cada um dos dois casos uma relação entre m, μ, a e ρ_0 . Substituindo essa relação na expressão de $g_{\varphi\varphi}$ (que nos dá a condição para que γ seja tipo-tempo), e introduzindo

um novo parâmetro n , de forma que $\rho_0 = n a$, obtivemos regiões onde existem geodésicas tipo-tempo fechadas (nas duas possibilidades de valores para α). Por exemplo, para o caso onde $\alpha = -(m_1\mu_2 + m_2\mu_1)/(2a^2)$ (TLS entre as partículas), teremos CTGs para $n \in (\sqrt{2}, 1.6385]$ e $a \in [A m, B m]$, onde

$$A = \frac{\sqrt{1 + 6n^2 + 61n^4 + 60n^6 - 28n^8} - (6n^4 - 11n^2 - 1)}{4\sqrt{n^2 + 1}(2n^2 - 1)},$$

$$B = \frac{4 - n^2 + \sqrt{2 + 3n^2 - n^4}}{\sqrt{n^2 + 1}(n^2 - 2)}.$$

Em ambos os casos foram encontradas regiões menores onde as CTGs são linearmente estáveis. No caso do exemplo dado acima, para $n = 1.5$ e $7.4788 m < a < 7.988 m$, ou para $n = 1.8$ e $0.1046 m < a < 0.5279 m$, temos CTGs linearmente estáveis. Sendo assim, a existência de CTGs no espaço-tempo BW ou sua estabilidade não dependem do valor do parâmetro de massa m .

5.3 As CTGs em vários outros exemplos.

Aqui, por uma questão de completude, estudamos a estabilidade de todas as outras CTGs que eram conhecidas na literatura.

A solução de van Stockum. Van Stockum encontrou uma solução para as equações de Einstein que representa o interior de um cilindro de poeira infinito. Trabalhando com matéria subluminal temos $Ra < 1$, onde R é a coordenada radial da fronteira do cilindro e a é a velocidade angular, e neste caso não existem CTCs no interior do cilindro. Para o vácuo exterior ele encontrou três diferentes soluções dependendo do valor de aR . Para $1/2 < aR < 1$ a solução possui CTCs e até mesmo CTGs. Dado o caráter periódico da função $g_{\varphi\varphi}$ temos várias regiões (anéis no plano- (r, φ)) contendo CTCs separadas por regiões do mesmo tipo contendo curva tipo-espaço. Em cada região com CTCs, Steadman mostrou que há uma CTG. Encontramos que essas CTGs são estáveis.

A nuvem de cordas cósmicas. Uma característica interessante desse espaço-tempo é a necessidade de se trabalhar com matéria de densidade de energia negativa para que ele seja simplesmente conexo. As CTGs que são descritas no artigo não são estáveis e provamos que no

modelo dado não há como haver CTGs estáveis.

As métricas tipo-Gödel. Estudamos CTCs em espaço-tempos cujas métricas podem ser decompostas na forma $g_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - h_{\mu\nu}$ onde u^μ é um vetor tipo-tempo unitário e $h_{\mu\nu}$ se comporta com se fosse uma métrica para o “fundo” espacial tridimensional ortogonal à $\mathbf{u}$. Primeiramente estudamos um caso cujo o “fundo” é plano. Neste modelo temos CTCs estáveis, embora não seja possível encontrar CTGs. No segundo caso estudado temos um “fundo” conformemente plano. Neste caso o modelo apresenta CTGs estáveis. A deformação do “fundo” parece ser uma necessidade para a existência de CTGs embora não seja suficiente, pois no caso do universo de Gödel o “fundo” não é plano mas não há CTGs neste espaço-tempo, enquanto que um espaço-tempo com CTG com “fundo” plano ainda não é conhecido.

O modelo cosmológico de Soares. Este é o modelo onde a existência das CTGs é garantida pela escolha da topologia do espaço-tempo $M = S^3 \times \mathbb{R}$. Como a coordenada temporal é tomada cíclica as linhas-mundo da partículas livres são fechadas. As CTGs exibidas no artigo foram analisadas e são todas não-estáveis.

5.4 O buraco negro espetado.

Neste trabalho estudamos a existência e a estabilidade sob perturbações lineares de CTCs no espaço-tempo associado a um buraco negro de Schwarzschild (BNS) espetado por uma corda cósmica girante (CCG). Apresentamos as condições sobre o raio da curva fechada para que essa seja tipo-tempo, $(r_0 - 2m)\alpha^2 - r_0^3\beta^2 > 0$, sendo m a massa do buraco negro, α o momento angular da corda e β o déficit de ângulo do modelo. Todas as CTCs deste espaço-tempo estão fora da fonte.

Neste tipo de espaço-tempo existem geodésicas tipo-tempo fechadas. Encontramos condições suficientes para que essas CTGs sejam estáveis. Estas condições não são muito restritivas e podem ser satisfeitas plenamente.

Analisando as curvas fechadas no caso da corda cósmica sozinha, encontramos que existe um intervalo finito $r_0 < |\alpha|$, α sendo o momento angular da corda, onde as curvas com coordenada radial r_0 são tipo-tempo. Vimos então que a presença do buraco negro torna possível

a transformar uma CTC presente na métrica da corda girante sozinha que é estável em uma CTG, às vezes, também estável.

Parece que uma linha de torção superposta à matéria (não corda) é uma condição suficiente para se ter CTGs (podendo até serem estáveis). Falando livremente, temos que as linhas de torção criam CTCs que o buraco negro transforma, uma delas, em CTG. Este fato também é confirmado no caso da solução para os dois perjeons estudado em [8] onde as linhas de torção são o ingrediente fundamental para se ter CTCs e CTGs no espaço-tempo. De fato, quando essas linhas são removidas nesta solução, também eliminamos as CTCs e as CTGs.

O papel da massa do buraco negro no aparecimento das CTGs é deformar o espaço-tempo de forma a fazer aparecer um ponto de máximo local na função que mede o comprimento das CTCs. No caso da corda cósmica sozinha essa função atinge o máximo quando $r_0 = 0$ que não é uma coordenada radial admissível para uma curva. Já no caso do espaço-tempo BNS+CCG, a função que mede o comprimento das CTCs atinge o máximo em um valor para $r_0 \neq 0$ e, ainda mais, fora do buraco negro pois $r_0 > 6m$.

Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho estudamos vários modelos, realistas ou não, que contivessem curvas tipo-tempo fechadas. Começamos estudando as CTCs no universo de Gödel e encontramos que elas são linearmente estáveis. Promovemos uma deformação particular neste modelo, na forma de acréscimo de matéria, encontramos as CTCs do novo universo assim deformado e mostramos que elas são estáveis não importando se a matéria é ordinária ou se é exótica. No caso da métrica de Gödel, o espaço-tempo não possui CTGs, mostramos que o universo deformado também não possui esse tipo de curvas. Estabilidade linear também foi obtida ao se estudar as CTCs de um exemplo particular de métrica tipo-Gödel com fundo plano, assim como nas CTCs do modelo contendo uma corda cósmica girante sozinha.

Nos deparamos com quatro modelos onde a existência de CTGs era conhecida. Em todos os modelos estas curvas estavam dadas explicitamente. Começamos analisando a CTG dada no espaço-tempo gerado pelos dois pérjeons. Esta curva particular não é linearmente estável. O modelo dos dois pérjeons depende de vários parâmetros, como a massa, a carga, os momentos angular e magnético de cada partícula, assim como da distância em que elas se encontram uma da outra. Estabelecemos condições que tais parâmetros devem atender para que o espaço-tempo possua outras CTGs e, restringindo estas condições, encontramos CTGs estáveis. Em outros dois casos conhecidos, o modelo topológico de Soares e o da nuvem de cordas de Grøn

e Johannesen, verificamos que as CTGs por eles apresentados não possuem estabilidade linear. Já no modelo do cilindro infinito de poeira de van Stockum, encontramos que as várias CTGs apresentadas por Steadman são estáveis.

Encontramos que um exemplo particular de métrica tipo-Gödel com fundo conformemente plano possui CTGs, e estas também são estáveis. Exibimos um exemplo desse caso particular. No intuito de analisar o papel que a matéria e as linhas de torção exercem no aparecimento de CTCs e CTGs, construímos um modelo bem simples composto de um buraco negro de Schwarzschild e uma corda cósmica girante. Vimos então que o acréscimo do buraco negro provoca uma deformação no espaço-tempo que antes possuía apenas CTCs, podendo transformar uma dessas curvas em uma CTG. Encontramos que a existência de CTGs depende da massa do buraco negro, bem como do momento angular da corda e do déficit de ângulo do espaço-tempo. Determinamos as condições para que estas curvas existam e sejam estáveis. No futuro pretende-se fazer a análise da deformação provocada pelo buraco negro de Kerr ao ser colocado em um espaço-tempo com uma corda cósmica girante (a corda espeta o buraco). Alguns resultados sobre esse modelo já foram obtidos.

Em suma, verificamos que a existência e a estabilidade das CTCs não depende do tipo de fonte que gera a geometria estudada. Temos universos plenamente preenchidos por matéria que admitem apenas CTCs estáveis, como o caso de Gödel, outros, como o proposto por Soares, que admitem CTGs, não-estáveis, por causa da topologia do próprio espaço-tempo ($S^3 \times \mathbb{R}$), ou os tipo-Gödel com fundo conformemente plano que admitem CTGs estáveis e possuem uma topologia mais simples. Temos também universos com fonte infinita, como os casos de cilindros infinitos de matéria, que, dependendo do raio desse cilindro, pode apresentar CTCs (ou CTGs) em seu interior ou não. Alguns modelos admitem CTGs estáveis no vácuo exterior, como um caso da solução de van Stockum. Outros só admitem CTCs no exterior e as CTGs interiores são não-estáveis como no caso de Grøn e Johannesen. Ou ainda temos o caso onde a fonte é fisicamente razoável (os dois pérjeons), compacta, cujo espaço-tempo possui CTGs estáveis, apesar do pequeno inconveniente de termos uma linha de torção no meio das duas partículas, mas isso parece ser uma necessidade para manter a configuração estável. Neste caso as CTCs

aparecem fora da fonte já que elas estão no plano perpendicular ao eixo que as alinha e a meio caminho das duas. O que já não acontece com outras fontes compactas razoáveis, como a barrinha girante de Bonnor ou um único pérjeon, onde nestes casos se espera que as curvas apareçam dentro da matéria.

Nem mesmo o tipo de matéria influencia a existência ou a estabilidade dessas curvas. Nas deformações que encontramos do universo de Gödel vemos isso claramente.

A possibilidade de que um espaço-tempo associado a um modelo realista de matéria contenha CTCs nos levou a perguntar o quão permanente é a existência de tais curvas. Talvez fosse possível eliminá-las por simples considerações sobre sua estabilidade linear. Por outro lado, se estas curvas fossem estáveis sob perturbações lineares o problema conceitual a sua existência se complicaria. Mesmo diante do fato que a matéria contida em vários modelos estivesse longe de ser realista achamos interessante estudá-los para se medir o quão persistente seriam as CTCs em várias possibilidades de geometrias e verificar se em algumas delas as CTCs não poderiam ser eliminadas apenas por considerações dinâmicas. Isso nos levou a estudar a estabilidade dessas curvas.

Fizemos uma rápida revisão de como o problema da existência de CTGs em variedades lorentzianas é tratado na literatura matemática e vimos que o problema só possui resultados quando se lida com variedades compactas ou quando o problema pode ser reduzido a um problema compacto de alguma forma. Uma conjectura do que ocorre no caso de uma variedade lorentziana não-compacta (espaço-tempo) se faz necessária.

Neste trabalho avaliamos a estabilidade das CTCs usando um critério de perturbações de primeira ordem, pretendemos no futuro estender o estudo para perturbações de segunda ordem, desenvolvendo um formalismo para estudar estabilidade de órbitas no contexto da relatividade geral. O estudo desta estabilidade também é importante na modelagem por partícula de corpos celestes, como galáxias, anéis planetários, etc.

Referências Bibliográficas

- [1] S.W. Hawking, K.S. Thorne, I. Novikov, T. Ferris, A. Lightman, R. Price, *The Future of Spacetime*, (W.W. Norton Company Inc., New York, 2002).
- [2] M.S. Morris, K.S. Thorne and U. Yurtsever, *Phys. Rev. Lett.*, **61** 1446 (1988)
- [3] W.B. Bonnor, *Class. Quantum Grav.*, **20**, 3087(2003)
- [4] S.W. Hawking, *Phys. Rev. D*, **46**, 603(1992)
- [5] K. Gödel, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 447(1949)
- [6] W.J. van Stockum, *Proc. R. Soc. Edin.*, **A21**, 135(1937)
- [7] W.B. Bonnor, *Class. Quantum Grav.*, **19**, 5951(2002)
- [8] W.B. Bonnor and B.R.Steadman, *Gen. Rel. Grav.*, **37**, 1833(2005)
- [9] Z. Perjés, *Phys. Rev. Letters*, **27**, 1668(1971)
- [10] W. Israel and G.A.Wilson, *J. Math. Phys.*, **13**, 323(1972)
- [11] J. Pfarr, *Gen. Rel. Grav.*, **13**, 1073(1981)
- [12] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The Large Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973)

- [13] I.D. Soares, J. Math. Phys., **21**, 591 (1980)
- [14] B.R. Steadman, Gen. Rel. Grav., **35**, 1721 (2003)
- [15] M. Gürses, A. Karasu, O. Sarioglu, Class. Quantum. Grav., **22**, 1527 (2005)
- [16] Ø. Grøn and S. Johannesen, Closed timelike geodesics in a gas of cosmic strings, archive: gr-qc/0703139.
- [17] S. Deser, R. Jackiw and G. 't Hooft, Phys. Rev. Letts., **68**, 267 (1992)
- [18] Y.M. Cho and D.H. Park, Phys. Rev. D, **46**, R1219 (1992)
- [19] B. Jensen and H.H. Soleng, Phys. Rev. D, **45**, 3528 (1992)
- [20] H.H. Soleng, Phys. Rev. D, **49**, 1124 (1994)
- [21] P.S. Letelier, Class. Quantum. Grav., **12**, 471 (1995)
- [22] P. de Sousa, Nucl. Phys. B, **346**, 440 (1990)
- [23] R.J. Petti, Gen. Rel. Grav., **18**, 1124 (1986)
- [24] P.S. Letelier, Class. Quantum Grav., **12**, 2221 (1995)
- [25] P.S. Letelier and S.R. Oliveira, Phys. Lett. A, **238**, 101 (1998)
- [26] V.M. Rosa and P.S. Letelier, Stability of closed timelike curves in Gödel universe, Gen. Rel. Grav. in press, gr-qc/0703100.
- [27] M.F. Shirokov, Gen. Rel. Grav., **2**, 131(1971)
- [28] I.D. Soares, Phys. Rev. D, **23**, 272(1981)
- [29] W. Kundt, Z. Phys., **145**, 611(1956)
- [30] S. Chandrasekhar and J.P.Wright, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A, **47**, 341(1961)

- [31] R.J. Gleiser, M. Gürses, A. Karasu and Ö. Sarroğlu, *Class. Quantum Grav.*, **23**, 2653 (2006)
- [32] H. Stephani et al, *Exact Solutions to Einstein's Field Equations* - 2nd ed., (Cambridge monographs on mathematical physics, 2003).
- [33] W.B. Bonnor and J. P. Ward, *Commun. Math. Phys*, **28**, 323(1972)
- [34] V.M. Rosa and P.S. Letelier, Stability of closed timelike geodesics, *Gen. Rel. Grav.*, in press. gr-qc/0703148
- [35] R. Penrose, *Techniques of differential topology in relativity*, (SIAM, Philadelphia, 1972)
- [36] R.M. Wald, *General Relativity* (Chicago, The University of Chicago Press: appendix D, 1985)
- [37] J. Hadamard, *J. Math. Pures Appl.* **4**, 27 (1896)
- [38] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie de Riemann* (Gauthier-Villars, Paris, 128, 1946)
- [39] F.J. Tipler, *Proc. Am. Math. Soc.*, **76**, 145 (1979)
- [40] G.J. Galloway, *Trans. Am. Math. Soc.*, **285**, 379 (2007)
- [41] R.P. Geroch, *J. Math. Phys.*, **8**, 782 (1967)
- [42] J.A. Wheeler, *Geometrodynamics*, (Academic, New York, 1962)
- [43] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973)
- [44] M.D. Kruskal, *Phys. Rev.*, **119**, 1743 (1960).
- [45] F.J. Tipler, *Phys. Rev. D*, **17**, 2521 (1978); T.A. Roman, *Phys. Rev. D*, **33**, 3526 (1986), e **37**, 546 (1988).
- [46] A. Ori, Formation of closed timelike curves in a composed vacuum/dust asymptotically-flat spacetime, gr-qc/0701024.

- [47] P. Glendinning, *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996)

Stability of Closed Timelike Curves in Gödel Universe.

ref.: *Gen. Rel. Grav.* 39, 1419–1435 (2007)

Stability of Closed Timelike Curves in the Gödel Universe.

Valéria M. Rosa¹ and Patricio S. Letelier²

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa,
36570-000 Viçosa, M.G., Brazil

Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica, Universidade Estadual de Campinas, 13083-970, Campinas, SP, Brazil

We study, in some detail, the linear stability of closed timelike curves in the Gödel universe. We show that these curves are stable. We present a simple extension (deformation) of the Gödel metric that contains a class of closed timelike curves similar to the ones associated to the original metric. This extension correspond to the addition of matter whose energy-momentum tensor is analyzed. We find the conditions to have matter that satisfies the usual energy conditions. We study the stability of closed timelike curves in the presence of usual matter as well as in the presence of exotic matter (matter that does satisfy the above mentioned conditions). We find that the closed timelike curves in the Gödel universe with or without the inclusion of regular or exotic matter are stable under linear perturbations. We also find a sort of structural stability.

