Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática Estatística e

Computação Científica

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Operadores de composição entre álgebras uniformes

por

Cícero Nachtigall

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientadora: Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira

Coorientador: Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui

01 de agosto de 2011

Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq.

OPERADORES DE COMPOSIÇÃO ENTRE ÁLGEBRAS UNIFORMES

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente
corrigida e defendida por Cícero Nachtigall
e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 01 de agosto de 2011.

Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira
Orientadora

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui
Coorientador

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira

Prof. Dr. Humberto Daniel Carrión Villarroel

Profa. Dra. Luiza Amália de Moraes

Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Tese apresentada ao Instituto
de Matemática, Estatística e Computação
Científica, UNICAMP, como requisito
parcial para obtenção do Título de
DOUTOR em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR ANA REGINA MACHADO – CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – UNICAMP

N116o	Nachtigall, Cícero, 1980- Operadores de composição entre álgebras uniformes / Cícero Nachtigall. – Campinas, SP: [s.n.], 2011. Orientadores: Daniela Mariz Silva Vieira. Coorientador: Jorge Tulio Mujica Ascui. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Operadores de composição. 2. Álgebras uniformes. 3. Banach, Álgebra de. 4. Frechet, Álgebra de. 5. Análise funcional. I. Vieira, Daniela Mariz Silva, 1975-. II. Mujica Ascui, Jorge Tulio, 1946-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em Inglês: Composition operators between uniform algebras
Palavras-chave em Inglês:
Composition operators
Uniform algebras
Banach algebras
Frechet algebras
Functional analysis
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Daniela Mariz Silva Vieira [Orientador]
Humberto Daniel Carrión Villarroel
Luiza Amália de Moraes
Mary Lilian Lourenço
Daniel Marinho Pellegrino
Data da defesa: 01-08-2011
Programa de Pós Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 01 de agosto de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). DANIELA MARIZ SILVA VIEIRA

Prof(a). Dr(a). HUMBERTO DANIEL CARRIÓN VILLARROEL

Prof(a). Dr(a). LUIZA AMÁLIA DE MORAES

Prof(a). Dr(a). MARY LILIAN LOURENÇO

Prof(a). Dr(a). DANIEL MARINHO PELLEGRINO

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo Dom da Vida, pela sua Graça e por ter guiado meus passos ao longo de mais esta caminhada.

...à UNICAMP pela oportunidade oferecida;

...à minha orientadora, pelo seu apoio nas horas difíceis, pelo seu conhecimento matemático indispensável na elaboração desta Tese, pela sua paciência e, sobre tudo, por ter aceitado me orientar;

...ao meu co-orientador, pela sua colaboração igualmente indispensável, pelo seu conhecimento matemático e pelo seu exemplo profissional e pessoal;

...aos professores que compõe esta banca, pela disponibilidade e pelas contribuições em todo o trabalho;

...ao professor Daniel Pellegrino, pelo incentivo para trabalhar na área de Análise Funcional e pelo seu exemplo;

...à minha família, a meus pais Sidio Nachtigall e Ivone Schleich Nachtigall pelo seu apoio e amor incondicional;

...à minha irmã, Cintia Schleich Nachtigall, pelo companheirismo, incentivo e amor indispensáveis na minha vida;

...à Mércia Rodrigues Goebel, pelo seu amor e carinho;

...ao meu avô Hugo Schleich e (*in memorian*) aos meus avós Rosalina Radmann Schleich, Herbert Nachtigall e Milagros Gomes Nachtigall, por tudo que nos ensinaram;

...aos professores Marli Mülling e Gilson Mülling, pelo apoio e incentivo no alicerce da minha formação;

...ao meu orientador de mestrado Leonardo Prange Bonorino;

. . . aos professores Alexandre Baravieira, Cidara Ripoll, Jaime Ripoll, Luis Gustavo Mendes e Miguel Ferrero;

. . . aos colegas de doutorado Anderson Valença, Cintia Peixoto, Clair Nacimento, Fábio Bertoloto, Luis Miranda, Márcio Valk, entre outros, que igualmente me acompanharam e construíram mais um pouco do que sou;

. . . aos meus colegas da UFPel, em particular a Alexandre Molter, Camila Pinto, Janice Nery, Maurício Zahn (em especial), Márcia Simch e Willian Barros;

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro indispensável.

Campinas, 01 de agosto de 2011.

Resumo

Neste trabalho, provamos vários teoremas relacionados a operadores de composição entre álgebras de Banach uniformes (uB-álgebras) e álgebras de Fréchet uniformes (uF-álgebras). Definimos certos tipos de uB-álgebras $\mathcal{A}(Y)$ e $\mathcal{B}(X)$, e queremos obter propriedades do operador de composição T_g em termos da aplicação g que induz tal operador. Provamos que os ítens: (i) $T = T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ *é compacto;* (ii) $\overline{g}(X)$ *é relativamente compacto em* $(\overline{Y}, ||\cdot||)$ e (iii) $\overline{g}|_{\overline{X}} : \overline{X} \to (\overline{Y}, ||\cdot||)$ *é contínua;* são equivalentes. Como consequência provamos que se $(E, ||\cdot||_E)$ é um espaço de Banach, $U \subset E$ um aberto limitado e $T_g : \mathcal{H}^\infty(U) \to \mathcal{H}^\infty(U)$ é um operador de composição usual induzido pela aplicação $g : U \to U$, então T_g é compacto se e somente se $g(U)$ é relativamente compacto em $(U, ||\cdot||_E)$. No mesmo sentido, provamos que são equivalentes: (i) T_g *é um operador fracamente compacto;* (ii) *A aplicação* $\overline{g} : \overline{X} \to (\overline{Y}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ *é contínua;* e (iii) $\overline{g}(\overline{X})$ *é relativamente compacto em* $(\overline{Y}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$. No caso de uF-álgebras, mostramos que se $T : \mathcal{A}_b(Y) \longrightarrow \mathcal{B}_b(X)$ é um homomorfismo pontualmente limitado em X, então $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(X)$ e T é contínuo, onde $\mathcal{D}(X)$ é uma uB-álgebra contida em $\mathcal{B}_b(X)$. Se $T : \mathcal{A}_b(Y) \longrightarrow \mathcal{B}_b(X)$ é um homomorfismo unitário, então $T = T_g$ é um operador de composição usual se, e somente se, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que $g(X_n) \subset \widehat{(Y_{k(n)})}_{\mathcal{A}}$. Mostramos também que se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são uF-álgebras com espectros $M_{\mathcal{A}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ e $M_{\mathcal{B}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$, respectivamente, $T = T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é um homomorfismo unitário e considerando as afirmações: (i) T_g *é um operador compacto;* (ii) $g(L_n)$ *é relativamente compacto em* $(M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$; e (iii) $g|_{L_n} : L_n \to (M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$ *é contínua, para todo* $n \in \mathbb{N}$; mostramos que $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$.

Abstract

In this work, we prove several theorems related to composition operator between uniform Banach algebras (uB-algebras) and uniform Fréchet algebras (uF-algebras). We define certain types of uB-algebras $\mathcal{A}(Y)$ and $\mathcal{B}(X)$, and we to obtain properties of a composistion operator T_g in terms of the induced mapping g. We prove that the following conditions: (i) $T = T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ *is compact;* (ii) $\overline{g}(X)$ *is relatively compact in* $(\overline{Y}, ||\cdot||)$ e (iii) $\overline{g}|_{\overline{X}} : \overline{X} \to (\overline{Y}, ||\cdot||)$ *is continuous;* are equivalent. As a consequence, we prove that if $(E, ||\cdot||_E)$ is a Banach space, $U \subset E$ is a bounded open subset of E and $T_g : \mathcal{H}^\infty(U) \to \mathcal{H}^\infty(U)$ is a composition operator induced by the mapping $g : U \to U$, then T_g is compact if and only if $g(U)$ is relatively compact in $(U, ||\cdot||_E)$. In the same sense, we prove that are equivalent: (i) T_g *is a weakly compact operator;* (ii) *The mapping* $\overline{g} : \overline{X} \to (\overline{Y}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ *is continuous;* and (iii) $\overline{g}(\overline{X})$ *is relatively compact in* $(\overline{Y}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$. In the case of uF-algebras, we show that if $T : \mathcal{A}_b(Y) \longrightarrow \mathcal{B}_b(X)$ is a pontually bounded homomorphism in X, then $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(X)$ and T is continuous, where $\mathcal{D}(X)$ is a uB-algebra contained in $\mathcal{B}_b(X)$. If $T : \mathcal{A}_b(Y) \longrightarrow \mathcal{B}_b(X)$ is a unitary homomorphism, then $T = T_g$ is a usual composition operator if, and only if, for each $n \in \mathbb{N}$, there exists $k(n) \in \mathbb{N}$ such that $g(X_n) \subset \widehat{(Y_{k(n)})}_{\mathcal{A}}$. We also show that if $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are uF-algebras with spectra $M_{\mathcal{A}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ and $M_{\mathcal{B}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$, respectively, $T = T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ is a unitary homomorphism and if we consider the conditions (i) T_g *is a compact operator;* (ii) $g(L_n)$ *is relatively compact in* $(M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$, *for every* $n \in \mathbb{N}$; and (iii) $g|_{L_n} : L_n \to (M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$ *is continuous, for every* $n \in \mathbb{N}$; we show that $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$.

Sumário

Introdução

O objetivo principal desta tese é o de estudar propriedades de certos tipos de operadores $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, chamados de **operadores de composição**, onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são álgebras específicas, chamadas de álgebras uniformes.

Dados dois espaços vetoriais de funções complexas $\mathcal{A}(Y)$ e $\mathcal{B}(X)$, definidas nos conjuntos Y e X, respectivamente, e uma função $g : X \to Y$ tal que $f \circ g \in \mathcal{B}(X)$, sempre que $f \in \mathcal{A}(Y)$, é natural considerar o operador $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ dado pela composição com a função g, ou seja, $T_g(f) = f \circ g$, $\forall f \in \mathcal{A}(Y)$. Este operador é claramente linear e é chamado de **operador de composição**.

Abordaremos nesta tese o caso em que $\mathcal{A}(Y)$ e $\mathcal{B}(X)$ são álgebras uniformes de Banach ou Fréchet. Neste caso, o operador de composição é um homomorfismo de álgebras e estaremos interessados em obter propriedades do homomorfismo $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ em termos da aplicação $g : X \to Y$. Com isso, pretendemos obter corolários para álgebras de funções holomorfas.

Operadores de composição têm sua origem na Física, onde também são conhecidos com *operadores de Koopman*, devidos a B.O. Koopman, que em 1931 começou a pesquisa sobre tais operadores (Veja [20]). O estudo de operadores de composição estabelece uma forte conexão entre teoria de funções analíticas e a teoria de operadores.

Ao longo da história, diversos autores publicaram trabalhos relacionados a operadores de composição definidos em diversos espaços de funções, e com aplicações em diversas áreas. Sugerimos [5] e [26] como referências para o tema.

Nesta tese, estudamos este assunto dentro da área de Holomorfia. Neste contexto, diversos resultados recentes sobre operadores de composição entre álgebras de funções analíticas podem ser encontrados nos trabalhos de P. Galindo [1, 7, 8, 12, 9, 11], R. Aron [1], M. Lindströn [1, 7, 8, 9, 11], R. Ryan [11], F. Behrouzi [2, 3], T. W. Gamelin [7, 8], H. Mahyar [3], L. Lourenço [12], L. Moraes [12], D. Carando [4]. Tais trabalhos dedicaram-se a estudar a propriedades como compacidade e compacidade fraca do operador de composição T_g em termos da aplicação g. Em particular, em [1], os autores provam que um operador de composição $T_g : \mathcal{H}^\infty(B_E) \to \mathcal{H}^\infty(B_E)$ é compacto se e somente se T_g é fracamente compacto e $g(B_E)$ é relativamente compacto em E, onde B_E é a bola unitária do espaço de Banach E. Em [12], os autores mostram que todo operador de composição pontualmente limitado $T_g : \mathcal{A} \to \mathcal{H}_b(U)$ possui imagem na álgebra de Banach $\mathcal{H}^\infty(U)$. Estes dois resultados, entre outros, são generalizados nesta tese.

A seguir, descrevemos como é feita a organização deste trabalho:

No capítulo 1, é feita uma revisão sobre álgebras de Banach e álgebras de Fréchet. Em particular, introduzimos e exploramos propriedades básicas dos Operadores de Composição entre estas álgebras.

No capítulo 2 trabalhamos com operadores de composição entre álgebras uniformes.

Na seção 2.1 definimos álgebras de Banach em conjuntos arbitrários e nos dedicamos a estabelecer condições necessárias e suficientes para que um operador de composição $T : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ seja compacto ou fracamente compacto, em termos da aplicação $g : X \to Y$ que induz este operador. Como caso particular, provamos que se $T_g : \mathcal{H}^\infty(V) \to \mathcal{H}^\infty(U)$ é um operador de composição usual induzido pela aplicação $g : U \to V$, onde U e V são abertos e V é limitado, então T_g é compacto se e somente se $g(U)$ é relativamente compacto em $(V, ||\cdot||_E)$.

Na seção 2.2 seguimos a mesma ideia da seção 2.1 para definirmos álgebras de Fréchet uniformes em conjuntos arbitrários. Um dos nossos objetivos é explorar as principais propriedades destas álgebras e estabelecer condições para que um operador de composição $T_g : \mathcal{A}_b(Y) \to \mathcal{B}_b(X)$ seja um operador de composição usual. Em particular, provamos que se $\mathcal{A} = \mathcal{A}_b(Y)$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_b(X)$ são uF-álgebras e $T : \mathcal{A}_b(Y) \longrightarrow \mathcal{B}_b(X)$ é um homomorfismo unitário, então T_g é um operador de composição usual se, e somente se, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que $g(X_n) \subset \widehat{(Y_{k(n)})}_{\mathcal{A}}$.

Também na Seção 2.2, estudamos homomorfismos unitários compactos e pontualmente limitados entre uF-álgebras. Mostramos que todo homomorfismo unitário (fracamente) compacto é pontualmente limitado e estabelecemos condições necessárias e suficientes para que um homomorfismo unitário seja pontualmente limitado. Particularmente, mostramos que se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são uF-álgebras e $T_g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um operador de composição, então T_g é pontualmente limitado se e somente se $g(M_{\mathcal{B}})$ é relativamente compacto em $M_{\mathcal{A}}$. Se $T_g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é pontualmente limitado, mostramos que $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}$, onde $\mathcal{D}$ é uma uB-álgebra que é sub-álgebra de $\mathcal{B}$ e T é contínuo. Mostramos também que se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ têm espectros $M_{\mathcal{A}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ e $M_{\mathcal{B}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$, respectivamente, e $T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é um operador de composição compacto então $g(L_n)$ é relativamente compacto em $(M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, provamos que esta última afirmação é equivalente a $g|_{L_n} : L_n \to (M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$ é contínua, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 1

Álgebras Uniformes

O objetivo deste capítulo é introduzir definições e resultados que serão utilizados no decorrer desta Tese. Por conter vários resultados básicos, a leitura deste capítulo é dispensável no caso de o leitor ter familiaridade com o tema.

Se E é um espaço normado complexo, denotaremos por E' o dual topológico de E . Usaremos as notações $\sigma(E', E'')$ e $\sigma(E', E)$ para denotar as topologias fraca e fraca-estrela em E', respectivamente.

Se X é um espaço topológico, denotemos por $\mathcal{C}(X)$ a álgebra das funções complexas contínuas em X, munida com a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos compactos de X e das operações pontuais.

1.1 Resultados Básicos

Definição 1.1. Um espaço Hausdorff X é chamado de *k-espaço* se $M \subset X$ é fechado sempre que $M \cap K$ é fechado em K, para todo subconjunto compacto $K \subset X$.

Definição 1.2. Um espaço Hausdorff X é chamado de *hemicompacto* se existe uma sequência crescente de compactos $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, isto é, $K_n \subset K_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, de X tal que para cada subconjunto compacto $K \subset X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_n$. Neste caso dizemos que tal sequência $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma *sequência fundamental de compactos em X*.

Definição 1.3. Um espaço topológico X é chamado de *completamente regular* se para cada $x \in X$ e cada vizinhança U de x existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ e $f(y) = 0$ em $X - U$.

Definição 1.4. Um espaço topológico X é *normal* se para cada par de fechados disjuntos M_1 e M_2, existem abertos disjuntos O_1 e O_2 tais que $M_1 \subset O_1$ e $M_2 \subset O_2$.

O Lema 1.5 abaixo é conhecido como **Lema de Uryshon**:

Lema 1.5. ([25], pg. 207) Seja X um espaço normal. Dados dois fechados disjuntos N_1 e N_2 de X e um intervalo fechado $[a, b]$ da reta , existe uma função contínua $f : X \to [a, b]$ tal que $f(x) = a$, para todo $x \in N_1$ e $f(y) = b$ para todo $y \in N_2$.

Em particular, todo espaço normal é completamente regular.

Definição 1.6. Seja K um espaço Hausdorff compacto. Dizemos que um subconjunto S de $\mathcal{C}(K)$ é *equicontínuo* se para todo $\epsilon > 0$ e todo $x \in K$ existe uma vizinhança $N = N(x)$ tal que

$$\sup_{f \in S} \sup_{t \in N} |f(x) - f(t)| < \epsilon.$$

O Teorema 1.7 abaixo é conhecido como **Teorema de Arzelá-Ascoli**.

Teorema 1.7. ([25], pg. 278, Teorema 45.4) Se K é um espaço Hausdorff compacto, então um conjunto em $\mathcal{C}(K)$ é relativamente compacto se e somente se é limitado e equicontínuo.

Definição 1.8. Uma rede (f_α) de funções complexas definidas em um conjunto K é chamada de *quase-uniformemente convergente* em K se existe uma função f_0 em K tal que $f_\alpha(x) \to f_0(x)$ para cada $x \in K$ e tal que para cada $\epsilon > 0$ e α_0 dados, existe um número finito de índices $\alpha_1, ..., \alpha_n \geq \alpha_0$ tais que para cada $x \in K$, temos

$$\min_{1 \leq i \leq n} |f_{\alpha_i}(x) - f_0(x)| \leq \epsilon.$$

Teorema 1.9. ([6], pg. 268, Teorema 11) Sejam K um espaço Hausdorff compacto e (f_α) uma rede em $\mathcal{C}(K)$ que converge pontualmente a uma função f_0. Então f_0 é contínua em K se e somente se (f_α) converge quase-uniformemente em K.

Definição 1.10. Uma família $F \subset \mathcal{C}(K)$ é dita *quase-equicontínua* em K se $y_\alpha \to y$ implica que a convergência $f(y_\alpha) \to f(y)$ é quase uniforme em F. Isto é, para cada $\epsilon > 0$ e α_0 dados existe um conjunto finito $\alpha_1, ..., \alpha_n \geq \alpha_0$ tais que para cada $f \in F$, temos

$$\min_{1 \leq i \leq n} |f(y_{\alpha_i}) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Teorema 1.11. ([6], pg. 269, Teorema 14) Sejam K um espaço Hausdorff compacto e $F \subset \mathcal{C}(K)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) F é limitado e quase-equicontínuo em K;

(ii) O fecho de F na topologia fraca de $\mathcal{C}(K)$ é fracamente compacto.

O Teorema 1.12 abaixo é chamado de **Teorema de Ascoli**.

Teorema 1.12. ([25], pg. 290, Teorema 47.1) Seja K um compacto Hausdorff e $M \subset \mathcal{C}(K)$. A fim de que M seja relativamente compacto é necessário e suficiente que M seja equicontínuo e que o conjunto $M(x)$ seja relativamente compacto, para cada $x \in K$.

Definição 1.13. Sejam E, F espaços normados e $T : E \to F$ um operador linear.

(i) Dizemos que T é *compacto* se T leva conjuntos limitados de E em conjuntos relativamente compactos de F.

(ii) Dizemos que T é *fracamente compacto* se T leva conjuntos limitados de E em conjuntos fracamente relativamente compactos de F.

Lema 1.14. ([6], pg. 486, Teorema 6) Sejam E e F espaços de Banach. Um operador $T : E \to F$ é compacto se e somente se o operador adjunto $T' : F' \to E'$ leva redes limitadas que convergem em $(F', \sigma(F', F))$ em redes que convergem em $(E', || \cdot ||)$.

Lema 1.15. ([6], pg. 484, Lema 7) Um operador $T : E \to F$ é fracamente compacto se e somente se o seu adjunto $T' : (F', \sigma(F', F)) \to (F', \sigma(F', F''))$ é contínuo.

Definição 1.16. Um espaço vetorial topológico E é um *espaço localmente convexo* (ELC) se existe uma base de vizinhanças de zero formada por vizinhanças convexas.

Definição 1.17. Seja E um espaço vetorial topológico. Um subconjunto $L \subset E$ é dito *limitado* se para cada vizinhança de zero $U \subset E$, existe $\delta > 0$ tal que $\lambda L \subset U$, para todo λ tal que $|\lambda| \leq \delta$.

Agora vamos definir algumas topologias no dual topológico de um espaço localmente convexo (ELC) Hausdorff:

Notação 1.18. Sejam E um ELC Hausdorff e E' o seu dual topológico.

(i) Denotemos por $\beta(E', E)$ a topologia forte em E', ou seja, a topologia da convergência uniforme sobre os subconjuntos limitados de E (veja [18], pg. 220);

(ii) Denotemos por τ_0 a topologia compacto-aberta em E', ou seja, a topologia da convergência uniforme sobre todos os subconjuntos compactos de E (veja [18], pg. 236);

(iii) Denotemos por τ a topologia em E' da convergência uniforme sobre os subconjuntos absolutamente convexos e compactos de E e denotamos $(E', \tau) = E'_c$ (veja [18], pg. 235);

(iv) Denotemos por $\sigma(E', E)$ a topologia fraca-estrela em E'.

Temos a seguinte relação entre estas topologias:

$$\sigma(E', E) \leq \tau \leq \tau_0 \leq \beta(E', E). \tag{1.1}$$

Definição 1.19. Sejam E e F espaços localmente convexos Hausdorff, e seja $T : E \longrightarrow F$ um operador linear.

(i) Dizemos que T é um *operador compacto* se existe uma vizinhança de zero $V \subset E$ tal que $T(V)$ é um subconjunto relativamente compacto de F.

(ii) Dizemos que T é um *operador fracamente compacto* se existe uma vizinhança de zero $V \subset E$ tal que $T(V)$ é um subconjunto fracamente relativamente compacto de F.

Definição 1.20. Uma *álgebra topológica* $\mathcal{A}$ é uma álgebra que é um espaço vetorial topológico, tal que a multiplicação

$$\begin{array}{rccc} \cdot\ : & \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & (f, h) & \longmapsto & f \cdot h \end{array}$$

é contínua.

Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *álgebra com unidade* se $\mathcal{A}$ tem uma unidade $e_{\mathcal{A}} \neq 0$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é *comutativa* se $f \cdot h = h \cdot f$ para todo $f, h \in \mathcal{A}$.

Nesta Tese, trabalharemos sempre com álgebras complexas comutativas $\mathcal{A}$ com unidade $e_{\mathcal{A}} \neq 0$.

Definição 1.21. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra.

(i) Uma semi-norma $p : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ é chamada de *sub-multiplicativa* se

$$p(f \cdot h) \leq p(f) \cdot p(h),\ \forall f, h \in \mathcal{A}.$$

(ii) Um subconjunto $U \subset \mathcal{A}$ é chamado de *multiplicativo* se $U^2 = \{x \cdot y;\ x, y \in U\} \subset U$.

A próxima proposição estabelece uma relação entre as semi-normas multiplicativas e os conjuntos multiplicativos:

Proposição 1.22. ([15], pg. 61) Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e p uma semi-norma em $\mathcal{A}$.

(i) O conjunto $V_p = \{f \in \mathcal{A}; p(f) \leq 1\}$ é um conjunto absorvente, absolutamente convexo e multiplicativo.

(ii) Se U é um conjunto absorvente, absolutamente convexo e multiplicativo, então

$$p_U(x) = \inf\{\rho > 0; x \in \rho \cdot U\},$$

define uma semi-norma multiplicativa em $\mathcal{A}$.

Uma álgebra topológica é chamada de *localmente multiplicativamente convexa* (álgebra LMC), se existe uma base de vizinhanças de zero constituída de conjuntos convexos e multiplicativos.

Definição 1.23. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras. Dizemos que uma aplicação $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um *homomorfismo* se para quaisquer $f, h \in \mathcal{A}$, $\mu \in \mathbb{C}$, temos:

a) $T(f + \mu h) = T(f) + \mu T(h)$;

b) $T(f \cdot h) = T(f) \cdot T(h)$.

Se a aplicação T é bijetiva, dizemos que ela é um *isomorfismo* e que as álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são *isomorfas*.

1.2 Álgebras de Banach Uniformes

Um dos objetivos desta seção é o de definir o espectro de uma B-álgebra $\mathcal{A}$, denotado por $M_{\mathcal{A}}$, definir uma topologia conveniente em $M_{\mathcal{A}}$, chamada de topologia de Gelfand, e mostrar que $M_{\mathcal{A}}$, munido desta topologia, é um conjunto compacto. Definiremos um isomorfismo isométrico que nos permitirá identificar a uB-álgebra $\mathcal{A}$ a uma sub-álgebra fechada de $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$, o espaço das funções complexas contínuas definidas no compacto $M_{\mathcal{A}}$, munido da topologia de Gelfand. Maiores detalhes sobre este tema podem ser encontrados em [14], [23] e [28].

Também nesta seção, apresentamos diversos resultados sobre homomorfismos unitários entre uB-álgebras que são conhecidos na literatura, porém quase sempre observados e não demonstrados. Mais precisamente, estudamos certas propriedades do operador T_g em termos da aplicação g e estabelecemos uma correspondência bijetiva entre o conjunto dos homomorfismos unitários (contínuos) $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e o conjunto das aplicações (contínuas) $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ tais que $\hat{f} \circ g \in \widehat{\mathcal{B}}$ sempre que $f \in \mathcal{A}$.

