# O Problema de Dirichlet: métodos de resolução '

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Sra. *Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho* e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas 31, de agosto de 1994.

Djairo G. de Figueiredo

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Ciência da Computação

Dissertação de Mestrado

# O Problema de Dirichlet: métodos de resolução

Aluna: Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho
Orientador: Prof. Djairo Guedes de Figueiredo

31 de Agosto de 1994

# Agradecimentos


- À CAPES pelo financiamento oferecido.

- Ao Prof. Dr. Djairo G. de Figueiredo, que orientou com paciência e habilidade todas as etapas deste trabalho.

- Ao Prof. Dr. Benjamim Bordin, pelo constante incentivo durante todos estes anos de convivência no IMECC.

- Ao Prof. Dr. Klaus Floret, por inúmeras vezes demonstrar a beleza existente na Matemática.

- Ao Prof. Dr. Antonio J. Engler, pelo fornecimento do papel utilizado nas diversas impressões preliminares.

- À todos os funcionários do IMECC, especialmente aos amigos da Biblioteca, sempre prontos a ajudar.

- À Ana Marta, pela ajuda financeira sempre que o fim do mês se aproximava.

- Aos colegas do predinho, pelos momentos de descontração, particularmente ao "Clube da Luluzinha": Ángela, Irene e Márcia.

- Aos amigos muito queridos Gian e Ruben, por sempre estarem perto.

- Ao Guini, pelos momentos de simples silêncio e companhia.

- À minha família, pelos momentos felizes e pelo apoio ao longo dos anos.

- Ao Túlio, pelo "desenhinho" em latéx, pelas discussões matemáticas e pelo que vimos construindo.

Obrigada,

Ana.

Dedico este trabalho aos meus pais.

# Índice

# Introdução

Este trabalho contém alguns métodos que tratam o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega$ é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, e $\varphi$ é uma função contínua sobre a fronteira de $\Omega$ que é conhecida.

A idéia original era estudar o trabalho de H. Weyl, [28], e adaptar os resultados levando-se em conta a linguagem matemática de que dispomos atualmente e as ferramentas oferecidas com as noções de espaço de Sobolev e solução fraca. As idéias geométricas exploradas por Weyl acabaram conduzindo de maneira natural à curiosidade de conhecer e comparar a outros métodos que também resolvessem o problema de Dirichlet.

Dividimos o trabalho em dois capítulos, o primeiro apresenta os métodos. Assim, na seção 1 fazemos uma apresentação do problema discutindo a questão de unicidade da solução , caso exista; na seção 2, expomos as idéias exploradas por Weyl e, na seção 3, ainda tendo em mente o aspecto geométrico, apresentamos os teoremas de Stampacchia e Lax-Milgram. As propriedades de caráter minimizante que a solução do problema deve satisfazer, presentes no teorema de Stampacchia, nos levaram ao estudo do método originalmente proposto por Dirichlet, finalmente demonstrado com o rigor exigido pela Análise por Hilbert, o que apresentamos na seção 4. Apresentamos o

Método de Perron, que, apesar de fugir dos conceitos de espaços de Sobolev e solução fraca, produz a solução clássica do problema. Por fim, fazemos algumas observações no sentido de comparar os diversos métodos.

Tendo obtido a solução fraca para o problema de Dirichlet, nosso próximo objeto de trabalho foi a sua regularização, o que foi tratado nas primeiras seções do capítulo 2. Apresentamos explicitamente a solução do referido problema no caso em que $\Omega$ é o disco em $\mathbb{R}^2$, utilizando os conceitos de séries de Fourier.

A monografia tentou ao máximo ser autocontida, contornando na medida do possível as diferenças de tratamento dadas ao problema nos diversos métodos. Vários resultados foram por conseqüência enunciados sem demonstrações, evidentemente indicadas nas referências bibliográficas.

# Capítulo 0

# Preliminares

Estabeleceremos a seguir algumas notações utilizadas neste trabalho e resultados elementares concernentes às mesmas.

Ao longo destas notas $\mathbb{R}^n$ designará o espaço euclideano de dimensão $n$, $\Omega$ é um domínio (isto é, um subconjunto aberto e conexo) em $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ designa a fronteira de $\Omega$ e $\overline{\Omega}$ sua aderência.

Chamaremos *operador de Laplace ou Laplaciano* em dimensão $n$ o operador diferencial linear a coeficientes constantes

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Para $k \geq 0$, inteiro, $C^k(\Omega)$ denota o conjunto das funções reais $u : \Omega \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais contínuas até a ordem $k$ em $\Omega$. Por $C_0^k(\Omega)$ denotaremos o conjunto das funções reais com derivadas parciais contínuas até a ordem $k$ em $\Omega$ e com suporte compacto em $\Omega$.

A *equação de Laplace* é dada por

$$\Delta u = 0. \tag{0.1.1}$$

A *equação de Poisson* é dada por

$$\Delta u = -4\pi\rho, \tag{0.1.2}$$

onde $\rho$ é uma função contínua conhecida.

Funções $u$ que são contínuas e satisfazem a equação de Laplace são chamadas *harmônicas.*

**Exemplo 0.1.3:**

1. No plano, temos que $u(x,y) = ax + by + c$, para quaisquer constantes $a, b, c$ é função harmônica. A função $u(x,y) = x^2 - y^2$ é também harmônica.

2. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ for uma função analítica complexa, então suas partes real e imaginária são funções harmônicas.

**Observação:** A hipótese de continuidade na definição acima não pode ser dispensada uma vez que uma função $u$ que satisfaça à (0.1.1) não é necessariamente contínua. De fato,

$$u(x,y) = \begin{cases} \text{Re } e^{-(z^{-1})} & \text{se } z = x + iy \neq 0; \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases} \tag{0.1.4}$$

é tal que $u$ satisfaz (0.1.1) em todo o plano mas, como é de fácil verificação, $u$ é descontínua na origem [9, 14].

**Notação:** Introduzimos aqui uma abreviação para o operador diferencial

$$\nabla \equiv (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}) \ .$$

Isto quer dizer que, dada $u \in C^1(\Omega)$, o *gradiente* de $u$, que denotaremos por $\nabla u$, é uma função de $\Omega$ em $\mathbb{R}^n$, isto é, um campo vetorial em $\Omega$, e

$$\nabla u \equiv (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) \ .$$

Dado um campo vetorial $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ cujas componentes $f_i$ pertencem a $C^1(\Omega)$, $i = 1, \cdots, n$, o *divergente* de $F$ é uma função de $\Omega$ em $\mathbb{R}$ dada por

$$\nabla \cdot F \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Assim, sob a hipótese da existência de $\Delta u$ em uma vizinhança de um ponto $x \in \Omega$, obtemos

$$\Delta u(x) = \nabla \cdot \nabla u(x).$$

Para um campo vetorial $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujas componetes $f_i$ pertencem a $C^1(\Omega)$, $\; i = 1, \cdots, 3$, o *rotacional* de $F$ é uma função de $\Omega$ em $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\nabla \times F \equiv \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right).$$

# Capítulo 1

# Métodos para a Resolução do Problema de Dirichlet

## 1.1 O Problema de Dirichlet

O *problema de Dirichlet para a equação de Laplace* que estudaremos ao longo destas notas é o seguinte: dados um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e uma função contínua $\varphi$ definida sobre a fronteira de $\Omega$, encontrar uma função $u$ tal que:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1.1}$$

A origem histórica do problema de Dirichlet remonta a meados do século XIX, intimamente ligada ao desenvolvimento da teoria do potencial. Nomes notadamente relevantes da Matemática, Gauss, Riemann, Hilbert e claro, Dirichlet, dedicaram atenções a este problema, e coube a Hilbert em 1899, dar justificativas completas às idéias inicialmente exploradas por Dirichlet e Riemann [3, 10].

**Observação:** A condição de $\Omega$ ser limitado pode ser retirada, iremos nos limitar, no entanto, na maioria dos casos a seguir explorados, a esta condição mais restrita.

**Definição 1.1.2:** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $\varphi$ uma função contínua definida sobre a fronteira de $\Omega$. Uma *solução clássica* do problema de Dirichlet (1.1.1) é uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que $u$ satisfaça a equação de Laplace (0.1.1) em $\Omega$ e que seja igual a $\varphi$ em $\partial\Omega$.

Um outro problema que nos interessará é apresentado a seguir. Dados um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\phi \in C^0(\overline{\Omega})$ uma função real, encontrar uma função $u$ tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u = \phi & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1.3}$$

**Definição 1.1.4:** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio. Uma *solução clássica* de (1.1.3) é uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que satisfaça a equação $-\Delta u = \phi$ no domínio $\Omega$ e que seja igual a zero em $\partial\Omega$.

**Observação:** Consideremos $n \geq 3$. Suponhamos que o problema (1.1.1) tenha solução clássica qualquer que seja $\varphi$ dado de fronteira. Dado o problema (1.1.3), supondo que $\phi$ é Hölder-contínua, definamos a função,

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{(2-n)\sigma_n} \int_\Omega |x-y|^{2-n} \phi(y) \ \mathrm{dy} \quad ,$$

onde $\sigma_n$ é o volume da bola unitária de dimensão $n$.

Mostra-se ([15]) que $\varphi^* \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e $\Delta\varphi^* = \phi$.

Seja $v$ a solução do problema de Dirichlet (1.1.1) com $\varphi = \varphi^*|_{\partial\Omega}$. Assim, $u = v - \varphi^*$ resolve o problema (1.1.3) proposto.

Inversamente, suponhamos que o problema (1.1.3) seja solúvel para qualquer $\phi$ definida em $\Omega$. Dado o problema (1.1.1) onde a função $\varphi$ é tal que pode ser extendida continuamente para uma função $\tilde{\varphi}$ que seja Hölder contínua em $\Omega$ e pertença a $C^2(\Omega)$. Seja $v$ a solução do problema (1.1.3) para $\phi = \Delta\tilde{\varphi}$. Assim, $u = v + \tilde{\varphi}$ é a solução do problema (1.1.1) proposto.

É sempre possível obter $\tilde{\varphi}$ nas condições requeridas pois $\partial\Omega$ é um conjunto fechado e por hipótese, $\varphi$ é contínua neste conjunto ([25], pp.172).

O caso $n = 2$ é tratado de modo análogo substituindo-se a potência na integral acima por $\log|x - y|$.

Deste modo, sob hipóteses de Hölder continuidade e diferenciabilidade, dado um problema como (1.1.3) podemos obter uma formulação análoga à (1.1.1), e vice-versa; além disso, conhecendo-se a solução de um dos problemas, obtém-se a solução da formulação equivalente.

A fim de obter a unicidade da solução dos problemas de Dirichlet (1.1.1) e (1.1.3) vamos estabelecer os princípios do máximo e mínimo.