¹e-mail:vmrosa@ufv.br

²e-mail: letelier@ime.unicamp.br

Introduction

The Gödel universe, a spacetime in which the matter takes the form of a pressure-free perfect fluid with a negative cosmological constant, is the most celebrated solution of Einstein field equations that contains closed timelike curves (CTCs). This spacetime has a five-dimensional group of isometries which is transitive. The matter everywhere rotates relative to the compass of inertia with the angular velocity proportional to the square root of the matter density [1] [2]. Dynamical conditions for time traveling in this spacetime are not sufficient to exclude the existence of CTCs [3].

The Gödel metric has some qualitative features like the projections of geodesics onto the 2-surface (r, ϕ) being simple closed curves. This property can be extended to a set of metrics called Gödel-type. It is possible to show explicitly that when the characteristic vector field that defines a Gödel-type metric is also a Killing vector we have closed timelike or null curves [4]. The study of the geodesic motion of free test particles in these Gödel-type spacetimes can be extended to a family of homogeneous Gödel-type spacetimes [5]. Gürses et al. [6] introduce and used Gödel-types metrics to find charged dust solutions to the Einstein field equations in D dimensions. In the Gödel spacetime timelike geodesics are not closed as was independently proved by Kunt [7] and Chandrasekhar and Wrigth [8]. However there exist timelike curves subject to an external force that are closed.

Exact solutions of Einstein-Maxwell equations that contain CTCs at least for some values of the parameters are studied in [9]. It turns out that magnetic fields can give rise to non-trivial chronology violations. A sufficiently large magnetic field can always ensure chronology violation. The spacetime of an infinite rotating cylindrical shell of charged perfect fluid contains CTCs [10]. For the conditions for the existence of CTCs in the spacetime associated to a rigidly rotating cylinder of charged dust see Ivanov [11]. In spacetimes with conic singularities that represent cosmic strings we can have CTCs for one spinning string [12] and for two parallel moving strings [13].

The stability of Gödel's cosmological model with respect to scalar, vector, and tensor per-

turbation modes using a gauge covariant formalism is considered in [14]. It is found that the background vortical energy contributes to the gravitational pull of matter, while gradients add to the pressure support. The balance between these two agents effectively determines the stability of Gödel universe against matter aggregations.

The possibility to have no violation of causality for geodesics that in finite intervals of time goes back in time ($dt/ds < 0$) was considered by [15]. As it was already mentioned, the existence of CTCs contradicts the usual notion of causality. Beyond the usual paradoxes, it seems to induce physical impossibilities, like the necessity to work with negative energy densities. One could speculate that these impossibilities will be eliminated by quantum-gravitational effects. All our experience seems to indicate that the physical laws do not allow the appearance of CTCs. This is that, essentially, says the Chronology Protection Conjecture (CPC) proposed by Hawking in 1992 [16].

Other possible explanation for CTCs is that the metrics studied until now are unrealistic [17]. But, there exists an exact, asymptotically flat solution of vacuum Einstein equations which contains CTCs that can represent the exterior of a spinning rod of finite length [18].

The existence of CTCs, in principle, should be a matter of experimentation. If the General Relativity predicts them in a physically reasonable situation and they are not found, we will have that this theory is in trouble. If they are found we will have a bigger problem, our usual notion of causality will need a deep revision.

The possibility that a spacetime associated to a realistic model of matter may contain CTCs leads us to ask how permanent is the existence of these curves. Perhaps, one may rule out the CTCs by simple considerations about their linear stability. Otherwise, if these curves are stable under linear perturbations the conceptual problem associated to their existence is enhanced.

In this first paper about linear stability of CTCs we consider the Gödel case due to its historical relevance (first paradigm for CTCs) as well as its mathematical simplicity. We intend to study, in subsequent works, the stability of CTCs in Gödel-type metrics [6, 4], Bonnor metric [18] and other relevant spacetimes. All these metrics presents their own peculiarities that deserve a special treatment.

The paper is divided as follows, in Section 2, we review in some detail the CTCs in the Gödel metric. In particular we present the CTCs and its corresponding forces in the usual Gödel coordinates as well as in Cartesian coordinates. In Section 3 we study the stability of CTCs when they suffer a small perturbation. We solve the linear system of equations for the evolution of the perturbation in the original Gödel coordinates in an exact form. For future reference the same system in Cartesian coordinates is solved numerically for a representative range of initial conditions. In Section 4 we present a simple extension (deformation) of the Gödel metric that corresponds to the addition of matter. We look for the conditions for geodesics to be timelike and to be closed. We prove that these two conditions can not be satisfied at the same time. We present the CTCs in an explicit form together with their associated forces. We find that the addition of matter either usual or exotic does not change the stability of the Gödel CTCs. In the last section we summarize and discuss some of our results.

Gödel metric, geodesics and CTCs

In this section we review the CTCs in Gödel metric following mainly references [1] [3] [7]. In standard coordinates, $\bar{X}^\mu = [\bar{t}, r, \varphi, z]$, the Gödel metric is [3],

$$ds^2 = \frac{4}{\beta^2} \left[d\bar{t}^2 - dr^2 + (\sinh^4 r - \sinh^2 r) d\varphi^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2 r d\bar{t} d\varphi \right] - dz^2, \quad (\text{A.1})$$

where β is a constant that describes the vorticity of the four-vector $u^\mu = [1, 0, 0, 0]$, $-\infty < \bar{t} < \infty$, $-\infty < z < \infty$, $r > 0$ and $\varphi \in [-\pi, \pi]$. The limits $\varphi = -\pi$ and $\varphi = \pi$ are topologically identified.

The metric (A.1) satisfies the Einstein field equations,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.2})$$

with $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$, $\Lambda = -\frac{\beta^2}{2}$ and $\rho = \beta^2$. We use units such that $c = 8\pi G = 1$.

Let us denote by γ the particular closed curve given in its parametric form by,

$$\bar{t} = \bar{t}_0, \quad r = r_0, \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad z = 0, \quad (\text{A.3})$$

where t_0 and r_0 are constants. When γ is parametrized with an arbitrary variable u the condition to be timelike is $\frac{d\bar{X}^\mu}{du} \frac{d\bar{X}_\mu}{du} > 0$. The curve γ is timelike when $r_0 > \log(\sqrt{2} + 1)$. The four-acceleration of this CTC is

$$\bar{a}^\mu = \delta_1^\mu \sinh r_0 \cosh r_0 (2 \cosh^2 r_0 - 3) \dot{\varphi}^2. \quad (\text{A.4})$$

In the “Cartesian” coordinates $X^\mu = (t, x, y, z)$ defined by

$$y = (\cosh(2r) + \sinh(2r) \cos \varphi)^{-1}, \quad (\text{A.5})$$

$$\beta x = (\sinh(2r) \sin \varphi) y, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\varphi}{2} + \left(\frac{\beta t - 2\bar{t}}{2\sqrt{2}} \right) = \arctan \left(e^{-2r} \tan \frac{\varphi}{2} \right), \quad (\text{A.7})$$

$$z = z, \quad (\text{A.8})$$

with $-\infty < t < \infty$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < z < \infty$, and $\infty > y > 0$ we find that the line element (A.1) reduces to

$$ds^2 = \left[dt + \frac{\sqrt{2} dx}{\beta y} \right]^2 - \frac{dx^2 + dy^2}{(\beta y)^2} - dz^2. \quad (\text{A.9})$$

In these coordinates the geodesic equation gives us,

$$\ddot{t} = \frac{2}{y} \dot{t} \dot{y} + \frac{\sqrt{2}}{\beta y^2} \dot{x} \dot{y}, \quad (\text{A.10})$$

$$\ddot{x} = -\beta \sqrt{2} \dot{t} \dot{y}, \quad (\text{A.11})$$

$$\ddot{y} = \beta \sqrt{2} \dot{t} \dot{x} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y}, \quad (\text{A.12})$$

$$\ddot{z} = 0, \quad (\text{A.13})$$

where the overdot indicates derivation with respect to the proper time s . This system of equations admits the first integrals,

$$\dot{t} = \frac{2y - y_0}{\sqrt{2}C}, \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{x} = \frac{\beta y}{C} (y_0 - y), \quad (\text{A.15})$$

$$\dot{y} = \frac{\beta y}{C} (x - x_0), \quad (\text{A.16})$$

$$\dot{z} = \frac{d}{C}, \quad (\text{A.17})$$

where x_0 , y_0 , d and C are integration constants. The solution of this system is

$$t = \frac{\sqrt{2}}{\beta} \left[2 \arctan \left(\sqrt{N} \tan \sigma \right) - \frac{N+1}{2\sqrt{N}} \sigma \right] + t_0, \quad (\text{A.18})$$

$$x = \frac{2\sqrt{N} \eta \sin \sigma \cos \sigma}{\cos^2 \sigma + N \sin^2 \sigma} + x_0, \quad (\text{A.19})$$

$$y = \frac{y_0 - \eta}{\cos^2 \sigma + N \sin^2 \sigma}, \quad (\text{A.20})$$

$$z = \frac{2\sigma d}{\beta \sqrt{y_0^2 - \eta^2}} + z_0, \quad (\text{A.21})$$

with

$$\sigma = \frac{\beta \sqrt{y_0^2 - \eta^2}}{2C} (s - s_0), \quad (\text{A.22})$$

$$N = \frac{y_0 - \eta}{y_0 + \eta}, \quad (\text{A.23})$$

where t_0 is an integration constant, and η is given by $\eta^2 := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

The relation $\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu = 1$ (with $z = 0$) reduces to

$$\left(\dot{t} + \frac{\sqrt{2}}{\beta y} \dot{x} \right)^2 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{(\beta y)^2} = 1. \quad (\text{A.24})$$

From (A.14)-(A.16) we get

$$y_0^2 = 2(C^2 + \eta^2). \quad (\text{A.25})$$

Therefore

$$y_0^2 > 2\eta^2. \quad (\text{A.26})$$

The condition for a geodesic to be closed, i.e., $t(-\frac{\pi}{2}) = t(\frac{\pi}{2})$, $x(-\frac{\pi}{2}) = x(\frac{\pi}{2})$ e $y(-\frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2})$, is

$$4\sqrt{N} = N + 1 \Rightarrow y_0^2 = \frac{4}{3}\eta^2 \quad (\text{A.27})$$

that contradicts (A.26). Hence we have no timelike closed geodesics in the Gödel universe.

In order to obtain a CTC in Cartesian coordinates we use another differential equation for t obtained from (A.24) and equations (A.19) and (A.20). Then

$$\left[\dot{t} + \frac{\sqrt{2}}{C} (y_0 - y) \right]^2 = \frac{C^2 + \eta^2}{C^2}, \quad (\text{A.28})$$

whose solution is

$$t = \frac{2\sqrt{2}}{\beta} \left[\arctan \left(\sqrt{N} \tan \sigma \right) - \frac{y_0 \sqrt{2} - \sqrt{C^2 + \eta^2}}{\sqrt{2(y_0^2 - \eta^2)}} \sigma \right] + t_0. \quad (\text{A.29})$$

These timelike curves are closed when

$$C^2 = 2(y_0 - \sqrt{y_0^2 - \eta^2})^2 - \eta^2. \quad (\text{A.30})$$

By replacing these parametric equations for the CTC into the geodesic equations we find that the four-acceleration satisfies the relations

$$a^0 = -(x - x_0) \frac{\lambda \sqrt{2}}{\beta}, \quad a^1 = \lambda y (x - x_0), \quad a^2 = -\lambda y (y_0 - y), \quad a^3 = 0, \quad (\text{A.31})$$

where

$$\lambda = \frac{\beta^2}{C^2} \left[\sqrt{2(C^2 + \eta^2)} - y_0 \right]. \quad (\text{A.32})$$

The right hand side of (A.31) can be interpreted as the components of a specific external force F^μ associated to γ .

It is instructive to compare the force given in these two systems of coordinates. In Gödel standard coordinates we have $g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2 = 1$. Therefore along the CTC γ we have

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\beta^2}{4(\sinh^4 r_0 - \sinh^2 r_0)}. \quad (\text{A.33})$$

From equation (A.4) we can write the non zero component of the force in following way,

$$\bar{F}^1 = \frac{\beta^2 \sinh r_0 \cosh r_0 (2 \cosh^2 r_0 - 3)}{4(\sinh^4 r_0 - \sinh^2 r_0)} = \frac{\beta^2 \sinh 2r_0 (\cosh 2r_0 - 2)}{2((\cosh 2r_0 - 2)^2 - 1)}. \quad (\text{A.34})$$

The non zero components of force in Cartesian coordinates are,

$$F^0 = -\frac{2\sqrt{2}}{\eta\beta} (x - x_0) \bar{F}^1, \quad (\text{A.35})$$

$$F^1 = \frac{2y}{\eta} (x - x_0) \bar{F}^1, \quad (\text{A.36})$$

$$F^2 = -\frac{2y}{\eta} (y_0 - y) \bar{F}^1, \quad (\text{A.37})$$

$$F^3 = 0. \quad (\text{A.38})$$

On γ the constants in (A.22) and (A.23) are now $N = e^{-2r_0}$, $y_0 = \cosh 2r_0$ and $\eta = \sinh 2r_0$. Therefore

$$\bar{F}^1 = \frac{\beta^2 \eta (y_0 - 2)}{2((y_0 - 2)^2 - 1)}. \quad (\text{A.39})$$

By using the condition (A.30) we can cast λ as

$$\lambda = \frac{\beta^2 (y_0 - 2)}{(y_0 - 2)^2 - 1}. \quad (\text{A.40})$$

Hence

$$\bar{F}^1 = \frac{\eta}{2} \lambda, \quad (\text{A.41})$$

that is force calculated in (A.31).

Linear perturbation of CTCs in the Gödel universe

A generic CTC γ satisfies the system of equations given by

$$\frac{D}{ds} \dot{X}^\mu = F^\mu(X), \quad (\text{A.42})$$

where $\frac{D}{ds}()$ is the covariant derivative of the vector field $()^\alpha$ along $\gamma(s)$ and F^μ is a given external force.

Let $\tilde{\gamma}$ be the curve obtained from γ after a perturbation ξ , i.e., $\tilde{X}^\mu = X^\mu + \xi^\mu$. Let e_α be a given basis. In this basis (A.42) is represented by the equation $\frac{D\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{F}$, where $\frac{D\mathbf{u}}{ds} = (\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha u^\beta u^\mu) e_\alpha$, $\mathbf{F} = F^\alpha e_\alpha$, $\mathbf{u} = u^\alpha e_\alpha$ and $u^\alpha = \dot{X}^\alpha$. In order to find the behavior of ξ we calculate the variation, in first approximation, of both sides of $\frac{D\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{F}$. We find,

$$\frac{\delta D\mathbf{u}}{ds} = \left(\frac{d^2 \xi^\alpha}{ds^2} + 2\Gamma_{\beta\mu}^\alpha \frac{d\xi^\beta}{ds} u^\mu + \Gamma_{\beta\mu,\lambda}^\alpha \xi^\lambda u^\beta u^\mu \right) e_\alpha + F^\alpha \delta e_\alpha \quad (\text{A.43})$$

$$\delta \mathbf{F} = F^\alpha{}_{,\beta} \xi^\beta e_\alpha + F^\alpha \delta e_\alpha. \quad (\text{A.44})$$

where $()_{,\lambda} = \frac{\partial ()}{\partial x^\lambda}$. Comparing the last two equations we get the system of differential equation satisfied by the perturbation ξ

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{ds^2} + 2\Gamma_{\beta\mu}^\alpha \frac{d\xi^\beta}{ds} u^\mu + \Gamma_{\beta\mu,\lambda}^\alpha \xi^\lambda u^\beta u^\mu = F^\alpha{}_{,\beta} \xi^\beta. \quad (\text{A.45})$$

This last equation can be cast in a manifestly covariant form by noticing that its left-hand-side is the well known geodesic deviation equation as pointed out in [27] and its right-hand-side is the Lie derivative of the force along ξ^μ .

In standard coordinates $\bar{X}^\mu = [\bar{t}, r, \varphi, z]$, the system (A.45) reduces to

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}^0 + a \dot{\xi}^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^1 + b \dot{\xi}^0 + c \dot{\xi}^2 + d \xi^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^2 + e \dot{\xi}^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^3 &= 0,\end{aligned}\tag{A.46}$$

where

$$\begin{aligned}a &= (\beta \sinh^2 r_0 \sqrt{2})/(\cosh r_0 \sqrt{\sinh^2 r_0 - 1}), \\ b &= \beta \sqrt{2} \cosh r_0 / \sqrt{\sinh^2 r_0 - 1}, \\ c &= \beta \cosh r_0 (2 \cosh^2 r_0 - 3) / \sqrt{\sinh^2 r_0 - 1}, \\ d &= \beta^2 \cosh^2 r_0 (2 \cosh^2 r_0 - 3)^2 / (2 \sinh^2 r_0 (\sinh^2 r_0 - 1)^2), \\ e &= \beta / (\sinh r_0 \cosh r_0 \sqrt{\sinh^2 r_0 - 1})\end{aligned}\tag{A.47}$$

The solution of system of equations (A.46) is,

$$\begin{aligned}\xi^0 &= -a(c_3 \sin(\omega s + c_4)/\omega + \tau s) + c_1 s + c_5, \\ \xi^1 &= c_3 \cos(\omega s + c_4) + \tau, \\ \xi^2 &= -e(c_3 \sin(\omega s + c_4)/\omega + \tau s) + c_2 s + c_6, \\ \xi^3 &= c_7 s + c_8,\end{aligned}\tag{A.48}$$

where c_i , $i = 1, \dots, 8$ are integration constants, $\omega = \sqrt{d - ab - ce}$, and $\tau = -(bc_1 + cc_2)/\omega^2$. In order that the perturbed curve, $\tilde{\gamma}$, remains on the plane $z = 0$ we take initial conditions such that $c_7 = c_8 = 0$, i.e., $\xi^3 = 0$. The solution (A.48) shows the typical behavior for stability, we have vibrational modes untangled with translational ones that can be eliminated by a suitable choice of the initial conditions.