Definição 1.24. Um conjunto $\mathcal{A}$ é chamado de *álgebra de Banach complexa (B-álgebra)* se $\mathcal{A}$ é uma álgebra e um espaço de Banach complexo tal que:

a) $\|f \cdot h\| \leq \|f\| \cdot \|h\|, \ \forall f, h \in \mathcal{A}$;

b) $\|e_{\mathcal{A}}\| = 1$.

Exemplo 1.25. Sejam K um espaço Hausdorff compacto e $\mathcal{C}(K)$ o conjunto de todas as funções complexas contínuas em K. Munindo $\mathcal{C}(K)$ com a norma do supremo e das operações usuais temos uma B-álgebra.

Da mesma forma que definimos os ideais de um anel, temos:

Definição 1.26. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa. Um subconjunto I de $\mathcal{A}$ é dito um *ideal* de $\mathcal{A}$ se I é um subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ e $h \cdot f \in \mathcal{A}$ para todo $h \in I$ e $f \in \mathcal{A}$. Um ideal $I \neq \mathcal{A}$ é chamado de *ideal próprio* de $\mathcal{A}$. Um ideal próprio que não está contido em nenhum outro ideal próprio de $\mathcal{A}$ é chamado de *ideal maximal* de $\mathcal{A}$.

Definição 1.27. Seja $\mathcal{A}$ uma B-álgebra. Chamaremos de *espectro de* $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os ideais maximais de $\mathcal{A}$, e o denotaremos por $M_{\mathcal{A}}$.

O Teorema 1.28 abaixo é conhecido como **Teorema de Gelfand-Mazur**.

Teorema 1.28. ([14], pg. 2, Teorema 1.4) Seja $\mathcal{A}$ uma B-álgebra. Se $\mathcal{A}$ é um corpo, então $\mathcal{A}$ é isometricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.

Proposição 1.29. ([23], pg. 215, Proposição 30.2) Seja $\mathcal{A}$ uma B-álgebra. Então:

(i) O fecho de um ideal próprio de $\mathcal{A}$ é um ideal próprio de $\mathcal{A}$;

(ii) Cada ideal maximal de $\mathcal{A}$ é fechado.

Proposição 1.30. ([23], pg. 215, Teorema 30.3) Seja $\mathcal{A}$ uma B-álgebra. Então:

(i) O núcleo de cada homomorfismo complexo não nulo de $\mathcal{A}$ é um ideal maximal de $\mathcal{A}$;

(ii) Cada ideal maximal de $\mathcal{A}$ é o núcleo de um único homomorfismo complexo não nulo de $\mathcal{A}$.

Sendo assim, quando $\mathcal{A}$ é uma B-álgebra, existe uma bijeção entre os ideais maximais e os homomorfismos complexos não nulos de $\mathcal{A}$ e podemos fazer a seguinte identificação:

$$M_{\mathcal{A}} = \{\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C};\ \varphi \text{ é um homomorfismo não nulo}\} \subset \mathcal{A}'.$$

Proposição 1.31. ([15], pg. 14, Teorema 1.2.8) Seja $\mathcal{A}$ uma B-álgebra. Então o espectro $M_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ é não vazio.

Teorema 1.32. ([28], pg. 37, Corolário 8.6) Seja $\mathcal{A}$ uma B-álgebra. Então valem as seguintes afirmações:

(*i*) $M_{\mathcal{A}}$ é um subconjunto da bola unitária fechada de $\mathcal{A}'$;

(*ii*) $M_{\mathcal{A}}$ é $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$-compacto.

Para cada $f \in \mathcal{A}$ definimos $\hat{f} : M_{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ da seguinte maneira:

$$\hat{f}(\varphi) = \varphi(f), \ \forall \varphi \in M_{\mathcal{A}}.$$

Dizemos que $\hat{f}$ é a *transformada de Gelfand* de f. O conjunto $\widehat{\mathcal{A}} = \{\hat{f} : f \in \mathcal{A}\}$ é denominado *representação de Gelfand de* $\mathcal{A}$ e a aplicação $\Gamma : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ dada por $\Gamma(f) = \hat{f}$ é chamada de *transformação de Gelfand*.

Vamos considerar em $M_{\mathcal{A}}$ a menor topologia que torna cada transformada de Gelfand $\hat{f}$ contínua. Tal topologia é chamada de *topologia de Gelfand* e, de agora em diante, a menos que explicitemos o contrário, consideramos $M_{\mathcal{A}}$ munido com a topologia de Gelfand.

Notemos que tal topologia coincide com a topologia $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ induzida em $M_{\mathcal{A}}$ e por isso, em alguns casos, utilizaremos a notação $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ para denotar a topologia de Gelfand em $M_{\mathcal{A}}$, apesar de $M_{\mathcal{A}}$ não ser um subespaço vetorial de $\mathcal{A}'$.

Observação 1.33. De maneira natural, podemos definir em $\widehat{\mathcal{A}}$ as seguintes operações pontuais:

(*i*) $(\hat{f} + \hat{g})(\varphi) := \hat{f}(\varphi) + \hat{g}(\varphi) = \varphi(f) + \varphi(g) = \varphi(f + g) = (\widehat{f + g})(\varphi), \ \forall \varphi \in M_{\mathcal{A}}$;

(*ii*) $(\alpha \hat{f})(\varphi) := \alpha \hat{f}(\varphi) = \varphi(\alpha f) = (\widehat{\alpha f})(\varphi), \ \forall \varphi \in M_{\mathcal{A}}, \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$;

(*iii*) $(\hat{f} \cdot \hat{g})(\varphi) := \hat{f}(\varphi) \cdot \hat{g}(\varphi) = \varphi(f) \cdot \varphi(g) = \varphi(f \cdot g) = (\widehat{f \cdot g})(\varphi), \ \forall \varphi \in M_{\mathcal{A}}$.

Assim, temos que $\widehat{\mathcal{A}}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$. Considerando em $M_{\mathcal{A}}$ a topologia de Gelfand, temos que cada $\hat{f} : M_{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ é contínua e portanto $\widehat{\mathcal{A}}$ é uma sub-álgebra de $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$, onde

$$\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}}) = \{h : M_{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}; \ h \text{ é contínua}\},$$

considerando $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$ munido da topologia usual. Em particular, temos

$$\|\hat{f}\| = \sup_{\varphi \in M_{\mathcal{A}}} |\hat{f}(\varphi)|, \ \forall f \in \mathcal{A}.$$

Proposição 1.34. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach. A transformação de Gelfand é um homomorfismo contínuo de $\mathcal{A}$ sobre $\widehat{\mathcal{A}}$.

Demonstração: Da Observação 1.33 segue que $\widehat{\mathcal{A}}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ e que a aplicação de Gelfand $\Gamma : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ é um homomorfismo de álgebras. Além disso, para cada $f \in \mathcal{A}$ temos

$$\|\Gamma(f)\| = \|\hat{f}\| = \sup_{\varphi \in M_{\mathcal{A}}} |\hat{f}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in M_{\mathcal{A}}} |\varphi(f)| \leq \sup_{\varphi \in M_{\mathcal{A}}} \|\varphi\|.\|f\| = \|f\|,$$

ou seja,

$$\|\Gamma(f)\| = \|\hat{f}\| \leq \|f\|, \ \forall f \in \mathcal{A},$$

o que prova que Γ é contínua. □

Teorema 1.35. ([15], pg. 15) A transformação de Gelfand $f \to \hat{f}$ é uma isometria se e somente se $\|f^2\| = \|f\|^2$, para toda $f \in \mathcal{A}$. Neste caso, $\widehat{\mathcal{A}}$ é uma sub-álgebra fechada de $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$.

Como consequência imediata do Teorema 1.35, temos o Corolário 1.36 abaixo:

Corolário 1.36. Seja $\mathcal{A}$ uma B-álgebra tal que $||f||^2 = ||f^2||$, $\forall f \in \mathcal{A}$. Se $\varphi(f) = \varphi(g)$, $\forall \varphi \in M_{\mathcal{A}}$, então $f = g$.

O Teorema 1.37 abaixo é conhecido como **Teorema do Idempotente de Shilov**, e será utilizado diversas vezes nesta Tese.

Teorema 1.37. ([14], pg. 88, Corolário 6.5) Seja $\mathcal{A}$ uma B-álgebra e seja N um subconjunto que é aberto e fechado de $M_{\mathcal{A}}$. Então existe um único elemento $f \in \mathcal{A}$ que satisfaz $f^2 = f$ e $\hat{f} = \chi_{_N}$, onde $\chi_{_N}$ é a função característica de N.

Definição 1.38. Uma *álgebra de Banach uniforme (uB-álgebra)* é uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ tal que $\|f^2\| = \|f\|^2$, para toda $f \in \mathcal{A}$.

Observação 1.39. Segue do Teorema 1.35 e da Definição 1.38 que para uma uB-álgebra $\mathcal{A}$, a identificação $f \in \mathcal{A} \longleftrightarrow \hat{f} \in \widehat{\mathcal{A}}$, dada pela transformação de Gelfand, é um isomorfismo isométrico. Assim, $\mathcal{A}$ pode ser identificada a sub-álgebra fechada $\widehat{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$.

Em particular, em uma uB-álgebra $\mathcal{A}$, podemos escrever

$$||f|| = ||\hat{f}|| = \sup_{\varphi \in M_{\mathcal{A}}} |\hat{f}(\varphi)|, \forall f \in \mathcal{A},$$

e $\widehat{\mathcal{A}}$ é uma uB-álgebra.

Daqui em diante estaremos sempre usando a identificação $f \leftrightarrow \hat{f}$ e em muitos casos não faremos distinção entre f e $\hat{f}$.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de uB-álgebras.

Exemplo 1.40. A B-álgebra $\mathcal{C}(K)$ apresentada no Exemplo 1.25 é uma uB-álgebra.

Exemplo 1.41. ([21], pg. 4) Seja $\mathbb{D}$ o disco unitário aberto em $\mathbb{C}$ e seja $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ o conjunto das funções analíticas e limitadas em $\mathbb{D}$. Munindo $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ com a norma do supremo e das operações usuais, temos uma uB-álgebra.

Exemplo 1.42. ([21], pg. 4) Sejam $\overline{\mathbb{D}}$ (resp. $\mathbb{D}$) o disco unitário fechado (resp. aberto) em $\mathbb{C}$. Denotamos por $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ o conjunto de todas as funções complexas, contínuas em $\overline{\mathbb{D}}$ e analíticas no disco aberto $\mathbb{D}$. Munindo $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ com a norma do supremo e das operações usuais, temos uma uB-álgebra, denominada *álgebra de disco*.

Exemplo 1.43. ([23], pg. 211) Seja K um subconjunto compacto de um espaço de Banach complexo E e consideremos a uB-álgebra $\mathcal{C}(K)$ com a norma do supremo e das operações usuais. Se $\mathcal{P}(E)$ denota a álgebra de todos os polinômios contínuos $P : E \to \mathbb{C}$ (Veja [23], pg. 14) e $\mathcal{P}(K)$ denota o fecho de $\mathcal{P}(E)$ em $\mathcal{C}(K)$, então $\mathcal{P}(K)$ é uma uB-álgebra que é uma sub-álgebra fechada de $\mathcal{C}(K)$.

Exemplo 1.44. Sejam E um espaço de Banach e F uma uB-álgebra. Se U é um aberto qualquer em E, os espaços

$$\mathcal{H}^\infty(U; F) := \{f : U \to F \mid f \text{ é analítica e limitada}\}$$

e

$$\mathcal{H}^\infty_{uc}(U; F) := \{f \in \mathcal{H}^\infty(U; F) \mid f \text{ é uniformemente contínua em } \overline{U}\},$$

munidas das operações pontuais são uB-álgebras, com respeito a norma

$$\|f\| = \sup_{x\in U}\|f(x)\|, \ \forall f \in \mathcal{H}^\infty(U;F).$$

Quando $F=\mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{H}^\infty(U)$ em vez de $\mathcal{H}^\infty(U;\mathbb{C})$ e $\mathcal{H}^\infty_{uc}(U)$ em vez de $\mathcal{H}^\infty_{uc}(U;F)$.

Exemplo 1.45. ([21], pg. 5) Seja E um espaço de Banach e seja F uma uB-álgebra. Seja $\mathcal{A}_{wu}(nB_E,F)$ o espaço de todas as aplicações $f : n\overline{B}_E \to F$ que são holomorfas em nB_E e uniformemente fracamente contínuas em $n\overline{B}_E$, munido com a topologia gerada pela norma

$$||f||_n = \sup_{x\in nB_E} ||f(x)||, \forall f \in \mathcal{A}_{wu}(nB_E,F).$$

É fácil de ver que $\mathcal{A}_{wu}(nB_E,F)$ é uma uB-álgebra para todo $n\in\mathbb{N}$. No caso particular em que $F=\mathbb{C}$, escrevemos simplesmente $\mathcal{A}_{wu}(nB_E)$, ao invés de $\mathcal{A}_{wu}(nB_E,\mathbb{C})$.

Os Exemplos 1.46 e 1.47 abaixo são exemplos de álgebras de Banach que não são uB-álgebras:

Exemplo 1.46. ([15], pg. 4) Denotemos por $\mathcal{C}^k([0,1])$ a álgebra de todas as funções complexas que tem derivada contínua até a ordem k, definidas no intervalo $[0,1]$ e com as operações usuais. Então $\mathcal{C}^k([0,1])$ é uma álgebra de Banach com respeito a norma

$$p_{k+1}(f) = 2^k \sup\{|f^i(t)| : t\in[0,1], i = 1,2,3,...,k\},$$

onde f^i denota a $k-$ésima derivada de f, mas não é uma uB-álgebra.

Exemplo 1.47. ([14], pg. 6) Seja $\alpha\in(0,1]$. A álgebra de todas as funções $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ tais que

$$\|f\|_\alpha = \sup_{0\le t\le 1}|f(t)| + \sup_{0\le s<t\le 1}\left\{\frac{|f(s)-f(t)|}{|s-t|^\alpha}\right\} < \infty$$

é denotado por $\mathrm{Lip}_\alpha[0,1]$. Estas álgebras são chamadas de *álgebras de Lipschitz*. As álgebras de Lipschitz são álgebras de Banach com respeito a norma $\|f\|_\alpha$, mas não são uB-álgebras.

Nos próximos resultados, a menos que dito explicitamente o contrário, estaremos trabalhando com uB-álgebras.

A Proposição 1.48 abaixo nos dá uma caracterização importante utilizada por muitos autores para definir uB-álgebras.

Proposição 1.48. A álgebra $\mathcal{A}$ é uma uB-álgebra se e somente se $\mathcal{A}$ é isometricamente isomorfa a um subespaço fechado de $\mathcal{C}(K)$, para algum compacto Hausdorff K, que separa os pontos de K e contém as constantes.

Demonstração: Suponhamos primeiramente que $\mathcal{A}$ é uma uB-álgebra. Assim, sabemos da Observação 1.39 que $\mathcal{A}$ é isometricamente isomorfa ao subespaço fechado $\widehat{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$ e portanto podemos tomar $K = M_{\mathcal{A}}$. Além disso, se $\varphi, \psi \in M_{\mathcal{A}}$ são tais que $\hat{f}(\varphi) = \hat{f}(\psi)$, para todo $f \in \mathcal{A}$, temos $\varphi(f) = \psi(f)$, $\forall f \in \mathcal{A}$ e portanto $\varphi = \psi$, ou seja, $\widehat{\mathcal{A}}$ separa os pontos de $M_{\mathcal{A}}$. Agora notemos que dado $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que $\lambda e_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$, onde $e_{\mathcal{A}}$ denota a identidade de $\mathcal{A}$. Desta forma, $(\widehat{\lambda e_{\mathcal{A}}})(\varphi) = \varphi(\lambda e_{\mathcal{A}}) = \lambda\varphi(e_{\mathcal{A}}) = \lambda$ e portanto $\widehat{\mathcal{A}}$ contém as constantes.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{A}$ é isometricamente isomorfa a um subespaço fechado N de $\mathcal{C}(K)$, para algum compacto Hausdorff K, que separa os pontos de K e contém as constantes. Denotemos este isomorfismo isométrico por $\Psi : \mathcal{A} \to N \subset \mathcal{C}(K)$. Assim, $\Psi(\mathcal{A}) = N$ e

$$||f|| = ||\Psi(f)|| = \sup_{x \in K} |\Psi(f)(x)|$$

para cada $f \in \mathcal{A}$. Desta forma,

$$||f^2|| = ||\Psi(f^2)|| = ||\Psi(f \cdot f)|| = ||\Psi(f) \cdot \Psi(f)|| = ||\Psi(f)|| \cdot ||\Psi(f)|| = ||\Psi(f)||^2 = ||f||^2$$

e portanto, da Definição 1.38 segue que $\mathcal{A}$ é uma uB-álgebra. □

Definição 1.49. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras e $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um operador linear. Dizemos que T é um *homomorfismo unitário* se T é um homomorfismo de álgebras e $T(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$, onde $e_{\mathcal{A}}$ e $e_{\mathcal{B}}$ representam, respectivamente, as unidades de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Definição 1.50. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uB-álgebras. Um *Operador de Composição* entre as uB-álgebras $\widehat{\mathcal{A}}$ e $\widehat{\mathcal{B}}$ é um operador da forma $T_g(\hat{f}) = \hat{f} \circ g$, onde $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ é tal que $\hat{f} \circ g \in \widehat{\mathcal{B}}$, sempre que $f \in \mathcal{A}$. Dizemos que T_g *é induzido pela aplicação* g.

Lema 1.51. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ B-álgebras e $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ tal que $\hat{f} \circ g \in \widehat{\mathcal{B}}$, sempre que $f \in \mathcal{A}$. Então g é contínua.

Demonstração: Sejam (φ_α) uma rede em $M_{\mathcal{B}}$ e $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$ tais que $\varphi_\alpha \to \varphi$. Assim, para cada $h \in \mathcal{B}$ temos $\varphi_\alpha(h) \to \varphi(h)$ e portanto $\hat{h}(\varphi_\alpha) \to \hat{h}(\varphi)$. Seja agora $f \in \mathcal{A}$ e notemos que por hipótese $\hat{f} \circ g \in \widehat{\mathcal{B}}$ e portanto $(\hat{f} \circ g)(\varphi_\alpha) \to (\hat{f} \circ g)(\varphi)$, ou seja, $\hat{f}(g(\varphi_\alpha)) \to (\hat{f}(g(\varphi)))$, ou ainda, $g(\varphi_\alpha)(f) \to g(\varphi)(f)$. Assim, $g(\varphi_\alpha) \to g(\varphi)$ e portanto $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ é contínua na topologia de Gelfand. □

Lema 1.52. ([13]) Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ B-álgebras e $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ um operador de composição. Então T_g é um homomorfismo unitário contínuo.

Demonstração: Dada uma aplicação $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ tal que $\hat{f} \circ g \in \widehat{\mathcal{B}}$ sempre que $f \in \mathcal{A}$, vamos mostrar que $T_g(\hat{f}) = \hat{f} \circ g$ é um homomorfismo unitário de $\widehat{\mathcal{A}}$ em $\widehat{\mathcal{B}}$. Para isso, notemos que dados $\hat{f}, \hat{h} \in \widehat{\mathcal{A}}, \varphi \in M_{\mathcal{B}}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ temos:

- $T_g(\hat{f} + \alpha\hat{h})(\varphi) = T_g(\widehat{f + \alpha h})(\varphi) = [(\widehat{f + \alpha h}) \circ g](\varphi) = (\widehat{f + \alpha h})(g(\varphi)) = g(\varphi)(f + \alpha h) =$ $g(\varphi)(f) + \alpha g(\varphi)(h) = \hat{f}(g(\varphi)) + \hat{h}(\alpha g(\varphi)) = (\hat{f} \circ g)(\varphi) + \alpha(\hat{h} \circ g)(\varphi) =$ $T_g(\hat{f})(\varphi) + \alpha T_g(\hat{h})(\varphi) = (T_g(\hat{f}) + \alpha T_g(\hat{h}))(\varphi)$;

- $T_g(\hat{f} \cdot \hat{h})(\varphi) = T_g(\widehat{f \cdot h})(\varphi) = [(\widehat{f \cdot h}) \circ g](\varphi) = (\widehat{f \cdot h})(g(\varphi)) = g(\varphi)(f \cdot h) =$ $g(\varphi)(f) \cdot g(\varphi)(h) = \hat{f}(g(\varphi)) \cdot \hat{h}(g(\varphi)) = T_g(\hat{f})(\varphi) \cdot T_g(\widehat{h})(\varphi) = [T_g(\hat{f})T_g(\hat{h})](\varphi)$;

- $T_g(\hat{e}_{\mathcal{A}})(\varphi) = (\hat{e}_{\mathcal{A}} \circ g)(\varphi) = \hat{e}_{\mathcal{A}}(g(\varphi)) = g(\varphi)(e_{\mathcal{A}}) = 1 = \varphi(e_{\mathcal{B}}) = \hat{e}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Sendo assim, $T_g(\hat{f} + \alpha\hat{h}) = T_g(\hat{f}) + \alpha T_g(\hat{h})$, $T_g(\hat{f} \cdot \hat{h}) = T_g(\hat{f}) \cdot T_g(\hat{h})$, $\forall f, h \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ e $T_g(\hat{e}_{\mathcal{A}}) = \hat{e}_{\mathcal{B}}$, ou seja, T_g é um homomorfismo unitário. Mostremos agora que T_g é contínuo. Para isso, sejam $(\hat{f}_n) \subset \widehat{\mathcal{A}}$ e $\hat{f} \in \widehat{\mathcal{A}}$ tais que $\hat{f}_n \to \hat{f}$ em $\widehat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$. Então

$$||\hat{f}_n - \hat{f}|| = \sup_{\varphi \in M_{\mathcal{A}}} |\hat{f}_n(\varphi) - \hat{f}(\varphi)| \to 0 \ (n \to \infty).$$

Assim, lembrando que $g(M_{\mathcal{B}}) \subset M_{\mathcal{A}}$, temos

$$||T_g(\hat{f}_n) - T_g(\hat{f})|| = \sup_{\psi \in M_{\mathcal{B}}} |T_g(\hat{f}_n)(\psi) - T_g(\hat{f})(\psi)| = \sup_{\psi \in M_{\mathcal{B}}} |(\hat{f}_n \circ g)(\psi) - (\hat{f} \circ g)(\psi)|$$

$$\sup_{\psi \in M_{\mathcal{B}}} |\hat{f}_n(g(\psi)) - \hat{f}(g(\psi))| = \sup_{\varphi \in g(M_{\mathcal{B}})} |\hat{f}_n(\varphi) - \hat{f}(\varphi)| \leq \sup_{\varphi \in M_{\mathcal{A}}} |\hat{f}_n(\varphi) - \hat{f}(\varphi)| \to 0 \ (n \to \infty)$$

e com isso mostramos que $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ é contínuo. □

Observação 1.53. Sejam agora $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uB-álgebras e $\Gamma_1 : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ e $\Gamma_2 : \mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{B}}$ as respectivas transformações de Gelfand. Facilmente se mostra que Γ_1 e Γ_2 são homomorfismos unitários e segue do Teorema 1.35 que $\Gamma_1 : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$ e $\Gamma_2 : \mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{B}} \subset \mathcal{C}(M_{\mathcal{B}})$ são isomorfismos isométricos. Denotemos por Γ_1^{-1} e Γ_2^{-1} as aplicações inversas de Γ_1 e Γ_2, respectivamente, segue que Γ_1^{-1} e Γ_2^{-1} também são homomorfismos unitários contínuos.

Proposição 1.54. ([13]) Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são uB-álgebras. Então:

(i) Cada homomorfismo unitário $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ induz um operador de composição (contínuo) $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$;

(ii) Cada operador de composição (contínuo) $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ induz um homomorfismo unitário contínuo $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ através da relação $T = \Gamma_2^{-1} \circ T_g \circ \Gamma_1$;

(iii) Existe uma correspondência entre o conjunto dos homomorfismos unitários (contínuos) $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e o conjunto das aplicações (contínuas) $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ tais que $\hat{f} \circ g \in \widehat{\mathcal{B}}$ sempre que $f \in \mathcal{A}$.

Demonstração: (i) Seja $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário. Definimos, $g(\varphi) = \varphi \circ T$, para cada $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$. Mostremos que $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ está bem definida. Como $\varphi(e_{\mathcal{B}}) = 1$ e $T(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$, temos que $g(\varphi) \neq 0$. Agora, basta notar que dados $f, h \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$ temos

- $g(\varphi)(\alpha f + h) = \varphi(T(\alpha f + g)) = \varphi(\alpha T(f) + T(h)) = \alpha\varphi(T(f)) + \varphi(T(h)) = \alpha g(\varphi)(f) + g(\varphi)(h)$;
- $g(\varphi)(f \cdot h) = \varphi(T(f \cdot h)) = \varphi(T(f) \cdot T(h)) = \varphi(T(f)) \cdot \varphi(T(h)) = g(\varphi)(f) \cdot g(\varphi)(h)$.

Assim, pelo Teorema 1.32, temos que $g(\varphi) \in M_{\mathcal{A}}$, sempre que $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$ e portanto g está bem definida. Além disso, dado $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$ temos que

$$(\hat{f} \circ g)(\varphi) = \hat{f}(g(\varphi)) = (\varphi \circ T)(f) = \varphi(T(f)) = \widehat{T(f)}(\varphi),$$

e portanto $\hat{f} \circ g \in \widehat{\mathcal{B}}$ sempre que $f \in \mathcal{A}$, ou seja, podemos definir a aplicação $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ dada por $T_g(\hat{f}) = \hat{f} \circ g$. Agora, pelo Lema 1.52 temos que o operador de composição $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$, induzido pela aplicação g é um homomorfismo unitário contínuo.

