Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Operadores de extensão de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos

por

Kuo Po Ling
Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: **Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui**

Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Operadores de extensão de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Kuo Po Ling** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 14 de setembro de 2007.

Prof. Dr. **Jorge Tulio Mujica Ascui**.
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui.

Prof. Dr. Mario Carvalho de Matos.

Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio.

Prof. Dra. Luiza Amália de Moraes.

Prof. Dra. Mary Lilian Lourenço.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção do título de **DOUTORA EM MATEMÁTICA**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Kuo Po Ling
K964o Operadores de extensão de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos/Kuo Po Ling -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Jorge Túlio Mujica Ascui
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Banach, Espaços de. 2. Polinômios. 3. Isomorfismos (Matemática). I. Mujica, Jorge Túlio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Extension operators of multilinear mappings or homogeneous polynomials

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Banach space. 2. Polynomials. 3. Isomorphisms (Mathematics).

Área de concentração: Análise funcional

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio (IMECC–Unicamp)
Profa. Dra. Luíza Amália de Moraes (UFRJ)
Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço (IME-USP)

Data da defesa: 14/09/2007

Programa de Pós-Graduação: Doutora em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 14 de setembro de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

Prof. (a). Dr (a). MARIO CARVALHO DE MATOS

Prof. (a). Dr (a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

Prof. (a). Dr (a). LUIZA AMÁLIA DE MORAES

Prof. (a) Dr. (a) MARY LILIAN LOURENÇO

Ao meu pai Kuo Chin Fu
À minha mãe Kuo Shiu Mei Hsien

Agradecimentos

Por causa de vocês, a minha formação contém mais significado. Agradeço profundamente...

- A Deus pelas ditas e experiências da vida que me concedeu durante o curso de doutorado.
- À minha família, especialmente aos meus pais Kuo Chin Fu e Kuo Shiu Mei Hsien que não poupam sacrifícios para me criar e educar.
- Ao meu orientador professor Jorge Tulio Mujica Ascui pelas acolhida e oportunidade muito importantes, tolerância e introduções de problemas matemáticos. Sem orientação excelente dele, não conseguiria realizar este trabalho.
- Ao professor Mário Matos pelo livro.
- À Daniela M. Vieira pelas consultas.
- À Paula Takatsuka pelas ajudas importantes.
- Ao Fábio J. Bertoloto pela instalação do programa ppower4.
- Aos amigos e colegas que participam de maneira direita e indireta da minha formação.
- À Universidade Estadual de Campinas e ao instituto de matemática por ter me cultivado academicamente durante o curso de doutorado.
- À secretaria de Pós - Graduação , em especial, aos Cidinha, Tânia e Ednaldo.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro indispensável.

Uma vez, um sábio antigo disse:

...Tente imaginar uma árvore que a partir de uma semente, germina e se torna forte. Ela provê a sombra para viajantes descansarem e contribui seus frutos para homens comerem; ao final, descansados os viajantes continuam suas caminhadas, satisfeitos os homens dão as costas indo a se preocupar com a própria tarefa. Quem faz a companhia para ela? Quem se lembra dela? O único ganho dela é exatamente o seu próprio crescimento. Os grossos e fortes galhos e tronco são a melhor comprovação para ela própria, e a verdadeira experiência é o louvor mais elevado que ela fez para o mundo...

Resumo

Este trabalho está dedicado ao estudo dos operadores de Nicodemi, introduzidos em [7] a partir de uma idéia em [12]. Os operadores de Nicodemi levam aplicações multilineares (resp. polinômios homogêneos) de um espaço de Banach E em aplicações multilineares (resp. polinômios homogêneos) em um espaço de Banach F.

O nosso primeiro objetivo é encontrar condições para que os operadores de Nicodemi preservem certos tipos de aplicações multilineares (resp. polinômios homogêneos). Em particular estudamos a preservação de aplicações multilineares simétricas, de tipo finito, nucleares, compactas ou fracamente compactas.

O segundo objetivo é encontrar condições para que, se os espaços duais E' e F' são isomorfos, os espaços de aplicações multilineares (resp. polinômios homogêneos) em E e F sejam isomorfos também. Estudamos também o problema correspondente para os espaços de aplicações multilineares (resp. polinômios homogêneos) de um determinado tipo, como por exemplo, de tipo finito, nuclear, compacto ou fracamente compacto.

Abstract

This work is devoted to studying the Nicodemi operators, introduced in [7], following an idea in [12]. The Nicodemi operators map multilinear mappings (resp. homogeneous polynomials) on a Banach spaces E into multilinear mappings (resp. homogeneous polynomials) on a Banach spaces F.

Our first objective is to find conditions under which the Nicodemi operators preserve certain types of multilinear mappings (resp. homogeneous polynomials). In particular we examine the preservation of the multilinear mappings that are symmetric, of finite type, nuclear, compact or weakly compact.

Our second objective is to find conditions under which, whenever the dual spaces E' and F' are isomorphic, the spaces of multilinear mappings (resp. homogeneous polynomials) on E and F are isomorphic as well. We also examine the corresponding problem for the spaces of multilinear mappings (resp. homogeneous polynomials) of a certain type, for instance of finite, nuclear, compact or weakly compact type.

Conteúdo

Notações

Neste trabalho, utilizamos as seguintes notações:

$\mathbb{N}$ o conjunto dos números inteiros estritamente positivos

$\mathbb{R}$ o corpo dos números reais

$\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos

$\mathbb{K}$ $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

D, E, F, G espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$

E^m o produto $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{m-vezes}$

x^m a m-upla $(\underbrace{x, ..., x}_{m-vezes})$

B_{E^m} a bola fechada unitária de E^m

$B(x, r)$ a bola aberta com centro em x e raio r

$L_a(^mE; G)$ o espaço das aplicações $m-$ lineares de E^m em G

$L(^mE; G)$ o espaço das aplicações $m-$ lineares e contínuas de E^m em G

$L_a(E; G) = L_a(^1E; G)$

$L(E; G) = L(^1E; G)$

$E^* = L_a(E; \mathbb{K})$

$E' = L(E; \mathbb{K})$

$L_a^s(^mE; G)$ o espaço das aplicações $m-$ lineares simétricas de E^m em G

$L^s(^mE; G)$ o espaço das aplicações $m-$ lineares contínuas e simétricas de E^m em G

$\mathcal{P}_a(^mE; G)$ o espaço dos polinômios m- homogêneos de E em G

$\mathcal{P}(^mE; G)$ o espaço dos polinômios m- homogêneos contínuos de E em G

$L_f(^mE; G)$ o espaço dos elementos de $L(^mE; G)$ que são de tipo finito

$L_f(^mE) = L_f(^mE; \mathbb{K})$

$L_N(^mE; G)$ o espaço dos elementos de $L(^mE; G)$ que são nucleares

$L_N(^mE) = L_N(^mE; \mathbb{K})$

$\mathcal{P}_f({}^mE;G)$ o espaço dos elementos de $\mathcal{P}({}^mE;G)$ que são de tipo finito

$\mathcal{P}_f({}^mE) = \mathcal{P}_f({}^mE;\mathbb{K})$

$\mathcal{P}_N({}^mE;G)$ o espaço dos elementos de $\mathcal{P}({}^mE;G)$ que são nucleares

$\mathcal{P}_N({}^mE) = \mathcal{P}_N({}^mE;\mathbb{K})$

$L_K({}^mE;G)$ o espaço dos elementos de $L({}^mE;G)$ que são compactos

$L_K^s({}^mE;G) = L^s({}^mE;G) \cap L_K({}^mE;G)$

$\mathcal{P}_K({}^mE;G)$ o espaço dos elementos de $\mathcal{P}({}^mE;G)$ que são compactos

$L_{WK}({}^mE;G)$ o espaço dos elementos de $L({}^mE;G)$ que são fracamente compactos

$L_{WK}^s({}^mE;G) = L^s({}^mE;G) \cap L_{WK}({}^mE;G)$

$\mathcal{P}_{WK}({}^mE;G)$ o espaço dos elementos de $\mathcal{P}({}^mE;G)$ que são fracamente compactos

Introdução

O problema de estender funções holomorfas de um espaço de Banach E a um espaço de Banach $F \supset E$ foi estudado pela primeira vez por Aron e Berner [1]. Eles provaram que cada função holomorfa de tipo limitado em E se estende a uma função holomorfa de tipo limitado no bidual E'' de E. Para atingir seu objetivo eles construíram operadores de extensão para os espaços de aplicações multilineares e usaram as séries de Taylor para estender funções holomorfas.

Seguindo uma idéia de Nicodemi [12], P. Galindo, D. García, M. Maestre e J. Mujica [7] definiram uma seqüência de operadores $R_m : L(^mE) \to L(^mF)$ a partir de um operador arbitrário $R_1 : E' \to F'$. Por esse motivo os operadores R_m são chamados de operadores de Nicodemi. Quando $R_1 : E' \hookrightarrow E'''$ é o mergulho canônico, os operadores $R_m : L(^mE) \to L(^mE'')$ coincidem com os operadores de Aron-Berner.

Se G é um espaço de Banach, então cada $R_m : L(^mE) \to L(^mF)$ induz de maneira natural um $\widetilde{R_m} : L(^mE; G') \to L(^mF; G')$. Se $R_1 : E' \hookrightarrow E'''$ é o mergulho canônico, então os operadores $\widetilde{R_m}$ também coincidem com os operadores de Aron-Berner no caso de aplicações multilineares com valores vetoriais.

Os operadores $R_m : L(^mE) \to L(^mF)$ induzem de maneira natural operadores $\widehat{R}_m : \mathcal{P}(^mE) \to \mathcal{P}(^mF)$. De maneira análoga os operadores $\widetilde{R_m} : L(^mE; G') \to L(^mF; G')$ induzem operadores $\widehat{\widetilde{R}}_m : \mathcal{P}(^mE; G') \to \mathcal{P}(^mF; G')$.

Um dos objetivos deste trabalho é estudar a hereditariedade dos operadores de Nicodemi, ou seja, estudar as propriedades das aplicações multilineares e polinômios homogêneos que são preservadas pelos operadores de Nicodemi. Por exemplo, se A é uma aplicação multilinear simétrica, de tipo finito, nuclear, compacta ou fracamente compacta, então R_mA ou $\widetilde{R_m}A$ tem a mesma propriedade? E se P é um polinômio homogêneo de tipo finito, nuclear, compacto ou fracamente compacto, então $\widehat{R}_mP$ ou $\widehat{\widetilde{R}}_mP$ tem a mesma propriedade?

Além disso, observamos que se $\varphi : E \to F$ é um isomorfismo, então

$$C_\varphi : Q \in \mathcal{P}(^mF) \to Q \circ \varphi \in \mathcal{P}(^mE)$$

é um isomorfismo, ou seja, cada isomorfismo entre E e F induz um isomorfismo entre $\mathcal{P}(^mE)$ e $\mathcal{P}(^mF)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, onde C_φ é conhecido como operador de composição. Seria importante saber se cada isomorfismo entre os duais E' e F' induz um isomorfismo entre $\mathcal{P}(^mE)$ e $\mathcal{P}(^mF)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. J. C. Díaz e S. Dineen foram os primeiros pesquisadores que estudaram esse problema. Em [6], eles mostraram que se E' e F' são isomorfos, e E' possui a propriedade de Schur e a propriedade de aproximação, então $\mathcal{P}(^mE)$ e $\mathcal{P}(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. Este resultado foi desenvolvido e melhorado em artigos mais recentes. S. Lassalle e I. Zalduendo mostraram em [10] que se E' e F' são isomorfos, e E e F são simetricamente Arens-regular, então $\mathcal{P}(^mE)$ e $\mathcal{P}(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. Na tese, conseguimos demonstrar com uma outra técnica este mesmo resultado de S. Lassalle e I. Zalduendo em [10]. Além disso, provamos que se E' e F' são isomorfos, então os espaços de polinômios homogêneos de tipo finito (respectivamente nuclear) definidos em E e F com valores escalares ou com valores vetoriais são isomorfos; e se E' e F' são isomorfos, e E e F são simetricamente Arens-regular, então os espaços de polinômios homogêneos compacto (respectivamente fracamente compacto) com valores vetoriais são isomorfos. Por processo lógico, começamos sempre a pesquisa a partir de aplicações multilineares. Com mais detalhes, apresentamos a seguir o conteúdo de cada capítulo deste texto:

Na primeira seção do Capítulo 1, apresentamos a definição da seqüência de Nicodemi e os dois Teoremas 1.1.3 e 1.1.6 muito importantes para nosso trabalho. O Teorema 1.1.3 mostra a relação entre uma seqüência de Nicodemi arbitrária de aplicações com valores escalares e a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $E' \hookrightarrow E'''$. Este teorema será muito útil na seção 1.3, na demonstração do Teorema 1.3.4. O Teorema 1.1.6 será fundamental para o Capítulo 4. Sob certas condições os operadores R_m e $\widetilde{R_m}$ da seqüência de Nicodemi preservam aplicações multilineares simétricas definidas em espaço de Banach com valores escalares ou vetoriais respectivamente. Na última seção do Capítulo 1, mostramos que se E' e F' são isomorfos então $L(^mE)$ e $L(^mF)$ são isomorfos. A seguir estendemos este resultado ao caso de aplicações multilineares com valores vetoriais. Mais especificamente, se E' e F' são isomorfos então $L(^mE; G')$ e $L(^mF; G')$ são isomorfos. Para obter resultados semelhantes no caso dos espaços de aplicações multilineares simétricas, precisamos adicionar uma hipótese de regularidade nos espaços de Banach. Mais especificamente, se E' e F' são isomorfos, e E e F são simetricamente Arens-regular, então $L^s(^mE)$ e $L^s(^mF)$ são isomorfos e $L^s(^mE; G')$ e $L^s(^mF; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. Finalmente, obtemos que se E' e F' são isomorfos, e E e F são simetricamente Arens-regular, então $\mathcal{P}(^mE)$ e $\mathcal{P}(^mF)$ são isomorfos e $\mathcal{P}(^mE; G')$ e $\mathcal{P}(^mF; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. Estes últimos resultados já são conhecidos (ver [4], [5] e [10]), mas nossas demonstrações são diferentes.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos de tipo finito. Na primeira seção do Capítulo 2, mostramos que os operadores R_m e $\widetilde{R_m}$ da seqüência de Nicodemi preservam aplicações multilineares de tipo finito definidas em espaços de Banach com valores escalares e vetoriais respectivamente. Depois vemos que os operadores $\widehat{R}_m$ e $\widehat{\widehat{R}}_m$ da seqüência de Nicodemi preservam polinômios homogêneos de tipo finito definidos em espaços de Banach com valores escalares e vetoriais respectivamente. Na seção 2.2, estudamos os teoremas de isomorfismos entre espaços de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos de tipo finito em espaços de Banach. Mais especificamente, se E' e F' são isomorfos, então $L_f(^mE)$ e $L_f(^mF)$ são isomorfos e $L_f(^mE; G')$ e $L_f(^mF; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. No caso de polinômios homogêneos de tipo finito, temos teoremas semelhantes, ou seja, se E' e F' são isomorfos, então $\mathcal{P}_f(^mE)$ e $\mathcal{P}_f(^mF)$ são isomorfos e $\mathcal{P}_f(^mE; G')$ e $\mathcal{P}_f(^mF; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos nucleares. Os resultados estudados neste Capítulo são semelhantes aos do Capítulo 2.