For future reference, we study the linear stability of the CTCs in Cartesian coordinates. In these coordinates the system (A.45) can be written as

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi}^0 &= a_{00}\dot{\xi}^0 + a_{01}\dot{\xi}^1 + a_{02}\dot{\xi}^2 + b_{01}\xi^1 + b_{02}\xi^2 \\
\ddot{\xi}^1 &= a_{10}\dot{\xi}^0 + a_{11}\dot{\xi}^1 + a_{12}\dot{\xi}^2 + b_{11}\xi^1 + b_{12}\xi^2 \\
\ddot{\xi}^2 &= a_{20}\dot{\xi}^0 + a_{21}\dot{\xi}^1 + a_{22}\dot{\xi}^2 + b_{21}\xi^1 + b_{22}\xi^2 \\
\ddot{\xi}^3 &= 0,
\end{aligned} \tag{A.49}$$

where (a_{ij}) and (b_{ij}) are given by

$$(a_{ij}) = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} \frac{4\beta S e^{-2r_0}}{D} & 2\sqrt{2} S & \sqrt{2}(1 + (y_0 - 2)D e^{2r_0}) \\ -\frac{2\sqrt{2}\beta^2 S e^{-4r_0}}{D^2} & 0 & -2\beta \left(\frac{e^{-2r_0}}{D} - 1 \right) \\ \frac{\sqrt{2}\beta^2 e^{-2r_0}}{D} \left(y_0 - \frac{e^{-2r_0}}{D} \right) & 2\beta(y_0 - 1) & \frac{4\beta S e^{-2r_0}}{D} \end{bmatrix}, \tag{A.50}$$

$$(b_{ij}) = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda\sqrt{2}}{\beta} & -\frac{y_0 - 1}{C^2} 4\sqrt{2}S \\ \frac{e^{-2r_0} \lambda}{\cos^2 \sigma + e^{-4r_0} \sin^2 \sigma} & \frac{2e^{-2r_0} S \lambda}{\cos^2 \sigma + e^{-4r_0} \sin^2 \sigma} \\ 0 & \lambda \left[\frac{2e^{-2r_0}}{\cos^2 \sigma + e^{-4r_0} \sin^2 \sigma} - y_0 \right] - \frac{\eta^2 \beta^2}{C^2} \end{bmatrix}, \tag{A.51}$$

and

$$D = \cos^2 \sigma + e^{-4r_0} \sin^2 \sigma, \quad S = \eta \sin \sigma \cos \sigma. \tag{A.52}$$

As before, we take $\xi^3 = 0$ in order that $\tilde{\gamma}$ does not leave the plane $z = 0$.

To describe the behavior of perturbed curve $\tilde{\gamma}$ we introduce two distance and one angle functions,

$$R_2^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \tag{A.53}$$

$$R_3^2 = (t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \tag{A.54}$$

$$\phi = \arctan \frac{y - y_0}{x - x_0}. \tag{A.55}$$

The first function is a constant equal to η when x and y are on the CTC γ . The second represent a “radius” in spacetime and the third one is an angle on the usual space. The variation of these functions along $\gamma(s)$ are,

$$\delta R_2 = [(x - x_0)\xi^1 + (y - y_0)\xi^2]/\eta, \quad (\text{A.56})$$

$$\delta R_3 = [(t - t_0)\xi^0 + (x - x_0)\xi^1 + (y - y_0)\xi^2]/R_3, \quad (\text{A.57})$$

$$\delta\phi = [(x - x_0)\xi^2 - (y - y_0)\xi^1]/\eta. \quad (\text{A.58})$$

To study these functions we solve the system (A.49) by running the independent variable σ , first from $-\pi/2$ to 0 and second from $\pi/2$ to 0, we recall that the points $-\pi/2$ and $\pi/2$ on the curve are identified. We keep the initial position of the perturbation equal to zero and analyze the behavior of δR_2 , $\delta\phi$ and δR_3 . The perturbation initial velocity is taken each time with only one component different from zero.

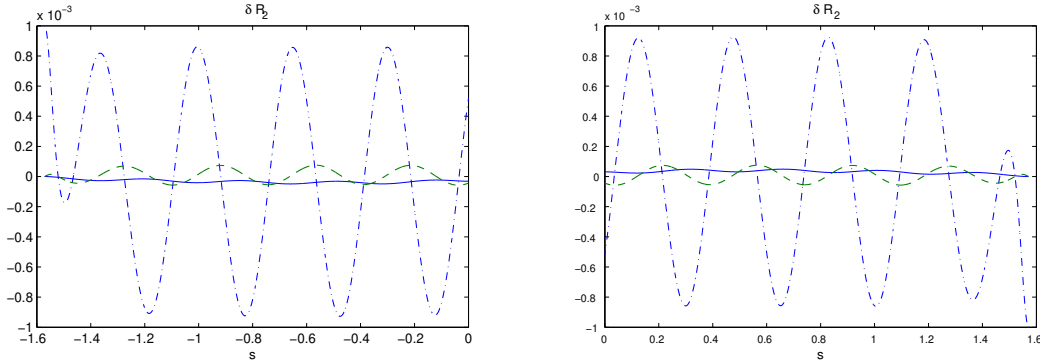


Figure A.1: Variation of the radius R_2 of the perturbed curve, with $r_0 = 1.5$ and $\beta = 1$. The initial conditions for the first graph are: a) $\xi^\mu(-\frac{\pi}{2}) = [0, 0, 0, 0]$, $\dot{\xi}^\mu(-\frac{\pi}{2}) = [10^{-3}, 0, 0, 0]$ (solid line), b) $\xi^\mu(-\frac{\pi}{2}) = [0, 0, 0, 0]$, $\dot{\xi}^\mu(-\frac{\pi}{2}) = [0, 10^{-3}, 0, 0]$ (dot-dashed line), and c) $\xi^\mu(-\frac{\pi}{2}) = [0, 0, 0, 0]$, $\dot{\xi}^\mu(-\frac{\pi}{2}) = [0, 0, 10^{-3}, 0]$ (dashed line). And initial conditions for the second graph are: a) $\xi^\mu(\frac{\pi}{2}) = [0, 0, 0, 0]$, $\dot{\xi}^\mu(\frac{\pi}{2}) = [-10^{-3}, 0, 0, 0]$ (solid line), b) the $\xi^\mu(\frac{\pi}{2}) = [0, 0, 0, 0]$, $\dot{\xi}^\mu(\frac{\pi}{2}) = [0, -10^{-3}, 0, 0]$ (dot-dashed line), and $\xi^\mu(\frac{\pi}{2}) = [0, 0, 0, 0]$, $\dot{\xi}^\mu(\frac{\pi}{2}) = [0, 0, -10^{-3}, 0]$ (dashed line).

In Fig. A.1 we show graphics that represent the variation of radius R_2 of perturbed curve, with $r_0 = 1.5(\eta \sim 10)$ and $\beta = 1$. For the first graph the initial conditions are: a) $\xi^\mu(-\frac{\pi}{2}) = [0, 0, 0, 0]$, $\dot{\xi}^\mu(-\frac{\pi}{2}) = [10^{-3}, 0, 0, 0]$ (solid line), b) $\xi^\mu(-\frac{\pi}{2}) = [0, 0, 0, 0]$, $\dot{\xi}^\mu(-\frac{\pi}{2}) = [0, 10^{-3}, 0, 0]$

(dot-dashed line), and c) $\xi^\mu(-\frac{\pi}{2}) = [0, 0, 0, 0]$, $\dot{\xi}^\mu(-\frac{\pi}{2}) = [0, 0, 10^{-3}, 0]$ (dashed line). And for the second are: a) $\xi^\mu(\frac{\pi}{2}) = [0, 0, 0, 0]$, $\dot{\xi}^\mu(\frac{\pi}{2}) = [-10^{-3}, 0, 0, 0]$ (solid line), b) the $\xi^\mu(\frac{\pi}{2}) = [0, 0, 0, 0]$, $\dot{\xi}^\mu(\frac{\pi}{2}) = [0, -10^{-3}, 0, 0]$ (dot-dashed line), and $\xi^\mu(\frac{\pi}{2}) = [0, 0, 0, 0]$, $\dot{\xi}^\mu(\frac{\pi}{2}) = [0, 0, -10^{-3}, 0]$ (dashed line).

In Figs. A.2 and A.3 we show graphics that represent $\delta\phi$ and δR_3 , respectively, computed with the same initial conditions used for δR_2 .

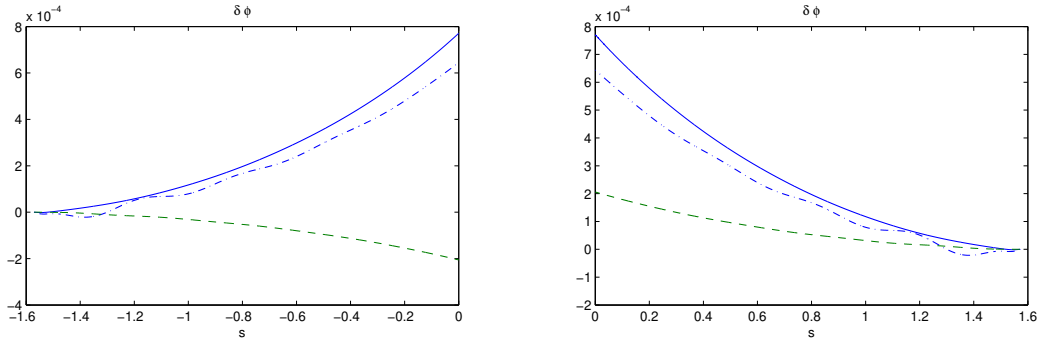


Figure A.2: Variation of the angle ϕ for the perturbed curve with the same initial conditions of Fig. A.1.

We consider a generic perturbation δu small when $\frac{(\delta u)^2}{\delta u} \leq 0.01$, i.e., $(\delta u)^2 \ll \delta u$. All the variations presented in the graphics satisfy by large this smallness conditions. We have typical vibrational modes for δR_2 and δR_3 and mainly translational modes for $\delta\phi$. We tested this smallness condition for a significant variety of initial conditions and values of r_0 , we find that this condition is always satisfied even for curves that are near the bound given by $r_0 > \log(\sqrt{2} + 1)$.

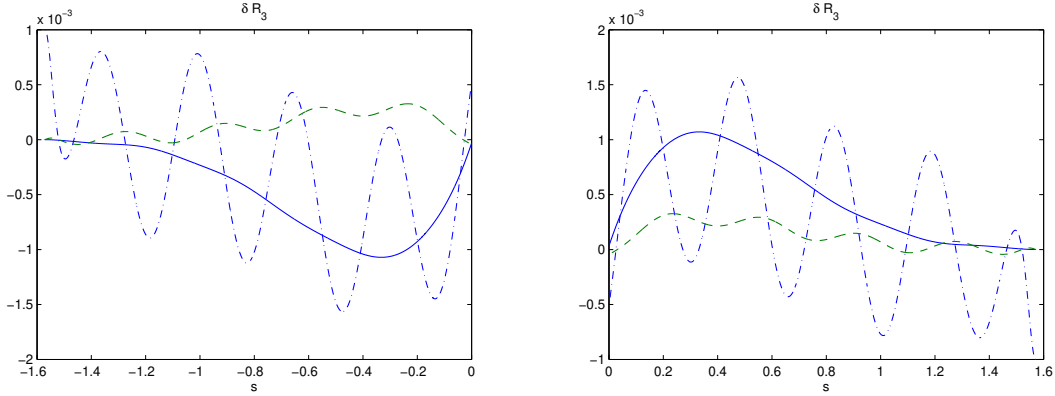
CTCs and matter

The material source of the Gödel metric is a pressure-free perfect fluid. In this section we study the persistence and stability of the CTCs when we add matter with pressure or tension.

Let us consider the metric,

$$ds^2 = (dt + \frac{\sqrt{2}h_1}{\beta y}dx)^2 - \frac{h_2^2}{(\beta y)^2}(dx^2 + dy^2) - dz^2 \quad (\text{A.59})$$

that for $h_1 = h_2 = 1$ reduces to Gödel metric. This metric can be considered as a deformation of the original Gödel metric (See Appendix A).

Figure A.3: Variation of R_3 with same initial conditions of Fig. A.1.

First, to understand the physical meaning of the changes introduced in (A.59) we compute the associated energy-momentum tensor from the Einstein field equations with the same cosmological constant as in the Gödel metric ($\Lambda = -\beta^2/2$). We get,

$$(T^\mu_\nu) = \begin{bmatrix} \frac{\beta^2(3h_1^2-2h_2^2+h_2^4)}{2h_2^4} & \frac{\sqrt{2}\beta h_1(2h_1^2-h_2^2)}{yh_2^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2(h_2^4-h_1^2)}{2h_2^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta^2(h_2^4-h_1^2)}{2h_2^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta^2(h_1^2-2h_2^2+h_2^4)}{2h_2^4} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.60})$$

By solving the eigenvector equation,

$$T^\mu_\nu \xi^\nu = \lambda \xi^\mu, \quad (\text{A.61})$$

we find the eigenvalues: $\lambda_0 = \frac{A\beta^2}{B}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{C\beta^2}{B}$ and $\lambda_3 = \frac{D\beta^2}{B}$, where $A = 3h_1^2 - 2h_2^2 + h_2^4$, $B = 2h_2^4$, $C = h_2^4 - h_1^2$ and $D = h_1^2 - 2h_2^2 + h_2^4$. The timelike eigenvector $u^\mu = [1, 0, 0, 0]$ is associated to λ_0 , and the spacelike eigenvectors $X^\mu = [-\frac{\sqrt{2}h_1}{h_2}, \frac{\beta y}{h_2}, 0, 0]$, $Y^\mu = [0, 0, \frac{\beta y}{h_2}, 0]$, and $Z^\mu = [0, 0, 0, 1]$ are associated to λ_1 , λ_2 , and λ_3 , respectively. We can write the energy-tensor in its canonical form as,

$$T^{\mu\nu} = \lambda_0 u^\mu u^\nu + \lambda_1 (X^\mu X^\nu + Y^\mu Y^\nu) + \lambda_3 (Z^\mu Z^\nu). \quad (\text{A.62})$$

In order to have realistic matter, the eigenvalue λ_0 that represents energy density, and the eigenvalues $\lambda_1 = \lambda_2$ and λ_3 that describe pressures (or tensions) are restricted. λ_0 must be

non-negative (weak energy condition) and $\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 > 0$ (strong energy condition) [2]. The weak energy condition is satisfied when $h_1^2 > \frac{2h_2^2 - h_2^4}{3}$. If, furthermore, we have $h_1^2 > \frac{h_2^4}{2}$ the strong energy condition is also satisfied.

Simple modifications as the one presented in (A.59) of the Gödel metric written in standard coordinates are not associated with an energy-momentum tensor with a simple physical interpretations nor to geodesic equations that can exactly be solved. This justify our use of Cartesian coordinates.