(ii) Seja $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ um operador de composição induzido por uma aplicação $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$. Seja agora $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definido por $T = \Gamma_2^{-1} \circ T_g \circ \Gamma_1$. Segue da Observação 1.53 e do Lema 1.52 que Γ_1, Γ_2^{-1} e T_g são homomorfismos unitários contínuos e portanto T também é um homomorfismo unitário contínuo.

(iii) Seja $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário. Então, pela demonstração do ítem (i), temos que a aplicação $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ dada por $g(\varphi) = \varphi \circ T$, para toda $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$, está bem definida e é tal que $\hat{f} \circ g \in \widehat{\mathcal{B}}$ sempre que $f \in \mathcal{A}$. Assim, segue do Lema 1.51 que g é contínua (topologia de Gelfand). Reciprocamente, dada uma aplicação (contínua) $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ tal que $\hat{f} \circ g \in \widehat{\mathcal{B}}$, sempre que $f \in \mathcal{A}$, podemos definir o operador de composição (contínuo) $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$. Pelo ítem (ii), temos que T_g induz um um homomorfismo unitário contínuo $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. $\square$

Corolário 1.55. Todo homomorfismo unitário $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são uB-álgebras, é contínuo.

Demonstração: Segue diretamente dos ítens (i) e (ii) da Proposição 1.54. $\square$

Observação 1.56. Em particular, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são uB-álgebras, a Proposição 1.54 estabelece uma correspondência bijetora entre o conjunto dos homomorfismos unitários $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e o conjunto dos operadores de composição $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ através da da associação $T \mapsto g = T'|_{M_{\mathcal{B}}}$, onde $T' : \mathcal{B}' \to \mathcal{A}'$ denota o operador adjunto de T, que satisfaz o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Gamma_1"'] & \mathcal{B} \\ \widehat{\mathcal{A}} \arrow[r, "T_g"'] & \widehat{\mathcal{B}} \arrow[u, "\Gamma_2^{-1}"'] \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

$\square$

Iremos utilizar o isomorfismo isométrico dado pelas transformações de Gelfand e o diagrama (1.2) para estudar propriedades dos homomorfismos unitários (contínuos) entre uB-álgebras $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ em termos do operador de composição $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$, onde $g = T'|_{M_{\mathcal{B}}}$.

De agora em diante, e até o final deste capítulo, estaremos utilizando a Observação (1.39) para identificar as uB-álgebras $\mathcal{A} \leftrightarrow \widehat{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{B} \leftrightarrow \widehat{\mathcal{B}}$. Em virtude da Observação 1.56, não faremos mais distinção entre $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$.

1.3 Álgebras de Fréchet Uniformes

Nesta seção, abordaremos alguns conceitos básicos sobre F-álgebras, bem como as principais propriedades do espectro destas álgebras. Definimos no espectro $M_{\mathcal{A}}$ da F-álgebra $\mathcal{A}$ uma topologia conveniente, que também chamamos de topologia de Gelfand, e mostraremos $M_{\mathcal{A}}$ munido desta topologia é um conjunto hemicompacto. Estabelecemos um isomorfismo topológico que nos permitirá entender uma uF-álgebra como uma sub-álgebra fechada de $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$, o espaço das funções complexas contínuas definidas em $M_{\mathcal{A}}$, munido da topologia de Gelfand. Outras informações sobre este tema podem ser obtidas em [15].

Também nesta seção, definiremos operadores de composição entre uF-álgebras e estudaremos algumas propriedades destes operadores. Em particular, dadas as uF-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, sabemos que existe uma bijeção entre o conjunto dos homomorfismos unitários contínuos $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e o conjunto das aplicações contínuas $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ tais que $g \circ f \in \widehat{\mathcal{B}}$, para toda $f \in \mathcal{A}$. Definiremos diferentes topologias nos duais $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$ e exploraremos propriedades da aplicação $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$, quando $M_{\mathcal{A}}$ e $M_{\mathcal{B}}$ possuem estas topologias induzidas de $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$, respectivamente.

Definição 1.57. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *álgebra de Fréchet* (F-álgebra), se $\mathcal{A}$ é uma álgebra LMC completa e metrizável.

A topologia de uma F-álgebra, com unidade $e_{\mathcal{A}}$, pode ser gerada por uma sequência de semi-normas sub-multiplicativas $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que satisfaz as seguintes condições (Veja [15], pg 64, 3.1.7):

(i) $p_n(f) \leq p_{n+1}(f), \forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{A}$;

(ii) $p_n(e_{\mathcal{A}}) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Daqui em diante, todas as álgebras em questão terão unidade.

Assim sendo, usaremos a seguinte definição:

Definição 1.58. Seja $\mathcal{A}$ uma F-álgebra. Por *sequência fundamental* (*ou geradora*) de $\mathcal{A}$, entendemos a sequência de semi-normas $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que gera a topologia de $\mathcal{A}$ e satisfaz:

(i) $p_n(f) \leq p_{n+1}(f), \forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{A}$;

(ii) $p_n(e_{\mathcal{A}}) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.59. Cada B-álgebra é uma F-álgebra.

Exemplo 1.60. ([15], pg. 65) Denotemos por $C^\infty([0,1])$ a álgebra de todas as funções infinitamente diferenciáveis no intervalo unitário, onde a soma e a multiplicação são definidas pontualmente. Munimos $C^\infty([0,1])$ com a topologia gerada pelas semi-normas:

$$p_n(f) = 2^{n-1} \sup\{\mid f^{(k)}(x) \mid ; x \in [0,1],\ k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1\},$$

onde $f^{(k)}$ denota a k-ésima derivada de f. Pode-se mostrar que, com esta topologia, $C^\infty([0,1])$ é uma F-álgebra que não é uma B-álgebra.

O Teorema 1.61 abaixo estabelece condições sobre o espaço X para que $\mathcal{C}(X)$ seja uma F-álgebra:

Teorema 1.61. ([15], pg. 69) Seja X um espaço completamente regular. Então $\mathcal{C}(X)$ é uma F-álgebra se e somente se X é um k-espaço hemicompacto.

Uma questão que continua em aberto até os dias de hoje é determinar se existem homomorfismos $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ que não são contínuos, onde $\mathcal{A}$ é uma F-álgebra. Este problema já foi estudado por vários matemáticos e é conhecido como Problema de Michael. Isto motivou a seguinte definição:

Definição 1.62. Seja $\mathcal{A}$ uma F-álgebra.

(i) Denotaremos por $S_{\mathcal{A}}$ o conjunto de todos os homomorfismos complexos não nulos $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ e denotamos por $M_{\mathcal{A}}$ ao subconjunto de todos os membros contínuos de $S_{\mathcal{A}}$. Dizemos que $M_{\mathcal{A}}$ é o *espectro* de $\mathcal{A}$.

(ii) Para cada $f \in \mathcal{A}$, definimos a função

$$\begin{array}{rccc} \hat{f} : & S_{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \phi & \longmapsto & \phi(f), \end{array}$$

onde $\hat{f}$ é chamada de *transformada de Gelfand* de f, e denotamos

$$\widehat{\mathcal{A}} = \{\hat{f}|_{M_{\mathcal{A}}}; f \in \mathcal{A}\}$$

(iii) Consideraremos em $S_{\mathcal{A}}$, respectivamente em $M_{\mathcal{A}}$, a topologia mais fraca tal que todas as transformadas de Gelfand são funções contínuas em $S_{\mathcal{A}}$, respectivamente em $M_{\mathcal{A}}$. Esta topologia é chamada de *topologia de Gelfand* .

Lembremos que o espectro de uma B-álgebra $\mathcal{A}$ (com identidade) é um conjunto $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$-compacto e não vazio (Teorema 1.32 e Proposição 1.31). Nos resultados desta seção veremos que, em geral, o espectro de uma F-álgebra não é um conjunto compacto, e sim um conjunto hemicompacto não vazio. Como consequência teremos o Teorema de Gelfand-Mazur, isto é, se $\mathcal{A}$ é uma F-álgebra que é um corpo, então $\mathcal{A}$ é isomorfa a $\mathbb{C}$. Neste sentido, exibiremos uma correspondência bijetiva entre o conjunto dos ideais maximais fechados de $\mathcal{A}$ e os elementos de $M_{\mathcal{A}}$.

Observação 1.63. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas F-álgebras cujas topologias são geradas pelas sequências fundamentais de semi-normas $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente, e seja $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo. Então T é contínua se e somente se para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n(k) \in \mathbb{N}$ e uma constante $C_k > 0$ tais que

$$q_k(T(f)) \leq C_k \cdot p_{n(k)}(f),\ \forall f \in \mathcal{A}.$$

Notemos que no caso especial em que

$$p_n(f^2) = p_n(f)^2,\ \forall f \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N},$$

e

$$q_n(h^2) = q_n(h)^2,\ \forall h \in \mathcal{B}, \forall n \in \mathbb{N},$$

temos

$$q_k(T(f))^{2^m} = q_k(T(f^{2^m})) \leq C_k \cdot p_{n(k)}(f^{2^m}) \leq C_k(p_{n(k)}(f))^{2^m}.$$

Elevando em ambos os lados por 2^{-m} e fazendo $m \to \infty$, concluímos que podemos considerar $C_k = 1$. Em particular, um elemento $\varphi \in S_{\mathcal{A}}$ é um elemento de $M_{\mathcal{A}}$ se e somente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\varphi(f)| \leq p_n(f),\ \forall f \in \mathcal{A}. \tag{1.3}$$

Exemplo 1.64. Pode-se mostrar (veja [15], pg. 73), que $S_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} = M_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} = \mathbb{R}$ e, mais geralmente (veja [15], pg.188, Exemplo 10.1.7-(ii)), que $S_{\mathcal{C}(X)} = M_{\mathcal{C}(X)} = X$ para cada k-espaço hemicompacto X. $\square$

Definição 1.65. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ F-álgebras e seja $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo de álgebras contínuo tal que $T(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$. O *operador adjunto espectral* é definido por

$$\begin{array}{rcccl} T^* & : & M_{\mathcal{B}} & \longrightarrow & M_{\mathcal{A}} \\ & & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ T. \end{array}$$

Note que se $\mathcal{A}$ é uma B-álgebra, não precisamos exigir a continuidade de T para que T^* esteja bem definido.

Lema 1.66. ([15], pg. 76) Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e T como na Definição 1.65. Então

(i) T^* é contínuo.

(ii) T^* é injetivo se T possui imagem densa.

(iii) $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$, onde $S : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ é um homomorfismo de álgebras contínuo e não nulo e $\mathcal{D}$ é uma F-álgebra.

(iv) T^* é um homeomorfismo se T é injetivo.

Observação 1.67. Vamos utilizar o Lema 1.66 para determinar o espectro de uma F-álgebra. O desenvolvimento abaixo foi extraído de [15], pg. 77.

Seja $\mathcal{A}$ uma F-álgebra cuja topologia é definida por uma sequência de semi-normas $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Sem perda de generalidade, estamos supondo que $p_n(f) \leq p_{n+1}(f)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall f \in \mathcal{A}$. Para cada n fixo, denotemos por I_n o ideal $I_n = Ker(p_n) = \{f \in \mathcal{A};\ p_n(f) = 0\}$, e denotemos por $\mathcal{A}_n$ o completamento da álgebra $\mathcal{A}/I_n$, com relação a norma $p'_n(f + I_n) = p_n(f)$.

Desta forma, $\mathcal{A}_n$ é por definição uma B-álgebra. Notemos que $\mathcal{A}_n$ possui identidade pois estamos supondo que $\mathcal{A}$ possui identidade. Seja

$$\begin{array}{rcccl} \pi_n & : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}_n \\ & & f & \longmapsto & f + I_n, \end{array}$$

a projeção canônica. Assim, π_n é um homomorfismo contínuo que possui imagem densa e portanto, pelo Lema 1.66, temos que $\pi_n^* : M_{\mathcal{A}_n} \to M_{\mathcal{A}}$ é contínua e injetiva.

Mas como $\mathcal{A}_n$ é uma B-álgebra, temos que $M_{\mathcal{A}_n}$ é compacto e portanto

$$\pi_n^* : M_{\mathcal{A}_n} \to \pi_n^*(M_{\mathcal{A}_n}) \subset M_{\mathcal{A}}$$

é um homeomorfismo.

Seja φ um elemento qualquer de $M_{\mathcal{A}}$. Por (1.3), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\varphi(f)| \leq p_n(f), \forall f \in \mathcal{A}$.

Definamos

$$\begin{array}{rcccc} \tilde{\varphi} & : & \mathcal{A}/I_n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & f + I_n & \longmapsto & \varphi(f). \end{array}$$

Assim, podemos ver facilmente que $\tilde{\varphi}$ está bem definida e é um homomorfismo de álgebras contínuo. Se denotarmos a única extensão de $\tilde{\varphi}$ a $\mathcal{A}_n$ também por $\tilde{\varphi}$, temos que $\tilde{\varphi} \in M_{\mathcal{A}_n}$ e

$$\pi_n^*(\tilde{\varphi})(f) = \tilde{\varphi}(\pi_n(f)) = \tilde{\varphi}(f + I_n) = \varphi(f), \ f \in \mathcal{A},$$

ou seja, $\pi_n^*(\tilde{\varphi}) = \varphi$.

Por outro lado, se $\psi \in M_{\mathcal{A}_n}$, então

$$|\pi_n^*(\psi)(f)| = |(\psi \circ \pi_n)(f)| = |\psi(f + I_n)| \leq p_n'(f + I_n) = p_n(f), \ \forall f \in \mathcal{A},$$

e portanto

$$\pi_n^*(M_{\mathcal{A}_n}) = \{\varphi \in M_{\mathcal{A}}; |\varphi(f)| \leq p_n(f), \ \forall f \in \mathcal{A}\}. \tag{1.4}$$

Além disso, para $n \leq m$ temos $\pi_n^*(M_{\mathcal{A}_n}) \subset \pi_m^*(M_{\mathcal{A}_m})$, e

$$M_{\mathcal{A}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi_n^*(M_{\mathcal{A}_n}).$$

Agora notemos que $\pi_n^*(M_{\mathcal{A}_n})$ é compacto pois π_n^* é contínua e $M_{\mathcal{A}_n}$ é compacto, ou seja, mostramos acima que o espectro de uma F-álgebra pode ser escrito como uma união enumerável de conjuntos compactos.

Como π_n^* é injetiva, vamos identificar $\pi_n^*(M_{\mathcal{A}_n})$ com $M_{\mathcal{A}_n}$ e escrever

$$M_{\mathcal{A}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{\mathcal{A}_n}. \tag{1.5}$$

$\square$

O Teorema 1.68 abaixo complementa a observação 1.67, mostrando que $(M_{\mathcal{A}_n})_n$ é uma sequência fundamental de compactos para $M_{\mathcal{A}}$.

Teorema 1.68. ([15], pg. 79) Seja $\mathcal{A}$ uma F-álgebra e seja A_n como definidos acima. Então:

$$M_{\mathcal{A}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_{\mathcal{A}_n},$$

e $(M_{\mathcal{A}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência fundamental de compactos para $M_{\mathcal{A}}$, isto é, $M_{\mathcal{A}}$ é um espaço hemicompacto.

Corolário 1.69. O espectro de uma F-álgebra é um conjunto não vazio.

Demonstração: Basta notar que, pela Proposição 1.31, $M_{\mathcal{A}_1}$ é não vazio. $\square$

Outra consequência imediata é o **Teorema de Gelfand-Mazur**:

Teorema 1.70. ([15], pg. 80) Se $\mathcal{A}$ é uma F-álgebra que é um corpo então $\mathcal{A} = \mathbb{C}$.

O Exemplo 1.71 abaixo mostra que em geral o espectro de uma F-álgebra não é um conjunto compacto:

Exemplo 1.71. Seja $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ a F-álgebra das funções inteiras munida das operações usuais e da topologia dada pela família de semi-normas

$$p_n(f) = \sup_{|z|\leq n} |f(z)|, \forall f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}.$$

Pode-se mostrar que $M_{\mathcal{H}(\mathbb{C})}$ é homeomorfo a $\mathbb{C}$, que não é compacto (Veja [21], pg. 19).

Teorema 1.72. ([15], pg. 82) Seja $\mathcal{A}$ uma F-álgebra. Então a correspondência

$$\varphi \longrightarrow ker\varphi$$

estabelece uma bijeção entre $M_{\mathcal{A}}$ e o conjunto dos ideais maximais fechados de $\mathcal{A}$.

O Teorema 1.73 abaixo é uma versão do **Teorema do Idempotente de Shilov** (Teorema 1.37) para F-álgebras.

Teorema 1.73. ([15], pg. 132) Seja $\mathcal{A}$ uma F-álgebra e seja $N \subset M_{\mathcal{A}}$ um subconjunto aberto e fechado. Então existe um único elemento $f \in \mathcal{A}$ tal que $f^2 = f$ e $\hat{f}$ é a função característica de N.

Definição 1.74. Seja $\mathcal{A}$ uma F-álgebra. Então $\mathcal{A}$ é chamada de *álgebra de Fréchet uniforme* (*uF-álgebra*) , se existe uma sequência fundamental de semi-normas $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que define a topologia de $\mathcal{A}$ tal que

$$p_n(f^2) = p_n(f)^2, \, \forall f \in \mathcal{A}, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 1.75. Cada uB-álgebra é uma uF-álgebra.

Exemplo 1.76. Se X é um k-espaço hemicompacto completamente regular. Então a F-álgebra $\mathcal{C}(X)$ considerada no Teorema 1.61 é uma uF-álgebra.

Exemplo 1.77. ([21], pg. 17) Sejam E um espaço de Banach, F uma uB-álgebra e $\mathcal{H}_b(E, F)$ o espaço de todas as funções inteiras de E em F, que são limitadas sobre os limitados de E. Munindo $\mathcal{H}_b(E, F)$ com a topologia da convergência uniforme sobre os limitados de E e das operações usuais, temos que $\mathcal{H}_b(E, F)$ é uma uF-álgebra. Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos simplesmente $\mathcal{H}_b(E)$ ao invés de $\mathcal{H}_b(E, \mathbb{C})$.

Exemplo 1.78. ([21], pg. 17) Sejam E um espaço de Banach, F uma uB-álgebra e $\mathcal{H}_{wu}(E, F)$ o subespaço de $\mathcal{H}_b(E, F)$ formado pelas funções que, quando restritas aos limitados de E, são fracamente uniformemente contínuas. Assim, temos que $\mathcal{H}_{wu}(E, F)$ é uma uF-álgebra que é uma sub-álgebra de $\mathcal{H}_b(E, F)$. Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos simplesmente $\mathcal{H}_{wu}(E)$ ao invés de $\mathcal{H}_{wu}(E, \mathbb{C})$.

Exemplo 1.79. ([21], pg. 17) Sejam E um espaço de Banach, F uma uB-álgebra e $\mathcal{H}_{bK}(E, F)$ o conjunto o conjunto de todas as aplicações $f \in \mathcal{H}_b(E, F)$ tais que existe uma vizinhança V_0 de zero em E tal que $f(V_0)$ é relativamente compacto em F. Munindo $\mathcal{H}_{bK}(E, F)$ com a topologia da convergência uniforme sobre os limitados de E e das operações usuais, temos que $\mathcal{H}_{bK}(E, F)$ é uma uF-álgebra. Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos simplesmente $\mathcal{H}_{bK}(E)$ ao invés de $\mathcal{H}_{bK}(E, \mathbb{C})$.

Exemplo 1.80. ([15], pg. 93, Exemplo 4.1.4 - iv)) A F-álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty[0, 1]$ dada pelo Exemplo 1.60 não é uma uF-álgebra.

Vejamos agora mais alguns exemplos de uF-álgebras. Seja U um aberto no espaço de Banach E. Definimos a distância de x à fronteira de U como sendo

$$d_U(x) = \sup\{r > 0; \overline{B}(x,r) \subset U\} = \inf_{y \in \partial U} \|x - y\|.$$

Se L é um subconjunto de U, então a distância de L a fronteira de U é definida por

$$d_U(L) = \inf_{x \in L} d_U(x).$$

Dizemos que $L \subset U$ é *U-limitado* se L é limitado e existe $\epsilon > 0$ tal que $L + B(0,\epsilon) \subset U$, ou seja, $d_U(L) > 0$.

Exemplo 1.81. Sejam E um espaço de Banach complexo, F uma uB-álgebra e $U \subset E$ um aberto. Denotamos por $\mathcal{H}_b(U;F)$ a álgebra das aplicações holomorfas $f : U \longrightarrow F$ que são limitadas em cada conjunto U-limitado, onde as operações são definidas pontualmente. Seus elementos são chamados de *aplicações holomorfas do tipo limitado* .

Consideremos os seguintes conjuntos

$$U_n = \left\{ x \in U; \|x\| < n \quad \text{e} \quad d_{_U}(x) > \frac{1}{2^n} \right\}. \tag{1.6}$$

Os conjuntos $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formam uma sequência fundamental crescente ($U_n \subset U_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$) de abertos U-limitados, ou seja, cada conjunto U-limitado está contido em algum U_n.

A álgebra $\mathcal{H}_b(U;F)$ é uma uF-álgebra, quando munida da topologia gerada pelas seminormas

$$p_n(f) = \sup_{x \in U_n} \|f(x)\|,\ n \in \mathbb{N}.$$

Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{H}_b(U)$ em vez de $\mathcal{H}_b(U;\mathbb{C})$.

Exemplo 1.82. Denotemos por

$$\mathcal{H}_{wu}(U;F) = \{f : U \to F; f \text{ é fracamente uniformemente contínua em cada } U - \text{limitado}\}.$$

Mostra-se que $\mathcal{H}_{wu}(U;F)$ é uma sub-álgebra fechada de $\mathcal{H}_b(U;F)$, se munida da topologia da convergência uniforme sobre os U-limitados, e portanto é uma uF-álgebra.

Exemplo 1.83. Seja $U \subset E'$ um conjunto aberto. Denotamos por

$$\mathcal{H}_{w^*u}(U;F) = \{f : U \to F; f \text{ é } \sigma(E',E) \text{ uniformemente contínua em cada } U-\text{limitado}\}.$$

Assim, temos que $\mathcal{H}_{w^*u}(U;F)$ é uma sub-álgebra fechada de $\mathcal{H}_b(U;F)$, munida com a topologia da convergência uniforme sobre os U-limitados, e portanto é uma uF-álgebra.

Exemplo 1.84. Seja

$$\mathcal{H}_d(U;F) = \{f : U \to F : ||f||_{B(x,r)} < \infty,\ \forall x \in U \text{ e todo } 0 < r < d_U(x)\},$$

Podemos ver facilmente que $\mathcal{H}_b(U;F) \subset \mathcal{H}_d(U;F)$.

Proposição 1.85. Se E é um espaço de Banach separável, então $\mathcal{H}_d(U;F)$ é uma uF-álgebra.

Demonstração: Como E é separável, temos que U é separável. Seja $\{x_n\}_n$ um subconjunto enumerável denso em U. Assim, o conjunto $\mathbf{B} = \{B(x_n,\delta); \delta \in \mathbb{Q}\}$ é uma coleção enumerável de bolas abertas em U tal que toda bola contida em U está contida em alguma bola de $\mathbf{B}$.

De fato, sejam $x \in U$, $r, s > 0$ tais que $0 < r+s < d_U(x)$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x,s)$. Então $B(x,r) \subset B(x_n, r+s)$. Agora basta tomar $\delta \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < r+s < \delta < d_U(x)$.

A partir daí podemos mostrar que $\mathcal{H}_d(U;F)$ é uma álgebra de Fréchet com relação à topologia gerada pela família de semi-normas

$$p_{n,r}(f) = \sup_{x \in B(x_n,r)} \|f(x)\|.$$

Como

$$p_{n,r}(f^2) = p^2_{n,r}(f), \forall f \in H_d(U;F),$$

temos que $\mathcal{H}_d(U;F)$ é uma uF-álgebra. $\square$

Seja $\mathcal{A}$ uma F-álgebra. Aplicação $\Gamma : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ dada por $\Gamma(f) = \hat{f}$, $\forall f \in \mathcal{A}$, é chamada de *transformação de Gelfand*, onde $\hat{f}$ é a transformada de Gelfand de f e $\widehat{\mathcal{A}} = \{\hat{f}|_{M_{\mathcal{A}}}; f \in \mathcal{A}\}$ são dados pela Definição 1.62.

Observação 1.86. Procedendo como na Observação 1.33, sabemos que $\widehat{\mathcal{A}}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ e que a transformação de Gelfand $\Gamma : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ é um homomorfismo de álgebras. Considerando em $M_{\mathcal{A}}$ a topologia de Gelfand, temos que cada $\hat{f} : M_{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ é contínua e portanto $\widehat{\mathcal{A}}$ é uma sub-álgebra de $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$, onde $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}}) = \{h : M_{\mathcal{A}} \to \mathbb{C};\ h \text{ é contínua}\}$.

Em particular, temos que $\widehat{\mathcal{A}}$ é uma uF-álgebra gerada pelas semi-normas

$$p_n(\hat{f}) = \sup_{\varphi \in M_{\mathcal{A}_n}} |\hat{f}(\varphi)|, \forall f \in \mathcal{A},$$

onde

$$M_{\mathcal{A}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{\mathcal{A}_n},$$

e $(M_{\mathcal{A}_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência fundamental de compactos para $M_{\mathcal{A}}$ dada pelo Teorema 1.68.

O Teorema 1.87 abaixo é um análogo para uF-álgebras da Proposição 1.48.

Teorema 1.87. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra.

(i) Se $\mathcal{A}$ é uma uF-álgebra, então a transformação de Gelfand

$$\begin{array}{rccc} \Gamma \ : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{A}} \\ & f & \longmapsto & \hat{f} \end{array}$$

define um isomorfismo topológico e algébrico.

(ii) As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $\mathcal{A}$ é uma uF-álgebra;

(2) $\mathcal{A}$ contém as constantes e é topológica e algebricamente isomorfa a uma sub-álgebra completa de $\mathcal{C}(X)$, que separa os pontos, onde X é um espaço hemicompacto e $\mathcal{C}(X)$ é munido com a topologia compacto aberta.

