Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÃO DE QUARTA ORDEM

por

Evandro Monteiro †

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

Coorientador: Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva

†Este trabalho contou com o suporte financeiro da Capes.

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÃO DE QUARTA ORDEM

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Evandro Monteiro e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 04 de Outubro de 2011.

Djairo G. de Figueiredo

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo
Orientador

Francisco O. V. de Paiva

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
Coorientador

Banca Examinadora:

1 Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva

2 Prof. Dr. Paolo Piccione

3 Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves

4 Prof. Dr. Olivâine Santana de Queiroz

5 Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR ANA REGINA MACHADO – CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – UNICAMP

M764m

Monteiro, Evandro, 1982-
Multiplicidade de soluções para equação de quarta ordem / Evandro Monteiro. – Campinas, SP : [s.n.], 2011.

Orientador: Djairo Guedes de Figueiredo.
Coorientador: Francisco Odair Vieira de Paiva.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais não-lineares. 2. Morse, Teoria de. 3. Análise funcional não-linear. 4. Equações diferenciais elípticas. 5. Operador laplaciano. I. Figueiredo, Djairo Guedes de, 1934-. II. Paiva, Francisco Odair Vieira de, 1975-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Multiplicity of solutions for fourth order equation
Palavras-chave em inglês:
Partial differential equations, Nonlinear
Morse theory
Nonlinear functional analysis
Elliptic partial differential equations
Laplacian operator
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Francisco Odair Vieira de Paiva [Coorientador]
Paolo Piccione
José Valdo Abreu Gonçalves
Olivâine Santana de Queiroz
Marcelo Martins dos Santos
Data da defesa: 04-10-2011
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 04 de outubro de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Francisco O. V. de Paiva.

Prof(a). Dr(a). FRANCISCO ODAIR VIEIRA DE PAIVA

Prof(a). Dr(a). PAOLO PICCIONE

Prof(a). Dr(a). JOSÉ VALDO ABREU GONÇALVES

Prof(a). Dr(a). OLIVÂINE SANTANA DE QUEIROZ

Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

AGRADECIMENTOS

À Deus por ter me ajudado durante toda esta longa jornada.

Aos meus pais Antônio e Ivete, minha irmã Adriana e meus sobrinhos Adrielly e Carlos Henrique, pelo apoio e compreensão durante toda a minha vida acadêmica.

A minha namorada Rúbia Pereira Carvalho e seus familiares que me acolheram e me apoiaram na parte final desta tese.

Ao Prof. Djairo, ao qual sou imensamente grato pelo auxilio prestado através de suas valiosas sugestões e por sempre estar disposto à discutir sobre os assuntos desta tese. Muito obrigado pela orientação!

Ao Prof. Francisco Odair de Paiva pelo excelente trabalho de co-orientação. Agradeço pelas inúmeras discussões, pelo apoio e pela imensa contribuição neste trabalho.

Aos Profs. Francisco Odair, Paolo Piccione, José Valdo, Olivâine e Marcelo Santos por gentilmente terem aceito o convite para compor a banca examinadora.

Aos amigos Bruno Ribeiro, Elisandra Gloss, Edcarlos Domingos e Taísa Junges, pelas frutíferas discussões matemáticas.

Aos amigos do IMECC que proporcionaram bons momentos.

Aos professores e amigos da UNIFAL-MG que me apoiaram para que este trabalho fosse concluído. Em especial agradeço aos professores: Andréa, Érica, Rejane, Luciana, Angela, Fabrício, José Carlos, José Paulo, Luiz Alberto, Denismar, Eric, José Claudinei e Aldício.

A Cidinha, Ednaldo e Tânia por estarem sempre a disposiçãao para solucionar as questões burocráticas.

A CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nesta tese estudamos existência e multiplicidades de soluções para a equação de quarta ordem do tipo

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e c é um número real. Discutimos o problema assintoticamente linear no caso não ressonante e, também, com ressonância do tipo Landesman-Lazer. Tratamos também de um problema do tipo Ambrosetti-Prodi e um problema cuja não-linearidade depende do gradiente. Utilizamos técnicas variacionais e teoria de Morse para obtenção das soluções.

ABSTRACT

In this thesis we study the existence and multiplicity of solutions for fourth order equation of the type

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function of class C^1 and c is a real number. We discuss the asymptotically linear problem in the case nonresonance and also with resonance of the Landesman-Lazer type. We also treat a problem of the Ambrosetti-Prodi type and one problem whose non-linearity depends on the gradient. We use variational techniques and Morse theory to obtain the solutions.

NOTAÇÕES BÁSICAS

Neste trabalho usaremos a seguintes notações:

- $\mathbb{R}^N, N \geq 3$: espaço euclidiano dos pontos $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$ e $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i|^2}$.
- Ω : um aberto limitado suave em $\mathbb{R}^N, N \geq 3$.
- $\overline{\Omega}$: fecho de Ω.
- $\partial\Omega$: fronteira de Ω.
- $C^k(\overline{\Omega})$: o conjunto de todas as funções com derivadas de ordem k contínuas definidas em $\overline{\Omega}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$.
- $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$: espaço das funções Hölder contínuas.
- $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$: espaço das funções com derivadas de ordem k Hölder contínuas.
- $N^\perp = \{f_1 \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}); \int_\Omega f_1\phi_1 dx = 0\}$.
- $q.t.p.$ quase todo ponto.
- $L^p(\Omega)$: o espaço das funções p-integráveis com norma $\|.\|_{L^p(\Omega)}$.
- Se $N \geq 3$ então $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev para a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$.

- $H_0^1(\Omega)$: o espaço de Sobolev com norma $\|.\|_{H_0^1}$ (que envolve todas as derivadas fracas até ordem 1).

- $H^2(\Omega)$: o espaço de Sobolev com norma $\|.\|_{H^2}$ (que envolve todas as derivadas fracas até ordem 2).

- $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ com a norma induzida a ser definida em cada seção.

- $\|.\|_0$ norma definida no espaço $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ quando $c < \lambda_1$.

- $\|.\|_1$ norma definida no espaço $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ quando $\lambda_1 < c < \lambda_2$.

- $\|.\|_\nu$ norma definida no espaço $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ quando $\lambda_\nu < c < \lambda_{\nu+1}$.

- $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ com a norma induzida $\|(x,y)\|_E^2 = \|x\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|y\|_{H_0^1(\Omega)}^2$.

- λ_1: denota o primeiro autovalor do operador Laplaciano com condição de Dirichlet.

- φ_1: denota a primeira autofunção do operador Laplaciano com condição de Dirichlet.

- λ_k: denota o k-ésimo autovalor do operador Laplaciano com condição de Dirichlet.

- $\varphi_k(A)$: denota a k-ésima autofunção do operador Laplaciano com condição de Dirichlet.

- μ_1: denota o primeiro autovalor do operador de quarta ordem $\Delta^2 + c\Delta$ com condição de Navier.

- μ_k: denota o k-ésimo autovalor do operador de quarta ordem $\Delta^2 + c\Delta$ com condição de Navier.

- μ_k^m: autovalor do operador $\Delta^2 + c\Delta$ com um peso indefinido $m > 0$, $m \in L^r(\Omega)$ com $r > \frac{n}{4}$.

- $g_0 := \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{g(x,t)}{t}, \qquad$ uniformemente em Ω.

- $g_\infty := \lim\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{g(x,t)}{t}, \qquad$ uniformemente em Ω.

- *Condição* (PS): condição de Palais-Smale.

- $m(u)$: índice de Morse da solução u.
- $n(u)$ ou $\nu(u)$: nulidade da solução u.
- $g'(x,t) = \dfrac{d}{dt}g(x,t)$.
- $C_k(F, z_0)$: denota o k-ésimo grupo crítico do funcional $F : H \to \mathbb{R}$ no ponto crítico $z_0 \in H$.
- $C_k(F, \infty)$: denota o k-ésimo grupo crítico no infinito do funcional $I : H \to \mathbb{R}$.
- δ_{ij}: denota o delta de Kronecker.
- G : primitiva de g, isto é, $G(x,t) = \int_0^t g(x,s)ds$.
- $F(K) = \{F(x)$ tal que x é ponto crítico de $F\}$.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, estamos interessados em obter existência e multiplicidade de soluções para a equação de quarta ordem

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$. Consideramos a não-linearidade $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como uma função de classe C^1. Além disso, suporemos g assintoticamente linear e $g(x,0) = 0$, ou seja, a função nula é uma solução de (0.1). A constante c é um número real que caracteriza o funcional associado ao problema (0.1).

O estudo do problema (0.1) iniciou-se através do estudo da equação

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = b[(u+1)^+ - 1] & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.2}$$

Nos trabalhos de A. C. Lazer e P. J. McKenna [25] e P. J. McKenna e W. Walter [29] e [30] foi apontado que o problema (0.2) é um bom modelo para estudar ondas viajantes sobre pontes suspensas. Além disso, nesses trabalhos os autores observaram que o problema (0.2) é também interessante quando a não-linearidade $(u+1)^+ - 1$ é substituída por uma não-linearidade mais geral $g(.,u)$.

Em G. Tarantelo [37] a autora mostrou que se $c < \lambda_1$ então o problema (0.2) possui uma solução não trivial se, e somente se, $b \geq \lambda_1(\lambda_1 - c)$. Usou teoria do grau topológico de Leray-Schauder para demonstrar o resultado. Além disso, mostrou que a solução de (0.2), quando existe, é negativa sobre Ω. Em [24], A. C. Lazer e J. P. McKenna complementaram o resultado obtido por G. Tarantelo [37] no caso unidimensional mostrando que se $b > \lambda_k(\lambda_k - c)$ então a equação diferencial ordinária

$$\begin{aligned} u'''' + cu'' &= b[(u+1)^+ - 1] \\ u(0) = u''(0) &= u(r) = u''(r) = 0 \end{aligned} \tag{0.3}$$

possui pelo menos $2k - 1$ soluções não triviais.

Entre os trabalhos com não-linearidade mais geral $g(.,u)$, conforme abordado neste trabalho, destacamos os trabalhos de A. M. Micheletti e A. Pistoia [31] e [32], e A. Qian e S. Li [35]. No trabalho [31] as autoras obtiveram existência de duas soluções para o problema (0.1) com $c < \lambda_1$ quando $b > \lambda_1(\lambda_1 - c)$ e $g(.,s) = bf(.,s)$ e de três soluções quando b está próximo de $\lambda_k(\lambda_k - c)$. A função $f(.,s)$ é subcrítica e sua primitiva $F(.,s)$ tem comportamento subquadrática $q.t.p.$ em Ω e para todo $s \in \mathbb{R}$. No trabalho [32] as autoras mostraram que se $c > \lambda_1$ e $b < \lambda_1(\lambda_1 - c)$ existem duas soluções não triviais para (0.1) com $g(.,s) = bf(.,s)$. Neste mesmo trabalho verificaram que se $\lambda_k \leq c \leq \lambda_{k+1}$, $f(s) = (s+1)^+ - 1$ e $\lambda_k < b < \lambda_{k+1}$ então o problema (0.1) possui somente a solução trivial. As técnicas aplicadas nestes trabalhos são basicamente técnicas variacionais que consiste em aplicações do Teorema do Passo da Montanha e variações do Teorema do Enlace. No trabalho [34] A. Qian e S. Li mostraram a existência de três soluções não triviais para o problema assintoticamente linear. Duas destas soluções são obtidas pelo Teorema do Passo da Montanha (uma positiva e uma negativa) e uma terceira solução via Teorema do Ponto de Sela.

Ainda citamos outros trabalhos que possuem resultados sobre existência e multiplicidade de soluções para o problema (0.1) tais como [35], [42]. O trabalho [39] estuda a existência de soluções positivas para o problema (0.1). Por último ressaltamos o resultado [41] que o autor considera um operador mais geral $\Delta(g_1((\Delta u)^2)\Delta u) + cdiv(g_2(|\nabla u|^2)\nabla u)$ e mostra a existência de uma solução.

Em nosso trabalho nos dedicamos ao estudo do problema (0.1) com não-linearidade as- sintoticamente linear. O que diferencia nosso trabalho dos anteriores é que utilizamos Teoria de Morse na obtenção das soluções. Além disso, tratamos de problemas ressonantes e problemas do tipo Ambrosetti-Prodi.

Notemos que as soluções fracas do problema (0.1) são os pontos críticos do funcional

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx, \qquad u \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \tag{0.4}$$

em que $G(x,u) = \int_0^u g(x,t)dt$. Com este intuito, utilizaremos técnicas variacionais para garantir a existência destes pontos críticos e Teoria de Morse para diferenciar as soluções obtidas através do cálculo de seus grupos críticos.

No primeiro capítulo abordamos o problema (0.1) no caso não-ressonante. Inicialmente estudamos a teoria espectral do operador $\Delta^2 + c\Delta$, para valores de $c \in \mathbb{R}$, $c \neq \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ necessária para a compreensão do que será feito no decorrer do trabalho. Em seguida, provamos dois princípios de positividade das soluções que serão utilizados nos Capítulo 3 na resolução do problema do tipo Ambrosetti-Prodi. Ressaltamos que não foi encontrado nenhum resultado na literatura referente a estes princípios de positividade das soluções. Prosseguimos o Capítulo 1 passando ao estudo da exis- tência e multiplicidade de soluções para (0.1). O primeiro caso abordado é quando a constante $c < \lambda_1$. Neste caso a parte do funcional $\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2\right) dx$ define uma norma. O primeiro resultado seria considerar $g_0 < \mu_1$ e $\mu_k < g_\infty < \mu_{k+1}$, $k \geq 2$. Entretanto, tal resultado já foi concluído por A. Qian e S. Li no trabalho [34]. Então consideramos os casos em que $\mu_{k-1} \leq g_0 < \mu_k < \mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$ onde mostramos a existência de duas soluções não triviais para o problema (0.1) através da aplicação dos Teoremas do Ponto de Sela e Enlace topológico. Diferenciamos tais soluções através de seus grupos críticos. Nessa mesma seção, ainda consideramos o caso $\mu_1 < g_\infty < \mu_2 \leq \mu_m < g_0 < \mu_{m+1}$ onde, novamente, provamos a existência de pelo menos duas soluções não triviais, aplicando Teorema do Ponto de Sela e Identidade de Morse.

Ainda, no Capítulo 1, estudamos quando $\lambda_\nu < c < \lambda_{\nu+1}$. Neste caso, fizemos uma pequena modificação na expressão $\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2\right) dx$, posto que esta não define uma norma em $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Obtivemos uma norma que se restringirmos ao espaço $H_\nu = span\{\varphi_{\nu+1}, \dots\}$ coincide com a norma anterior. Assim, obtivemos resultados semelhantes aos do caso anterior. Neste mesmo capítulo, verificamos que sob a hipótese $\mu_{k-1} \leq g_0 < \mu_k < g_\infty < \mu_{k+1}$, $k \geq 1$ o problema (0.1) possui exatamente duas soluções não triviais.

Finalizamos o Capítulo 1, apresentando um resultado de não existência de solução positiva para o problema (0.1). Com isso, as soluções obtidas mudam de sinal.

No Capítulo 2, estudamos o caso ressonante do problema assintoticamente linear. Em outras palavras, estudamos questão de existência de solução para o seguinte pro- blema de Dirichlet de 4^a ordem:

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u - \mu u = g(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.5}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1, uniformemente limitada em $\Omega \times \mathbb{R}$, tal que $g(x,0) = 0$ e $c \in \mathbb{R}$. Nesse capítulo, μ vai ser considerado como um dos autovalores (μ_i) de $\Delta^2 + c\Delta$ em V. O funcional associado ao problema (0.5) fica da seguinte forma:

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2 - \mu|u|^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx, \tag{0.6}$$

onde $G(x,t) = \displaystyle\int_0^t g(x,s)ds$. Sob as hipóteses acima F é um funcional de classe C^2.

Novamente, dividimos o problema nos casos $c < \lambda_1$ e $\lambda_\nu < c < \lambda_{\nu+1}$. No primeiro caso, $c < \lambda_1$, se $\mu = \mu_1$ mostramos a existência de solução não trivial através do Princípio Variacional de Ekeland. Neste caso, fizemos apenas hipóteses sobre os limites no infinito $g_{+\infty} = \lim\limits_{s\to+\infty} g(x,s) = \alpha < 0$, uniformemente em Ω, e $g_{-\infty} = \lim\limits_{s\to-\infty} g(x,s) = \beta > 0$, uniformemente em Ω. Além disso, assumimos $g_0 > 0$.

Ainda no segundo capítulo, verificamos a existência de solução não trivial para ressonância em autovalores de ordem superior μ_k, $k \geq 2$, utilizando como hipótese a conhecida condição de Landesman-Lazer. O trabalho pioneiro neste sentido para a equação de segunda ordem semilinear foi [26]. Uma abordagem mais simples pode ser vista em [20]. A solução do problema (0.5) é obtida aplicando o Teorema do Ponto de Sela.

Conforme feito no Capítulo 1, provamos resultados semelhantes para $\lambda_\nu < c < \lambda_{\nu+1}$.

No Capítulo 3, estudamos o problema do tipo Ambrosetti-Prodi para o problema (0.1), ou seja,

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x,u) + t\phi_1(x) + f_1(x) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.7}$$

onde $f = t\phi_1 + f_1$, com $f_1 \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ e $\int_\Omega f_1\phi_1 dx = 0$, e $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que seu comportamento no infinito é

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{g(x,s)}{s} < \mu_1 < \lim_{s\to+\infty} \frac{g(x,s)}{s}, \quad \text{unformemente em } x. \tag{0.8}$$

Para o problema (0.7) estudamos condições sobre o parâmetro real t para existência e não-existência de solução. Concluímos que existe um número real $\alpha(f_1)$ tal que

i) O problema (0.7) não tem solução se $t > \alpha(f_1)$;

ii) O problema (0.7) tem pelo menos uma solução se $t < \alpha(f_1)$.

Além disso, se $\lim_{s\to+\infty} \dfrac{g(x,s)}{s} = \gamma$ com $\gamma \in (\mu_j, \mu_{j+1})$ para algum $j \geq 1$ então existe $\beta(f_1) \leq \alpha(f_1)$ tal que

iii) O problema (0.7) possui ao menos duas soluções para $t < \beta(f_1)$.

Gostariamos de ressaltar que as estimativas e os resultados de regularidade utilizados no Capítulo 3 podem ser encontradas no recente trabalho [19].

No Capítulo 4, estudamos a questão da existência de solução para o problema (0.1) com a não-linearidade dependendo também do gradiente da função u, isto é, $g = g(x, u, \nabla u)$. Tal problema não possui estrutura variacional. Neste caso, utilizamos a técnica desenvolvida por D. G. De Figueiredo, M. Girardi e M. Matzeu em [16] que consiste em "congelar o gradiente", isto é, para cada $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, consideremos

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x, u, \nabla w) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.9}$$

tal problema possui estrutura variacional. Daí, mostramos a existência de solução u_w utilizando o Teorema do Passo da Montanha. Mostramos limitações inferior e superior para estas soluções. Definimos um método iterativo que converge para uma solução u de (0.1) com $g = g(x, u, \nabla u)$.

Notemos que a equação de 4^a ordem estudada no Capítulo 4, é equivalente a um sistema dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = v & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = cv + g(x, u, \nabla u) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.10}$$

Motivado pelo sistema acima, podemos aplicar a mesma técnica do Capítulo 4 para mostrar a existência de solução para um sistema do tipo gradiente com não linearidade dependendo do gradiente, isto é, mostra-se que existe solução para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = F_u(x, u, v, \nabla u, \nabla v) & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = F_v(x, u, v, \nabla u, \nabla v) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.11}$$

onde Ω é um domínio limitado e suave do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ e $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

Finalizamos, nosso trabalho, incluindo dois Apêndices: o primeiro consta de resultados básicos utilizados no trabalho e o segundo é dedicado a Teoria de Morse, sendo esta a teoria central utilizada no trabalho.

CAPÍTULO 1

EQUAÇÃO DE 4^A ORDEM NÃO RESSONANTE

Neste capítulo estamos interessados em estudar existência de múltiplas soluções para o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $g(x,0) = 0$ e $c \in \mathbb{R}$.

Suponhamos que

$$g_0 := \lim_{t \to 0} \frac{g(x,t)}{t}, \qquad \text{uniformemente em } \Omega$$

$$g_\infty := \lim_{|t| \to \infty} \frac{g(x,t)}{t}, \qquad \text{uniformemente em } \Omega.$$

Denotemos por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \ldots$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1)$ e φ_j as autofunções associadas a λ_j. Seja $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert (cujo produto interno será definido posteriormente dependendo do valor de $c \in \mathbb{R}$).

Notemos que, se λ_k é um autovalor de $(-\Delta, H_0^1)$, então $\mu_k = \lambda_k(\lambda_k - c)$ é um autovalor de $(\Delta^2 + c\Delta, V)$ com autofunções φ_k. Portanto, as autofunções associadas a $(-\Delta, H_0^1)$ formam uma base para V.

Lembremos, ainda, que as soluções do problema (1.1) correspondem aos pontos críticos do funcional F definido em V por

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2\right) dx - \int_{\Omega} G(x,u)dx, \tag{1.2}$$

onde $G(x,t) = \displaystyle\int_0^t g(x,s)ds$. Sob as hipóteses acima F é um funcional de classe C^2.

Na Seção §1.1 estudaremos as principais propriedades do operador $\Delta^2 + c\Delta$, $c \in \mathbb{R}$. Verificaremos, inicialmente, a caracterização variacional dos autovalores para o problema linear e com um peso indefinido. Em seguida, obtemos resultados sobre princípios de positividade de solução utilizados no decorrer do trabalho.

Na Seção §1.2 estudaremos existência e multiplicidade de soluções para o problema assintoticamente linear. Para tanto, faz-se necessário o estudo de forma separada dos casos $c < \lambda_1$ e $\lambda_\nu < c < \lambda_{\nu+1}$, pois no primeiro caso, o termo $\displaystyle\int_{\Omega}\left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2\right) dx$ do funcional dado em (1.2) define uma norma em V, o que torna mais simples o estudo. No entanto, isso não ocorre no segundo caso.