**Teorema 1.1.5(Forma Forte dos Princípios do Máximo e Mínimo):** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $u \in C^2(\Omega)$ tal que $\Delta u \geq 0$ $(\Delta u \leq 0)$ em $\Omega$. Suponhamos que exista um ponto $y \in \Omega$ que satisfaça $u(y) = \sup_\Omega u$ $(u(y) = \inf_\Omega u)$. Então $u$ é constante. Conseqüentemente, uma função harmônica não pode assumir um máximo ou mínimo interior, a menos que seja constante.*

**Demonstração:** Seja $\Delta u \geq 0$ em $\Omega$, $M = \sup_\Omega u$ e defina

$$\Omega_M = \{x \in \Omega | u(x) = M\}.$$

Por hipótese, $\Omega_M$ não é vazio. Mais ainda, como $u$ é contínua, $\Omega_M$ é fechado com relação a $\Omega$. Seja $z$ um ponto em $\Omega_M$ e aplique o teorema (A.2.2) para a função $u - M$ em uma bola $B = B_R(z) \subset\subset \Omega$. Obtemos

$$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B (u - M)\mathrm{dx} \leq 0,$$

e assim, $u = M$ em $B_R(z)$. Decorre que $\Omega_M$ é também aberto com relação a $\Omega$. Portanto, $\Omega_M = \Omega$.

O resultado para $\Delta u \leq 0$ é obtido substituindo-se $u$ por $-u$. ■

**Teorema 1.1.6(Forma Fraca dos Princípios do Máximo e Mínimo):** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u \geq 0$ $(\Delta u \leq 0)$ em $\Omega$. Então,*

$$sup_\Omega u = sup_{\partial\Omega} u \quad (inf_\Omega u = inf_{\partial\Omega} u) \quad .$$

*Conseqüentemente para uma função harmônica $u$*

$$inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq sup_{\partial\Omega} u, \quad x \in \Omega.$$

**Demonstração:**

Como $\Omega$ é limitado, segue-se que $\overline{\Omega}$ é compacto. Da continuidade de $u$ e do teorema anterior segue-se o resultado. ■

**Corolário 1.1.7:** *Dados um domínio limitado $\Omega$ e uma função contínua $\varphi$ definida sobre a fronteira de $\Omega$ existe no máximo uma função $u$ harmônica, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que seja igual a $\varphi$ em todos os pontos da fronteira.*

**Demonstração:**

De fato, sejam $f$ e $g$ funções que satisfaçam as hipóteses. Definindo $w = f - g$ temos que $w$ é harmônica , $w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Aplicando a forma fraca do princípio do máximo e a forma fraca do princípio do mínimo, segue-se que $w \equiv 0$, pois $w(x) = 0$ para todo $x$ pertencente à fronteira de $\Omega$ e portanto, $f = g$. ■

**Observação:** Notemos que este resultado não assegura a existência de uma função $u$ nas condições do corolário; garante, no entanto, a *unicidade* de tal função , caso exista.

Assim, de acordo com o corolário (1.1.7), se existir solução clássica do problema de Dirichlet (1.1.1) esta é única.

Estabelecer a existência de solução para o problema (1.1.1) em uma região $\Omega$ arbitrária é uma questão bastante delicada. Teremos oportunidade de perceber que, na verdade, este fato depende diretamente das propriedades geométricas da fronteira de $\Omega$. Para apreciar a importância deste aspecto geométrico, consideremos o exemplo a seguir, devido a S. Zaremba, já conhecido em 1911.

**Exemplo 1.1.8:** Considere $\Omega$ o domínio definido pelas desigualdades

$$0 < x^2 + y^2 < 1$$

isto é, o disco unitário sem a origem (portanto a origem constitui parte da fronteira de $\Omega$). Seja $\varphi$ definida sobre a fronteira de $\Omega$ como se segue:

$$\varphi \equiv 0 \quad \text{sobre} \quad x^2 + y^2 = 1, \quad \varphi(0,0) = 1 \tag{1.1.9}$$

Pela simetria e unicidade, não é difícil ver que, se o problema tem uma solução , esta deve possuir simetria rotacional, isto é, a solução é uma função de $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, independente do ângulo polar $\Theta$. A solução [1] é portanto

[1] Veja seção 3 do capítulo 2.

da forma,

$$u = a \log r + b$$

A primeira condição de (1.1.9) implica que $b = 0$; por outro lado, a escolha de qualquer $a \neq 0$ implica que $u$ é ilimitada próxima à origem, e a escolha de $a = 0$ nos leva a $u \equiv 0$; em ambos os casos, a segunda condição de (1.1.9) não é satisfeita. Logo, o problema de Dirichlet não possui solução .

O exemplo precedente nos conduz de maneira natural à questão de procurar estabelecer condições sob as quais o problema de Dirichlet (1.1.1) possui solução clássica.

Neste capítulo estaremos interessados em estabelecer a existência de soluções para este problema, assim passaremos ao conceito de solução fraca, e para isto iremos introduzir os espaços de Sobolev; a seguir explicaremos vários métodos através dos quais podemos garantir a existência de solução fraca para (1.1.1) e (1.1.3).

As propriedades gerais dos espaços de Sobolev que a seguir introduzimos estão, para maior comodidade do leitor, relacionadas no apêndice.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, não vazio.

Consideremos o espaço $L^2(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\int_\Omega |f|^2 < \infty .\}$

**Definição 1.1.10:** Definimos

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \text{ tais que } \exists g_1, \cdots g_n \in L^2(\Omega) \text{ satisfazendo}$$
$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi \quad \forall \ \phi \in C_0^\infty(\Omega) \ \forall \ i = 1, 2, \cdots, n\} .$$

Dada $u \in H^1(\Omega)$ denotamos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \ \text{ e } \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) .$$

Em $H^1(\Omega)$, podemos introduzir o seguinte produto interno: dados $u, v \in H^1(\Omega)$,

$$(u,v)_1 := (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2} \quad ,$$

cuja norma associada é

$$\| u \|_{H^1}^2 = \| u \|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \quad \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^2}^2 \ .$$

**Observação:** O espaço $H^1$ munido do produto interno definido acima torna-se um espaço de Hilbert. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [1].

**Definição 1.1.11:** Definimos

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_1} \ .$$

**Lema 1.1.12 (Desigualdade de Poincaré):** *Suponhamos que $\Omega$ é um aberto limitado. Então existe uma constante $C$ (dependente de $\Omega$) tal que:*

$$||u||_{L^2} \leq C||\nabla u||_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \ . \tag{1.1.13}$$

**Demonstração:** Veja [1], pp. 174. ■

Segue da desigualdade de Poincaré que a expressão $||\nabla u||_{L^2}$ define uma norma em $H_0^1(\Omega)$ equivalente à norma $||u||_{H^1}$. Em $H_0^1(\Omega)$, $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ é o produto escalar que induz a norma $||\nabla u||_{L^2}$.

**Observação:** As funções de $H_0^1$ "são" as funções de $H^1$ que "se anulam" sobre $\partial\Omega$. É delicado dar um sentido preciso a esta afirmação , já que uma função $u \in H_0^1$ só está definida q.t.p. ( e $\partial\Omega$ tem medida zero!). Veja mais detalhes no apêndice.

Temos agora condição de reformular o problema de Dirichlet.

Multiplicando a equação (1.1.1) por uma função $v$ com suporte compacto em $\Omega$ e integrando por partes, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = 0 \tag{1.1.14}$$

*Versão generalizada do problema (1.1.1)*: Dada uma função $\varphi \in H^1(\Omega)$, encontrar uma função $u \in H^1(\Omega)$ tal que $u$ satisfaça (1.1.14) para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ e $u - \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

**Definição 1.1.15:** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\varphi \in H^1(\Omega)$. Uma *solução fraca* do problema de Dirichlet (1.1.1) é uma função $u \in H^1(\Omega)$ que satisfaça (1.1.14) para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ e tal que $u - \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

**Lema 1.1.16:** *Toda solução clássica do problema de Dirichlet (1.1.1) que pertence a $C^1(\overline{\Omega})$ é uma solução fraca.*

**Demonstração:** Como $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $u$ possui derivadas parciais clássicas contínuas em $\overline{\Omega}$, e portanto $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ $\forall i = 1 \cdots n$. Basta tomar $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e temos que $u \in H^1(\Omega)$. Ainda, sendo $H^1(\Omega)$ espaço vetorial, $u - \varphi \in H^1(\Omega)$ e mais, como $u - \varphi \equiv 0$ em $\partial\Omega$, decorre do teorema (A.1.10) que $u - \varphi \in H_0^1(\Omega)$. ∎

Multiplicando a equação (1.1.3) por uma função $v$ com suporte compacto em $\Omega$, e integrando por partes, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega \phi \cdot v \tag{1.1.17}$$

Isto nos fornece a idéia para a versão generalizada de (1.1.3).

*Versão generalizada do problema (1.1.3)* :Dada uma função $\phi$ em $L^2(\Omega)$ encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u$ satisfaça (1.1.17) para toda função $v \in H_0^1(\Omega)$.

**Definição 1.1.18:** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\phi \in L^2(\Omega)$. Uma *solução fraca* de (1.1.3) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica (1.1.17) para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

**Lema 1.1.19:** *Toda solução clássica do problema de Dirichlet (1.1.3) que pertence a $C^1(\overline{\Omega})$ é uma solução fraca.*

**Demonstração:** Dada uma solução clássica $u$ de (1.1.3), pelos mesmos argumentos do início do lema (1.1.16), temos que $u \in H^1(\Omega)$. Então, na verdade $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e pelo teorema (A.1.11), temos que $u \in H_0^1(\Omega)$. Por outro lado, se $v \in C_0^1(\Omega)$ então

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega \phi \cdot v$$

e, por densidade, para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. ■

**Observação:** Um ponto crucial é a *regularização* da solução fraca, isto é, quando a recíproca dos lemas (1.1.16) e (1.1.19) podem ser obtidas. O capítulo 2 fornece condição para responder a estas questões em alguns casos.

Nos lemas precedentes, a hipótese de $u$ pertencer a $C^1(\overline{\Omega})$ pode ser enfraquecida, pedindo-se que o gradiente de $u$ pertença a $L^2$.

## 1.2 Método de Ortogonalização de Weyl

Apresentamos a seguir um método de ortogonalização , que garante a existência de solução fraca para o problema de Dirichlet. Baseamo-nos no artigo de Hermann Weyl [28].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado, não vazio, cuja fronteira é de classe $C^1$.

Denotemos por $\mathcal{F}_0$ o espaço $(L^2(\Omega))^3$ , isto é, $F \in \mathcal{F}_0$ se, e somente se, $F = (f_1, f_2, f_3)$ com $f_i \in L^2(\Omega)$.

Em $\mathcal{F}_0$ consideremos o seguinte produto interno:

$$(F, G) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} f_i g_i \, dx$$

onde $F = (f_1, f_2, f_3)$ e $G = (g_1, g_2, g_3)$.