Returning to the analysis of the curves in this new geometry, we have that the geodesic equations are,

$$\ddot{t} - \frac{2h_1^2}{yh_2^2}\dot{t}\dot{y} - \frac{\sqrt{2}h_1}{\beta y^2 h_2^2}(2h_1^2 - h_2^2)\dot{x}\dot{y} = 0 \quad (\text{A.63})$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta\sqrt{2}h_1}{h_2^2}\dot{t}\dot{y} + \frac{2\dot{x}\dot{y}}{yh_2^2}(h_1^2 - h_2^2) = 0 \quad (\text{A.64})$$

$$\ddot{y} - \frac{\beta\sqrt{2}h_1}{h_2^2}\dot{t}\dot{x} - \frac{2h_1^2 - h_2^2}{yh_2^2}(\dot{x})^2 - \frac{1}{y}(\dot{y})^2 = 0 \quad (\text{A.65})$$

$$\ddot{z} = 0. \quad (\text{A.66})$$

By appropriated choice of the constants of integration, the first integrals to these geodesic equations can be written as (A.14)-(A.17) replacing $\dot{t}$ by

$$\dot{t} = \frac{1}{\sqrt{2}Ch_1}[2yh_1^2 - y_0(2h_1^2 - h_2^2)]. \quad (\text{A.67})$$

Therefore

$$t = \frac{\sqrt{2}}{\beta}[2 \arctan(\sqrt{N} \tan \sigma)h_1 - \frac{(2h_1^2 - h_2^2)(N+1)}{h_1} \frac{1}{2\sqrt{N}}\sigma] + x_0^0. \quad (\text{A.68})$$

We have timelike geodesics for

$$y_0 = \cosh 2r_0 < \frac{\sqrt{2}h_1}{\sqrt{2h_1^2 - h_2^2}}, \quad (\text{A.69})$$

that are closed whenever

$$y_0 = \cosh 2r_0 = \frac{2h_1^2}{2h_1^2 - h_2^2}. \quad (\text{A.70})$$

Hence, as before, we have no closed timelike geodesics in the spacetime whose metric is given by (A.59). In this metric we can find equations for CTCs in the same way as before. For $z = 0$, we have

$$t = \frac{2\sqrt{2}}{\beta} \left[\arctan(\sqrt{N} \tan \sigma) h_1 - \frac{\sqrt{2} y_0 h_1 - \sqrt{C^2 + h_2^2 \eta^2}}{\sqrt{2} \sqrt{y_0^2 - \eta^2}} \sigma \right] + t_0. \quad (\text{A.71})$$

The condition for closed curves is

$$C^2 = 2h_1^2(y_0 - \sqrt{y_0^2 - \eta^2})^2 - h_2^2 \eta^2. \quad (\text{A.72})$$

The components of force are,

$$F_p^0 = -(x - x_0) \frac{\lambda(h_1, h_2) \sqrt{2}}{\beta}, \quad (\text{A.73})$$

$$F_p^1 = (x - x_0) y \lambda(h_1, h_2), \quad (\text{A.74})$$

$$F_p^2 = -y \lambda(h_1, h_2)(y_0 - y), \quad (\text{A.75})$$

$$F_p^3 = 0, \quad (\text{A.76})$$

where

$$\lambda(h_1, h_2) = \frac{\beta^2(\sqrt{2}\sqrt{C^2 + h_2^2 \eta^2} h_1 - y_0 h_1^2)}{C^2 h_2^2}. \quad (\text{A.77})$$

We have CTCs when $C^2 > 0$. From (A.72) we find the relation between h_1 and h_2 to have CTCs,

$$h_1^2 > \frac{\eta^2 h_2^2}{2(y_0 - 1)^2}. \quad (\text{A.78})$$

From the equations for the CTCs it is possible to analyze its stability under linear perturbation. As before, we write the coordinates of the perturbed curve as $\tilde{X}^\mu = X^\mu + \xi^\mu$ and find a system like (A.45), where (a_{ij}) , (b_{ij}) are now given by

$$(a_{ij}) = \frac{1}{Ch_2^2} \begin{bmatrix} \frac{4\beta S e^{-2r_0} h_1^2}{D} & 2\sqrt{2} S h_1 N_1 & \frac{2\sqrt{2} h_1 (2h_1 - N_1 + (y_0 N_1 - 2h_1) D e^{2r_0})}{2} \\ -\frac{2\sqrt{2} \beta^2 S e^{-4r_0} h_1}{D} & -\frac{4\beta S e^{-2r_0} N_2}{D^2} & \frac{-2\beta(e^{-2r_0}(N_2 + h_1) - D(h_1 + N_2 y_0))}{D} \\ \frac{\sqrt{2} \beta^2 e^{-2r_0} h_1 (y_0 D - e^{-2r_0})}{D^2} & \frac{2\beta(e^{-2r_0}(h_1 - N_2) - D(h_1^2 - N_1 y_0))}{D} & \frac{4\beta S e^{-2r_0}}{D} \end{bmatrix} \quad (\text{A.79})$$

$$(b_{ij}) = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda\sqrt{2}}{\beta} & -\frac{e^{-2r_0}(N_1 - h_1) + D(h_1 - N_1 y_0)}{Dh_2^2 C^2} 4\sqrt{2}\beta S \\ \frac{e^{-2r_0} \lambda}{D} & \frac{e^{-2r_0} S}{D} \left[\frac{4\beta^2 N_2}{h_2^2 C^2} \left(\frac{e^{-2r_0}}{D} - y_0 \right) + 2\lambda \right] \\ 0 & \lambda \left[\frac{2e^{-2r_0}}{\cos^2 \sigma + e^{-4r_0} \sin^2 \sigma} - y_0 \right] - \frac{\beta^2}{h_2^2 C^2} \left[N_1 \left(\frac{e^{-2r_0}}{D} - y_0 \right)^2 + \frac{4h_2^2 S^2 e^{-4r_0}}{D^2} \right] \end{bmatrix}, \quad (\text{A.80})$$

$N_1 = 2h_1^2 - h_2^2$, $N_2 = h_2^2 - h_1^2$, and λ is like in (A.77). As before, $\ddot{\xi}^3 = 0$ and we do $\xi^3 = 0$.

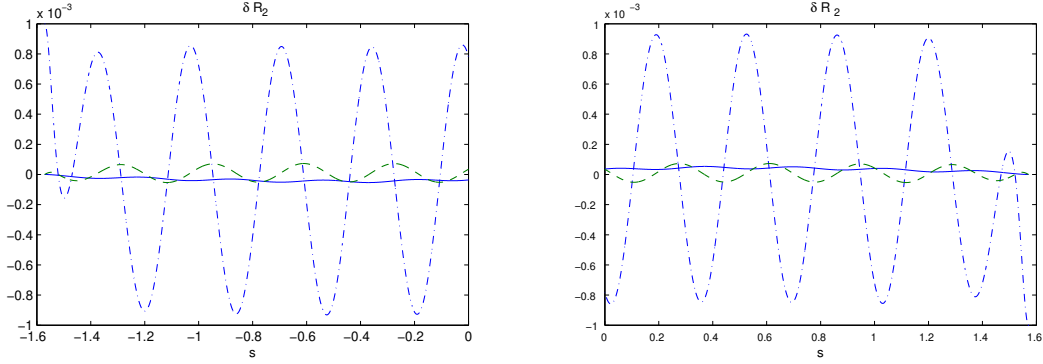


Figure A.4: Similar curves as in the Fig.A.1 with the same initial conditions. But, now we have ordinary matter with parameters $h_1 = \sqrt{1.1}$ and $h_2 = \sqrt{1.1}$.

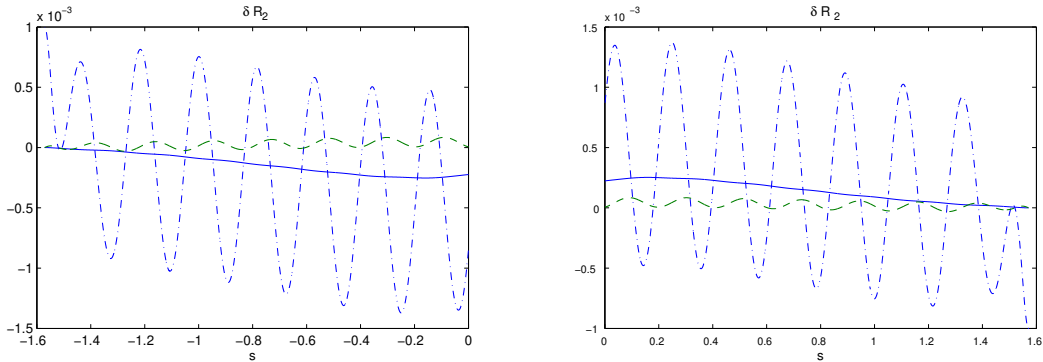


Figure A.5: Similar curves as in the Fig. A.1 with the same initial conditions. But, now we have exotic matter with parameter $h_1 = \sqrt{2.7}$ and $h_2 = \sqrt{2.4}$.

The analysis of the linear stability of CTCs in this new universe is made in the same way

as in the Gödel's case. Several initial conditions are tested and the results for usual as well as for exotic matter are very similar to those obtained before. We tested the stability of CTCs in various scenarios. In Fig. A.4 we plot the function δR_2 for the same initial conditions used in Fig. A.1 and $h_1 = \sqrt{1.1}$, $h_2 = \sqrt{1.1}$. We see a similar behavior as in the pure Gödel case. In Fig. A.5 we show δR_2 for the same initial conditions for exotic matter ($\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 < 0$) with $h_1 = \sqrt{2.7}$, $h_2 = \sqrt{2.4}$. We see that the linear stability is kept.

For some values of h_1 and h_2 the condition $C^2 > 0$ [see, Eq. (A.72)] is not true. Therefore it is possible to have spacetimes with a metric like (A.59) with no CTCs for $r_0 > \log(1 + \sqrt{2})$ and any kind of matter (ordinary or exotic).

In Fig. A.6 three lines divide the (h_2^2, h_1^2) -plane in four regions of interest that are marked with *I*, *II*, *III* and *IV*. In the region above the dot-dashed line [$h_1^2 = (2h_2^2 - h_2^4)/3$] we have matter with positive energy density. Above the solid line [$h_1^2 = (h_2^4)/2$] the strong energy condition is fulfilled. Under the solid line we have exotic matter. The dashed line (straight line) separates the values of h_1 and h_2 for spacetimes with CTCs (above) to the ones that do not have CTCs (below). This line is $h_1^2 = 0.862030830483155h_2^2$ that is obtained replacing $r_0 = 1$ in (A.78).

Therefore, when $(h_2^2, h_1^2) \in I$ the spacetime contains CTCs and ordinary matter. For $(h_2^2, h_1^2) \in II$ the spacetime contains ordinary matter, but not CTCs. If $(h_2^2, h_1^2) \in III$ the spacetime contains CTCs and exotic matter. And when $(h_2^2, h_1^2) \in IV$ the spacetime contains exotic matter, but not CTCs. The isolated point represent the Gödel universe $(h_1, h_2) = (1, 1)$. As we can see in this figure we have an open neighborhood of the point $(1, 1)$ (Gödel spacetime) where the matter is ordinary, the CTCs are present and are stable as depicted in Fig. A.6.

Loosely speaking, we have structural stability of a vector field when the equations that it satisfies are slightly changed we also have a small change in the trajectories represented by the vector field (for a simple introduction to this subject see reference [21]). We see that the addition of matter with constants $h_1 \sim 1$ and $h_2 \sim 1$ changes “slightly” the original geodesic equations for the Gödel metric. We still have closed curved that are similar to the original Gödel CTCs. Therefore we can say that the Gödel CTCs are structural stable under the inclusion of

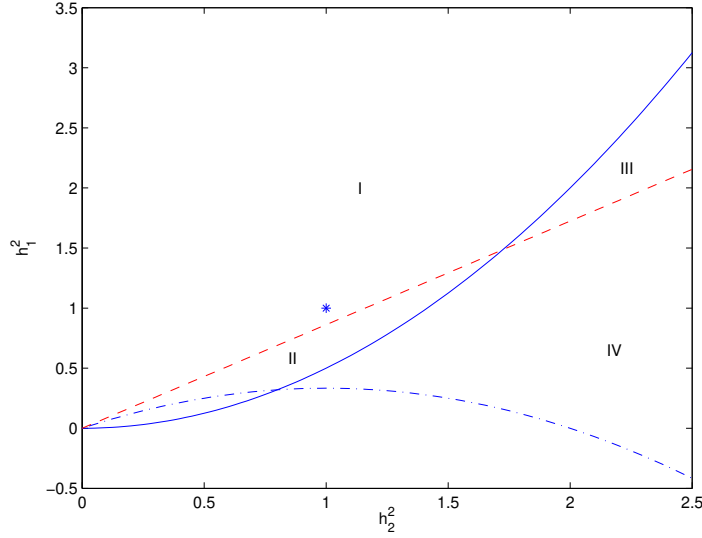


Figure A.6: For values of $(h_2^2, h_1^2) \in I$ we have spacetimes with CTCs and ordinary matter. When $(h_2^2, h_1^2) \in II$ the spacetime contains ordinary matter, but not CTCs. If $(h_2^2, h_1^2) \in III$ the spacetime contains CTCs and exotic matter. And for $(h_2^2, h_1^2) \in IV$ the spacetime contains exotic matter, but not CTCs. The isolated point represent the Gödel universe $(h_1, h_2) = (1, 1)$.

the special matter represented by the energy-momentum tensor (A.60).

Conclusions

In this work we verify that the closed timelike curves in Gödel spacetime are stable under linear perturbations. We also show that the Gödel spacetime has a stable structure under a special class of deformations. We found explicit CTCs in the deformed spacetime and proved that closed timelike geodesics do not exist. The energy-momentum tensor of the deformed spacetime was studied in some detail, specially we examined the conditions to have exotic and usual matter. We studied the stability of the new CTCs under linear perturbation and found that these curves are also stable. We tested these curves in a spacetime with exotic matter and find the same properties of stability as in the case of ordinary matter. We also find a kind of structural stability of the CTCs.

Acknowledgements: VMR thanks Departamento de Matemática-UFV for giving the conditions to finish this work which was partially supported by PICDT-UFV/CAPES. PSL thanks the partial financial support of FAPESP and CNPq.

Appendix A

Gödel in his seminal article [1] mentions that his metric has five isometries [1]; Kundt [7] shows explicitly four out of the five Killing vectors of the above mentioned metric in Cartesian coordinates,

$$\zeta_{(0)} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \zeta_{(1)} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \zeta_{(3)} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\text{A.81})$$

$$\zeta_{(2)} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (\text{A.82})$$

The fifth Killing vector is not so trivial we find,

$$\zeta_{(4)} = \frac{\sqrt{2}}{\beta}(y-1)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}(1-y^2+x^2)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}. \quad (\text{A.83})$$

For a discussion of the topology of Gödel metric and the five Killing vectors in a different system of coordinates, see [20].

The five Gödel Killing vectors plus the discrete symmetry of reflection on the $z = 0$ plane ($z \rightarrow -z$) give us a family of metrics, that we will named the Gödel family,

$$ds^2 = k_1 dt^2 + \frac{2k_2}{y} dt dx + \frac{k_3}{y^2} dx^2 + \frac{k_4}{y^2} dy^2 + k_5 dz^2; \quad (\text{A.84})$$

where $k_i, i = 1, \dots, 4$ satisfy the following relations:

$$k_2 - \frac{\sqrt{2}}{\beta} k_1 = 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{\beta} k_2 - k_3 + k_4 = 0. \quad (\text{A.85})$$

The corresponding constants that appear in the metric (A.59) do not satisfy the above relation. In fact, only four of the above mentioned five Killings vectors ($\zeta_{(0)}, \dots, \zeta_{(3)}$) are symmetries of (A.59), therefore this last metric can be considered as a deformation of the Gödel metric.

Bibliography

- [1] K.Gödel, *Rev.Mod.Phys.*, **21**, 447(1949)
- [2] S.W.Hawking and G.F.R.Ellis, *The Large Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973)
- [3] J.Pfarr, *Gen.Rel.Grav.*, **13**, 1073(1981)
- [4] R.J.Gleiser, M.Gürses, A.Karasu, O.Sarioglu, *Class.QuantumGrav.*, **23**, 2653(2006)
- [5] M.O.Calvão, I.D.Souares, J.Tiommo, *Gen.Rel.Grav.*, **22**, 683(1990)
- [6] M.Gürses, A.Karasu, O.Sarioglu, *Class.Quantum.Grav.*, **22**, 1527(2005)
- [7] W.Kundt, *Z.Phys.*, **145**, 611(1956)
- [8] S.Chandrasekhar and J.P.Wright, *Proc.Natl.Acad.Sci.U.S.A*, **47**, 341(1961)
- [9] P.Klepac and J.Horrsky, *Class.Quantum.Grav.*, **17**, 2547(2000)
- [10] J.Gersl, P.Klepac, J.Horsky, *Gen.Rel.Grav.*, **36**, 1399(2004)
- [11] B.V.Ivanov, *Class.Quantum.Grav.*, **19**, 5135(2002)
- [12] N.Ozdemir, *Int.J.Mod.Phys.A*, **20**, 2821(2005)
- [13] J.R. Gott, III, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1126 (1991)
- [14] J.D.Barrow, and C.G.Tsagas, *Class.QuantumGrav.*, **21**, 1773(2004)

- [15] M.Novello, I.D.Soures, J.Tiommo, *Phys.Rev.D*, **27**, 1399(1983)
- [16] S.W.Hawking, *Phys.Rev.D*, **46**, 603(1992)
- [17] W.B.Bonnor, *Class.Quantum.Grav.*, **20**, 3087(2003)
- [18] W.B.Bonnor, *Class.QuantumGrav.*, **19**, 5951(2002)
- [19] M.F.Shirokov, *Gen.Rel.Grav.*, **2**, 131(1971)
- [20] I.D.Soures, *Phys.Rev.D*, **23**, 272(1981)
- [21] P. Glendinning, *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations* (Cambridge University Press, 1996)

Stability of Closed Timelike Geodesics.

ref.: *Phys. Letts. A* 370, 99–103 (2007)

Stability of Closed Timelike Geodesics.

Valéria M. Rosa¹ and Patricio S. Letelier²

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa,
36570-000 Viçosa, M.G., Brazil

Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica, Universidade Estadual de Campinas, 13083-970, Campinas, SP, Brazil

The existence and stability under linear perturbations of closed timelike geodesics (CTG) in Bonnor-Ward spacetime is studied in some detail. Regions where the CTG exist and are linearly stable are exhibited.

In 1949 Gödel found a solution to the Einstein field equation with nonzero cosmological constant that admits closed timelike curves (CTC) [1]. It could be argued that the Gödel solution is without physical significance, since it corresponds to a rotating, stationary cosmology, whereas the actual universe is expanding and apparently non rotating. The van Stockum solution [2], that also contain CTC, is physically inadmissible since refers to an infinitely long cylinder. But there exist examples of solutions of vacuum Einstein's equations which contains CTC that can represent the exterior of physically admissible sources [3] [4].

¹e-mail:vmrosa@ufv.br

²e-mail: letelier@ime.unicamp.br

In [3] it is described the case of a massless spinning rod of finite length. In [4] it is analyzed the CTC in Kerr-Newman spacetime and in a solution of the Einstein equations for a source named Perjeon, due to Perjés [5], which represents a single charged, rotating, magnetic object. This solution was also studied independently by Israel and Wilson [6], and it is referred as a PIW spacetime. In these three cases one expect that the CTC region be covered by the source. The same does not happen when we work with two Perjeons [4].