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos compactos ou fracamente compactos. Na primeira seção do Capítulo 4, mostramos que os operadores $\widetilde{R_m}$ da seqüência de Nicodemi preservam aplicações multilineares compactas (resp. fracamente compactas) definidas em espaços de Banach com valores vetoriais. Depois vemos que os operadores $\widehat{\widehat{R}}_m$ da seqüência de Nicodemi preservam polinômios homogêneos compactos (resp. fracamente compactos) definidos em espaços de Banach com valores vetoriais. Na seção 4.2, estudamos os teoremas de isomorfismos entre espaços de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos compactos (resp. fracamente compactos) em espaços de Banach. Mais especificamente, se E' e F' são isomorfos, e E e F são simetricamente Arens-regular, então $L^s_K(^mE; G')$ e $L^s_K(^mF; G')$ são isomorfos e $\mathcal{P}_K(^mE; G')$ e $\mathcal{P}_K(^mF; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.

Capítulo 1

Operadores de extensão de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos

Na primeira seção deste Capítulo, estudaremos a seqüência de Nicodemi (R_m), e depois veremos que sob certas condições os operadores R_m da seqüência de Nicodemi preservam aplicações multilineares simétricas. Finalmente obteremos teoremas de isomorfismos entre espaços de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos em espaços de Banach.

Neste trabalho, as letras D,E, F e G representam sempre espaços de Banach sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathbb{N}$ denota o conjunto de todos os números inteiros estritamente positivos. Denotaremos por $L_a({}^mE;G)$ o espaço vetorial de todas as aplicações $m-$ lineares de E^m em G, e por $L({}^mE;G)$ o subespaço de todos membros contínuos de $L_a({}^mE;G)$. $L({}^mE;G)$ é um espaço de Banach sob a norma natural. Se $G = \mathbb{K}$, escreveremos $L_a({}^mE)$ em vez de $L_a({}^mE;\mathbb{K})$, e $L({}^mE)$ em vez de $L({}^mE;\mathbb{K})$. Se $m = 1$, escrevemos $L_a(E;G)$ em vez de $L_a({}^1E;G)$, e $L(E;G)$ em vez de $L({}^1E;G)$. Se $m = 1$ e $G = \mathbb{K}$, denotaremos $L_a(E)$ por E^*, o dual algébrico de E, e denotaremos $L(E)$ por E', o dual topológico de E. O isomorfismo

$$I_m : L_a({}^{m+n}E;G) \to L_a({}^mE;L_a({}^nE;G))$$

definido por $I_mA(x)(y) = A(x,y)$ para todo $A \in L_a({}^{m+n}E;G), x \in E^m, y \in E^n$, induz uma isometria entre $L({}^{m+n}E;G)$ e $L({}^mE;L({}^nE;G))$. O isomorfismo

$$T^t : A \in L_a({}^mE;L_a({}^nF;G)) \to A^t \in L_a({}^nF;L_a({}^mE;G))$$

definido por $A^t(y)(x) = A(x)(y)$ para todo $A \in L_a(^mE; L_a(^nF; G)), x \in E^m, y \in F^n$, induz uma isometria entre $L(^mE; L(^nF; G))$ e $L(^nF; L(^mE; G))$. Nós consultamos [11] para as propriedades de aplicações multilineares.

1.1 Seqüências de Nicodemi

No nosso trabalho, utilizaremos a seqüência de Nicodemi definida em [7] para demonstrar todos os teoremas. Então vamos lembrar a definição da seqüência de Nicodemi.

Definição 1.1.1. *([7]) Dado um operador linear e contínuo $R_1 : L(E; G) \longrightarrow L(F; G)$, seja $R_m : L(^mE; G) \longrightarrow L(^mF; G)$ definido indutivamente por $R_{m+1}A = I_m^{-1}[R_m \circ (R_1 \circ I_m(A))^t]^t$ para todo $A \in L(^{m+1}E; G)$ e $m \in \mathbb{N}$.*

A seqüência de operadores R_m é precisamente a seqüência de operadores construída por Nicodemi em [12]. Portanto a seqüência é dita a seqüência de Nicodemi começando com R_1.

Exemplo 1.1.2. *([7, Example 1.2]) Seja $T_1 : E' \hookrightarrow E'''$ o mergulho canônico e seja $T_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mE'')$ a seqüência de operadores de Nicodemi começando com T_1.*

A seqüência do Exemplo 1.1.2 coincide com a seqüência de operadores construída por Aron e Berner em [1, Proposition 2.1].

O próximo teorema mostra a relação entre uma seqüência de Nicodemi arbitrária de aplicações com valores escalares e a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $E' \hookrightarrow E'''$. Este teorema será muito útil na seção 1.3, na demonstração do Teorema 1.3.4.

Teorema 1.1.3. *Sejam $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ uma seqüência de Nicodemi e $T_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mE'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 = J_{E'} : E' \hookrightarrow E'''$, e seja $J_F : F \hookrightarrow F''$ o mergulho canônico. Então*

$$R_mA(y_1, ..., y_m) = T_mA(R_1'(J_Fy_1), ..., R_1'(J_Fy_m))$$

para todo $A \in L(^mE)$, e $y_1, ..., y_m \in F$, onde R_1' é o transposto de R_1.

Demonstração. Provaremos por indução sobre m. Se $A \in L(E) = E'$, temos que

$$\begin{aligned} R_1A(y) &= \langle J_F y, R_1A\rangle \\ &= \langle R_1'(J_F y), A\rangle \\ &= \langle T_1A, R_1'(J_F y)\rangle \\ &= T_1A(R_1'(J_F y)) \end{aligned}$$

para todo $y \in F$. Suponhamos que a igualdade do Teorema 1.1.3 seja verdadeira para formas $m-$ lineares. Seja $A \in L(^{m+1}E)$. Provaremos inicialmente que

$$T_{m+1}A(z_1, ..., z_m, R_1'(J_F y)) = T_m[(R_1 \circ I_m A)^t(y)](z_1, ..., z_m) \tag{1.1}$$

para todo $z_1, ..., z_m \in E''$ e $y \in F$. Pela construção da seqüência de Nicodemi, temos que

$$T_{m+1}A(z_1, ..., z_m, R_1'(J_F y)) = T_m[(T_1 \circ I_m A)^t(R_1'(J_F y))](z_1, ..., z_m). \tag{1.2}$$

Por isso, para obter (1.1) comparando com (1.2), basta provar que

$$(R_1 \circ I_m A)^t(y) = (T_1 \circ I_m A)^t(R_1'(J_F y)).$$

De fato,

$$\begin{aligned} (T_1 \circ I_m A)^t(R_1'(J_F y))(x_1, ..., x_m) &= T_1[I_m A(x_1, ..., x_m)](R_1'(J_F y)) \\ &= \langle R_1'(J_F y), I_m A(x_1, ..., x_m)\rangle \\ &= \langle J_F y, R_1[I_m A(x_1, ..., x_m)]\rangle \\ &= \langle R_1[I_m A(x_1, ..., x_m)], y\rangle \\ &= R_1[I_m A(x_1, ..., x_m)](y) \\ &= (R_1 \circ I_m A)^t(y)(x_1, ..., x_m) \end{aligned}$$

para todo $x_1, ..., x_m \in E$. Assim, pela hipótese de indução e (1.1), temos que

$$\begin{aligned} R_{m+1}A(y_1, ..., y_{m+1}) &= R_m[(R_1 \circ I_m A)^t(y_{m+1})](y_1, ..., y_m) \\ &= T_m[(R_1 \circ I_m A)^t(y_{m+1})](R_1'(J_F y_1), ..., R_1'(J_F y_m)) \\ &= T_{m+1}A(R_1'(J_F y_1), ..., R_1'(J_F y_m), R_1'(J_F y_{m+1})). \end{aligned}$$

para todo $y_1, ..., y_{m+1} \in F$. $\square$

Agora, lembramos uma Proposição em [7]. Esta Proposição nos oferece uma maneira natural de associar a cada seqüência de Nicodemi de aplicações com valores escalares uma seqüência de Nicodemi de aplicações com valores vetoriais.

Proposição 1.1.4. *([7, Prop. 4.1]) Dado $R_1 \in L(E'; F')$, seja $\widetilde{R_1} \in L(L(E; G'), L(F; G'))$ definido por $\widetilde{R_1}A(y)(z) = R_1(\delta_z \circ A)(y)$ para todo $A \in L(E; G')$ e $y \in F$ e $z \in G$, onde $\delta_z : G' \longrightarrow \mathbb{K}$ é definido por $\delta_z(z') = z'(z)$ para todo $z' \in G'$. Se (R_m) e $(\widetilde{R_m})$ são as seqüências de Nicodemi começando com R_1 e $\widetilde{R_1}$ respectivamente, então $\widetilde{R_m}A(y)(z) = R_m(\delta_z \circ A)(y)$ para todo $A \in L(^mE; G')$, $y \in F^m$ e $z \in G$.*

Exemplo 1.1.5. *Seja $T_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mE'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 : E' \hookrightarrow E'''$, e seja $\widetilde{T_m} : L(^mE; G') \longrightarrow L(^mE''; G')$ a seqüência de Nicodemi correspondente a (T_m).*

Observamos que como G' é um $\mathcal{C}_1-$ espaço (veja [1, Example 1]), a seqüência $\widetilde{T_m} : L(^mE; G') \longrightarrow L(^mE''; G') \subset L(^mE''; G''')$ do Exemplo 1.1.5 coincide com a seqüência de operadores construída por Aron e Berner em [1, Proposition 2.1].

A seguir, estenderemos o Teorema 1.1.3 ao caso de seqüências de Nicodemi de aplicações com valores vetoriais. O Teorema 1.1.6 será muito importante para o Capítulo 4.

Teorema 1.1.6. *Sejam $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ uma seqüência de Nicodemi e $T_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mE'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 = J_{E'} : E' \hookrightarrow E'''$, e seja $J_F : F \hookrightarrow F''$ o mergulho canônico. Sejam*

$$\widetilde{R_m} : L(^mE; G') \to L(^mF; G')$$

e

$$\widetilde{T_m} : L(^mE; G') \to L(^mE''; G')$$

as seqüências de Nicodemi correspondentes a (R_m) e (T_m). Então

$$\widetilde{R_m}A(y_1, ..., y_m) = \widetilde{T_m}A(R_1'(J_F y_1), ..., R_1'(J_F y_m))$$

para todo $A \in L(^mE; G')$, e $y_1, ..., y_m \in F$, onde R_1' é o transposto de R_1.

Demonstração. Provaremos por indução sobre m. Se $A \in L(E; G')$, temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{R_1}A(y)(z) &= R_1(\delta_z \circ A)(y) \\ &= \langle J_F y, R_1(\delta_z \circ A)\rangle \\ &= \langle R_1'(J_F y), (\delta_z \circ A)\rangle \\ &= \langle T_1(\delta_z \circ A), R_1'(J_F y)\rangle \\ &= \widetilde{T_1}A(R_1'(J_F y))(z)\end{aligned}$$

para todo $y \in F$ e $z \in G$. Suponhamos que a identidade seja verdadeira para formas $m-$lineares. Seja $A \in L(^{m+1}E; G')$. Provaremos inicialmente que

$$\widetilde{T_{m+1}}A(z_1, ..., z_m, R_1'(J_F y)) = \widetilde{T_m}[(\widetilde{R_1} \circ I_m A)^t(y)](z_1, ..., z_m) \tag{1.3}$$

para todo $z_1, ..., z_m \in E''$ e $y \in F$. Pela construção da seqüência de Nicodemi, temos que

$$\widetilde{T_{m+1}}A(z_1, ..., z_m, R_1'(J_F y)) = \widetilde{T_m}[(\widetilde{T_1} \circ I_m A)^t(R_1'(J_F y))](z_1, ..., z_m). \tag{1.4}$$

Por isso, para obter (1.3) comparando com (1.4), basta provar que

$$(\widetilde{R_1} \circ I_m A)^t(y) = (\widetilde{T_1} \circ I_m A)^t(R_1'(J_F y)).$$

De fato,

$$\begin{aligned}(\widetilde{T_1} \circ I_m A)^t(R_1'(J_F y))(x_1, ..., x_m)(z) &= \widetilde{T_1}[I_m A(x_1, ..., x_m)](R_1'(J_F y))(z) \\ &= T_1[\delta_z \circ I_m A(x_1, ..., x_m)](R_1'(J_F y)) \\ &= \langle R_1'(J_F y), \delta_z \circ I_m A(x_1, ..., x_m)\rangle \\ &= \langle J_F y, R_1[\delta_z \circ I_m A(x_1, ..., x_m)]\rangle \\ &= \langle R_1[\delta_z \circ I_m A(x_1, ..., x_m)], y\rangle \\ &= R_1[\delta_z \circ I_m A(x_1, ..., x_m)](y) \\ &= (\widetilde{R_1} \circ I_m A)^t(y)(x_1, ..., x_m)(z)\end{aligned}$$

para todo $x_1, ..., x_m \in E$ e $z \in G$. Assim, pela hipótese de indução e (1.3), temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{R_{m+1}}A(y_1, ..., y_{m+1}) &= \widetilde{R_m}[(\widetilde{R_1} \circ I_m A)^t(y_{m+1})](y_1, ..., y_m) \\ &= \widetilde{T_m}[(\widetilde{R_1} \circ I_m A)^t(y_{m+1})](R_1'(J_F y_1), ..., R_1'(J_F y_m)) \\ &= \widetilde{T_{m+1}}A(R_1'(J_F y_1), ..., R_1'(J_F y_m), R_1'(J_F y_{m+1})).\end{aligned}$$

para todo $y_1, ..., y_{m+1} \in F$. □

1.2 Preservação de aplicações multilineares simétricas

Nesta seção, veremos que sob certas condições os operadores R_m da seqüência de Nicodemi preservam aplicações multilineares simétricas. Inicialmente lembramos alguns resultados em [7], que serão utilizados na demonstração do Teorema 1.2.6.