Tal produto interno induz a seguinte norma, dado $F \in \mathcal{F}_0$ ,

$$\| F \|^2 = \int_\Omega F^2 = \int_\Omega f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 \ < \ \infty \, .$$

A fim de explicar em que consiste o método de ortogonalização de Weyl, consideremos os seguintes subespaços de $\mathcal{F}_0$:

$$\mathcal{I} := \{F \in \mathcal{F}_0 \text{ tal que } (F, \nabla \times G) = 0 \ \forall \ G \in (H_0^1)^3\}$$

$$\mathcal{O} := \{H \in \mathcal{F}_0 \text{ tal que } (H, \nabla \psi) = 0 \ \forall \ \psi \in H_0^1\}$$

$\mathcal{I}$ é chamado *espaço dos campos irrotacionais.* $\mathcal{O}$ é chamado *espaço dos campos solenoidais.*

**Observação:** A motivação para o nome dado ao espaço $\mathcal{I}$ decorre de que se $F \in (C^1(\Omega))^3$ , então

$$F \in \mathcal{I} \Leftrightarrow F \in \mathcal{F}_0 \text{ e } \nabla \times F = 0 \, ,$$

onde o rotacional de $F$ é tomado no sentido clássico.

Analogamente, dado um campo $H \in (C^1(\Omega))^3$, temos a seguinte caracterização:

$$H \in \mathcal{O} \Leftrightarrow H \in \mathcal{F}_0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot H = 0 \, ,$$

onde o divergente de $H$ é tomado no sentido clássico.

**Lema 1.2.1:** *Para toda função $\varphi \in H^1(\Omega)$ e para todo campo $F \in (H_0^1(\Omega))^3$ temos*

$$(\nabla\varphi \ , \ \nabla \times F\ ) = \int_\Omega \nabla\varphi \ \cdot \ (\nabla \times F) \ = 0 \ .$$

**Demonstração:** De fato, consideremos a seguinte identidade:

$$\nabla \cdot (F \times \nabla\varphi) = \nabla\varphi \cdot (\nabla \times F) - F \cdot (\nabla \times \nabla\varphi) \ .$$

Aplicando o Teorema da Divergência (A.2.1) à expressão no primeiro membro, e tomando o limite, obtemos:

$$\int_\Omega \nabla \cdot (F \times \nabla\varphi) \text{ dx } = \int_{\partial\Omega} (F \times \nabla\varphi) \cdot \eta \text{ ds } = 0$$

pois $F \in (H_0^1(\Omega))^3$.

Conseqüentemente, da identidade decorre que:

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot (\nabla \times F) = \int_\Omega F \cdot (\nabla \times \nabla\varphi) = 0$$

pois $\nabla \times \nabla\varphi = 0$. ■

Tomemos ainda os subespaços de $\mathcal{F}_0$ definidos por:

$$\mathcal{R} := \overline{\{F \in \mathcal{F}_0 \text{ tal que } \exists G \in (H_0^1)^3 \text{ com } F = \nabla \times G\ \}}^{\mathcal{F}_0}$$

$$\mathcal{G} := \{F \in \mathcal{F}_0 \text{ tal que } \exists\psi \in H_0^1 \text{ com } F = \nabla\psi\ \}$$

$\mathcal{R}$ é chamado *espaço dos campos rotacionais.* $\mathcal{G}$ é chamado *espaço dos campos gradientes.*

**Lema 1.2.2:** *O subespaço $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}_0$ é fechado.*

**Demonstração:** De fato, considere $(G_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{G}$ uma seqüência convergindo na norma de $\mathcal{F}_0$ para $G$. Para todo $n \in \mathbb{N}, G_n = \nabla\varphi_n \ , \varphi_n \in H_0^1(\Omega)$.

Como $G_n$ é uma seqüência de Cauchy , segue-se que $\varphi_n$ é Cauchy em $H_0^1$. Seja $\varphi$ o seu limite. Logo, $\nabla\varphi_n \to \nabla\varphi$ em $L^2$. Temos que

$$\int_\Omega |G-\nabla\varphi|^2\,dx \leq \int_\Omega |G-G_n|^2\,dx+\int_\Omega |G_n-\nabla\varphi_n|^2\,dx+\int_\Omega |\nabla\varphi_n-\nabla\varphi|^2\,dx < \epsilon.$$

Logo, $G = \nabla\varphi$ o que implica $G \in \mathcal{G}$. Portanto, $\mathcal{G}$ é fechado. ■

Esses subespaços admitem complemento ortogonal, pois são subespaços fechados em um espaço de Hilbert. Assim:

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^\perp$$

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}^\perp$$

Os subespaços de $\mathcal{F}_0$ se relacionam através do resultado a seguir.

**Lema 1.2.3:** *Valem as seguintes relações :*

$$\mathcal{R}^\perp = \mathcal{I}$$

$$\mathcal{G}^\perp = \mathcal{O}$$

**Demonstração:** Dados $I \in \mathcal{I}$ e $R \in \mathcal{R}$ , temos que $||R - R_n||_{\mathcal{F}_0} \to 0$, onde $R_n = \nabla \times T_n$ para $T_n \in (H_0^1(\Omega))^3$ . Segue-se que,

$$(I, R) = \lim_{n\to\infty}(I, \nabla \times T_n) = 0, \text{ pois } I \in \mathcal{I}\ .$$

Assim, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}^\perp$.

Dado $H \in \mathcal{R}^\perp$, seja $G \in (H_0^1)^3$ e $R = \nabla \times G$ , logo $R \in \mathcal{R}$. Temos que

$$0 = (H, R) = (H, \nabla \times G)$$

Assim, $H \in \mathcal{I}$ , portanto $\mathcal{R}^\perp \subseteq \mathcal{I}$.

Dados $O \in \mathcal{O}$, seja $G \in \mathcal{G}$, então $G = \nabla\varphi$ para algum $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Temos que

$$(O, G) = (O, \nabla\varphi) = 0, \text{ pois } O \in \mathcal{O}.$$

Logo, $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{G}^{\perp}$ .

Dado $H \in \mathcal{G}^{\perp}$, seja $\varphi \in H_0^1$ e tome $G = \nabla\varphi$, logo $G \in \mathcal{G}$. Segue-se que

$$(H, G) = (H, \nabla\varphi) = 0, \text{ pois } H \in \mathcal{G}^{\perp}.$$

Assim, $H \in \mathcal{O}$ e portanto, $\mathcal{G}^{\perp} \subseteq \mathcal{O}$ .

■

**Observação:** Os lemas (1.2.1) e (1.2.3) nos fornecem:

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{I}$$

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{O}$$

Decorre em particular que,

$$\mathcal{I} = \mathcal{G} \oplus (\mathcal{O} \cap \mathcal{I}).$$

**Teorema 1.2.4:** *Seja $F \in \mathcal{I} \cap \mathcal{O}$. Então $F \in C^{\infty}$ e $F$ satisfaz as equações:*

$$\nabla \cdot F = 0 \;\; e \;\; \nabla \times F = 0 \; .$$

**Demonstração:** Seja $F \in \mathcal{I} \cap \mathcal{O}$ e $W \in (H_0^2(\Omega))^3$ isto é, $W = (W_1, W_2, W_3)$ com $W_i \in H_0^2(\Omega)$. Como $F \in \mathcal{O}$ temos que $(F, \nabla\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Assim do fato de que $\nabla \cdot W \in H_0^1(\Omega)$, segue-se que:

$$(F, \nabla(\nabla \cdot W)) = 0 \quad (I)$$

Ainda temos que $\nabla \times W \in (H_0^1(\Omega))^3$ e então, como $F \in \mathcal{I}$,

$$(F, \nabla \times \nabla \times W) = 0 \quad (II)$$

Subtraindo (I) e (II) chegamos a

$$(F, \nabla(\nabla \cdot W)) - (F, \nabla \times \nabla \times W) = 0$$

Da identidade $\Delta W = \nabla(\nabla \cdot W) - \nabla \times \nabla \times W$, onde $\Delta W = (\Delta W_1, \Delta W_2, \Delta W_3)$ podemos concluir que

$$(F, \Delta W) = \int_\Omega F \Delta W = 0$$

ou ainda, temos que

$$\int_\Omega F_j \ \Delta W_j = 0 \quad \forall \ W_j \in H_0^2(\Omega) \quad , j = 1, 2, 3.$$

Pelo Lema de Weyl, segue-se que as componentes de $F$ são funções harmônicas, com derivadas clássicas de todas as ordens. Consideremos agora a identidade

$$\nabla \cdot (F \times G) = G \cdot (\nabla \times F) - F \cdot (\nabla \times G) \ .$$

O teorema da divergência implica que

$$\int_\Omega \nabla \cdot (F \times G) \ dx = \int_{\partial\Omega} (F \times G) \ \cdot \nu dS = 0 \ \ \forall G \in (H_0^1(\Omega))^3.$$

Usando este fato e lembrando que $\int_\Omega F \cdot (\nabla \times G) = 0$, decorre da identidade que

$$\int_\Omega G \cdot (\nabla \times F) = 0 \ \ \forall G \in (H_0^1(\Omega))^3 \ .$$

Concluímos que $\nabla \times F = 0$.

De modo análogo, usando a identidade

$$\nabla \cdot (\varphi F) = F \cdot (\nabla \varphi) + \varphi(\nabla \cdot F) \ ,$$

e lembrando que $\int_\Omega F \cdot (\nabla\varphi) = 0$, obtemos

$$\int_\Omega \varphi \cdot (\nabla \cdot F) = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \ ,$$

donde $\nabla \cdot F = 0$. ■

A demonstração do teorema utilizou o lema a seguir, conhecido na literatura atual como *Lema de Weyl*:

**Lema 1.2.5(Lema de Weyl):** *Se uma função $u \in C^0(\Omega)$ é tal que*

$$\int_\Omega u \ (\Delta\varphi) \ dx = 0 \quad \forall \ \varphi \in C_0^2(\Omega) \ ,$$

*então $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta u = 0$.*

**Demonstração:**

Mostremos[2] que $u$ satisfaz a propriedade do valor médio (A.2.3) donde poderemos concluir que $u$ é harmônica em $\Omega$.

Consideremos a função $v : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(y) = \begin{cases} (|y-x|^2 - r^2)^3 & \text{se } |y-x| \leq r \\ 0 & \text{se } |y-x| \geq r \end{cases} \tag{1.2.6}$$

Assim definida, temos que $v \in C_0^2(\Omega)$.