The PIW metric is given by

$$ds^2 = -f^{-1}h_{mn}dx^m dx^n + f(\omega_m dx^m + dt)^2, \quad (\text{B.1})$$

where the three dimensional positive definite tensor h_{mn} has zero Ricci tensor and it will be taken as the usual three dimensional Euclidean metric in cylindrical coordinates, the electromagnetic field is given in terms of two scalar potentials:

$$F_{4n} = \Phi_{,n}, \quad F^{ab} = \eta^{abm} f \psi_{,m}, \quad (\text{B.2})$$

η^{abm} being the Levi-Civita tensor related to h_{mn} , and $(\)_{,n} = \partial/\partial x^n$. The entire solution is generated by two functions L and M that are harmonic with respect to h_{mn} by means of the equations,

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{4L^2 + 4M^2}, \\ \psi &= \frac{1}{2}\epsilon \frac{M}{L^2 + M^2}, \\ \Phi &= -\frac{1}{2}\epsilon \frac{L}{L^2 + M^2}, \\ \omega_{a,b} - \omega_{b,a} &= 8(M L_{,c} - L M_{,c}) \eta_{abm} h^{mc}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

The Bonnor-Ward (BW) solution [7] refers to two Perjeons, with masses m_1 and m_2 , placed on the z -axis at $z = \pm a$, ($a > 0$), with magnetic moments (μ_1 and μ_2) also parallel to the z -axis,

and

$$\begin{aligned}
L &= (1 + m_1/r_1 + m_2/r_2)/2 \\
M &= (\mu_1(z - a)/r_1^3 + \mu_2(z + a)/r_2^3)/2 \\
r_1 &= \sqrt{\rho^2 + (z - a)^2} \\
r_2 &= \sqrt{\rho^2 + (z + a)^2} \\
\omega_a &= -\rho^2 \Omega \delta_a^\varphi.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

We shall consider the particular case of BW solution [4],

$$\begin{aligned}
\Omega &= \frac{\mu_1}{r_1^3} \left(2 + \frac{m_1}{r_1} \right) + \frac{m_1 \mu_2}{\rho^2} \left(\frac{r_1}{2a^2 r_2} + \frac{(z + a)(\rho^2 + z^2 - a^2)}{a r_1 r_2^3} \right) \\
&+ \frac{\mu_2}{r_2^3} \left(2 + \frac{m_2}{r_2} \right) + \frac{m_2 \mu_1}{\rho^2} \left(\frac{r_2}{2a^2 r_1} - \frac{(z - a)(\rho^2 + z^2 - a^2)}{a r_2 r_1^3} \right) \\
&+ \frac{\alpha}{\rho^2},
\end{aligned} \tag{B.5}$$

with α restricted to the values $\alpha = \pm(m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1)/(2a^2) (\neq 0)$ only. When $\alpha = (m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1)/(2a^2)$ the spacetime has a torsion line singularity (TLS) on $\rho = 0$ for $z^2 > a^2$ and in the other case the singularity appears between the sources. In both cases there is no strut singularity [4]. The presence of the TLSs is unavoidable in this case, they keep the two stationary spinning, charged, magnetic sources rotating in equilibrium (for torsions lines see [8][9]).

Let us denote by γ a closed curve in BW spacetime given in its parametric form by,

$$t = t_0, \quad \rho = \text{constant}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z = z_0, \tag{B.6}$$

where t_0 , ρ and z_0 are constants. The closed curve is timelike when $g_{\varphi\varphi} > 0$, i.e.,

$$\Omega^2 f^2 \rho^2 - 1 > 0. \tag{B.7}$$

The four-acceleration of γ is

$$a^t = 0, \tag{B.8}$$

$$a^\rho = \frac{\partial_\rho f \Omega^2 \rho^3 f^2 + 2f^3 \Omega \rho^3 \partial_\rho \Omega + 4f^3 \Omega^2 \rho^2 - 2f + \rho \partial_\rho f}{2\rho(f^2 \Omega^2 \rho^2 - 1)} \dot{\varphi}^2, \tag{B.9}$$

$$a^\varphi = 0, \tag{B.10}$$

$$a^z = \frac{\partial_z f \Omega^2 \rho^2 f^2 + 2f^3 \Omega \rho^2 \partial_z \Omega + \partial_z f}{2(f^2 \Omega^2 \rho^2 - 1)} \dot{\varphi}^2. \tag{B.11}$$

We shall restrict us to the special case,

$$m_1 = m_2 = m, \mu_1 = \mu_2 = \mu. \quad (\text{B.12})$$

Furthermore, we take $z_0 = 0$ to have $a^z = 0$. The condition $a^\rho = 0$ gives us to different cases, depending on the position of the TLS.

First we analyse the case $\alpha = -(m_1\mu_2 + m_2\mu_1)/(2a^2)$ (TSL between the particles). By assuming the restriction (B.12) and doing $a^\rho = 0$ we obtain the following relation for μ , a , ρ and m ,

$$\begin{aligned} \mu = -1/4 \Big(& -2(4\rho^4 m^3 + 8\sqrt{\rho^2 + a^2} m^2 \rho^4 + 2\sqrt{\rho^2 + a^2} \rho^6 - 16a^2 \rho^2 m^3 \\ & -19a^4 m \rho^2 + 6\rho^6 m - 2a^2 \sqrt{\rho^2 + a^2} \rho^4 + 7a^4 m^3 - 15a^2 m \rho^4 + 2a^6 m \\ & -32a^2 \sqrt{\rho^2 + a^2} m^2 \rho^2 + 8a^4 \sqrt{\rho^2 + a^2} m^2 - 4a^4 \sqrt{\rho^2 + a^2} \rho^2)(a^6 \sqrt{\rho^2 + a^2} \\ & +10a^6 m + 3a^4 \sqrt{\rho^2 + a^2} \rho^2 + 28a^4 m \rho^2 + 80a^4 m^3 + 40a^4 \sqrt{\rho^2 + a^2} m^2 \\ & +80a^2 \sqrt{\rho^2 + a^2} m^4 + 64a^2 \sqrt{\rho^2 + a^2} m^2 \rho^2 + 3a^2 \sqrt{\rho^2 + a^2} \rho^4 + 32a^2 m^5 \\ & +112a^2 \rho^2 m^3 + \sqrt{\rho^2 + a^2} \rho^6 + 24\sqrt{\rho^2 + a^2} m^2 \rho^4 + 8\rho^6 m + 32\rho^4 m^3 \\ & +26a^2 m \rho^4 + 16\sqrt{\rho^2 + a^2} m^4 \rho^2) \Big)^{1/2} (\rho^2 + a^2) / \Big(4\rho^4 m^3 + 8\sqrt{\rho^2 + a^2} m^2 \rho^4 \\ & +2\sqrt{\rho^2 + a^2} \rho^6 - 16a^2 \rho^2 m^3 - 19a^4 m \rho^2 + 6\rho^6 m - 2a^2 \sqrt{\rho^2 + a^2} \rho^4 \\ & +7a^4 m^3 - 15a^2 m \rho^4 - 32a^2 \sqrt{\rho^2 + a^2} m^2 \rho^2 + 2a^6 m + 8a^4 \sqrt{\rho^2 + a^2} m^2 \\ & -4a^4 \sqrt{\rho^2 + a^2} \rho^2 \Big). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Using this form for μ and doing $\rho = n a$ we obtain for $g_{\varphi\varphi}$,

$$\begin{aligned} g_{\varphi\varphi} = & -[2n^2(n^2 + 1)(2n^2 - 1)a^2 + m\sqrt{n^2 + 1}(6n^4 - 11n^2 - 1)a \\ & +2m^2(2n^4 - 5n^2 - 1)] / [2n^2((n^2 + 1)(n^2 - 2)a^2 + 2m\sqrt{n^2 + 1}(n^2 - 4)a \\ & +m^2(2n^2 - 7))]. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

We can find n , the distance a , and the mass m such that $g_{\varphi\varphi} > 0$. We have closed timelike geodesics for $n \in [0.708, \sqrt{2}]$ and $a > A m$, for $n \in (\sqrt{2}, 1.6385]$ and $a \in [A m, B m]$, and for

$n \in (1.6385, 1.8872]$ and $a \in [0, Bm]$, where

$$A = \frac{\sqrt{1 + 6n^2 + 61n^4 + 60n^6 - 28n^8} - (6n^4 - 11n^2 - 1)}{4\sqrt{n^2 + 1}(2n^2 - 1)},$$

$$B = \frac{4 - n^2 + \sqrt{2 + 3n^2 - n^4}}{\sqrt{n^2 + 1}(n^2 - 2)}.$$

In the particular case $a = \rho$, the condition (B.7) is written as $(2\alpha - 2\sqrt{2}m)/(2\alpha + 5\sqrt{2}m) > 0$ and if $a > \sqrt{2}m$ the closed geodesic is timelike. In [4] Bonnor and Steadman describe a CTG for $a = \rho = 1/\sqrt{2}$, in this case the closed curve γ is a geodesic when (B.13) reduces to $\mu = (2m + 1)^2/(\sqrt{10m^2 + 22m + 4})$. The condition (B.7) is written as $(1 - 4m)/(1 + 5m) > 0$, so γ is timelike when $m < 1/4$.

Now we analyse the case $\alpha = (m_1\mu_2 + m_2\mu_1)/(2a^2)$ (two semi-infinity TLS). Assuming that (B.12) is true and making $a^\rho = 0$ we obtain the following relation for μ , a , ρ and m ,

$$\begin{aligned} \mu = & \left((4a^8\sqrt{\rho^2 + a^2} + 2a^6\sqrt{\rho^2 + a^2}\rho^2 - 2a^4\sqrt{\rho^2 + a^2}\rho^4 + \rho^6m^3 \right. \\ & + 48a^6m^2\sqrt{\rho^2 + a^2} + 24a^8m - a^2\rho^6m - 7a^4\rho^4m + 18a^6\rho^2m + 32a^6m^3 \\ & + 4a^2\rho^4m^3) (10a^6m + a^6\sqrt{\rho^2 + a^2} + 3a^4\sqrt{\rho^2 + a^2}\rho^2 + 80a^4m^3 + 28a^4m\rho^2 \\ & + 40a^4\sqrt{\rho^2 + a^2}m^2 + 3a^2\sqrt{\rho^2 + a^2}\rho^4 + 32a^2m^5 + 26a^2m\rho^4 + 112a^2\rho^2m^3 \\ & + 64a^2\sqrt{\rho^2 + a^2}m^2\rho^2 + 80a^2\sqrt{\rho^2 + a^2}m^4 + 24\sqrt{\rho^2 + a^2}m^2\rho^4 + 8\rho^6m \\ & + 8a^4\rho^2m^3 + \sqrt{\rho^2 + a^2}\rho^6 + 16\sqrt{\rho^2 + a^2}m^4\rho^2 + 32\rho^4m^3) \Big)^{1/2} (\rho^2 + a^2)a^2 / \\ & (4\sqrt{2}(4a^8\sqrt{\rho^2 + a^2} + 2a^6\sqrt{\rho^2 + a^2}\rho^2 - 2a^4\sqrt{\rho^2 + a^2}\rho^4 + \rho^6m^3 \\ & + 48a^6m^2\sqrt{\rho^2 + a^2} + 24a^8m - a^2\rho^6m - 7a^4\rho^4m + 18a^6\rho^2m \\ & + 32a^6m^3\rho^2m^3 + 8a^4 + 4a^2\rho^4m^3)\rho) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Using this form for μ and $\rho = na$, as before, we get

$$\begin{aligned} g_{\varphi\varphi} = & \left[-2m^2(n^4 - n^2 + 4) + m^2\sqrt{n^2 + 1}(n^4 + 9n^2 - 8)a + 2(2n^4 + n^2 - 1)a^2 \right], \\ & / \left[2(m^2(n^4 + 8) - 2m\sqrt{n^2 + 1}(n^2 - 4)a - (n^2 + 1)(n^2 - 1)a^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Also in this case, we can find n , a distance a , and a mass m such that $g_{\varphi\varphi} > 0$. In particular, we find a and m such that $g_{\varphi\varphi} > 0$ for $n > \sqrt{2}$ and $Cm < a < Dm$, where

$$C = \frac{n^2\sqrt{n^4 + 50n^2 + 17} - n^2 - 9n + 8}{2\sqrt{n^2 + 1}(2n^2 - 1)},$$

$$D = \frac{n^2 - 4 - n^2\sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 1}(2 - n^2)}.$$

For example, we have CTGs for $n = 1.5$ and $0.3482m < a < 9.4644m$, for $n = 2$ and $0.2725m < a < 1.5491m$, for $n = 5$ and $0.2456m < a < 0.8652m$, and for $n = 10$ and $0.1704m < a < 0.9127m$.

A generic CTC γ satisfies the system of equations given by

$$\frac{D}{ds}\dot{X}^\mu = F^\mu(X), \quad (\text{B.17})$$

where $\frac{D}{ds}W^\alpha$ is the covariant derivative of the vector field W^α along $\gamma(s)$ and F^μ is an external force per unit of mass.

Let $\tilde{\gamma}$ be the curve obtained from γ after a perturbation ξ , i.e., $\tilde{X}^\mu = X^\mu + \xi^\mu$. The system of differential equation satisfied by the perturbation ξ is [10] [11],

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2} + 2\Gamma_{\beta\mu}^\alpha \frac{d\xi^\beta}{ds} u^\mu + \Gamma_{\beta\mu,\lambda}^\alpha \xi^\lambda u^\beta u^\mu = F^\alpha{}_{,\lambda} \xi^\lambda. \quad (\text{B.18})$$

For the closed curve (B.6) the system (B.18), for case where (B.12) holds, $z = z_0 = 0$, and μ , a , ρ , and m are related in such a way that $a^\rho = 0$ ($F^\alpha = 0$), reduces to

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^0 + k_1 \dot{\xi}^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^1 + k_2 \dot{\xi}^0 + k_3 \xi^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^2 + k_4 \dot{\xi}^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^3 + k_5 \xi^3 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

where $k_1 = 2\Gamma_{21}^0 \dot{\varphi}$, $k_2 = 2\Gamma_{20}^1 \dot{\varphi}$, $k_3 = \Gamma_{22,1}^1 \dot{\varphi}^2$, $k_4 = 2\Gamma_{21}^2 \dot{\varphi}$, $k_5 = \Gamma_{22,3}^3 \dot{\varphi}^2$. The condition for γ to be timelike, when it is parametrized by the proper time s , is $\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu = 1$, where the overdot

indicates derivation with respect to s . For the curve γ this last condition gives us

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{f}{\rho^2(f^2\rho^2w^2 - 1)}. \quad (\text{B.20})$$

The solution of (B.19) is

$$\begin{aligned} \xi^0 &= -k_1(c_3 \sin(\varpi s + c_4)/\varpi + \lambda s) + c_1 s + c_5, \\ \xi^1 &= c_3 \cos(\varpi s + c_4) + \lambda, \\ \xi^2 &= -k_4(c_3 \sin(\varpi s + c_4)/\varpi + \lambda s) + c_2 s + c_6, \\ \xi^3 &= c_7 \cos(\sqrt{k_5} s + c_8), \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

where c_i , $i = 1, \dots, 8$ are integration constants, $\varpi = \sqrt{k_3 - k_1 k_2}$, and $\lambda = -k_2 c_1 / \varpi^2$. The explicit form of ϖ and k_5 depending on the distance a , the mass m and the parameter n are cumbersome; they will be presented elsewhere.

To describe the regions where the CTG are linearly stable, first, we fix n ($\rho = n a$) and then we find a and m such that $\varpi^2 > 0$ and $k_5 > 0$. When the TLS is between the sources, the closed curve γ , satisfying (B.12), $z = z_0 = 0$, and (B.13) is a CTG linearly stable when $n \in [1.5, 1.8]$. For example, we have $\varpi^2 > 0$ and $k_5 > 0$ for $n = 1.5$ and $7.4788 m < a < 7.988 m$, and for $n = 1.8$ and $0.1046 m < a < 0.5279 m$.

For the case $a = \rho = 1/\sqrt{2}$ given by Bonnor and Steadman [4], we have

$$\frac{\varpi^2}{k_5} = -2 \frac{(84m^4 + 235/2m^2 + 7/2 + 35m + 183m^3)(m + 2)}{(1 + 2m)^2(116m + 33/2 + 53m^3 + 170m^2)} \quad (\text{B.22})$$

that is always negative. In this case the CTG is not linearly stable. This is a particular case of $a = \rho$, where

$$\frac{\varpi^2}{k_5} = \frac{(14\alpha^4 + 70\sqrt{2}m\alpha^3 + 235m^2\alpha^2 + 183\sqrt{2}m^3\alpha + 84m^4)(4\alpha + m\sqrt{2})}{-(\alpha + m\sqrt{2})^2(66\alpha^3 + 232\sqrt{2}m\alpha^2 + 340m^2\alpha + 53m^3\sqrt{2})} \quad (\text{B.23})$$

When we have two semi-infinite torsion TLS the closed curve γ , satisfying (B.12), $z = z_0 = 0$, and (B.15), is a CTG linearly stable when $n \geq 1.5$. For example, we have $\varpi^2 > 0$ and $k_5 > 0$ for $n = 1.5$ and $8.7913 m < a < 9.3079 m$, for $n = 2$ and $0.4353 m < a < 1.2147 m$, for $n = 5$ and $0.2904 m < a < 0.4576 m$, and for $n = 10$ and $0.2743 m < a < 0.5014 m$.