Proposição 1.2.1. *([7, Proposition 2.1]) Seja $R_m : L(^mE; G) \longrightarrow L(^mF; G)$ uma seqüência de Nicodemi. Se existe $J \in L(E; F)$ tal que $R_1A(Jx) = A(x)$ para todo $A \in L(E; G)$ e $x \in E$, então a seqüência (R_m) é dita a seqüência de Nicodemi de operadores de extensão para J, e $R_mA(Jx_1, ..., Jx_m) = A(x_1, ..., x_m)$ para todo $A \in L(^mE; G)$ e $x_1, ..., x_m \in E$.*

Observamos que a seqüência de Nicodemi (T_m) do Exemplo 1.1.2 ([7, Example 1.2]) é a seqüência de Nicodemi de operadores de extensão para o mergulho canônico $J_E : E \hookrightarrow E''$. De fato, seja $T_1 : E' \hookrightarrow E'''$ o mergulho canônico, então $\langle T_1x', J_Ex\rangle = \langle x', x\rangle$ para todo $x' \in E'$ e $x \in E$.

Lema 1.2.2. *([7, Lemma 3.4]) Seja $R_m : L(^mE; G) \longrightarrow L(^mF; G)$ uma seqüência de Nicodemi de operadores de extensão para algum $J \in L(E; F)$. Então*

$$(R_mA)^\sigma(u) = R_mA^\sigma(u)$$

para todo $A \in L(^mE; G)$, toda transposição de forma $\sigma = (j, j + 1)$ e todo $u \in F^m$ tal que $u_j \in J(E)$.

Proposição 1.2.3. *([7, Proposition 5.1]) Seja $T_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mE'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 = J_{E'} : E' \hookrightarrow E'''$. Se $A \in L(^mE)$, então o funcional linear*

$$x''_j \in E'' \longrightarrow T_mA(J_Ex_1, ..., J_Ex_{j-1}, x''_j, x''_{j+1}, ..., x''_m) \in \mathbb{K}$$

é $\sigma(E'', E')$ -contínua para $x_1, ..., x_{j-1} \in E$ e $x''_{j+1}, ..., x''_m \in E''$ fixados.

Denotaremos por $L^s_a(^mE; G)$ o espaço vetorial de todas as aplicações $m-$ lineares simétricas de E^m em G, e por $L^s(^mE; G)$ o subespaço de todos os elementos contínuos de $L^s_a(^mE; G)$. Lembramos que um espaço de Banach E é dito Arens - regular se todos os operadores lineares $E \longrightarrow E'$ são fracamente compactos e é dito simetricamente Arens - regular se a referida propriedade é assumida somente por operadores lineares simétricos. Um operador $T : E \to E'$ é dito simétrico se $Tx(y) = Ty(x)$ para todo $x, y \in E$.(veja [3] e [8]) Lembramos também que se E é simetricamente Arens - regular, então $T_mA \in L^s(^mE'')$

para cada $A \in L^s(^mE)$, onde (T_m) é a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 = J_{E'} : E' \hookrightarrow E'''$ (veja [2, Theorem 8.3]).

Agora, estamos prontos para estudar os Teoremas de preservação de aplicações multilineares simétricas.

Teorema 1.2.4. *Sejam $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ uma seqüência de Nicodemi e $T_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mE'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 = J_{E'} : E' \hookrightarrow E'''$, e seja $J_F : F \hookrightarrow F''$ o mergulho canônico. Então, se T_mA é simétrica, R_mA é simétrica também. Em particular, se E é simetricamente Arens - regular, então $R_mA \in L^s(^mF)$ para cada $A \in L^s(^mE)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.1.3 temos que

$$R_mA(y_1, ..., y_m) = T_mA(R_1'(J_Fy_1), ..., R_1'(J_Fy_m)),$$

logo se T_mA é simétrica, então R_mA é simétrica também. Agora, se E é simetricamente Arens - regular, temos que a extensão de Aron - Berner T_mA é simétrica para todo $A \in L^s(^mE)$. Concluímos que $R_mA \in L^s(^mF)$ para cada $A \in L^s(^mE)$.

□

Teorema 1.2.5. *Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ uma seqüência de Nicodemi e seja $\widetilde{R_m} : L(^mE; G') \longrightarrow L(^mF; G')$ a seqüência de Nicodemi correspondente a (R_m). Se E é simetricamente Arens - regular, então $\widetilde{R_m}A \in L^s(^mF; G')$ para cada $A \in L^s(^mE; G')$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.1.4 ([7, Proposition 4.1]), temos que

$$\widetilde{R_m}A(y)(z) = R_m(\delta_z \circ A)(y) \tag{1.5}$$

para todo $A \in L(^mE, G')$, $y \in F^m$ *e* $z \in G$. A identidade (1.5) implica que se A é simétrica, então $\widetilde{R_m}A$ é simétrica também. De fato, se A é simétrica, então $\delta_z \circ A$ é também simétrica. Por conseguinte como E é simetricamente Arens - regular, vimos pelo Teorema 1.2.4 que $R_m(\delta_z \circ A)$ é simétrica, logo $\widetilde{R_m}A$ é simétrica, pois dada σ uma permutação de $\{1, ..., m\}$, temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{R_m}A(y_{\sigma(1)}, ..., y_{\sigma(m)})(z) &= R_m(\delta_z \circ A)(y_{\sigma(1)}, ..., y_{\sigma(m)}) \\
&= R_m(\delta_z \circ A)(y_1, ..., y_m) \\
&= \widetilde{R_m}A(y_1, ..., y_m)(z)
\end{aligned}$$

para todo $z \in G$. Assim concluímos que $\widetilde{R_m}A \in L^s(^mF; G')$. □

No Teorema 1.2.6, denotaremos $J_F(y)$ por y, para todo $y \in F$, e $J_E(x)$ por x, para todo $x \in E$, e seguiremos as mesmas notações do Teorema 1.1.3 acima.

Teorema 1.2.6. *Sejam $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ uma seqüência de Nicodemi, $T_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mE'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 = J_{E'} : E' \hookrightarrow E'''$, e seja $Q_m : L(^mF) \longrightarrow L(^mF'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $Q_1 = J_{F'} : F' \hookrightarrow F'''$. Se T_mA é simétrica, então*

$$Q_m \circ R_mA(w_1, ..., w_m) = T_mA(R_1'w_1, ..., R_1'w_m)$$

para todo $A \in L(^mE)$, $w_j \in F''$ e $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Provaremos, por indução sobre $k \in \mathbb{N}$, que

$$Q_m \circ R_mA(w_1, ..., w_k, y_{k+1}, ..., y_m) = T_mA(R_1'(w_1), ..., R_1'(w_k), R_1'(y_{k+1}), ..., R_1'(y_m))$$

para todo $y_j \in F$ e $w_j \in F''$. Lembramos que (i) Q_mB e T_mA são fracamente estrela contínuas na sua primeira variável para todo $B \in L(^mF)$ e $A \in L(^mE)$ pela Proposição 1.2.3 ([7, Proposition 5.1]); (ii) os elementos de F'' e os de $J_F(F)$ podem ser permutados em variáveis de Q_mB pelo Lema 1.2.2 ([7, Lemma 3.4]); (iii) R_1' é $\sigma(F'', F')-\sigma(E'', E')$ contínua. Se $k = 1$, pelo Teorema de Goldstine, seja (y_α) uma rede em F tal que $y_\alpha \longrightarrow w_1$ na topologia $\sigma(F'', F')$; (iv) pela Proposição 1.2.1, temos que $T_mA(x_1, ..., x_m) = A(x_1, ..., x_m)$ para todo $A \in L(^mE)$ e $x_1, ..., x_m \in E$; e $Q_mB(y_1, ..., y_m) = B(y_1, ..., y_m)$ para todo $B \in L(^mF)$ e $y_1, ..., y_m \in F$. Então, sendo $R_mA(y_\alpha, y_2..., y_m) = T_mA(R_1'y_\alpha, R_1'y_2, ..., R_1'y_m)$ pelo Teorema 1.1.3

$$\begin{aligned}
Q_m \circ R_mA(w_1, y_2..., y_m) &= Q_m(R_mA)(w_1, y_2..., y_m) \\
&= \lim_\alpha Q_m(R_mA)(y_\alpha, y_2..., y_m) \\
&= \lim_\alpha (R_mA)(y_\alpha, y_2..., y_m) \\
&= \lim_\alpha T_mA(R_1'y_\alpha, R_1'y_2, ..., R_1'y_m) \\
&= T_mA(R_1'w_1, R_1'y_2, ..., R_1'y_m).
\end{aligned}$$

Agora, supondo que a identidade vale para k, provaremos que a identidade vale para $k + 1$.

Pela hipótese da indução e sendo T_mA simétrica, temos que

$$\begin{aligned}
Q_m \circ R_mA(w_1, ..., w_{k+1}, y_{k+2}, ..., y_m) &= Q_m(R_mA)(w_1, ..., w_{k+1}, y_{k+2}, ..., y_m) \\
&= \lim_\alpha Q_m(R_mA)(y_\alpha, w_2, ..., w_{k+1}, y_{k+2}, ..., y_m) \\
&= \lim_\alpha Q_m(R_mA)(w_2, ..., w_{k+1}, y_\alpha, y_{k+2}, ..., y_m) \\
&= \lim_\alpha T_mA(R_1'w_2, ..., R_1'w_{k+1}, R_1'y_\alpha, R_1'y_{k+2}, ..., R_1'y_m) \\
&= \lim_\alpha T_mA(R_1'y_\alpha, R_1'w_2, ..., R_1'w_{k+1}, R_1'y_{k+2}, ..., R_1'y_m) \\
&= T_mA(R_1'w_1, ..., R_1'w_{k+1}, R_1'y_{k+2}, ..., R_1'y_m).
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$Q_m \circ R_mA(w_1, ..., w_m) = T_mA(R_1'w_1, ..., R_1'w_m).$$

□

O Teorema 1.2.6 será muito importante para a proxima seção.

1.3 Isomorfismos entre espaços de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos

Denotaremos por $\mathcal{P}_a(^mE; G)$ o espaço vetorial de todos os polinômios $m-$ homogêneos de E em G, e por $\mathcal{P}(^mE; G)$ o subespaço de todos membros contínuos de $\mathcal{P}_a(^mE; G)$. Se $G = \mathbb{K}$, escrevemos $\mathcal{P}_a(^mE)$ e $\mathcal{P}(^mE)$ ao invés de $\mathcal{P}_a(^mE; \mathbb{K})$ e $\mathcal{P}(^mE; \mathbb{K})$ respectivamente. Dada uma aplicação $A \in L_a(^mE; G)$, podemos associar de maneira natural um polinômio m- homogêneo $\widehat{A} \in \mathcal{P}_a(^mE; G)$ dado por :

$$\widehat{A}(x) = Ax^m$$

para todo $x \in E$. A aplicação

$$A \in L^s(^mE; G) \to \widehat{A} \in \mathcal{P}(^mE; G)$$

é um isomorfismo. Veja [11] para maiores detalhes.

Nesta seção veremos que cada isomorfismo entre E' e F' induz um isomorfismo entre $L(^mE; G')$ e $L(^mF; G')$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Se E e F são simetricamente Arens-regular, então cada isomorfismo entre E' e F' induz também um isomorfismo entre $\mathcal{P}(^mE; G')$ e $\mathcal{P}(^mF; G')$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Dado um operador linear e contínuo

$$R_m : L(^mE; G) \longrightarrow L(^mF; G),$$

definimos

$$U_m : A \in L(^nD; L(^mE; G)) \longrightarrow R_m \circ A \in L(^nD; L(^mF; G)).$$

Observamos que se R_m é um isomorfismo então U_m também o é, cuja inversa

$$U_m^{-1} : L(^nD; L(^mF; G)) \longrightarrow L(^nD; L(^mE; G))$$

é definida por $U_m^{-1}(B) = R_m^{-1} \circ B$ para todo $B \in L(^nD; L(^mF; G))$ onde R_m^{-1} é a inversa de R_m. Além disso, gostaríamos de lembrar o leitor que o domínio e o contradomínio de cada I_m, T^t e U_m podem ser diferentes. Assim, com as notações anteriores, é possível reescrever a definição dos operadores de Nicodemi da maneira seguinte:

Lema 1.3.1. *Dado o operador*

$$R_m : L(^mE; G) \longrightarrow L(^mF; G),$$

o operador

$$R_{m+1} : L(^{m+1}E; G) \longrightarrow L(^{m+1}F; G)$$

é dado por

$$R_{m+1}(A) = I_m^{-1}[R_m \circ (R_1 \circ I_m(A))^t]^t = I_m^{-1} \circ T^t \circ U_m \circ T^t \circ U_1 \circ I_m(A)$$

para cada $A \in L(^{m+1}E; G)$.