Calculando $\Delta v$ obtemos

$$\Delta v = \begin{cases} 6(7|y-x|^4 - 10r^2|y-x|^2 + 3r^4) & \text{se } |y-x| \leq r \\ 0 & \text{se } |y-x| \geq r \end{cases} \tag{1.2.7}$$

Por hipótese, temos que

$$\int_{|y-x|\leq r} u(y)(7|y-x|^4 - 10r^2|y-x|^2 + 3r^4)dy = 0 \tag{1.2.8}$$

[2]Esta demonstração seguiu [24].

ou ainda

$$\int_0^r \int_{|y-x|=\rho} u(y) f(\rho, r) dS_\rho \;\; d_\rho = 0 \tag{1.2.9}$$

onde

$$f(\rho, r) = 7\rho^4 - 10r^2\rho^2 + 3r^4 \tag{1.2.10}$$

Para obtermos a propriedade do valor médio para $u$, basta calcularmos algumas derivadas com respeito a $r$ nas equações acima. Derivar (1.2.9) em relação ao parâmetro $r$ corresponde a derivar a integral

$$\int_0^r F(\rho, r) d\rho \; , \tag{1.2.11}$$

onde $F(\rho, r) = \int_{|y-x|=\rho} u(y) f(\rho, r) dS_\rho$. Aplicando a regra de Leibniz para derivação de uma integral dependente de um parâmetro, obtemos

$$\frac{d}{dr}\int_0^r F(\rho, r) d\rho = \int_0^r \frac{\partial}{\partial r} F(\rho, r) d\rho + F(r, r) \tag{1.2.12}$$

$$= \int_0^r \frac{\partial}{\partial r} F(\rho, r) d\rho \tag{1.2.13}$$

pois $F(r, r)$ claramente se anula.

Derivando (1.2.8) com relação a $r$ e considerando (1.2.13), obtemos

$$\int_{|x-y|\le r} u(y)[-5|y-x|^2 + 3r^2] dy = 0 \tag{1.2.14}$$

Ainda com o argumento de (1.2.12) e derivando (1.2.14), obtemos

$$r\int_{|y-x|=r} u(y) dS_r - 3\int_{|y-x|\le r} u(y) dy = 0 \; ,$$

isto é,

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int_{|y-x|=r} u(y) dS_r = \frac{1}{4\pi r^3/3}\int_{|y-x|\le r} u(y) dy \; . \tag{1.2.15}$$

Derivando a igualdade com relação a r, o lado direito nos fornece

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{4\pi r^3/3}\int_{|y-x|\le r} u(y) dy\right] &= \frac{-9}{4\pi r^4}\int_0^r \int_{|y-x|=\rho} u(y) dS_\rho \, d\rho \\ &+ \frac{3}{4\pi r^3}\int_{|y-x|=r} u(y) dS_r \; . \end{aligned}$$

Considerando-se (1.2.15) a última parcela na soma acima pode ser substituída por

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4\pi r^3}\int_{|y-x|=r} u(y)dS_r &= \frac{3}{r}\frac{1}{4\pi r^2}\int_{|y-x|=r} u(y)dS_r \\
&= \frac{3}{r}\frac{3}{4\pi r^3}\int_{|y-x|\le r} u(y)dy \\
&= \frac{9}{4\pi r^4}\int_0^r \int_{|y-x|=\rho} u(y)dS_\rho\, d\rho
\end{aligned}$$

Tornando claro que

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{4\pi r^3/3}\int_{|y-x|\le r} u(y)dy\right] = 0\ . \tag{1.2.16}$$

Portanto, chegamos à

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{4\pi r^2}\int_{|y-x|=r} u(y)dS_r\right] = 0\ .$$

Podemos concluir que

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int_{|y-x|=r} u(y)dS_r = C = \frac{1}{4\pi r^3/3}\int_{|y-x|\le r} u(y)dy\ .$$

O lado esquerdo da equação acima é uma função de $r$, constante. Assim, podemos calculá-la para $r = R$, não alterando o seu valor

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int_{|y-x|=R} u(y)dS_R = C = \frac{1}{4\pi r^3/3}\int_{|y-x|\le r} u(y)dy\ .$$

Tomamos o limite do lado direito $r \to 0$. Da continuidade de $u$, podemos usar os teoremas de Fubini e do Valor Médio para Integrais, [19], obtendo $u(x) = C$. Assim provamos que

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{|y-x|=R} u(y)dS_R \tag{1.2.17}$$

satisfazendo a propriedade do valor médio em $\Omega$. Logo, $u$ é harmônica em $\Omega$, donde $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ em $\Omega$. ■

A importância do resultado anterior para a resolução do problema (1.1.1) torna-se mais evidente no próximo corolário.

**Corolário 1.2.18:** *Se* $F \in \mathcal{I} \cap \mathcal{O}$ *então* $F \in C^\infty(\Omega)$ *e existe uma função harmônica* $h$ , $h : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que* $F = \nabla h$ .

**Demonstração:** Suponhamos que $\Omega$ seja simplesmente conexo e, para simplificar as contas, que a origem pertence a $\Omega$. Segue-se do teorema (1.2.4) que $F \in C^\infty(\Omega)$. Seja $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Definamos $h : \Omega \to \mathbb{R}$ como a integral de linha ao longo do raio $r$ unindo a origem a e $x$, isto é,

$$h(x) = \int_0^1 F(x(\tau)) \cdot x'(\tau)\, d\tau \ ,$$

onde $x(\tau)$ denota o caminho $x(\tau) = \tau x$.

Observemos que, para qualquer curva lisa por partes, simples e fechada $\alpha \subset \Omega$, bordo de uma superfície $D$, decorre do teorema de Stokes que

$$\int_\alpha F(x(\tau)) \cdot x'(\tau) d\tau = \int_D \nabla \times F \cdot \ dS = 0 \ ,$$

pois $F$ é um campo irrotacional.

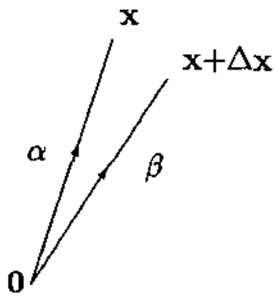
Calculemos a derivada $\frac{\partial h}{\partial x_1}$. Por definição:

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{h(x_1, x_2, x_3) - h(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1} \ .$$

Temos

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_\alpha F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ h(x + (\Delta x_1, 0, 0)) &= \int_\beta F(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt \end{aligned}$$

com $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, $\alpha(1) = x$ e $\beta(1) = x + (\Delta x_1, 0, 0)$:




Claramente os caminhos $\alpha$ e $\beta$ podem ser unidos pelo caminho

$$\gamma(t) = (x_1, x_2, x_3) + t(\Delta x_1, 0, 0) \ , \ t \in [0, 1]$$

formando uma curva fechada. Assim

$$\int_{\alpha-\beta+\gamma} F(x(s)) \cdot x'(s) ds = 0$$

donde podemos concluir que

$$h(x) - h(x + (\Delta x_1, 0, 0)) = \int_\gamma F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \ .$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x_1} &= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt}{\Delta x_1} \\
&= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot (\Delta x_1, 0, 0) dt}{\Delta x_1} \\
&= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \int_0^1 f_1(\gamma(t)) dt
\end{aligned}$$

e quando $\Delta x_1$ tende a zero, vemos que a curva $\gamma$ se comprime no ponto $x$. Logo

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = f_1 \qquad (1.2.19)$$

Podemos proceder de forma análoga com as derivadas de $h$ em relação a $x_2$ e $x_3$, mostrando que $\nabla h = F$.

Portanto $h$ é harmônica:

$$\begin{aligned} \Delta h &= \nabla \cdot \nabla h \\ &= \nabla \cdot F = 0 \ , \end{aligned} \qquad (1.2.20)$$

pois $F$ é solenoidal.

O argumento acima se estende facilmente ao caso de $\Omega$ não ser esférico, hipótese que utilizamos tacitamente na definição de $h$. Para isto, tomamos uma definição recursiva de $h$:

$$h(x) = h(x_0) + \int_0^1 F(x(\tau)) \cdot x'(\tau) \, d\tau \ ,$$

onde $x(\tau)$ é o caminho $x(\tau) = x\tau + x_0(1-\tau)$, cujo vetor velocidade está ao longo do raio $x - x_0$ da bola de centro em $x_0$. ■

**Definição 1.2.21:** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Dizemos que um campo $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *deriva de um potencial* se existe uma função escalar $u$ continuamente diferenciável tal que $F = \nabla u$. A função $u$ é dita o *potencial* do campo $F$.

O corolário anterior nos garante, portanto, que o campo $F \in \mathcal{I} \cap \mathcal{O}$ deriva de um potencial dado pela função $h$.

A título de curiosidade enunciaremos alguns resultados sobre os campos potenciais, as demonstrações podem ser encontradas em [18]. A referência [12] traz a interpretação destes resultados sob o ponto de vista da Física, fornecendo inúmeros exemplos que envolvem o conceito de campos potenciais.

**Teorema 1.2.22:** *Seja $F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ um campo de classe $C^1$ definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $F$ é um campo potencial, então*

$$D_i f_j = D_j f_i \qquad \forall\, i, j = 1, \cdots, n.$$

O teorema anterior nos fornece um critério *necessário* para que um campo seja potencial. Vejamos uma condição suficiente, para fixar idéias, consideremos $n = 2$.

**Teorema 1.2.23:** *Seja $a < b$ e $c < d$ números. Seja $F$ um campo vetorial de classe $C^1$ sobre o retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a < x < b$ e $c < y < d\}$. Suponhamos que $F = (f, g)$ é tal que suas funções coordenadas $f$ e $g$ satisfazem:*

$$D_2 f = D_1 g \ .$$

*Então $F$ é um campo potencial.*

Não é difícil ver que o teorema se generaliza para $n$ variáveis. Em domínios mais gerais que retângulos nem sempre existe uma função potencial para o campo de vetores, no entanto, podemos estabelecer o seguinte resultado.

**Teorema 1.2.24:** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e conexo. Seja $F$ um campo vetorial contínuo em $U$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$F$ tem uma função potencial em $U$.*
2. *A integral de $F$ ao longo de dois pontos quaisquer de $U$ independe do caminho que une os pontos.*
3. *A integral de $F$ ao longo de qualquer curva fechada em $U$ é igual a zero.*

Retornando ao nosso ponto de interesse, vejamos como aplicar os fatos demonstrados em (1.2.4) e (1.2.18) ao problema de Dirichlet.

Dada uma função $f \in C^2(\overline{\Omega})$ , observemos que do lema (1.2.1) decorre $\nabla f \in \mathcal{R}^\perp = \mathcal{I}$. Logo

$$\nabla f \ \in \mathcal{I} = \mathcal{G} \oplus ( \mathcal{I} \cap \mathcal{O})$$

Ou seja, podemos decompor $\nabla f$ como sendo:

$$\nabla f = G + H \quad , \text{onde } \ G \in \mathcal{G}; H \in \mathcal{I} \cap \mathcal{O}$$

Como $G \in \mathcal{G}$ , $G$ é um campo gradiente logo $\exists g \in H_0^1$ tal que $G = \nabla g$ . Isto é:

$$\nabla f = \nabla g + H \ , \text{ onde } \ g \in H_0^1; H \in \mathcal{I} \cap \mathcal{O}$$

Decorre do corolário (1.2.18) que $H$ é o gradinte de uma função harmônica $h_1$ , donde obtemos:

$$\nabla f = \nabla g + \nabla h_1 \text{ , onde } g \in H_0^1; \quad \Delta h_1 = 0 \ \text{ em } \Omega$$

Logo, podemos concluir que,

$$g = f - h \text{ onde } \Delta h = 0 \quad \text{em} \ \ \Omega$$

e como $g \equiv 0$ em $\partial\Omega$, obtemos

$$f = h \text{ em } \partial\Omega$$

Em outras palavras, $h$ é a solução do problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } \ \Omega \\ h = f & \text{em } \ \partial\Omega \end{cases}$$

**Observação:** Notemos que a decomposição de $\nabla f$ em um campo gradiente $\nabla g$ com um campo $H \in \mathcal{I} \cap \mathcal{O}$ não é trivial, pois a princípio não temos informação do comportamento de $\nabla f$ na fronteira do conjunto $\Omega$.