Na Seção §1.3 mostramos um resultado que garante a existência de exatamente duas soluções para o problema assintoticamente linear (1.1) e na Seção §1.4 estudamos a não existência de solução positiva para o problema (1.1).

1.1 Teoria Espectral do Operador $\Delta^2 + c\Delta$, $c \in \mathbb{R}$

Conforme descrevemos na introdução deste capítulo, se $\mu_k(c) = \lambda_k(\lambda_k - c)$, $k = 1, 2, \ldots$, então tais $\mu_k's$ são autovalores associados a $(\Delta^2 + c\Delta, V)$ com autofunções φ_k. Além disso, desde que a família $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ forma uma base de $H_0^1(\Omega)$ então também forma uma base para $V = H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. Decorre disso que, se μ é um autovalor associado a $(\Delta^2 + c\Delta, V)$, então $\mu = \mu_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

1.1.1 Caso $c < \lambda_1$

Nesta seção daremos uma caracterização variacional dos autovalores do operador $(\Delta^2 + c\Delta, V)$ para o problema linear e com um peso indefinido. Além disso, de- monstraremos dois princípios de máximo relativos ao operador $\Delta^2 + c\Delta$ com $c < \lambda_1$.

Da caracterização dos autovalores de $(\Delta^2+c\Delta, V)$, isto é, $\mu_k(c) = \lambda_k(\lambda_k - c)$, $k = 1, 2, \ldots$, temos que:

- μ_1 é simples e a autofunção associada a μ_1 não muda de sinal.
- $0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \ldots$ e $\mu_k \to \infty$ quando $k \to \infty$.

No que segue, daremos uma caracterização variacional dos autovalores do operador $(\Delta^2 + c\Delta, V)$. Seja

$$B[u,v] = \int_\Omega (\Delta u \Delta v - c\nabla u \nabla v)\, dx \tag{1.3}$$

Afirmação 1.1. $\mu_k = \min\limits_{u\in F_k\setminus\{0\}} \dfrac{B[u,u]}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}$, *onde* $F_k = span\{\varphi_k, \varphi_{k+1}, \ldots\}$

De fato, sendo φ_k a autofunção associada a μ_k então:

$$B[\varphi_k, \varphi_k] = \mu_k \|\varphi_k\|^2_{L^2(\Omega)} = \mu_k \tag{1.4}$$

e

$$B[\varphi_k, \varphi_{k+l}] = \mu_k(\varphi_k, \varphi_{k+l})_{L^2(\Omega)} = 0, \quad l = 1, 2, \ldots. \tag{1.5}$$

Seja $u \in F_k$ tal que $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Então podemos escrever

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} d_{k+l}\varphi_{k+l}, \tag{1.6}$$

onde $d_{k+l} = (u, \varphi_{k+l})_{L^2(\Omega)}$ com a série convergindo em $L^2(\Omega)$. Além disso,

$$\sum_{l=0}^{\infty} d^2_{k+l} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = 1. \tag{1.7}$$

Assim, de (1.4) - (1.7) obtemos

$$B[u,u] = \sum_{l=0}^{\infty} d^2_{k+l}\mu_{k+l} \geq \mu_k. \tag{1.8}$$

Como a igualdade se verifica para $u = \varphi_k$, segue a afirmação.

□

Problema de autovalor com peso

Seja $m : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função positiva e suponhamos que $m \in L^r(\Omega)$, com $r > \dfrac{n}{4}$. Consideremos o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = \mu^m m u & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.9}$$

Temos que:

- $\mu_k^m = \min\limits_{u \in F_k \setminus \{0\}} \dfrac{B[u,u]}{\|u\|^2_{L^2(\Omega),m}}$, onde $F_k = span\{\varphi_k, \varphi_{k+1}, \ldots\}$ e $\|u\|^2_{L^2(\Omega),m} = \displaystyle\int_\Omega m|u|^2 dx$.

- μ_1^m é simples e a autofunção associada a μ_1^m não muda de sinal.

- $\mu_1^m < \mu_2^m \le \mu_3^m \le \ldots$ e $\mu_k^m \to \infty$ quando $k \to \infty$.

Assim, como obtido para o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda^m m u & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.1. *Sejam $m, \tilde{m} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ funções em $L^r(\Omega)$, com $r > \dfrac{n}{4}$, tais que $0 < m(x) \le \tilde{m}(x)$ para todo $x \in \Omega$. Então*

$$\mu_k^m \ge \mu_k^{\tilde{m}}, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Além disso, se $m(x) < \tilde{m}(x)$ em um subconjunto de medida positiva em Ω, então temos a desigualdade estrita em (1.11).

Demonstração: A prova deste resultado segue de maneira análoga a prova da Proposição 1.12A de [13]. $\square$

Além da caracterização dos autovalores do operador $\Delta^2 + c\Delta$, verificamos que no caso $c < \lambda_1$ temos o seguinte princípio de positividade:

Teorema 1.1.2. *Suponhamos que $u \in C^4(\Omega)$, com u e Δu contínuas em $\bar{\Omega}$, seja uma solução da equação de quarta ordem*

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u - \mu u = f(x) & \textit{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \textit{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.12}$$

Se $0 \le \mu < \mu_1$ e $f(x) \ge 0$, para todo $x \in \Omega$, então $u(x) \ge 0$, para todo $x \in \Omega$.

Demonstração: Para provar este resultado vamos utilizar o princípio do máximo para sistemas elípticos lineares descrito no trabalho [17].

Observemos, primeiramente, que o problema de quarta ordem (1.12) pode ser re- escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = v & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = cv + \mu u + f & \text{em } \Omega \\ \quad u = v \ = \ 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

ou ainda, escrevemos a equação na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} -\Delta u \\ -\Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Observe que, a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & c \end{pmatrix}$ é cooperativa, pois $\mu \geq 0$. Sejam $L = \begin{pmatrix} -\Delta \\ -\Delta \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & c \end{pmatrix}$. Dizemos que o operador $L - A$ satisfaz a propriedade Ψ se existe uma função $\Psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\Psi(x) > 0$ para $x \in \overline{\Omega}$.

2. $L(\Psi) \geq A(\Psi)$ em Ω.

Verificaremos que o operador $L - A$ definido anteriormente satisfaz a propriedade Ψ. De fato, considere um aberto $\Omega' \supseteq \overline{\Omega}$ tal que o primeiro autovalor λ_1', do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega')$, e o primeiro autovalor μ_1', do operador $\Delta^2 + c\Delta$ em $H^2(\Omega') \cap H_0^1(\Omega')$), satisfaçam

$$c < \lambda_1' < \lambda_1 \quad \text{e} \quad \mu < \mu_1' < \mu_1.$$

Denotemos por ϕ_1' a primeira autofunção correspondente a $(-\Delta, H_0^1(\Omega'))$ e seja $\bar{\phi} = \phi_1'|_{\overline{\Omega}}$. Definamos

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \bar{\phi} \\ \lambda_1' \bar{\phi} \end{pmatrix}.$$

Observe que, $\Psi(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
(L-A)(\Psi) &= \begin{pmatrix} -\Delta\bar{\phi} \\ -\Delta(\lambda_1'\bar{\phi}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\phi} \\ \lambda_1'\bar{\phi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1'\bar{\phi} - \lambda_1'\bar{\phi} \\ (\lambda_1')^2\bar{\phi} - (\mu + \lambda_1' c)\bar{\phi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ (\mu_1' - \mu)\bar{\phi} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como $\mu < \mu_1'$ segue que $(L-A)(\Psi) \geq 0$, o que mostra a propriedade Ψ. Segue do Teorema 1.2 (pg 43, [17]) que $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0$. Portanto $u \geq 0$.

□

Notemos que, diferentemente do que acontece para o operador $-\Delta$, o princípio de positividade que provamos acima só vale quando $\mu \geq 0$ e $c < \lambda_1$. No que segue, daremos condições para que seja válido um princípio de positividade quando $\mu < 0$, mas precisamos da condição $0 < c < \lambda_1$. Já ressaltamos que o resultado que obtivemos não é válido para todo $\mu < 0$. A ideia da prova consiste em imergir um sistema não cooperativo 2×2 em um sistema cooperativo 3×3 e utilizar argumentos semelhantes a prova do Teorema 1.1.2. Essas ideias são baseadas no trabalho [17].

Teorema 1.1.3. *Seja $0 < c < \lambda_1$. Suponhamos que $u \in C^4(\Omega)$, com u e Δu contínuas em $\bar{\Omega}$, seja uma solução da equação de quarta ordem*

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u - \mu u = f(x) & em \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & sobre \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.13}$$

Suponhamos que $-\dfrac{c^2}{4} < \mu < 0$. Se $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega$, então $u(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega$.

Demonstração: Notemos que o problema de quarta ordem (1.13) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta v = cv + \mu u + f \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta u = v \quad \text{em } \Omega \\ u = v = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.14}$$

Conforme feito em [17], p. 57, considerando $w = \delta u + v$ (δ a ser obtido posteriormente), o sistema

$$\begin{cases} -\Delta v &= av + bu + f \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta u &= ev + du + g \quad \text{em } \Omega \\ \quad u &= v \;=\; 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.15}$$

é imerso no sistema

$$\begin{cases} -\Delta v &= (a-r)v + (b - r\delta)u + rw + f \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta u &= ev + du + g \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta w &= (a - r + e\delta)v + (b + d\delta - r\delta)u + rw + f + \delta g \quad \text{em } \Omega \\ \quad u &= v \;=\; 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.16}$$

Comparando os sistemas (1.14) e (1.15), segue que $a = c$, $b = \mu$, $e = 1$, $d = 0$ e $g = 0$. Assim, substituindo em (1.16), obtemos

$$\begin{cases} -\Delta v &= (c-r)v + (\mu - r\delta)u + rw + f \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta u &= v \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta w &= (c - r + \delta)v + (\mu - r\delta)u + rw + f \quad \text{em } \Omega \\ \quad u &= v \;=\; 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.17}$$

Reescrevendo o sistema acima na forma matricial, resulta que:

$$\begin{pmatrix} -\Delta v \\ -\Delta u \\ -\Delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-r & \mu - r\delta & r \\ 1 & 0 & 0 \\ c - r + \delta & \mu - r\delta & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Para que a matriz

$$\begin{pmatrix} c-r & \mu - r\delta & r \\ 1 & 0 & 0 \\ c - r + \delta & \mu - r\delta & r \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

seja cooperativa devemos ter $r > 0$, $\delta \leq \dfrac{\mu}{r}$ e $c - r + \delta \geq 0$. Segue disso que $r - c \leq \delta < 0$. Escolhemos δ tal que $r - c \leq \delta \leq \dfrac{\mu}{r}$ (neste momento utilizamos a hipótese de $\mu \geq -\dfrac{c^2}{4}$ para garantir que $r - c \leq \dfrac{\mu}{r}$).

Portanto, a matriz dada em (1.18) é cooperativa. Concluímos a demonstração deste teorema de maneira análoga a feita no Teorema 1.1.2.

□

1.1.2 Caso $\lambda_\nu < c < \lambda_{\nu+1}$

Este caso abordamos de forma separada, visto que nem todas as propriedades verificadas anteriormente permanecem válidas aqui, posto que

$$B[u,v] = \int_\Omega (\Delta u \Delta v - c\nabla u \nabla v)\, dx$$

não é uma forma bilinear positiva definida em $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Por outro lado, se consideramos a forma bilinear acima, restrita ao subespaço $H_\nu = span\{\varphi_{\nu+1}, \varphi_{\nu+2}, \ldots\}$, ela é positiva definida. Decorrente disso temos :

- $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ são negativos;
- μ_1 é simples e a autofunção associada a μ_1 não muda de sinal;
- $\mu_\nu < 0 < \mu_{\nu+1} \leq \mu_{\nu+2} \leq \ldots$ e $\mu_k \to \infty$ quando $k \to \infty$.

Segue de maneira análoga a Afirmação 1.1 que

Observação 1.1.4. *Para todo $k \geq \nu + 1$ temos $\mu_k = \min\limits_{u \in F_k \setminus \{0\}} \dfrac{B[u,u]}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}$, onde $F_k = span\{\varphi_k, \varphi_{k+1}, \ldots\}$.*

Observação 1.1.5. *A teoria espectral do operador $(\Delta^2 + c\Delta, V)$ com peso indefinido permanece válida com as devidas adaptações como acima.*

1.2 Existência e Multiplicidade de Soluções: Problema Assintoticamente Linear:

Lembremos que o primeiro capítulo deste trabalho é dedicado ao estudo do problema assintoticamente linear de 4^a ordem

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ e a não-linearidade $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 com $g(x,0) = 0$.

Conforme descrito no início deste capítulo, efetuaremos o estudo dos casos $c < \lambda_1$ e $\lambda_\nu < c < \lambda_{\nu+1}$. Para facilitar o entendimento do trabalho abordaremos o caso quando $\nu = 1$.

1.2.1 Caso $c < \lambda_1$

Seja $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ o espaço de Hilbert com a norma

$$\|u\|_0^2 = \int_\Omega [(\Delta u)^2 - c|\nabla u|^2].$$

Nosso objetivo, nesta parte do trabalho, é estudar existência e multiplicidade de soluções para o problema (1.1) quando os limites g_0 e g_∞ interagem com o espectro do operador $\Delta^2 + c\Delta$. Naturalmente, o primeiro resultado a considerar é quando $g_0 < \mu_1$ e $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$ com $m \geq 2$. Tal resultado foi obtido por *A. X. Qian e S. J. Li,* no trabalho [34] utilizando o Teorema do Passo da Montanha (vide Teorema B.14) e Teorema do Ponto de Sela (vide Teorema B.15). O resultado obtido foi o seguinte:

Teorema 1.2.1. ***(Qian** & **Li).*** *Assuma $g_0 < \mu_1$, e que existe $m \geq 2$ tal que $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$. Então o problema (1.1) possui três soluções não triviais.*

No que segue enunciamos e demonstramos os nossos resultados obtidos para o pro- blema não-ressonante no caso $c < \lambda_1$. Nos dois resultados iniciais estamos considerando $g_0 < g_\infty$ e no terceiro resultado $g_\infty < g_0$. Nestes teoremas, mostramos existência de pelo menos duas soluções para o problema (1.1). Nos casos onde tratamos $g_0 < g_\infty$ utilizamos o Teorema do Ponto de Sela (vide Teorema B.15) e o Teorema do Enlace (vide Teorema B.16) para obter duas soluções e utilizamos a Teoria de Morse (vide Apêndice A) para diferenciá-las. No caso $g_\infty < g_0$, utilizamos o Teorema do Ponto de Sela para encontrar uma solução e a identidade de Morse (vide Teorema B.21) para obter a segunda solução.

No primeiro teorema a condição $g'(x,t) \geq g(x,t)/t$ impõe uma condição de crescimento sobre o quociente $g(x,t)/t$, isto é, $g(x,t)/t$ é crescente para $t > 0$ e decrescente para $t < 0$. Assim, obtemos:

Teorema 1.2.2. *Suponha que $g'(x,t) \geq g(x,t)/t$ para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$. Além disso, assuma que existe $k \geq 2$, $m \geq k+1$ tal que $\mu_{k-1} \leq g_0 < \mu_k$, $\mu_{k-1} < g(x,t)/t$ e $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$. Então o problema 1.1 tem pelo menos duas soluções não triviais.*

Observação 1.2.3. *A condição $m \geq k+1$ no Teorema 1.2.2 é utilizada para diferenciar as duas soluções obtidas pelos Teoremas do Enlace e do Ponto de Sela. No entanto, ressaltamos que no caso em que $m = k$ vale um resultado mais forte onde mostramos a existência de exatamente duas soluções (vide Teorema 1.3.1).*

No próximo resultado colocamos uma limitação para a derivada de g o que permite retirar a hipótese $g(x,t)/t$ utilizada no Teorema 1.2.2, como segue:

Teorema 1.2.4. *Suponha que existe $k \geq 2$, $m \geq k+1$ tal que $\mu_{k-1} \leq g_0 < \mu_k$ e $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$. Assuma que $\mu_{k-1} \leq g'(x,t) < \mu_{m+1}$, para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$. Então o problema 1.1 possui duas soluções não triviais.*

Nosso próximo resultado consiste em considerar os limites $g_\infty < g_0$.

Teorema 1.2.5. *Assuma que $\mu_1 < g_\infty < \mu_2$ e que existe $m \geq 2$ tal que $\mu_m < g_0 < \mu_{m+1}$. Então o problema (1.1) tem pelo menos duas soluções não triviais.*

No que segue demonstraremos alguns resultados que nos auxiliarão na demonstração do Teorema 1.2.2. Em seguida, provaremos o Teorema 1.2.2. Feito isso, passamos a prova dos demais teoremas enunciados acima.

Desde que as autofunções φ_k´s formam uma base para V, considere uma decomposição para o espaço $V = H \oplus H_3$ obtida da seguinte forma: $H = span\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ e $H_3 = H^\perp$.

Passamos agora a verificação da condição de Palais-Smale (PS).

Lema 1.2.6. *Suponhamos que $m \geq 2$ e $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$, então o funcional dado em (1.2) satisfaz a condição (PS).*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset V$ uma sequência (PS), ou seja, uma sequência tal que $F(u_n) \to C$ e $F'(u_n) \to 0$. Desde que a função g é sublinear basta mostrar que a sequência (u_n) é limitada em V.

Suponhamos o contrário, que $\|u_n\|_0 \to +\infty$ quando $n \to \infty$. Defina a sequência (v_n) por

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_0}.$$

Desde que a sequência (v_n) é limitada em V, utilizando as imersões de Sobolev existe uma subsequência tal que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } V, \quad v_n \to v \text{ em } L^p(\Omega), \quad v_n \to v \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Seja $\phi \in V$. Então

$$F'(u_n)\phi = \int_\Omega (\Delta u_n \Delta \phi - c\nabla u_n \nabla \phi)dx - \int_\Omega g(x,u_n)\phi dx$$

ou ainda,

$$\frac{F'(u_n)}{\|u_n\|_0}\phi = \int_\Omega (\Delta v_n \Delta\phi - c\nabla v_n \nabla\phi)dx - \int_\Omega \frac{g(x,u_n)}{u_n} v_n \phi dx.$$

Tomando limite na última expressão e utilizando as convergências acima, obtemos

$$\Delta^2 v + c\Delta v = g_\infty v \tag{1.19}$$

no sentido fraco.

De fato, definindo $A_+ = \{x \in \Omega; v(x) > 0 \; q.t.p.\}$ e $A_- = \{x \in \Omega; v(x) < 0 \; q.t.p.\}$ então $u_n(x) \to \infty$ $q.t.p.$ se $x \in A_+$ e $u_n(x) \to -\infty$ $q.t.p.$ se $x \in A_-$. Utilizando (g_∞) e o fato que sobre $A_0 = \{x \in \Omega; v(x) = 0 \; a.e.\}$, $\dfrac{g(x,u_n)}{u_n}$ é limitada, resulta a equação (1.19).

O próximo passo é mostrar que $v \neq 0$. Para isso, utilizamos o fato que $F(u_n) \to C$ quando $n \to \infty$. Então

$$\frac{F(u_n)}{\|u_n\|_0^2} = \frac{1}{2} - \int_\Omega \frac{G(x,u_n)}{\|u_n\|_0^2} dx = \frac{1}{2} - \int_\Omega \frac{G(x,u_n)}{u_n^2} v_n^2 dx.$$

Tomando limite $n \to \infty$ na última expressão, concluímos que

$$\int_\Omega g_\infty v^2 dx = \frac{1}{2},$$

donde $v \neq 0$. Disso e de (1.19) segue que g_∞ é um autovalor de $(\Delta^2 + c\Delta, V)$, o que é uma contradição, isto mostra que a sequência (u_n) é limitada e o lema está provado.

$\square$

O próximo resultado é uma verificação da geometria do Teorema do Ponto de Sela.

Lema 1.2.7. *Assuma que existe $m \geq 2$ tal que $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$. Então:*
(i) $F(u) \to -\infty$, quando $\|u\|_0 \to \infty$, para $u \in H$.
(ii) Existe $C_1 > 0$ tal que $F(u) \geq -C_1$, para todo $u \in H_3$.

Demonstração:: (i) Desde que $\mu_m < g_\infty$ então, tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $C > 0$ tal que

$$G(x,t) \geq \frac{t^2}{2}(\mu_m + \epsilon) - C. \tag{1.20}$$

Assim,

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|_0^2 - \int_\Omega \frac{u^2}{2}(\mu_m + \epsilon)dx + C\int_\Omega |u|dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|_0^2 \left(1 - \frac{\mu_m + \epsilon}{\mu_m}\right) + C|\Omega| \end{aligned}$$

o que mostra (i).

Utilizando o fato $g_\infty < \mu_{m+1}$ e argumentando de maneira análoga a (i), com as desigualdades inversas, obtemos (ii), o que prova o lema. $\square$

Desde que o espaço V é gerado pelas autofunções de $(-\Delta, H_0^1)$, vamos decompor o espaço V da seguinte forma

$$V = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3,$$

onde $H_1 = span\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}\}$, $H_2 = span\{\varphi_k, \dots, \varphi_m\}$ e $H_3 = (H_1 \oplus H_2)^\perp$.

Lema 1.2.8. *Suponha que existem $\alpha, \delta > 0$ tais que $\mu_{k-1} \leq g(x,t)/t \leq \alpha < \mu_k$ para $|t| < \delta$, $k \geq 2$, e $g'(x,t) \geq \mu_{k-1}$. Além disso, assuma que $m \geq k+1$ tal que $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$. As seguintes condições são verificadas:*
(i) Existem $r > 0$ e $A > 0$ tais que $F(u) \geq A$, para todo $u \in H_2 \oplus H_3$ com $\|u\|_0 = r$.
(ii) $F(u) \to -\infty$, quando $\|u\|_0 \to \infty$, para todo $u \in H_1 \oplus H_2$.
(iii) $F(u) \leq 0$, para todo $u \in H_1$.