Teorema 1.3.2. *Se E' e F' são isomorfos, então $L(^mE)$ e $L(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Provaremos por indução sobre m que R_m é um isomorfismo de $L(^mE)$ sobre $L(^mF)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por hipótese $R_1 : E' \longrightarrow F'$ é um isomorfismo. Supondo que R_1 e R_m são isomorfismos, provaremos que R_{m+1} é também um isomorfismo. De fato, podemos reescrever

$$R_{m+1} = I_m^{-1} \circ T^t \circ U_m \circ T^t \circ U_1 \circ I_m.$$

Como R_1 e R_m são isomorfismos, temos que U_1 e U_m são também isomorfismos. Por conseguinte R_{m+1} é um isomorfismo de $L(^{m+1}E)$ sobre $L(^{m+1}F)$ sendo uma composta de isomorfismos. Portanto $L(^mE)$ e $L(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 1.3.3. *Se E' e F' são isomorfos, então $L(^mE;G')$ e $L(^mF;G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo G.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja

$$\widetilde{R_m} : L(^mE, G') \longrightarrow L(^mF, G')$$

a seqüência de Nicodemi correspondente a (R_m). Observamos que

$$(\delta_z \circ \widetilde{R_m}A) = R_m(\delta_z \circ A) \tag{1.6}$$

para todo $z \in G$ e $A \in L(^mE;G')$. De fato, pela Proposição 1.1.4 ([7, Proposition 4.1]),

$$(\delta_z \circ \widetilde{R_m}A)(y) = \widetilde{R_m}A(y)(z) = R_m(\delta_z \circ A)(y)$$

para todo $y \in F^m$. Vimos na demonstração do Teorema 1.3.2 que R_m é também um isomorfismo para todo $m \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $S_m : L(^mF) \longrightarrow L(^mE)$ a inversa de R_m para todo $m \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\widetilde{S_m} : L(^mF;G') \longrightarrow L(^mE;G')$$

por $\widetilde{S_m}B(x)(z) = S_m(\delta_z \circ B)(x)$ para todo $B \in L(^mF;G')$, $x \in E^m, z \in G$ e $m \in \mathbb{N}$. Temos que $\widetilde{S_m}$ é linear e contínua. De modo similar, pela Proposição 1.1.4 temos

$$(\delta_z \circ \widetilde{S_m}B) = S_m(\delta_z \circ B) \tag{1.7}$$

para todo $z \in G$ e $B \in L(^mF;G')$. Provaremos que $\widetilde{R_m}$ é um isomorfismo de $L(^mE;G')$ sobre $L(^mF;G')$ para todo $m \in \mathbb{N}$. De fato, temos que por (1.6)

$$\begin{aligned}
\widetilde{S_m} \circ \widetilde{R_m}A(x)(z) &= \widetilde{S_m}(\widetilde{R_m}A)(x)(z) \\
&= S_m(\delta_z \circ \widetilde{R_m}A)(x) \\
&= S_m(R_m(\delta_z \circ A))(x) \\
&= [S_m \circ R_m(\delta_z \circ A)](x) \\
&= (\delta_z \circ A)(x) \\
&= A(x)(z)
\end{aligned}$$

para todo $A \in L(^mE, G'), x \in E^m$ e $z \in G$, ou seja $(\widetilde{S_m} \circ \widetilde{R_m})A = A$, para todo $A \in L(^mE, G'), x \in E^m$ e $z \in G$. Ou seja $(\widetilde{S_m} \circ \widetilde{R_m})A = A$ para todo $A \in L(^mE; G')$. De modo análogo e (1.7), podemos provar que $(\widetilde{R_m} \circ \widetilde{S_m})B = B$ para todo $B \in L(^mF; G')$. Logo $\widetilde{S_m}$ é a inversa de $\widetilde{R_m}$, e portanto $\widetilde{R_m}$ é um isomorfismo de $L(^mE; G')$ sobre $L(^mF; G')$. Portanto $L(^mE; G')$ e $L(^mF; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. $\square$

No Teorema 1.3.4, denotaremos $J_E(x)$ por x, para todo $x \in E$. Seguindo esta notação, lembramos que pela Proposição 1.2.1 $T_mA(x_1, ..., x_m) = A(x_1, ..., x_m)$ para todo $A \in L(^mE)$ e $x_1, ..., x_m \in E$.

Teorema 1.3.4. *Se E e F são simetricamente Arens - regular, e E' e F' são isomorfos, então $L^s(^mE)$ e $L^s(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja $S_1 = R_1^{-1} : F' \longrightarrow E'$ a inversa de R_1, e seja $S_m : L(^mF) \longrightarrow L(^mE)$ a seqüência de Nicodemi começando com S_1. Como F é simetricamente Arens - regular, temos que pelo Teorema 1.2.4

$$S_m(L^s(^mF)) \subset L^s(^mE). \tag{1.8}$$

Pelo Teorema 1.1.3 temos que

$$S_mB(x_1, ..., x_m) = Q_mB(S_1'x_1, ..., S_1'x_m)$$

para todo $B \in L(^mF)$, e $x_1, ..., x_m \in E$, onde S_1' é o transposto de S_1. Em particular, temos que

$$S_m(R_mA)(x_1, ..., x_m) = Q_m(R_mA)(S_1'x_1, ..., S_1'x_m) \tag{1.9}$$

para todo $A \in L(^mE)$. Por outro lado, como E é simetricamente Arens - regular, temos que pelo Teorema 1.2.4

$$R_m(L^s(^mE)) \subset L^s(^mF). \tag{1.10}$$

Além disso, pelo Teorema 1.2.6 temos que

$$Q_m(R_mA)(S_1'x_1, ..., S_1'x_m) = T_mA(R_1'(S_1'x_1), ..., R_1'(S_1'x_m)). \tag{1.11}$$

para todo $A \in L^s(^mE)$. Portanto concluímos por (1.9) e (1.11)

$$\begin{aligned} S_m(R_mA)(x_1,...,x_m) &= Q_m(R_mA)(S_1'x_1,...,S_1'x_m) \\ &= T_mA(R_1'(S_1'x_1),...,R_1'(S_1'x_m)) \\ &= T_mA(x_1,...,x_m) \\ &= A(x_1,...,x_m), \end{aligned}$$

para todo $A \in L^s(^mE)$, ou seja

$$(S_m \circ R_m)A = A \tag{1.12}$$

para todo $A \in L^s(^mE)$. De modo análogo, podemos provar que

$$(R_m \circ S_m)B = B \tag{1.13}$$

para todo $B \in L^s(^mF)$. Assim obtemos que por (1.8),(1.10),(1.12) e (1.13) $L^s(^mE)$ e $L^s(^mF)$ são isomorfos. $\square$

Em [7], dada uma seqüência de Nicodemi $R_m : L(^mE;G) \longrightarrow L(^mF;G)$, foi definido

$$\widehat{R}_m : \mathcal{P}(^mE;G) \longrightarrow \mathcal{P}(^mF;G)$$

por $\widehat{R}_m\widehat{A} = \widehat{R_mA}$ para cada $A \in L^s(^mE;G)$.

O seguinte teorema foi provado por Lassalle - Zalduendo em [10] e por F. Cabello Sánchez, J. Castillo e R. García em [5], por outros métodos.

Teorema 1.3.5. *Se E e F são simetricamente Arens - regular, e E' e F' são isomorfos, então $\mathcal{P}(^mE)$ e $\mathcal{P}(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja $S_1 = R_1^{-1} : F' \longrightarrow E'$ a inversa de R_1, e seja $S_m : L(^mF) \longrightarrow L(^mE)$ a seqüência de Nicodemi começando com S_1. Seja

$$\widehat{R}_m : \mathcal{P}(^mE) \longrightarrow \mathcal{P}(^mF) \tag{1.14}$$

definido por $\widehat{R}_m\widehat{A} = \widehat{R_mA}$ para cada $\widehat{A} \in \mathcal{P}(^mE)$, e seja

$$\widehat{S}_m : \mathcal{P}(^mF) \longrightarrow \mathcal{P}(^mE) \tag{1.15}$$

definido por $\widehat{S}_m\widehat{A} = \widehat{S_mA}$ para cada $\widehat{B} \in \mathcal{P}(^mF)$. Como E é simetricamente Arens - regular, por (1.12) da demonstração do Teorema 1.3.4 temos que, para cada $\widehat{A} \in \mathcal{P}(^mE)$

$$\begin{aligned}(\widehat{S}_m \circ \widehat{R}_m)(\widehat{A}) &= \widehat{S}_m(\widehat{R}_m\widehat{A})\\ &= \widehat{S}_m(\widehat{R_mA})\\ &= \widehat{S_m(R_mA)}\\ &= \widehat{A}\end{aligned}$$

Ou seja

$$(\widehat{S}_m \circ \widehat{R}_m)\widehat{A} = \widehat{A} \tag{1.16}$$

para todo $\widehat{A} \in \mathcal{P}(^mE)$. Como F é simetricamente Arens - regular, de maneira análoga podemos provar que

$$(\widehat{R}_m \circ \widehat{S}_m)\widehat{B} = \widehat{B} \tag{1.17}$$

para todo $\widehat{B} \in \mathcal{P}(^mF)$. Assim obtemos que por (1.14),(1.15),(1.16) e (1.17) $\mathcal{P}(^mE)$ e $\mathcal{P}(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. □

Teorema 1.3.6. *Se E e F são simetricamente Arens - regular, e E' e F' são isomorfos, então $L^s(^mE; G')$ e $L^s(^mF; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja $S_1 = R_1^{-1} : F' \longrightarrow E'$ a inversa de R_1, e seja $S_m : L(^mF) \longrightarrow L(^mE)$ a seqüência de Nicodemi começando com S_1. Sejam $\widetilde{R_m} : L(^mE; G') \longrightarrow L(^mF; G')$ e $\widetilde{S_m} : L(^mF; G') \longrightarrow L(^mE; G')$ as seqüências de Nicodemi correspondentes a (R_m) e (S_m) respectivamente. Pelo Teorema 1.2.5 temos que

$$\widetilde{R_m}(L^s(^mE; G')) \subset L^s(^mF; G'). \tag{1.18}$$

e

$$\widetilde{S_m}(L^s(^mF; G')) \subset L^s(^mE; G'). \tag{1.19}$$

Como, pela demonstração do Teorema 1.3.3 temos que $\widetilde{R_m}$ é um isomorfismo de $L(^mE; G')$ sobre $L(^mF; G')$ tal que $\widetilde{R_m}^{-1} = \widetilde{S_m}$, segue de (1.18) e (1.19) que $\widetilde{R_m}|_{L^s(^mE;G')}$ é um isomorfismo entre $L^s(^mE; G')$ e $L^s(^mF; G')$. □

O seguinte teorema foi provado por Carando - Lassalle em [4] por outros métodos

Teorema 1.3.7. *Se E e F são simetricamente Arens - regular, e E' e F' são isomorfos, então $\mathcal{P}(^m E; G')$ e $\mathcal{P}(^m F; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L(^m E) \longrightarrow L(^m F)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja $S_1 = R_1^{-1} : F' \longrightarrow E'$ a inversa de R_1, e seja $S_m : L(^m F) \longrightarrow L(^m E)$ a seqüência de Nicodemi começando com S_1. Sejam $\widetilde{R_m} : L(^m E; G') \longrightarrow L(^m F; G')$ e $\widetilde{S_m} : L(^m F; G') \longrightarrow L(^m E; G')$ as seqüências de Nicodemi correspondentes a (R_m) e (S_m) respectivamente. Seja

$$\widehat{\widetilde{R}}_m : \mathcal{P}(^m E; G') \longrightarrow \mathcal{P}(^m F; G') \tag{1.20}$$

definido por $\widehat{\widetilde{R}}_m \widehat{A} = \widehat{\widetilde{R}_m A}$ para cada $A \in L^s(^m E; G')$, e seja

$$\widehat{\widetilde{S}}_m : \mathcal{P}(^m F; G') \longrightarrow \mathcal{P}(^m E; G') \tag{1.21}$$

definido por $\widehat{\widetilde{S}}_m \widehat{A} = \widehat{\widetilde{S}_m A}$ para cada $\widehat{B} \in \mathcal{P}(^m F; G')$. Por (1.21) temos que para cada $\widehat{A} \in \mathcal{P}(^m E; G')$

$$\begin{aligned} (\widehat{\widetilde{S}}_m \circ \widehat{\widetilde{R}}_m)(\widehat{A}) &= \widehat{\widetilde{S}}_m(\widehat{\widetilde{R}}_m \widehat{A}) \\ &= \widehat{\widetilde{S}}_m(\widehat{\widetilde{R}_m A}) \\ &= \widetilde{S}_m\widehat{(\widetilde{R}_m A)} \\ &= \widehat{A} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$(\widehat{\widetilde{S}}_m \circ \widehat{\widetilde{R}}_m)\widehat{A} = \widehat{A} \tag{1.22}$$

para todo $\widehat{A} \in \mathcal{P}(^m E; G')$. De maneira análoga podemos provar que

$$(\widehat{\widetilde{R}}_m \circ \widehat{\widetilde{S}}_m)\widehat{B} = \widehat{B} \tag{1.23}$$

para todo $\widehat{B} \in \mathcal{P}(^m F; G')$. Assim obtemos que por (1.22),(1.23),(1.24) e (1.25) $\mathcal{P}(^m E; G')$ e $\mathcal{P}(^m F; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Capítulo 2

Operadores de extensão de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos de tipo finito

Neste capítulo, obteremos inicialmente teoremas de preservação de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos de tipo finito, e depois obteremos teoremas de isomorfismos entre espaços de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos de tipo finito em espaços de Banach.

2.1 Preservação de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos de tipo finito

Inicialmente vejamos a definição de aplicações multilineares de tipo finito.

Definição 2.1.1. *Uma aplicação $A \in L(^mE;G)$ é de tipo finito se existem $c_1, ..., c_n \in G$, $\varphi_{1i}, ..., \varphi_{mi} \in E', 1 \leq i \leq n$ tais que A pode ser escrita na forma:*

$$A(x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{1i}(x_1) \cdots \varphi_{mi}(x_m) c_i$$

para todo $(x_1, ..., x_m) \in E^m$.

Denotaremos por $L_f(^mE;G)$ o espaço de todas as aplicações m- lineares de E^m em G que são de tipo finito. Quando $G = \mathbb{K}$, escrevemos $L_f(^mE)$ ao invés de $L_f(^mE, \mathbb{K})$. Usaremos a seguinte notação:

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes c)(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)c$$

para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in E', c \in F$ e $x_1, x_2 \in E$.

O próximo lema se deve essencialmente a Aron e Berner [1].

Lema 2.1.2. *([1, Proposition 2.2]) Seja $T_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mE'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 = J_{E'} : E' \hookrightarrow E'''$. Seja $A \in L_f(^mE)$, e sejam $c_1, ..., c_n \in \mathbb{K}$, $\varphi_{1i}, ..., \varphi_{mi} \in E', 1 \leq i \leq n$ tais que*

$$A(x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{1i}(x_1) \cdots \varphi_{mi}(x_m)c_i$$

para todo $(x_1, ..., x_m) \in E^m$, então

$$T_m(A)(x''_1, ..., x''_m) = \sum_{i=1}^{n} (T_1\varphi_{1i})(x''_1) \cdots (T_1\varphi_{mi})(x''_m)c_i$$

para todo $(x''_1, ..., x''_m) \in (E'')^m$. Em particular $T_m(A) \in L_f(^mE'')$.

A seguir veremos que os operadores R_m da seqüência de Nicodemi preservam aplicações multilineares de tipo finito. Começaremos com o caso de aplicações multilineares com valores escalares.