## 1.3 Os teoremas de Stampacchia e Lax-Milgram

Iniciamos esta seção com alguns resultados[3] clássicos da teoria dos espaços de Hilbert, que serão necessários para a apresentação do teorema de Lax-Milgram e sua relação com o problema de Dirichlet (1.1.3) tratado neste capítulo.

Ao que se segue $H$ é um espaço de Hilbert. Denotaremos por $H'$ o dual topológico de $H$, isto é, o espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos de $H$.

**Teorema 1.3.1(Projeção sobre um convexo fechado):** *Seja $K \subset H$ um conjunto convexo, fechado e não vazio. Então para todo $f \in H$ ,existe um único $u \in K$ tal que*

$$| f - u | = \min_{v \in K} | f - v | \ .$$

*Além disso, $u$ se caracteriza pela seguinte propriedade:*

$$\begin{cases} u \in K \\ (f-u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{1.3.2}$$

*Denotamos $u = P_K f =$ Projeção de $f$ sobre $K$.*

**Proposição 1.3.3:** *Sob as hipóteses do teorema anterior temos que*

$$| P_K f_1 - P_K f_2 | \leq | f_1 - f_2 | \quad \forall f_1, f_2 \in H \ .$$

[3]As demonstrações podem ser encontradas em [1], pp. 79 à 81.

**Corolário 1.3.4:** *Seja $M \subset H$ um subespaço vetorial fechado. Seja $f \in H$. Então $u = P_M f$ se caracteriza por*

$$\begin{cases} u \in M \\ (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M \end{cases} \tag{1.3.5}$$

*Além disso $P_M$ é um operador linear.*

**Teorema 1.3.6(Teorema de Representação de Riesz-Fréchet):** *Dada $\varphi \in H'$, existe um único $f \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \quad \forall\, v \in H$$

*Além disso, temos que*

$$| f | = \| \varphi \|_{H'}$$

**Definição 1.3.7:** Dizemos que uma forma bilinear $a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é

1. *contínua se existe uma constante $C$ tal que*

$$| a(u, v) | \leq C \mid u \mid \mid v \mid \quad \forall u, v \in H,$$

2. *coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(u, u) \geq \alpha \mid u \mid^2 \quad \forall u \in H.$$

**Teorema 1.3.8(Stampacchia):** *Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear contínua e coerciva. Seja $K$ um convexo, fechado e não vazio. Dado $\varphi \in H'$ existe* *um único* $u \in K$ *tal que para todo* $v \in K$,

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle \ . \tag{1.3.9}$$

*Além disso, se* $a$ *é simétrica, então* $u$ *se caracteriza pela propriedade*

$$\begin{cases} u \in K \\ \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle\} \end{cases} \tag{1.3.10}$$

Para demonstrar o teorema de Stampacchia, utilizaremos o seguinte resultado clássico; cuja demonstração pode ser encontrada em [5].

**Teorema 1.3.11(Teorema do Ponto Fixo de Banach):** *Seja* $X$ *um espaço métrico completo e seja* $S : X \to X$ *uma aplicação tal que existe* $k < 1$ *com*

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq kd(v_1, v_2) \ \ \forall v_1, v_2 \in X.$$

*Então* $S$ *tem um único ponto fixo,* $u = Su$.

Passemos à demonstração do teorema de Stampacchia.

**Demonstração:** Pelo teorema de representação de Riesz-Fréchet existe $f \in H$ único tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \ \ \forall \ v \in H.$$

Por outro lado, para todo $u \in H$ *fixo* a aplicação $v \mapsto a(u,v)$ é uma forma linear, contínua sobre $H$, e novamente pelo teorema de Riesz-Fréchet existe um elemento de $H$, denotado por $Au$ ,tal que $a(u,v) = (Au, v) \ \forall v \in H$. É claro que $A$ é um operador linear de $H$ em $H$ e que

$$| \ Au \ | \leq C \ | \ u \ | \ \forall u \in H$$

$$(Au, u) \geq \alpha \ | \ u \ |^2 \ \forall u \in H \ .$$

Nosso problema consiste, portanto, em encontrar $u \in K$ tal que

$$(Au, v-u) \geq (f, v-u) \forall\, v \in K\ .$$

Seja $\rho > 0$ uma constante que fixaremos mais tarde. A última desigualdade equivale a

$$(\rho f - \rho Au + u - u, v - u) \leq 0 \forall\, v \in K$$

isto é,

$$u = P_K(\rho f - \rho Au + u)\ .$$

Para todo $v \in K$ definamos $Sv = P_K(\rho f - \rho Av + v)$. Mostremos que se $\rho > 0$ é convenientemente escolhido, então $S$ é uma contração estrita, isto é, existe $k < 1$ tal que

$$| Sv_1 - Sv_2 | \leq k \mid v_1 - v_2 \mid \quad \forall v_1, v_2 \in K\ .$$

Com efeito, pela proposição (1.3.3) temos que

$$| Sv_1 - Sv_2 | \leq | (v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2) |$$

e então

$$| Sv_1 - Sv_2 |^2 \leq | v_1 - v_2 |^2 - 2\rho(Av_1 - Av_2, v_1 - v_2) + \rho^2 \mid Av_1 - Av_2 |^2$$

$$\leq | v_1 - v_2 |^2 (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)$$

Fixando $\rho > 0$ tal que $k^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1$ ( tomar $0 < \rho < \frac{2\alpha}{C^2}$ ) vemos que $S$ admite um único ponto fixo.

Suponhamos agora que a forma $a(u, v)$ é simétrica. Então define um novo produto escalar em $H$, cuja norma associada é equivalente a norma $| \cdot |$. Assim $H$ é também um espaço de Hilbert para este produto escalar. Aplicando mais uma vez o teorema de representação de Riesz-Fréchet, obtemos $g \in H$ tal que

$$(\varphi, v) = a(g, v) \quad \forall v \in H\ .$$

Logo, (1.3.9) se escreve

$$a(g-u,v-u)\leq 0 \quad \forall v\in H \quad ,$$

isto é, $u = P_K g$ , onde a projeção é tomada com relação ao produto escalar definido pela forma bilinear simétrica $a$. De acordo com o teorema (1.3.1) equivale a achar $u\in K$ onde se atinge

$$\min_{v\in K} a(g-v,g-v)^{1/2} \, .$$

Isto é , minimizar sobre $K$, $a(g-v,g-v)$ ou ainda

$$a(v,v)-2a(g,v), \text{ ou ainda } \frac{1}{2}a(v,v)-\langle\varphi,v\rangle \quad .$$

■

**Corolário 1.3.12(Lax-Milgram):** *Seja $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para todo $\varphi\in H'$ existe um único $u\in H$ tal que*

$$a(u,v)=\langle\varphi,v\rangle \quad \forall v\in H \, .$$

*Além disso, se $a$ é simétrica, então $u$ se caracteriza pela propriedade*

$$\begin{cases} u\in H \\ \frac{1}{2}a(u,u)-\langle\varphi,u\rangle = \min_{v\in H}\{\frac{1}{2}a(v,v)-\langle\varphi,v\rangle\} \end{cases} \tag{1.3.13}$$

Vejamos a aplicação deste resultado para o estudo do problema de Dirichlet (1.1.3).

Consideremos a forma bilinear simétrica $a: H_0^1\times H_0^1\to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u,v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v$$

e o funcional $F : H_0^1 \to \mathbb{R}$ dado por

$$F(v) = \int_\Omega \phi \cdot v$$

Aplicando o teorema de Lax-Milgram, encontramos um único $u \in H_0^1$ que é a solução fraca do problema de Dirichlet (1.1.3), devido a definição da forma bilinear e do funcional associado. Observemos ainda que o teorema de Lax-Milgran garante que esta solução $u$ satisfaz (1.3.13), ou seja é o mínimo de um certo funcional .

Para encerrar este parágrafo façamos alguns comentários sobre o teorema de Stampacchia. Expressões do tipo (1.3.9) são chamadas *desigualdades variacionais.* Aqui esta equação apareceu como uma condição suficiente para o problema de minimização do funcional $\Phi(v) = a(v,v) - 2(\phi, v)$ (que no parágrafo (1.4.1) a seguir será melhor explorado) no caso em que a forma bilinear $a(u,v)$ é simétrica, e possibilitou a resolução do problema que enfocamos, na verdade, (1.3.9) é também uma condição necessária, como está demonstrado em [23].

Suprimindo-se a hipótese de simetria em $a(u,v)$, o teorema de Stampacchia *ainda* garante a existência e unicidade de uma função $u$ que satisfaz à (1.3.9). A referência [22] é um artigo onde os autores Lions e Stampacchia obtiveram generalizações deste resultado e aplicações do mesmo.

Neste aspecto reside a importância do teorema de Stampacchia e permite sua grande aplicabilidade na resolução de problemas de equações diferenciais parciais elíticas, onde as soluções devem satisfazer certos vínculos. Sob o ponto de vista abstrato, isso requer que a solução do problema esteja em certos conjuntos convexos $K$ do espaço de Hilbert. Foge ao espírito deste trabalho aprofundar esta questão, o leitor interessado pode consultar as referências [7, 22, 23, 24] para apreciar esta teoria.

## 1.4 Método de Dirichlet

Ao longo desta seção $\Omega$ será um domínio limitado, contido em $\mathbb{R}^n$, cuja fronteira denotaremos por $\partial\Omega$.

O problema de Dirichlet pode ser convertido em um problema de Cálculo das Variações conhecido como *Princípio de Dirichlet.*

Dadas funções $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ , definimos a forma hermitiana $D$ por

$$D(u,v) = \int_\Omega \nabla\, u \cdot \nabla\, v\; dx \tag{1.4.1}$$

A *integral de Dirichlet* de $u \in C^1(\overline{\Omega})$ é definida por

$$D(u,u) = \int_\Omega |\nabla\, u|^2\; dx\ . \tag{1.4.2}$$

Por simplicidade, abreviaremos $D(u,u)$ por $D(u)$.

Vamos fazer uma reformulação do problema (1.1.1).

*Problema de Dirichlet Variacional*: Dada uma função $\varphi \in H^1(\Omega)$, encontrar uma função $u \in H^1(\Omega)$ tal que $u - \varphi \in H_0^1(\Omega)$ e $||u||_{H^1}$ seja a menor possível.