Demonstração: (i) Pelo Teorema 1.68, temos que $M_{\mathcal{A}}$ é um espaço hemicompacto. Seja $(p_n)_n$ a sequência fundamental de seminormas para $\mathcal{A}$ tal que

$$p_n(f^2) = p_n(f)^2, \ \forall f \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sejam $\mathcal{A}_n$, π_n e p'_n definidos na Observação 1.67. Assim temos que

$$p'_n(h^2) = p'_n(h)^2, \ \forall h \in \mathcal{A}_n,$$

e portanto cada $\mathcal{A}_n$ é uma uB-álgebra e escrevemos

$$\|\widehat{h}\|_{M_{\mathcal{A}_n}} = p'_n(h),\ \forall h \in \mathcal{A}_n.$$

Sendo assim, para cada $f \in \mathcal{A}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos

$$p_n(f) = p'_n(\pi_n(f)) = \|\widehat{(\pi_n(f))}\|_{M_{\mathcal{A}_n}} = \|\widehat{f}\|_{\pi'_n(M_{\mathcal{A}_n})} = \|\widehat{f}\|_{M_{\mathcal{A}_n}}, \tag{1.7}$$

onde estamos identificando $M_{\mathcal{A}_n}$ e $\pi'_n(M_{\mathcal{A}_n})$ (Observação 1.67) e estamos denotando a transformação de Gelfand de $\pi_n(f)$ por $\widehat{\pi_n(f)}$. Como a topologia em $\widehat{\mathcal{A}}$ é gerada pelas semi-normas $\|\cdot\|_{M_{\mathcal{A}_n}}$, temos que Γ é um homomorfismo algébrico e topológico. Agora, notemos que Γ é injetora. De fato, sejam $f, h \in \mathcal{A}$ tais que $\Gamma(f) = \Gamma(h)$, ou seja, $\widehat{f} = \widehat{h}$. Assim, $||\widehat{f}||_{M_{\mathcal{A}_n}} = ||\widehat{h}||_{M_{\mathcal{A}_n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e portanto $p_n(f) = p_n(h)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e portanto $f = g$. Como $\Gamma : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ é sobrejetora, segue que Γ é uma bijeção sobre a sua imagem.

Desta forma, provamos que $\Gamma : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ é um isomorfismo algébrico e topológico.

(ii) Veja [15], pg. 92, Teorema 4.1.3. $\square$

Como consequência imediata do Teorema 1.87, temos o Corolário 1.88.

Corolário 1.88. Seja $\mathcal{A}$ uma uF-álgebra. Se $\varphi(f) = \varphi(g)$, $\forall \varphi \in M_{\mathcal{A}}$, então $f = g$.

Observação 1.89. Segue do Teorema 1.87 que para uma uF-álgebra $\mathcal{A}$, a identificação $f \in \mathcal{A} \longleftrightarrow \hat{f} \in \widehat{\mathcal{A}}$ dada pela transformação de Gelfand é um isomorfismo algébrico e topológico e da Observação 1.86, temos que $\widehat{\mathcal{A}}$ é uma sub-álgebra de $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$. Assim, $\mathcal{A}$ pode ser identificada à sub-álgebra fechada $\widehat{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$.

Daqui em diante usaremos a identificação $f \leftrightarrow \hat{f}$ e em muitos casos não faremos distinção entre f e $\hat{f}$. Em particular, em uma uF-álgebra $\mathcal{A}$, podemos escrever

$$p_n(f) = \|f\|_{M_{\mathcal{A}_n}} = \sup_{\varphi \in M_{\mathcal{A}_n}} |f(\varphi)|.$$

Definição 1.90. Um *Operador de Composição* entre as uF-álgebras $\widehat{\mathcal{A}}$ e $\widehat{\mathcal{B}}$ é um operador da forma $T_g(\hat{f}) = \hat{f} \circ g$, onde $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ é tal que $\hat{f} \circ g \in \widehat{\mathcal{B}}$, sempre que $f \in \mathcal{A}$. Dizemos que T_g é *induzido pela aplicação g*.

Lema 1.91. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uF-álgebras e $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ um operador de composição. Então

(a) $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ é um homomorfismo unitário;

(b) T_g é contínuo se $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ é contínua.

Demonstração: (a) Segue as mesmas idéias da demonstração do Lema 1.52.

(b) Sejam $(\hat{f}_m) \subset \widehat{\mathcal{A}}$ e $\hat{f} \in \widehat{\mathcal{A}}$ tais que $\hat{f}_m \to \hat{f}$ em $\widehat{\mathcal{A}}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\sup_{\varphi \in K_n} ||\hat{f}_m(\varphi) - \hat{f}(\varphi)|| \to 0 \ (m \to \infty).$$

Se $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ é contínua e sendo L_n um compacto de $M_{\mathcal{B}}$, segue que $g(L_n)$ é um compacto de $M_{\mathcal{A}}$. Assim, $g(L_n) \subset K_{k(n)}$ para algum $k(n) \in \mathbb{N}$ e portanto

$$\sup_{\varphi \in L_n} ||T_g(\hat{f}_m)(\varphi) - T_g(\hat{f})(\varphi)|| = \sup_{\varphi \in L_n} ||(\hat{f}_m \circ g)(\varphi) - (\hat{f} \circ g)(\varphi)||$$

$$= \sup_{\psi \in g(L_n) \subset K_{k(n)}} ||\hat{f}_m(\psi) - \hat{f}(\psi)|| \leq \sup_{\psi \in K_{k(n)}} ||\hat{f}_m(\psi) - \hat{f}(\psi)|| \to 0 \ (m \to \infty)$$

e portanto T_g é contínuo. □

Neste capítulo também utilizaremos a notação $(M_{\mathcal{A}}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ para denotar o espaço $M_{\mathcal{A}}$ munido com a topologia de Gelfand.

Observação 1.92. Sejam agora $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uF-álgebras e $\Gamma_1 : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ e $\Gamma_2 : \mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{B}}$ as respectivas transformações de Gelfand. Facilmente se mostra que Γ_1 e Γ_2 são homomorfismos unitários e segue do Teorema 1.87 que $\Gamma_1 : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$ e $\Gamma_2 : \mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{B}} \subset \mathcal{C}(M_{\mathcal{B}})$ são isomorfismos topológicos. Denotemos por Γ_1^{-1} e Γ_2^{-1} as aplicações inversas de Γ_1 e Γ_2, respectivamente. Não é difícil ver que Γ_1^{-1} e Γ_2^{-1} também são homomorfismos unitários contínuos.

Proposição 1.93. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uF-álgebras. Então:

(i) Cada homomorfismo unitário contínuo $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ induz um operador de composição contínuo $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$;

(ii) Cada operador de composição contínuo $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ induz um homomorfismo unitário contínuo $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ através da relação $T = \Gamma_2^{-1} \circ T_g \circ \Gamma_1$;

(iii) Existe uma correspondência entre o conjunto dos homomorfismos unitários contínuos $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e o conjunto das aplicações contínuas $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ tais que $\hat{f} \circ g \in \widehat{\mathcal{B}}$ sempre que $f \in \mathcal{A}$.

Demonstração: (i) Sejam $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário contínuo e $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{B}}$ o adjunto espectral de T. Mostremos agora que $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ está bem definida. De fato, procedendo como na demonstração da Proposição 1.54(i), podemos mostrar que $g(\varphi)$ é linear e multiplicativa, para cada $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$. Além disso, como $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é contínuo, segue que $g(\varphi) = \varphi \circ T$ é contínuo, para cada $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$ e como $\varphi(e_{\mathcal{B}}) = 1$ e $T(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$, temos que $g(\varphi) \neq 0$, ou seja, $g(\varphi) \in M_{\mathcal{A}}$ para todo $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$ e consequentemente $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ está bem definida. Segue do Lema 1.66 que g é contínua. Além disso, dado $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$ temos que

$$(\hat{f} \circ g)(\varphi) = (\varphi \circ T)(f) = \varphi(T(f)) = \widehat{T(f)}(\varphi),$$

e portanto $\hat{f} \circ g \in \widehat{\mathcal{B}}$ sempre que $f \in \mathcal{A}$, ou seja, podemos definir o operador de composição $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ dada por $T_g(\hat{f}) = \hat{f} \circ g$. Agora segue do Lema 1.91(b) que $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ é um homomorfismo unitário contínuo.

(ii) Seja $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ um operador de composição contínuo. Do Lema 1.91(a) temos que T_g é um homomorfismo unitário. Seja agora $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definido por $T = \Gamma_2^{-1} \circ T_g \circ \Gamma_1$. Segue da Observação 1.92 que Γ_1 e Γ_2^{-1} são homomorfismos unitários contínuos e portanto T também é um homomorfismo unitário contínuo.

(iii) Seja $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário contínuo. Refazendo a demonstração do ítem (i), temos que existe $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ contínua tal que $\hat{f} \circ g \in \widehat{\mathcal{B}}$ sempre que $f \in \mathcal{A}$. Reciprocamente, dada uma aplicação contínua $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ tal que $\hat{f} \circ g \in \widehat{\mathcal{B}}$, sempre que $f \in \mathcal{A}$, podemos definir o operador de composição $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ que é contínuo, pelo Lema 1.91. Pelo ítem (ii), temos que T_g induz um um homomorfismo unitário contínuo $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. $\square$

Observação 1.94. Em particular, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são uF-álgebras, a Proposição 1.93 estabelece uma correspondência bijetora entre o conjunto dos homomorfismos unitários contínuos $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e o conjunto dos operadores de composição contínuos $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ através da da associação

$T \mapsto g$ que satisfaz o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Gamma_1"'] & \mathcal{B} \\ \widehat{\mathcal{A}} \arrow[r, "T_g"'] & \widehat{\mathcal{B}} \arrow[u, "\Gamma_2^{-1}"'] \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

De fato, para mostrar que $\Gamma_2^{-1} \circ T_g \circ \Gamma_1 = T$, ou seja, que a relação dada pelo diagrama (1.8) é verdadeira, basta proceder como na Observação 1.56. $\square$

Iremos utilizar o isomorfismo topológico dado pela transformação de Gelfand e o diagrama (1.8) para estudar propriedades dos homomorfismos unitários entre uF-álgebras $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ em termos do operador $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$, onde $g = T'|_{M_{\mathcal{B}}}$. De agora em diante, utilizaremos a Observação 1.89 para identificar as uF-álgebras $\mathcal{A} \leftrightarrow \widehat{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{B} \leftrightarrow \widehat{\mathcal{B}}$. Em virtude da Observação 1.94, não faremos mais distinção entre $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$.

Ao contrário das uB-álgebras, não é garantido que todo homomorfismo unitário $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são uF-álgebras, é contínuo. A Proposição 1.95 abaixo estabelece uma condição necessária e suficiente para que um homomorfismo unitário $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ seja contínuo, onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são uF-álgebras. Nesta Tese, estaremos interessados em homomorfismo unitários contínuos.

Proposição 1.95. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uF-álgebras e $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário. Então T é contínuo se e somente se $\varphi \circ T \in M_{\mathcal{A}}$ para cada $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um homomorfismo unitário contínuo, segue diretamente que $\varphi \circ T \in M_{\mathcal{A}}$ para cada $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\varphi \circ T \in M_{\mathcal{A}}$ para cada $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$. Definimos $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ por $g(\varphi) = \varphi \circ T$, para toda $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$. É fácil ver que g está bem definida e é contínua. Procedendo como na demonstração da Proposição 1.93(i), temos que o operador de composição $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ dado por $T_g(\hat{f}) = \hat{f} \circ g$ está bem definido e pelo Lema 1.91 temos que T_g é contínuo. Assim pela Proposição 1.93(ii) temos que $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é contínuo. $\square$

Denotaremos por β a topologia $\beta(E', E)$, definida em 1.18(i). Por conveniência, escreveremos $(M_{\mathcal{A}}, \beta)$ para indicar o espaço $M_{\mathcal{A}}$ munido da topologia β induzida por $(\mathcal{A}', \beta)$.

Proposição 1.96. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uF-álgebras e seja $T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário contínuo. Se $L \subset M_{\mathcal{B}}$ é $\sigma(\mathcal{B}', \mathcal{B})$-limitado, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(L) \subset K_{n_0}$.

Demonstração: Como L é equicontínuo, ele é relativamente compacto por Alaoglu e como $M_{\mathcal{B}}$ é hemicompacto segue que existe k_{n_0} tal que $g(L) \subset K_{n_0}$. □

Lema 1.97. Seja $\mathcal{A}$ uma uF-álgebra e $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência fundamental de compactos para $M_{\mathcal{A}}$. Então K_n é β-limitado em $M_{\mathcal{A}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: De acordo com a Observação 1.67, temos que $K_n = \pi_n'(M_{\mathcal{A}_n})$, onde $\mathcal{A}_n$ é uma álgebra de Banach e $\pi_n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_n$ é um homomorfismo contínuo.

Desta forma, o operador adjunto $\pi_n' : (\mathcal{A}_n', \beta) \longrightarrow (\mathcal{A}', \beta)$, é linear e contínuo ([16], pg. 151, Corolário 3). Sendo assim, π_n' leva β-limitados em β-limitados. Mas $\mathcal{A}_n'$ é um espaço de Banach e portanto $(\mathcal{A}_n', \|\cdot\|) = (\mathcal{A}_n', \beta)$ e como $M_{\mathcal{A}_n}$ é um subconjunto da bola unitária em $\mathcal{A}_n'$, temos que $\pi_n'(M_{\mathcal{A}_n}) = K_n$ é β-limitado em $(\mathcal{A}', \beta)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 1.98. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uF-álgebras. Se $T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é um homomorfismo unitário contínuo, então $g(L_n)$ é β-limitado em $M_{\mathcal{A}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Pelo Lema 1.97, temos que L_n é β-limitado. Como $T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é linear e contínuo, o operador adjunto $T_g' : (\mathcal{B}', \beta) \longrightarrow (\mathcal{A}', \beta)$ é linear e contínuo (Veja [16], pg. 111, Corolário 3 ou [17], pg. 83, Corolário 3). Sendo assim, T_g' leva β-limitados em β-limitados. Mas $g(L_n) = T_g'(L_n)$ e portanto $g(L_n)$ é β-limitado para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Capítulo 2

Operadores de Composição entre Álgebras Uniformes

Neste capítulo, trabalharemos com operadores de composição entre álgebras uniformes. Nosso principal objetivo é estabelecer uma relação entre certas propriedades do operador de composição T_g em termos da aplicação g que induz este operador. A menos que explicitemos o contrário, estaremos considerando $M_{\mathcal{A}}$ munido com a topologia de Gelfand.

2.1 Operadores de composição entre Álgebras de Banach Uniformes em Conjuntos Arbitrários

Nesta seção definiremos álgebra de Banach em um conjunto arbitrário Y. Mostraremos que tais álgebras, denotadas por $\mathcal{A}(Y)$, são uB-álgebras e estabeleceremos condições necessárias e suficientes para que um homomorfismo unitário $T : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ seja um operador de composição induzido por uma aplicação $g : X \to Y$. Nesta perspectiva, estudaremos operadores de composição compactos e fracamente compactos e estabeleceremos condições necessárias e suficientes para a compacidade (Teorema 2.19) e compacidade fraca (Teorema 2.25) de um operador de composição usual $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$, onde $\mathcal{A}(Y)$ e $\mathcal{B}(X)$ são uB-álgebras, em termos da aplicação $\overline{g} : \overline{X} \to \overline{Y}$.

Esta seção foi inspirada em [7], onde os autores definem tais álgebras.

Seja Y um conjunto qualquer. Denotamos por $\mathcal{D}(Y)$ o conjunto de todas as funções complexas definidas e limitadas em Y, ou seja,

$$\mathcal{D}(Y) = \left\{ f : Y \to \mathbb{C}; ||f|| = \sup_{y \in Y} |f(y)| < \infty \right\}$$

Proposição 2.1. $(\mathcal{D}(Y), ||\cdot||)$ é uma uB-álgebra.

Demonstração: Pode-se ver facilmente que $\mathcal{D}(Y)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$, onde as operações são definidas pontualmente e que $(\mathcal{D}(Y), ||\cdot||)$ é um espaço normado.

Seja $(f_n)_n$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{D}(Y), ||\cdot||)$. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||f_i - f_j|| = \sup_{y \in Y} |f_i(y) - f_j(y)| < \epsilon, \text{ se } i, j \geq N. \tag{2.1}$$

Em particular, temos que $(f_n(y))_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$, para cada $y \in Y$ fixo. Como $\mathbb{C}$ é completo, temos que $(f_n(y))_n$ é convergente. Denotamos o limite desta sequência por

$$f(y) = \lim_{n \to \infty} f_n(y).$$

Mas desta forma, fazendo $i \to \infty$ em (2.1) temos que $\sup_{y \in Y} |f(y) - f_j(y)| < \epsilon$, se $j \geq N$.

Tomando $j \geq N$, temos que $\sup\limits_{y \in Y} |f(y)| \leq \sup\limits_{y \in Y}(|f(y) - f_j(y)| + |f_j(y)|) < \infty$, o que mostra que $f \in \mathcal{D}(Y)$. E pelo feito acima temos que $(f_n)_n$ converge a f em $(\mathcal{D}(Y), ||\cdot||)$.

Além disso, como

$$||f|| = \sup_{y \in Y} |f(y)|$$

temos que $||f^2|| = ||f||^2$, para cada $f \in \mathcal{D}(Y)$, ou seja, $\mathcal{D}(Y)$ é uma uB-álgebra. $\square$

Definição 2.2. Um subconjunto $\mathcal{A}(Y)$ de $\mathcal{D}(Y)$ é uma *álgebra uniforme em Y (ou B_Y-álgebra)* se $\mathcal{A}(Y)$ é uma subálgebra fechada de $(\mathcal{D}(Y), ||\cdot||)$ que contém as constantes e separa os pontos de Y.

Observação 2.3. Cada álgebra uniforme em Y é, em particular, uma uB-álgebra. Denotemos por $M_{\mathcal{A}(Y)}$ o espectro da uB-álgebra $\mathcal{A}(Y)$.

Exemplo 2.4. A álgebra $\mathcal{C}(K)$ do Exemplo 1.25 é uma álgebra uniforme em Y, para $Y = K$.

Exemplo 2.5. A álgebra $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ do Exemplo 1.41 é uma álgebra uniforme em Y, para $Y = \mathbb{D}$. Note que neste caso $Y \neq M_{\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})}$. (Veja [21], pg. 13).

Exemplo 2.6. A álgebra $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ do Exemplo 1.42 é uma álgebra uniforme em Y, para $Y = \overline{\mathbb{D}} = M_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}$.(Veja [21], Prop. 4.11, pg. 12).

Exemplo 2.7. As álgebras $\mathcal{H}^\infty(U)$ e $\mathcal{H}^\infty_{uc}(U)$ do Exemplo 1.44 são álgebras uniformes em Y, para $Y = U$ e $Y = \overline{U}$, respectivamente.

Exemplo 2.8. A uB-álgebra $\mathcal{A}_{wu}(nB_E)$, definida no Exemplo 1.45, é uma álgebra uniforme em Y, para $Y = \overline{nB_E}$.

Vamos definir em Y a topologia mais fraca tal que cada $f \in \mathcal{A}(Y)$ é contínua, isto é, dadas uma rede $(y_\alpha) \subset Y$ e $y \in Y$, temos que $y_\alpha \to y$ se e somente se $f(y_\alpha) \to f(y)$, para toda $f \in \mathcal{A}(Y)$.

Observação 2.9. Definamos a aplicação $\delta : Y \to M_{\mathcal{A}(Y)}$ dada por $\delta_y(f) = f(y)$, para todo $y \in Y$ e toda $f \in \mathcal{A}(Y)$. Pode-se mostrar facimente que a aplicação δ é um homeomorfismo sobre a sua imagem e iremos fazer, quando for conveniente, a identificação $Y \leftrightarrow \delta(Y)$.

A Proposição 2.10 abaixo é um resultado obtido nesta Tese que generaliza o Exemplo 11 de [9], onde o resultado é provado para a uB-álgebra $\mathcal{H}^\infty(B_E)$, onde B_E é a bola aberta unitária de um espaço de Banach E.

Proposição 2.10. Se Y é conexo então $M_{\mathcal{A}(Y)}$ é conexo.

Demonstração: Sejam O_1 e O_2 dois conjuntos abertos e fechados e disjuntos tais que $M_{\mathcal{A}(Y)} = O_1 \cup O_2$. Como a aplicação δ é contínua, temos que a imagem $\delta(Y)$ é conexa e portanto podemos supor que $\delta(Y)$ está contida em O_1. Assim, pelo Teorema do Idempotente de Shilov (1.37), temos que existe $g \in \mathcal{A}(Y)$ tal que $\hat{g}$ é a função característica de O_2, e portanto, se O_2 é não vazio existe $\varphi \in O_2$ tal que

$$1 = |\hat{g}(\varphi)| \leq ||\hat{g}|| = ||g|| = \sup_{y \in Y} |g(y)| = \sup_{y \in Y} |\hat{g}(\delta_y)| \leq \sup_{\varphi \in O_1} |\hat{g}(\varphi)| = 0,$$

o que é um absurdo. Portanto $M_{\mathcal{A}(Y)}$ é conexo. $\square$

Exemplo 2.11.

(i) $M_{\mathcal{C}(K)}$ é conexo se K é conexo;

(ii) $M_{\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})}$ e $M_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}$ são conexos.

(iii) $M_{\mathcal{H}^\infty(B_E)}$ é conexo e, mais geralmente, $M_{\mathcal{H}^\infty(U)}$ é conexo se U é um aberto conexo em um espaço de Banach E.

(iv) $M_{\mathcal{H}^\infty_{uc}(B_E)}$ é conexo e, mais geralmente, $M_{\mathcal{H}^\infty_{uc}(U)}$ é conexo se U é um aberto conexo em um espaço de Banach E.

(v) $M_{\mathcal{A}_{wu}(nB_E)}$ é conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Demonstraremos o ítem (ii). Os demais são análogos. Denotemos por τ a topologia usual em $\mathbb{D}$ e denotemos por τ_1 a topologia mais fraca em $\mathbb{D}$ que torna cada $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ contínua. Claramente temos que $\tau_1 \leq \tau$. Assim, se $(\mathbb{D}, \tau)$ é conexo, é claro que $(\mathbb{D}, \tau_1)$ também é conexo e portanto $\delta(\mathbb{D}) \subset M_{\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})}$ é conexo. Agora o resultado segue diretamente da Proposição 2.10. □

Pela Observação 2.9, podemos identificar Y com um subconjunto de $M_{\mathcal{A}(Y)}$ através da aplicação δ. Em algumas demonstrações, para simplificar a notação, não faremos distinção entre Y e $\delta(Y)$. Note que a topologia definida em Y coincide com a topologia de Gelfand de $M_{\mathcal{A}(Y)}$ induzida no conjunto Y.

Como $\mathcal{A}(Y)$ é uma uB-álgebra, concluímos que cada $f \in \mathcal{A}(Y)$ pode ser estendida continuamente a uma função definida em $M_{\mathcal{A}(Y)}$, através da aplicação de Gelfand (Veja a Observação 1.39) e podemos escrever

$$\sup_{\varphi \in M_{\mathcal{A}(Y)}} |f(\varphi)| = ||\widehat{f}|| = ||f|| = \sup_{y \in Y} |f(y)|.$$

Sejam $\mathcal{A}(Y)$ e $\mathcal{B}(X)$ álgebras uniformes em Y e X, respectivamente. Agora notemos que se $g : X \to Y$ é uma aplicação (contínua) tal que $f \circ g \in \mathcal{B}(X)$ sempre que $f \in \mathcal{A}(Y)$, então g induz um homomorfismo unitário

$$\begin{array}{rccc} T_g : & \mathcal{A}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{B}(X) \\ & f & \longmapsto & f \circ g. \end{array}$$

Neste caso, dizemos que o operador $T = T_g$ é um *operador de composição usual* e que T é *induzido pela aplicação* g.

Por outro lado, sabemos que o operador adjunto

$$\begin{array}{rccc} T'_g : & \mathcal{B}(X)' & \longrightarrow & \mathcal{A}(Y)' \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ T_g, \end{array}$$

induz, por restrição, uma aplicação contínua

$$\overline{g} = T'_g|_{M_{\mathcal{B}(X)}} : M_{\mathcal{B}(X)} \to M_{\mathcal{A}(Y)}$$

tal que $T_g = \Gamma_2^{-1} \circ T_{\overline{g}} \circ \Gamma_1$ (Veja Proposição 1.54).

Assim, cada $g : X \to Y$ contínua tal que $f \circ g \in \mathcal{B}(X)$, para toda $f \in \mathcal{A}(Y)$ induz, um operador de composição

$$\begin{array}{rccc} T_{\overline{g}} : & \widehat{\mathcal{A}(Y)} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{B}(X)} \\ & f & \longmapsto & f \circ \overline{g}, \end{array}$$

onde $\overline{g} : M_{\mathcal{B}(X)} \to M_{\mathcal{A}(Y)}$ é contínua.

Sejam $T = T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ um operador de composição usual, $\delta_1 : Y \to M_{\mathcal{A}(Y)}$ e $\delta_2 : X \to M_{\mathcal{B}(X)}$ as aplicações avaliação. Sejam $g : X \to Y$ a aplicação que induz o operador T e $\overline{g}$ o adjunto espectral de T_g.

A Proposição 2.12 abaixo mostra que se $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ é um operador de composição usual, a aplicação $\overline{g}|_{\delta_2(X)} : \delta_2(X) \to \delta_1(Y)$ está bem definida e podemos estabelecer uma relação entre g e $\overline{g}$:

Proposição 2.12. Sejam $T : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ um operador de composição usual e $g, \overline{g}, \delta_1$ e δ_2 como definidas acima. Então

(*i*) $\overline{g}(\delta_2(x)) = \delta_2(x) \circ T_g = \delta_1(g(x))$, para todo $x \in X$. Em particular, a aplicação $\overline{g}|_{\delta_2(X)} : \delta_2(X) \to \delta_1(Y)$ está bem definida;

(*ii*) $g = \delta_1^{-1} \circ \overline{g} \circ \delta_2$.