In summary, we found that there are linearly stable closed timelike geodesics in BW space-time. There are two cases depending whether the torsion line singularity is between the sources or not. We note that the existence of CTGs or their linear stability does not depend on the value of the mass parameter m .

The existence and stability of closed timelike geodesics present an evident challenge to the General Relativity Theory.

Acknowledgements: V.M.R. thanks Departamento de Matemática-UFV for giving the conditions to finish this work which was partially supported by PICDT-UFV/CAPES. PSL thanks the partial financial support of FAPESP and CNPq.

Bibliography

- [1] K. Gödel, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 447 (1949)
- [2] W.J. van Stockum, *Proc. R. Soc. Edin.*, **A21**, 135(1937)
- [3] W.B. Bonnor, *Class. Quantum. Grav.*, **19**, 5951 (2002)
- [4] W.B. Bonnor and B.R. Steadman, *Gen. Rel. Grav.*, **37**, 1833 (2005)
- [5] Z. Perjés, *Phys. Rev. Letters*, **27**, 1668 (1971)
- [6] W. Israel and G.A. Wilson, *J. Math. Phys.*, **13**, 323 (1972)
- [7] W.B. Bonnor and J.P. Ward, *Commun. Math. Phys*, **28**, 323 (1972)
- [8] P.S. Letelier, *Class. Quantum. Grav.*, **12**, 471 (1995)
- [9] P.S. Letelier and S.R. Oliveira, *Phys. Lett. A*, **238**, 101 (1998)
- [10] M.F. Shirokov, *Gen. Rel. Grav.*, **2**, 131 (1971)
- [11] V.M. Rosa and P.S. Letelier, Stability of Closed Timelike Curves in Gödel Universe, arXiv.org e-print archive: gr-qc/0703100.

Spinning Strings, Black Hole and Stable Closed Timelike Geodesics.

ref.: Submetido para publicação.

Spinning Strings, Black Holes and Stable Closed Timelike Geodesics.

Valéria M. Rosa¹ and Patricio S. Letelier²

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa,
36570-000 Viçosa, M.G., Brazil

Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica, Universidade Estadual de Campinas, 13083-970, Campinas, SP, Brazil

The existence and stability under linear perturbation of closed timelike curves in the spacetime associated to Schwarzschild black hole pierced by a spinning string are studied. We find that presence of the black hole makes possible to transform the closed timelike curves present in the spinning string metric alone into closed timelike geodesics. We show that the condition to have stable timelike geodesics is easily fulfilled.

The existence of closed timelike curves (CTCs) presents a clear violation of causality. In some cases these CTCs can be disregarded because to have them one ought to have an external force acting along the whole CTC, process that will consume a great amount of energy. The

¹e-mail:vmrosa@ufv.br

²e-mail: letelier@ime.unicamp.br

energy needed to travel a CTC in Gödel universe is computed in [1]. For geodesics this is not the case since the external force is null, therefore the considerations of energy does not apply in this case and we have a bigger problem of breakdown of causality.

The classical problem of the existence of closed geodesic in Riemannian geometry was solved by Hadamard [2] in two dimensions and by Cartan [3] in an arbitrary number of dimensions. As a topological problem, the existence of closed timelike geodesics (CTGs) was proved by Tipler [4] in a class of four-dimensional compact Lorentz manifolds with covering space containing a compact Cauchy surface. In a pseudo-Riemannian manifold with Lorentzian signature (Lorentzian manifold) Galloway [5] found sufficient conditions to have CTGs, see also [6].

To the best of our knowledge we have four solution to the Einstein equations generated by matter with positive mass density, i.e., that satisfy the weak energy condition [7], that contain CTGs: a) Soares [8] found a class of cosmological models, solutions of Einstein-Maxwell equations, with a subclass where the timelike paths of the matter are closed. For this models the existence of CTGs is demonstrated and explicit examples are given. We recently found that these examples of CTGs are not linearly stable [9]. b) Steadman [10] described the behavior of CTGs in a vacuum exterior of the van Stockum solution for an infinite rotating dust cylinder. For this solution explicit examples of CTCs and CTGs are shown. We find stable CTGs in this spacetime [9]. c) Bonnor and Steadman [11] studied the existence of CTGs in a spacetime with two spinning particles each one with magnetic moment equal to angular momentum and mass equal to charge (Perjeons), in particular, they present a explicit CTG. We found that this particular CTG is not stable, but there exist many other that are stable [12]. d) We recently found [9] linearly stable CTGs in a Gödel-type metric with not flat background studied by Gürses et al. [13], see also [14]. For CTGs in a spacetime associated to a cloud of strings with negative mass density see [15]. These CTGs are not stable [9].

The existence of CTCs in a spacetime whose source is a spinning string has been investigated by many authors (see for instance [16]-[20]). The interpretation of these strings as torsion line defects can be found in [21], see also [23][24]. These objects appear in a natural form when one tries to stabilize two rotating black holes kept apart by spin repulsion [25]. Also, the black hole

thermodynamics associated to a static black hole pierced by a non rotating string was studied some time ago by Aryal et al. [26].

In the present work we study the existence and stability under linear perturbation of CTCs in the spacetime associated to Schwarzschild black hole (BH) pierced by a spinning string. We find that presence of the black hole makes possible to transform a CTC present in the spinning string metric alone into a CTG. We also find sufficient conditions to have stable CTGs. This conditions are not very restrictive and can be easily fulfilled. Furthermore, the found conditions to have closed timelike geodesics are compared with the same conditions studied by Galloway [5] for a general Lorentzian manifold.

Let us consider the spacetime with metric,

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r})(dt - \alpha d\varphi)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \beta^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{C.1})$$

where $\alpha = 4S$ and S is the string's spin angular momentum per unit of length, $\beta = 1 - 4\lambda$ and λ is the string's linear mass density that is equal to its tension ($\lambda \leq 1/4$).

In the particular case that $\alpha = 0$ and $\beta = 1$ the metric (C.1) reduces to the Schwarzschild solution. When $m = 0$ (C.1) represents a spinning string, with the further specialization $\beta = 1$ (not deficit angle) we have a pure torsion line defect [21] [22]. Therefore the metric (C.1) can be considered as representing the spacetime associated to a Schwarzschild black hole pierced by a spinning string.

Let us denote by γ a closed curve given in its parametric form by,

$$t = t_0, \quad r = r_0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad (\text{C.2})$$

where t_0 and r_0 are constants. When γ is parametrized with an arbitrary parameter σ , we have a timelike curve when $\frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx_\mu}{d\sigma} > 0$. This condition reduces to $g_{\varphi\varphi} > 0$, i.e.,

$$(1 - 2m/r_0)\alpha^2 - r_0^2\beta^2 > 0. \quad (\text{C.3})$$

A generic CTC γ satisfies the system of equations given by

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = F^\mu(x), \quad (\text{C.4})$$

where the overdot indicates derivation with respect to s , $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ are the Christoffel symbols and F^μ is a specific external force ($a^\mu = F^\mu$). The nonzero component of the four-acceleration of γ is

$$a^r = \frac{1}{r_0^3}(r_0 - 2m)(\alpha^2 m - r_0^3 \beta^2) \dot{\varphi}^2. \quad (\text{C.5})$$

Our goal is to study the behavior of closed timelike geodesics. Therefore taking α as one of the two solutions of

$$\alpha^2 m - r_0^3 \beta^2 = 0, \quad (\text{C.6})$$

we have $a^r = 0$. Under this condition (C.3) is satisfied when $r_0 > 3m$, that put the CTG outside the black hole.

Let $\tilde{\gamma}$ be the curve obtained from γ after a small perturbation ξ , i.e., $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$. From equations (C.4) one finds that the system of differential equation satisfied by the perturbation ξ is [27],

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{ds^2} + 2\Gamma_{\beta\mu}^\alpha \frac{d\xi^\beta}{ds} u^\mu + \Gamma_{\beta\mu,\lambda}^\alpha \xi^\lambda u^\beta u^\mu = F_{,\lambda}^\alpha \xi^\lambda. \quad (\text{C.7})$$

For the above mentioned closed timelike geodesic the system (C.7) reduces to

$$\ddot{\xi}^0 + k_1 \dot{\xi}^1 = 0, \quad (\text{C.8})$$

$$\ddot{\xi}^1 + k_2 \dot{\xi}^0 + k_3 \dot{\xi}^1 = 0, \quad (\text{C.9})$$

$$\ddot{\xi}^2 + k_4 \dot{\xi}^1 = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$\ddot{\xi}^3 + k_5 \dot{\xi}^3 = 0, \quad (\text{C.11})$$

where

$$\begin{aligned} k_1 &= 2\Gamma_{21}^0 \dot{\varphi}, \quad k_2 = 2\Gamma_{20}^1 \dot{\varphi}, \quad k_3 = \Gamma_{22,1}^1 \dot{\varphi}^2, \\ k_4 &= 2\Gamma_{21}^2 \dot{\varphi}, \quad k_5 = \Gamma_{22,3}^3 \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

A curve γ parametrized by the proper time, s , is timelike when $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = 1$. For the curve $\gamma(s)$ we have that this last condition give us

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{\beta^2 r_0^2 (r_0 - 3m)} \quad (\text{C.13})$$

The solution of (C.9)-(C.11) is

$$\begin{aligned}\xi^0 &= -k_1(c_3 \sin(\omega s + c_4)/\omega + \lambda s) + c_1 s + c_5, \\ \xi^1 &= c_3 \cos(\omega s + c_4) + \lambda, \\ \xi^2 &= -k_4(c_3 \sin(\omega s + c_4)/\omega + \lambda s) + c_2 s + c_6, \\ \xi^3 &= c_7 \cos(\sqrt{k_5} s + c_8),\end{aligned}\tag{C.14}$$

where c_i , $i = 1, \dots, 8$ are integration constants,

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{k_3 - k_1 k_2} \\ &= [\beta^2(r_0 - 6m)\dot{\varphi}^2/r_0]^{1/2},\end{aligned}\tag{C.15}$$

and $\lambda = -k_2 c_1/\omega^2$. Thus when $r_0 > 6m$, the constant ω is real and the solution (C.14) shows the typical behavior for stability, we have vibrational modes untangled with translational ones that can be eliminated by a suitable choice of the initial conditions.

When the black hole is removed in (C.1) the spacetime has only the spinning string and its line element is,

$$ds^2 = (dt - \alpha d\varphi)^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \beta^2 \sin^2 \theta d\varphi^2),\tag{C.16}$$

the closed curve is timelike when $\alpha^2 - r_0^2 \beta^2 > 0$, the a^r -component of the four-acceleration is given by $a^r = -\beta^2 r_0 \dot{\varphi}^2$. Thus for $r < |\alpha/\beta|$ we only have closed timelike curves, which are not geodesics.

For the closed curve (C.2) the system (C.7) is written now as in (C.9)-(C.11) replacing equation (C.10) by

$$\ddot{\xi}^1 + k_2 \dot{\xi}^2 + k_3 \xi^1 = \partial_r(\Gamma_{22}^1 \dot{\varphi}^2) \xi^1,\tag{C.17}$$

where now $k_2 = 2\Gamma_{22}^1 \dot{\varphi}$ and $\dot{\varphi}^2 = (\alpha^2 - r_0^2 \beta^2)^{-1}$. In this particular case the solution of (C.7) has the same form that (C.14) with $\omega^2 = 2\beta^2 \dot{\varphi}^2(2 + \beta^2 r_0^2 \dot{\varphi}^2)$. Then the CTCs are stable.

In other words there exist linearly stable CTCs in the spacetime related to a spinning string. These curves are restricted to a small region of the spacetime. Also, closed timelike geodesics do not exist in this spacetime.

For the nonlinear superposition of a spinning string with a Schwarzschild black hole the new spacetime has linearly stable CTGs. The region of stability is the same as the region for

the usual circular geodesics in the Schwarzschild black hole alone, the presence of the spinning string does not affect the stability of the orbits. It seems that torsion lines defects superposed to matter (not strings, $\beta = 1$) is a sufficient condition to have stable CTG. Loosely speaking, we have that the torsion line defects creates CTCs that the presence of the BH one of them is transformed into a CTG. This fact is also confirmed in the case of the two Perjeons solutions studied in [11] wherein the torsion line defect is a main ingredient to have CTCs and CTGs in that spacetime. As a matter of fact when the torsion line defect is eliminated in this solution we also eliminate the CTCs and CTGs. In the metric under consideration we found a large region of stability of CTGs. Despite algebraic complexity, preliminary computations shows that the same behavior occurs for CTGs in the metric of the superposition of a spinning string with a Kerr black hole.

It is instructive to look the previous results in a more direct and graphic way. The length of CTC in (C.2) only depends on the value of $r = r_0$. We find,

$$\begin{aligned} s(r_0) &= 2\pi \sqrt{g_{\varphi\varphi}(r_0)}, \\ &= 2\pi[(1 - 2m/r_0)\alpha^2 - r_0^2\beta^2]^{1/2}. \end{aligned} \tag{C.18}$$

This function has a local maximum for

$$r_m = (m\alpha^2/\beta^2)^{1/3}. \tag{C.19}$$

Note that this equation is equivalent to (C.6), that is the condition to have a geodesic.

The role of the mass of black hole in the appearance of the CTG deforms the spacetime in such way that makes to appear a local maximum point in the length function where occur the CTG outside of the source the spacetime.

In Fig.(C.1) we present, as a solid line the function $s(r_0)$ for a spinning string and as a dashed line the same function for the superposition of the black hole with the previously mentioned string for the same values of the parameters $\alpha = 25$ (spin parameter) and deficit angle parameter $\beta = 0.9$ and different values of the black hole mass ($m = 0.3, 1, 4$). We see how the presence of the mass shift the maximum for the string located at $r_0 = 0$ to a position

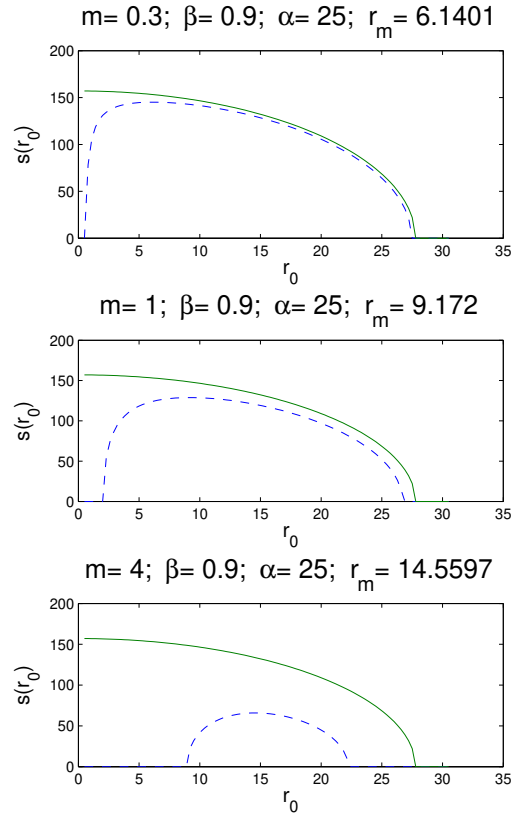


Figure C.1: The function $s(r_0)$ for a spinning string (solid line) and for a black hole pierced by the string (dashed line). We see how the presence of the mass shift the maximum of $s(r_0)$ for the string that is located at $r_0 = 0$ to a position outside the black hole horizon. The maximum, r_m represent the radius of the CTGs, the first two are stable and the second is not.

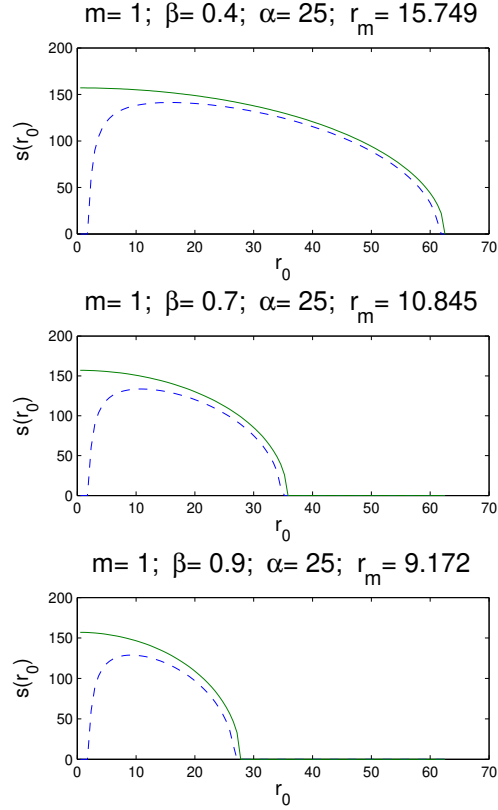


Figure C.2: The function $s(r_0)$ for a spinning string (solid line) and for a black hole pierced by the string (dashed line). We see how the size of the deficit angle parameter β changes the region for CTCs and the value of r_m .

$r_0 > 3m$. Also the points under the curves represent the pairs $(r_0, s(r_0))$ for CTCs in each case. We note that the region for CTCs for the black hole pierced by the string diminishes when the mass increases. The maximum of the dashed line represents the CTG. We see, that in the first to cases the CTGs are stable ($r_m > 6m$) and in the last case the CTG is not stable ($r_m < 6m$).

In Fig.(C.2) we keep the value of the black hole mass constant, $m = 1$, as well as, the spin parameter $\alpha = 25$ and change the deficit angle parameter $\beta = 0.4, 0.7, 0.9$ we see that the larger the string density $\lambda = (1 - \beta)/4$ the larger the region for CTCs.