Demonstração: Seja $H^{m+1} = \ker\{\Delta^2 + c\Delta - \mu_{m+1} I\}$. Então $H_2 \oplus H_3 = U \oplus W$, onde $U = H_2 \oplus H^{m+1}$. Para $v \in V$ escrevemos $v = u + w$, $u \in U$ e $w \in W$. Sendo $dim U < +\infty$ então U é gerado pelas autofunções do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$, que são $L^\infty(\Omega)$. Logo, existe $r > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq \frac{\gamma - \mu_{m+1}}{\gamma - \alpha}\delta \quad \text{se } \|u\|_V \leq r,$$

onde $\gamma > \mu_{m+1}$ e $\displaystyle\int_\Omega (|\Delta w|^2 - c|\nabla w|^2)dx \geq \gamma \int_\Omega |w|^2 dx$, para todo $w \in W$.

Suponha que $\|u\|_0 \leq r$. Se $|u(x) + w(x)| \leq \delta$, então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mu_2|u|^2 + \frac{1}{4}\gamma|w|^2 - G(x, u+w) &\geq \frac{1}{2}\mu_2|u|^2 + \frac{1}{4}\gamma|w|^2 - \frac{1}{2}\alpha(u+w)^2 \\
&= -\frac{1}{4}\alpha|w|^2 + \frac{1}{4}(\gamma - \alpha)|w|^2 \\
&+ \frac{1}{2}(\mu_2 - \alpha)u^2 - \alpha uw \\
&\geq -\frac{1}{4}\mu_2|w|^2 + \frac{1}{2}(\mu_2 - \alpha)u^2 - \alpha uw
\end{aligned}$$

Se $|u(x) + w(x)| > \delta$, temos

$$|G(x, u+w)| \leq \frac{1}{2}\mu_{m+1}(u+w)^2 - \frac{1}{2}(\mu_{m+1} - \alpha)\delta^2$$

e assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mu_2|u|^2+\frac{1}{4}\gamma|w|^2-G(x,u+w) &\geq \frac{1}{2}\mu_2|u|^2+\frac{1}{4}\gamma|w|^2-\frac{1}{2}\mu_{m+1}(u+w)^2\\
&+ \frac{1}{2}(\mu_{m+1}-\alpha)\delta^2\\
&= \frac{1}{2}\mu_2|u|^2+\frac{1}{4}\gamma|w|^2-\frac{1}{2}\mu_{m+1}|u|^2-\frac{1}{2}\mu_{m+1}|w|^2\\
&- \mu_{m+1}uw+\frac{1}{2}(\mu_{m+1}-\alpha)\delta^2\\
&= -\frac{1}{4}\mu_{m+1}|w|^2+\frac{1}{2}(\mu_2-\alpha)|u|^2-\alpha uw\\
&+ \frac{1}{4}(\gamma-\mu_{m+1})|w|^2+(\alpha-\mu_{m+1})uw\\
&+ \frac{1}{2}(\alpha-\mu_{m+1})|u|^2+\frac{1}{2}(\mu_{m+1}-\alpha)\delta^2\\
&\geq -\frac{1}{4}\mu_{m+1}|w|^2+\frac{1}{2}(\mu_2-\alpha)|u|^2-\alpha uw,
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade segue do fato de que

$$
\frac{1}{4}(\gamma-\mu_{m+1})|w|^2+(\alpha-\mu_{m+1})uw+\frac{1}{2}(\alpha-\mu_{m+1})|u|^2+\frac{1}{2}(\mu_{m+1}-\alpha)\delta^2
$$

ser uma forma quadrática em w positiva definida (vide p. 235, [18]).

Portanto, obtemos

$$
\begin{aligned}
F(v) &= \frac{1}{2}\|u+w\|_0^2-\int_\Omega G(x,u+w)dx\\
&\geq \frac{1}{4}\|w\|_0^2-\frac{1}{4}\mu_{m+1}\int_\Omega |w|^2dx+\frac{1}{2}(\mu_2-\alpha)\int_\Omega |u|^2dx\\
&\geq \min\left\{\frac{1}{4}\left(1-\frac{\mu_{m+1}}{\gamma}\right),\frac{\mu_2-\alpha}{2\mu_{m+1}}\right\}\|v\|_0^2,
\end{aligned}
$$

o que mostra (i).

A prova de (ii) segue de maneira análoga a de (i) do Lema 1.2.7. Para a prova de (iii) note que se $g'(x,s)\geq\mu_{k-1}$, então $G(x,t)\geq\mu_{k-1}t^2/2$. Daí, se $u\in H_1$ então $u=\sum_{i=1}^{k-1}m_i\varphi_i$

para constantes $m_i \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2)dx - \int_\Omega G(x, u+w)dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} m_i^2 \frac{1}{2}\int_\Omega (|\Delta \varphi_i|^2 - c|\nabla \varphi_i|^2)dx - \sum_{i=1}^{k-1} m_i^2 \frac{\mu_{k-1}}{2}\int_\Omega \varphi_i^2 dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} \frac{m_i^2}{2}\left(\|\varphi_i\|_0^2 - \int_\Omega \mu_i \varphi_i^2 dx\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

o que prova (iii) e o lema está demonstrado.

$\square$

Utilizando os lemas anteriores abordaremos, agora, a demonstração do Teorema 1.2.2.

Demonstração: (Teorema 1.2.2) Pelos lemas 1.2.6 e 1.2.7 o funcional em (1.2) satisfaz a condição (PS) e possui a geometria do Teorema do Ponto de Sela (vide Teorema B.15). Logo F possui um ponto crítico u_1 satisfazendo

$$C_m(F, u_1) \neq 0.$$

Além disso, pelas condições $\mu_{k-1} \leq g_0 < \mu_k$ e $g'(x,t) \geq g(x,t)/t$ para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$, verificamos as hipóteses do Lema 1.2.8. Segue disso que o funcional F satisfaz a geometria do Teorema do Enlace (vide Teorema B.16). Assim, existe um ponto crítico u_2 de F satisfazendo

$$C_k(F, u_2) \neq 0.$$

Desde que $g_0 < \mu_k$ então $m(0) + n(0) \leq k-1$, isto implica que u_1, u_2 são não triviais. Resta-nos mostrar que $u_1 \neq u_2$.

Afirmação: $C_p(F, u_2) = \delta_{pk}\mathbb{Z}$

Do fato que $C_k(F, u_2) \neq 0$, aplicando o Teorema de Shifting (Teorema B.10), obtemos $m(u_2) \leq k$. Vamos mostrar que $m(u_2) = k$. Com efeito, sejam β_i´s os autovalores de $(\Delta^2 + c\Delta, V)$ com peso

$$\Delta^2 u_2 + c\Delta u_2 = \frac{g(x, u_2)}{u_2} u_2.$$

Desde que $g(x,t)/t > \mu_{k-1}$ obtemos $\beta_i(g(x,u_2)/u_2) < \beta_i(\mu_{k-1}) < 1$ para todo $i \leq k-1$. Isto implica que $\beta_k(g(x,u_2)/u_2) \leq 1$, o que resulta $m(u_2) \geq k$. Assim, $m(u_2) = k$. Novamente, pelo Teorema de Shifting (Teorema B.10) temos $C_p(F, u_2) = \delta_{pk}\mathbb{Z}$, o que prova a afirmação.

Decorre da afirmação e do fato $m \geq k+1$ que $u_1 \neq u_2$.

$\square$

No que segue abordaremos as provas dos demais teoremas enunciados no início deste capítulo.

Demonstração:(Teorema 1.2.4) Pelas hipóteses $\mu_{k-1} \leq g_0 < \mu_k$ e $\mu_{k-1} \leq g'(x,t) < \mu_{m+1}$ para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$, verificamos as hipóteses do Lema 1.2.8. Assim, como na prova do teorema anterior existem pontos críticos u_1 e u_2 tais que:

$$C_m(F,u_1) \neq 0 \quad \text{e} \quad C_k(F,u_2) \neq 0.$$

Desde que $\mu_{k-1} \leq g_0 < \mu_k$, então $m(0)+n(0) \leq k-1$, donde pelo Corolário de Gromoll-Meyer (Corolário B.12) temos que $C_p(F,0) = 0$ para todo $p > k-1$, o que mostra que u_1 e u_2 são soluções não triviais de (1.1).

Resta-nos mostrar que $u_1 \neq u_2$. Para isso, vamos mostrar que $C_p(F,u_1) = \delta_{pm}\mathbb{Z}$. De fato, desde que $g'(x,t) < \mu_{m+1}$ temos:

$$\begin{aligned} F''(u_1)(v,v) &= \int_\Omega \left(|\Delta v|^2 - c|\nabla v|^2\right) dx - \int_\Omega g'(x,u_1)v^2 dx \\ &> \int_\Omega \left(|\Delta v|^2 - c|\nabla v|^2\right) dx - \mu_{m+1}\int_\Omega |v|^2 dx \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

para todo $v \in span\{\varphi_{m+1}, \ldots\}$. Assim, $m(u_1)+n(u_1) \leq m$. Desde que $C_m(F,u_1) \neq 0$ segue pelo Teorema de Shifting (Teorema B.10) que $C_p(F,u_1) = \delta_{pm}\mathbb{Z}$. Resulta disso que $u_1 \neq u_2$, o que prova o teorema. $\square$

Demonstração:(Teorema 1.2.5) Desde que $\mu_1 < g_\infty < \mu_2$ podemos aplicar o Teorema do Ponto de Sela (Teorema B.15) e garantir a existência de um ponto crítico $u_1 \neq 0$ de F tal que $C_1(F,u_1) \neq 0$.

Afirmação: $C_p(F,u_1) = \delta_{p1}$.

De fato, desde que $C_1(F,u_1) \neq 0$ então $m(u_1) \leq 1$. Se $m(u_1) = 1$ então pelo Teorema de Shifting (Teorema B.10) segue a afirmação. Se $m(u_1) = 0$, então o primeiro autovalor β_1 do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 v + c\Delta v = \beta g'(x,u_1)v & \text{em} \quad \Omega \\ v = \Delta v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.21}$$

satisfaz $\beta_1 = 1$ e é simples. Segue que $n(u_1) = 1$ e, novamente pelo Teorema de Shifting, segue a afirmação.

Da condição $\mu_m < g_0 < \mu_{m+1}$ segue que $C_p(F, 0) = \delta_{pm}$. Assim, se u_1 e 0 são os únicos pontos críticos de F, então pela Identidade de Morse que

$$(-1) = (-1) + (-1)^m,$$

o que é uma contradição, o que prova o teorema.

$\square$

1.2.2 Caso $\lambda_1 < c < \lambda_2$

Nesta seção obteremos resultados semelhantes aos obtidos na Seção §1.2.1 com o parâmetro $\lambda_1 < c < \lambda_2$.

Desde que $\lambda_1 < c < \lambda_2$, então o primeiro autovalor de

$$\begin{cases} \Delta^2 v + c\Delta v = \mu v & \text{em} \quad \Omega \\ v = \Delta v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.22}$$

é negativo, assim a expressão $\int_\Omega (\Delta v.\Delta u - c\nabla v.\nabla u)dx$ não define um produto interno. Lembremos que o produto interno usual neste caso é $\int_\Omega (\Delta v.\Delta u + \nabla v.\nabla u)dx$. Seja $\|.\|$ a norma gerada por este produto interno. Usaremos uma norma equivalente a essa definida como segue:

Seja V como definido anteriormente. Para cada $\phi \in V$, como as autofunções de $(-\Delta, H_0^1)$ formam uma base para V, segue que $\phi = \alpha_1\varphi_1 + \overline{\phi}$, onde $\overline{\phi} \in span\{\varphi_1\}^\perp$. Assim, definimos a norma por

$$\begin{aligned} \|\phi\|_1^2 &= \alpha_1^2 \int_\Omega (|\Delta\varphi_1|^2 + |\nabla\varphi_1|^2)dx + \int_\Omega (|\Delta\overline{\phi}|^2 - c|\nabla\overline{\phi}|^2)dx \\ &= \alpha_1^2(\lambda_1^2 + \lambda_1) + \int_\Omega (|\Delta\overline{\phi}|^2 - c|\nabla\overline{\phi}|^2)dx \\ &= \alpha_1^2(\lambda_1^2 + \lambda_1) + \|\overline{\phi}\|_0^2 \end{aligned}$$

Passemos a verificação da condição (PS).

Lema 1.2.9. *Suponha que g_∞ não é um autovalor de (1.22), então o funcional definido em (1.2) satisfaz a condição (PS).*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset V$ uma sequência (PS), ou seja, uma sequência tal que $F(u_n) \to C$ e $F'(u_n) \to 0$. A prova é feita como no Lema 1.2.6, definindo uma sequência $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_1}$, mostra-se que $v_n \to v$, quando $n \to \infty$, e

$$\Delta^2 v + c\Delta v = g_\infty v. \tag{1.23}$$

Assim, conforme feito no Lema 1.2.6, resta-nos mostrar que $v \neq 0$. Para isso, escrevemos $u_n = t_1^n \varphi_1 + \overline{\phi}_n$. Logo,

$$\begin{aligned} F(u_n) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u_n|^2 - c|\nabla u_n|^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u_n)dx \\ &= \frac{1}{2}\|u_n\|_1^2 - \frac{1}{2}(t_1^n)^2(\lambda_1 + c\lambda_1) - \int_\Omega G(x,u_n)dx. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Desde que $v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$, quando $n \to \infty$, então $\displaystyle\int v_n\varphi_1 \to \int v\varphi_1 = t_1$. Assim, tomando limite na expressão

$$\frac{F(u_n)}{\|u_n\|_1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{(t_1^n)^2}{\|u_n\|_1^2}(\lambda_1 + c\lambda_1) - \int_\Omega \frac{G(\,u_n)}{u_n^2}v_n^2 dx$$

obtemos:

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t_1)^2(\lambda_1 + c\lambda_1) - \int_\Omega g_\infty v^2 dx,$$

o que implica que $v \neq 0$ o que finaliza a demonstração do lema. $\square$

Passemos agora a verificação de algumas geometrias do funcional dado em (1.2) sob a condição abordada nesta seção $\lambda_1 < c < \lambda_2$.

Lema 1.2.10. *Assuma que existe $m \geq 2$ tal que $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$. Então:*
(i) $F(u) \to -\infty$, quando $\|u\|_0 \to \infty$, para $u \in H$.
(ii) Existe $C_1 > 0$ tal que $F(u) \geq -C_1$, para todo $u \in H_3$.

Demonstração:: Prova de (i). Desde que $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$ então existem $\epsilon > 0$ e $B > 0$ tais que

$$G(x,s) \geq \frac{\mu_m + \epsilon}{2}s^2 - B.$$

Daí,

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2)dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|w\|_1^2 + \frac{1}{2}t^2\lambda_1(\lambda_1 - c) - \frac{\mu_m + \epsilon}{2}\int_\Omega (t^2\varphi_1^2 + w^2)dx + C|\Omega| \\ &\leq \frac{1}{2}\|w\|_1^2\left(1 - \frac{\mu_m + \epsilon}{\mu_m}\right) + \frac{1}{2}t^2\left(\lambda_1^2 - c\lambda_1\right) - t^2\frac{\mu_m + \epsilon}{2} + C|\Omega| \end{aligned}$$

o que implica $F(u) \to -\infty$ quando $\|u\|_1 \to \infty$.

A prova de (ii) segue de maneira análoga a prova de (ii) do Lema 1.2.7. $\square$

Nosso próximo passo é mostrar um resultado análogo ao Lema 1.2.8, pois os teoremas de existência de soluções seguem da geometria verificada nos Lemas 1.2.7 e 1.2.8.

De maneira análoga seção anterior decompomos o espaço V da seguinte forma

$$V = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3,$$

onde $H_1 = span\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}\}$, $H_2 = span\{\varphi_k, \dots, \varphi_m\}$ e $H_3 = (H_1 \oplus H_2)^{\perp}$.

Lema 1.2.11. *Suponha que existem $\alpha, \delta > 0$ tais que $\mu_{k-1} \leq g(x,t)/t \leq \alpha < \mu_k$ para $|t| < \delta$, $k \geq 2$, e $g'(x,t) \geq \mu_{k-1}$. Além disso, assuma que $m \geq k+1$ tal que $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$. As seguintes condições são verificadas:*
(i) Existem $r > 0$ e $A > 0$ tais que $F(u) \geq A$, para todo $u \in H_2 \oplus H_3$ com $\|u\|_V = r$.
(ii) $F(u) \to -\infty$, quando $\|u\|_V \to \infty$, para $u \in H_1 \oplus H_2$.
(iii) $F(u) \leq 0$, para todo $u \in H_1$.

Demonstração: Notemos que o item (i) segue de maneira análoga a (i) do Lema 1.2.8.

Prova de (ii). Seja $u \in H_1 \oplus H_2$. Então $u = t\varphi_1 + w$, onde $w \in span\{\varphi_1\}^{\perp}$. Da condição $\mu_m < g_\infty$ então existem $\epsilon, C > 0$ tais que $G(x,s) \geq ((\mu_m + \epsilon)/2)s^2 - C$. Assim,

$$\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2)dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|w\|_1^2 + \frac{1}{2}t^2\lambda_1(\lambda_1 - c) - \frac{\mu_m + \epsilon}{2}\int_\Omega (t^2\varphi_1^2 + w^2)dx + C|\Omega| \\
&\leq \frac{1}{2}\|w\|_1^2\left(1 - \frac{\mu_m + \epsilon}{\mu_m}\right) + \frac{1}{2}t^2\left(\lambda_1^2 - c\lambda_1\right) - t^2\frac{\mu_m + \epsilon}{2} + C|\Omega|
\end{aligned}$$

Resulta da última expressão que $F(u) \to -\infty$ quando $\|u\|_1 \to \infty$.

Prova de (iii). Desde que $g'(x,s) \geq \mu_{k-1}$, então $G(x,t) \geq \mu_{k-1}t^2/2$. Daí, se $u \in H_1$ então $u = \sum_{i=1}^{k-1} m_i\varphi_i$ para constantes $m_i \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2)dx - \int_\Omega G(x,u+w)dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} m_i^2\frac{1}{2}\int_\Omega (|\Delta\varphi_i|^2 - c|\nabla\varphi_i|^2)dx - \sum_{i=1}^{k-1} m_i^2\frac{\mu_{k-1}}{2}\int_\Omega \varphi_i^2 dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} \frac{m_i^2}{2}\left(\|\varphi_i\|_1^2 - \int_\Omega \mu_i\varphi_i^2 dx\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

o que prova o lema.

$\square$

Verificamos nos Lemas 1.2.10 e 1.2.11 a geometria para o funcional dado em (1.2) semelhante as geometrias dos Lemas 1.2.7 e 1.2.8. Além disso, o Lema 1.2.9 nos mostra a condição de compacidade (PS). Assim, com as mesmas demonstrações do Teoremas 1.2.2 e 1.2.4 obtemos:

Teorema 1.2.12. *Suponha que $g'(x,t) \geq g(x,t)/t$ para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$. Além disso, assuma que existe $k \geq 2$, $m \geq k+1$ tal que $\mu_{k-1} \leq g_0 < \mu_k$, $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$ e $\mu_{k-1} < g(x,t)/t$. Então o problema (1.1) tem pelo menos duas soluções não triviais.*

e

Teorema 1.2.13. *Suponha que existe $k \geq 2$, $m \geq k+1$ tal que $\mu_{k-1} \leq g_0 < \mu_k$ e $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$. Assuma que $\mu_{k-1} \leq g'(x,t) < \mu_{m+1}$, para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$. Então o problema (1.1) possui duas soluções não triviais.*

Resulta dos Lemas 1.2.9 e 1.2.10 o seguinte resultado:

Teorema 1.2.14. *Assuma que $\mu_1 < g_\infty < \mu_2$. Suponha que existe $m \geq 2$ tal que $\mu_m < g_0 < \mu_{m+1}$. Então o problema (1.1) tem pelo menos duas soluções não triviais.*

Demonstração: Pelos Lemas 1.2.9 e 1.2.10, e aplicando o Teorema do Ponto de Sela (vide Teorema B.15), existe uma solução u_1 tal que $C_1(F, u_1) \neq 0$. Além disso, da condição $\mu_m < g_0 < \mu_{m+1}$ obtemos $u_1 \neq 0$.

Para a existência da segunda solução procedemos de maneira análoga ao Teorema 1.2.5.

$\square$

1.2.3 Caso $\lambda_\nu < c < \lambda_{\nu+1}$, $\nu \geq 2$

Nesta seção obtemos resultados de existência de soluções semelhantes aos obtidos nas Seções §1.2.1 e §1.2.2. Sob certas condições, que serão descritas no decorrer da seção, mostraremos existência de uma ou mais soluções não triviais.

Desde que $\lambda_\nu < c < \lambda_{\nu+1}$, então os ν primeiros autovalores de

$$\begin{cases} \Delta^2 v + c\Delta v = \mu v & \text{em} \quad \Omega \\ v = \Delta v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.25}$$

são negativos, assim vamos definir a norma da seguinte forma:

Seja V como definido anteriormente. Então, para cada $\phi \in V$, como as autofunções de $(-\Delta, H_0^1)$ formam uma base para V, segue que $\phi = \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_\nu\varphi_\nu + \overline{\phi}$, onde $\overline{\phi} \in span\{\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu\}^\perp$. Assim, definimos a norma por

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_\nu^2 &= \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^2 \int_\Omega (|\Delta\varphi_i|^2 + |\nabla\varphi_i|^2)dx + \int_\Omega (|\Delta\overline{\phi}|^2 - c|\nabla\overline{\phi}|^2)dx \\
&= \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^2(\lambda_i^2 + \lambda_i) + \int_\Omega (|\Delta\overline{\phi}|^2 - c|\nabla\overline{\phi}|^2)dx \\
&= \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^2(\lambda_i^2 + \lambda_i) + \|\overline{\phi}\|_0^2.
\end{aligned}$$

Observe que, na Seção §1.2.2 verificamos a condição (PS) desde que g_∞ não é um autovalor de (1.25). A diferença na verificação da condição (PS) é que neste caso a equação (1.24) no Lema 1.2.9 é substituída por

$$\begin{aligned}
F(u_n) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u_n|^2 - c|\nabla u_n|^2\right) dx - \int_\Omega G(x, u_n)dx \\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|_\nu^2 - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{2}(t_i^n)^2(\lambda_i + c\lambda_i) - \int_\Omega G(x, u_n)dx.
\end{aligned}$$

e, consequentemente, obtemos

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i)^2(\lambda_i + c\lambda_i) - \int_\Omega g_\infty v^2 dx,$$

donde concluímos, com os mesmos argumentos utilizados anteriormente, que a condição (PS) está satisfeita.