Demonstração: (*i*) De fato, dados $x \in X$ e $f \in \mathcal{A}(Y)$, temos

$$\overline{g}(\delta_2(x))(f) = (\delta_2(x) \circ T_g)(f) = \delta_2(x)(T_g(f)) = \delta_2(x)(f \circ g) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \delta_1(g(x))(f),$$

e portanto $\bar{g}(\delta_2(x)) = \delta_2(x) \circ T_g = \delta_1(g(x))$, $\forall x \in X$.

(ii) Em $(*)$ abaixo, utilizaremos o ítem (i) para escrever $\delta_2(x) \circ T_g = \delta_1(g(x))$. Assim, dado $x \in X$ temos

$$(\delta_1^{-1} \circ \bar{g} \circ \delta_2)(x) = (\delta_1^{-1} \circ \bar{g})(\delta_2(x)) = \delta_1^{-1}[\bar{g}(\delta_2(x))] = \delta_1^{-1}[\delta_2(x) \circ T_g] \overset{(*)}{=} \delta_1^{-1}(\delta_1(g(x))) = g(x).$$

de onde temos $\delta_1^{-1} \circ \bar{g} \circ \delta_2 = g$. $\square$

Observação 2.13. A Proposição 2.12 estabelece o seguinte diagrama para operadores de composição usuais:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad g \quad} & Y \\ {\scriptstyle \delta_2}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \delta_1^{-1}} \\ M_{\mathcal{B}(X)} \supset \delta_2(X) & \xrightarrow[\bar{g}]{} & \delta_1(Y) \subset M_{\mathcal{A}(Y)} \end{array} \tag{2.2}$$

Desta forma, cada operador de composição usual $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$, induzido por uma aplicação $g : X \to Y$, induz uma aplicação contínua $\bar{g} = T'|_{M_\mathcal{B}} : M_\mathcal{B} \to M_\mathcal{A}$ tal que $\bar{g}|_{\delta_2(X)} : \delta_2(X) \to \delta_1(Y)$ está bem definida. Reciprocamente, dado um homomorfismo unitário $T : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$, temos que $T = T_{\bar{g}}$, onde $\bar{g} = T'|_{M_\mathcal{B}}$. Se $\bar{g}|_{\delta_2(X)} : \delta_2(X) \to \delta_1(Y)$ está bem definida podemos, através do diagrama 2.2, definir uma aplicação contínua $g : X \to Y$ tal que $T = T_g$ e neste caso T é um operador de composição usual.

No restante deste Capítulo, utilizamos $\bar{g}|_X : X \to Y$ para denotar $\bar{g}|_{\delta_2(X)} : \delta_2(X) \to \delta_1(Y)$ e para cada $x \in X$ escreveremos $\bar{g}(x)$ ao invés de $\bar{g}(\delta_2(x))$.

Proposição 2.14. Seja $\mathcal{A}(Y)$ uma álgebra uniforme em Y. São equivalentes:

(i) a aplicação avaliação $\delta_1 : Y \to M_{\mathcal{A}(Y)}$ é sobrejetiva;

(ii) para cada homomorfismo unitário (contínuo) $T : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$, temos que $\delta_2(x) \circ T \in \delta_1(Y)$, para cada $\mathcal{B}(X)$ álgebra uniforme em X e para cada $x \in X$;

(iii) cada homomorfismo unitário (contínuo) $T : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ é um operador de composição usual, para cada $\mathcal{B}(X)$ álgebra uniforme em X.

Demonstração: Iremos substituir $M_{\mathcal{A}(Y)}$ por $M_{\mathcal{A}}$, e $M_{\mathcal{B}(X)}$ por $M_{\mathcal{B}}$, apenas para simplificar a notação.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $T : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ um homomorfismo unitário, onde $\mathcal{B}(X)$ é uma álgebra uniforme em X. Assim, sabemos que $T = T_g$, onde $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ é o adjunto espectral de T. Dado $x \in X$, temos que $\delta_2(x) \circ T \in M_{\mathcal{A}}$. Mas por hipótese $\delta_1 : Y \to \delta_1(Y) \subset M_{\mathcal{A}}$ é sobrejetiva, e portanto $\delta_2(x) \circ T \in \delta_1(Y)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Seja $T : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ um homomorfismo unitário, onde $\mathcal{B}(X)$ é uma álgebra uniforme em X e seja $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ o adjunto espectral de T. Vamos mostrar que $g(\delta_2(X)) \subset \delta_1(Y)$. Dado $x \in X$, temos por hipótese que $\delta_2(x) \circ T \in \delta_1(Y)$, ou seja, existe $y \in Y$ tal que $\delta_2(x) \circ T = \delta_1(y)$. Desta forma, $g(\delta_2(x))(f) = (\delta_2(x) \circ T)(f) = \delta_1(y)(f)$, ou seja, $g(\delta_2(x)) = \delta_1(y)$ e assim $g(\delta_2(X)) \subset \delta_1(Y)$ e portanto, pela Observação 2.13, temos que $T = T_g$ é um operador de composição usual.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Queremos mostrar que dada $\varphi \in M_{\mathcal{A}}$, existe $y_0 \in Y$ tal que $\varphi = \delta_1(y_0)$. Seja

$$\begin{aligned} T \ : \ \mathcal{A}(Y) \ &\longrightarrow \ \mathcal{A}(Y) \\ f \ &\longmapsto \ \varphi(f) \cdot e_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Assim, é fácil ver que T é um homomorfismo unitário contínuo. Considerando $\mathcal{B}(X) = \mathcal{A}(Y)$ em (iii) temos que existe $g : Y \to Y$ tal que $T(f) = f \circ g \in \mathcal{A}$, para toda $f \in \mathcal{A}$, e temos que

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = T(f)(y) = \varphi(f) \cdot e_{\mathcal{A}}(y) = \varphi(f), \ \forall y \in Y, \tag{2.3}$$

ou seja, $f \circ g$ é constante para cada $f \in \mathcal{A}$. Afirmamos que $g : Y \to Y$ é uma função constante. De fato, suponhamos que existam $y_1, y_2 \in Y$ tais que $g(y_1) \neq g(y_2)$. Como $\mathcal{A}$ separa os pontos de Y, sabemos que existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(g(y_1)) \neq f(g(y_2))$, contradizendo o fato de que $f \circ g$ é constante. Seja então $y_0 \in Y$ tal que $g(y) = y_0$, para todo $y \in Y$. Assim, segue de (2.3) que $\varphi(f) = f(y_0) = \delta_1(y_0)(f)$, para toda $f \in \mathcal{A}$, ou seja, $\varphi = \delta_1(y_0)$. $\square$

Observação 2.15. Sejam $\mathcal{A}(Y)$ e $\mathcal{B}(X)$ álgebras uniformes em Y e X, respectivamente.

(i) Fazendo a identificação $Y \leftrightarrow \delta_1(Y)$, segue da Proposição 2.14 que $Y = M_{\mathcal{A}(Y)}$ se e somente se todo homomorfismo unitário $T : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ é um operador de composição usual, para toda $\mathcal{B}(X)$ álgebra uniforme em X.

(*ii*) Se $M_{\mathcal{A}(Y)} \neq Y$, a demonstração da Proposição 2.14 permite criar, para cada $\varphi \in M_{\mathcal{A}(Y)}$ que não pertence a Y, um homomorfismo unitário $T : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{A}(Y)$ que não é um operador de composição usual.

Daqui para frente, a menos que explicitemos do contrário, $\mathcal{A}(Y)$ e $\mathcal{B}(X)$ irão sempre denotar álgebras uniformes em Y e X, respectivamente.

Lema 2.16. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uB-álgebras. Um homomorfismo unitário $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é compacto (resp. fracamente compacto) se e somente se $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ (conforme Proposição 1.54) é compacto (resp. fracamente compacto).

Demonstração: Basta notar que, pela Proposição 1.54, temos que $T = \Gamma_2^{-1} \circ T_g \circ \Gamma_1$, onde $\Gamma_1 : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ e $\Gamma_2 : \mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{B}}$ são as respectivas transformações de Gelfand. Agora basta lembrar que o conjunto dos operadores compactos (resp. fracamente compactos) satisfazem a propriedade de ideal. $\square$

A equivalência (*i*) $\Leftrightarrow$ (*ii*) do Teorema 2.18 está inspirado no Teorema VI.7.1, p. 490, do livro [6]. Lá, o teorema é provado para operadores lineares compactos $T : E \to \mathcal{C}(K)$, onde E é um espaço de Banach e K é um compacto Hausdorff. A equivalência (*i*) $\Leftrightarrow$ (*iii*) também pode ser encontrada em [19]. Pela dificuldade em se encontrar [19] e por se tratar de um artigo no idioma alemão, faremos a demonstração desta equivalência.

Observação 2.17. Por simplicidade, utilizaremos as notações $(M_{\mathcal{A}}, || \ ||)$, $(M_{\mathcal{A}}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ e $(M_{\mathcal{A}}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ para denotar, respectivamente, as topologias da norma, fraca e fraca-estrela induzidas de $\mathcal{A}'$ em $M_{\mathcal{A}}$, embora $M_{\mathcal{A}}$ não seja um subespaço vetorial de $\mathcal{A}'$.

Teorema 2.18. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uB-álgebras e $T = T_g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário. São equivalentes:

(*i*) $T = T_g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é compacto;

(*ii*) $g : M_{\mathcal{B}} \to (M_{\mathcal{A}}, || \cdot ||)$ é contínua;

(*iii*) $g(M_{\mathcal{B}})$ é compacto em $(M_{\mathcal{A}}, || \cdot ||)$;

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Suponhamos que $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é compacto. Sejam (φ_α) uma rede em $M_\mathcal{B}$ e $\varphi \in M_\mathcal{B}$ tal que $\varphi_\alpha \to \varphi$. Segue do Teorema 1.32 que a rede φ_α é limitada em $M_\mathcal{B}$ e portanto, lembrando que $T = T_g$ é compacto e utilizando o Lema 1.14, temos que

$$g(\varphi_\alpha) = T_g'(\varphi_\alpha) \to T_g'(\varphi) = g(\varphi)$$

em $(M_\mathcal{A}, ||\cdot||)$ e portanto $g : M_\mathcal{B} \to (M_\mathcal{A}, ||\cdot||)$ é contínua.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos agora que $g : M_\mathcal{B} \to (M_\mathcal{A}, ||\cdot||)$ é contínua. Assim, dados $\epsilon > 0$ e $\varphi_0 \in M_\mathcal{B}$, existe uma vizinhança N de φ_0 em $M_\mathcal{B}$ tal que $||g(\varphi) - g(\varphi_0)|| < \epsilon$, $\forall \varphi \in N$. Mas desta forma, denotando a bola unitária de $\mathcal{A}$ por D, temos

$$||g(\varphi) - g(\varphi_0)|| = \sup_{f \in D} |g(\varphi)(f) - g(\varphi_0)(f)| = \sup_{f \in D} |T_g(\widehat{f})(\varphi) - T_g(\widehat{f})(\varphi_0)| < \epsilon,$$

ou seja, $|T_g(\widehat{f})(\varphi) - T_g(\widehat{f})(\varphi_0)| < \epsilon$, para toda $\widehat{f} \in \widehat{D} := \{\widehat{f}; f \in D\}$, e portando $T_g(\widehat{D})$ é um conjunto equicontínuo e limitado (T_g é contínuo) em $\widehat{\mathcal{B}}$. Agora lembremos que $\widehat{\mathcal{B}} \subset \mathcal{C}(M_\mathcal{B})$ e portanto $T_g(\widehat{D})$ é um subconjunto limitado e equicontínuo do espaço $\mathcal{C}(M_\mathcal{B})$. Assim, pelo Teorema 1.7 (Teorema de Arzelá-Ascoli), temos que $T_g(\widehat{D})$ é relativamente compacto em $(\mathcal{C}(M_\mathcal{B}), ||\cdot||)$. Mas $T_g(\widehat{D}) \subset \widehat{\mathcal{B}} \subset \mathcal{C}(M_\mathcal{B})$ e $\widehat{\mathcal{B}}$ é uma sub-álgebra fechada de $\mathcal{C}(M_\mathcal{B})$. Portanto $T_g(\widehat{D})$ é relativamente compacto em $(\widehat{\mathcal{B}}, ||\cdot||)$, ou seja, $T_g : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ é um operador compacto. Agora segue do Lema 2.16 que $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é compacto.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Como $M_\mathcal{B}$ é compacto e por hipótese $g : M_\mathcal{B} \to (M_\mathcal{A}, ||\cdot||)$ é contínua, temos que $g(M_\mathcal{B})$ é compacto em $(M_\mathcal{A}, ||\cdot||)$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Suponhamos que $g(M_\mathcal{B})$ é compacto em $(M_\mathcal{A}, ||\cdot||)$. Desta forma, a aplicação identidade $Id_1 : (g(M_\mathcal{B}), ||\cdot||) \longrightarrow (g(M_\mathcal{B}), \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ é um homeomorfismo. Assim, temos que as seguintes aplicações são contínuas:

$$\begin{array}{rcccc} g & : & M_\mathcal{B} & \longrightarrow & (g(M_\mathcal{B}), \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})) \\ & & \varphi & \longmapsto & g(\varphi) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} (Id_1)^{-1} & : & (g(M_\mathcal{B}), \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})) & \longrightarrow & (g(M_\mathcal{B}), ||\cdot||) \\ & & \varphi & \longmapsto & \varphi \end{array}$$

e portanto $g = (Id_1)^{-1} \circ g : M_\mathcal{B} \to (M_\mathcal{A}, ||\cdot||)$ é contínua. $\square$

Nossa intenção é obter um resultado semelhante ao teorema provado acima, para o caso de álgebras $\mathcal{A} = \mathcal{A}(Y)$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$, e as propriedades da função $\overline{g}$ restrita a $\delta_2(X)$.

O Teorema 2.19 abaixo estabelece condições necessárias e suficientes para que um operador de composição usual $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ seja compacto, onde $\mathcal{A}(Y)$ e $\mathcal{B}(X)$ são uB-álgebras.

Nos próximos resultados desta Seção, se L é um subconjunto de Y (resp. de X), denotaremos por $\overline{L}$ o fecho de $\delta_1(L) \subset M_{\mathcal{A}}$ (resp. $\delta_2(L) \subset M_{\mathcal{B}}$) na topologia de Gelfand.

Também com o objetivo se simplificar a notação, se L é um subconjunto de $M_{\mathcal{A}}$, utilizaremos $(L, || \, ||)$, $(L, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ e $(L, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ para denotar, respectivamente, as topologias da norma, fraca e fraca-estrela induzidas de $\mathcal{A}'$ em $L \subset M_{\mathcal{A}}$.

Teorema 2.19. Sejam $\mathcal{A}(Y)$ e $\mathcal{B}(X)$ álgebras uniformes em Y e X, respectivamente e $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ um operador de composição usual. São equivalentes:

(i) $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ é compacto;

(ii) $\overline{g}(X)$ é relativamente compacto em $(\overline{Y}, || \cdot ||)$;

(iii) $\overline{g}|_{\overline{X}} : \overline{X} \to (\overline{Y}, || \cdot ||)$ é contínua.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Se $T = T_{\overline{g}} : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ é compacto, segue do Teorema 2.18 que $\overline{g} : M_{\mathcal{B}} \to (M_{\mathcal{A}}, || \cdot ||)$ é contínua. Assim, como $X \subset M_{\mathcal{B}}$ é relativamente compacto, temos que $\overline{g}(X)$ é relativamente compacto em $(M_{\mathcal{A}}, || \cdot ||)$. Mas por hipótese, T_g é um operador de composição usual e portanto $\overline{g}(X) \subset Y$ e temos que $\overline{g}(X)$ é relativamente compacto em $(\overline{Y}, || \cdot ||)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Começaremos provando a igualdade: $\overline{\overline{g}(X)} = \overline{g}(\overline{X})$. De fato, pelo Lema 1.51 temos que $\overline{g} : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ é contínua e portanto $\overline{g}(\overline{X}) \subset \overline{\overline{g}(X)}$. Por outro lado, como $M_{\mathcal{B}}$ é compacto (Veja Teorema 1.32), temos que $\overline{X} \subset M_{\mathcal{B}}$ é compacto e portanto, da continuidade da aplicação $\overline{g}$ segue que $\overline{g}(\overline{X})$ é compacto em $M_{\mathcal{A}}$. Em particular, $\overline{g}(\overline{X})$ é fechado em $M_{\mathcal{A}}$ e $\overline{g}(X) \subset \overline{g}(\overline{X})$, ou seja, $\overline{\overline{g}(X)} \subset \overline{g}(\overline{X})$ e isto prova a afirmação feita.

Agora, se $\overline{g}(X)$ é relativamente compacto em $(\overline{Y}, || \cdot ||)$, pela igualdade provada temos que $\overline{g}(\overline{X})$ é compacto em $(\overline{Y}, || \cdot ||)$.

Assim, a aplicação $Id : (\overline{g}(\overline{X}), ||\cdot||) \longrightarrow (\overline{g}(\overline{X}), \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ é um homeomorfismo e seguindo o mesmo argumento de $(iii) \Rightarrow (ii)$ do Teorema 2.18 temos que $\overline{g}|_{\overline{X}} : \overline{X} \to (\overline{Y}, ||\cdot||)$ é contínua.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que $\overline{g}|_{\overline{X}} : \overline{X} \to (\overline{Y}, ||\cdot||)$ é contínua. Assim, dados $\epsilon > 0$ e $\varphi_0 \in \overline{X}$, existe uma vizinhança N de φ_0 em $\overline{X}$ tal que

$$||\overline{g}(\varphi) - \overline{g}(\varphi_0)|| < \epsilon, \ \forall \varphi \in N.$$

Mas desta forma, denotando a bola unitária de $\mathcal{A}(Y)$ por D, temos que

$$\epsilon > ||\overline{g}(\varphi) - \overline{g}(\varphi_0)|| = \sup_{f \in D} |\overline{g}(\varphi)(f) - \overline{g}(\varphi_0)(f)| = \sup_{f \in D} \left|T_{\overline{g}}(\widehat{f})(\varphi) - T_{\overline{g}}(\widehat{f})(\varphi_0)\right|,$$

ou seja, $|T_{\overline{g}}(\widehat{f})(\varphi) - T_{\overline{g}}(\widehat{f})(\varphi_0)| < \epsilon$, para toda $f \in D$, e portando $T_{\overline{g}}(\widehat{D})$, é um conjunto equicontínuo de $\mathcal{C}(\overline{X})$, onde $\widehat{D} := \{\widehat{f}; f \in D\}$. Agora notemos que $T_{\overline{g}}(\widehat{D})$ é limitado em $\mathcal{C}(\overline{X})$. Portanto, como $\overline{X} \subset M_{\mathcal{B}}$ é compacto, segue do Teorema 1.7 (Arzelá-Ascoli) que $T_{\overline{g}}(\widehat{D})$ é relativamente compacto em $(\mathcal{C}(\overline{X}), ||\cdot||_{\overline{X}})$, onde

$$||f||_{\overline{X}} = \sup_{\varphi \in \overline{X}} |f(\varphi)|, \forall f \in \mathcal{C}(\overline{X}).$$

Tomemos agora uma sequência $(h_n)_n \subset T_{\overline{g}}(\widehat{D}) \subset \widehat{\mathcal{B}}$. Como $T_{\overline{g}}(\widehat{D})$ é relativamente compacto em $\mathcal{C}(\overline{X})$, temos que existem $(h_{n_k})_k \subset (h_n)_n$ e $h \in \mathcal{C}(\overline{X})$ tais que $h_{n_k} \to h$ em $(\mathcal{C}(\overline{X}), ||\cdot||_{\overline{X}})$.

Mas $\mathcal{B}$ é uma uB-álgebra e portanto $||\widehat{f}||_X = ||\widehat{f}||_{M_{\mathcal{B}}}, \forall f \in \mathcal{B}$. Desta forma, como $X \subset \overline{X} \subset M_{\mathcal{B}}$, temos

$$||\widehat{f}||_X = ||\widehat{f}||_{\overline{X}} = ||\widehat{f}||_{M_{\mathcal{B}}}, \forall f \in \mathcal{B}.$$

Em particular, $(h_{n_k})_k \subset T_{\overline{g}}(\widehat{D}) \subset \widehat{\mathcal{B}}$ é uma sequência de Cauchy em $\widehat{\mathcal{B}}$ e como $\widehat{\mathcal{B}}$ é uma B-álgebra, temos que $(h_{n_k})_k$ é convergente e portanto $T_{\overline{g}}(\widehat{D})$ é relativamente compacto em $\widehat{\mathcal{B}}$, ou seja, $T_{\overline{g}} : \widehat{\mathcal{A}(Y)} \to \widehat{\mathcal{B}(X)}$ é compacto. Agora segue do Lema 2.16 que $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ é compacto. $\square$

Em [10], Galindo e Lindström provam um análogo dos Teoremas 2.18 e 2.19 para as álgebras $\mathcal{A} = \mathcal{H}^\infty_{uc}(B_E)$ e $\mathcal{B} = \mathcal{H}^\infty_{uc}(B_F)$.

Corolário 2.20. Seja $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ um operador de composição usual. Então $\overline{g} : M_{\mathcal{B}} \to (M_{\mathcal{A}}, ||\cdot||)$ é contínua se e somente se $\overline{g}|_{\overline{X}} : \overline{X} \to (\overline{Y}, ||\cdot||)$ é contínua.

Demonstração: Segue diretamente dos Teoremas 2.18 e 2.19. $\square$

Corolário 2.21. Um operador de composição usual $T_g : \mathcal{H}^\infty(V) \to \mathcal{H}^\infty(U)$ é compacto se e somente se $\overline{g}(U)$ é relativamente compacto em $(\overline{V}, ||\cdot||)$.

Demonstração: Basta tomar $Y = V$ e $X = U$ no Teorema 2.19. □

Podemos obter mais Corolários considerando outras possibilidades de operadores de composição usuais $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$, tomando como $\mathcal{A}(Y)$ e $\mathcal{B}(X)$ as álgebras $\mathcal{C}(K)$, $\mathcal{H}^\infty(U)$, $\mathcal{H}^\infty_{uc}(U)$ e $\mathcal{A}_{wu}(nB_E)$.

Na Proposição 2.22 e nos Corolários 2.23 e 2.24, consideramos $(E, ||\cdot||_E)$ e $(F, ||\cdot||_F)$ espaços de Banach, $V \subset E$ e $U \subset F$ conjuntos abertos. Denotamos por $\delta_1 : V \to (\mathcal{A}(V))'$ e $\delta_2 : U \to (\mathcal{B}(U))'$ as respectivas aplicações avaliação.

A demonstração do ítem (i) da Proposição 2.22 abaixo foi inspirada em [1], Proposição 3.

Proposição 2.22. Sejam $\mathcal{A}(V)$ e $\mathcal{B}(U)$ álgebras de Banach uniformes em V e U, respectivamente. Seja $T_g : \mathcal{A}(V) \to \mathcal{B}(U)$ um operador de composição usual induzido pela aplicação $g : U \to V$.

(i) Se T_g é compacto e $E' \subset \mathcal{A}(V)$, então $g(U)$ é relativamente compacto em $(V, ||\cdot||_E)$;

(ii) Se $g(U)$ é relativamente compacto em $(V, ||\cdot||_E)$ e a aplicação $\delta_1 : (V, ||\cdot||_E) \to (\delta_1(V), ||\cdot||)$ é contínua, então T_g é compacto.

Demonstração: (i) Suponhamos que $g(U)$ não é relativamente compacto em $(V, ||\cdot||_E)$. Então existem $\epsilon > 0$ e uma seqüência $(x_n) \subset U$ tais que $\|g(x_n) - g(x_m)\|_E \geq \epsilon$ para $m \neq n$. Como consequência do Teorema de Hahn-Banach (Veja [22], pg. 76, Corolário 1.98), para cada par (m, n), podemos escolher o um vetor unitário $\ell_{m,n} \in E' \subset \mathcal{A}(V)$ tal que

$$|\ell_{m,n}(g(x_n)) - \ell_{m,n}(g(x_m))| \geq \epsilon. \tag{2.4}$$

Agora, lembremos que o operador adjunto $T_g' : (\mathcal{B}(U)', ||\cdot||) \to (\mathcal{A}(V)', ||\cdot||)$ é compacto, pois $T_g : \mathcal{A}(V) \to \mathcal{B}(U)$ é compacto. Notemos $T_g'(\delta_2(U)) = \bar{g}(\delta_2(U)) \subset \delta_1(V)$, pois T_g é por hipótese um operador de composição usual. Além disso, $\delta_2(U) \subset M_{\mathcal{B}(U)}$, e portanto $\|\delta_2(x)\| = 1$, para cada $x \in U$, ou seja, $\delta_2(U)$ é limitado em $(\mathcal{B}(U)', ||\cdot||)$. Agora, da compacidade de

$T'_g : (\mathcal{B}(U)', ||\cdot||) \to (\mathcal{A}(V)', ||\cdot||)$, segue que $\bar{g}(\delta_2(U)) = T'_g(\delta_2(U))$ é relativamente compacto em $(\delta_1(V), ||\cdot||)$. Da desigualdade (2.4) e lembrando que $\delta_1 \circ g = \bar{g} \circ \delta_2$ (Proposição 2.12), temos que

$$\|\bar{g}(\delta_2(x_n)) - \bar{g}(\delta_2(x_m))\| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{A}(V) \\ \|f\|=1}} |\bar{g}(\delta_2(x_n))(f) - \bar{g}(\delta_2(x_m)(f))| \geq |\bar{g}(\delta_2(x_n))(\ell_{m,n}) - \bar{g}(\delta_2(x_m))(\ell_{m,n})|$$

$$= |\delta_1(g(x_n))(\ell_{m,n}) - \delta_1(g(x_m))(\ell_{m,n})| = |\ell_{m,n}(g(x_n)) - \ell_{m,n}(g(x_m))| \geq \epsilon,$$

e isto contradiz o fato de que o conjunto $\bar{g}(\delta_2(U))$ é relativamente compacto em $(\delta_1(V), ||\cdot||)$. Portanto, provamos que $g(U)$ é relativamente compacto em $(V, ||\cdot||_E)$.