Teorema 2.1.3. *Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ uma seqüência de Nicodemi. Então $R_mA \in L_f(^mF)$ para cada $A \in L_f(^mE)$.*

Demonstração. Dado $A \in L_f(^mE)$, ou seja, existem $c_1, ..., c_n \in \mathbb{K}$, $\varphi_{1i}, ..., \varphi_{mi} \in E', 1 \leq i \leq n$ tais que A pode ser escrita da forma:

$$A(x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{1i}(x_1) \cdots \varphi_{mi}(x_m)c_i$$

para todo $(x_1, ..., x_m) \in E^m$. Seja $T_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mE'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 = J_{E'} : E' \hookrightarrow E'''$. Pelo Teorema 1.1.3 temos que

$$R_mA(y_1, ..., y_m) = T_mA(R'_1(J_Fy_1), ..., R'_1(J_Fy_m)) \tag{2.1}$$

para todo $A \in L(^mE)$, e $y_1, ..., y_m \in F$, onde R'_1 é o transposto de R_1 e pelo Lema 2.1.2 temos que

$$T_m(A)(x''_1, ..., x''_m) = \sum_{i=1}^{n} (T_1\varphi_{1i})(x''_1) \cdots (T_1\varphi_{mi})(x''_m)c_i \tag{2.2}$$

para todo $(x_1'', ..., x_m'') \in (E'')^m$. Portanto por (2.1) e (2.2), temos que

$$\begin{aligned} R_m A(y_1, ..., y_m) &= T_m A(R_1'(J_F y_1), ..., R_1'(J_F y_m)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (T_1 \varphi_{1i})(R_1' J_F y_1) \cdots (T_1 \varphi_{mi})(R_1' J_F y_m) c_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} R_1 \varphi_{1i}(y_1) \cdots R_1 \varphi_{mi}(y_m) c_i \end{aligned}$$

para todo $y_1, ..., y_m \in F$, pois

$$< T_1\varphi, R_1'(J_F y) >=< J_{E'}\varphi, R_1'(J_F y) >=< R_1'(J_F y), \varphi >=< J_F y, R_1\varphi >=< R_1\varphi, y > .$$

Portanto

$$R_m A = \sum_{i=1}^{n} R_1 \varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes R_1 \varphi_{mi} \otimes c_i \tag{2.3}$$

e então $R_m A \in L_f({}^m F)$. $\square$

O próximo teorema trata do caso de aplicações multilineares com valores vetoriais.

Teorema 2.1.4. *Seja $R_m : L({}^m E) \longrightarrow L({}^m F)$ uma seqüência de Nicodemi e seja $\widetilde{R_m} : L({}^m E; G') \longrightarrow L({}^m F; G')$ a seqüência de Nicodemi correspondente a (R_m). Então $\widetilde{R_m} A \in L_f({}^m F; G')$ para cada $A \in L_f({}^m E; G')$.*

Demonstração. Dada $A \in L_f({}^m E; G')$, existem $c_1, ..., c_n \in G'$, $\varphi_{1i}, ..., \varphi_{mi} \in E', 1 \leq i \leq n$ tais que A pode ser escrita da forma:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes \varphi_{mi} \otimes c_i.$$

Logo

$$\delta_z \circ A = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes \varphi_{mi} \otimes c_i(z)$$

para cada $z \in G$, e é claro $\delta_z \circ A \in L_f({}^m E)$. Temos que por (2.3)

$$R_m(\delta_z \circ A) = \sum_{i=1}^{n} R_1 \varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes R_1 \varphi_{mi} \otimes c_i(z)$$

para cada $z \in G$. Logo temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{R_m}A(y_1,...,y_m)(z) &= R_m(\delta_z \circ A)(y_1,...,y_m)\\ &= \sum_{i=1}^{n} R_1\varphi_{1i}(y_1)\cdots R_1\varphi_{mi}(y_m)c_i(z)\end{aligned}$$

para todo $z \in G$ e $y_1,...,y_m \in F$. Concluímos que

$$\widetilde{R_m}A = \sum_{i=1}^{n} R_1\varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes R_1\varphi_{mi} \otimes c_i \tag{2.4}$$

e então $\widetilde{R_m}A \in L_f(^mF; G')$. □

Agora vejamos a definição de polinômios de tipo finito.

Definição 2.1.5. *Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE; G)$ é de tipo finito se existem $c_1,...,c_n \in G$, $\varphi_1,...,\varphi_n \in E'$ tais que P pode ser escrito da forma:*

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)^m c_i$$

para todo $x \in E$.

Denotaremos por $\mathcal{P}_f(^mE; G)$ o espaço de todos os polinômios de E em G que são de tipo finito. Quando $G = \mathbb{K}$, escrevemos $\mathcal{P}_f(^mE)$ ao invés de $\mathcal{P}_f(^mE, \mathbb{K})$. A seguir veremos que os operadores $\widehat{R}_m$ da seqüência de Nicodemi preservam polinômios homogêneos de tipo finito. Começaremos com o caso de polinômios homogêneos com valores escalares.

Teorema 2.1.6. *Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ uma seqüência de Nicodemi, e seja $\widehat{R}_m : \mathcal{P}(^mE) \longrightarrow \mathcal{P}(^mF)$ definido por $\widehat{R}_m\widehat{A} = \widehat{R_mA}$ para cada $A \in L^s(^mE)$. Então $\widehat{R}_mP \in \mathcal{P}_f(^mF)$ para cada $P \in \mathcal{P}_f(^mE)$.*

Demonstração. Por Gupta, [9, p.4] temos que

$$P \in \mathcal{P}_f(^mE) \Longleftrightarrow \text{existe } A \in L_f(^mE) \text{ tal que } P = \widehat{A}.$$

Dado $P \in \mathcal{P}_f(^mE)$, por Gupta [9], temos que existe $A \in L_f(^mE)$ tal que $P = \widehat{A}$. Pelo Teorema 2.1.3 temos que $R_mA \in L_f(^mF)$. Logo por Gupta [9] $\widehat{R_mA} \in \mathcal{P}_f(^mF)$, ou seja $\widehat{R}_mP \in \mathcal{P}_f(^mF)$.

□

O próximo teorema trata do caso de polinômios homogêneos com valores vetoriais.

Teorema 2.1.7. *Sejam* $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ *uma seqüência de Nicodemi e* $\widetilde{R_m} : L(^mE;G') \longrightarrow L(^mF;G')$ *a seqüência de Nicodemi correspondente a* (R_m) *e seja* $\widehat{\widetilde{R}}_m : \mathcal{P}(^mE;G') \longrightarrow \mathcal{P}(^mF;G')$ *definido por* $\widehat{\widetilde{R}}_m \widehat{A} = \widehat{\widetilde{R}_m A}$ *para cada* $A \in L^s(^mE;G')$. *Então* $\widehat{\widetilde{R}}_m P \in \mathcal{P}_f(^mF;G')$ *para cada* $P \in \mathcal{P}_f(^mE;G')$.

Demonstração. Por Gupta [9], temos que

$$P \in \mathcal{P}_f(^mE;G') \Longleftrightarrow \text{existe } \; A \in L_f(^mE;G') \text{ tal que } P = \widehat{A}.$$

Dado $P \in \mathcal{P}_f(^mE;G')$, por Gupta [9], temos que existe $A \in L_f(^mE;G')$ tal que $P = \widehat{A}$. Pelo Teorema 2.1.4 temos que $R_mA \in L_f(^mF;G)$. Logo por Gupta [9] $\widehat{R_mA} \in \mathcal{P}_f(^mF;G')$, ou seja $\widehat{R}_mP \in \mathcal{P}_f(^mF;G')$.

□

2.2 Isomorfismos entre espaços de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos de tipo finito

Nesta seção veremos que cada isomorfismo entre E' e F' induz um isomorfismo entre $L_f(^mE;G')$ e $L_f(^mF;G')$ para cada $m \in \mathbb{N}$, e induz também um isomorfismo entre $\mathcal{P}_f(^mE;G')$ e $\mathcal{P}_f(^mF;G')$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.2.1. *Se* E' *e* F' *são isomorfos, então* $L_f(^mE)$ *e* $L_f(^mF)$ *são isomorfos para todo* $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja $S_1 = R_1^{-1} : F' \longrightarrow E'$ a inversa de R_1, e seja $S_m : L(^mF) \longrightarrow L(^mE)$ a seqüência de Nicodemi começando com S_1. Pelo Teorema 2.1.3 temos que

$$R_m(L_f(^mE)) \subset L_f(^mF).$$

De modo similar a como obtivemos a equação (2.3), podemos obter

$$S_m(R_mA) = \sum_{i=1}^{n} S_1(R_1\varphi_{1i}) \otimes \cdots \otimes S_1(R_1\varphi_{mi}) \otimes c_i.$$

Como $S_1 \circ R_1$ é a identidade, temos que

$$S_m(R_m A) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes \varphi_{mi} \otimes c_i = A$$

para todo $A \in L_f(^mE)$. Por outro lado, de modo análogo, podemos obter que

$$S_m(L_f(^mF)) \subset L_f(^mE)$$

e $R_m(S_m B) = B$ para todo $B \in L_f(^mF)$. Concluímos que $L_f(^mE)$ e $L_f(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.

$\square$

Teorema 2.2.2. *Se E' e F' são isomorfos, então $L_f(^mE; G')$ e $L_f(^mF; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja

$$\widetilde{R_m} : L(^mE, G') \longrightarrow L(^mF, G')$$

a seqüência de Nicodemi correspondente a (R_m). Seja $S_1 = R_1^{-1} : F' \longrightarrow E'$ a inversa de R_1, e seja $S_m : L(^mF) \longrightarrow L(^mE)$ a seqüência de Nicodemi começando com S_1. Seja

$$\widetilde{S_m} : L(^mF, G') \longrightarrow L(^mE, G')$$

a seqüência de Nicodemi correspondente a (S_m). Temos que pelo Teorema 2.1.4

$$\widetilde{R_m}(L_f(^mE; G')) \subset L_f(^mF; G')$$

e

$$\widetilde{S_m}(L_f(^mF; G')) \subset L_f(^mE; G').$$

De modo similar a como obtivemos a equação (2.4), podemos obter

$$\widetilde{S_m}(\widetilde{R_m} A) = \sum_{i=1}^{n} S_1(R_1\varphi_{1i}) \otimes \cdots \otimes S_1(R_1\varphi_{mi}) \otimes c_i.$$

Como $S_1 \circ R_1$ é a identidade, temos que

$$\widetilde{S_m}(\widetilde{R_m} A) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes \varphi_{mi} \otimes c_i = A$$

para todo $A \in L_f(^m E; G')$. Por outro lado, de modo análogo, podemos obter que $\widetilde{R_m}(\widetilde{S_m}B) = B$ para todo $B \in L_f(^m F; G')$. Concluímos que $L_f(^m E; G')$ e $L_f(^m F; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.

$\square$

Para provar os teoremas 2.2.6 e 2.2.7 precisamos dos lemas seguintes:

Lema 2.2.3. *([1, Proposition 2.2]) Seja $T_m : L(^m E) \longrightarrow L(^m E'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 = J_{E'} : E' \hookrightarrow E'''$. Seja $P \in \mathcal{P}(^m E)$, e sejam $c_1, ..., c_n \in \mathbb{K}$, $\varphi_1, ..., \varphi_m \in E'$ tais que*

$$P = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^m \otimes c_i$$

então

$$\widehat{T}_m(P) = \sum_{i=1}^{n} (T_1\varphi_i)^m \otimes c_i.$$

Lema 2.2.4. *Seja $R_m : L(^m E) \longrightarrow L(^m F)$ uma seqüência de Nicodemi, e seja $\widehat{R}_m : \mathcal{P}(^m E) \longrightarrow \mathcal{P}(^m F)$ definido por $\widehat{R}_m \widehat{A} = \widehat{R_m A}$ para cada $A \in L^s(^m E)$. Seja $P \in \mathcal{P}_f(^m E)$, e sejam $c_1, ..., c_n \in \mathbb{K}$, $\varphi_1, ..., \varphi_m \in E'$ tais que*

$$P = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^m \otimes c_i$$

então

$$\widehat{R}_m(P) = \sum_{i=1}^{n} (R_1\varphi_i)^m \otimes c_i.$$

Demonstração. Seja $T_m : L(^m E) \longrightarrow L(^m E'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 = J_{E'} : E' \hookrightarrow E'''$. Pelo Teorema 1.1.3 temos que

$$R_m A(y_1, ..., y_m) = T_m A(R_1'(J_F y_1), ..., R_1'(J_F y_m))$$

para todo $A \in L(^m E)$, e $y_1, ..., y_m \in F$, onde R_1' é o transposto de R_1 e pelo Lema 2.2.3 temos que $\widehat{T}_m(P)$ tem a seguinte forma:

$$\widehat{T}_m(P)(x'') = \sum_{i=1}^{n} (T_1\varphi_i)(x'')^m c_i$$

para todo $x'' \in E''$. Portanto, sendo A a aplicação m-linear simétrica associada a P

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_m P(y) &= R_m A(\underbrace{y,...,y}_{m-vezes}) \\
&= T_m A(\underbrace{R_1'(J_F y),...,R_1'(J_F y)}_{m-vezes}) \\
&= \widehat{T}_m P(R_1'(J_F y)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (T_1\varphi_i)(R_1'(J_F y))^m c_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (R_1\varphi_i y))^m c_i
\end{aligned}$$

para todo $y \in F$, pois

$$< T_1\varphi, R_1'(J_F y) >=< J_{E'}\varphi, R_1'(J_F y) >=< R_1'(J_F y), \varphi >=< J_F y, R_1\varphi >=< R_1\varphi, y > .$$

Portanto

$$\widehat{R}_m P = \sum_{i=1}^{n} (R_1\varphi_i)^m \otimes c_i. \tag{2.5}$$

□

Lema 2.2.5. *Sejam $R_m : L(^mE) \to L(^mF)$ uma seqüência de Nicodemi e $\widetilde{R_m} : L(^mE; G') \to L(^mF; G')$ a seqüência de Nicodemi correspondente a (R_m) e seja $\widehat{\widetilde{R}}_m : \mathcal{P}(^mE; G') \longrightarrow \mathcal{P}(^mF; G')$ definido por $\widehat{\widetilde{R}}_m \widehat{A} = \widehat{\widetilde{R}_m A}$ para cada $A \in L^s(^mE; G')$. Seja $P \in \mathcal{P}_f(^mE; G')$, e sejam $c_1, ..., c_n \in G'$, $\varphi_1, ..., \varphi_m \in E'$ tais que*

$$P = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^m \otimes c_i$$

então

$$\widehat{\widetilde{R}}_m(P) = \sum_{i=1}^{n} (R_1\varphi_i)^m \otimes c_i.$$

Demonstração. Existe $A \in L^s(^mE; G')$ tal que $\widehat{A} = P$. Logo

$$\widehat{A}(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)^m c_i$$

para todo $x \in E$. Observamos que se $B = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\varphi_i \otimes \cdots \otimes \varphi_i}_{m-vezes} \otimes c_i$, então $B \in L_f(^mE; G') \cap L^s(^mE; G')$ e $\widehat{B} = \widehat{A}$. Logo $A = B$ pela injetividade do isomorfismo canônico $L^s(^mE; G') \longrightarrow \mathcal{P}(^mE; G')$. Assim, obtemos que $A \in L_f(^mE; G')$ e por (2.4)

$$\widetilde{R_m}A = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{R_1\varphi_i \otimes \cdots \otimes R_1\varphi_i}_{m-vezes} \otimes c_i.$$

Assim, sendo $\widehat{\widehat{R}}_m\widehat{A} = \widehat{\widetilde{R_m}A}$, temos que

$$\widehat{\widehat{R}}_m P = \sum_{i=1}^{n} (R_1\varphi_i)^m \otimes c_i. \tag{2.6}$$

□

Observamos que em particular os lemas 2.2.4 e 2.2.5 afirmam que os operadores $\widehat{R}_m$ e $\widehat{\widehat{R}}_m$ preservam polinômios homogêneos de tipo finito.