Consideremos $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$. Assim, podemos decompor $V = H \oplus W$ onde $H = span\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ e $W = H^\perp$.

Temos um análogo ao Lema 1.2.10:

Lema 1.2.15. *Assuma que $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$ e que $\nu \le m$. Então:*
(i) $F(u) \to -\infty$, quando $\|u\|_\nu \to \infty$, para $u \in H$.
(ii) Existe $C_1 > 0$ tal que $F(w) \ge -C_1$ para todo $w \in W$.

Demonstração: A prova de (ii) é a mesma feita no Lema 1.2.7 no seu item (ii).

A parte (i) segue da hipótese $g_\infty > \mu_m$. De fato, se $u \in H$, desde que $\nu \leq m$, temos $u = \sum_{i=1}^{\nu} t_i\varphi_i + w$. Assim, temos dois casos a considerar:

1^o) $\nu < m$. Neste caso temos que existem $\epsilon, B > 0$ tais que

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|w\|_\nu^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2(\lambda_i^2 - c\lambda_i) - \frac{\mu_m+\epsilon}{2}\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 + \int_\Omega |w|^2 dx\right) + B|\Omega| \\
&\leq \frac{1}{2}\|w\|_\nu^2\left(1 - \frac{\mu_m+\epsilon}{\mu_m}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2(\lambda_i^2 - c\lambda_i - (\mu_m+\epsilon)) + B|\Omega|
\end{aligned}
$$

2^o) $\nu = m$. Neste caso, obtemos

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2(\lambda_i^2 - c\lambda_i - (\mu_\nu+\epsilon)) + B|\Omega|
\end{aligned}
$$

em ambos casos temos que $F(u) \to -\infty$ quando $\|u\|_\nu \to \infty$, o que finaliza a prova do lema.

$\square$

Em busca de encontrar mais soluções para o problema (1.1) vamos verificar um lema análogo ao Lema 1.2.8. Sejam H_1, H_2 e H_3 como definidos nas seções anteriores. Assim:

Lema 1.2.16. *Suponha que $\nu \leq k$ e que existem $\alpha, \delta > 0$ tais que $\mu_{k-1} \leq g(x,t)/t \leq \alpha < \mu_k$ para $|t| < \delta$, $k \geq 2$, e $g'(x,t) \geq \mu_{k-1}$. Além disso, assuma que $m \geq k+1$ tal que $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$. As seguintes condições são verificadas:*
(i) Existem $r > 0$ e $A > 0$ tais que $F(u) \geq A$, para todo $u \in H_2 \oplus H_3$ com $\|u\|_\nu = r$.
(ii) $F(u) \to -\infty$, quando $\|u\|_\nu \to \infty$, para $u \in H_1 \oplus H_2$.
(iii) $F(u) \leq 0$, para todo $u \in H_1$.

A demonstração do Lema 1.2.16 segue as mesmas linhas das demonstrações dos Lemas 1.2.8 e 1.2.11 por isso não a abordaremos aqui.

Passaremos, agora, aos resultados centrais dessa seção, que nos garante a existência de mais de uma solução para o problema (1.1).

Teorema 1.2.17. *Suponha que existam $k \in \mathbb{N}$, $m \geq k+1$ tais que $\mu_{k-1} \leq g_0 < \mu_k$, $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$ e $\nu \leq m$. Assuma que $g'(x,t) \geq g(x,t)/t$ para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$; e*

$\mu_{k-1} \leq g'(x,t)$. Então: se $\nu \leq k$ o problema (1.1) possui duas soluções não triviais; se $k < \nu$ o problema (1.1) possui uma solução não trivial.

Demonstração: Observemos que se $\nu \leq k$ então pelo Lema 1.2.15 verificamos a geometria do Teorema do Ponto de Sela (vide Teorema B.15) e da condição (PS) segue que existe uma solução u_1 de (1.1). Além disso, $C_m(F, u_1) \neq 0$. Também pelo Lema 1.2.16 existe, aplicando o Teorema do Enlace Topológico (vide Teorema B.16), uma solução u_2 de (1.1) tal que $C_k(F, u_2) \neq 0$. Para concluir que u_1 e u_2 são distintas e não triviais procedemos de maneira análoga ao Teorema 1.2.4.

Se $k < \nu$ é imediato do Lema 1.2.15 e do fato que $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$ que existe uma solução $u_1 \neq 0$.

□

Teorema 1.2.18. *Suponha que existam $k \in \mathbb{N}$, $m \geq k+1$ tais que $\mu_{k-1} \leq g_0 < \mu_k$, $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$ e $\nu \leq m$. Assuma que $\mu_{k-1} \leq g'(x,t) \leq \mu_{m+1}$, para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$. Então: se $\nu \leq k$ o problema (1.1) possui duas soluções não triviais; se $k < \nu$ o problema (1.1) possui uma solução não trivial.*

A prova do Teorema 1.2.18 segue na mesma linha da prova do Teorema 1.2.4 utilizando a condição (PS) e os Lemas 1.2.15 e 1.2.16.

Da condição (PS) e do Lema 1.2.15 obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.19. *Assuma que $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$ e que $\nu \leq m$. Suponha que existe $s \geq m+1$ tal que $\mu_s < g_0 < \mu_{s+1}$. Então o problema (1.1) tem pelo menos uma solução não trivial.*

Demonstração: Da condição (PS) e do Lema 1.2.15 obtemos, aplicando o Teorema do Ponto de Sela, que existe uma solução u_1 para o problema (1.1). Além disso, como $\mu_s < g_0 < \mu_{s+1}$, então $u_1 \neq 0$.

□

1.3 Existência de exatamente duas soluções

Na Seção §1.2.1, os resultados que obtivemos provam a existência de pelo menos duas soluções para o problema assintoticamente linear dado em (1.1). Nesta seção, iremos abordar um resultado que mostra a existência de exatamente duas soluções.

No decorrer desta seção o parâmetro c é menor do que λ_1.

Teorema 1.3.1. *Assumamos que existe $k \geq 1$, tal que $\mu_{k-1} \leq g_0 < \mu_k < g_\infty < \mu_{k+1}$. Além disso, suponhamos que $\mu_{k-1} < g(x,t)/t \leq g'(x,t) < \mu_{k+1}$ para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$. Então o problema 1.1 possui exatamente duas soluções não triviais.*

Antes de passarmos a demonstração do Teorema 1.3.1 iremos provar o seguinte lema que nos será útil na prova do Teorema 1.3.1.

Lema 1.3.2. *Sob as hipóteses do Teorema 1.3.1 temos que $\nu(u_0) = 0$, para todo u_0 solução não trivial de (1.1).*

Demonstração: Seja u_0 um ponto crítico não trivial de (1.1). Denotemos por $g(x,u_0) = g(u_0)$ e $g'(x,u_0) = g'(u_0)$. Temos que $F''(u_0)u = 0$, se e somente se,

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g'(u_0)u & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.26}$$

Da condição $g(x,0) = 0$, o problema (1.1) pode ser reescrito na forma

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = q(x)u & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.27}$$

onde $q(x) = g(u_0)/u_0$ se $u_0(x) \neq 0$ e $q(x) = g'(0)$ se $u_0(x) = 0$. Sabemos que se u_0 é uma solução clássica de (1.1), então u_0 não pode ser identicamente nula em nenhum subconjunto de Ω com medida positiva. Sejam $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n \leq \ldots$ e $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_n \leq \ldots$ os autovalores dos problemas

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g'(u_0)u & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.28}$$

e

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = q(x)u & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.29}$$

respectivamente.

Afirmação: $\alpha_n < \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, da hipótese $g'(u_0(x)) \geq \dfrac{g(u_0(x))}{u_0(x)}$ e pela propriedade da continuação única temos

$$\left| \left\{ x \in \Omega : g'(u_0(x)) > \frac{g(u_0(x))}{u_0(x)} \right\} \right| > 0.$$

Aplicamos a Proposição 1.12 em [13] e, assim, a *Afirmação* está provada.

Agora, suponha que $\{\nu_n\}$ e $\{\delta_n\}$ denotem os autovalores dos problemas

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = \nu\mu_{k+1}u & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = \delta\mu_{k-1}u & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

respectivamente. Isto implica que $\nu_n = \mu_n/\mu_{k+1}$ e $\delta_n = \mu_n/\mu_{k-1}$. Desde que

$$\mu_{k-1} < \frac{g(u_0(x))}{u_0(x)} \leq g'(u_0(x)) < \mu_{k+1}$$

para todo $x \in \Omega$ tal que $u_0(x) \neq 0$, repetimos a mesma prova que $\alpha_n < \beta_n$, donde obtemos

$$\alpha_{k-1} < \delta_{k-1} = 1, \qquad 1 = \nu_{k+1} < \alpha_{k+1}.$$

De $u_0 \neq 0$ segue que 1 é autovalor de (1.28). Da última desigualdade resulta que $\alpha_k = 1$.

Portanto, $\beta_{k-1} < \delta_{k-1} = 1 = \alpha_k < \beta_k$. Isto implica que 1 não é autovalor de (1.29), ou seja, $\nu(u_0) = 0$, o que finaliza a prova do lema. □

Passemos, agora, à prova do Teorema 1.3.1.

Demonstração:(Teorema 1.3.1)

Seja $a < b$ tal que $F(K) \in (a, b)$ (veja [2]). Então pela hipótese

$$\mu_{k-1} \leq g_0 < \mu_k < g_\infty < \mu_{k+1} \tag{1.30}$$

com uma prova análoga a feita em [27] temos

$$C_p(F, 0) = \delta_{p(k-1)\mathbb{Z}}$$

e

$$H_p(F_b, F_a) = \delta_{pk}\mathbb{Z}.$$

Além disso, temos que u é um ponto crítico não trivial de F por (1.30). Pelo Lema 1.3.2 obtemos que u é não degenerado e que seu índice de Morse é k. Portanto

$$C_p(F, u) = \delta_{pk}\mathbb{Z}.$$

Seja m o número de pontos críticos não triviais de F. Pela identidade de Morse (vide [8]), obtemos

$$(-1)^k = (-1)^{k-1} + m(-1)^k.$$

Disto segue que $m = 2$. Então o problema (1.1) tem exatamente duas soluções não triviais.

$\square$

1.4 Não-Existência de Solução Positiva para o Problema Assintoticamente Linear

Nesta seção estamos interessados em mostrar que sob alguns aspectos o problema (1.1) não admite solução positiva e também não possui solução negativa. Conforme fizemos anteriormente vamos dividir nos casos $c < \lambda_1$ e $\lambda_\nu < c < \lambda_{\nu+1}$.

1.4.1 Caso $c < \lambda_1$

Na Seção §1.2 garantimos a existência de pelo menos duas soluções não triviais nos Teoremas 1.2.2 e 1.2.4. Do resultado a seguir, verificamos que estas soluções trocam de sinal. Segue do Teorema 1.2.4 o seguinte resultado:

Teorema 1.4.1. *Suponhamos que $g'(x,t) > \mu_1$ (ou $\frac{g(x,t)}{t} > \mu_1$) para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$. Então o problema (1.1) não possui solução positiva e também não possui solução negativa.*

Demonstração: Seja u uma solução positiva para o problema (1.1). Então u satisfaz

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Multiplicando a equação anterior por φ_1 e integrando sobre Ω obtemos:

$$\begin{aligned} \int_\Omega u\mu_1\varphi_1 dx &= \int_\Omega (\Delta u \Delta\varphi_1 - c\nabla u \nabla\varphi_1)\, dx \\ &= \int_\Omega g(x,u)\varphi_1 dx \end{aligned} \tag{1.31}$$

Desde que $g'(x,t) > \mu_1$ então $g(x,t) > \mu_1 t$ para todo $x \in \Omega$ e $t > 0$. Substituindo na equação (1.31) obtemos

$$\int_\Omega u\mu_1\varphi_1 dx \;\; > \;\; \int_\Omega u\mu_1\varphi_1 dx,$$

o que é uma contradição. Logo, o problema (1.1) não possui solução positiva.

De maneira análoga mostra-se que o problema (1.1) não possui solução negativa.

□

Observação 1.4.2. *Note que se $k > 2$ então as soluções obtidas nos Teoremas 1.2.2 e 1.2.4 não são positivas.*

1.4.2 Caso $\lambda_\nu < c < \lambda_{\nu+1}$

Nesta seção mostraremos de forma semelhante ao caso anterior que o problema (1.1) não possui solução positiva. No entanto, o caso $\lambda_1 < c < \lambda_2$ deve ser abordado de forma separada.

Teorema 1.4.3. *Suponha que $\lambda_1 < c < \lambda_2$ e $g'(x,t) > \mu_1$ (ou $\frac{g(x,t)}{t} > \mu_1$) para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$. Então o problema (1.1) não possui solução positiva.*

A prova segue de maneira análoga a prova do Teorema 1.4.1 e portanto a omitiremos aqui.

O caso mais interessante é quando $\lambda_\nu < c < \lambda_{\nu+1}$ com $\nu \geq 2$. A hipótese $g'(x,t) > \mu_1$ (ou $\frac{g(x,t)}{t} > \mu_1$) para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$ não é mais suficiente para garantir a não-existência de solução positiva.

Teorema 1.4.4. *Suponhamos que $\lambda_\nu < c < \lambda_{\nu+1}$ ($\nu \geq 2$) e $g'(x,t) > \mu_m$ para algum m (ou $\frac{g(x,t)}{t} > \mu_1$) para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$. Se $m \leq \nu$ suponha que $c < \lambda_m + \lambda_1$. Então o problema (1.1) não possui solução positiva.*

Demonstração: Se $m \geq \nu + 1$ então $\mu_1 < 0 < \mu_{\nu+1}$. Assim, como na prova do Teorema 1.4.1 temos que

$$\int_\Omega u\mu_1\varphi_1 dx \;\; \geq \;\; \int_\Omega u\mu_m\varphi_1 dx,$$

para toda solução u positiva o que é uma contradição.

Se $m \leq \nu$ então precisamos da hipótese adicional $c < \lambda_1 + \lambda_m$ para garantir que $\mu_1 < \mu_m$.

De fato, se $c < \lambda_1 + \lambda_m$ então:

$$(\lambda_m - \lambda_1)c < \lambda_m^2 - \lambda_1^2$$

o que implica

$$\lambda_1(\lambda_1 - c) < \lambda_m(\lambda_m - c),$$

o que mostra que $\mu_1 < \mu_m$.

O restante da prova segue de maneira análoga ao primeiro caso.

$\square$

CAPÍTULO 2

PROBLEMA ASSINTOTICAMENTE LINEAR RESSONANTE: TIPO LANDESMAN-LAZER

Neste capítulo iremos estudar o problema (1.1) no caso ressonante. Tais problemas são caracterizados por ter o limite g_∞ como um autovalor do operador $\Delta^2 + c\Delta$ em $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. O trabalho pioneiro utilizando como hipótese a conhecida condição de Landesman-Lazer para a equação de segunda ordem semilinear ($-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$) foi [26], uma abordagem mais simples pode ser vista em [20].

Consideremos o problema (1.1) reescrevendo-o de outra forma:

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u - \mu u = g(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 uniformemente limitada em $\Omega \times \mathbb{R}$ tal que $g(x,0) = 0$, $c \in \mathbb{R}$. Agora, μ vai ser tomado como um dos autovalores (μ_i) de $\Delta^2 + c\Delta$ em V.

Notemos que, se definirmos $h(x,t) = \mu t + g(x,t)$, então

$$h_\infty := \lim_{|t|\to\infty} \frac{h(x,t)}{t} = \mu, \qquad \text{uniformemente em } \Omega,$$

e, portanto, o problema é ressonante.

Nesta nova formulação, o funcional associado ao problema (2.1) fica da seguinte forma:

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2 - \mu|u|^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx, \tag{2.2}$$

onde $G(x,t) = \int_0^t g(x,s)ds$. Sob as hipóteses acima F é um funcional de classe C^2.

Os resultados obtidos neste capítulo, assim como no anterior, são discutidos em subseções de acordo com o parâmetro c.

2.1 Caso $c < \lambda_1$

Nesta seção demonstraremos dois resultados referentes a existência de solução não trivial. O primeiro resultado consiste na ressonância no primeiro autovalor μ_1 estudado na seção §2.1.1 e o segundo resultado consiste na ressonância no autovalor μ_k, $k \geq 2$ estudado na seção §2.1.2.

2.1.1 Ressonância no 1^o autovalor

Teorema 2.1.1. *Suponhamos que* $\mu = \mu_1$, $g_{+\infty} = \lim_{s\to+\infty} g(x,s) = \alpha < 0$ *uniformemente em* Ω *e* $g_{-\infty} = \lim_{s\to-\infty} g(x,s) = \beta > 0$ *uniformemente em* Ω*. Se* $g_0 := \lim_{t\to 0} \dfrac{g(x,t)}{t} > 0$ *uniformemente em* Ω *então o problema (2.1) possui uma solução não trivial.*

Para provar o Teorema 2.1.1 vamos mostrar que o funcional (2.2) associado ao problema (2.1) é limitado inferiormente e satisfaz a condição (PS). Assim, aplicamos o *Princípio Variacional de Ekeland* (vide Teorema B.13) para garantir a existência de solução. Utilizamos, em seguida, Teoria de Morse para mostrar que a solução obtida é não trivial.

No lema abaixo verificamos a condição (PS) para o funcional (2.2).

Lema 2.1.2. *Assuma que* $\mu = \mu_1$, $g_{-\infty}$ *e* $g_{+\infty}$ *dadas no Teorema 2.1.1. Então o funcional (2.2) satisfaz a condição* (PS).

Demonstração: Seja $(u_n) \subset V$ uma sequência (PS), ou seja, uma sequência tal que $F(u_n) \to C$ e $F'(u_n) \to 0$. Desde que a função g é sublinear, basta mostrar que a sequência (u_n) é limitada em V.

Suponhamos o contrário, que $\|u_n\|_0 \to +\infty$, quando $n \to \infty$. Defina a sequência (v_n) por

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_0}.$$

Sendo a sequência (v_n) é limitada em V, pelas imersões de Sobolev, existe uma subsequência tal que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } V, \quad v_n \to v \text{ em } L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad v_n \to v \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega.$$

Como $F(u_n) \to C$, quando $n \to \infty$, então argumentando como no Lema 1.2.6 concluímos que $v \neq 0$. Daí, obtemos que $u_n(x) \to +\infty$ *q.t.p.* sobre $\{x \in \Omega; v(x) > 0\}$ e $u_n(x) \to -\infty$ *q.t.p.* sobre $\{x \in \Omega; v(x) < 0\}$. Disso, segue que $g(x, u_n) \to \tilde{g}$ *q.t.p.*, e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, esta convergência ocorre em L^{2^*}, donde

$$\tilde{g} = \alpha\chi_{v>0} + \beta\chi_{v<0}. \tag{2.3}$$

Como g é limitada e $F'(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, temos

$$\int_\Omega (\Delta v \Delta\phi - c\nabla v.\nabla\phi - \mu v\phi)dx = 0, \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Portanto,

$$\int_\Omega (\Delta u_n \Delta v - c\nabla u_n.\nabla v - \mu u_n v)dx - \int_\Omega g(x, u_n)v dx = -\int_\Omega g(x, u_n)v dx.$$

Tomando limite $n \to \infty$ na última expressão, lembrando que $F'(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, e de (2.3) segue que:

$$\alpha \int_\Omega v^+ dx - \beta \int_\Omega v^- dx = 0, \tag{2.4}$$

onde $v^+ = \max\{v, 0\}$ e $v^- = -\min\{v, 0\}$. A expressão (2.4) resulta numa contradição. Com efeito, observe que $v = t\varphi_1$ para algum $t \in \mathbb{R}$, isto pode ser visto com um cálculo análogo ao da expressão (1.19), donde obtemos que v satisfaz $\Delta^2 v + c\Delta v = \mu_1 v$, em Ω, com condição de fronteira $v = \Delta v = 0$. Logo, $v = t\varphi_1$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Daí,

$$\alpha \int_\Omega v^+ dx - \beta \int_\Omega v^- dx < 0, \tag{2.5}$$

e, portanto, a expressão (2.4) contradiz este fato.

Assim, a sequência (u_n) é limitada o que prova a condição (PS).

$\square$

Passemos, agora, a prova do Teorema 2.1.1.

Demonstração: Teorema 2.1.1:

Verifiquemos inicialmente que o funcional F dado em (2.2) é limitado inferiormente. Com efeito, seja P a projeção ortogonal no autoespaço $span\{\varphi_1\}$, correspondente ao autovalor μ_1. Sejam $u \in V$ e $v = (Id - P)u$, então

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2 - \mu_1 u^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta v|^2 - c|\nabla v|^2 - \mu_1 v^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta v|^2 - C|\nabla v|^2 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\left(|\Delta v|^2 - c|\nabla v|^2\right)\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\|v\|_0^2 - \int_\Omega G(x,u)dx. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Seja $w = Pu$. Suponhamos, por contradição, que existe uma sequência $(u_n)_n$ em V tal que $F(u_n) \to -\infty$, quando $n \to \infty$. Então $\|w_n\|_0 \to \infty$.