(ii) Suponhamos que $g(U)$ é relativamente compacto em $(V, ||\cdot||_E)$ e que a aplicação $\delta_1 : (V, ||\cdot||_E) \to (\delta_1(V), ||\cdot||)$ é contínua.

Vamos agora mostrar que $\delta_1(g(U))$ é relativamente compacto em $(\delta_1(V), ||\cdot||)$. De fato, da continuidade de δ_1 obtemos

$$\delta_1(\overline{g(U)}^{||\cdot||_E}) \subset \overline{\delta_1(g(U))},$$

e como $\overline{g(U)}^{||\cdot||_E} \subset V$ é compacto, temos que $\delta_1(\overline{g(U)}^{||\cdot||_E})$ é compacto em $(\delta_1(V), ||\cdot||)$ e como

$$\delta_1(g(U)) \subset \delta_1(\overline{g(U)}^{||\cdot||_E})$$

temos

$$\overline{\delta_1(g(U))} \subset \delta_1(\overline{g(U)}^{||\cdot||_E})$$

e portanto $\overline{\delta_1(g(U))} = \delta_1(\overline{g(U)}^{||\cdot||_E}) \subset \delta_1(V)$ e isto prova o que afirmamos.

Assim, $\delta_1(g(U)) = \bar{g}(\delta_2(U))$ é relativamente compacto em $(\delta_1(V), ||\cdot||)$ e portanto, segue do Teorema 2.19 que T_g é compacto. □

Corolário 2.23. Seja $T_g : \mathcal{H}^\infty(V) \to \mathcal{B}(U)$ um operador de composição usual induzido pela aplicação $g : U \to V$, onde $\mathcal{B}(U)$ é uma álgebra de Banach uniforme em U e V é um aberto limitado. Então T_g é compacto se e somente se $g(U)$ é relativamente compacto em $(V, ||\cdot||_E)$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Como $T_g : \mathcal{H}^\infty(V) \to \mathcal{B}(U)$ é compacto e $E' \subset \mathcal{H}^\infty(V)$, o resultado segue do ítem (i) da Proposição 2.22 tomando $\mathcal{A}(V) = \mathcal{H}^\infty(V)$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos agora que $g(U)$ é relativamente compacto em $(V, ||\cdot||_E)$. Como a aplicação avaliação $\delta_1 : (V, ||\cdot||_{_E}) \to ((\mathcal{H}^\infty(V))', ||\cdot||)$ é contínua (Veja [24], pg. 869), segue do ítem (ii) da Proposição 2.22, tomando $\mathcal{A}(V) = \mathcal{H}^\infty(V)$, que T_g é compacto. $\square$

O Corolário 2.23 abaixo generaliza a Proposição 3 de [1], onde o resultado é provado para a álgebra $\mathcal{H}^\infty(B_E)$, onde B_E é a bola unitária aberta do espaço de Banach E.

Corolário 2.24. Sejam $T_g : \mathcal{H}^\infty(V) \to \mathcal{H}^\infty(U)$ um operador de composição usual induzido pela aplicação $g : U \to V$, onde V é um aberto limitado. Então T_g é compacto se e somente se $g(U)$ é relativamente compacto em $(V, ||\cdot||_{_E})$.

Vamos demonstrar agora resultados análogos aos Teoremas 2.18 e 2.19 para operadores fracamente compactos.

Daqui para frente, se $\mathcal{A} = \mathcal{A}(Y)$ é uma álgebra uniforme em Y, $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ denotará a topologia fraca em $\mathcal{A}'$. Utilizaremos a notação $(M_{\mathcal{A}}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ (resp. $(Y, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}'')))$ para denotar o espaço $M_{\mathcal{A}}$ (resp. Y) com a topologia $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ induzida de $(\mathcal{A}', \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$.

Algumas vezes no Teorema 2.25 abaixo, para simplificar a notação, escreveremos $\mathcal{A}(Y) = \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}$. A demonstração de $(i) \Leftrightarrow (ii)$ deste teorema é inspirada no Teorema VI.7.1, p. 490, do livro [6]. Lá, o teorema é provado para operadores lineares compactos $T : E \to \mathcal{C}(K)$, onde E é um espaço de Banach e K é um compacto Hausdorff.

Teorema 2.25. Sejam $\mathcal{A}(Y)$ e $\mathcal{B}(X)$ uB-álgebras e $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ um operador de composição usual. São equivalentes:

(i) T_g é um operador fracamente compacto;

(ii) A aplicação $\overline{g}|_{\overline{X}} : \overline{X} \to (\overline{Y}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ é contínua;

(iii) $\overline{g}(\overline{X})$ é relativamente compacto em $(\overline{Y}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Se $T_g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é fracamente compacto, segue do Lema 1.15 temos que o operador adjunto $T_g' : (\mathcal{B}', \sigma(\mathcal{B}', \mathcal{B})) \to (\mathcal{A}', \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ é contínuo. Como $\overline{g} = T_g'|_{M_{\mathcal{B}}}$, temos garantida a continuidade de $\overline{g} : M_{\mathcal{B}} \to (M_{\mathcal{A}}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$. Agora, lembremos que T_g é um operador de composição usual e portanto podemos definir $\overline{g}|_{\overline{X}} : \overline{X} \to \overline{Y}$. Assim, da continuidade da aplicação $\overline{g} : M_{\mathcal{B}} \to (M_{\mathcal{A}}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$, segue a continuidade da aplicação $\overline{g} : \overline{X} \to (\overline{Y}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Segue diretamente da continuidade da aplicação $\overline{g}|_{\overline{X}} : \overline{X} \to (\overline{Y}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ e do fato de $\overline{X}$ ser compacto.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Se $\overline{g}(\overline{X})$ é relativamente compacto em $(\overline{Y}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$, temos que a aplicação identidade $Id : (\overline{g}(\overline{X}), \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}'')) \longrightarrow (\overline{g}(\overline{X}), \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ é um homeomorfismo. Assim, seguindo as mesmas ideias da demonstração de $(iii) \Rightarrow (ii)$ do Teorema 2.18 temos que a aplicação $\overline{g} : \overline{X} \to (\overline{Y}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ é contínua.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que $\overline{g} : \overline{X} \to (\overline{Y}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ é contínua. Para provar que T é fracamente compacto, iremos usar o Teorema 1.11. Para isso, sejam (x_α) uma rede em $\overline{X}$ e $x \in \overline{X}$ tais que $x_\alpha \to x$ (topologia de Gelfand restrita a $\overline{X} \subset M_{\mathcal{B}}$). Então, pela continuidade de $\overline{g}$, segue que $\overline{g}(x_\alpha) \to \overline{g}(x)$ em $(\overline{Y}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$.

Afirmação 1: Vamos mostrar que a rede $(\overline{g}(x_\alpha))$ é quase-uniformemente convergente em $\widehat{D} := \{\widehat{f}; f \in D\}$, onde D é a bola unitária em $\mathcal{A}$.

Começaremos mostrando que $\overline{g}(x_\alpha)$ e $\overline{g}(x)$ estão em $\mathcal{C}(D_2)$, onde D_2 é a bola unitária (compacta) em $\mathcal{A}''$, com a topologia $\sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')$. De fato, se (z_γ) é uma rede em D_2 tal que $z_\gamma \to z$ em $(D_2, \sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}'))$, temos que $z_\gamma(\varphi) \to z(\varphi)$, para toda $\varphi \in \mathcal{A}'$. Em particular, $z_\gamma(\overline{g}(x)) \to z(\overline{g}(x))$ e $z_\gamma(\overline{g}(x_\alpha)) \to z(\overline{g}(x_\alpha))$, para cada α, ou seja, $\overline{g}(x)(z_\gamma) \to \overline{g}(x)(z)$ e para cada α temos $\overline{g}(x_\alpha)(z_\gamma) \to \overline{g}(x_\alpha)(z)$ e portanto $\overline{g}(x_\alpha), \overline{g}(x) \in \mathcal{C}(D_2)$, para cada α.

Como por hipótese $\overline{g}(x_\alpha) \to \overline{g}(x)$ (pontualmente) em D_2 e $\overline{g}(x) \in \mathcal{C}(D_2)$, segue do Teorema 1.9 que a convergência $\overline{g}(x_\alpha) \to \overline{g}(x)$ é quase-uniforme em D_2 e portanto em $\widehat{D}$. Isto prova a Afirmação 1.

Afirmação 2: $T_{\overline{g}}(\widehat{D})$ é uma coleção limitada e quase-equicontínua de funções em $\mathcal{C}(\overline{X})$.

Como T_g é um homomorfismo unitário e contínuo, temos que $T_{\overline{g}}(\widehat{D})$ é limitado em $\widehat{\mathcal{B}(X)} \subset \mathcal{C}(\overline{X})$. Sejam agora $\widehat{f} \in \widehat{D}$, (x_α) uma rede em $\overline{X}$ e $x \in \overline{X}$ tal que $x_\alpha \to x$. Lembremos que

$$T_{\overline{g}}(\widehat{f})(x_\alpha) = \widehat{f} \circ \overline{g}(x_\alpha) = \widehat{f}(\overline{g}(x_\alpha)) = \overline{g}(x_\alpha)(f).$$

Como $\overline{g}(x_\alpha)$ converge quase-uniformemente (Afirmação 1) para $\overline{g}(x)$, dado $\epsilon > 0$, existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \geq \alpha_0$ tais que

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\overline{g}(x_{\alpha_i})(f) - \overline{g}(x)(f)| = \min_{1 \leq i \leq n} |T_{\overline{g}}(\widehat{f})(x_{\alpha_i}) - T_{\overline{g}}(\widehat{f})(x)| \leq \epsilon.$$

Desta forma, segue diretamente da Definição 1.10 que $T_{\overline{g}}(\widehat{D})$ é um coleção quase-equicontínua e isto prova a Afirmação 2.

Agora, segue da Afirmação 2 (acima) e do Teorema 1.11 que $T_{\overline{g}}(\widehat{D})$ é fracamente relativamente compacto na topologia fraca de $\mathcal{C}(\overline{X})$.

Afirmação 3: $T_{\overline{g}}(\widehat{D})$ é fracamente relativamente compacto na topologia fraca de $\widehat{\mathcal{B}(X)}$. Lembremos que na topologia fraca, as noções de compacidade e compacidade sequencial coincidem. De fato, pelo exposto acima, para cada sequência $(f_n)_n \subset T_{\overline{g}}(\widehat{D})$ dada, existe $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ tal que $\psi(f_{n_k})$ é convergente, para cada $\psi \in (\mathcal{C}(\overline{X}))'$. Seja agora $\varphi \in (\mathcal{B}(X))'$. Como $\widehat{\mathcal{B}(X)}$ é uma sub-álgebra fechada de $\mathcal{C}(\overline{X})$, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\psi \in (\mathcal{C}(\overline{X}))'$ tal que $\psi|_{\mathcal{B}(X)} = \varphi$ e portanto $\varphi(f_{n_k}) = \psi(f_{n_k})$ é convergente, ou seja, $T_{\overline{g}}(\widehat{D})$ é fracamente relativamente compacto na topologia fraca de $\widehat{\mathcal{B}(X)}$.

Da Afirmação 3 acima, temos que $T_{\overline{g}} : \widehat{\mathcal{A}(Y)} \to \widehat{\mathcal{B}(X)}$ é um operador fracamente compacto. Agora segue do Lema 2.16 que $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ é fracamente compacto. □

Corolário 2.26. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uB-álgebras e $T = T_g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário. São equivalentes:

(i) T_g é um operador fracamente compacto;

(ii) A aplicação $g : M_{\mathcal{B}} \to (M_{\mathcal{A}}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ é contínua;

(iii) $g(M_{\mathcal{B}})$ é compacto em $(M_{\mathcal{A}}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$.

A equivalência $(i) \Leftrightarrow (iii)$ do Corolário 2.26 também pode ser encontrada em [13].

Podemos obter diversos corolários do Teorema 2.25 considerando as possibilidades de operadores de composição usuais $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$, tomando como $\mathcal{A}(Y)$ e $\mathcal{B}(X)$ as álgebras $\mathcal{C}(K)$, $\mathcal{H}^\infty(U)$, $\mathcal{H}^\infty_{uc}(U)$ e $\mathcal{A}_{wu}(nB_E)$.

Em particular, se V e U são abertos de espaços de Banach E e F, respectivamente, podemos obter o seguinte corolário:

Corolário 2.27. Seja $T_g : \mathcal{H}^\infty(V) \to \mathcal{H}^\infty(U)$ um operador de composição usual. São equivalentes:

(i) T_g é um operador fracamente compacto;

(ii) A aplicação $\overline{g} : \overline{U} \to (\overline{V}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ é contínua;

(iii) $\overline{g}(\overline{U})$ é relativamente compacto em $(\overline{V}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$.

Demonstração: Basta tomar $\mathcal{A}(Y) = \mathcal{H}^\infty(V)$ e $\mathcal{B}(X) = \mathcal{H}^\infty(U)$ no Teorema 2.25. $\square$

De maneira análoga à Proposição 2.22(ii), se V e U são abertos de espaços de Banach E e F, respectivamente, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.28. Sejam $\mathcal{A}(V)$ e $\mathcal{B}(U)$ álgebras de Banach uniformes em V e U, respectivamente. Seja $T_g : \mathcal{A}(V) \to \mathcal{B}(U)$ um operador de composição usual induzido pela aplicação $g : U \to V$. Se $g(U)$ é relativamente compacto em $(V, \sigma(E, E'))$ e a aplicação $\delta_1 : (V, \sigma(E, E')) \to (\delta_1(V), \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ é contínua, então T_g é fracamente compacto.

Demonstração: Suponhamos que $g(U) \subset (V, \sigma(E, E'))$ é relativamente compacto e a aplicação $\delta_1 : (V, \sigma(E, E')) \to (\delta_1(V), \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ é contínua. Assim, $\delta_1(g(U)) = \bar{g}(\delta_2(U))$ é relativamente compacto em $(\delta_1(V), \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ e portanto, pelo Teorema 2.25, T_g é fracamente compacto. $\square$

Teorema 2.29. Seja $\mathcal{A}$ uma uB-álgebra. São equivalentes:

(i) A topologia de Gelfand coincide com a topologia da norma em $M_{\mathcal{A}}$;

(ii) A transformação de Gelfand $\Gamma : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$ é uma inclusão compacta;

(iii) Para cada uB-álgebra $\mathcal{B}$, todo homomorfismo unitário $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é compacto;

(iv) A álgebra $\mathcal{A}$ é um espaço de dimensão finita.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (iii)$ Seja $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário. Assim, pela Proposição 1.54, sabemos que $T = T_g$, onde $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ é contínua na topologia de Gelfand. Como a topologia de Gelfand coincide com a topologia da norma em $M_{\mathcal{A}}$, temos que $g : M_{\mathcal{B}} \to (M_{\mathcal{A}}, ||\cdot||)$ é contínua. Sendo assim, segue do Teorema 2.18 que T é compacto.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que todo homomorfismo $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é compacto, onde $\mathcal{B}$ é uma uB-álgebra qualquer. Em particular, temos que o operador identidade $Id : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é compacto.

Denotemos por $g_{Id} : M_{\mathcal{A}} \to M_{\mathcal{A}}$ a aplicação contínua tal que $Id = Id_{g_{Id}}$. Mas pode-se ver facilmente que $g_{Id} : M_{\mathcal{A}} \to M_{\mathcal{A}}$ é a aplicação identidade. Desta forma, pelo Teorema 2.18 temos que a aplicação identidade $g_{Id} : M_{\mathcal{A}} \to (M_{\mathcal{A}}, ||\cdot||)$ é contínua. Portanto a topologia da norma coincide com a topologia de Gelfand em $M_{\mathcal{A}}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sejam $\mathcal{B}$ uma uB-álgebra, e $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário. Seja $(f_n)_n \subset \mathcal{A}$ uma sequência limitada. Como $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$ é compacta, temos que $(f_n)_n$ possui uma subsequência, que denotamos por $(f_{n_k})_k$, que converge em $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$. Sendo assim, como $\mathcal{B}$ é completo, basta mostrar que $(T(f_{n_k}))_k$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}$. Mas notemos que:

$$\begin{aligned} ||T(f_{n_k}) - T(f_{n_j})||_{M_{\mathcal{B}}} &= ||f_{n_k} \circ g - f_{n_j} \circ g||_{M_{\mathcal{B}}} = \sup_{\psi \in M_{\mathcal{B}}} |f_{n_k}(g(\psi)) - f_{n_j}(g(\psi))| \\ &\leq \sup_{\varphi \in M_{\mathcal{A}}} |f_{n_k}(\varphi) - f_{n_j}(\varphi)| = ||f_{n_k} - f_{n_j}||_{M_{\mathcal{A}}} \to 0 \ (k, j \to \infty) \end{aligned}$$

e portanto, como $(f_{n_k})_k$ é convergente em $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$, temos que $(T(f_{n_n}))_k$ é de Cauchy e portanto convergente em $\mathcal{B}$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Basta tomar $T = \Gamma$ e $\mathcal{B} = \widehat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ De (iii) segue que o operador identidade $Id : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é compacto e portanto a bola unitária fechada $B_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ é compacta e daí temos que $\mathcal{A}$ é um espaço de dimensão de finita (Veja [22], Pg. 33).

$(iv) \Rightarrow (i)$ Se $\mathcal{A}$ é um espaço de dimensão finita, então a topologia $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ coincide com a topologia da norma em $\mathcal{A}'$. Em particular, a topologia de Gelfand coincide com a topologia da norma em $M_{\mathcal{A}}$. □

No Teorema 2.29, a equivalência $(i) \Leftrightarrow (ii)$ também pode ser encontrada em [2].

O Teorema 2.30 fornece um resultado análogo ao da Proposição 2.29 para homomorfismos fracamente compactos:

Teorema 2.30. Seja $\mathcal{A}$ uma uB-álgebra. São equivalentes:

(i) A topologia de Gelfand coincide com a topologia fraca em $M_{\mathcal{A}}$;

(ii) A aplicação de Gelfand $\Gamma : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$ é uma inclusão fracamente compacta;

(iii) Para cada uB-álgebra $\mathcal{B}$, todo homomorfismo unitário $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é fracamente compacto;

(iv) A álgebra $\mathcal{A}$ é um espaço reflexivo.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (iii)$ Seja $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário. Assim, pela Proposição 1.54, sabemos que $T = T_g$, onde $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ é contínua na topologia de Gelfand. Como a topologia de Gelfand coincide com a topologia fraca em $M_{\mathcal{A}}$, temos que $g : M_{\mathcal{B}} \to (M_{\mathcal{A}}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ é contínua. Sendo assim, segue do Teorema 2.26 que T é fracamente compacto.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que todo homomorfismo $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é fracamente compacto, onde $\mathcal{B}$ é uma uB-álgebra qualquer. Em particular, temos que o operador identidade $Id : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é fracamente compacto. Seguindo o mesmo raciocínio de $(c) \Rightarrow (a)$ do Teorema 2.29, temos que a aplicação identidade $g_{Id} : M_{\mathcal{A}} \to (M_{\mathcal{A}}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ é contínua. Portanto a topologia fraca coincide com a topologia de Gelfand em $M_{\mathcal{A}}$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Basta tomar $T = \Gamma$ e $\mathcal{B} = \widehat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sejam $\mathcal{B}$ uma uB-álgebra, e $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário. Seja $(f_n)_n \subset \mathcal{A}$ uma sequência limitada. Como $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$ é uma inclusão fracamente compacta temos que $(f_n)_n$ é um subconjunto fracamente relativamente compacto de $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$. Assim, pelo Teorema de Eberlein-Smulian (Veja [22], pg. 248), temos que $(f_n)_n$ possui uma subsequência, que denotamos por $(f_{n_k})_k$, que converge fracamente em $\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$, ou seja, $\varphi(f_{n_k})$ é convergente para cada $\varphi \in (\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}}))'$. Agora notemos que $T_g(f_{n_k})$ também é fracamente convergente, pois dada $\psi \in \mathcal{B}'$ temos que $\psi(T_g(f_{n_k})) = (\psi \circ T_g)(f_{n_k})$, onde $\psi \circ T_g \in \mathcal{A}'$. Mas pelo Teorema de Hahn-Banach (Veja [22], pg. 75), podemos encontrar $\varphi \in (\mathcal{C}(M_{\mathcal{A}}))'$ tal que $\varphi|_{\mathcal{A}} = \psi \circ T_g$. Em particular, temos que $\varphi(f_{n_k}) = (\psi \circ T_g)(f_{n_k}) = \psi(T_g(f_{n_k}))$ é convergente e portanto $(T(f_{n_k}))_k \subset \mathcal{B}$ é fracamente convergente. Assim, utilizando novamente o Teorema de Eberlein-Smulian, temos que T_g é fracamente compacto.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ De (iii) segue que o operador identidade $Id : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é fracamente compacto e portanto a bola unitária fechada $B_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ é fracamente compacta e daí temos que $\mathcal{A}$ é reflexivo (Veja [22], Pg. 245).

$(iv) \Rightarrow (i)$ Se $\mathcal{A}$ é um espaço reflexivo, então as topologias $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ e $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ coincidem em $\mathcal{A}'$. Em particular, a topologia de Gelfand coincide com a topologia fraca em $M_{\mathcal{A}}$. $\square$

2.2 Operadores de composição entre Álgebras de Fréchet Uniformes em Conjuntos Arbitrários

Nesta seção, seguiremos a mesma ideia da seção 2.1 para definirmos álgebras de Fréchet uniformes em conjuntos arbitrários. Um dos nossos objetivos será o de explorar as principais propriedades destas álgebras e estabelecer condições para que um operador de composição $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ seja um operador de composição usual. Estudaremos homomorfismos unitários compactos e pontualmente limitados entre uF-álgebras. Mostraremos que todo homomorfismo unitário fracamente compacto é pontualmente limitado e estabeleceremos condições necessárias e suficientes para que um homomorfismo unitário seja pontualmente limitado.

Seja Y um conjunto qualquer e suponhamos que

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n, \tag{2.5}$$

onde $Y_n \subset Y_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $\mathcal{D}_b(Y)$ o conjunto de todas as funções complexas definidas em Y que são limitadas em cada Y_n, ou seja,

$$\mathcal{D}_b(Y) = \{f : Y \to \mathbb{C}; \sup_{y\in Y_n} |f(y)| < \infty, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Usaremos o símbolo $\mathcal{D}_b(Y)$, mas observamos que este espaço depende da sequência $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada em (2.5). Podemos definir em $\mathcal{D}_b(Y)$ a topologia gerada pelas seminormas

$$p_n(f) = \sup_{y\in Y_n} |f(y)|, \ \forall f \in \mathcal{D}_b(Y)$$

Desta forma, temos que $p_n(f) \leq p_{n+1}(f)$, para toda $f \in \mathcal{D}_b(Y)$.

Proposição 2.31. $\mathcal{D}_b(Y)$ munida desta topologia é uma uF-álgebra.

Demonstração: Pode-se ver facilmente que $\mathcal{D}_b(Y)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$, onde as operações são definidas pontualmente. Como a topologia de $\mathcal{D}_b(Y)$ é gerada pela família de seminormas

$$p_n(f) = \sup_{y\in Y_n} |f(y)|,$$

temos diretamente que $\mathcal{D}_b(Y)$ é metrizável.

Seja agora $(f_n)_n$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{D}_b(Y)$. Assim, dados $k \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_k(f_i - f_j) = \sup_{x \in Y_k} |f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon, \text{ se } i, j \geq N. \tag{2.6}$$

Seja agora $y \in Y$ dado. Desta forma, $y \in Y_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e por (2.6) temos que $(f_n(y))_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ é completo, temos que esta sequência converge, e denotamos

$$f(y) = \lim_{n \to \infty} f_n(y).$$

Vamos mostrar que $f_n \to f$ na topologia de $\mathcal{D}_b(Y)$. Para isso, devemos mostrar que $f_n \to f$ uniformemente sobre cada conjunto Y_k. Mas, fazendo $i \to \infty$ em (2.6) temos que

$$\sup_{x \in Y_k} |f(x) - f_j(x)| < \epsilon, \text{ se } i, j \geq N.$$

Com isso, temos que $f \in \mathcal{D}_b(Y)$. Usando esta mesma desigualdade, provamos que a sequência (f_n) converge para f em $\mathcal{D}_b(Y)$, e portanto $\mathcal{D}_b(Y)$ é uma álgebra de Fréchet.

Como $p_n(f) = \sup_{x \in Y_n} |f(x)|$, temos que $p_n(f^2) = p_n(f)^2, \forall f \in \mathcal{D}_b(Y), \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\mathcal{D}_b(Y)$ é uma uF-álgebra. □

Definição 2.32. Diremos que uma sub-álgebra $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}_b(Y)$ é uma *álgebra do tipo* $\mathcal{A}_b(Y)$ se $\mathcal{A}$ é uma subálgebra fechada de $\mathcal{D}_b(Y)$ (na topologia definida acima) que contém as constantes e separa os pontos de Y. Tais álgebras serão denotadas por $\mathcal{A}_b(Y)$.

Em particular, cada álgebra do tipo $\mathcal{A}_b(Y)$ é uma uF-álgebra.

Exemplo 2.33. Cada álgebra de Banach uniforme em Y dada pela Definição 2.2 é obviamente uma álgebra do tipo $\mathcal{A}_b(Y)$.