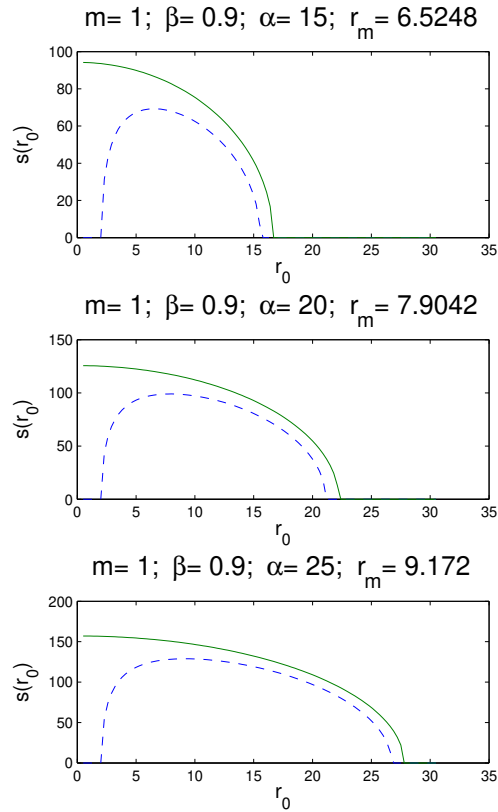


Figure C.3: The function $s(r_0)$ for a spinning string (solid line) and for a black hole pierced by the string (dashed line). We see how the size of the spin parameter α changes the region for CTCs and the value of r_m . The spin parameter, in this case, is the essential ingredient to have CTCs and CTGs.

In Fig.(C.3) we keep the value of the black hole mass constant, $m = 1$, as well as, the deficit angle parameter $\beta = 0.9$ and change the spin parameter $\alpha = 15, 20, 25$. We see that the regions where the CTCs appear are larger for bigger spin parameter. This parameter is essential to have CTCs and CTGs in this case.

A result from Galloway [5] states that in a compact Lorentzian manifold, each stable free t-homotopy class contain a longest closed timelike curve, and this curve is necessarily a closed timelike geodesic. The assumption that M be compact can be weakened, it is sufficient to assume that there exists an open set U in M with compact closure such that each curve $\gamma \in \mathcal{C}$ (the free t-homotopy class) is contained in U . In our case the region containing the CTCs in $\mathcal{C}$ is not compact.

Finally, we want to point out that it does look like that the stability of the circular orbits does not depend on the fact of the orbit be a CTG. We found the same region of stability of the usual circular geodesics. Furthermore, we analyzed if the found CTGs satisfy the sufficient conditions of Galloway's theorem for the existence of CTGs. We found that ours CTGs do not satisfy the conditions. The possibility of an example that satisfy exactly the conditions of this theorem is under study. We want to mention that the solution of the Einstein equations considered in this work is much simpler than the three ones listed in the introduction.

Acknowledgments

V.M.R. thanks Departamento de Matemática-UFV for giving the conditions to finish this work which was partially supported by PICDT-UFV/CAPES. P.S.L. thanks the partial financial support of FAPESP and CNPq.

Bibliography

- [1] J. Pfarr, Gen. Rel. Grav., **13**, 1073 (1981)
- [2] J. Hadamard, J. Math. Pures Appl. **4**, 27 (1896)
- [3] E. Cartan, Leçons sur la géométrie de Riemann (Gauthier-Villars, Paris, 128)
- [4] F.J. Tipler, Proc. Am. Math. Soc., **76**, 145 (1979)
- [5] G. J. Galloway, Trans. Am. Math. Soc., **285**, 379 (2007)
- [6] M. Guerdiri, Trans. Am. Math. Soc., **359**, 2663 (1984)
- [7] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, The large scale structure of space-time (Cambridge, 1973)
- [8] I.D. Soares, J. Math. Phys., **21**, 591 (1980)
- [9] V.M. Rosa and P.S. Letelier, Stability of closed timelike geodesics in different spacetimes, gr-qc/0706.3212
- [10] B.R. Steadman, Gen. Rel. Grav., **35**, 1721 (2003)
- [11] W.B. Bonnor and B.R. Steadman, Gen. Rel. Grav., **37**, 1833 (2005)
- [12] V.M. Rosa and P.S. Letelier, Stability of closed timelike geodesics, Phys. Lett. A, in press; gr-qc/0703148

- [13] M. Gürses, A. Karasu, O. Sarioglu, *Class. Quantum. Grav.*, **22**, 1527 (2005)
- [14] R.J. Gleiser, M. Gürses, A. Karasu and Ö. Sarroğlu, *Class. Quantum. Grav.*, **23**, 2653 (2006)
- [15] Ø. Grøn and S. Johannesen, Closed timelike geodesics in a gas of cosmic strings, arXiv.org e-print archive: gr-qc/0703139
- [16] S. Deser, R. Jackiw and G. 't Hooft, *Phys. Rev. Letts.*, **68**, 267 (1992)
- [17] Y.M. Cho and D.H. Park, *Phys. Rev. D*, **46**, R1219 (1992)
- [18] J. R. Gott, *Phys. Rev. Letts.*, **66**, 1126 (1991)
- [19] B. Jensen and H.H. Soleng, *Phys.Rev.D*, **45**, 3528 (1992)
- [20] H.H. Soleng, *Phys. Rev. D*, **49**, 1124 (1994)
- [21] P.S. Letelier, *Class. Quantum. Grav.*, **12**, 471 (1995)
- [22] P.S. Letelier, *Class. Quantum. Grav.*, **12**, 2221 (1995)
- [23] P. de Sousa, *Nucl. Phys. B*, **346**, 440 (1990)
- [24] R.J. Petti, *Gen. Rel. Grav.*, **18**, 1124 (1986)
- [25] P.S. Letelier and S.R. Oliveira, *Phys. Lett. A*, **238**, 101 (1998)
- [26] M. Aryal, L.H. Ford and A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **34**, 2263 (1986).
- [27] V.M. Rosa and P.S. Letelier, stability of closed timelike curves in Gödel universe, arXiv.org e-print archive: gr-qc/0703100.

Stability of Closed Timelike Geodesics in different Spacetimes.

ref.: Submetido para publicação.

Stablily of Closed Timelike Geodesics in different Spacetimes.

Valéria M. Rosa¹ and Patricio S. Letelier²

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa,
36570-000 Viçosa, M.G., Brazil

Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica, Universidade Estadual de Campinas, 13083-970, Campinas, SP, Brazil

The linear stability of closed timelike geodesics (CTGs) is analyzed in two spacetimes with cylindrical sources, an infinite rotating dust cylinder, and a cylindrical cloud of static cosmic strings with a central spinning string. We also study the existence and linear stability of closed timelike curves in spacetimes that share some common features with the Gödel universe (Gödel-type spacetimes). In this case the existence of CTGs depends on the ‘background’ metric. The CTGs in a subclass of inhomogeneous stationary cosmological solutions of the Einstein-Maxwell equations with topology $S^3 \times \mathbb{R}$ are also examined.

¹e-mail: vmrosa@ufv.br

²e-mail: letelier@ime.unicamp.br

Introduction

The existence of closed timelike curves (CTCs) presents a clear violation of causality. In some cases these CTCs can be disregarded because to have them one ought to have an external force acting along the whole CTC, process that will consume a great amount of energy. The energy needed to travel a CTC in Gödel universe is computed in [1]. For geodesics this is not the case since the external force is null, therefore the considerations of energy does not apply in this case and we have a bigger problem of breakdown of causality.

To the best of our knowledge we have four solutions to the Einstein equations that contain CTGs. One of them was given by Bonnor and Steadman [2] that studied the existence of CTGs in a spacetime with two spinning particles each one with magnetic moment equal to angular momentum and mass equal to charge (Perjeons), in particular, they present a explicit CTG. We found that this particular CTG is not stable, but there exist many other that are stable [3]. Soares [4] found a class of cosmological models, solutions of Einstein-Maxwell equations, with a subclass where the timelike paths of the matter are closed. For these models the existence of CTGs is demonstrated and explicit examples are given. Steadman [5] described the existence of CTGs in a vacuum exterior of the van Stockum solution for an infinite rotating dust cylinder. For this solution explicit examples of CTCs and CTGs are shown. And in [6] it is found CTGs in a spacetime associated to a cylindrical cloud of static strings with negative mass density with a central spinning string.

The possibility that a spacetime associated to a realistic model of matter may contain CTCs and, in particular, CTGs leads us to ask how permanent is the existence of these curves. Perhaps, one may rule out the CTCs by simple considerations about their linear stability. Otherwise, if these curves are stable under linear perturbations the conceptual problem associated to their existence is enhanced. Even though the matter content of the solutions listed before are far from realistic we shall consider the study the stability of these curves in order to see the possibility to rule them out only by dynamical considerations. These considerations lead us to study the stability of CTCs in Gödel universe [7].

In the present work, besides the study of the stability under linear perturbation of CTGs in the spacetimes described above, we shall also consider the existence and stability under linear perturbation of CTCs in the two examples of Gödel-type metrics given in [8], see also [9]. One of them has only CTCs and the other has CTGs depending on the choice of the parameters. All the cases analyzed are stationary and have axial symmetry.

It is interesting to note that these spacetimes are not counter examples of the Chronology Protection Conjecture [10] that essentially says that the laws of the physics do not allow the appearance of closed timelike curves. The spacetimes that we shall considered are given stationary spacetimes. A valid dynamic to built them is not known.

In Section 2 we present the general equations that will used to study linear stability. In Sections 3 and 4 we analyze the cases of a dust cylinder and a cylinder of cosmic strings with a central spinning string, respectively. In Section 5 we study two cases of Gödel-type metrics, one with flat background and the other with a conformally flat background. In Section 6 we consider the two explicit examples of CTGs given in [4]. And finally, in Section 7, we discuss and summarize ours results.

Stability of CTCs and CTGs

As we mentioned before the stability of CTCs, for the Gödel cosmological model are studied in [7]. Stability of geodesics are studied in [11] for particles moving around a black hole. Also in [12] and [13] considered the stability of geodesic moving on accretion disks and other structures.

Excepting the Soares CTGs all the others closed timelike geodesics that we shall study belong to spacetimes with metrics, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, where $x^\mu = [t, r, \varphi, z]$. In this case all the curves have the same parametric form,

$$t = t_*, \quad r = r_*, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z = z_*, \quad (\text{D.1})$$

where t_* , z_* and r_* are constants. The condition for these curves to be timelike is $\frac{dx^\mu}{d\varphi} \frac{dx_\mu}{d\varphi} > 0$, in other words, $g_{\varphi\varphi} > 0$.

A generic CTC γ satisfies the system of equations,

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = F^\mu(x), \quad (\text{D.2})$$

where the overdot indicates derivation with respect to s , $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ are the Christoffel symbols and F^μ is a specific external force ($a^\mu = F^\mu$). We have a closed timelike geodesic when $a^\mu = 0$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

To analyze the linear stability of a CTG γ we consider a small perturbation ξ . The perturbed curve, $\tilde{\gamma}$, has the form $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$. From equations (D.2) one finds [7] that the system of differential equations satisfied by the perturbation ξ is,

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{ds^2} + 2\Gamma_{\beta\mu}^\alpha \dot{x}^\mu \frac{d\xi^\beta}{ds} + \Gamma_{\beta\mu,\lambda}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\mu \xi^\lambda = F_{,\lambda}^\alpha \xi^\lambda, \quad (\text{D.3})$$

where $f_{,\lambda} \equiv \partial f / \partial x^\lambda$. The coefficients of the metrics studied do not depend on φ . Therefore the coefficients of the linear system (D.3) are all constants and the analysis of stability in this case reduces to the solution of a linear system of equations with constant coefficients. Also in all cases we will have conservation of the angular momentum that for the studied CTGs will imply that the angular velocity $\dot{\varphi}$ will be a positive constant.

Excepting Soares CTGs, all the other are circles in the (r, φ) -plane. We will have a CTG when the function $s(r, z_*) = 2\pi\sqrt{g_{\varphi\varphi}(r, z_*)}$ presents a local maximum at some value of r , say $r = \bar{r}$. It is important to stress that to have a reasonable CTG it is necessary that $\bar{r} \neq 0$ and $g_{\varphi\varphi}(\bar{r}, z_*) > 0$. Moreover, a way to obtain CTGs in a spacetime that only has CTCs is to deform this last spacetime, for example, adding matter in such way that the function $g_{\varphi\varphi}(r, z_*)$ of the deformed spacetime be a function with a local maximum at $r = \bar{r}$ with $\bar{r} \neq 0$ and $g_{\varphi\varphi}(\bar{r}, z_*) > 0$.

Van Stockum solution

Steadman [5] described the behavior of CTGs in the exterior of the van Stockum solution for an infinite rotating dust cylinder. The metric is expressed in Weyl-Papapetrou coordinates as,

$$ds^2 = Fdt^2 - H(dr^2 + dz^2) - Ld\varphi^2 - 2Md\varphi dt. \quad (\text{D.4})$$

The metric coefficients in the interior of the cylinder are,

$$H = e^{-a^2 r^2}, L = r^2(1 - a^2 r^2), \rho = 4a^2 e^{a^2 r^2}, M = ar^2, F = 1, \quad (\text{D.5})$$

where a is the angular velocity of the cylinder and ρ the matter density.

In order to have no superluminal matter it is required that radius of the cylinder be less than $1/a$, i.e., at the boundary $r = R < 1/a$. For the closed curve γ given in (D.1) this condition does not allow CTCs inside the cylinder.

Van Stockum found a procedure which generates an exterior solution for all $aR > 0$. He divided this solution in three possibilities, depends on the value of aR . We have CTCs when $aR > 1/2$, in this case, the exterior solution is

$$\begin{aligned} H &= e^{-a^2 R^2} (r/R)^{-2a^2 R^2}, \\ L &= \frac{Rr \sin(3\beta + \ln(r/R) \tan \beta)}{2 \sin 2\beta \cos \beta}, \\ M &= \frac{r \sin(\beta + \ln(r/R) \tan \beta)}{\sin 2\beta}, \\ F &= \frac{r \sin(\beta - \ln(r/R) \tan \beta)}{R \sin \beta}, \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

with

$$\tan \beta = \sqrt{4a^2 R^2 - 1}, \quad \frac{1}{2} < aR < 1. \quad (\text{D.7})$$

In the definition of $\tan \beta$, we take the positive square root and the principal value of β . With these restrictions, it is possible [5] to find closed timelike geodesics in this exterior solution.

For the exterior metric (D.6), the curve γ is timelike when $g_{\varphi\varphi} = -L > 0$ and this occurs when r_* belongs to open interval R_k , where

$$R_k = \left(R \exp \left[\frac{(2k-1)\pi - 3\beta}{\tan \beta} \right], R \exp \left[\frac{2k\pi - 3\beta}{\tan \beta} \right] \right), \quad k \in \mathcal{Z}. \quad (\text{D.8})$$

The four-acceleration of γ has only one non zero component,

$$a^r = \frac{e^{a^2 R^2} (r_*/R)^{2a^2 R^2} \sin(4\beta + \ln(r_*/R) \tan \beta)}{2r_* \cos \beta \sin(3\beta + \ln(r_*/R) \tan \beta)}. \quad (\text{D.9})$$

The radial coordinates of geodesics are the solutions of $a^r(r_*) = 0$. There are an infinite number of solutions and those occurring in the regions R_k are,

$$r_* = r_k = R e^{2(k\pi - 2\beta) \cot \beta}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{D.10})$$

The radial coordinates of the CTGs coincide with the local maximum of $g_{\varphi\varphi}$.

For the above mentioned closed timelike geodesics the system (D.3) reduces to

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^0 + k_1 \dot{\xi}^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^1 + k_2 \dot{\xi}^0 + k_3 \dot{\xi}^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^2 + k_4 \dot{\xi}^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^3 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

where

$$k_1 = 2\Gamma_{21}^0 \dot{\varphi}, \quad k_2 = 2\Gamma_{20}^1 \dot{\varphi}, \quad k_3 = \Gamma_{22,1}^1 \dot{\varphi}^2, \quad k_4 = 2\Gamma_{21}^2 \dot{\varphi}. \quad (\text{D.12})$$

The solution of (D.11) is

$$\begin{aligned} \xi^0 &= -k_1(c_3 \sin(\omega s + c_4)/\omega + \lambda s) + c_1 s + c_5, \\ \xi^1 &= c_3 \cos(\omega s + c_4) + \lambda, \\ \xi^2 &= -k_4(c_3 \sin(\omega s + c_4)/\omega + \lambda s) + c_2 s + c_6, \\ \xi^3 &= c_7 s + c_8, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

where c_i , $i = 1, \dots, 8$ are integration constants,

$$\omega = \sqrt{k_3 - k_1 k_2} \quad (\text{D.14})$$

$$= \left[\left(\frac{r_k}{R} \right)^{2a^2 R^2 - 1} \frac{e^{a^2 R^2}}{8 \cos^4 \beta} \dot{\varphi}^2 \right]^{1/2}, \quad (\text{D.15})$$

and $\lambda = -k_2 c_1 / \omega^2$.

Since $\omega > 0$ is real the solution (D.13) shows the typical behavior for stability, we have vibrational modes untangled with translational ones that can be eliminated by a suitable choice of the initial conditions.

Cloud of cosmic strings

Now we shall consider the spacetime associated to an infinite cylinder formed by a cloud of parallel static strings with a central spinning cosmic string [6]. The clouds of cosmic strings were introduced in [14], see also [15], and for spinning strings see [16, 17]. The spacetime related to the interior of the cylinder of finite radius, $r = R$, is matched continuously to the external metric that is taken as representing a rotating cosmic string.