De fato, se $\|w_n\|_0 < +\infty$, quando $n \to \infty$, então $\|v_n\|_0 \to +\infty$. Da desigualdade (2.6), com $u = u_n$, obtemos

$$F(u_n) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\|v_n\|_0^2 - C(\|v_n\|_0 + \|w_n\|_0) \to +\infty$$

quando $n \to +\infty$. Contradição. Logo, $\|w_n\|_0 \to \infty$, quando $n \to \infty$.

Considerando a sequência $\left(\dfrac{w_n}{\|w_n\|_0}\right)_n$, temos que $\dfrac{w_n}{\|w_n\|_0} \to e$, onde e é uma autofunção associada a μ_1.

Agora

$$\frac{G(x,u_n)}{\|w_n\|_0} = \frac{\displaystyle\int_0^{w_n+v_n} g(x,s)ds}{\|w_n\|_0} = \frac{\displaystyle\int_0^{w_n} g(x,s)ds}{w_n}\frac{w_n}{\|w_n\|_0} + \frac{\displaystyle\int_{w_n}^{w_n+v_n} g(x,s)ds}{\|w_n\|_0}$$

Substituindo a última expressão em (2.6), com $u = u_n$, obtemos

$$\begin{aligned}
F(u_n) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\|v_n\|_0^2 - \|w_n\|_0 \int_\Omega \frac{G(x,u_n)}{\|w_n\|_0} dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\|v_n\|_0^2 - C\|v_n\|_0\right) - \|w_n\|_0 \underbrace{\int_\Omega \frac{G(x,w_n)dx}{\|w_n\|_0}}_{:=\alpha_n} \\
&\geq C - \|w_n\|_0 \alpha_n. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\frac{\displaystyle\int_0^{w_n} g(x,s)ds}{w_n} \frac{w_n}{\|w_n\|_0} \to \tilde{g}e \ \text{ em } L^1(\Omega), \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Do fato que $F(u_n) \to -\infty$, quando $n \to \infty$, e da expressão (2.7), resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \ = \ \alpha \int_\Omega e^+ dx - \beta \int_\Omega e^- dx > 0,$$

o que contradiz a condição dada em (2.5).

Portanto F é limitado inferiormente sobre V.

Desde que F é limitado inferiormente e, pelo Lema 2.1.2, verifica a condição (PS), podemos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland (vide Teorema B.13) segue que existe $u_0 \in V$ solução de (2.1).

Resta-nos mostrar que $u_0 \neq 0$.

Notemos que u_0 é um mínimo local, então $C_q(F,u_0) = \delta_{q0}\mathbb{Z}$. Por outro lado, como $g_0 > 0$ então $\mu_1 < g_0 + \mu_1$ e disto segue que o índice de Morse $(m(0))$ da solução nula é maior ou igual a 1, isto é, $m(0) \geq 1$. Assim, pelo Teorema de Shifting segue que $C_0(F,0) = 0$, donde concluí-se que $u_0 \neq 0$.

$\square$

Segue como consequência do Teorema 2.1.1 o seguinte resultado:

Corolário 2.1.3. *Sob as hipóteses do Teorema 2.1.1, e supondo que $\mu_1 + g_0$ não é autovalor de $(\Delta^2 + c\Delta, V)$, o problema (2.1) possui ao menos duas soluções não triviais.*

Demonstração: Observemos que se $\mu_1 + g_0$ não é autovalor de $(\Delta^2 + c\Delta, V)$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_k < \mu_1 + g_0 < \mu_{k+1}$. Donde concluímos que $C_q(F,0) = \delta_{qk}\mathbb{Z}$. Desde que o funcional é limitado inferiormente então o grupo crítico no infinito é $C_q(F,\infty) = \delta_{q0}$.

Assim, se 0 e u_0 (dada no Teorema 2.1.1) fossem as únicas soluções de (2.1) obteríamos pela identidade de Morse que:

$$(-1)^0 = (-1)^0 + (-1)^k,$$

o que é uma contradição, e portanto existe uma solução u_2 não trivial e $u_2 \neq u_1$, o que mostra o corolário.

$\square$

2.1.2 Ressonância em autovalores de ordem superior

Passemos agora nosso estudo quando $\mu = \mu_k$, $k \geq 2$, no problema (2.1).

Teorema 2.1.4. *: Suponhamos que*

$$\mu_n < \mu_{n+1} = \mu = \mu_{n+k} < \mu_{n+k+1}. \tag{2.8}$$

e que $g_{+\infty} = \lim_{s \to +\infty} g(x,s) = \alpha$ *uniformemente em* Ω *e* $g_{-\infty} = \lim_{s \to -\infty} g(x,s) = \beta$ *uniformemente em* Ω *existem e são finitos. Assuma que*

$$\beta \int_\Omega e^+ dx - \alpha \int_\Omega e^- dx > 0 \tag{2.9}$$

para cada autofunção e correspondente ao autovalor μ*. Se* $g_0 := \lim_{t \to 0} \frac{g(x,t)}{t} < (\mu_n - \mu)$ *uniformemente em* Ω *ou* $g_0 := \lim_{t \to 0} \frac{g(x,t)}{t} > (\mu_{n+1} - \mu)$ *uniformemente em* Ω *então o problema (2.1) possui uma solução não trivial.*

Para provar o Teorema 2.1.4 vamos mostrar que o funcional (2.2) associado ao problema (2.1) possui a geometria do ponto de sela e satisfaz a condição (PS). Assim, aplicamos o *Teorema do Ponto de Sela* (vide Teorema B.15) para garantir a existência de solução. Utilizamos, em seguida, Teoria de Morse para mostrar que a solução obtida é não trivial.

Demonstração:(Teorema 2.1.4) A prova da condição (PS) segue de maneira análoga a feita no Lema 2.1.2. Basta notar que a hipótese (2.9), implica na mesma desigualdade (2.5) utilizada na conclusão do Lema 2.1.2.

Verificaremos, à seguir, que o funcional definido em (2.2) tem a geometria to Teorema do Ponto de Sela. Seja Y o subespaço de V gerado pelas autofunções correspondentes aos autovalores $(\mu_i)_{i \leq n}$ e Z o seu complemento ortogonal.

Afirmação 2.1.5. *Para $R > 0$ suficientemente grande, temos*

$$\sup F(S_Y(R)) < \inf F(Z), \ \textit{onde } S_Y(R) = \{u \in Y; \|u\|_0 = R\}. \tag{2.10}$$

De fato, seja $u \in Y$ tal que $\|u\|_0 = R$ então

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2 - \mu u^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\ &\leq \frac{1}{2}R^2 - \frac{\mu}{2}\frac{R^2}{\mu_n} - \int_\Omega G(x,u)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_n}\right)R^2 + CR \to -\infty, \quad \text{quando } R \to \infty. \end{aligned}$$

Por outro lado, F é limitado inferiormente em Z.

Com efeito, seja P a projeção ortogonal no autoespaço W (de dimensão finita) correspondente a μ. Sejam $u \in Z$ e $v = (Id - P)u$, então

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2 - \mu u^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta v|^2 - c|\nabla v|^2 - \mu v^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega \left((|\Delta v|^2 - c|\nabla v|^2) - \frac{\mu}{\mu_{n+k+1}}(|\Delta v|^2 - c|\nabla v|^2)\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_{n+k+1}}\right)\|v\|_0^2 - \int_\Omega G(x,u)dx. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Seja $w = Pu$. Suponhamos, agora, que existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em Z tal que $F(u_n) \to -\infty$, quando $n \to \infty$. Então $\|w_n\|_0 \to \infty$.

De fato, se $\|w_n\|_0 < +\infty$, então $\|v_n\|_0 \to +\infty$ e da desigualdade (2.11), com $u = u_n$, obtemos

$$F(u_n) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_{n+k+1}}\right)\|v_n\|_0^2 - C(\|v_n\|_0 + \|w_n\|_0) \to +\infty$$

quando $n \to +\infty$. Contradição.

Considerando a sequência $\left(\frac{w_n}{\|w_n\|_0}\right)_n$, temos que $\frac{w_n}{\|w_n\|_0} \to e$, onde e é uma autofunção associada a μ.

Agora

$$\frac{G(x,u_n)}{\|w_n\|_0} = \frac{\displaystyle\int_0^{w_n+v_n} g(x,s)ds}{\|w_n\|_0} = \frac{\displaystyle\int_0^{w_n} g(x,s)ds}{w_n}\frac{w_n}{\|w_n\|_0} + \frac{\displaystyle\int_{w_n}^{w_n+v_n} g(x,s)ds}{\|w_n\|_0}$$

Substituindo a última expressão na desigualdade (2.11), com $u = u_n$, obtemos

$$\begin{aligned} F(u_n) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_{n+k+1}}\right)\|v_n\|_0^2 - \|w_n\|_0 \int_\Omega \frac{G(x,u_n)}{\|w_n\|_0} \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_{n+k+1}}\right)\|v_n\|_0^2 - C\|v_n\|_0\right) - \|w_n\|_0 \underbrace{\int_\Omega \frac{G(x,w_n)}{\|w_n\|_0}}_{:=\alpha_n} \\ &\geq C - \|w_n\|_0 \alpha_n. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\frac{\displaystyle\int_0^{w_n} g(x,s)ds}{w_n} \frac{w_n}{\|w_n\|_0} \to \tilde{g}e \ \text{ em } L^1(\Omega); \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \alpha_n &= \alpha \int_\Omega e^+ dx - \beta \int_\Omega e^- dx \\ &= -\beta \int_\Omega (-e)^+ dx + \alpha \int_\Omega (-e)^- dx > 0 \end{aligned}$$

o que contradiz a condição (2.9), isto prova a Afirmação 2.1.5.

Segue-se da Afirmação 2.1.5 e da condição (PS) que o funcional F satisfaz as hipóteses do Teorema do Ponto de Sela (vide Teorema B.15). Logo, F possui um ponto crítico u_0 tal que $C_n(F, u_0) \neq 0$.

Mostraremos que $C_n(F, 0) = 0$. Suponhamos, primeiramente, que $g_0 + \mu < \mu_n$ então para $v \in H_{n-1}^\perp \setminus \{0\} = span\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\} \setminus \{0\}$ temos

$$\begin{aligned} \langle d^2F(0)v, v\rangle &= \int_\Omega (|\Delta v|^2 - c|\nabla v|^2)dx - (\mu + g'(0)) \int_\Omega v^2 dx \\ &\geq (\mu_n - (\mu + g'(0))) \int_\Omega v^2 dx > 0. \end{aligned}$$

Logo, $m(F, 0) + n_0(F, 0) \leq n - 1 < n$.

No caso onde $g'(0) + \mu > \mu_{n+1}$ mostramos que se $v \in H_{n+1}$ então $\langle d^2F(0)v, v\rangle < 0$, ou seja, $m(F, 0) \geq n + 1$. Donde concluímos em ambos casos que $C_n(F, 0) = 0$ e assim, $u_0 \neq 0$.

□

Com demonstração análoga a feita no Teorema 2.1.4, obtemos:

Teorema 2.1.6. *: Suponhamos que*

$$\mu_n < \mu_{n+1} = \mu = \mu_{n+k} < \mu_{n+k+1}.$$

e que $g_{+\infty} = \lim_{s\to+\infty} g(x,s) = \alpha$ *uniformemente em* Ω *e* $g_{-\infty} = \lim_{s\to-\infty} g(x,s) = \beta$ *uniformemente em* Ω *existem e são finitos. Assuma que*

$$\beta\int_\Omega e^+dx - \alpha\int_\Omega e^-dx < 0$$

para cada autofunção e *correspondente ao autovalor* μ*. Se* $g_0 := \lim_{t\to 0}\dfrac{g(x,t)}{t} < (\mu_{n+k}-\mu)$ *uniformemente em* Ω *ou* $g_0 := \lim_{t\to 0}\dfrac{g(x,t)}{t} > (\mu_{n+k+1}-\mu)$ *uniformemente em* Ω*, então o problema (2.1) possui uma solução não trivial;*

2.2 Caso $\lambda_1 < c < \lambda_2$

Nesta seção obteremos resultados análogos aos obtidos na Seção §2.1. Os métodos utilizados são os mesmos utilizados na Seção 2.1. Além disso, no caso $\lambda_1 < c < \lambda_2$ vamos considerar em V a norma utilizada no Capítulo 1, Seção §1.2.2, definida por

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_1^2 &= \alpha_1^2\int_\Omega(|\Delta\varphi_1|^2+|\nabla\varphi_1|^2)dx + \int_\Omega(|\Delta\overline{\phi}|^2 - c|\nabla\overline{\phi}|^2)dx\\
&= \alpha_1^2(\lambda_1^2+\lambda_1) + \int_\Omega(|\Delta\overline{\phi}|^2 - c|\nabla\overline{\phi}|^2)dx\\
&= \alpha_1^2(\lambda_1^2+\lambda_1) + \|\overline{\phi}\|_0^2,
\end{aligned}$$

onde $\phi = \alpha_1\varphi_1 + \overline{\phi} \in V$, com $\overline{\phi} \in span\{\varphi_1\}^\perp$.

Como fizemos na Seção 2.1 vamos dividir o estudo em duas seções: Seção §2.2.1 estudamos ressonância no primeiro autovalor e na Seção §2.2.2 ressonância em autovalores de ordem superior.

2.2.1 Ressonância no 1^o autovalor

A demonstração do Teorema abaixo consiste em mostrar que o funcional dado em (2.2) é limitado inferiormente em V e, assim, aplicar o Princípio Variacional de Ekeland (vide Teorema B.13).

Teorema 2.2.1. *Suponhamos que* $\mu = \mu_1$, $g_{+\infty} = \lim_{s\to+\infty} g(x,s) = \alpha < 0$ *uniformemente em* Ω *e* $g_{-\infty} = \lim_{s\to-\infty} g(x,s) = \beta > 0$ *uniformemente em* Ω. *Se* $g_0 := \lim_{t\to 0} \dfrac{g(x,t)}{t} > 0$ *uniformemente em* Ω, *então o problema (2.1) possui uma solução não trivial.*

Demonstração:

Verifiquemos inicialmente que o funcional F dado em (2.2) é limitado inferiormente. Com efeito, seja P a projeção ortogonal no autoespaço $span\{\varphi_1\}$ correspondente μ_1. Sejam $u \in V$ e $v = (Id - P)u$, então

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2 - \mu_1 u^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta v|^2 - c|\nabla v|^2 - \mu_1 v^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|v\|_1^2 - \int_\Omega G(x,u)dx.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

O restante da prova que F é limitado inferiormente segue de maneira análoga a prova do Teorema 2.1.1 utilizando a desigualdade (2.12).

Notemos que na prova do Lema 2.1.2 não utilizamos o fato de $c < \lambda_1$. Portanto, a condição (PS) segue do Lema 2.1.2.

Pelo Princípio Variacional de Ekeland F possui um ponto crítico u_0 que é mínimo local. Da prova do teorema 2.1.1 segue que $u_0 \neq 0$.

□

De maneira análoga ao Corolário 2.1.3 segue o seguinte corolário

Corolário 2.2.2. *Sob as hipóteses do Teorema 2.2.1, e supondo que* $\mu_1 + g_0$ *não é autovalor de* $(\Delta^2 + c\Delta, V)$, *o problema (2.1) possui ao menos duas soluções não triviais.*

2.2.2 Ressonância em autovalores de ordem superior

Passemos agora nosso estudo quando $\mu = \mu_k$, $k \geq 2$ no problema (2.1). Novamente a demonstração do próximo resultado segue as mesmas linhas da demonstração do Teorema 2.1.4, isto é, iremos verificar a geometria do ponto de sela.

Teorema 2.2.3. *: Suponhamos que*

$$\mu_n < \mu_{n+1} = \mu = \mu_{n+k} < \mu_{n+k+1}. \tag{2.13}$$

e que $g_{+\infty} = \lim_{s\to+\infty} g(x,s) = \alpha$ *uniformemente em* Ω *e* $g_{-\infty} = \lim_{s\to-\infty} g(x,s) = \beta$ *uniformemente em* Ω *existem e são finitos. Assuma que*

$$\beta \int_\Omega e^+ dx - \alpha \int_\Omega e^- dx > 0 \tag{2.14}$$

para cada autofunção e correspondente ao autovalor μ*. Se* $g_0 := \lim_{t\to 0} \frac{g(x,t)}{t} < (\mu_n - \mu)$ *uniformemente em* Ω *ou* $g_0 := \lim_{t\to 0} \frac{g(x,t)}{t} > (\mu_{n+1} - \mu)$ *uniformemente em* Ω*, então o problema (2.1) possui uma solução não trivial.*

Demonstração: Segue de maneira análoga a prova do Teorema 2.1.4 utilizando a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - \frac{1}{2}(t_1)^2(\lambda_1 + c\lambda_1) - \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\mu_1 u^2\right) dx - \int_\Omega G(x,u)dx \\ &\leq \frac{1}{2}R^2 - \frac{\mu}{2}\frac{R^2}{\mu_n} - \frac{1}{2}(t_1)^2(\lambda_1 + c\lambda_1) - \int_\Omega G(x,u)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_n}\right) R^2 + CR \to -\infty, \quad \text{quando } R \to \infty \end{aligned}$$

para mostrar que para $R > 0$ suficientemente grande, temos

$$\sup F(S_Y(R)) < \inf F(Z). \tag{2.15}$$

□

Com demonstração análoga a feita na seção anterior permanece válido:

Teorema 2.2.4. *: Suponhamos que*

$$\mu_n < \mu_{n+1} = \mu = \mu_{n+k} < \mu_{n+k+1}.$$

e que $g_{+\infty} = \lim_{s\to+\infty} g(x,s) = \alpha$ *uniformemente em* Ω *e* $g_{-\infty} = \lim_{s\to-\infty} g(x,s) = \beta$ *uniformemente em* Ω *existem e são finitos. Assuma que*

$$\beta \int_\Omega e^+ dx - \alpha \int_\Omega e^- dx < 0$$

para cada autofunção e correspondente ao autovalor μ*. Se* $g_0 := \lim_{t\to 0} \frac{g(x,t)}{t} < (\mu_{n+k} - \mu)$ *uniformemente em* Ω *ou* $g_0 := \lim_{t\to 0} \frac{g(x,t)}{t} > (\mu_{n+k+1} - \mu)$ *uniformemente em* Ω*, então o problema (2.1) possui uma solução não trivial;*

Observação 2.2.5. *Para o caso* $\lambda_\nu < c < \lambda_{\nu+1}$ *o Teorema 2.1.1 e o Corolário 2.1.3 permanecem válidos. Já os Teoremas 2.1.4 e 2.1.6 são válidos desde que* $\nu \leq n$.

CAPÍTULO 3

PROBLEMAS DO TIPO AMBROSETTI-PRODI PARA A EQUAÇÃO DE 4^A ORDEM

Neste capítulo iremos estudar a existência e não existência de soluções para o problema do tipo Ambrosetti-Prodi, ou seja, estamos interessados em estudar o seguinte problema de 4^a ordem com condições de Navier

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x,u) + f(x) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $c \in \mathbb{R}$ satisfazendo $c < \lambda_1 < \dfrac{c(1+\sqrt{2})}{2}$, $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 com $|g_s(x,s)| \leq \dfrac{c^2}{4}$ uniformemente em $\bar{\Omega}$ e para todo $s \in \mathbb{R}$, e seu comportamento no infinito é

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{g(x,s)}{s} < \mu_1 < \lim_{s\to+\infty} \frac{g(x,s)}{s}, \quad \text{uniformemente em } x, \tag{3.2}$$

e f é uma função pertencente a $C^{0.\alpha}(\bar{\Omega})$.

Observemos que estamos restringindo o parâmetro c à condição $c < \lambda_1 < \dfrac{c(1+\sqrt{2})}{2}$ pois no decorrer da prova iremos utilizar o Princípio do Máximo obtido no Teorema 1.1.3 e o problema a ser estudado é do tipo Ambrosetti-Prodi. Com efeito, para que faça sentido o estudo do problema de Ambrosetti-Prodi devemos ter $\mu_1 < \dfrac{c^2}{4}$, posto que, para aplicar o Princípio do Máximo (Teorema 1.1.3) devemos ter $|g_s(x,s)| \leq \dfrac{c^2}{4}$ (uniformemente em $\bar{\Omega}$ e para todo $s \in \mathbb{R}$) e as desigualdades em (3.2) devem ser satisfeitas. Da condição $\mu_1 < \dfrac{c^2}{4}$ resulta a condição $c < \lambda_1 < \dfrac{c(1+\sqrt{2})}{2}$.

O problema (3.1) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x,u) + t\phi_1(x) + f_1(x) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

onde $f = t\phi_1 + f_1$, com $f_1 \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ e $\int_\Omega f_1\phi_1 dx = 0$.

Existem muitos trabalhos para operadores de segunda ordem, dentre os quais citamos os trabalhos pioneiros de Ambrosetti-Prodi (vide [3]), Berger e Podolak (vide [6]), Kazdan-Warner (vide [23]), Amann, Hess (vide [1]) e Dancer (vide [10]). As técnicas utilizadas aqui são baseadas no trabalho de D. G. De figueiredo (vide [11]).

Seja $N^\perp = \{f_1 \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}); \displaystyle\int_\Omega f_1\phi_1 dx = 0\}$.

Teorema 3.0.6. *Assuma que (3.2) se verifica. Para cada $f_1 \in N^\perp$ existe um número real $\alpha(f_1)$ tal que*

i) O problema (3.3) não tem solução se $t > \alpha(f_1)$;

ii) O problema (3.3) tem pelo menos uma solução se $t < \alpha(f_1)$.

Além disso, se $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{g(x,s)}{s} = \gamma$ com $\gamma \in (\mu_j, \mu_{j+1})$ para algum $j \geq 1$ então existe $\beta(f_1) \leq \alpha(f_1)$ tal que

iii) O problema (3.3) possui ao menos duas soluções para $t < \beta(f_1)$.