Exemplo 2.34. A uF-álgebra $\mathcal{C}(X)$, onde X é um $k-$espaço hemicompacto, dada no Exemplo 1.76 é uma álgebra do tipo $\mathcal{A}_b(Y)$ para $Y = X$.

Exemplo 2.35. Sejam E um espaço de Banach, $U \subset E$ uma aberto. As uF-álgebras abaixo (apresentadas na Seção 1.3) são exemplos de álgebras do tipo $\mathcal{A}_b(Y)$:

(a) $\mathcal{H}_{bK}(E)$, para $Y = E$;

(b) $\mathcal{H}_b(U)$, para $Y = U$;

(c) $\mathcal{H}_{wu}(U)$, para $Y = U$;

(d) $\mathcal{H}_{w^*u}(U)$, para $Y = U$;

(e) $\mathcal{H}_d(U)$, para $Y = U$.

Nos resultados seguintes, consideramos sempre uF-álgebras $\mathcal{A} = \mathcal{A}_b(Y)$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_b(X)$ como definidas em 2.32, onde

$$M_{\mathcal{A}_b(Y)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n,\ M_{\mathcal{B}_b(X)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n,\ Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \text{ e } X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Para simplificar a terminologia, diremos apenas que $\mathcal{A}_b(Y)$ é uma uF-álgebra.

Da mesma forma como fizemos na Seçao 2.1, definimos em Y a topologia determinada pelas funções de $\mathcal{A}_b(Y)$, isto é, dadas uma rede (y_α) em Y e $y \in Y$, temos que $y_\alpha \to y$ se e somente se $f(y_\alpha) \to f(y)$, para toda $f \in \mathcal{A}_b(Y)$.

Observação 2.36. Definamos a aplicação $\delta : Y \to M_{\mathcal{A}_b(Y)}$ dada por $\delta_y(f) = f(y)$, para todo $y \in Y$ e toda $f \in \mathcal{A}_b(Y)$. Pode-se mostrar facimente que a aplicação δ é um homeomorfismo sobre a sua imagem e iremos fazer, quando for conveniente, a identificação $Y \leftrightarrow \delta(Y)$.

Definição 2.37. Seja L um subconjunto de Y_n, para algum $n \in \mathbb{N}$. Definimos:

$$\widehat{L}_{\mathcal{A}} = \{y \in Y; |f(y)| \leq \sup_{x\in L} |f(x)|, \forall f \in \mathcal{A}_b(Y)\},$$

e

$$\widehat{\delta(L)}_{\mathcal{A}} = \{\varphi \in M_{\mathcal{A}_b(Y)}; |\hat{f}(\varphi)| \leq \sup_{x\in L} |f(x)|, \forall f \in \mathcal{A}_b(Y)\}.$$

Notemos que $\widehat{L}_{\mathcal{A}} \subset \widehat{\delta(L)}_{\mathcal{A}}$.

A Proposição 2.38 estabelece algumas propriedades dos conjuntos Y_n:

Proposição 2.38. Seja $\mathcal{A}_b(Y)$ uma uF-álgebra. Então:

(i) $\delta(Y_n) \subset K_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\delta(Y_n)$ é β-limitado em $M_{\mathcal{A}}$;

(iii) $\overline{\delta(Y_n)}^{\sigma(\mathcal{A}',\mathcal{A})}$ é $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$-compacto;

(iv) $\widehat{\delta(Y_n)}_{\mathcal{A}} = K_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Lembremos primeiramente que, por (1.4), temos

$$K_n = M_{\mathcal{A}_n} = \{\varphi \in M_{\mathcal{A}}; |\varphi(f)| \leq p_n(f), \forall f \in \mathcal{A}\}. \tag{2.7}$$

(i) Se $y \in Y_n$, temos

$$|\,\delta_y(f)| = |f(y)| \leq \sup_{z \in Y_n} |f(z)| = p_n(f),\ \forall f \in \mathcal{A},$$

e portanto, por (2.7) temos $\delta_y \in K_n$ ou seja, $\delta(Y_n) \subset K_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Segue de (i) e do Lema 1.97.

(iii) Resulta de (i) e do fato de $K_n \subset M_{\mathcal{A}}$ ser $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})-$compacto.

(iv) Consequência imediata de (2.7). $\square$

Proposição 2.39. Seja $\mathcal{A}_b(Y)$ uma uF-álgebra com Y conexo. Então $M_{\mathcal{A}_b(Y)}$ também é conexo.

Demonstração: Suponhamos que existem dois subconjuntos disjuntos O_1 e O_2, abertos e fechados em $M_{\mathcal{A}_b(Y)}$ e tais que $M_{\mathcal{A}_b(Y)} = O_1 \cup O_2$.

Como a aplicação $\delta : Y \to M_{\mathcal{A}_b(Y)}$ é contínua, podemos supor, sem perda de generalidade que $\delta(Y) \subset O_1$. Em particular temos que $\delta(Y_n) \subset O_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema 1.73 (Shilov), existe $f_0 \in \mathcal{A}_b(Y)$ tal que

$$\hat{f}_0(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \varphi \in O_2, \\ 0, & \text{se } \varphi \notin O_2. \end{cases}$$

Mas desta forma temos que $\widehat{\delta(Y_n)}_{\mathcal{A}} \cap O_2 = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De fato, tomando $\varphi \in \widehat{\delta(Y_n)}_{\mathcal{A}} \cap O_2$ temos

$$1 = |\varphi(f_0)| \leq \sup_{y \in Y_n} |f_0(y)| \leq \sup_{\varphi \in O_1} |\hat{f}(\varphi)| = 0,$$

o que é um absurdo! Desta forma, lembrando que $K_n = \widehat{\delta(Y_n)}_{\mathcal{A}}$ (Proposição 2.38) concluímos que

$$K_n \cap O_2 = \widehat{\delta(Y_n)}_{\mathcal{A}} \cap O_2 = \emptyset, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sendo assim, temos

$$M_{\mathcal{A}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widehat{\delta(Y_n)}_{\mathcal{A}}$$

e portanto $M_{\mathcal{A}} \cap O_2 = \emptyset$ e $O_2 = \emptyset$. Assim, mostramos que $M_{\mathcal{A}}$ é conexo. $\square$

Seguindo as mesmas ideias do Exemplo 2.11, temos os seguintes exemplos:

Exemplo 2.40. $M_{\mathcal{C}(X)}$ é conexo se X é conexo, onde $\mathcal{C}(X)$ é a uF-álgebra do Exemplo 1.76.

Exemplo 2.41. Sejam E um espaço de Banach e U um aberto conexo de E. Então $M_{\mathcal{H}_{bK}(E)}$, $\mathcal{H}_b(U)$, $\mathcal{H}_{wu}(U)$, $\mathcal{H}_{w^*u}(U)$ e $\mathcal{H}_d(U)$ são conexos.

Denotemos por $\delta_1 : Y \to M_{\mathcal{A}_b(Y)}$ e $\delta_2 : X \to M_{\mathcal{B}_b(X)}$ as aplicações avaliação.

Agora notemos que se $g : X \longrightarrow Y$ é contínua e tal que $f \circ g \in \mathcal{B}_b(X)$, sempre que $f \in \mathcal{A}_b(Y)$, temos que g induz um homomorfismo unitário contínuo

$$\begin{array}{rcccl} T_g & : & \mathcal{A}_b(Y) & \longrightarrow & \mathcal{B}_b(X) \\ & & f & \longmapsto & f \circ g. \end{array}$$

Por outro lado, do operador T_g obtemos o operador adjunto espectral $\overline{g} : M_{\mathcal{B}_b(X)} \to M_{\mathcal{A}_b(Y)}$.

Definição 2.42. Sejam $\mathcal{A}_b(Y)$ e $\mathcal{B}_b(X)$ uF-álgebras e $T : \mathcal{A}_b(Y) \to \mathcal{B}_b(X)$ um homomorfismo unitário. Diremos que T é um *operador de composição usual* quando T é induzido por uma aplicação $g : X \to Y$.

Observação 2.43. Utilizando os mesmos argumentos da Proposição 2.12 e Observação 2.13, podemos mostrar que se T_g é um operador de composição usual, então a relação existente entre g e $\overline{g}$ é dada por $g = \delta_1^{-1} \circ \overline{g} \circ \delta_2$ e que um homomorfismo unitário qualquer $T : \mathcal{A}_b(Y) \to \mathcal{B}_b(X)$ é um operador de composição usual se e somente se $\overline{g}|_{\delta_2(X)} : \delta_2(X) \to \delta_1(Y)$ está bem definida.

Podemos, portando, estabelecer o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "\delta_2"'] & & Y \\ M_{\mathcal{B}_b(X)} \supset \delta_2(X) \arrow[r, "\bar{g}"'] & \delta_1(Y) \subset M_{\mathcal{A}_b(Y)} \arrow[ur, "\delta_1^{-1}"'] & \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

Daqui em diante, em muitas demonstrações, utilizaremos a Observação 2.36 para identificar $Y \leftrightarrow \delta_1(Y)$ e $X \leftrightarrow \delta_2(X)$ e o diagrama 2.8 será utilizado para denotar $\bar{g}$ simplesmente por g.

Proposição 2.44. Seja $\mathcal{A}_b(Y)$ uma uF-álgebra . São equivalentes:

(i) a aplicação avaliação $\delta : Y \to M_{\mathcal{A}_b(Y)}$ é sobrejetiva;

(ii) para cada homomorfismo unitário contínuo $T : \mathcal{A}_b(Y) \to \mathcal{B}_b(X)$, temos que $\delta_2(x) \circ T \in \delta_1(Y)$, para cada uF-álgebra $\mathcal{B}_b(X)$ e para cada $x \in X$;

(iii) cada homomorfismo unitário contínuo $T : \mathcal{A}_b(Y) \to \mathcal{B}_b(X)$ é um operador de composição usual, para cada uF-álgebra $\mathcal{B}_b(X)$.

Demonstração: A demonstração segue as mesmas idéias da Proposição 2.14. $\square$

Observação 2.45. Sejam $\mathcal{A}_b(Y)$ e $\mathcal{B}_b(X)$ uF-álgebras.

(i) Fazendo a identificação $Y \leftrightarrow \delta_1(Y)$, segue da Proposição 2.44 que $Y = M_{\mathcal{A}_b(Y)}$ se, e somente se, todo homomorfismo unitário $T : \mathcal{A}_b(Y) \to \mathcal{B}_b(X)$ é um operador de composição usual.

(ii) Se $M_{\mathcal{A}_b(Y)} \neq Y$, a Proposição 2.44 permite afirmar que existe um homomorfismo unitário contínuo $T : \mathcal{A}_b(Y) \to \mathcal{A}_b(Y)$ que não é um operador de composição usual.

Definição 2.46. Dizemos que um subconjunto $Z \subset Y$ é Y*-limitado* se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Z \subset Y_n$.

Como no Exemplo 1.81, seja U um aberto em um espaço de Banach E, e consideremos a seguinte cobertura de U por abertos limitados:

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n,$$

onde

$$U_n = \left\{ x \in U; \|x\| < n \quad \text{e} \quad d_{_U}(x) > \frac{1}{2^n} \right\}.$$

A álgebra $\mathcal{H}_b(U)$ é uma uF-álgebra com a topologia gerada pelas seminormas

$$p_n(f) = \sup_{x \in U_n} |f(x)|,$$

e portanto podemos expressar o espectro $M_{\mathcal{H}_b(U)}$ como

$$M_{\mathcal{H}_b(U)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n,$$

onde cada K_n é compacto em $M_{\mathcal{A}}$ e $K_n = (\widehat{\delta(U_n)})_{\mathcal{H}_b(U)}$. Além disso, podemos escrever

$$p_n(f) = \sup_{x \in U_n} |f(x)| = \sup_{x \in K_n} |\hat{f}(x)|.$$

Definição 2.47. Dizemos que Y é $\mathcal{A}$-*convexo* (resp. $\delta_{\mathcal{A}}$-*convexo*) se para cada $n \in \mathbb{N}$ dado, existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que $(\widehat{Y_n})_{\mathcal{A}} \subset Y_{k(n)}$ (resp. $(\widehat{\delta(Y_n)})_{\mathcal{A}} \subset \delta(Y_{k(n)})$).

Proposição 2.48. O conjunto Y é $\delta_{\mathcal{A}}$-convexo se e somente se $M_{\mathcal{A}} = \delta(Y)$ e Y é $\mathcal{A}$-convexo.

Demonstração: Suponhamos que Y é $\delta_{\mathcal{A}}-$convexo. Então

$$M_{\mathcal{A}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\widehat{\delta(Y_n)})_{\mathcal{A}} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \delta(Y_n) = \delta(Y),$$

e como sempre vale $\delta(Y) \subset M_{\mathcal{A}}$, temos que $M_{\mathcal{A}} = \delta(Y)$.

Além disso, para cada $n \in N$ temos que existe $k(n) \in N$ tal que

$$(\widehat{\delta(Y_n)})_{\mathcal{A}} \subset \delta(Y_{k(n)}).$$

Mas

$$\delta((\widehat{Y_n})_{\mathcal{A}}) \subset (\widehat{\delta(Y_n)})_{\mathcal{A}},$$

e portanto

$$\delta((\widehat{Y_n})_{\mathcal{A}}) \subset \delta(Y_{k(n)}),$$

e temos que Y é $\mathcal{A}-$convexo.

Reciprocamente, suponhamos que $\delta(Y) = M_{\mathcal{A}}$ e Y é $\mathcal{A}$-convexo. Notemos que

$$\delta(\widehat{(Y_n)}_{\mathcal{A}}) = \delta(Y) \cap \widehat{(\delta(Y_n))}_{\mathcal{A}} = \delta(Y) \cap K_n.$$

Assim, como Y é $\mathcal{A}$-convexo, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\delta(\widehat{(Y_n)}_{\mathcal{A}}) \subset \delta(Y_{k(n)}).$$

Desta forma,

$$\delta(Y) \cap \widehat{(\delta(Y_n))}_{\mathcal{A}} \subset \delta(Y_{k(n)})$$

e como $\delta(Y) = M_{\mathcal{A}}$, temos

$$M_{\mathcal{A}} \cap \widehat{(\delta(Y_n))}_{\mathcal{A}} \subset \delta(Y_{k(n)})$$

e lembrando que $\widehat{(\delta(Y_n))}_{\mathcal{A}} \subset M_{\mathcal{A}}$ temos

$$\widehat{(\delta(Y_n))}_{\mathcal{A}} \subset \delta(Y_{k(n)})$$

e portanto Y é $\delta_{\mathcal{A}}-$convexo. □

Proposição 2.49. Sejam $\mathcal{A} = \mathcal{A}_b(Y)$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_b(X)$ uF-álgebras e $T_g : \mathcal{A}_b(Y) \to \mathcal{B}_b(X)$ um homomorfismo unitário. Então $g(X_n) \subset M_{\mathcal{A}}$ é $\beta-$limitado, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Pela Proposição 2.38(ii), temos que cada X_n é $\beta-$limitado em $M_{\mathcal{B}}$. Agora basta seguir as mesmas ideias da Proposição 1.98. □

Definição 2.50. Sejam $\mathcal{A} = \mathcal{A}_b(Y)$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_b(X)$ uF-álgebras e $T : \mathcal{A}_b(Y) \longrightarrow \mathcal{B}_b(X)$ um homomorfismo unitário. Dizemos que T é *pontualmente limitado em* X se existe uma vizinhança de zero $V \subset \mathcal{A}$ tal que o conjunto $T(V) \subset \mathcal{B}_b(X)$ é pontualmente limitado, isto é, para cada $x \in X$, o conjunto $T(V)(x) = \{T(f)(x) : f \in V\}$ é limitado em $\mathbb{C}$.

Lembramos que $\mathcal{D}(X)$ é a uB-álgebra de todas as funções complexas definidas e limitadas em X, com a norma

$$||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|, \forall f \in \mathcal{D}(X)$$

(Veja Seção 2.1). Em particular, temos que $\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{B}_b(X)$.

A demonstração da Proposição 2.51 abaixo segue as mesmas idéias da Proposição 2.1 de [12].

Proposição 2.51. Sejam $\mathcal{A} = \mathcal{A}_b(Y)$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_b(X)$ uF-álgebras e $T : \mathcal{A}_b(Y) \longrightarrow \mathcal{B}_b(X)$ um homomorfismo pontualmente limitado em X. Então $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(X)$ e T é contínuo.

Demonstração: Seja V uma vizinhança de zero em $\mathcal{A}_b(Y)$ tal que $T(V)$ é pontualmente limitado em X. Podemos supor sem perda de generalidade que $V \cdot V \subset V$ e portanto $V^n \subset V, \forall n \in \mathbb{N}$. Seja agora $f \in V$. Assim, temos que $(f^n)_n \subset V$ e $\{T(f^n)\} = \{T(f)^n\}$ é um conjunto pontualmente limitado, ou seja, dado $x \in X$, existe $c_x > 0$ tal que

$$|T(f)^n(x)| = |T(f)(x)|^n \leq c_x, \forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in V,$$

e portanto

$$|T(f)(x)| \leq (c_x)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Assim,

$$|T(f)(x)| \leq 1, \forall x \in X, \forall f \in V$$

e, em particular, temos que

$$\sup_{x \in X} |T(f)(x)| \leq 1, \forall f \in V.$$

Portanto $T(f) \in \mathcal{D}(X)$, para toda $f \in V$. Mas como V é um conjunto absorvente, dado $h \in \mathcal{A}_b(Y)$, existe $\delta > 0$ tal que $\delta \cdot h \in V$ e portanto

$$\sup_{x \in X} |T(\delta \cdot h)(x)| = \delta \sup_{x \in X} |T(h)(x)| \leq 1,$$

ou seja,

$$\sup_{x \in X} |T(h)(x)| \leq \frac{1}{\delta},$$

e temos que $T(h) \in \mathcal{D}(X)$, para todo $h \in \mathcal{A}_b(Y)$. Além disso, considerando $T : \mathcal{A}_b(Y) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ temos que T é contínuo, visto que $\|T(f)\| \leq 1, \forall f \in V$. $\square$

Corolário 2.52. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uF-álgebras e $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo pontualmente limitado. Então $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}$, onde $\mathcal{D}$ é uma uB-álgebra que é sub-álgebra de $\mathcal{B}$ e T é contínuo.

Demonstração: Como $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são uF-álgebras, temos que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_b(Y)$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_b(X)$, para $Y = M_{\mathcal{A}}$ e $X = M_{\mathcal{B}}$. Agora, o resultado segue da Proposição 2.51. $\square$

Usando as técnicas da Proposição 2.3(b) de [12], conseguimos demonstrar a Proposição 2.53:

Proposição 2.53. Sejam $\mathcal{A} = \mathcal{A}_b(Y)$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_b(X)$ uF-álgebras. Um operador de composição usual $T_g : \mathcal{A}_b(Y) \longrightarrow \mathcal{B}_b(X)$ é pontualmente limitado em X se e somente se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(X) \subset \widehat{(Y_{n_0})}_{\mathcal{A}}$.

Demonstração: Suponhamos primeiramente que T_g é pontualmente limitado em X. Procedendo como na Proposição 2.51, podemos encontrar uma vizinhança V da origem tal que

$$\sup_{x \in X} |T(f)(x)| = \|T(f)\| \leq 1, \, \forall f \in V \subset \mathcal{A}. \tag{2.9}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$V = \{f \in \mathcal{A}; p_{n_0}(f) = \sup_{y \in Y_{n_0}} |f(y)| \leq a\},$$

para algum $0 < a < 1$ e algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Mostraremos que $g(X) \subset \widehat{(Y_{n_0})}_{\mathcal{A}}$. De fato, suponhamos por absurdo que existe $x \in X$ tal que

$$g(x) \notin \widehat{(Y_{n_0})}_{\mathcal{A}} = \{y \in Y; |f(y)| \leq \sup_{z \in Y_{n_0}} |f(z)|, \, \forall f \in \mathcal{A}\}.$$

Assim, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que

$$|f(g(x))| > \sup_{z \in Y_{n_0}} |f(z)|,$$

e portanto existe $b > 0$ tal que

$$|f(g(x))| > b > \sup_{z \in Y_{n_0}} |f(z)|,$$

e como $h = \frac{f}{b} \in \mathcal{A}$ temos que existe $h \in \mathcal{A}$ tal que

$$|h(g(x))| > 1 > \sup_{z \in Y_{n_0}} |h(z)|,$$

e portanto existe $0 < c < 1$ tal que

$$|h(g(x))| > 1 > c > \sup_{z \in Y_{n_0}} |h(z)|,$$

ou seja,

$$|h(g(x))| > 1 \quad \text{e} \quad \sup_{z \in Y_{n_0}} |h(z)| < c < 1. \tag{2.10}$$

Mas como $0 < c < 1$, temos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $c^m < a$, de onde temos

$$p_{n_0}(h^m) = \sup_{z \in Y_{n_0}} |h^m(z)| = \left(\sup_{z \in Y_{n_0}} |h(z)| \right)^m < c^m < a,$$

e portanto $h^m \in V$.

Por outro lado, por (2.10) temos $|T_g(h^m)(x)| = |h^m(g(x))| > 1$ e isto contradiz (2.9). Portanto $g(X) \subset \widehat{(Y_{n_0})}_{\mathcal{A}}$.

Reciprocamente, suponhamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(X) \subset \widehat{(Y_{n_0})}_{\mathcal{A}}$. Assim, consideremos o conjunto

$$V = \{f \in \mathcal{A}; p_{n_0}(f) = \sup_{z \in Y_{n_0}} |f(z)| < 1\}.$$

Desta forma, V é uma vizinhança de zero em $\mathcal{A}$. Além disso, dado $f \in V$ e $x \in X$ temos

$$|T_g(f)(x)| = |f(g(x))| \leq \sup_{z \in Y_{n_0}} |f(z)| = p_{n_0}(f) < 1,$$

e portanto T_g é pontualmente limitado em X. □

Corolário 2.54. Sejam $\mathcal{A}_b(Y)$ e $\mathcal{B}_b(X)$ uF-álgebras, onde Y é $\mathcal{A}-$convexo. Um operador de composição usual $T_g : \mathcal{A}_b(Y) \longrightarrow \mathcal{B}_b(X)$ é pontualmente limitado em X se e somente se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(X) \subset Y_{n_0}$.

Demonstração: Segue diretamente da Definição 2.47 e da Proposição 2.53. □

Estamos interessados em obter condições sob as quais um homomorfismo unitário $T : \mathcal{A}_b(Y) \to \mathcal{B}_b(X)$ seja um operador de composição usual.

A Proposição 2.55 abaixo generaliza a Proposição 3.1.1 de [27].

Proposição 2.55. Um homomorfismo unitário $T : \mathcal{A}(Y) \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ é um operador de composição usual se, e somente se, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que $g(X_n) \subset \widehat{(Y_{k(n)})}_{\mathcal{A}}$, onde g denota o adjunto espectral de T.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Da Proposição 2.38(iii), temos que X_n é relativamente compacto em $M_{\mathcal{B}}$ e $g : M_{\mathcal{B}} \longrightarrow M_{\mathcal{A}}$ é contínua, e portanto $g(X_n)$ é relativamente compacto em $M_{\mathcal{A}}$. Assim, como $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência fundamental de compactos para $M_{\mathcal{A}}$, existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que

$g(X_n) \subset K_{k(n)}$ e pela Proposição 2.38(iv) temos que $g(X_n) \subset (\widehat{Y_{k(n)}})_{\mathcal{A}}$.

($\Leftarrow$) Seja $x \in X$. Como

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n,$$

existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_n$ e portanto $g(x) \in (\widehat{Y_{k(n)}})_{\mathcal{A}} \subset Y$, ou seja, $g(X) \subset Y$ e, consequentemente, T é um operador de composição usual. $\square$

Corolário 2.56. Sejam $\mathcal{A} = \mathcal{A}_b(Y)$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_b(X)$ uF-álgebras, $T : \mathcal{A}_b(Y) \longrightarrow \mathcal{B}_b(X)$ um homomorfismo unitário, onde Y é $\mathcal{A}-$convexo e $g = T'|_{M_{\mathcal{B}}}$. Então T é um operador de composição usual se, e somente se, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que $g(X_n) \subset Y_{k(n)}$.

Demonstração: Como Y é $\mathcal{A}-$convexo, basta notar que, dado $k(n) \in \mathbb{N}$, existe $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que $(\widehat{Y_{k(n)}})_{\mathcal{A}} \subset (Y_{n_{k_0}})$, e aplicar a Proposição 2.55. $\square$

No Teorema 2.70 apresentamos um resultado parcial sobre a compacidade do homomorfismo unitário $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são uF-álgebras, em termos do adjunto espectral $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$.

Lema 2.57. Se $\mathcal{A}$ é uma F-álgebra, então as topologias τ e τ_0 coincidem em $\mathcal{A}'$.

Demonstração: Basta notar que, se $\mathcal{A}$ é um espaço localmente convexo completo, então a envoltória absolutamente convexa de um compacto $K \subset \mathcal{A}'$ é compacta (Veja [18], pg. 235).$\square$

A demonstração do Teorema 2.58 abaixo foi baseada na demonstração da Proposição 1 de [16], pg. 282.

Teorema 2.58. ([16], pg. 282 ou [17], pg. 193) Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ F-álgebras e $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo contínuo. Se T é compacto então o seu operador adjunto $T' : (\mathcal{B}', \tau_0) \longrightarrow (\mathcal{A}', \tau_0)$ também é compacto.

Demonstração: Seja $V \subset \mathcal{A}$ uma vizinhança absolutamente convexa da origem tal que $K = T(V) \subset \mathcal{B}$ é relativamente compacto. Sejam K° e V° os conjuntos polares de K e V, respectivamente.