The line element inside cylinder is

$$ds^2 = (dt - k d\varphi)^2 - [D^2(r)d\varphi^2 + dr^2 + dz^2]. \quad (\text{D.16})$$

We have closed timelike curves when $k^2 - D(r_*) > 0$. The nonzero component of the four-acceleration of this curve is given by $a^r = D'(r)$. Therefore, when $D'(r_*) = 0$ the curve γ is a geodesic.

The nonzero contravariant components of the energy-momentum tensor in the cloud are $T^{tt} = \rho$ and $T^{zz} = p = -\rho$. The Einstein equations in this case reduce to the single equation,

$$\frac{D''}{D} = -\rho. \quad (\text{D.17})$$

The sign analysis of $D''(r)$ and $D(r)$ shows that if there exist CTGs and the condition $D''(r)D(r) < 0$ holds, then $D(r)$ changes sign at least once. Therefore, there are values of $r = \bar{r}$ where $D(\bar{r}) = 0$, i.e., the metric is degenerate. In order to obtain a connected spacetime it is assumed that the mass density of the cloud is negative. Hence $D''(r)D(r) > 0$ for $r \leq R$.

For the metric (D.16), the system (D.3) is

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^0 &= 0, \\ \ddot{\xi}^1 - D''(r_*)D(r_*)\dot{\varphi}^2\xi^1 &= 0 \\ \ddot{\xi}^2 &= 0, \quad \ddot{\xi}^3 = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

We have a solution with periodic modes when $D''(r_*)D(r_*) < 0$. But it was assumed that $D''(r)D(r) > 0$ for $r \leq R$, then the CTGs inside the cylinder are not stable.

The line element outside the cylinder is assumed to be the one of a spinning string,

$$ds^2 = (dt - 8\pi J d\varphi)^2 - (1 - 8\pi\lambda)^2 r^2 d\varphi^2 - (dr^2 + dz^2), \quad (\text{D.19})$$

where λ is the string linear density and J the spin angular momentum per length unit. There exist CTCs outside cloud when $r_* < 8\pi|J|/|1 - 8\pi\lambda|$, but, we do not have CTGs. This can be proved by analyzing the existence of CTCs with maximum length outside of the cylinder. The function that gives the length of these CTCs is $s(r) = 2\pi[(8\pi J)^2 - (1 - 8\pi\lambda)^2 r^2]^{1/2}$ that has maximum point only at $r = 0$. Moreover, the length of CTCs inside the cylinder is given by $s(r) = 2\pi\sqrt{k^2 - D^2(r)}$ and in order to have a CTG we need a function $D(r)$ with a local maximum at $\bar{r} \neq 0$ such that $k^2 - D^2(\bar{r}) > 0$. This occurs for the two examples given in [16]. They are (i) $D(r) = \beta \cosh[(r - R)/r_0 + \alpha]$ and (ii) $D(r) = c[(r - a)^2 + b^2]$, where α, β, a, b, c , and r_0 are constants.

The Gödel-type cases

A Gödel-type (GT) metric $g_{\mu\nu}$, as defined in [15], is a D -dimensional metric of the form

$$g_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - h_{\mu\nu}, \quad (\text{D.20})$$

where the ‘background’ $h_{\mu\nu}$ is the metric of a $(D - 1)$ -dimensional spacetime perpendicular to the timelike unit vector u^μ . Further more we assume that $h_{\mu\nu}$ and u_μ are independent of the fixed special coordinate x^k with $0 \leq k \leq D - 1$ and, moreover, that $h_{k\mu} = 0$.

We shall consider the special cases with $D = 4$ (four dimensional spacetime) and constant u_k . Also we assume, without losing generality, that the special fixed coordinate x^k is $x^0 \equiv t$, then $h_{0\mu} = 0$. We also do $u_0 = 1$.

The Gödel-type metric (D.20) solves the Einstein-Maxwell dust field equations in four dimensions provides the flat three-dimensional Euclidean source-free Maxwell equations

$$\partial_i f_{ij} = 0, \quad (\text{D.21})$$

holds, where $f_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha u_\beta - \partial_\beta u_\alpha$.

GT-metrics with flat background

First, let us consider a Gödel-type metric with flat background. In the usual cylindrical coordinates (r, φ, z) the line element for this spacetime is,

$$ds^2 = (dt - \alpha r^2 d\varphi)^2 - (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2). \quad (\text{D.22})$$

The curve (D.1), γ , is timelike when $g_{\varphi\varphi} = (\alpha^2 r_*^2 - 1)r_*^2 > 0$ that leads us to the condition,

$$r_*^2 > 1/\alpha^2. \quad (\text{D.23})$$

For the CTC γ we find that the nonzero component of the four-acceleration satisfies $a^r = r_*(2\alpha^2 r_*^2 - 1)\dot{\varphi}^2$. The component a^r is identically null when $r_*^2 = 1/2\alpha^2$. Therefore the condition for γ to be timelike (D.23) is not satisfied and then this curve can not be a closed timelike geodesic.

For this CTC the system of perturbation (D.3) can be written as

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^0 + k_1 \dot{\xi}^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^1 + k_2 \dot{\xi}^0 + k_3 \dot{\xi}^2 + k_4 \xi^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^2 + k_5 \dot{\xi}^1 &= 0 \\ \ddot{\xi}^3 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

where

$$k_1 = 2\Gamma_{12}^0 \dot{\varphi}, \quad k_2 = 2\Gamma_{02}^1 \dot{\varphi}, \quad k_3 = \Gamma_{22}^1 \dot{\varphi}^2, \quad k_4 = -\Gamma_{22}^1 \partial_r(\dot{\varphi}^2), \quad k_5 = 2\Gamma_{12}^2 \dot{\varphi}. \quad (\text{D.25})$$

The solution of system (D.24) is given by:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= -k_1(c_3 \sin(\omega s + c_4)/\omega + \lambda s) + c_1 s + c_5, \\ \xi^1 &= c_3 \cos(\omega s + c_4) + \lambda, \\ \xi^2 &= -k_5(c_3 \sin(\omega s + c_4)/\omega + \lambda s) + c_2 s + c_6, \\ \xi^3 &= c_7 s + c_8, \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

where c_i , $i = 1, \dots, 8$ are integration constants,

$$\omega = \sqrt{k_4 - k_1 k_2 - k_3 k_4}, \quad (\text{D.27})$$

$$= \left(\frac{2(2\alpha^6 r_*^6 - 4\alpha^4 r_*^4 + 4\alpha^2 r_*^2 - 1)\dot{\varphi}^2}{r_*^2(\alpha^2 r_*^2 - 1)^2} \right)^{1/2}, \quad (\text{D.28})$$

and $\lambda = -k_2 c_1 / \omega^2$. Thus the CTC is linearly stable when $\alpha r_* > 0.6$.

GT-metrics with conformally flat background

Now we shall studied a Gödel-type metric with a conformally flat background, in this case the line element is,

$$ds^2 = (dt - \frac{1}{\rho^4}(a + \rho^3 b)\alpha r^2 d\varphi)^2 - \frac{1}{\rho^4}(dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2). \quad (\text{D.29})$$

where ρ is the radial distance in R^3 , $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$.

From the geodesic equations we find that the nonzero components of the four-acceleration associated to the curve (D.1) are,

$$\begin{aligned} a^r &= -\frac{r_*}{\rho_0^2}[\rho_0^2(1 - 2\alpha^2 r_*^2(a + b\rho_0^3)^2) + r_*^2(r_*^2\alpha^2(\rho_0^3 ab - \rho_0^6 b^2 + 2a^2) - 2)]\dot{\varphi}^2, \\ a^z &= \frac{z_*}{\rho_0^2}r_*^2(\alpha^2 r_*^2(\rho_0^3 ab - \rho_0^6 b^3 + 2a^2) - 2)\dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

When $z_* = 0$ we have $a^z = 0$ and we are left with only one nonzero component of the acceleration,

$$a^r = \frac{1}{r_*}(\alpha^2(br_*^3 + a)(br_*^3 - 2a) + r_*^2)\dot{\varphi}^2. \quad (\text{D.31})$$

We have also $g_{\varphi\varphi} = (\alpha^2(a + br_*^3)^2 - r_*^2)/r_*^4$. It is possible to choose parameters α , a and b such that $a^r(r_*) = 0$ has positive roots (see for instance the values presented at the end of this Sub-Section). Therefore we have CTGs for these values of r_* . In this case, for these CTGs the system (D.3) reduces to

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^0 + k_1 \dot{\xi}^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^1 + k_2 \dot{\xi}^0 + k_3 \dot{\xi}^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^2 + k_4 \dot{\xi}^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^3 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

where

$$k_1 = 2\Gamma_{21}^0 \dot{\varphi}, \quad k_2 = 2\Gamma_{20}^1 \dot{\varphi}, \quad k_3 = \Gamma_{22,1}^1 \dot{\varphi}^2, \quad k_4 = 2\Gamma_{21}^2 \dot{\varphi}.$$

The solution of (D.32) is

$$\begin{aligned}\xi^0 &= -k_1(c_3 \sin(\omega s + c_4)/\omega + \lambda s) + c_1 s + c_5, \\ \xi^1 &= c_3 \cos(\omega s + c_4) + \lambda, \\ \xi^2 &= -k_4(c_3 \sin(\omega s + c_4)/\omega + \lambda s) + c_2 s + c_6, \\ \xi^3 &= c_7 s + c_8,\end{aligned}\tag{D.33}$$

where c_i , $i = 1, \dots, 8$ are integration constants and

$$\omega = \left[\left(1 + \frac{a + br_*^3}{r_*^4} (2\alpha^2 r_*^2 - \alpha^4 (br_*^3 - 2a^2)) \right) \dot{\varphi}^2 \right]^{1/2} \tag{D.34}$$

In order to have $\omega^2 > 0$ it is necessary that the second term inside of branches be positive or less than one. To do this we can keep b small. For example: a) choosing $a = b = \alpha = 1$, we have $r_* = 1.138684455$ and $g_{\varphi\varphi} = 2.876589804$ and $\omega^2 = 9.459585855\dot{\varphi}^2$, b) for $a = \alpha = 1$ and $b = 0.5$, we have $r_* = 1.333767038$, $g_{\varphi\varphi} = 0.9483504120$ and $\omega^2 = 5.374106554\dot{\varphi}^2$, and c) for $a = 2$, $\alpha = 1$ and $b = 0.1$, we have $r_* = 2.775627312$, and $g_{\varphi\varphi} = 0.1587448306$ and $\omega^2 = 4.44597413\dot{\varphi}^2$. Therefore these three examples represent stable CTGs.

The Soares cosmological model case.

This model describes a class of inhomogeneous stationary cosmological solutions of Einstein-Maxwell equations, with rotating dust and electromagnetic field [4]. We are interested in the subclass of these models with spacetime topology $S^3 \times \mathbb{R}$ and with the dust moving along closed timelike geodesics.

For the metric

$$ds^2 = A_0^2(dt - 2\lambda_1 \cos \theta d\varphi)^2 - dr^2 - B_0^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \tag{D.35}$$

where $B_0^2 = k\Sigma^2 - A_0^2\lambda_1^2$ and A_0 , λ_1 , Σ and k are constants. Note that by definition the time coordinate is a periodic variable [4].

The nonspacelike geodesics are described by the tangent vector field $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/ds$, with

$$\begin{aligned}\dot{t} &= k_0 + \lambda_1 \cos \theta \frac{h_0 + k_0 A_0^2 \lambda_1 \cos \theta}{3A_0^2 \lambda_1^2 \cos^2 \theta - B_0^2 \sin^2 \theta}, \\ \dot{r} &= r_0, \\ \dot{\theta} &= \frac{(h_0 + k_0 A_0^2 \lambda_1 \cos \theta)^2 + A_0^2 k_0^2 - 1 - r_0}{B_0}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{h_0 + k_0 A_0^2 \lambda_1 \cos \theta}{3A_0^2 \lambda_1^2 \cos^2 \theta - B_0^2 \sin^2 \theta},\end{aligned}$$

where h_0 , k_0 and r_0 are arbitrary parameters. Two trivial cases are given by choosing $\theta = \theta_0 = \text{constant}$.

Case1. Choose r_0 , h_0 , k_0 such that

$$\begin{aligned}A_0^2 k_0^2 &= 1, \\ r_0 &= 0. \\ h_0 + k_0 A_0^2 \lambda_1 \cos \theta_0 &= 0.\end{aligned}\tag{D.36}$$

In this case (D.3) can be cast as,

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}^0 + a \dot{\xi}^2 &= 0, \\ \ddot{\xi}^1 &= 0, \\ \ddot{\xi}^2 + b \dot{\xi}^3 &= 0, \\ \ddot{\xi}^3 + c \dot{\xi}^2 &= 0,\end{aligned}$$

where $a = -4\lambda_1^2 \cos \theta_0 A_0^2 k_0^2 / (B_0^2 \sin \theta_0)$, $b = -2\lambda_1 A_0^2 k_0^2 / (B_0^2 \sin \theta_0)$ and $c = -2\lambda_1 k_0^2 \sin \theta_0 A_0^2 / B_0^2$.

The solution of this system is given by

$$\begin{aligned}\xi^0 &= -a(c_5 \exp(\omega s)/\omega - c_6 \exp(-\omega s)/\omega + bc_4 s/\omega^2) + c_1 s + c_7; \\ \xi^1 &= c_2 s + c_3; \\ \xi^2 &= c_5 \exp(\omega s) + c_6 \exp(-\omega s) + bc_4/\omega^2; \\ \xi^3 &= -c(c_5 \exp(\omega s)/\omega - c_6 \exp(-\omega s)/\omega + bc_4 s/\omega^2) + c_4 s + c_8.\end{aligned}\tag{D.37}$$

where c_i , $i = 1, \dots, 8$ are integration constants, and $\omega = \sqrt{bc}$. Therefore these CTGs are not stable.

Case2. Choose h_0, k_0 such that

$$\begin{aligned} A_0^2 k_0^2 &= 1 + r_0^2, \\ h_0 + k_0 A_0^2 \lambda_1 \cos \theta_0 &= 0. \end{aligned} \tag{D.38}$$

The system of perturbation is the same as before and also the CTGs are not stable.

Discussion

In summary, we analyzed the linear stability of closed timelike geodesics in four solutions of Einstein's field equations. It is possible to find CTGs in different spacetimes, they can be fulfilled by matter or not and in both cases the CTGs can be stable or not.

In the first case, CTGs outside of an infinite dust cylinder, we found stable CTGs. In this model the closed curves are circles in a (r, φ) -plane $\Pi = \{t = t_*, z = z_*\}$ and all conclusions obtained are independent of the values of the t_* and z_* . In Π the CTGs appears in infinitely many regions (open flat rings) filled by CTCs and these regions are separated by other regions where the closed curves are spacelike.

In the case of the cloud of cosmic strings there exist CTGs inside the source but these are not linearly stable. There are CTCs in the exterior, but no CTG. This is the only case when the matter content of the solution is exotic, i.e., it does not obey the usual energy conditions. We have negative matter density.

Examples of “cosmological” solutions with CTCs are Gödel-type metric with flat background, as well as, conformally flat background. The first has stable CTCs but no CTGs and for the second it is possible to find values for the parameters to have a spacetime with stable CTGs.

In the “cosmological” model described by Soares we found two examples of not stable CTGs. In this is a case the existence of the CTGs depends upon the nontrivial topology of spacetime.

Acknowledgments

V.M.R. thanks Departamento de Matemática-UFV for giving the conditions to finish this work which was partially supported by PICDT-UFV/CAPES. PSL thanks the partial financial sup-

port of FAPESP and CNPq.

Bibliography

- [1] J. Pfarr, *Gen. Rel. Grav.*, **13**, 1073 (1981)
- [2] W.B. Bonnor and B.R. Steadman, *Gen. Rel. Grav.*, **37**, 1833 (2005)
- [3] V.M. Rosa and P.S. Letelier, Stability of closed timelike geodesics, *Phys. Letts. A* in press
, gr-qc/0703148
- [4] I. D. Soares, *J. Math. Phys.*, **21**, 591 (1980).
- [5] B. R. Steadman, *Gen.Rel.Grav.*, **35**, 1721 (2003)
- [6] Ø. Grøn and S. Johannesen, Closed timelike geodesics in a gas of cosmic strings, arXiv.org
e-print archive: gr-qc/0703139.
- [7] V.M. Rosa and P.S. Letelier, Stability of closed timelike curves in Gödel universe, *Gen.
Rel. Grav.* in press, gr-qc/0703100.
- [8] M. Gürses, A. Karasu, O. Sarioglu, *Class. Quantum. Grav.*, **22**, 1527 (2005)
- [9] R.J. Gleiser, M. Gürses, A. Karasu and Ö. Sarroğlu, *Class. Quantum. Grav.*, **23**, 2653
(2006)
- [10] S. Hawking, *Phys. Rev. D*, **46**, 603 (1991)
- [11] M.F. Shirokov, *Gen.Rel.Grav.*, **2**, 131(1971)
- [12] O. Semerák and M. Žáček, *PASJ*, **52** (2000)

- [13] P.S. Letelier, *Phys. Rev. D* **68**, 104002 (2003)
- [14] P.S. Letelier, *Phys. Rev. D* **20**, 1294 (1979).
- [15] P.S. Letelier, *Class. Quantum Grav.* **4**, L75 (1987).
- [16] D.V. Gal'tsov and P.S. Letelier, *Phys. Rev. D* **47**, 4425 (1993).
- [17] P.S. Letelier, *Class. Quantum. Grav.*, **12**, 471 (1995)