Para provar o Teorema 3.0.6 utilizaremos o método de sub-supersolução para obter uma solução e a teoria de pontos críticos para obter a outra através da aplicação do Teorema do Ponto de Sela (vide Teorema B.15).

3.0.3 Método de Subsolução e Supersolução

Vamos introduzir nesta seção o método de sub-supersolução muito utilizado para operadores de segunda ordem. Lembremos que, a prova deste método (para ope- radores de segunda ordem) pode ser feita utilizando resultados de regularidade elíptica ou Princípio de Máximo (para operadores de segunda ordem). Vamos utilizar, neste trabalho, o Princípio de Máximo (obtido no Teorema 1.1.3) para verificar o método de sub-supersolução para o operador $\Delta^2 + c\Delta$. Com isso, devemos respeitar a restrição sobre o parâmetro c para que o Teorema 1.1.3 possa ser aplicado.

Definição 3.0.7. *Uma função $u \in C^{4,\alpha}(\bar{\Omega})$ é dita uma supersolução do problema (3.1) se*

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u \geq g(x,u) + f(x) & em \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

e

Definição 3.0.8. *Uma função $u \in C^{4,\alpha}(\bar{\Omega})$ é dita uma subsolução do problema (3.1) se*

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u \leq g(x,u) + f(x) & em \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & sobre \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Temos um resultado análogo ao existente para o operador de segunda ordem:

Proposição 3.0.9. *Suponhamos que o problema (3.1) tenha uma subsolução $\underline{u}$ e uma supersolução $\bar{u}$, com $\underline{u} \leq \bar{u}$. Assuma que g é uma função de classe C^1 com $|g_s(x,s)| \leq \dfrac{c^2}{4}$ uniformemente em $\bar{\Omega}$ e para todo $s \in \mathbb{R}$. Então o problema (3.1) tem soluções $U, V \in C^{4,\alpha}(\bar{\Omega})$ tais que $\underline{u} \leq U \leq V \leq \bar{u}$. Além disso, qualquer solução u de (3.1) com $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ satisfaz $U \leq u \leq V$.*

Demonstração: Seja $M = \max\{|g_s(x,s)|;\ x \in \bar{\Omega},\ \underline{u}(x) \leq s \leq \bar{u}(x)\}$. Então a aplicação

$$[\underline{u}(x), \bar{u}(x)] \ni t \longmapsto g(x,t) + Mt, \qquad x \in \bar{\Omega},$$

é não decrescente.

De fato, aplicando o Teorema do Valor Médio

$$-(g(x,t) - g(x,s)) \leq |g(x,t) - g(x,s)| \leq M|t-s| = M(t-s) \qquad \forall \underline{u}(x) \leq s \leq t \leq \bar{u}(x),$$

o que implica

$$g(x,s) + Ms \leq g(x,t) + Mt.$$

Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u + Mu = g(x,u) + f(x) + Mu & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

definindo $\tilde{f}(x,u) := g(x,u) + f(x) + Mu$, o problema (3.4) é equivalente à

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u + Mu = \tilde{f}(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

Considere a sequência $\{u_k\}$, definida recursivamente por $u_0 = \underline{u}$ e u_{k+1} a solução de

$$\begin{cases} \Delta^2 u_{k+1} + c\Delta u_{k+1} + Mu_{k+1} = \tilde{f}(x,u_k) & \text{em} \quad \Omega \\ u_{k+1} = \Delta u_{k+1} = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Afirmação 3.0.10.

(a) u_{k+1} *existe;*

(b) $u_{k+1} \geq u_k$*;*

(c) $u_{k+1} \leq \bar{u}$.

De fato, (a) segue do fato que o problema (3.6) é linear. A prova dos ítens (b) e (c) serão feitas por indução.

Prova de (b). Note que $u_0 = \underline{u}$ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta^2 \underline{u} + c\Delta \underline{u} + M\underline{u} \leq \tilde{f}(x,\underline{u}) & \text{em} \quad \Omega \\ \underline{u} = \Delta \underline{u} = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.7}$$

e u_1 satisfaz

$$\begin{cases} \Delta^2 u_1 + c\Delta u_1 + Mu_1 = \tilde{f}(x,u_0) & \text{em} \quad \Omega \\ u_1 = \Delta u_1 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8) resulta que

$$\begin{cases} \Delta^2 (u_1 - \underline{u}) + c\Delta (u_1 - \underline{u}) + M(u_1 - \underline{u}) \geq 0 & \text{em} \quad \Omega \\ (u_1 - \underline{u}) = \Delta (u_1 - \underline{u}) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue pelo Princípio do Máximo (Teorema 1.1.3) que $u_1 - \underline{u} \geq 0$ em Ω.

Suponha por indução que $u_k \geq u_{k-1}$ em Ω. Temos que u_k e u_{k+1} satisfazem

$$\begin{cases} \Delta^2 u_k + c\Delta u_k + Mu_k = \tilde{f}(x, u_{k-1}) & \text{em} \quad \Omega \\ u_k = \Delta u_k = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \Delta^2 u_{k+1} + c\Delta u_{k+1} + Mu_{k+1} = \tilde{f}(x, u_k) & \text{em} \quad \Omega \\ u_{k+1} = \Delta u_{k+1} = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

respectivmente.

Logo, $v_k = u_{k+1} - u_k$ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta^2 v_k + c\Delta v_k + Mv_k = \tilde{f}(x, u_k) - \tilde{f}(x, u_{k-1}) \geq 0 & \text{em} \quad \Omega \\ v_k = \Delta v_k = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Novamente, pelo Princípio do Máximo (Teorema 1.1.3) obtemos $v_k = u_{k+1} - u_k \geq 0$, o que mostra a indução e conclui a prova de (b).

De maneira análoga ao item (b) prova-se o item (c).

Portanto

$$\underline{u} \leq u_1 \leq \ldots \leq u_k \leq \ldots \leq \bar{u}.$$

Seja $U(x) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(x)$, para todo $x \in \Omega$. Queremos mostrar que $u_k \to U$ em $C^{4,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Considere $v_{k+1} = -\Delta u_{k+1} + cu_{k+1}$. Logo, v_{k+1} é solução de

$$\begin{cases} -\Delta v_{k+1} = \tilde{f}(x, u_k) - Mu_{k+1} \geq 0 & \text{em} \quad \Omega \\ v_{k+1} = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $\tilde{f}(x, u_k) - Mu_{k+1}$ é limitado em $L^\infty(\Omega)$ então também o é em$L^p(\Omega)$ para todo $1 < p < \infty$. Consequentemente $v_{k+1} \in W^{2,p}(\Omega)$ e é limitado em $W^{2,p}(\Omega)$, para todo $k \geq 1$. Pela definição de v_{k+1} resulta que u_{k+1} é limitado em $W^{2,p}(\Omega)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Resulta disso que $|u_k|_{C^{0,\alpha}} \leq C, \forall k \in \mathbb{N}$, donde concluímos que $|-\Delta v_k|_{C^{2,\alpha}} \leq C, \forall k \in \mathbb{N}$ e $|\Delta^2 u_k|_{C^{0,\alpha}} \leq C, \forall k \in \mathbb{N}$. Segue, pelo Teorema de Arzela-Ascoli, que

$$\begin{aligned} u_k &\to U \text{ uniformemente} \\ -\Delta u_k &\to -\Delta U \text{ uniformemente} \\ \Delta^2 u_k &\to \Delta^2 U \text{ uniformemente,} \end{aligned}$$

o que prova o desejado.

Logo, U é solução de (3.1).

De maneira análoga, mostramos a existência da solução V como o limite da sequência decrescente $\{w_k\}$ com $w_0 = \bar{u}$ e

$$\begin{cases} \Delta^2 w_{k+1} + c\Delta w_{k+1} + M w_{k+1} = \tilde{f}(x, w_k) & \text{em} \quad \Omega \\ w_{k+1} = \Delta w_{k+1} = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Para finalizar a prova da proposição, resta-nos mostrar que $U \leq V$ e que se $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ então $U \leq u \leq V$. Isto segue do argumento de indução. Observe que $u_0 \leq w_0$. Suponha, por indução, que $u_k \leq w_k$. Isto implica que para $v_{k+1} = w_{k+1} - u_{k+1}$

$$\begin{cases} \Delta^2 v_{k+1} + c\Delta v_{k+1} + M v_{k+1} = \tilde{f}(x, w_k) - \tilde{f}(x, u_k) & \text{em} \quad \Omega \\ v_{k+1} = \Delta v_{k+1} = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $\tilde{f}(x, w_k) - \tilde{f}(x, u_k) \geq 0$, aplicando o Princípio do Máximo (Teorema 1.1.3) resulta que $u_{k+1} \leq w_{k+1}$ o que finaliza a indução. Passando limite, conclui-se que $U \leq V$. De maneira inteiramente análoga prova-se a outra assertiva, o que conclui a prova da proposição 3.0.9.

$\square$

3.0.4 Prova do Teorema 3.0.6

Passemos agora a prova de alguns lemas necessários para a demonstração do Teorema 3.0.6.

Lema 3.0.11. *Assuma (3.2). Então existem números $C > 0$, $\underline{\mu}$ e $\bar{\mu}$ tais que $\underline{\mu} < \mu_1 < \bar{\mu}$ e*

i) $g(x, s) \geq \underline{\mu} s - C$, $\forall s \in \mathbb{R}_-, \forall x \in \Omega$

ii) $g(x, s) \geq \bar{\mu} s - C$, $\forall s \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \Omega$.

Demonstração: Por (3.2) existem números $\underline{\mu}$ e $\bar{\mu}$, com $\underline{\mu} < \mu_1 < \bar{\mu}$ e $s_0 > 0$ tal que, para todo $x \in \Omega$, temos

$$\frac{g(x, s)}{s} < \underline{\mu}, \ \forall s < -s_0 \quad ; \quad \frac{g(x, s)}{s} > \bar{\mu}, \ \forall s > s_0, \tag{3.9}$$

ou seja,

$$g(x, s) > \underline{\mu} s, \ \forall s < -s_0 \quad ; \quad g(x, s) > \bar{\mu} s, \ \forall s > s_0. \tag{3.10}$$

Tomando $C = \max\{|g(x, s)|;\ x \in \bar{\Omega},\ -s_0 < s < s_0\}$ as desigualdades $i)$ e $ii)$ se verificam.

$\square$

Lema 3.0.12. *Suponha que (3.2) se verifica. Então existe um número τ, independente de $f_1 \in N^{\perp}$, tal que para todo $t > \tau$, o problema (3.3) não possui solução.*

Demonstração: Fazendo o produto interno de (3.3) com φ_1, a primeira autofunção do operador $(\Delta^2 + c\Delta, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, e observando que

$$\int_\Omega (\Delta^2 u + c\Delta u)\varphi_1 dx = \int_\Omega u(\Delta^2 \varphi_1 + c\Delta\varphi_1)dx = \mu_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx,$$

resulta

$$\mu_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx = \int_\Omega g(x,u)\varphi_1 dx + t.$$

Pelo Lema 3.0.11 chegamos a

$$\mu_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx \geq \underline{\mu} \int_\Omega u\varphi_1 dx - C\int_\Omega \varphi_1 dx + t, \text{ se } \int_\Omega u\varphi_1 dx \leq 0,$$

e

$$\mu_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx \geq \bar{\mu} \int_\Omega u\varphi_1 dx - C\int_\Omega \varphi_1 dx + t, \text{ se } \int_\Omega u\varphi_1 dx \geq 0.$$

Das desigualdades acima segue que

$$t \leq C\int_\Omega \varphi_1 dx + (\mu_1 - \underline{\mu})\int_\Omega u\varphi_1 dx \leq C\int_\Omega \varphi_1 dx, \text{ se } \int_\Omega u\varphi_1 dx \leq 0,$$

e

$$t \leq C\int_\Omega \varphi_1 dx + (\mu_1 - \bar{\mu})\int_\Omega u\varphi_1 dx \leq C\int_\Omega \varphi_1 dx, \text{ se } \int_\Omega u\varphi_1 dx \geq 0.$$

Assim, em qualquer caso, a existência de uma solução u para o problema (3.3) implica necessariamente que $t \leq \tau \equiv C\int_\Omega \varphi_1 dx$. Portanto, se $t > \tau$ o problema (3.3) não possui solução.

□

Lema 3.0.13. ***(Existência de subsolução).*** *Suponha (3.2). Para qualquer $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ existe uma função $w \in C^{4,\alpha}(\bar{\Omega})$, com $w = \Delta w = 0$ sobre $\partial\Omega$, tal que $w \leq u$ em Ω para toda supersolução de (3.1). Além disso, w pode ser escolhido como uma subsolução de (3.1).*

Demonstração: Seja w a única solução de

$$\begin{cases} \Delta^2 w + c\Delta w = \underline{\mu} w - C + f(x) & \text{em} \quad \Omega \\ w = \Delta w = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\underline{\mu}$ e C são as mesmas definidas no Lema 3.0.11.

Seja u uma supersolução de (3.1), ou seja, u satisfaz

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u \geq g(x,u) + f(x) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, utilizando o Lema 3.0.11 obtemos

$$\begin{cases} \Delta^2(u-w) + c\Delta(u-w) = g(x,u) - \underline{\mu}w + C \geq \underline{\mu}(u-w) & \text{em} \quad \Omega \\ u - w = \Delta(u-w) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue pelo Princípio do Máximo (Teorema 1.1.2) que $u - w \geq 0$ em Ω. Por $i)$ do Lema 3.0.11 temos que w é uma subsolução do problema (3.1).

□

Corolário 3.0.14. *Assuma (3.2). Suponha que para uma dada $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ o problema (3.1) tem solução. Então o problema (3.1) tem uma solução minimal u_{min}. (Isto é, dada qualquer outra solução u de (3.1) tem-se que $u_{min} \leq u$ em $\bar{\Omega}$.)*

Demonstração: Seja u uma solução de (3.1). Então u é um supersolução para (3.1) e pelo Lema 3.0.13 existe uma subsolução w tal que $w \leq u$. Portanto pela Proposição 3.0.9 existe uma solução U de (3.1) e $w \leq U \leq u$. Desde que U não depende de u, segue que U é solução minimal. □

Lema 3.0.15. *Suponha que o problema (3.1) tem solução para uma $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ dada. Então o problema de Navier*

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x,u) + h(x) & \textit{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \textit{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.11}$$

onde $h \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ com $h \leq f$, também possui solução.

Demonstração: Seja v uma solução de (3.1) com a f dada. Claramente v é uma supersolução para (3.11). Pelo Lema (3.0.13), o problema (3.11) tem uma subsolução $\underline{u} \leq v$. Segue da Proposição 3.0.9 que (3.11) tem uma solução u tal que $\underline{u} \leq u \leq v$.

□

Corolário 3.0.16. *Seja $f_1 \in N^{\perp}$. Suponha que o problema (3.3) tem uma solução para um dado $t_0 \in \mathbb{R}$. Então o problema (3.3) também tem solução para todo $t < t_0$.*

Lema 3.0.17. ***(Existência de supersolução)*** *Seja $f_1 \in N^{\perp}$ dada. Então existe um $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que o problema (3.3) possui uma supersolução.*

Demonstração: Vamos provar que para um $t < 0$, com módulo suficientemente grande, o problema (3.3) possui uma supersolução. Fixe $N > 0$ e seja

$$m = \max\{g(x,s) + f_1(x);\ x \in \bar{\Omega},\ 0 \leq s \leq N\}.$$

Escolha subdomínios Ω_1 e Ω_2 tais que $\Omega_1 \subset \bar{\Omega_1} \subset \Omega_2 \subset \bar{\Omega_2} \subset \Omega$ e $vol(\Omega \setminus \Omega_1) \leq \delta$, onde $\delta > 0$ será escolhido posteriormente. Considere a função $H \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que $H = m$ em $\Omega \setminus \Omega_2$, $H = 0$ em Ω_1 e $0 \leq H \leq m$ no restante de Ω. Seja v a solução do problema de Navier linear

$$\begin{cases} \Delta^2 v + c\Delta v = H & \text{em} \quad \Omega \\ v = \Delta v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.12}$$

Pelo Princípio de positividade (Teorema 1.1.2) $v \geq 0$ em Ω. Pelas estimativas a priori para o operador poliharmônico (vide [19]) obtemos

$$\|v\|_{W^{4,p}} \leq \|H\|_{L^p} \leq cm[vol(\Omega \setminus \Omega_1)]^{\frac{1}{p}} \leq cm\delta^{\frac{1}{p}}.$$

Pelo Teorema de Imersão de Sobolev existe uma constante $c' > 0$ tal que

$$\|v\|_{C^0} \leq c'\|v\|_{W^{4,p}}, \quad \forall v \in W^{4,p}(\Omega), \quad p > \frac{N}{4}.$$

Das duas últimas desigualdades obtemos a seguinte limitação para as soluções de (3.12)

$$\|v\|_{C^0} \leq cc'm\delta^{\frac{1}{p}}. \tag{3.13}$$

Agora, escolhendo Ω_1 tal que $cc'm\delta^{\frac{1}{p}} \leq N$ resulta que v é uma supersolução de (3.3) para um t negativo, de módulo suficientemente grande. De fato, escolha t_0 tal que $m + t_0\varphi_1 \leq H$. Então

$$\Delta^2 v + c\Delta v \geq m + t_0\varphi_1 \geq g(x,v) + t_0\varphi_1 + f_1,$$

onde usamos a definição de m e a estimativa em (3.13).

□

Demonstração:(Término da prova do Teorema 3.0.6): Dada $f_1 \in N^{\perp}$ pelo Lemma 3.0.17 existe um $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que o problema (3.3) tem uma supersolução $\bar{u}$. Em vista do Lema 3.0.13 vemos que para esses f_1 e t_0 dados o problema (3.3) tem uma subsolução,

$\underline{u} \leq \bar{u}$. Assim, pela Proposição 3.0.9. o problema (3.3) possui uma solução para f_1 e $t_0 \in \mathbb{R}$ dados, determinada pelo Lema 3.0.17. Pelo Lema 3.0.12 vemos que o conjunto dos $t\,'\,^s$ tal que (3.3) tem uma solução é limitado superiormente. Pelo Corolário 3.0.14 este conjunto é uma semi-reta. Portanto, a prova dos ítens $i)$ e $ii)$ do Teorema 3.0.6 se completa tomando $\alpha(f_1)$ como o supremo do conjunto dos $t\,'\,^s$ tal que (3.3) tem uma solução. Denotaremos esta primeira solução por w_t.

Passemos agora a prova de $iii)$ do Teorema 3.0.6, ou seja, supondo que $\lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{g(x,s)}{s} = \gamma$ com $\gamma \in (\mu_j, \mu_{j+1})$ para algum $j \geq 1$, existe uma segunda solução.

Seja

$$h(x,\xi) = -\gamma\xi + g(x,\xi) + f_1(x), \quad \text{para } \xi \geq 0. \tag{3.14}$$

Temos que $h(x,\xi) = o(|\xi|)$ uniformemente em $x \in \bar{\Omega}$, quando $\xi \to +\infty$. Estenda a função h para uma função $\hat{h}$ tal que $\hat{h} \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ satisfazendo $|\hat{h}(x,\xi)| = o(|\xi|)$ uniformemente em $x \in \bar{\Omega}$. Pelos Lemas 1.2.6 e 1.2.7 podemos aplicar o Teorema do Ponto de Sela (vide Teorema B.15) e obter uma solução $\bar{u}_t$ para o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = \gamma u + \hat{h}(x,u) + t\varphi_1(x) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

Defina

$$v_t = \bar{u}_t - \frac{t\varphi_1}{\mu_1 - \gamma}. \tag{3.16}$$

Logo, v_t é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta^2 v_t + c\Delta v_t = \gamma v_t + \hat{h}(x,\bar{u}_t) & \text{em} \quad \Omega \\ v_t = \Delta v_t = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, utilizando as estimativas L^p para v_t (vide [19]), resulta que $\|v_t\|_{C^0} = o(|t|)$, quando $|t| \to \infty$. Substituindo em (3.16) obtemos

$$\bar{u}_t > 0 \quad \text{para } t < t_1,$$

onde $-t_1$ é um número real suficientemente grande, o que prova que $\bar{u}_t$ é uma solução para o problema (3.3).

Resta-nos mostrar que existe $\beta(f_1)$ tal que $w_t \neq \bar{u}_t$ para $t < \beta(f_1)$.

Notemos que, por (3.16), obtemos

$$\bar{u}_t(x) = v_t(x) + \frac{t}{\mu_1 - \gamma}\varphi_1(x) \to \infty, \ q.t.p. \text{ em } \Omega, \quad \text{quando } t \to -\infty.$$

Seja $\beta(f_1)$ o supremo do conjunto dos t'^s tal que $\bar{u}_t(x) \geq -tC > v(x)$ em subconjunto de medida positiva de Ω, onde C é uma constante tal que $\frac{\bar{u}_t}{t} \leq -C$ em subconjunto de medida positiva e v é a supersolução de (3.3) definida no Lema 3.0.17. Logo, para $t < \beta(f_1)$ obtemos $w_t(x) \leq v(x) < \bar{u}_t(x)$ em subconjunto de Ω de medida positiva, o que prova que para $t < \beta(f_1)$ temos duas soluções w_t e $\bar{u}_t$ distintas.

$\square$

CAPÍTULO 4

EQUAÇÃO DE 4^A ORDEM COM NÃO-LINEARIDADE DEPENDENDO DO GRADIENTE

Neste capítulo estudaremos soluções da equação de 4^a ordem com condições de Navier sobre a fronteira como no Capítulo 1. Porém, agora, a não-linearidade g possui também a dependência do gradiente, isto é, passaremos a estudar solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x, u, \nabla u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $g(x, 0) = 0$ e $c < \lambda_1$.