Teorema 2.2.6. *Se E' e F' são isomorfos, então $\mathcal{P}_f(^mE)$ e $\mathcal{P}_f(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja $S_1 = R_1^{-1} : F' \longrightarrow E'$ a inversa de R_1, e seja $S_m : L(^mF) \longrightarrow L(^mE)$ a seqüência de Nicodemi começando com S_1. Sejam $\widehat{R}_m : \mathcal{P}(^mE) \longrightarrow \mathcal{P}(^mF)$ definido por $\widehat{R}_m\widehat{A} = \widehat{R_mA}$ para cada $A \in L^s(^mE)$ e seja $\widehat{S}_m : \mathcal{P}(^mF) \longrightarrow \mathcal{P}(^mE)$ definido por $\widehat{S}_m\widehat{B} = \widehat{S_mB}$ para cada $B \in L^s(^mF)$. Temos que pelo Teorema 2.1.6

$$\widehat{R}_m(\mathcal{P}_f(^mE)) \subset \mathcal{P}_f(^mF)$$

e

$$\widehat{S}_m(\mathcal{P}_f(^mF)) \subset \mathcal{P}_f(^mE).$$

De modo similar a como obtivemos (2.5), podemos obter

$$\widehat{S}_m(\widehat{R}_mP) = \sum_{i=1}^{n} (S_1(R_1\varphi_i))^m \otimes c_i.$$

Como $S_1 \circ R_1$ é a identidade, temos que

$$\widehat{S}_m(\widehat{R}_mP) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i)^m \otimes c_i = P$$

para todo $P \in \mathcal{P}_f({}^m E)$. Por outro lado, de modo análogo, podemos provar que $\widehat{R}_m(\widehat{S}_m Q) = Q$ para todo $Q \in \mathcal{P}_f({}^m F)$. Concluímos que $\mathcal{P}_f({}^m E)$ e $\mathcal{P}_f({}^m F)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 2.2.7. *Se E' e F' são isomorfos, então $\mathcal{P}_f({}^m E; G')$ e $\mathcal{P}_f({}^m F; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L({}^m E) \longrightarrow L({}^m F)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja $S_1 = R_1^{-1} : F' \longrightarrow E'$ a inversa de R_1, e seja $S_m : L({}^m F) \longrightarrow L({}^m E)$ a seqüência de Nicodemi começando com S_1. Sejam $\widetilde{R_m} : L({}^m E; G') \longrightarrow L({}^m F; G')$ e $\widetilde{S_m} : L({}^m F; G') \longrightarrow L({}^m E; G')$ as seqüências de Nicodemi correspondentes a (R_m) e (S_m) respectivamente. Seja

$$\widehat{\widetilde{R}}_m : \mathcal{P}({}^m E; G') \longrightarrow \mathcal{P}({}^m F; G')$$

definido por $\widehat{\widetilde{R}}_m \widehat{A} = \widehat{\widetilde{R}_m A}$ para cada $A \in L^s({}^m E; G')$, e seja

$$\widehat{\widetilde{S}}_m : \mathcal{P}({}^m F; G') \longrightarrow \mathcal{P}({}^m E; G')$$

definido por $\widehat{\widetilde{S}}_m \widehat{A} = \widehat{\widetilde{S}_m A}$ para cada $B \in L^s({}^m F; G')$. Pelo Teorema 2.1.7 temos que

$$\widehat{\widetilde{R}}_m(\mathcal{P}_f({}^m E; G')) \subset \mathcal{P}_f({}^m F; G')$$

e

$$\widehat{\widetilde{S}}_m(\mathcal{P}_f({}^m F; G')) \subset \mathcal{P}_f({}^m E; G').$$

De modo similar a como obtivemos (2.6), podemos obter

$$\widehat{\widetilde{S}}_m(\widehat{\widetilde{R}}_m P) = \sum_{i=1}^{n} (S_1(R_1 \varphi_i))^m \otimes c_i.$$

Como $S_1 \circ R_1$ é a identidade, temos que

$$\widehat{\widetilde{S}}_m(\widehat{\widetilde{R}}_m P) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i)^m \otimes c_i = P$$

para todo $P \in \mathcal{P}_f({}^m E; G')$. Por outro lado, de modo análogo, podemos provar que $\widehat{\widetilde{R}}_m(\widehat{\widetilde{S}}_m Q) = Q$ para todo $Q \in \mathcal{P}_f({}^m F; G')$. Concluímos que $\mathcal{P}_f({}^m E; G')$ e $\mathcal{P}_f({}^m F; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Notemos que nos Teoremas 2.2.6 e 2.2.7 não precisamos da hipótese de regularidade de Arens.

Capítulo 3

Operadores de extensão de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos nucleares

Neste capítulo, obteremos inicialmente teoremas de preservação de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos nucleares, e depois obteremos teoremas de isomorfismos entre espaços de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos nucleares em espaços de Banach.

3.1 Preservação de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos nucleares

Primeiramente, vejamos a definição de aplicações multilineares nucleares.

Definição 3.1.1. *Uma aplicação $A \in L(^mE;G)$ é dita nuclear, se existem seqüências $(\varphi_{ji})_{i\in\mathbb{N}}$ em E', $1 \leq j \leq m$, e $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em G, com*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_{1i}\| \cdots \|\varphi_{mi}\|\|c_i\| < \infty$$

tais que

$$A(x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{1i}(x_1) \cdots \varphi_{mi}(x_m)c_i$$

para todo $(x_1, ..., x_m) \in E^m$.

Denotaremos por $L_N(^m E; G)$ o espaço de todas as aplicações m- lineares de E^m em G que são nucleares, munido da norma nuclear

$$\|A\|_N = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_{1i}\| \cdots \|\varphi_{mi}\| \|c_i\|$$

onde o ínfimo é tomado sob todas as seqüências $(\varphi_{ji})_{i\in\mathbb{N}}$ e $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que satisfazem a definição. Quando $G = \mathbb{K}$, escrevemos $L_N(^m E)$ ao invés de $L_N(^m E, \mathbb{K})$.

Lema 3.1.2. *Seja $T_m : L(^m E) \longrightarrow L(^m E'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 = J_{E'} : E' \hookrightarrow E'''$. Seja $A \in L_N(^m E)$e sejam $(\varphi_{ji})_{i\in\mathbb{N}}$ em E', $1 \leq j \leq m$, e $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}$, com*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_{1i}\| \cdots \|\varphi_{mi}\| \|c_i\| < \infty$$

tais que

$$A(x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{1i}(x_1) \cdots \varphi_{mi}(x_m) c_i$$

para todo $(x_1, ..., x_m) \in E^m$. Então $T_m(A)$ tem a seguinte forma:

$$T_m(A)(x_1'', ..., x_m'') = \sum_{i=1}^{\infty} (T_1\varphi_{1i})(x_1'') \cdots (T_1\varphi_{mi})(x_m'') c_i$$

para todo $(x_1'', ..., x_m'') \in (E'')^m$. Em particular $T_m(A) \in L_N(^m E'')$.

Demonstração. Seja

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes \varphi_{mi} \otimes c_i$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $A_n \in L_f(^m E)$ e $A_n \to A$ uniformemente em relação à norma nuclear, ou seja

$$\|A_n - A\|_N \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

Pelo Lema 2.1.2 $T_m A_n$ tem a forma seguinte:

$$T_m A_n = \sum_{i=1}^{n} T_1\varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes T_1\varphi_{mi} \otimes c_i$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que

$$T_m A_n \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} T_1\varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes T_1\varphi_{mi} \otimes c_i$$

uniformemente em relação à norma nuclear. Logo

$$T_m A_n \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} T_1\varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes T_1\varphi_{mi} \otimes c_i \tag{3.2}$$

pontualmente. Por outro lado, temos que

$$T_m A_n \to T_m A \tag{3.3}$$

pontualmente, pois temos que por (3.1)

$$\begin{aligned}
& \|T_m A(x_1'', ..., x_m'') - T_m A_n(x_1'', ..., x_m'')\| \\
= \ & \|(T_m A - T_m A_n)(x_1'', ..., x_m'')\| \\
= \ & \|T_m(A - A_n)(x_1'', ..., x_m'')\| \\
\leq \ & \|T_m\|\|A - A_n\|\|(x_1'', ..., x_m'')\| \\
\leq \ & \|T_m\|\|A - A_n\|_N\|(x_1'', ..., x_m'')\| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

para todo $x_1'', ..., x_m'' \in E''$. Por (3.2) e (3.3), temos que

$$T_m(A)(x_1'', ..., x_m'') = \sum_{i=1}^{\infty} (T_1\varphi_{1i})(x_1'') \cdots (T_1\varphi_{mi})(x_m'')c_i$$

para todo $x_1'', ..., x_m'' \in E''$ e por conseguinte $T_m(A) \in L_N(^mE'')$.

□

A seguir veremos que os operadores R_m da seqüência de Nicodemi preservam aplicações multilineares nucleares. Começaremos com o caso de aplicações multilineares com valores escalares.

Teorema 3.1.3. *Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ uma seqüência de Nicodemi. Então $R_m A \in L_N(^mF)$ para cada $A \in L_N(^mE)$.*

Demonstração. Dado $A \in L_N(^mE)$, pela definição, existem seqüências $(\varphi_{ji})_{i\in\mathbb{N}}$ em E', $1 \leq j \leq m$, e $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}$, com

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_{1i}\| \cdots \|\varphi_{mi}\|\|c_i\| < \infty$$

tais que

$$A(x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{1i}(x_1) \cdots \varphi_{mi}(x_m)c_i$$

para todo $(x_1, ..., x_m) \in E^m$. Seja $T_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mE'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 = J_{E'} : E' \hookrightarrow E'''$. Pelo Teorema 1.1.3 temos que

$$R_mA(y_1, ..., y_m) = T_mA(R_1'(J_Fy_1), ..., R_1'(J_Fy_m))$$

para todo $A \in L(^mE)$, e $y_1, ..., y_m \in F$, onde R_1' é o transposto de R_1 e pelo Lema 3.1.2 temos que

$$T_m(A)(x_1'', ..., x_m'') = \sum_{i=1}^{\infty}(T_1\varphi_{1i})(x_1'') \cdots (T_1\varphi_{mi})(x_m'')c_i$$

para todo $(x_1'', ..., x_m'') \in (E'')^m$. Portanto

$$\begin{aligned} R_mA(y_1, ..., y_m) &= T_mA(R_1'(J_Fy_1), ..., R_1'(J_Fy_m)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}(T_1\varphi_{1i})(R_1'J_Fy_1) \cdots (T_1\varphi_{mi})(R_1'J_Fy_m)c_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} R_1\varphi_{1i}(y_1) \cdots R_1\varphi_{mi}(y_m)c_i \end{aligned}$$

para todo $y_1, ..., y_m \in F$, pois

$$< T_1\varphi, R_1'(J_Fy) >=< J_{E'}\varphi, R_1'(J_Fy) >=< R_1'(J_Fy), \varphi >=< J_Fy, R_1\varphi >=< R_1\varphi, y > .$$

Portanto

$$R_mA = \sum_{i=1}^{\infty} R_1\varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes R_1\varphi_{mi} \otimes c_i \tag{3.4}$$

e então $R_mA \in L_N(^mF)$. $\square$

O próximo teorema trata do caso de aplicações multilineares com valores vetoriais.

Teorema 3.1.4. *Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ uma seqüência de Nicodemi e seja $\widetilde{R_m} : L(^mE; G') \longrightarrow L(^mF; G')$ a seqüência de Nicodemi correspondente a (R_m). Então $\widetilde{R_m}A \in L_N(^mF; G')$ para cada $A \in L_N(^mE; G')$.*

Demonstração. Dada $A \in L_N(^mE; G')$, por definição existem seqüências $(\varphi_{ji})_{i\in\mathbb{N}}$ em E', $1 \leq j \leq m$, e $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em G', com

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_{1i}\| \cdots \|\varphi_{mi}\|\|c_i\| < \infty$$

tais que

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes \varphi_{mi} \otimes c_i.$$

Logo

$$\delta_z \circ A = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes \varphi_{mi} \otimes c_i(z)$$

para cada $z \in G$, e é claro $\delta_z \circ A \in L_N({}^m E)$. Temos que por (3.4)

$$R_m(\delta_z \circ A) = \sum_{i=1}^{\infty} R_1\varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes R_1\varphi_{mi} \otimes c_i(z)$$

para cada $z \in G$. Temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{R_m} A(y_1, ..., y_m)(z) &= R_m(\delta_z \circ A)(y_1, ..., y_m) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} R_1\varphi_{1i}(y_1) \cdots R_1\varphi_{mi}(y_m) c_i(z) \end{aligned}$$

para todo $z \in G$ e $y_1, ..., y_m \in F$. Concluímos que

$$\widetilde{R_m} A = \sum_{i=1}^{\infty} R_1\varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes R_1\varphi_{mi} \otimes c_i \tag{3.5}$$

e então $\widetilde{R_m} A \in L_N({}^m F; G')$. □

Vejamos a seguir a definição de polinômios nucleares.