Mostraremos que a solução do problema de Dirichlet variacional é a *mesma* e única solução do problema de Dirichlet generalizado, proposto na seção 1.

Antes necessitamos de alguns teoremas de caráter geral.

**Teorema 1.4.3:** *Dada uma função $w \in H^1(\Omega)$ temos que $w$ é harmônica em $\Omega$ se, e somente se, $w$ é ortogonal a $H_0^1(\Omega)$ com respeito a $D$, isto é,*

$$D(w,v) = 0$$

*para qualquer $v \in H_0^1(\Omega)$.*

**Demonstração:**

Decorre do teorema de Green (A.2.8) que, se $w \in C^1(\overline{\Omega})$ e $v \in C_0^\infty(\Omega)$, então

$$\int_\Omega w\Delta v \, dx = -D(w, v)$$

pois $v$ se anula na vizinhança da fronteira de $\Omega$. Passando o limite, temos que esta equação permanece verdadeira para $w \in H^1(\Omega)$. Obtemos assim as seguintes equivalências:

1. $w$ é harmônica em $\Omega$ ;

2. $w$ é solução fraca de $\Delta w = 0$ ;

3. $\int_\Omega w\Delta v \, dx = 0$ para toda $v \in C_0^\infty(\Omega)$;

4. $D(w, v) = 0$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

■

**Teorema 1.4.4:** *O problema de Dirichlet variacional tem no máximo uma solução.*

**Demonstração:**

Suponha que $u$ e $v$ são duas soluções, então para qualquer $\epsilon$ temos

$$D(u + \epsilon(v - u)) = D(u) + 2\epsilon D(u, v - u) + \epsilon^2 D(u - v) \geq D(u) \; , \quad (1.4.5)$$

pois $(v - u) \in H_0^1(\Omega)$. Claramente, a função quadrática de $\epsilon$ que aparece em (1.4.5) atinge seu minímo em dois valores de $\epsilon$, $\epsilon = 0$ e $\epsilon = 1$. Isto só é possível se esta função for constante, o que implica que $D(u - v) = 0$. Pela desigualdade de Poincaré (A.1.9), temos que

$$\int_\Omega |(u - v)|^2 \, dx = 0 \; ,$$

ou seja, $u \equiv v$. ∎

**Teorema 1.4.6:** *A solução do problema de Dirichlet generalizado, se existir, é a solução do problema de Dirichlet variacional.*

**Demonstração:**

Seja $u$ a solução fraca para (1.1.1) e $w$ qualquer função satisfazendo a condição de fronteira, isto é, $w - \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Então pelo teorema (1.4.3) $D(u, w-u) = 0$ e portanto

$$D(w) = D(u) + D(w-u) \geq D(u)$$

mostrando que $u$ resolve o problema variacional. ∎

A seguir apresentaremos duas maneiras de seguir este problema, a primeira utilizando resultados de Análise Funcional e Topologia Geral, e a segunda introduzindo o conceito de seqüência minimizante. Veremos as relações existentes entre estas duas formas e os métodos anteriores, bem como as vantagens de uma e outra na secção 6.

### 1.4.1 Método de Dirichlet via Topologia Geral

Nesta secção enunciamos vários resultados de Topologia Geral e Análise Funcional que iremos precisar. As demonstrações podem ser encontradas em [20],[6],[4],[1].

**Definição 1.4.7:** Uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ definida em um espaço topológico é semicontínua inferiormente se a imagem inversa, pela f, de qualquer semi-reta aberta $(a, +\infty)$ é um aberto de $X$.

**Teorema 1.4.8:** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real semicontínua inferiormente definida em um espaço topológico compacto. Então:*

1. *$f$ é limitada inferiormente,*

2. *existe $x_0 \in X$ tal que*

$$f(x_0) = \inf_X f$$

**Demonstração:**

1. Como

$$X = \cup_{n=1}^{n=\infty} f^{-1}(-n, \infty)$$

   segue-se do fato de $X$ ser compacto, que existe $n_0$ inteiro positivo, tal que

$$X = \cup_{n=1}^{n=n_0} f^{-1}(-n, \infty),$$

   o que mostra que $f(x) > -n_0$ para todo $x \in X$.

2. Seja $K$ o ínfimo de $f$ em $X$. Suponhamos por contradição que $k$ não seja atingido. Então

$$X = \cup_{n=1}^{n=\infty} f^{-1}(k + \frac{1}{n}, \infty)$$

   Usando a compacidade de $X$, obtemos um $n_0$ tal que

$$X = \cup_{n=1}^{n=n_0} f^{-1}(k + \frac{1}{n}, \infty),$$

   o que implicaria que $f(x) > k + n_0^{-1}$ para todo $x \in X$. Isso contradiz o fato de $k$ ser o ínfimo de $f$ em $X$.

■

**Definição 1.4.9:** Uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ definida em um espaço topológico $X$ é seqüencialmente semicontínua inferiormente se, para toda seqüência convergente em $X$, $x_n \to x$, tivermos que

$$f(x) \leq \liminf f(x_n)$$

Pode-se demonstrar os seguintes fatos:

1. toda função semicontínua inferiormente é seqüencialmente semicontínua inferiormente;

2. em espaços que satisfazem o Primeiro Axioma de Enumerabilidade (em particular, em espaços métricos ) os dois conceitos são equivalentes .

Estamos interessados no conceito de semicontinuidade inferior em espaços de Banach munidos da topologia fraca. Relembremos este conceito.

Seja $E$ um espaço de Banach e denotemos por $E'$ seu dual topológico, isto é, o conjunto dos funcionais lineares contínuos em $E$. A coleção de todos os conjuntos $V(A, \epsilon)$ definidos a seguir constituem uma base de vizinhanças do 0 para a topologia fraca de $E$.

$$V(A, \epsilon) = \{x \in E \text{ tal que } |x'(x)| < \epsilon, x' \in A\} \ ,$$

para todo subconjunto finito $A$ de $E'$ e todo $\epsilon > 0$.

Seja $A$ um subconjunto *limitado* de um espaço de Banach $E$, e em $A$ consideremos a topologia induzida pela topologia fraca de $E$. Temos então:

1. Se $f : A \to \mathbb{R}$ for seqüencialmente semicontínua inferiormente, e o dual $E'$ de $E$ for separável, então $f$ é fracamente semicontínua inferiormente.

De fato, a demonstração deste item segue-se do seguinte resultado: "A topologia fraca da bola unitária fechada de um espaço de Banach é metrizável se e só se $E'$ for separável" [6] . Em particular, o resultado é válido se $E$ for reflexivo e separável, pois neste caso, $E'$ será separável também.

2. Se $f : A \to \mathbb{R}$ for fracamente seqüencialmente semicontínua inferiormente e $E$ for um espaço de Banach reflexivo, então $f$ é fracamente semicontínua inferiormente.

A demonstração deste fato reside em que "sendo $A$ um conjunto limitado num espaço de Banach reflexivo, então para todo $x$ na aderência fraca de $A$ existe uma seqüência $(x_n)$ de pontos de $A$ que converge fracamente para $x$". Insistimos no fato da necessidade da limitação de $A$; há um exemplo devido a Von Neumann de um subconjunto (não limitado) $A$ de um espaço de Hilbert, tal que 0 pertence à sua aderência fraca, mas não existe nenhuma seqüência de elementos de $A$ convergindo para 0, [6].

Reunindo os resultados anteriores e o teorema (1.4.8) concluímos que:

**Teorema 1.4.10:** *Sejam $X$ a bola unitária fechada de um espaço de Banach reflexivo, e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função fracamente seqüencialmente semicontínua inferiormente. Então $f$ é limitada inferiormente e assume seu ínfimo em $X$.*

Vejamos as relações entre esses resultados e o problema (1.1.3).

Consideremos o funcional $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}D(u) - \int_\Omega \phi u \ , \qquad (1.4.11)$$

que está definido em todo o espaço $H_0^1(\Omega)$ ; e $D(u)$ é como em (1.4.2). Se $u_0$ for um mínimo ( ou, mais geralmente, um ponto crítico) de $\Phi$ então $u_0$

é solução do problema de Dirichlet generalizado formulado anteriormente. De fato, (1.1.17) é a equação de Euler Lagrange [4] do funcional definido em (1.4.11). Portanto, estamos interessados em encontrar um ponto crítico para o funcional em (1.4.11). Neste ponto, utilizamos os resultados anteriores, antes, porém, necessitamos de um teorema sobre os espaços de Sobolev, cuja demonstração pode ser encontrada em [1].

**Teorema 1.4.12(Teorema de Imersão de Sobolev):** *Suponhamos que $\Omega$ seja de classe $C^1$. Então a inclusão $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ é compacta; isto é, uma seqüência limitada $(u_n)$ em $H^1(\Omega)$ possui uma subseqüência convergente em $L^2(\Omega)$.*

Usando, sucessivamente, a desigualdade de Cauchy-Schwartz para funções de $L^2$ e a Desigualdade de Poincaré (A.1.10), obtemos:

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0} - \|\phi\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0} - C^{\frac{1}{2}}\|\phi\|_{L^2}\|u\|_{H^1_0} \quad .$$

Portanto, existe $R > 0$ tal que

$$\Phi(u) > 0 \ \forall \|u\|_{H^1_0} \geq R. \tag{1.4.13}$$

É imediato que o funcional é fracamente seqüencialmente semicontínuo inferiormente. De fato, a norma de qualquer espaço de Banach o é, e pelo teorema de imersão de Sobolev a aplicação

$$u \in H^1_0(\Omega) \mapsto \int \phi u$$

é fracamente seqüencialmente contínua. Como $H^1_0(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, segue-se que podemos aplicar o teorema (1.4.10) para concluir que existe $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ , $\|u_0\|_{H^1_0} \leq R$ tal que

$$\Phi(u_0) = \min\{\Phi(u) : \|u\|_{H^1_0} \leq R\} \quad .$$

[4] Para o leitor interessado recomendamos a referência [12]

Como $\Phi(0) = 0$ segue-se $\Phi(u_0) \leq 0$ e conseqüentemente, $||u_0||_{H_0^1} < R$, em vista de (1.4.13). Vê-se também que $u_0$ é o mínimo de $\Phi$ em todo $H_0^1(\Omega)$. De acordo com o que estudamos, $u_0$ é a solução do problema de Dirichlet generalizado (1.1.3).

O procedimento acima para a equação (1.4.11) é essencialmente o que foi exposto na secção 1.3. Entretanto, esta técnica de Cálculo das Variações é muito útil na resolução de certos problemas lineares e não lineares.

Por exemplo, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua *limitada* e considere o problema de Dirichlet não linear:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.4.14}$$

O problema generalizado associado é: determinar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f(u) \cdot v \quad \forall v \in C_0^1(\Omega) \tag{1.4.15}$$

O segundo membro de (1.4.15) faz sentido porque $f(u) \in L^2(\Omega)$ quando $u \in L^2(\Omega)$; mais ainda, $f(u) \in L^\infty(\Omega)$. O funcional $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado à equação de Euler-Lagrange (1.4.15) é dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} D(u) - \int_\Omega F(u)\,, \tag{1.4.16}$$

onde $F(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{ds}, \quad t \in \mathbb{R}$ .