Existem diversos trabalhos para o problema de segunda ordem

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x, u, \nabla u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

dentre os quais citamos [22], [23], [33] e [38]. Nestes trabalhos são empregadas técnicas como do grau topológico, utilizando estimativas à priori, e o método de sub-supersolução. No trabalho [16] os autores utilizaram uma nova técnica, que consiste em "congelar" o gradiente na não-linearidade, e mostraram existência de duas soluções não triviais.

Observemos que o problema (4.1) não possui estrutura variacional devido a presença do gradiente na não-linearidade, então, a princípio não podemos utilizar métodos variacionais para abordar tal problema. Vamos utilizar a técnica desenvolvida por D.G. De Figueiredo, M. Girardi e M. Matzeu em [16]. Tal técnica consiste em associar ao problema 4.1 uma família de equações de 4^a ordem com a não-linearidade sem dependência do gradiente. Em suma, para cada $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, consideremos

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x, u, \nabla w) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

Agora o problema (4.2) possui estrutura variacional e utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha para garantir existência de solução para o problema (4.2). Para isso necessitaremos das seguintes hipóteses:

(G_0) $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz contínua ;

(G_1) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{g(x,t,\xi)}{t} = 0$ uniformemente para $x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^N$;

(G_2) Existe uma constante $a_1 > 0$ e $p \in \left(1, \dfrac{N+4}{N-4}\right)$ tal que

$$|g(x,t,\xi)| \leq a_1(1 + |t|^p),\ \forall x \in \overline{\Omega},\ |t| \geq t_0,\ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

(G_3) Existem constantes $\theta > 2$ e $t_0 > 0$ tais que

$$0 < \theta G(x,t,\xi) \leq t g(x,t,\xi), \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ |t| \geq t_0, \xi \in \mathbb{R}^N,$$

onde $G(x,t,\xi) = \displaystyle\int_0^t g(x,s,\xi)ds$.

(G_4) Existem constantes $a_2, a_3 > 0$ tais que

$$G(x,t,\xi) \geq a_2|t|^\theta - a_3, \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Observação 4.0.18. *De (G_2) e (G_3) segue que $\theta \leq p + 1$.*

Observação 4.0.19. *A norma a ser utilizada em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ será a mesma utilizada no Capítulo 1 no caso $c < \lambda_1$, ou seja,*

$$\|u\|_0^2 = \int_\Omega [(\Delta u)^2 - c|\nabla u|^2].$$

Nosso primeiro resultado é com respeito a solubilidade de (4.2) em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e obter limitações destas soluções.

Teorema 4.0.20. *Suponha que* $(G_0)-(G_4)$ *se verifiquem. Então existem constantes positivas* c_1 *e* c_2 *tais que, para cada* $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, *o problema (4.2) possui uma solução* u_w *satisfazendo*

$$c_1 \leq \|u_w\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \leq c_2.$$

Nosso principal resultado é obter soluções para o problema (4.1). Para isto necessitaremos da seguinte hipótese adicional:
(G_5) A função g satisfaz a seguinte condição de ser localmente Lipschitz

$$|g(x,t',\xi) - g(x,t'',\xi)| \leq L_1|t' - t''|, \quad \forall x \in \overline{\Omega};\ t', t'' \in [0,\rho_1], |\xi| \leq \rho_2,$$

onde ρ_1, ρ_2 dependem explicitamente de $p, N, \theta, a_1, a_2, a_3$ dados nas hipóteses anteriores. Também

$$|g(x,t,\xi') - g(x,t,\xi'')| \leq L_2|\xi' - \xi''|, \quad \forall x \in \overline{\Omega};\ t \in [0,\rho_1], |\xi'|, |\xi''| \leq \rho_2.$$

Teorema 4.0.21. *Assuma que as condições* $(G_0) - (G_5)$ *se verifiquem. Então o problema (4.1) possui uma solução, desde que*

$$\mu_1 L_1 + \mu_1^{\frac{1}{2}} L_2 < 1.$$

A prova do Teorema 4.0.20 dar-se-á utilizando o Teorema do Passo da Montanha (vide Teorema B.14) enquanto que a prova do Teorema 4.0.21 usa-se um argumento iterativo. Note que, quando aplicamos o Teorema do Passo da Montanha para operadores de segunda ordem, por exemplo $-\Delta$, conseguimos mostrar a existência de duas soluções, uma positiva e uma negativa. No entanto, para o problema de quarta ordem podemos argumentar de forma semelhante definindo

$$\tilde{g} = \begin{cases} g(x,t,\xi) & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

mas não conseguimos concluir que a solução do problema 4.2, obtida com g substituída por $\tilde{g}$, é positiva. Basta observar que, se $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ não implica que $u^- \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

4.1 Prova do Teorema 4.0.20

Recordemos que as soluções fracas do problema (4.2), que é variacional, são obtidas como pontos críticos do funcional associado $I_w : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_w(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta v|^2 - c|\nabla v|^2\right) dx - \int_\Omega G(x, v, \nabla w)dx. \tag{4.3}$$

A prova do Teorema 1.2.1 é dividida em vários lemas. Nestes, verificaremos a condição de Palais-Smale (condição (PS)) e que o funcional I_w possui a geometria do Passo da Montanha.

Lema 4.1.1. *Seja $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Então existem números positivos ρ e α, independentes de w, tais que*

$$I_w(v) \geq \alpha,\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) : \|v\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \rho \tag{4.4}$$

Demonstração: Segue de (G_1) e (G_2) que dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante positiva k_ε, independente de w, tal que

$$|G(x, t, \xi)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + k_\varepsilon |t|^{p+1}.$$

Logo, usando a desigualdade de Poincaré e o Teorema de Imersão de Sobolev, estimamos

$$I_w(v) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\mu_1}\right)\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} - \tilde{k}_\varepsilon \|v\|^{p+1}_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)},$$

onde $\tilde{k}_\varepsilon$ é uma constante independente de w. Sendo $p > 1$, o resultado segue.

□

Lema 4.1.2. *Seja $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Fixe $v_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ com $\|v_0\| = 1$. Então existe um $T > 0$, independente de w, tal que*

$$I_w(tv_0) \leq 0,\ \forall t \geq T. \tag{4.5}$$

Demonstração: Segue de (G_4) que

$$I_w(tv_0) = \frac{1}{2}t^2 - \int_\Omega G(x, tv_0, \nabla w)dx \leq \frac{1}{2}t^2 - a_2 t^\theta \int_\Omega |v_0|^\theta dx - a_3|\Omega|. \tag{4.6}$$

Assim, pelo Teorema de Imersão de Sobolev ($\theta \leq p+1$) obtemos

$$I_w(tv_0) \leq \frac{1}{2}t^2 - a_2|t|^\theta (S_\theta)^\theta - a_3|\Omega|,$$

onde S_θ é a constante de imersão de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ em $L^\theta(\Omega)$. Sendo $\theta > 2$ obtemos um $T > 0$ independente de v_0 e w tal que (4.5) se verifica.

$\square$

Lema 4.1.3. *Assuma que* $(G_0) - (G_4)$ *se verifiquem. Então o problema (4.2) tem ao menos uma solução* $u_w \neq 0$ *para qualquer* $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Demonstração: Pelos Lemas 4.1.1 e 4.1.2 verificamos que o funcional dado em (4.3) satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha. Pelas hipóteses (G_2) e (G_3) temos que o funcional satifaz a condição (PS). Portanto, pelo Teorema do Passo da Montanha, o problema (4.2) possui uma solução fraca u_w que é ponto crítico do funcional I_w e satisfaz um nível min max, isto é,

$$I'_w(u_w) = 0, \quad I_w(u_w) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_w(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C^0([0,1], H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = Tv_0\}$, para algum v_0 e $T > 0$ como no Lema 4.1.2. De agora em diante nós fixamos o v_0 e o $T > 0$ citados anteriormente.

$\square$

Lema 4.1.4. *Seja* $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. *Existe uma constante positiva* c_1, *independente de* w, *tal que*

$$\|u_w\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \geq c_1 \tag{4.7}$$

para todas soluções u_w *obtidas no Lema 4.1.3.*

Demonstração: Usando que u_w é solução de (4.2), obtemos que

$$\int_\Omega (|\Delta u_w|^2 - c|\nabla u_w|^2)dx = \int_\Omega g(x, u_w, \nabla w)u_w dx. \tag{4.8}$$

Segue de (G_1) e (G_2) que, dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante positiva c_ε, independente de w, tal que

$$|g(x,t,\xi)| \leq \varepsilon|t| + c_\varepsilon|t|^p.$$

Usando esta desigualdade, estimamos (4.8) e obtemos

$$\int_\Omega (|\Delta u_w|^2 - c|\nabla u_w|^2)dx \leq \varepsilon \int_\Omega |u_w|^2 dx + c_\varepsilon \int_\Omega |u_w|^{p+1} dx.$$

Novamente, pela Desigualdade de Poincaré e o Teorema de Imersão de Sobolev obtemos

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{\mu_1}\right)\|u_w\|^2_{H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \leq \tilde{c}_\varepsilon \|u_w\|^{p+1}_{H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)},$$

o que implica (4.7).

□

Lema 4.1.5. *Seja $w \in H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. Existe uma constante positiva c_2, independente de w, tal que*

$$\|u_w\|_{H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \leq c_2 \tag{4.9}$$

para todas soluções u_w obtidas no Lema 4.1.3.

Demonstração: Da caracterização inf max de u_w dada no Lema 4.1.3, obtemos

$$I_w(u_w) \leq \max_{t\geq 0} I_w(tv_0) \tag{4.10}$$

com v_0 escolhido no Lema 4.1.3. Estimamos $I_w(tv_0)$ usando (G_4):

$$I_w(tv_0) \leq \frac{1}{2}t^2 - a_2|t|^\theta \int_\Omega |v_0|^\theta + a_3|\Omega| =: h(t), \tag{4.11}$$

que possui valor máximo assumido em algum $\bar{t}_0 > 0$ e o valor $h(\bar{t}_0)$ é tomado como o valor c_2. Claramente este c_2 é independente de w.

□

Observação 4.1.6. ***Sobre a regularidade da solução de (4.2)*** *No Lema 4.1.3 obtivemos uma solução fraca u_w de (4.2) para cada $w \in H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. Desde que $p < \dfrac{N+4}{N-4}$, com um argumento de bootstrap, usando a teoria de regularidade L^p, mostra-se que u_w é $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Além disso, se w é C^2 usando a teoria de regularidade de Schauder temos que u_w é $C^{4,\alpha}$.*

Assim obtemos o seguinte resultado:

Lema 4.1.7. *Seja $w \in (H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega))\cap C^1(\overline{\Omega})$. Então existem constantes positivas ρ_1 e ρ_2, independentes de w, tal que a solução u_w obtida no Lema 4.1.3 satisfaz*

$$\|u_w\|_{C^0} \leq \rho_1 \qquad \|\nabla u_w\|_{C^0} \leq \rho_2.$$

4.2 Prova do Teorema 4.0.21

A ideia da prova consiste de usar o Teorema 4.0.20 e um método iterativo como segue. Construiremos uma sequência $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ como soluções de

$$\begin{cases} \Delta^2 u_n + c\Delta u_n = g(x, u_n, \nabla u_{n-1}) & \text{em} \quad \Omega \\ u_n = \Delta u_n = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \qquad (PR)_n$$

obtida pelo Teorema do Passo da Montanha no Teorema 4.0.20. Iniciando com um $u_0 \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1(\overline{\Omega})$ arbitrário.

Pelo Lema 4.1.7 temos que

$$\|u_n\|_{C^0} \leq \rho_1 \qquad \|\nabla u_n\|_{C^0} \leq \rho_2.$$

Por outro lado, usando $(PR)_n$ e $(PR)_{n+1}$, obtemos:

$$\int_\Omega [\Delta u_{n+1}(\Delta u_{n+1} - \Delta u_n) - c\nabla u_{n+1}(\nabla u_{n+1} - \nabla u_n)] = \int_\Omega g(x, u_{n+1}, \nabla u_n)(u_{n+1} - u_n)$$

e

$$\int_\Omega [\Delta u_n(\Delta u_{n+1} - \Delta u_n) - c\nabla u_n(\nabla u_{n+1} - \nabla u_n)] = \int_\Omega g(x, u_n, \nabla u_{n-1})(u_{n+1} - u_n).$$

Donde

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} &= \int_\Omega [g(x, u_{n+1}, \nabla u_n) - g(x, u_n, \nabla u_n)]\,(u_{n+1} - u_n)dx \\ &+ \int_\Omega [g(x, u_n, \nabla u_n) - g(x, u_n, \nabla u_{n-1})]\,(u_{n+1} - u_n)dx \end{aligned}$$

Estimando as integrais acima utilizando a hipótese (G_5), resulta

$$\|u_{n+1} - u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \leq L_1 \int_\Omega |u_{n+1} - u_n|^2 + L_2 \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_{n-1}||u_{n+1} - u_n|. \qquad (4.12)$$

Pela desigualdade de Ponicaré, chegamos à

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} &\leq L_1\mu_1^{-1}\|u_{n+1} - u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \\ &+ L_2\mu_1^{-\frac{1}{2}}\|u_{n+1} - u_n\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)}\|u_n - u_{n-1}\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

donde segue que

$$\|u_{n+1}-u_n\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \leq \frac{L_2\mu_1^{-\frac{1}{2}}}{1-L_1\mu_1^{-1}}\|u_n-u_{n-1}\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} =: k\|u_n-u_{n-1}\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)}.$$

Desde que o coeficiente k é menor do que 1 segue que a sequência $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ e, portanto, converge fortemente em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ para alguma função $u \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

Sendo $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \geq c_1$ para todo n (veja Lema 4.1.4) segue que $u \not\equiv 0$, ou seja, u é uma solução não trivial de (4.1).

Exemplo 4.2.1. *Uma função que satisfaz todas as condições* $(G_0)-(G_5)$ *abordadas anteriormente é definida da seguinte forma:*

$$g(x,t,\xi) = b_1|t|^{p-1}tg(\xi),$$

onde $b_1 > 0$ *e* g *é uma função* L^∞ *tal que* $0 < b_2 \leq g(\zeta)$ *para alguma constante* b_2.

Como dissemos na introdução desta tese, o problema (4.1) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = v & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = cv + g(x,u,\nabla u) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.13}$$

Motivado pelo sistema acima, e utilizando a mesma técnica empregada neste capítulo, estudamos a questão de existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = F_u(x,u,v,\nabla u,\nabla v) & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = F_v(x,u,v,\nabla u,\nabla v) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.14}$$

onde Ω é um domínio limitado e suave do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ e $F : \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

Verificamos que com hipóteses semelhantes as do Teorema 4.0.21 obtemos que o problema (4.14) possui uma solução não trivial.

Em seguida fizemos uma hipótese adicional

(i) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F_t(x,t,s,\xi,\eta)}{t} = 0$, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F_s(x,t,s,\xi,\eta)}{t} = 0$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$, $\xi,\eta \in \mathbb{R}^N$ e localmente uniforme em s; além disso, este limite é válido para todo $s \in \mathbb{R}$, obtivemos um resultado que mostra existência de 4 soluções não triviais, neste caso as soluções obtidas (u,v) satisfazem $u,v \neq 0$.

APÊNDICE A

RESULTADOS BÁSICOS

Neste apêndice enunciaremos alguns resultados básicos utilizados ao longo deste trabalho. Iniciamos com dois teoremas referentes aos espaços $L^p(\Omega)$. Em seguida, enunciamos teoremas de existência e regularidade das soluções para o problema de segunda ordem $Lu = f$ com condição de Dirichlet na fronteira, onde L é um operador de segunda ordem uniformemente elíptico. Finalizamos este Apêndice A enunciando os teoremas do tipo min-max utilizados no decorrer deste trabalho.

Teorema A.1. ***Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:*** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções de $L^1(\Omega)$. Suponhamos que*

i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω,

ii) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ *tal que para cada* n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.t.p. em* Ω.

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

Demonstração: A prova deste teorema pode ser encontrada em [7].

□

O próximo teorema trata das Imersões de Sobolev.

Teorema A.2. ***Rellich-Kondrachov:*** *Suponha que Ω é um aberto limitado de classe C^1 em $\mathbb{R}^N$. Se verifica:*

i) se $p < N$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p^*[$ donde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$,

ii) se $p = N$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty[$,

iii) se $p > N$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,

com imersões compactas.

Demonstração: A demosntração deste resultado poder ser encontrada em [7].

□

No que segue enunciaremos resultados de existência e regularidade de soluções. As demonstrações destes resultados podem ser encontradas no livro *Elliptic Partial Differential Equations of Seconde Order,* D. Gilbarg and N. S. Trundinger [21].

Os dois próximos teoremas tratam da existência de solução.

Teorema A.3. *Seja $L = a^{ij}(x)D_{ij} + b^i(x)D_i + c(x)$ um operador uniformemente elíptico em um domínio limitado Ω, com $c \leq 0$, e seja f e os coeficientes L pertencentes a $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Suponha que Ω é um domínio $C^{2,\alpha}$ e que $\phi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então o problema de Dirichlet,*

$$Lu = f \ em \, \Omega, \ u = \phi \ sobre \, \partial\Omega,$$

possui uma única solução em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

e

Teorema A.4. *Sejam Ω um domínio $C^{1,1}$ em $\mathbb{R}^N$ e $L = a^{ij}(x)D_{ij} + b^i(x)D_i + c(x)$ um operador uniformemente elíptico em Ω com coeficientes $a^{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$, $b^i, c \in L^\infty(\Omega)$ com $i, j = 1, \ldots, N$ e $c \leq 0$. Então, se $f \in L^p(\Omega)$ e $\phi \in W^{2,p}(\Omega)$, com $1 < p < \infty$, o problema de Dirichlet $Lu = f$ em Ω, $u - \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ possui uma única solução em $W^{2,p}(\Omega)$.*

Os próximos dois resultados tratam da regularidade das soluções.

Teorema A.5. ***Estimativas de Schauder:*** *Seja Ω um domínio $C^{k+2,\alpha}$ $(k \geq 0)$ e seja $\phi \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Suponha que $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfaz $Lu = f$ em Ω, $u = \phi$ sobre $\partial\Omega$, onde f e os coeficientes do operador L uniformemente elíptico pertencem a $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

e

Lema A.6. *Suponha que L é um operador que satisfaz as hipóteses do Teorema A.4. Então existe uma constante C (independente de u) tal que*

$$|u|_{2,p:\Omega} \leq C|Lu|_{p:\Omega},$$

para todo $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $1, p < \infty$.

Para finalizar este primeiro apêndice enunciamos os teoremas do tipo "min-max"utilizados ao longo do trabalho. Estes teoremas nos permitem concluir que o funcional associado a cada problema abordado possui pontos críticos e, consequentemente, tais problemas possuem soluções.

A primeira condição que torna-se necessária para utilização de tais teoremas é conhecida como condição de compacidade de *Palais-Smale*.

Definição A.7. *Dizemos que um funcional F de classe C^1 satisfaz a condição de Palais-Smale (ou condição (PS)), se para cada sequência (u_n) no espaço de Banach X que satisfaz*

$$|F(u_n)| \leq const. \text{ e } F'(u_n) \to 0 \text{ em } X^*$$

possui uma subsequência convergente (em norma).

Teorema A.8. ***Princípio Variacional de Ekeland.*** *Seja X um espaço de Banach e $F : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 que satisfaz a condição (PS). Suponha ainda que F é limitado inferiormente. Então, o ínfimo de F é assumido em um ponto $x_0 \in X$ e x_0 é um ponto crítico de F, isto é, $F'(x_0) = 0$.*

Demonstração: A prova deste resultado pode ser encontrada na pag. 29 do livro [12]. □

Teorema A.9. ***Teorema do Passo da Montanha.*** *Seja X um espaço de Banach e $F : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 que satisfaz a condição (PS). Seja S um subconjunto fechado de X que desconexa X. Sejam x_0 e x_1 pontos em X que estão em componentes conexas distintas de $X \setminus S$. Suponha que F é limitado inferiormente sobre S, e que as seguintes condições são verificadas*

$$\inf_S F \geq b \quad e \quad \max F(x_0), F(x_1) < b.$$

Seja $\Gamma = \{f \in C([0,1];X) : f(0) = x_0, f(1) = x_1\}$. *Então*

$$c = \inf_{f\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} F(f(t))$$

é finito e é um ponto crítico de F. *Isto é, existe* $x_0 \in X$ *tal que* $F(x_0) = c$ *e* $F'(x_0) = 0$.

Demonstração: A prova deste resultado pode ser encontrada na pag. 41 do livro [12] ou em [40]. $\square$

Teorema A.10. ***Teorema do Ponto de Sela.*** *Seja* X *um espaço de Banach e* $F : X \to \mathbb{R}$ *um funcional* C^1 *que satisfaz a condição* (PS). *Seja* $V \subset X$ *um subespaço de dimensão finita e* W *o complemento ortogonal de* V, *isto é,* $X = V \oplus W$. *Suponha que existam números reais* $r > 0$ *e* $a < b$ *tais que*

$$\inf_W F \geq b \quad e \quad \max_{\partial D} F \leq a,$$

onde $D = V \cap B_r(0)$, $B_r(0) = \{x \in X : \|x\|_X < r\}$ *e* $\partial D = \{x \in V : \|x\|_X = r\}$. *Seja*

$$\Gamma = \{f \in C(\overline{D}, X) : f(x) = x, \forall x \in \partial D\},$$

e

$$c = \inf_{f\in\Gamma} \sup_{x\in\overline{D}} F(f(x)).$$

Então c *é finito e* c *um ponto crítico de* F.