Definição 3.1.5. *Um polinômio $P \in \mathcal{P}({}^m E; G)$ é dito nuclear, se existem seqüências $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em E', e $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em G com*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|^m \|c_i\| < \infty$$

tais que

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)^m c_i$$

para todo $x \in E$.

Denotaremos por $\mathcal{P}_N({}^m E; G)$ o espaço de todos os polinômios de E em G que são nucleares, munidos da norma nuclear

$$\|P\|_N = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|^m \|c_i\|$$

onde o ínfimo é tomado sob todas as seqüências $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que satisfazem a definição. Quando $G = \mathbb{K}$, escrevemos $\mathcal{P}_N({}^m E)$ ao invés de $\mathcal{P}_N({}^m E, \mathbb{K})$.

Lema 3.1.6. *Seja $T_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mE'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 = J_{E'} : E' \hookrightarrow E'''$. Seja $P \in \mathcal{P}_N(^mE)$ e sejam $c_1, ..., c_n \in \mathbb{K}$, $\varphi_1, ..., \varphi_m \in E'$ tais que*

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^m \otimes c_i.$$

Então

$$\widehat{T}_m(P) = \sum_{i=1}^{\infty} (T_1\varphi_i)^m \otimes c_i.$$

Em particular $\widehat{T}_m(P) \in \mathcal{P}_N(^mE'')$.

Demonstração. Similar à demonstração do Lema 3.1.2.

□

A seguir veremos que os operadores $\widehat{R}_m$ da seqüência de Nicodemi preservam polinômios homogêneos nucleares. Começaremos com o caso de polinômios homogêneos com valores escalares.

Teorema 3.1.7. *Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ uma seqüência de Nicodemi, e seja $\widehat{R}_m : \mathcal{P}(^mE) \longrightarrow \mathcal{P}(^mF)$ definido por $\widehat{R}_m\widehat{A} = \widehat{R_mA}$ para cada $A \in L^s(^mE)$. Então $\widehat{R}_mP \in \mathcal{P}_N(^mF)$ para cada $P \in \mathcal{P}_N(^mE)$.*

Demonstração. Dado $P \in \mathcal{P}_N(^mE)$, por definição existem $c_1, ..., c_n \in \mathbb{K}$, $\varphi_1, ..., \varphi_n \in E'$ tais que P pode ser escrito na forma:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)^m c_i$$

para todo $x \in E$. Seja $T_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mE'')$ a seqüência de Nicodemi começando com o mergulho canônico $T_1 = J_{E'} : E' \hookrightarrow E'''$. Pelo Teorema 1.1.3 temos que

$$R_mA(y_1, ..., y_m) = T_mA(R_1'(J_Fy_1), ..., R_1'(J_Fy_m))$$

para todo $A \in L(^mE)$, e $y_1, ..., y_m \in F$, onde R_1' é o transposto de R_1 e pelo Lema 3.1.6 temos que $\widehat{T}_m(P)$ tem a seguinte forma:

$$\widehat{T}_m(P)(x'') = \sum_{i=1}^{\infty} (T_1\varphi_i)(x'')^m c_i$$

para todo $x'' \in E''$. Portanto, sendo A a aplicação m-linear simétrica associada a P

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_m P(y) &= R_m A(\underbrace{y, ..., y}_{m-vezes}) \\
&= T_m A(\underbrace{R_1'(J_F y), ..., R_1'(J_F y)}_{m-vezes}) \\
&= \widehat{T}_m P(R_1'(J_F y)) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (T_1 \varphi_i)(R_1'(J_F y))^m c_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (R_1 \varphi_i y))^m c_i
\end{aligned}$$

para todo $y \in F$, pois

$$< T_1\varphi, R_1'(J_F y) >=< J_{E'}\varphi, R_1'(J_F y) >=< R_1'(J_F y), \varphi >=< J_F y, R_1\varphi >=< R_1\varphi, y > .$$

Portanto

$$\widehat{R}_m P = \sum_{i=1}^{\infty} (R_1 \varphi_i)^m \otimes c_i \tag{3.6}$$

e então $\widehat{R}_m P \in \mathcal{P}_N(^m F)$. $\square$

O próximo teorema trata do caso de polinômios homogêneos com valores vetoriais.

Teorema 3.1.8. *Sejam $R_m : L(^m E) \longrightarrow L(^m F)$ uma seqüência de Nicodemi e $\widetilde{R_m} : L(^m E; G') \longrightarrow L(^m F; G')$ a seqüência de Nicodemi correspondente a (R_m) e seja $\widehat{\widetilde{R}}_m : \mathcal{P}(^m E; G') \longrightarrow \mathcal{P}(^m F; G')$ definido por $\widehat{\widetilde{R}}_m \widehat{A} = \widehat{\widetilde{R}_m A}$ para cada $A \in L^s(^m E; G')$. Então $\widehat{\widetilde{R}}_m P \in \mathcal{P}_N(^m F; G')$ para cada $P \in \mathcal{P}_N(^m E; G')$.*

Demonstração. Dado $\widehat{A} \in \mathcal{P}_N(^m E; G')$, existem seqüências $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em E', e $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em G' com

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|^m \|c_i\| < \infty$$

tais que

$$\widehat{A} = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)^m c_i$$

para todo $x \in E$, onde $A \in L^s(^mE; G')$. Observamos que se $B = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\varphi_i \otimes \cdots \otimes \varphi_i}_{m-vezes} \otimes c_i$, então $B \in L_N(^mE; G') \cap L^s(^mE; G')$ e $\widehat{B} = \widehat{A}$. Logo $A = B$ pela injetividade do isomorfismo canônico $L^s(^mE; G') \longrightarrow \mathcal{P}(^mE; G')$. Assim, obtemos que $A \in L_N(^mE; G')$ e por (3.5)

$$\widetilde{R_m}A = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{R_1\varphi_i \otimes \cdots \otimes R_1\varphi_i}_{m-vezes} \otimes c_i.$$

Por conseguinte sendo $\widehat{\widetilde{R}}_m \widehat{A} = \widehat{\widetilde{R_m}A}$, temos que

$$\widehat{\widetilde{R}}_m P = \sum_{i=1}^{n} (R_1\varphi_i)^m \otimes c_i \tag{3.7}$$

e então $\widehat{\widetilde{R}}_m P \in \mathcal{P}_N(^mF; G')$. $\square$

Se E é um subespaço fechado de F, Aron e Berner [1, Theorem 2.1] provaram que a aplicação de restrição

$$\mathcal{P}_N(^mF; G) \longrightarrow \mathcal{P}_N(^mE; G)$$

é sobrejetiva para cada $m \in \mathbb{N}$, mas mesmo no caso do mergulho canônico $J_E : E \hookrightarrow E''$, eles não estudaram o problema de existência de um operador linear de extensão

$$T_m : \mathcal{P}_N(^mE) \longrightarrow \mathcal{P}_N(^mE'')$$

para cada $m \in \mathbb{N}$.

3.2 Isomorfismos entre espaços de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos nucleares

Nesta seção veremos que cada isomorfismo entre E' e F' induz um isomorfismo entre $L_N(^mE; G')$ e $L_N(^mF; G')$ para cada $m \in \mathbb{N}$, e induz também um isomorfismo entre $\mathcal{P}_N(^mE; G')$ e $\mathcal{P}_N(^mF; G')$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2.1. *Se E' e F' são isomorfos, então $L_N(^mE)$ e $L_N(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja $S_1 = R_1^{-1} : F' \longrightarrow E'$ a inversa de R_1, e seja $S_m : L(^mF) \longrightarrow L(^mE)$ a seqüência de Nicodemi começando com S_1. Pelo Teorema 3.1.3 temos que

$$R_m(L_N(^mE)) \subset L_N(^mF).$$

De modo similar a como obtivemos a equação (3.4), podemos obter

$$S_m(R_mA) = \sum_{i=1}^{\infty} S_1(R_1\varphi_{1i}) \otimes \cdots \otimes S_1(R_1\varphi_{mi}) \otimes c_i.$$

Como $S_1 \circ R_1$ é a identidade, temos que

$$S_m(R_mA) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes \varphi_{mi} \otimes c_i = A$$

para todo $A \in L_N(^mE)$. Por outro lado, de modo análogo, podemos obter que

$$S_m(L_N(^mF)) \subset L_N(^mE)$$

e $R_m(S_mB) = B$ para todo $B \in L_N(^mF)$. Concluímos que $L_N(^mE)$ e $L_N(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.

$\square$

Teorema 3.2.2. *Se E' e F' são isomorfos, então $L_N(^mE; G')$ e $L_N(^mF; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja

$$\widetilde{R_m} : L(^mE, G') \longrightarrow L(^mF, G')$$

a seqüência de Nicodemi correspondente a (R_m). Seja $S_1 = R_1^{-1} : F' \longrightarrow E'$ a inversa de R_1, e seja $S_m : L(^mF) \longrightarrow L(^mE)$ a seqüência de Nicodemi começando com S_1. Seja

$$\widetilde{S_m} : L(^mF, G') \longrightarrow L(^mE, G')$$

a seqüência de Nicodemi correspondente a (S_m). Temos que pelo Teorema 3.1.4

$$\widetilde{R_m}(L_N(^mE; G')) \subset L_N(^mF; G')$$

e

$$\widetilde{S_m}(L_N(^mF;G')) \subset L_N(^mE;G').$$

De modo similar a como obtivemos a equação (3.5), podemos obter

$$\widetilde{S_m}(\widetilde{R_m}A) = \sum_{i=1}^{\infty} S_1(R_1\varphi_{1i}) \otimes \cdots \otimes S_1(R_1\varphi_{mi}) \otimes c_i.$$

Como $S_1 \circ R_1$ é a identidade, temos que

$$\widetilde{S_m}(\widetilde{R_m}A) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{1i} \otimes \cdots \otimes \varphi_{mi} \otimes c_i = A$$

para todo $A \in L_N(^mE;G')$. Por outro lado, de modo análogo, podemos obter que $\widetilde{R_m}(\widetilde{S_m}B) = B$ para todo $B \in L_N(^mF;G')$. Concluímos que $L_N(^mE;G')$ e $L_N(^mF;G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.

$\square$

Teorema 3.2.3. *Se E' e F' são isomorfos, então $\mathcal{P}_N(^mE)$ e $\mathcal{P}_N(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja $S_1 = R_1^{-1} : F' \longrightarrow E'$ a inversa de R_1, e seja $S_m : L(^mF) \longrightarrow L(^mE)$ a seqüência de Nicodemi começando com S_1. Sejam $\widehat{R}_m : \mathcal{P}(^mE) \longrightarrow \mathcal{P}(^mF)$ definido por $\widehat{R}_m\widehat{A} = \widehat{R_mA}$ para cada $A \in L^s(^mE)$ e seja $\widehat{S}_m : \mathcal{P}(^mF) \longrightarrow \mathcal{P}(^mE)$ definido por $\widehat{S}_m\widehat{B} = \widehat{S_mB}$ para cada $B \in L^s(^mF)$. Temos que pelo Teorema 3.1.7

$$\widehat{R}_m(\mathcal{P}_N(^mE)) \subset \mathcal{P}_N(^mF)$$

e

$$\widehat{S}_m(\mathcal{P}_N(^mF)) \subset \mathcal{P}_N(^mE).$$

De modo similar a como obtivemos (3.6), podemos obter

$$\widehat{S}_m(\widehat{R}_mP) = \sum_{i=1}^{\infty} (S_1(R_1\varphi_i))^m \otimes c_i.$$

Como $S_1 \circ R_1$ é a identidade, temos que

$$\widehat{S}_m(\widehat{R}_mP) = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i)^m \otimes c_i = P$$

para todo $P \in \mathcal{P}_N(^mE)$. Por outro lado, de modo análogo, podemos provar que $\widehat{R}_m(\widehat{S}_mQ) = Q$ para todo $Q \in \mathcal{P}_N(^mF)$. Concluímos que $\mathcal{P}_N(^mE)$ e $\mathcal{P}_N(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 3.2.4. *Se E' e F' são isomorfos, então $\mathcal{P}_N(^mE;G')$ e $\mathcal{P}_N(^mF;G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja $S_1 = R_1^{-1} : F' \longrightarrow E'$ a inversa de R_1, e seja $S_m : L(^mF) \longrightarrow L(^mE)$ a seqüência de Nicodemi começando com S_1. Sejam $\widetilde{R_m} : L(^mE;G') \longrightarrow L(^mF;G')$ e $\widetilde{S_m} : L(^mF;G') \longrightarrow L(^mE;G')$ as seqüências de Nicodemi correspondentes a (R_m) e (S_m) respectivamente. Seja

$$\widehat{\widetilde{R}}_m : \mathcal{P}(^mE;G') \longrightarrow \mathcal{P}(^mF;G')$$

definido por $\widehat{\widetilde{R}}_m\widehat{A} = \widehat{\widetilde{R}_mA}$ para cada $A \in L^s(^mE;G')$, e seja

$$\widehat{\widetilde{S}}_m : \mathcal{P}(^mF;G') \longrightarrow \mathcal{P}(^mE;G')$$

definido por $\widehat{\widetilde{S}}_m\widehat{A} = \widehat{\widetilde{S}_mA}$ para cada $B \in L^s(^mF;G')$. Pelo Teorema 3.1.8 temos que

$$\widehat{\widetilde{R}}_m(\mathcal{P}_N(^mE;G')) \subset \mathcal{P}_N(^mF;G')$$

e

$$\widehat{\widetilde{S}}_m(\mathcal{P}_N(^mF;G')) \subset \mathcal{P}_N(^mE;G').$$

De modo similar a como obtivemos (3.7), podemos obter

$$\widehat{\widetilde{S}}_m(\widehat{\widetilde{R}}_mP) = \sum_{i=1}^{\infty}(S_1(R_1\varphi_i))^m \otimes c_i.$$

Como $S_1 \circ R_1$ é a identidade, temos que

$$\widehat{\widetilde{S}}_m(\widehat{\widetilde{R}}_mP) = \sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i)^m \otimes c_i = P$$

para todo $P \in \mathcal{P}_N(^mE;G')$. Por outro lado, de modo análogo, podemos provar que $\widehat{\widetilde{R}}_m(\widehat{\widetilde{S}}_mQ) = Q$ para todo $Q \in \mathcal{P}_N(^mF;G')$. Concluímos que $\mathcal{P}_N(^mE;G')$ e $\mathcal{P}_N(^mF;G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Notemos que nos Teoremas 3.2.3 e 3.2.4 não precisamos da hipótese de regularidade de Arens.