Note que a segunda integral em (1.4.16) faz sentido porque

$$|F(t)| \leq C|t| \;\; \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.4.17}$$

e, conseqüentemente, $F(u) \in L^2(\Omega)$, quando $u \in L^2(\Omega)$. Usando (1.4.17) e a desigualdade de Poincaré (A.1.9), obtemos

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - C_1||u||$$

onde $C_1$ é uma constante que depende somente de $C$ em (1.4.17) e do volume de $\Omega$. Logo existe $R > 0$ tal que

$$\Phi(u) > \Phi(0) \;, \quad \forall ||u|| \geq R. \tag{1.4.18}$$

A idéia é aplicar o teorema (1.4.8) ao funcional $\Phi$ restrito à bola $\overline{B_R(0)}$ de $H_0^1(\Omega)$. Para tanto, resta mostrar que $\Phi$ é fracamente seqüencialmente semicontínua inferiormente, e para isso basta provar que, se $u_n$ converge fracamente para $u \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\int F(u_n) \to \int F(u). \tag{1.4.19}$$

Isto, porém, se segue do teorema de imersão de Sobolev, que implica que $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$, e do fato que $F(u_n) \to F(u)$ em $L^2(\Omega)$ como conseqüência de (1.4.17). Decorre de (1.4.18) que $u_0$ satisfaz $||u_0|| < R$ e então, $u_0$ é solução de (1.4.15).

Um outro tipo de operador diferencial que pode ser tratado por estas técnicas é o chamado *p-Laplaciano*, dado por:

$$\Delta_p u = \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \tag{1.4.20}$$

Este operador coincide com o Laplaciano usual quando $p = 2$. Dado $f \in L^{p'}$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, consideremos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Como no caso do Laplaciano usual, consideramos o funcional

$$\Phi(u) = \int |\nabla u|^p - \int fu$$

que agora está bem definido no espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$. Prova-se de maneira análoga que $\Phi$ é fracamente semicontínuo inferiormente numa bola de $W_0^{1,p}(\Omega)$ que é um espaço de Banach reflexivo. Conseqüentemente, pode-se aplicar o teorema (1.4.10).

Outras aplicações referentes ao p-Laplaciano podem ser encontradas em [27].

### 1.4.2 Método de Dirichlet via seqüências minimizantes

O que apresentamos a seguir tem um grande interesse histórico, pois é essencialmente esse o procedimento usado por Hilbert em seu famoso trabalho sobre o Princípio de Dirichlet.

Consideremos novamente $D(u)$ como em (1.4.2). Como $D(u)$ não pode ser negativo, podemos definir $d$ como se segue

$$d = \inf D(u) \ ,$$

onde $u \in H^1(\Omega)$, $u - \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Embora não seja óbvio que exista uma função para a qual o ínfimo é atingido, podemos determinar uma seqüência de funções $(u_n)$ tal que

$$D(u_n) \longrightarrow d \ ,$$

onde, para todo $n \in \mathrm{N}$ , $u_n \in H^1$, e $u_n - \varphi \in H_0^1$.

A seqüência $(u_n)$ é denominada *seqüência minimizante.*

Destacamos duas propriedades das seqüências minimizantes.

**Lema 1.4.21:** *Dado $g \in H_0^1(\Omega)$ temos que*

$$D(u_j, g) \to 0$$

*quando $j \to \infty$.*

**Demonstração:**

Por continuidade, basta estabelecer o lema para $g \in C_0^\infty(\Omega)$. A forma quadrática em $\epsilon$

$$D(u_j + \epsilon g) - d = D(u_j) + 2\epsilon D(u_j, g) + \epsilon^2 D(g) - d$$

é não negativa para qualquer $\epsilon$, pela definição de $d$ e pelo fato de que $u_j + \epsilon g \in H^1(\Omega)$.

O discriminante da forma quadrática em $\epsilon$ precisa então ser não positivo, isto é

$$[D(u_j, g)]^2 \leq [D(u_j) - d] D(g) \tag{1.4.22}$$

E como

$$||D(g)||_{H_0^1} < M \quad \text{e} \quad D(u_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} d$$

o resultado segue. ■

**Lema 1.4.23:** *A seqüência minimizante $(u_j)$ é de Cauchy em $H^1(\Omega)$.*

**Demonstração:**

Da identidade

$$D(u_j - u_k) = D(u_j, u_j - u_k) - D(u_k, u_j - u_k)$$

decorre que

$$\begin{aligned} |D(u_j - u_k)| &= |D(u_j, u_j - u_k) - D(u_k, u_j - u_k)| \\ &\leq |D(u_j, u_j - u_k)| + |D(u_k, u_j - u_k)| \,. \end{aligned}$$

Segue-se, usando a desigualdade (1.4.22) do lema anterior, que

$$\begin{aligned} D(u_j - u_k) &\leq (D(u_j) - d)^{1/2} (D(u_j - u_k))^{1/2} + \\ &\quad + (D(u_k) - d)^{1/2} (D(u_j - u_k))^{1/2} \end{aligned} \tag{1.4.24}$$

Como existe $M > 0$ tal que $D(u_j) \leq M$ para todo $j$, pois $D(u_j)$ é limitado pela norma de $H^1$, temos de (1.4.24) que

$$D(u_j - u_k) \ \to \ 0 \ . \tag{1.4.25}$$

Lembrando que para todo $j \in \mathbb{N}$, $u_j - \varphi \in H_0^1$, segue, pela desigualdade de Poincaré (A.1.9), que

$$\begin{aligned} ||u_j - u_k||_{L^2} &= ||(u_j - \varphi) - (u_k - \varphi)||_{L^2} \\ &\leq CD(u_j - \varphi - u_k + \varphi) = CD(u_j - u_k) \ \to \ 0 \ , \end{aligned}$$

o que, com (1.4.25) implica que $||u_j - u_k||_{H^1} \to 0$. ■

Usaremos a seqüência minimizante para construir a *função minimizante* que resolverá ambos os problemas, o variacional e o generalizado.

Para $R > 0$, seja $\Omega_R$ o conjunto dos pontos $x \in \Omega$ tais que $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > R$. Definimos em $\Omega_R$ uma função $u_{j,R}$ como

$$u_{j,R}(x) = (w_n R^n)^{-1} \int_B u_j(y) \ dy$$

onde $B = B_R(x)$ e $w_n$ é o volume da bola unitária.

**Lema 1.4.26:** *A seqüência $(u_{j,R})$ é uniformemente convergente em $\Omega_R$.*

**Demonstração:**

Pela desigualdade de Schwartz, temos

$$\begin{aligned} |u_{j,R}(x) - u_{k,R}(x)|^2 &\leq (w_n R^n)^{-2} \left[\int_B (u_j(y) - u_k(y)) \ dy\right]^2 \\ &\leq (w_n R^n)^{-2} \int_B \ dy \int_B (u_j(y) - u_k(y))^2 \ dy \\ &\leq (w_n R^n)^{-1} ||u_j - u_k||_{L^2} \end{aligned}$$

e esta última expressão tende a zero, em virtude do lema anterior. ∎

O lema precedente nos permite determinar uma função contínua em $\Omega_R$: $u_R = \lim_{j\to\infty} u_{j,R}$. A função $u_R(x)$ parece depender de $R$. O lema a seguir mostra que isto não é o caso.

**Lema 1.4.27:** *Seja $r < R$. Então $u_r$ coincide com $u_R$ em $\Omega_R$.*

**Demonstração:**

Associado a um ponto $x^0 \in \Omega_R$, definamos a função

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{n}{2-n}(r^{2-n} - R^{2-n})|x-x^0|^2(r^{-n} - R^{-n}) & \text{se } |x-x^0| \leq r \\ \frac{n}{2-n}(|x-x^0|^{2-n} - R^{2-n}) + (|x-x^0|^{2-n} - |x-x^0|^2 R^{-n}) & \\ & \text{se } r \leq |x-x^0| \leq R \\ 0 & \text{se } |x-x^0| \geq R \end{cases}$$

Derivando vemos que $\alpha(x) \in C^1(\Omega_R)$. Como tem suporte compacto em $\Omega$, segue-se que

$$D(u_j, \alpha) \to 0 \ .$$

Aplicando o Teorema da Divergência (A.2.1) às três regiões $B_r$, $B_R - B_r$ e $\Omega - B_R$, temos

$$D(u_j, \alpha) = -\int_{B_R} u_j \Delta\alpha \, dx \ .$$

Mas,

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= 2n(r^{-n} - R^{-n}) \ \text{ em } \ B_r \ \text{ e} \\ \Delta\alpha &= -2nR^{-n} \ \text{ em } \ B_R - B_r \ . \end{aligned}$$

Assim

$$D(u_j, \alpha) = 2nR^{-n}\int_{B_R} u_j \, dx - 2nr^{-n}\int_{B_r} u_j \, dx$$

e quando $j \to \infty$

$$0 = 2nw_n u_R(x^0) - 2nw_n u_r(x^0) \ ,$$

isto é, $u_r(x^0) = u_R(x^0)$. ■

Deste modo, a partir de uma seqüência minimizante $(u_j)$, determinamos, tomando médias aritméticas e passando o limite, uma única função $u(x)$, contínua em $\Omega$. Mostremos que $u(x)$ é a solução para o problema variacional. Precisaremos de alguns resultados.

**Lema 1.4.28:** *Seja $A$ um conjunto tal que vol($A$) é finito. Então dado $\epsilon > 0$, existem bolas abertas disjuntas $B_1 = B_{r_1}(x_1), \cdots, B_N = B_{r_N}(x_N)$ contidas em $A$ e tais que*

$$r_j < \epsilon \quad j = 1, \cdots, N$$

*e*

$$vol(A - \cup B_j) < \epsilon$$

**Demonstração:** Veja [12], pp. 158. ■

**Lema 1.4.29:** *Seja $(u_k)$ uma seqüência minimizante e seja $u$ a função contínua a ela associada pelo processo das médias aritméticas. Então, para qualquer subregião $A \subset\subset \Omega$, temos*

$$\int_A (u_k - u)\, dx \ \to \ 0 \ , \ k \to \infty \ . \qquad (1.4.30)$$

**Demonstração:**

Dado $\epsilon > 0$, determinamos, pelo lema anterior, bolas $B_1, \cdots, B_N$ de raio menor que $\epsilon$ e tais que o volume do conjunto $A' = A \backslash (\cup B_j)$ é menor que $\epsilon$. A integral acima se decompõe em $N + 1$ integrais, cada uma das quais é majorada por:

$$\left| \int_{A'} (u_k - u)\, dx \right| \leq \int_{A'} |u_k|\, dx + \epsilon \max_{x \in A} |u(x)| \,. \tag{1.4.31}$$

Esta, pela desigualdade de Schwartz é menor que

$$\epsilon^{1/2} ||u_k|| + \epsilon \max_{x \in A} |u(x)| \tag{1.4.32}$$

As integrais sobre as bolas são assim estimadas.