Como $T(V) \subset K$, temos que $T'(K^\circ) \subset V^\circ$. Ora, K° é uma vizinhança de zero em $\mathcal{B}'_c$ e portanto K° é uma vizinhança de zero em $(\mathcal{B}', \tau_0)$ (Lema 2.57). Como V é uma vizinhança de zero em $\mathcal{A}$, temos que V° é um subconjunto equicontínuo de $\mathcal{A}'$ (Veja [18], pg. 200, Proposição

6), e portanto $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$-relativamente compacto (Veja [18], pg. 201, Teorema 1), e assim, τ_0-relativamente compacto por razões de equicontinuidade (Veja [18], pg. 237, Lema 1). Portanto, o homomorfismo $T' : (\mathcal{B}', \tau_0) \longrightarrow (\mathcal{A}', \tau_0)$ também é compacto. $\square$

Proposição 2.59. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uF-álgebras, $T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um operador de composição compacto e suponha que $L \subset M_{\mathcal{B}}$ é limitado em $(\mathcal{B}', \tau_0)$. Então $g(L)$ é τ_0- relativamente compacto em $M_{\mathcal{B}}$.

Demonstração: Como $T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é um operador compacto, seja V uma vizinhança absolutamente convexa da origem em $\mathcal{A}$ tal que $T_g(V) = K$ é relativamente compacto em $\mathcal{B}$. Pelo Teorema 2.58, temos que o operador adjunto $T_g' : (\mathcal{B}', \tau_0) \longrightarrow (\mathcal{A}', \tau_0)$, também é compacto. Além disso, na demonstração do Teorema 2.58 vimos que K° é uma vizinhança de zero em $(\mathcal{B}', \tau_0)$ tal que $T_g'(K^\circ) \subset V^\circ$, e V° é τ_0-relativamente compacto em $\mathcal{A}'$.

Por outro lado, como L é τ_0-limitado, temos que existe $\lambda > 0$ tal que $L \subset \lambda \cdot K^\circ$ e portanto

$$g(L) = T_g'(L) \subset T_g'(\lambda \cdot K^\circ) = \lambda \cdot T_g'(K^\circ),$$

e temos

$$\overline{T_g'(L)}^{\tau_0} \subset \lambda \cdot \overline{T_g'(K^\circ)}^{\tau_0}$$

e como $\overline{T_g'(K^\circ)}^{\tau_0}$ é compacto, temos que $\overline{g(L)}^{\tau_0} \cap M_{\mathcal{B}}$ é τ_0-compacto em $M_{\mathcal{B}}$. $\square$

Definição 2.60. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uF-álgebras. Um homomorfismo unitário $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é *pontualmente limitado* se se existe uma vizinhança de zero $V \subset \mathcal{A}$ tal que $T(V) \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}(M_{\mathcal{B}})$, é pontualmente limitada, isto é, para cada $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$, o conjunto

$$\varphi(T(V)) = \{\widehat{T(f)}(\varphi) : f \in V\}$$

é limitado em $\mathbb{C}$.

Naturalmente, cada operador de composição usual $T_g : \mathcal{A}_b(Y) \to \mathcal{B}_b(X)$ pontualmente limitado é pontualmente limitado em X (Veja Definição 2.50).

Proposição 2.61. Sejam $\mathcal{A}$ uma uB-álgebra, $\mathcal{B}$ uma uF-álgebra e $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário. Então T é pontualmente limitado.

Demonstração: Seja V uma vizinhança do zero em $\mathcal{A}$. Como $(\mathcal{A}, ||\cdot||)$ é uma uB-álgebra, podemos supor sem perda de generalidade, que existe $c > 0$ tal que $||f|| \leq c$, para todo $f \in V$. Além disso, segue do Teorema 1.32 que $||\psi||_{\mathcal{A}'} = 1$, para todo $\psi \in M_{\mathcal{A}}$. Sendo assim,

$$|\varphi(T(f))| = |\hat{f}(g(\varphi))| = |g(\varphi)(f)| \leq ||g(\varphi)|| \cdot ||f|| < c, \ \forall \varphi \in M_{\mathcal{B}}, \ \forall f \in V.$$

Portanto, $T = T_g$ é pontualmente limitado. □

Proposição 2.62. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas uF-álgebras e $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um operador linear contínuo. Se T é fracamente compacto então T é pontualmente limitado.

Demonstração: Suponhamos que $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é fracamente compacto, e seja V uma vizinhança de zero tal que $T(V)$ é fracamente relativamente compacto em $\mathcal{B}$. Desta forma, $T(V)$ é limitado em $(\mathcal{B}, \sigma(\mathcal{B}, \mathcal{B}'))$, ou seja, $\varphi(T(V))$ é limitado em $\mathbb{C}$, para cada $\varphi \in \mathcal{B}'$. Em particular, tomando $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$ temos que $\varphi(T(V))$ é limitado em $\mathbb{C}$, ou seja, $T(V)$ é pontualmente limitado, e portanto T é um operador pontualmente limitado. □

Corolário 2.63. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas uF-álgebras e $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um operador linear contínuo. Se T é compacto então T é pontualmente limitado.

O Teorema 2.64 estabelece condições necessárias e suficientes para que um homomorfismo unitário entre uF-álgebras seja pontualmente limitado:

Teorema 2.64. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uF-álgebras e $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um operador de composição. Então T é pontualmente limitado se e somente se $g(M_{\mathcal{B}})$ é relativamente compacto em $M_{\mathcal{A}}$, onde g denota o adjunto espectral de T.

Demonstração: Suponhamos primeiramente que $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é pontualmente limitado. Então, pelo Corolário 2.52 temos que T é contínuo e portanto $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ é contínua.

Além disso, também pelo Corolário 2.52, temos que existe uma uB-álgebra $\mathcal{D}$, sub-álgebra de $\mathcal{B}$, tal que $T : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$. Como $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ e esta inclusão é contínua, temos que $M_{\mathcal{B}} \subset M_{\mathcal{D}}$.

Seja $g_1 : M_{\mathcal{D}} \to M_{\mathcal{A}}$ dada por $g_1(\varphi) = \varphi \circ T$, $\forall \varphi \in M_{\mathcal{D}}$. É claro que g_1 está bem definida, é contínua (topologia de Gelfand), $g_1|_{M_{\mathcal{B}}} = g$ e $T = T_{g_1}$.

Como $\mathcal{D}$ é uma uB-álgebra, temos que $M_{\mathcal{D}}$ é compacto (Veja Teorema 1.32), e portanto $g_1(M_{\mathcal{D}})$ é compacto em $M_{\mathcal{A}}$, ou seja, existe K_n tal que $g_1(M_{\mathcal{D}}) \subset K_n$. Agora notemos que

$M_{\mathcal{B}} \subset M_{\mathcal{D}}$ e portanto $g_1(M_{\mathcal{B}}) \subset g_1(M_{\mathcal{D}})$, ou seja, $g_1(M_{\mathcal{B}}) = g(M_{\mathcal{B}}) \subset K_n$ e portanto $g(M_{\mathcal{B}})$ é relativamente compacto em $M_{\mathcal{A}}$.

Reciprocamente, suponhamos que $g(M_{\mathcal{B}})$ é relativamente compacto em $M_{\mathcal{A}}$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(M_{\mathcal{B}}) \subset K_{n_0}$.

Seja

$$V = \{f \in \mathcal{A};\, p_{n_0}(f) < 1\},$$

onde

$$p_{n_0}(f) = \sup_{x \in K_{n_0}} |f(x)|,\ \forall f \in \mathcal{A}.$$

Assim, V é uma vizinhança de zero em $\mathcal{A}$. Agora notemos que $T(V)$ é pontualmente limitado, pois dados $f \in V$ e $\varphi \in M_{\mathcal{B}}$, temos que $g(\varphi) \in K_{n_0}$ e portanto

$$|\widehat{T(f)}(\varphi)| = |(\hat{f} \circ g)(\varphi)| = |g(\varphi)(f)| \leq \sup_{y \in K_{n_0}} |f(y)| = p_{n_0}(f) < 1.$$

Assim, $|\widehat{T(f)}(\varphi)| < 1$, $\forall \varphi \in M_{\mathcal{A}}$, $\forall f \in V$, e portanto $T(V)$ é pontualmente limitado. $\square$

Corolário 2.65. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uF-álgebras e seja $T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um operador de composição tal que $\hat{f}(g(M_{\mathcal{B}}))$ é limitado em $\mathbb{C}$, para cada $f \in \mathcal{A}$. Então T_g é pontualmente limitado.

Demonstração: Suponhamos que $g : M_{\mathcal{B}} \longrightarrow M_{\mathcal{A}}$ é tal que $\hat{f}(g(M_{\mathcal{B}}))$ é limitado em $\mathbb{C}$, para cada $f \in \mathcal{A}$. Sendo assim, temos que $g(M_{\mathcal{B}})$ é equicontínuo (Veja [18], pg. 212, Proposição 2) e portanto $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$-relativamente compacto em $(\mathcal{A}', \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ (Veja [18], pg.201, Teorema 1). Desta forma,

$$\overline{g(M_{\mathcal{B}})}^{\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})} \subset M_{\mathcal{A}}$$

é $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$-compacto em $M_{\mathcal{A}}$ e portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$g(M_{\mathcal{B}}) \subset \overline{g(M_{\mathcal{B}})}^{\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})} \subset K_{n_0}$$

e portanto, $g(M_{\mathcal{B}})$ é relativamente compacto em $M_{\mathcal{A}}$ e pelo Teorema 2.64 temos que T_g é pontualmente limitado. $\square$

A Proposição 2.66 abaixo generaliza em parte a Proposição 2.12 de [12].

Proposição 2.66. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uF-álgebras e $T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um operador de composição compacto. Se $N \subset M_{\mathcal{B}}$ é um conjunto β-limitado em $M_{\mathcal{B}}$ então $g(N)$ é β-relativamente compacto em $M_{\mathcal{A}}$.

Demonstração: Como $T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é compacto, temos que $T_g' : (\mathcal{B}', \beta) \longrightarrow (\mathcal{A}', \beta)$ também é compacto ([16], pg. 258 ou [17], pg. 193). Sejam V uma vizinhança de zero em $(\mathcal{B}', \beta)$ tal que $T_g'(V) = L$ é β-relativamente compacto em $(\mathcal{A}', \beta)$ e $N \subset M_{\mathcal{B}}$ um subconjunto β-limitado. Desta forma, existe $\lambda > 0$ tal que $N \subset \lambda \cdot V$ e portanto $T_g'(N) \subset T_g'(\lambda \cdot V) = \lambda \cdot L$. Assim $\overline{g(N)}^{\beta} = \overline{T_g'(N)}^{\beta} \subset \overline{\lambda \cdot L}^{\beta} = \lambda \cdot L$ e temos que $g(N)$ é β-relativamente compacto. Portanto $\overline{g(N)}^{\beta} \cap M_{\mathcal{A}}$ é β-relativamente compacto em $M_{\mathcal{A}}$. $\square$

Corolário 2.67. Seja $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uF-álgebras e $T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um operador de composição compacto. Se $M_{\mathcal{B}}$ é um conjunto β-limitado então $g(M_{\mathcal{B}})$ é β-relativamente compacto em $M_{\mathcal{A}}$.

Demonstração: Basta tomar $N = M_{\mathcal{B}}$ na Proposição 2.66. $\square$

Corolário 2.68. Sejam $\mathcal{A}$ uma uma uF-álgebra, $\mathcal{B}$ uma uB-álgebra e $T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um operador de composição compacto. Então $g(M_{\mathcal{B}})$ é relativamente compacto em $(M_{\mathcal{A}}, \beta)$.

Demonstração: Basta notar que, pelo Teorema 1.32(ii), temos que $M_{\mathcal{B}}$ é limitado em $(\mathcal{B}', \|\cdot\|)$ e portanto $\beta-$limitado. Assim, pela Proposição 2.66 temos que $g(M_{\mathcal{B}})$ é relativamente compacto em $(M_{\mathcal{A}}, \beta)$. $\square$

Corolário 2.69. Sejam $\mathcal{A} = \mathcal{A}_b(Y)$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_b(X)$ uF-álgebras, $T : \mathcal{A}_b(Y) \to \mathcal{B}_b(X)$ um homomorfismo unitário compacto e $g : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ o adjunto espectral de T. Então $g(X_n)$ é $\beta-$relativamente compacto em $M_{\mathcal{A}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Lembremos que, pelo Lema 2.38(ii), temos que X_n é $\beta-$limitado, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, a Proposição 2.66 garante que $g(X_n)$ é $\beta-$relativamente compacto em $M_{\mathcal{A}}$. $\square$

Teorema 2.70. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ uF-álgebras com espectros $M_{\mathcal{A}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ e $M_{\mathcal{B}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$, respectivamente, $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário e $g = T'|_{M_{\mathcal{B}}}$. Consideremos as seguintes afirmações:

(i) T é um operador compacto;

(ii) $g(L_n)$ é relativamente compacto em $(M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $g|_{L_n} : L_n \to (M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$ é contínua, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $n \in \mathbb{N}$ dado. Como $T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é um operador compacto, seja V uma vizinhança de zero em $\mathcal{A}$ tal que $T_g(V) = L$, é relativamente compacto em $\mathcal{B}$. Pelo Teorema 2.58, temos que o operador adjunto $T'_g : (\mathcal{B}', \tau_0) \longrightarrow (\mathcal{A}', \tau_0)$, também é compacto. Além disso, na demonstração do Teorema 2.58 vimos que L° é uma vizinhança de zero em $(\mathcal{B}', \tau_0)$ tal que $T'_g(L^\circ) \subset V^\circ$ e V° é τ_0-relativamente compacto em $(\mathcal{A}', \tau_0)$.

Por outro lado, pelo Lema 1.97, temos que L_n é um subconjunto β-limitado de $(M_{\mathcal{B}}, \beta)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\tau_0 \leq \beta$, temos que L_n é um subconjunto τ_0-limitado de $(M_{\mathcal{B}}, \tau_0)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, existe $\lambda > 0$ tal que $L_n \subset \lambda \cdot L^\circ$, e portanto $g(L_n) = T'_g(L_n) \subset T'_g(\lambda \cdot L^\circ) = \lambda \cdot T'_g(L^\circ)$ e temos $\overline{T'_g(L_n)}^{\tau_0} \subset \lambda \cdot \overline{T'_g(L^\circ)}^{\tau_0}$ e como $\overline{T'_g(L^\circ)}^{\tau_0}$ é τ_0-compacto, temos que $\overline{g(L_n)}^{\tau_0} \cap M_{\mathcal{A}}$ é compacto em $(M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$ e portanto $g(L_n)$ é relativamente compacto em $(M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Seja $n \in \mathbb{N}$ dado e suponhamos que $g(L_n)$ é relativamente compacto em $(M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$.

Desta forma, a aplicação identidade $Id : (\overline{g(L_n)}^{\tau_0}, \tau_0) \longrightarrow (\overline{g(L_n)}^{\tau_0}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ é um homeomorfismo. Além disso, as seguintes aplicações são contínuas:

$$
\begin{array}{rcccc}
g|_{L_n} & : & L_n & \longrightarrow & (g(L_n), \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})) \\
 & & \varphi & \longmapsto & g(\varphi)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc}
i & : & (\overline{g(L_n)}^{\tau_0}, \tau_0) & \longrightarrow & (M_{\mathcal{A}}, \tau_0) \\
 & & \varphi & \longmapsto & \varphi
\end{array}
$$

Portanto $g|_{L_n} = i \circ (Id)^{-1} \circ g|_{L_n} : L_n \to (M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$ é contínua.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Como $L_n \subset (M_{\mathcal{B}}, \sigma(\mathcal{B}', \mathcal{B}))$ é compacto e $g|_{L_n} : L_n \to (M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$ é contínua, segue diretamente que $g(L_n)$ é compacto, e portanto relativamente compacto, em $(M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$. $\square$

Conclusão e Questões Abertas

Neste trabalho, focamos questões relacionadas a operadores de composição entre Álgebras de Banach Uniformes (uB-álgebras) e Álgebras de Fréchet Uniformes (uF-álgebras). Procuramos estabelecer propriedades do operador de composição T_g em termos da aplicação g que induz tal operador. Primeiramente, no Capítulo 1, abordamos álgebras de Banach uniformes e álgebras de Fréchet uniformes. Introduzimos neste cápítulo definições e propriedades básicas dos operadores de composição entre estas álgebras. No Capítulo 2 definimos álgebras uniformes em conjuntos arbitrários e estudamos operadores de composição entre estas álgebras.

No capítulo 2, trabalhamos com operadores de composição entre álgebras de Banach uniformes abstratas e, como consequência, estabelecemos corolários para álgebras de Banach clássicas de funções holomorfas, como por exemplo, a álgebra $\mathcal{H}^\infty(U)$, onde U é um aberto de um espaço de Banach E.

Inspirados em [7], definimos álgebras de Banach uniformes definidas em um conjunto arbitrário Y, que denotamos por $\mathcal{A}(Y)$. Na Proposição 2.10, mostramos que $\delta(Y)$ é conexo se e somente se $M_{\mathcal{A}(Y)}$ é conexo, generalizando o Exemplo 11 de [9], onde o resultado é provado para a uB-álgebra $\mathcal{H}^\infty(B_E)$. Na Proposição 2.14, demonstramos que a aplicação avaliação $\delta : Y \to M_{\mathcal{A}}$ é sobrejetiva se e somente se cada homomorfismo unitário (contínuo) $T : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ é um operador de composição usual, para cada uB-álgebra $\mathcal{B}(X)$.

Ainda neste capítulo, estabelecemos condições necessárias e suficientes para compacidade (Teorema 2.19) e compacidade fraca (Teorema 2.25) para operadores de composição usuais entre uB-álgebras, em termos do adjunto espectral $\overline{g}$ do homomorfismo unitário T. No Teorema 2.19, provamos que os ítens: (i) $T : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{B}(X)$ *é compacto;* (ii) $\overline{g}(X)$ *é relativamente compacto em* $(\overline{Y}, ||\cdot||)$ e (iii) $\overline{g}|_{\overline{X}} : \overline{X} \to (\overline{Y}, ||\cdot||)$ *é contínua;* são equivalentes. No mesmo sentido, no

Teorema 2.25 provamos que são equivalentes: (i) *T é fracamente compacto;* (ii) *A aplicação $\overline{g} : \overline{X} \to (\overline{Y}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ é contínua;* e (iii) *$\overline{g}(\overline{X})$ é relativamente compacto em $(\overline{Y}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$.*

Como consequência do Teorema 2.19 temos o Corolário 2.23, onde provamos que se $(E, ||\cdot||_E)$ é um espaço de Banach, $U \subset E$ é um aberto limitado e $T_g : \mathcal{H}^\infty(U) \to \mathcal{H}^\infty(U)$ é um operador de composição usual induzido pela aplicação $g : U \to U$, então T_g é compacto se e somente se $g(U)$ é relativamente compacto em $(U, ||\cdot||_E)$. O Corolário 2.23 generaliza a Proposição 3 de [1], onde o resultado é provado, em parte, para a uB-álgebra $\mathcal{H}^\infty(B_E)$. Neste contexto, deixamos em aberto para estudos posteriores um resultado análogo ao do Corolário 2.23 para operadores de composição fracamente compactos.

Também neste capítulo, abordamos uF-álgebras definidas em um conjunto arbitrário Y, que denotamos por $\mathcal{A}_b(Y)$. Seguindo as mesmas idéias da Proposição 2.14, a Proposição 2.44 afirma que a aplicação avaliação $\delta : Y \to M_{\mathcal{A}_b(Y)}$ é sobrejetiva se e somente se cada homomorfismo unitário contínuo $T : \mathcal{A}_b(Y) \to \mathcal{B}_b(X)$ é um operador de composição usual, para cada uF-álgebra $\mathcal{B}_b(X)$.

Neste capítulo, trabalhamos com operadores de composição usuais pontualmente limitados. A Proposição 2.51 mostra que se $T : \mathcal{A}_b(Y) \longrightarrow \mathcal{B}_b(X)$ um homomorfismo pontualmente limitado em X, então $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(X)$ e T é contínuo, onde $\mathcal{D}(X)$ é a uB-álgebra das funções complexas definidas e limitadas em X. A Proposição 2.51 generaliza em parte a Proposição 2.1 de [12] onde o resultado é provado para o caso $\mathcal{H}_b(U)$.

A Proposição 2.55 afirma que se $T : \mathcal{A}_b(Y) \longrightarrow \mathcal{B}_b(X)$ um homomorfismo unitário, então $T = T_g$ é um operador de composição usual se, e somente se, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que $g(X_n) \subset \widehat{(Y_{k(n)})}_{\mathcal{A}}$. A Proposição 2.55 generaliza a Proposição 3.1.1 de [27], onde o resultado é provado para a álgebra $\mathcal{H}_b(U)$, onde U é um aberto de um espaço de Banach.

Na Proposição 2.66, provamos que se $T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é um operador de composição compacto e $N \subset M_{\mathcal{B}}$ é um conjunto β-limitado em $M_{\mathcal{B}}$, então $g(N)$ é β-relativamente compacto em $M_{\mathcal{A}}$. Esta proposição generaliza em parte a Proposição 2.12 de [12], onde é considerado o caso em que $\mathcal{A} = \mathcal{H}_b(U)$ e $\mathcal{B} = \mathcal{H}_b(O)$.

No Teorema 2.70, estabelecemos, em parte, um análogo do Teorema 2.29 para uF-álgebras. Provamos que, para $T = T_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo unitário entre uF-álgebras, vale que (ii) e (iii) são equivalentes, e que (i) implica (ii), onde (i) T_g é um operador compacto; (ii) $g(L_n)$ é relativamente compacto em $(M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$; e (iii) $g|_{L_n} : L_n \to (M_{\mathcal{A}}, \tau_0)$ é contínua, para todo $n \in \mathbb{N}$.

No Capítulo 2, deixamos algumas questões em aberto para estudos futuros, como por exemplo, investigar a existência de resultados análogos aos Teoremas 2.19 e 2.25 para operadores de composição compactos ou fracamente compactos entre uF-álgebras.

Durante a elaboração da Tese, estudamos também Partes de Gleason e Conjuntos Hiperbilicamente Limitados (Veja [8] e [9]), e suas relações com operadores compactos e fracamente compactos para uB-álgebras e uF-álgebras, mas não obtivemos resultados expressivos. Porém, temos interesse de continuar estudando este assunto no futuro.

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] R. Aron, P. Galindo and M. Lindstrom, *Compact homomorphisms between algebras of analytic functions*, Studia Mathematica **123** (1997), 235-247.

[2] F. Behrouzi, *Homomorphisms of certain Banach function algebras*, Proceedings of the Indian Academy of Sciences **112**(2) (2002), 331-336.

[3] F. Behrouzi and H. Mahyar, *Compact homomorphisms of URM algebras*, American Mathematical Society **133**(4) (2004), 1205-1212.

[4] D. Carando, *A characterization of composition operators on algebras of analytic functions*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **51** (2008), 305-313.

[5] C. Cowen and B. Maccluer, *Composition Operators on Spaces of Analytic Funcions*, Studies in Advanced Mathematics, 1995.

[6] N. Dunford & J. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, John Wiley & Sons, 1988.

[7] P. Galindo, T. W. Gamelin and M. Lindström, *Composition operators on uniform algebras and the pseudohyperbolic metric*, Journal of the Korean Mathematical Society **41** (2004), 1-20.

[8] P. Galindo, T. W. Gamelin and M. Lindström, *Composition operators on uniform algebras, essential norms, and hiperbolically bounded sets*, Transactions of the American Mathematical Society **359**(5) (2007), 2109-2121.

[9] P. Galindo and M. Lindström, *Gleason parts and weakly compact homomorphisms between uniform Banach algebras*, Monatshefte Für Mathematik **128** (1999), 89-97.

[10] P. Galindo and M. Lindström, *Weakly compact homomorphisms between small algebras of analytic functions*, Bulletin of the London Mathematical Society **33** (2001), 715-726.

[11] P. Galindo, M. Lindström and R. Ryan, *Weakly compact composition operators between algebras of bounded analytic functions*, American Mathematical Society **128**(1) (1999), 149-155.

[12] P. Galindo, L. Lourenço and L. Moraes, *Compact and weakly homomorphisms on Fréchet algebras of holomorphic functions*, Mathematische Nachrichten **236** (2002), 109-118.

[13] T. Gamelin, *Homomorphisms of uniform algebras*, North Holland Amsterdam (2001) 95-105 .

[14] T. Gamelin, *Uniform Algebras*, Chelsea Publishing Company, 1984.

[15] H. Goldmann, *Uniform Fréchet Álgebras*, Elsevier Science Publishers B.V., 1990.

[16] A. Grothendieck, *Espaces Vectoriels Topologiques*, Sociedade Brasileira de Matemática, 1958.

[17] A. Grothendieck, *Topological Vector Spaces*, Gordon and Breach - Science Publishers, 1975.

[18] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distribuitions*, Vol. 1, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

[19] U. Klein, *Kompakte multiplikative operatoren auf uniformen algebren.* (German) [Compact multiplicative operators and uniform algebras] Mitteilungen aus dem Mathematischen Seminar Giessen **232** (1997), 1-120.

[20] B. O. Koopman, *Hamiltonian systems and tranformations in Hilbert space*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **17** (1931), 315-318.

[21] M. Lourenço, L. Moraes and O. Paques *Espectros de álgebras de aplicações holomorfas*, Mini-curso SBA, 45° Seminário Brasileiro de Análise, (1997), 1-32.

[22] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, 1998.

[23] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North - Holland, 1986.

[24] J. Mujica, *Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **324**(2) (1991), 867-887.

[25] J. Munkres, *Topology*, Prentice-Hall do Brasil Ltda, 2000.

[26] R. K. Singh and J. S. Manhas, *Compositions Operators on Function Spaces*, North-Holland, 1993.

[27] D. Vieira, *Theorems of Banach-Stone type for algebras of holomorphic functions on infinite dimensional spaces*, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy **106** (2006), 97-113.

[28] W. Zelazko, *Banach Algebras*, Elselvier Publiscing Company, 1973.