Capítulo 4

Operadores de extensão de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos compactos ou fracamente compactos

Neste capítulo, obteremos inicialmente teoremas de preservação de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos compactos ou fracamente compactos, e depois obteremos teoremas de isomorfismos entre espaços de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos compactos ou fracamente compactos em espaços de Banach.

4.1 Preservação de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos compactos ou fracamente compactos

Lembramos que $A \in L(^m E; G)$ é uma aplicação compacta (resp. fracamente compacta) se $A(B_{E^m})$ é relativamente compacto em G (resp. com relação à topologia fraca), onde B_{E^m} denota a bola fechada unitária de E^m. Denotaremos por $L_K(^m E; G)$ (resp. $L_{WK}(^m E; G)$) o espaço de todas as aplicações m-lineares compactas (resp. fracamente compacta) de E^m em G. Lembramos também que $P \in \mathcal{P}(^m E; G)$ é um polinômio homogêneo compacto (resp. fracamente compacto) se $P(B_E)$ é relativamente compacto em G (resp. com relação à topologia fraca), onde B_E denota a bola fechada unitária de E. Denotaremos por $\mathcal{P}_K({}^mE;G)$ (resp. $\mathcal{P}_{WK}({}^mE;G)$) o espaço de todos polinômios m-homogêneos compactos (resp. fracamente compactos) de E em G. Observamos que no caso de que $G = \mathbb{K}$, todos os polinômios homogêneos são compactos (resp. fracamente compactos).

O próximo teorema mostra que os operadores $\widetilde{R_m}$ da seqüência de Nicodemi preservam as aplicações multilineares compactas (resp. fracamente compactas).

Teorema 4.1.1. *Seja $R_m : L({}^mE) \longrightarrow L({}^mF)$ uma seqüência de Nicodemi e seja $\widetilde{R_m} : L({}^mE;G') \longrightarrow L({}^mF;G')$ a seqüência de Nicodemi correspondente a (R_m). Então $\widetilde{R_m}A \in L_\Theta({}^mF;G')$ para cada $A \in L_\Theta({}^mE;G')$, onde $\Theta = K$ ou WK.*

Demonstração. Seja $\widetilde{T_m} : L({}^mE;G') \longrightarrow L({}^mE'';G')$ a seqüência de Nicodemi correspondente à seqüência de Nicodemi (T_m) começando com o mergulho canônico $T_1 : E' \hookrightarrow E'''$. Esta seqüência coincide com a seqüência de operadores construída por Aron-Berner em [1, Proposition 2.1]. Portanto, por Proposition 2.1 de [1], obtemos que $\widetilde{T_m}A \in L_\Theta({}^mE'';G')$ para cada $A \in L_\Theta({}^mE;G')$, onde $\Theta = K$ ou WK. Pelo Teorema 1.1.6, temos que

$$\widetilde{R_m}A(y_1, ..., y_m) = \widetilde{T_m}A(R_1'(J_Fy_1), ..., R_1'(J_Fy_m))$$

para todo $A \in L({}^mE;G')$, e $y_1, ..., y_m \in F$, onde R_1' é o transposto de R_1, o que implica que se $\widetilde{T_m}A \in L_\Theta({}^mE'';G')$, então $\widetilde{R_m}A \in L_\Theta({}^mF;G')$, onde $\Theta = K$ ou WK. Portanto concluímos que $\widetilde{R_m}A \in L_\Theta({}^mF;G')$ para cada $A \in L_\Theta({}^mE;G')$, onde $\Theta = K$ ou WK. $\square$

O próximo teorema mostra que os operadores $\widehat{\widetilde{R}}_m$ da seqüência de Nicodemi preservam os polinômios homogêneos compactos (resp. fracamente compactos).

Teorema 4.1.2. *Sejam $R_m : L({}^mE) \longrightarrow L({}^mF)$ uma seqüência de Nicodemi e $\widetilde{R_m} : L({}^mE;G') \longrightarrow L({}^mF;G')$ a seqüência de Nicodemi correspondente a (R_m) e seja $\widehat{\widetilde{R}}_m : \mathcal{P}({}^mE;G') \longrightarrow \mathcal{P}({}^mF;G')$ definido por $\widehat{\widetilde{R}}_m\widehat{A} = \widehat{\widetilde{R}_mA}$ para cada $A \in L^s({}^mE;G')$. Então $\widehat{\widetilde{R}}_mP \in \mathcal{P}_\Theta({}^mF;G')$ para cada $P \in \mathcal{P}_\Theta({}^mE;G')$, onde $\Theta = K$ ou WK.*

Demonstração. Seja $\widetilde{T_m} : L({}^mE;G') \longrightarrow L({}^mE'';G')$ a seqüência de Nicodemi correspondente à seqüência de Nicodemi (T_m) começando com o mergulho canônico $T_1 : E' \hookrightarrow E'''$. Esta seqüência coincide com a seqüência de operadores construída por Aron-Berner em [1, Proposition 2.1]. Logo a seqüência $\widehat{\widetilde{T}}_m : \mathcal{P}({}^mE;G') \longrightarrow \mathcal{P}({}^mE'';G')$ definida por $\widehat{\widetilde{T}}_m\widehat{A} = \widehat{\widetilde{T}_mA}$ para cada $A \in L^s({}^mE;G')$ coincide com a seqüência de operadores construída por Aron - Berner em [1, Corollary 2.2]. Por conseguinte $\widetilde{\widetilde{T}}_m P \in \mathcal{P}_\Theta({}^m E''; G')$ para cada $P \in \mathcal{P}_\Theta({}^m E; G')$, onde $\Theta = K$ ou WK. Pelo Teorema 1.1.6, temos que

$$\widetilde{\widetilde{R}}_m P(y) = \widetilde{\widetilde{T}}_m P(R_1'(J_F y))$$

para todo $P \in \mathcal{P}({}^m E; G')$, e $y \in F$, onde R_1' é o transposto de R_1, o que implica que $\widetilde{\widetilde{R}}_m P \in \mathcal{P}_\Theta({}^m F; G')$ para cada $\widetilde{\widetilde{T}}_m P \in \mathcal{P}_\Theta({}^m E''; G')$, onde $\Theta = K$ ou WK. Concluímos que $\widetilde{\widetilde{R}}_m P \in \mathcal{P}_\Theta({}^m F; G')$ para cada $P \in \mathcal{P}_\Theta({}^m E; G')$, onde $\Theta = K$ ou WK.

$\square$

4.2 Isomorfismos entre espaços de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos compactos ou fracamente compactos

Nesta seção, denotaremos por $L^s_\Theta({}^m E; G)$ a intersecção dos espaços $L^s({}^m E; G) \cap L_\Theta({}^m E; G)$, onde $\Theta = K$ ou WK. Veremos que se E e F são simetricamente Arens-regular, então cada isomorfismo entre E' e F' induz um isomorfismo entre $\mathcal{P}_\Theta({}^m E; G')$ e $\mathcal{P}_\Theta({}^m F; G')$ para cada $m \in \mathbb{N}$, onde $\Theta = K$ ou WK.

Teorema 4.2.1. *Se E e F são simetricamente Arens - regular, e E' e F' são isomorfos, então $L^s_\Theta({}^m E; G')$ e $L^s_\Theta({}^m F; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$, onde $\Theta = K$ ou WK.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L({}^m E) \longrightarrow L({}^m F)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja $S_1 = R_1^{-1} : F' \longrightarrow E'$ a inversa de R_1, e seja $S_m : L({}^m F) \longrightarrow L({}^m E)$ a seqüência de Nicodemi começando com S_1. Sejam $\widetilde{R_m} : L({}^m E; G') \longrightarrow L({}^m F; G')$ e $\widetilde{S_m} : L({}^m F; G') \longrightarrow L({}^m E; G')$ as seqüências de Nicodemi correspondentes a (R_m) e (S_m) respectivamente. Pelos Teoremas 1.2.5 e 4.1.1 temos que, para $\Theta = K$ ou WK

$$\widetilde{R_m}(L^s_\Theta({}^m E; G')) \subset L^s_\Theta({}^m F; G').$$

e

$$\widetilde{S_m}(L^s_\Theta({}^m F; G')) \subset L^s_\Theta({}^m E; G').$$

Vimos por (1.12) da demonstração do Teorema 1.3.4 que $S_m \circ R_m|_{L^s(^mE)}$ é a aplicação identidade. Usando (1.6), temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{S_m} \circ \widetilde{R_m}A(x)(z) &= \widetilde{S_m}(\widetilde{R_m}A)(x)(z)\\
&= S_m(\delta_z \circ \widetilde{R_m}A)(x)\\
&= S_m(R_m(\delta_z \circ A))(x)\\
&= [S_m \circ R_m(\delta_z \circ A)](x)\\
&= (\delta_z \circ A)(x)\\
&= A(x)(z)
\end{aligned}$$

para todo $A \in L^s_K(^mE; G'), x \in E^m$ e $z \in G$, ou seja

$$(\widetilde{S_m} \circ \widetilde{R_m})A = A$$

para todo $A \in L^s_\Theta(^mE; G')$. De modo análogo, podemos provar que

$$(\widetilde{R_m} \circ \widetilde{S_m})B = B$$

para todo $B \in L^s_\Theta(^mF; G')$. Portanto, obtemos que $L^s_\Theta(^mE; G')$ e $L^s_\Theta(^mF; G')$ são isomorfos, onde $\Theta = K$ ou WK. □

Teorema 4.2.2. *Se E e F são simetricamente Arens - regular, e E' e F' são isomorfos, então $\mathcal{P}_\Theta(^mE; G')$ e $\mathcal{P}_\Theta(^mF; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$, onde $\Theta = K$ ou WK.*

Demonstração. Como E' e F' são isomorfos, existe um isomorfismo $R_1 : E' \longrightarrow F'$. Seja $R_m : L(^mE) \longrightarrow L(^mF)$ a seqüência de Nicodemi começando com R_1. Seja $S_1 = R_1^{-1} : F' \longrightarrow E'$ a inversa de R_1, e seja $S_m : L(^mF) \longrightarrow L(^mE)$ a seqüência de Nicodemi começando com S_1. Sejam $\widetilde{R_m} : L(^mE; G') \longrightarrow L(^mF; G')$ e $\widetilde{S_m} : L(^mF; G') \longrightarrow L(^mE; G')$ as seqüências de Nicodemi correspondentes a (R_m) e (S_m) respectivamente. Seja

$$\widehat{\widetilde{R}}_m : \mathcal{P}(^mE; G') \longrightarrow \mathcal{P}(^mF; G')$$

definido por $\widehat{\widetilde{R}}_m\widehat{A} = \widehat{\widetilde{R}_mA}$ para cada $\widehat{A} \in \mathcal{P}(^mE; G')$. Seja

$$\widehat{\widetilde{S}}_m : \mathcal{P}(^mF; G') \longrightarrow \mathcal{P}(^mE; G')$$

definido por $\widehat{\widetilde{S}}_m\widehat{A} = \widehat{\widetilde{S}_mA}$ para cada $\widehat{B} \in \mathcal{P}(^mF; G')$. Pelo Teorema 4.1.2 temos que, para $\Theta = K$ ou WK.

$$\widehat{\widetilde{R}}_m(\mathcal{P}_\Theta(^mE;G')) \subset \mathcal{P}_\Theta(^mF;G').$$

e

$$\widehat{\widetilde{S}}_m(\mathcal{P}_\Theta(^mF;G')) \subset \mathcal{P}_\Theta(^mE;G').$$

Por (1.20) temos que para cada $\widehat{A} \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;G')$

$$\begin{aligned}(\widehat{\widetilde{S}}_m \circ \widehat{\widetilde{R}}_m)(\widehat{A}) &= \widehat{\widetilde{S}}_m(\widehat{\widetilde{R}}_m\widehat{A}) \\ &= \widehat{\widetilde{S}}_m(\widehat{\widetilde{R}_m A}) \\ &= \widetilde{S}_m\widehat{(\widetilde{R}_m A)} \\ &= \widehat{A}\end{aligned}$$

Ou seja,

$$(\widehat{\widetilde{S}}_m \circ \widehat{\widetilde{R}}_m)\widehat{A} = \widehat{A}$$

para todo $\widehat{A} \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;G')$. De maneira análoga podemos provar que

$$(\widehat{\widetilde{R}}_m \circ \widehat{\widetilde{S}}_m)\widehat{B} = \widehat{B}$$

para todo $\widehat{B} \in \mathcal{P}_\Theta(^mF;G')$. Assim concluímos que $\mathcal{P}_\Theta(^mE;G')$ e $\mathcal{P}_\Theta(^mF;G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$, , onde $\Theta = K$ ou WK. $\square$

Referências

[1] R. Aron , P. Berner, *A Hahn - Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Soc. Math. France 106 (1978), 3-24.

[2] R. Aron, B. Cole, T. Gamelin, *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. Reine Angew. Math. 415(1991), 51-93.

[3] R. Aron, P. Galindo, D. García, M. Maestre, *Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. 348(1996), 543-559.

[4] D. Carando, S. Lassalle, *E' and its relation with vector - valued functions on E*, Ark. Mat. 42(2004), 283-300.

[5] F. Cabello Sánchez, J. Castillo, R. García, *Polynomials on dual-isomorphic spaces*, Ark. Mat. 38(2000), 37-44.

[6] J. C. Díaz, S. Dineen, *Polynomials on stable spaces*, Ark. Mat. 36(1998), 87-96.

[7] P. Galindo, D. García, M. Maestre, J. Mujica, *Extension of multilinear mappings on Banach spaces*, Studia Math. 108 (1994), 55-76.

[8] G. Godefroy, B. Iochum, *Arens-regularity on Banach algebras and geometry of Banach spaces*, J. Funct. Anal. 80 (1988), 47-59.

[9] C. Gupta, *Malgrange Theorem for Nuclearly Entire Functions of Bounded Type on a Banach Space,* Notas de Matemática 37, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1968.

[10] S. Lassalle, I. Zalduendo, *To what extent does the dual Banach space E' determine the polynomials over E ?*, Ark. Mat. 38 (2000), 343-354.

[11] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland, Amsterdam,1986.

[12] O. Nicodemi, *Homomorphisms of algebras of germs of holomorphic functions, in: Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory*, S. Machado (ed.), Lecture Notes in Math. 843, Springer, Berlin, 1981, 534-546.