Demonstração: A prova deste resultado pode ser encontrada na pag. 40 do livro [12] ou em [40]. $\square$

Teorema A.11. ***Teorema do Enlace.*** *Seja* X *um espaço de Banach e* $F : X \to \mathbb{R}$ *um funcional* C^1 *que satisfaz a condição* (PS). *Suponha que* $X = V \oplus W$, V *de dimensão finita. Seja* $w_0 \in W$ *fixado e sejam* $\rho < R$ *números reais positivos. Seja* $Q = \{v + rw_0 : v \in V, \|v\| \leq R, 0 \leq R\}$. *Suponha que*

$$\inf_{W\cap\partial B_\rho} F \geq b, \qquad \max_{\partial Q} F \leq a, \quad a < b,$$

onde ∂B_ρ *é a fronteira da* $B_\rho(0)$. *Sejam*

$$\Gamma = \{f \in C(Q, X) : f(x) = x, x \in \partial Q\},$$

e

$$c = \inf_{f\in\Gamma} \sup_{x\in Q} F(f(x)).$$

Então c *é finito e* c *um ponto crítico de* F.

Demonstração: A prova deste resultado pode ser encontrada na pag. 41 do livro [12] ou em [40]. □

APÊNDICE B

UMA BREVE REVISÃO DOS PONTOS CRÍTICOS E TEORIA DE MORSE

Neste apêndice, faremos algumas definições e resultados da Teoria de Pontos Críticos e da Teoria de Morse. Estes resultados são utilizados nas provas dos nossos principais teoremas. Aqui, vale lembrar que um texto mais completo sobre Teoria de Morse pode ser encontrado em [8] e em [28].

Primeiramente, seja H um espaço de Hilbert e $I : H \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Denote o conjunto dos pontos críticos de I por K. Assim, dado $c \in \mathbb{R}$ definimos $I_c = \{x \in H : I(x) \leq c\}$ e $K_c = I^{-1}(c) \cap K$. Assim, consideramos a seguinte definição

Definição B.1. *Dizemos que o funcional $I : H \to \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfaz a propriedade de deformação se para todo $a < b$ tais que $K \cap I^{-1}(a, b) = \emptyset$, temos que I_a é retrato de deformação de $I_b \backslash K_b$.*

Deste modo, consideremos o Lema de Deformação a qual é importantíssimo na teoria dos pontos críticos. Na prova de tal lema é essencial a garantia de condições do tipo (PS), veja [8]. Assim, temos o seguinte resultado

Lema B.2. ***(Lema de Deformação).*** *Suponha que $I : H \to \mathbb{R}$ seja um funcional de classe C^1 a qual satisfaz a condição (PS) (vide Definição A.7). Além disso, suponha que o nível a é o único valor crítico possível de I no intervalo $[a, b)$. Suponha que as componentes conexas de K_a são pontos isolados. Então, I_a é um retrato de deformação de $I_b \backslash K_b$.*

Neste momento, denotamos $H_q(X, Y)$ como sendo o grupo de homologia singular relativo com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Aqui, X e Y sempre denotam espaços topológicos em que $Y \subset X$. Neste caso, temos a seguinte definição

Definição B.3. *Seja x_0 um ponto crítico isolado do funcional $I : H \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Seja $c_0 = I(x_0)$, então o p-ésimo grupo crítico de I em x_0 é dado por*

$$C_p(I, x_0) = H_p(I_{c_0} \cap U_{x_0}, (I_{c_0} \backslash \{x_0\}) \cap U_{x_0})$$

onde U_{x_0} é uma vizinhança de x_0 tal que $U_{x_0} \cap K = \{x_0\}$.

Deste modo, temos o seguinte resultado

Teorema B.4. *Seja $I : H \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Suponha que $\alpha \in H_j(I_b, I_a)$ é não trivial e que I possui a propriedade de deformação. Assim, denote*

$$c = \inf_{\sigma \in \alpha} \sup_{x \in |\sigma|} I(x).$$

Então existe $x_0 \in K_c$ tal que $C_j(I, x_0) \neq 0$.

Demonstração: A prova deste resultado pode ser encontrada em [8].

$\square$

Agora, consideramos algumas situações onde temos enlaces entre dois conjuntos de um espaço de Hilbert H. Primeiramente, temos a seguinte definição

Definição B.5. *Seja D um bola topológica de dimensão topológica j em H e S um subconjunto de H. Dizemos que ∂D e S estão enlaçados homologicamente se $\partial D \cap S = \emptyset$ e $|\sigma| \cap S \neq \emptyset$, para cada j cadeia singular σ com $\partial\sigma = \partial D$.*

As próximas proposições fornecem exemplos de conjuntos enlaçados homologicamente. As provas destas proposições podem ser encontradas no Capítulo II em [8]. Assim, temos os seguintes resultados

Proposição B.6. *Sejam H_1 e H_2 dois subespaços fechados de um espaço de Hilbert H. Além disso, suponha que $H = H_1 \bigoplus H_2$ e $\dim H_1 < \infty$. Então, tomando $D = B_r \cap H_1$ e $S = H_2$, temos que ∂D e S estão enlaçados homologicamente.*

Na proposição anterior temos a geometria descrita no Teorema do Ponto de Sela. Para o próximo resultado descrevemos um situação corrente para a geometria do tipo "Enlace". Neste caso, temos o seguinte resultado

Proposição B.7. *Sejam H_1 e H_2 dois subespaços fechados de um espaço de Hilbert H. Além disso, suponha que $H = H_1 \bigoplus H_2$ e $\dim H_1 < \infty$. Considere $\phi \in H_2$ e $R, r, \rho > 0$ com $\rho < R$. Sejam*

$$D = \{x + s\phi : x \in H_1 \cap B_r, s \in [0, R]\} \qquad e \qquad S = H_2 \cap \partial B_\rho.$$

Então ∂D e S estão enlaçados homologicamente.

Agora, consideraremos um resultado que relaciona conjuntos enlaçados homologicamente com a existência de pontos críticos que possuem grupos críticos não triviais. Neste caso, temos o seguinte teorema:

Teorema B.8. *Suponha que ∂D e S estão enlaçados homologicamente onde D é uma bola topológica de dimensão j. Além disso, suponha que I de classe C^1 satisfaça as seguintes condições*

1. $I(x) > a, \forall x \in S$,
2. $I(x) \leq a, \forall\, x \in \partial D$.

Então $H_j(I_b, I_a) \neq 0$ para $b > max\{f(x), x \in D\}$.

Neste momento, daremos uma estimativa dos grupos críticos de um ponto crítico isolado e degenerado. Primeiramente, descreveremos o "Splitting Theorem"a qual será usado posteriormente para fazer a estimativa dos grupos críticos. Temos o seguinte resultado:

Teorema B.9. (**Splitting Theorem**) *Suponha que U seja um vizinhança de x_0 em um espaço de Hilbert H e seja $I : H \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^2. Além disso, suponha que x_0 é o único ponto critico de I e denote $A = d^2I(x_0)$ com núcleo N. Se 0 é um ponto isolado em $\sigma(A)$ (espectro de A) ou não está em $\sigma(A)$, então existe uma bola $B_\delta(0), \delta > 0$ e um* *homeomorfismo local Ψ que preserva a ordem definido em $B_\delta(0)$ e uma aplicação de classe C^1 $h : B_\delta \cap N \to N^\perp$ satisfazendo*

$$I \circ \Psi(z + y) = \frac{1}{2}(Az, z) + I(h(y) + y), \forall x \in B_\delta,$$

onde $y = P_N x, z = P_{N^\perp} x$. Aqui, P_N e $P_{N^\perp}$ sao as projeções ortogonais sobre os subespaços N e $N^\perp$.

Neste caso, chamamos de $\mathcal{N} = \Psi(U \cap N)$. O seguinte teorema relaciona os grupos críticos dos pontos críticos de I e os pontos críticos de $\widehat{I}$, onde $\widehat{I} = I|_{\mathcal{N}}$. Mais especificamente, temos o seguinte resultado:

Teorema B.10. (**Shifting Theorem**)

Sob as mesmas hipóteses do "Splitting Theorem,"suponha que o índice de Morse de I em x_0 é $m = m(x_0)$. Então temos a seguinte identidade

$$C_p(I, x_0) = C_{p-m}(\widehat{I}, x_0), \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Neste caso, supondo que $A = d^2 I(x_0)$ tem núcleo de dimensão finita, temos o seguinte corolário

Corolário B.11. *Suponha que N possui dimensão finita υ e x_0 é*

- *um mínimo local de $\widehat{I}$, então*
$$C_p(I, x_0) = \delta_{pm}\mathbb{Z},$$
- *um máximo local de $\widehat{I}$, então*
$$C_p(I, x_0) = \delta_{p(m+\upsilon)}\mathbb{Z},$$
- *nem um máximo e nem um mínimo local de $\widehat{f}$, então*
$$C_p(I, x_0) = 0,\ \forall\, p \le m \text{ e para } p \ge m + \upsilon.$$

Demonstração: A prova deste corolário consiste em utilizar o "Splitting Theorem"(vide [8]). Omitiremos a prova deste corolário.

□

Em particular, temos o seguinte resultado

Corolário B.12. (**Lema de Gromoll – Meyer**) *Sob as mesmas hipóteses descritas no corolário anterior temos que $C_p(I, x_0) = 0$ para todo $p < m$ ou $p > m + \upsilon$.*

Demonstração. A prova deste corolário é imediata usando o Corolário B.11. Para uma prova deste resultado sem utilizar explicitamente o "Shifting Theorem"(vide [5]).

□

No decorrer do nosso trabalho utilizamos teoremas do tipo mini-max para encontrar pontos críticos do funcional $I : H \to \mathbb{R}$, onde

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left(|\Delta u|^2 - c|\nabla u|^2\right) dx - \int_{\Omega} G(x,u)dx, \qquad u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{B.1}$$

e $H = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Estes pontos críticos são soluções da equação de quarta ordem

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{B.2}$$

Utilizamos teoria de Morse para diferenciar tais soluções aplicando os Teoremas que enunciaremos abaixo:

Teorema B.13. ***Princípio Variacional de Ekeland.*** *Seja H um espaço de Hilbert e $I : H \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 que satisfaz a condição (PS). Suponha ainda que I é limitado inferiormente. Então, o ínfimo de I é assumido em um ponto $x_0 \in H$ e x_0 é um ponto crítico de I que satisfaz $C_p(I, x_0) = \delta_{p0}\mathbb{Z}$.*

Os próximos resultados estão enunciados na forma que aplicamos em nosso trabalho. Nestes casos, podemos caracterizar os grupos críticos do funcional I nos pontos críticos obtidos. Para versões mais gerais, isto é, para funcionais definidos em espaços de Banach, veja os Teoremas A.9, A.10 e A.11 do Apêndice A. No entanto, nestes teoremas do Apêndice A não temos a caracterização de grupos críticos de uma solução u do problema (B.2). Os teoremas do tipo mini-max ficam da seguinte forma:

Teorema B.14. ***Teorema do Passo da Montanha.*** *Sejam H um espaço de Hilbert e $I : H \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 que satisfaz a condição (PS). Suponha que existam u_0, u_1 e $R > 0$ tais que u_0 é um mínimo local de I, $I(u_1) \leq I(u_0)$, $\|u_1 - u_0\|_H > R$ e $I(u) \geq r > I(u_0)$ para todo $u \in H$ com $\|u - u_0\|_H = R$. Então existe $u_2 \in H$ tal que $I'(u_2) = 0$ e $C_p(I, u_2) = \delta_{p1}\mathbb{Z}$.*

Teorema B.15. ***Teorema do Ponto de Sela.*** *Seja H um espaço de Hilbert e $I : H \to \mathbb{R}$ um funcional C^1 que satisfaz a condição (PS). Seja $V \subset H$ um subespaço de H de dimensão n e W o complemento ortogonal de V, isto é, $H = V \oplus W$. Suponha que existam números reais $r > 0$ e $a < b$ tais que*

$$\inf_{W} I \geq b \quad e \quad \max_{\partial D} I \leq a,$$

onde $D = V \cap B_r(0)$, $B_r(0) = \{x \in H : \|x\|_H < r\}$ e $\partial D = \{x \in V : \|x\|_H = r\}$. Então existe $u \in H$ ponto crítico de I tal que $C_n(I, u) \neq 0$.

Teorema B.16. ***Teorema do Enlace.*** *Seja H um espaço de Hilbert e $I : H \to \mathbb{R}$ um funcional C^1 que satisfaz a condição (PS). Suponha que $X = V \oplus W$, V de dimensão finita n . Seja $w_0 \in W$ fixado e sejam $\rho < R$ números reais positivos. Seja $Q = \{u = v + rw_0 : v \in V, \|u\| \leq R\}$. Suponha que*

$$\inf_{W \cap \partial B_\rho} I \geq b, \qquad \max_{\partial Q} I \leq a, \quad a < b,$$

onde ∂B_ρ é a fronteira da $B_\rho(0)$. Então existe $u_0 \in H$ ponto crítico de I tal que $C_{n+1}(I, u_0) \neq 0$.

Finalizaremos este apêndice definindo o q-ésimo número de Morse para um funcional I, com respeito a um intervalo (a, b), para valores regulares $a < b$ e os números de Betti. Em seguida, enunciaremos a Identidade de Morse no Teorema B.21, identidade esta utilizada no decorrer do texto para garantir existência de mais soluções.

Definição B.17. *Sejam $a < b$ um par de valores regulares. Definimos o q-ésnimo número de Morse para o funcional I com respeito a (a, b) por*

$$M_q(a, b) = \sum_{a < c_i < b} rank H_q(I_{c_i + \epsilon_i}, I_{c_i - \epsilon_i}; \mathbb{Z}), \; q = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde ${c_i}'^s$ são os valores críticos de I em (a, b).

Para funcionais I que satisfazem a condição (PS) os números de Morse estão bem definidos de acordo com o Lema de Deformação (Lema B.2), isto é, eles são independentes da escolha de $\{\epsilon_i\}$. No caso em que $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ possuir c como um valor crítico isolado e $K_c = \{z_j\}_{j=1}^m$ obtemos, para ϵ suficientemente pequeno, o seguinte resultado:

Teorema B.18.

$$H_*(I_{c+\epsilon}, I_{c-\epsilon}; \mathbb{Z}) \cong H_*(I_c, I_c \setminus K_c; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{j=1}^{m} C_*(I, z_j).$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em ([8] p. 35). Segue do último teorema o seguinte corolário:

Corolário B.19.

$$M_q(a,b) = \sum_{a<c_i<b} \sum_{j=1}^{m_i} rank C_q(I, z_j^i),\ q = 0, 1, 2, \ldots .$$

No que segue, iremos definir os números de Betti e em seguida descrever a relação existente entre os números de Morse e os números de Betti na Identidade de Morse.

Definição B.20. *Sejam $a < b$ valores regulares de I. Definimos o q-ésimo número de Betti por*

$$\beta_q = \beta_q(a,b) = rank H_q(I_b, I_a; \mathbb{Z}),\ q = 0, 1, 2, \ldots .$$

Conhecendo os números de Morse e os números de Betti obtemos o seguinte resultado:

Teorema B.21. *Suponhamos que H é um espaço de Hilbert e $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in [a,b]$, onde a, b são valores regulares de I. Suponha que $K \cap I^{-1}[a,b] = \{z_1, \ldots, z_l\}$. Então*

$$\sum_{q=0}^{\infty} M_q t^q = \sum_{q=0}^{\infty} \beta_q t^q + (1+t)Q(t), \tag{B.3}$$

onde Q é uma série formal com coeficientes não negativos e M_q, β_q são como definidos anteriormente.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em ([8], p. 36).

Observação B.22. *A identidade (B.3) é conhecida como Identidade de Morse. Geralmente é aplicada com $t = -1$ o que resulta*

$$\sum_{q=0}^{\infty} M_q (-1)^q = \sum_{q=0}^{\infty} \beta_q (-1)^q.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] H. Amann and P. Hess. A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems. *Proc. Royal Soc. Edinburgh,* 84A: 145-151, 1979.

[2] A. Ambrosetti and G. Mancini. Sharp nonuniqueness results for some nonlinear problems. *Nonlinear Analysis,* 5:635-645, 1979

[3] A. Ambrosetti and G. Prodi. On the inversion of some differentiable mappings winth singularities between Banach Spaces. *Ann. Math. Pura Appl. Serv. IV,* 93:231-247, 1972.

[4] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz. Dual Variational Methods in critical point theory and applications. *J. Funct. Anal.,* 14: 349-381, 1973.

[5] T. Bartsch and Shujie Li. Critical point theory for asymptotically quadratic functionals and applications to problems with resonance. *Nonlinear Analysis TAM,* 28:419-441, 1997.

[6] M. S. Berger and E. Podolak. On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem. *Inidiana Univ. Math. J.,* 24:837-846, 1975.

[7] H. Brézis. *Análisis funcional Teoría y aplicaciones.* Version española. Alianza Editorial, 1984.

[8] K.C. Chang. *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems.* Birkhäuser, Boston, 1993.

[9] Ph. Clément, D. G. De Figueiredo and L. Kramer. Positive solutions of Semilinear Elliptic System . *Comm. on Pure and Appl. Math.,* 17(5)-(6): 923-940, 1992.

[10] . E. N. Dancer. On the ranges of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations. *J. Math. Pures et Appl.,* 57: 351-366, 1978.

[11] D. G. De Figueiredo. *Lectures on Boundary Value Problems of the Ambrosetti-Prodi type.* Universidade de Brasília, Brasília-DF, 1980.

[12] D. G. Figueiredo.*Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours.* Berlim: Springer, 1989.

[13] D. G. De Figueiredo. Positive solutions of semilinear elliptic problems. *in: Differential Equations, São Paulo, 1981, in: Lecture Notes in Math.,* 957:34-87, 1982.

[14] D.G. De Figueiredo. Semilinear Elliptic Systems. *Nonl. Funct. Anal. Appl. Diff. Eq., World Sci. Publishing, River Edge,* 122-152, 1998.

[15] D.G. De Figueiredo and Y. Jianfu. Decay Symmetry and Existence of positive Solutions of Semilinear Elliptic Systems. *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications.* 33(3): 211-234, 1998.

[16] D.G. De Figueiredo, M. Girardi and M. Matzeu . Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via mountain-pass techniques. *Differential and Integral Equations* 17(1-2): 119-126, 2004.

[17] D. G. De Figueiredo and E. Mitidieri. Maximum principles for linear elliptic systems. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique*, França, 310: 49-52, 1990.

[18] F.O.V. De Paiva. Multiple Solutions for Asymptotically Linear Ressonant Elliptics Problems. *Topol. Methods Nonlinear Anal.,* 21: 227-247, 2003.

[19] F. Gazzola, H-C. Grunau and G. Sweers. *Polyharmonic Boundary Value Problems.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.

[20] N. Ghoussoub. *Duality and pertubation methods in critical point theory.* Cambridge, New York, 1993.

[21] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[22] J. L. Kazdan and L. Kramer. Invariant criteria for existence of solutions to second-order quasilinear elliptic equations . *Comm. on Pure and Appl. Math.,* 31 619-645, 1978.

[23] J. L. Kazdan and F. W. Warner. Remarks on some quasilinear elliptic equations. *Comm. on Pure and Appl. Math. XXVIII,* 567-597, 1975.

[24] A. C. Lazer and P. J. McKenna. Global Bifurcation and a Theorem of Tarantello. *Journ. Math. Anal. Appl.* 181:648-655, 1994.

[25] A. C. Lazer and P. J. McKenna. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis. SIAM, 32: 537-578, 1990.

[26] A. Lazer and S. Solimini. Nontrivial solutions of operator equations and Morse indices of critical points of Min-Max type. *Nonlinear Analysis, Methods and Applications,* 12(8):761-775, 1988.

[27] S. Li, K. Perera and J. Su. Computation of critical groups in elliptic boundary value problems where the asymptotic limits may not exist. *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sec. A,* 131(3):721-732, 2001.

[28] J. Mawhin and M. Willen.*Critical point theory and Hamiltonian Systems.* Springer, Berlin, 1989.

[29] P. J. McKenna and W. Walter. Nonlinear oscillations in a suspension bridge. *Arch. Ration. Mech. Anal.,* 98: 167-177, 1987.

[30] P. J. McKenna and W. Walter. Travelling waves in a suspension bridge. *SIAM J. Appl. Math.,* 50(3): 703-715, June, 1990.

[31] A. M. Micheletti and A. Pistoia. Multiplicity results for a fourth-order semilinear elliptic problem. *Nonlinear Analysis, Theory Methodes and Applications,* 31(7): 895-908, 1998.

[32] A. M. Micheletti and A. Pistoia. Nontrivial solutions for some fourth-order semilinear elliptic problems. *Nonlinear Analysis* 34: 509-523, 1998.

[33] S. Pohozaev. On equations of type $\Delta u = f(x, u, \nabla u)$. *Mat. Sb.* 113: 324-338, 1980.

[34] A. Qian and S. Li. Multiple Solutions for a fourth-order asymptotically linear elliptic problem. *Acta Mathematica Sinica, English Series,* 22 (4): 1121-1126, 2006.

[35] A. Qian and S. Li. On the existence of nontrivial solutions for a fourth-order semilinear elliptic problem. *Abstract and App. Analysis* 6: 673-683, 2005.

[36] S. Solimini. *Notes on min-Max theorems with applications to some asymptotically linear elliptic problems.* Lecture notes, 1990.

[37] G. Tarantelo. A note on a semilinear elliptic problem. *Diff. Int. Equat.,* 5(3): 561-565, 1992.

[38] J. B. M. Xavier. Some existence theorems for equations of the form $-\Delta u = f(x, u, \nabla u)$. *Nonlinear Analysis T. M. A.* 15: 59-67, 1990.

[39] G. Xu and J. Zhang. Existence Results for some fourth-order nonlinear elliptic problems of local superlinearity and sublinearity. *Journal of Mathematical analysis and Applications* 281:633-640, 2003.

[40] W. Willem. *Minimax Theorems.* Birkhäuser, Verlag Basel, 1996.

[41] J. Zhang. Existence results for some fourth-order nonlinear elliptic problems. *Nonlinear Analysis* 45: 29-36, 2001.

[42] J. Zhang and S. Li. Multiple nontrivial solutions for a some foutrh-order semilinear elliptic problems. *Nonlinear Analysis* 60: 221-230, 2005.