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_j} (u_k - u)\, dx \right| &\leq \left| \int_{B_j} (u_k - u(x_j))\, dx \right| + \left| \int_{B_j} (u(x_j) - u)\, dx \right| \\ &\leq w_n r_j^n |u_{k,r_j}(x_j) - u(x_j)| + w_n r_j^n \rho(\epsilon) \end{aligned} \tag{1.4.33}$$

onde $\rho(\cdot)$ é o módulo de continuidade da função $u(x)$ que é contínua em $\overline{A}$.

De (1.4.33), concluímos que

$$\sum_{j=1}^{N} \left| \int_{B_j} \right| \leq \text{vol } A \left[ \sum_{j=1}^{N} |u_{k,r_j}(x_j) - u(x_j)| + \rho(\epsilon) \right] \,. \tag{1.4.33}$$

Então (1.4.31), (1.4.32) e (1.4.33) implicam (1.4.30). ∎

O lema nos fornece o seguinte resultado:

**Corolário 1.4.34:** *A função $u(x)$ é harmônica em $\Omega$.*

**Demonstração:**

Mostremos que $u(x)$ satisfaz a Propriedade do Valor Médio (A.2.3). Ora, pelo lema (1.4.28)

$$\int_B (u_k - u)\, dx = \int_B u_k\, dx - \int_B u\, dx \;\to\; 0 \,.$$

Mas, pela definição de $u$:

$$u(y) = \lim(w_n R^n)^{-1} \int_B u_k \, dx$$

e das duas relações acima decorre o corolário. ■

**Teorema 1.4.35:** *Seja $(u_k)$ uma seqüência minimizante e seja $u$ a função contínua a ela associada pelo processo das médias aritméticas. Então para toda subregião $\Omega' \subset\subset \Omega$ temos*

$$\int_{\Omega'} (u_k - u)v \, dx \;\to\; 0$$

*qualquer que seja $v \in L_2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$.*

**Demonstração:**

Sendo $v \in C^0(\Omega')$ e dado $\epsilon > 0$, existe uma função simples $w$ tal que

$$|v(x) - w(x)| < \epsilon\,, \quad x \in \Omega'$$

onde $w(x) = w_j$ para $x \in A_j$, $\cup_{j=1}^{N} A_j = \Omega$ e $w_1, w_2, \cdots, w_N$ são números reais.

Mas

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega'} (u_k - u)v \, dx\right| &\leq \left|\int_{\Omega'} (u_k - u)(v - w) \, dx\right| + \left|\int_{\Omega'} (u_k - u)w \, dx\right| \\ &\leq c\epsilon + \sum_{j=1}^{N} |w_n| \left|\int_{A_j} (u_k - u) \, dx\right| ,\end{aligned}$$

onde $c$ é uma constante.

A demonstração segue do lema (1.4.28). ■

Do teorema anterior e do lema (A.1.11), segue que a função $u$ definida pelo processo da sucessão minimizante é a solução do problema variacional.

Portanto,

**Teorema 1.4.36:** *A função $u \in H^1$ é tal que $u - \varphi \in H_0^1$ e $D(u) = d$.*

O teorema anterior assegura a existência de uma função $u$ que é a solução fraca (única !) do problema de Dirichlet (1.1.1).

## 1.5 Método de Perron

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Mostraremos através do conceito de função barreira, condição necessária e suficiente para solubilidade do problema de Dirichlet (1.1.1).

Utilizaremos o método de Perron de funções subharmônicas, o qual distingue o problema da existência de solução no interior de $\Omega$ do comportamento desta na fronteira.

Antes enunciaremos dois resultados[5] sobre funções harmônicas.

**Teorema 1.5.1:** *Seja $B = B_R(0)$ uma bola de centro 0 e raio $R$ e $\varphi$ uma função contínua sobre $\partial B$. Então a função $u$ definida por*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y) ds_y}{|x-y|^n} & se \;\; x \in B; \\ \varphi(x) & se \;\; x \in \partial B \end{cases} \tag{1.5.2}$$

*pertence a $C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ e satisfaz $\Delta u = 0$ em $B$.*

**Teorema 1.5.3:** *Qualquer seqüência limitada de funções harmônicas em um domínio $\Omega$ contém uma subseqüência convergindo uniformemente sobre*

[5] As demonstrações pode ser encontradas em [15]. No caso de dimensão $n = 2$, apresentamos no capítulo 2 um método de obter essa fórmula usando Séries de Fourier.

*subdomínios compactos de $\Omega$ para uma função harmônica.*

**Definição 1.5.4:** Uma função $u \in C^0(\Omega)$ é chamada *subharmônica* em $\Omega$ se para qualquer bola $B \subset\subset \Omega$ e qualquer função $h$ tal que $\Delta h = 0$ em $B$ e $u \leq h$ na $\partial B$ ,tivermos $u \leq h$ em $B$.

**Definição 1.5.5:** Uma função $u \in C^0(\Omega)$ é chamada *superharmônica* em $\Omega$ se para qualquer bola $B \subset\subset \Omega$ e qualquer função $h$ tal que $\Delta h = 0$ em $B$ e $u \geq h$ na $\partial B$, tivermos $u \geq h$ em $B$.

**Exemplo 1.5.6:** Tomando $n = 1$, temos que as funções subharmônicas são as funções contínuas e convexas, enquanto que as superharmônicas são as contínuas côncavas. As harmônicas são as retas.

**Lema 1.5.7:** *Valem as seguintes propriedades de funções subharmônicas e superharmônicas:*

1. *Se $u$ é subharmônica (superharmônica), então $-u$ é superharmônica (subharmônica).*

2. *A soma de duas funções subharmônicas (superharmônicas) é subharmônica (superharmônica).*

3. *Se $u$ é subharmônica e $v$ é superharmônica, então $u-v$ é subharmônica. Em particular, se $v$ é harmônica, então $u - v$ é subharmônica.*

4. *Se $u$ é harmônica em um domínio $\Omega$ então $u$ satisfaz a forma forte do Princípio do Máximo (1.1.5) em $\Omega$.*

5. *Sejam $u$ subharmônica e $v$ superharmônica em um domínio limitado $\Omega$ com $v \geq u$ em $\partial\Omega$. Então, ou $v > u$ em $\Omega$ ou $v \equiv u$ em $\Omega$.*

6. *Seja $u$ um função subharmônica em $\Omega$ e $B$ uma bola estritamente contida em $\Omega$. Denotemos por $\overline{u}$ a funcão harmônica em $B$ tal que $\overline{u} = u$ em $\partial B$ dada por (1.5.1). Definindo a função levantamento harmônico de $u$ em $B$ por:*

$$U(x) = \begin{cases} \overline{u}(x) & se \;\; x \in B; \\ u(x) & se \;\; x \in \Omega - B \end{cases} \tag{1.5.8}$$

*Temos que $U$ é subharmônica em $\Omega$;*

7. *Sejam $u_1, u_2, \cdots, u_n$ funções subharmônicas em $\Omega$. Então a função*

$$u(x) = max\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

*é também subharmônica em $\Omega$.*

**Demonstração:** As propriedades (i), (ii) e (iii) seguem-se trivialmente das definições .

(iv) Suponhamos que exista um ponto $y \in \Omega$ tal que

$$u(y) = \sup_{\Omega} u = M.$$

Seja $\Omega_M = \{x \in \Omega$ tal que $u(x) = M\}$, temos que $\Omega_M \neq \vee$. Seja $z \in \Omega_M$ um ponto arbitrário e consideremos $B_R(z)$ uma bola de raio $R$ centrada em $z$ compactamente contida em $\Omega_M$. Seja $\overline{u}(x)$ a função dada pelo teorema (1.5.1) tal que $\overline{u} = u$ em $\partial B_R(z)$ e $\Delta \overline{u} = 0$ em $B_R(z)$, onde $\overline{u} \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$.

Da subharmonicidade de $u$, segue-se que $u - \overline{u} \leq 0$ em $B_R(z)$. Logo

$$M = \sup_{\Omega} u \geq \sup_{\partial B_R(z)} u = \sup_{\partial B_R(z)} \overline{u} \geq \overline{u}(z) \geq u(z) = M.$$

A segunda desigualdade segue-se do fato de que $\overline{u}$ harmônica em $B_R(z)$ implica que

$$\sup_{\partial B} \overline{u} \geq \overline{u}(x) \geq \inf_{\partial B} \overline{u} \quad \forall x \in B_R(z).$$

Assim,
$$M = \overline{u}(z) = \sup_{\partial B_R(z)} \overline{u}$$
e, usando o fato que $\Delta \overline{u} = 0$ , pelo Princípio do Máximo (1.1.5), obtemos que $\overline{u} = M$ em $B_R(z)$, implicando que $u = M$ em $\partial B_R(z)$. Variando $R$ obtemos que $u = M$ em $B$ e, portanto, $\Omega_M$ é aberto.

Logo, $\Omega = \Omega_M$ e $u$ é uma função constante.

(v) Suponha que $v < u$ e $v \neq u$ em $\Omega$. Então em algum ponto $x_0 \in \Omega$, temos
$$0 \leq M = (u-v)(x_0) = \sup_{\Omega}(u-v).$$
Podemos assumir que existe uma bola $B = B(x_0)$ tal que $u - v \neq M$ em $\partial B$. Denotemos por $\overline{u}, \overline{v}$ as funções harmônicas, respectivamente iguais a $u$ e $v$ em $\partial B$, dadas pelo teorema 1.5.1, segue-se que
$$M = \sup_{\Omega}(u-v) \geq \sup_{\partial B}(u-v) \geq \sup_{\partial B}(\overline{u}-\overline{v}) \geq (\overline{u}-\overline{v})(x_0) \geq (u-v)(x_0) = M.$$
Logo,
$$M = \sup_{\partial B}(\overline{u}-\overline{v}) = (\overline{u}-\overline{v})(x_0) \quad \text{onde } x_0 \in \overset{\circ}{B} .$$
Como $\overline{u} - \overline{v}$ é harmônica em $B$, segue-se pelo Princípio do Máximo (1.1.5) que $\overline{u} - \overline{v} \equiv M$ em $B$ e, portanto, $\overline{u} - \overline{v} \equiv M$ em $\partial B$, contradizendo a escolha de $B$.

(iv) De fato, seja $B' \subset\subset \Omega$ qualquer bola em $\Omega$ e seja $h$ harmônica em $B'$ tal que $h \geq U$ em $\partial B'$. Como $u \leq U$ em $B'$ temos que $u \leq h$ em $B'$ e, portanto, $U \leq h$ em $B' - B$. Ainda, como $U$ é harmônica em $B$, pelo Princípio do Máximo (1.1.5), $U \leq h$ em $B \cap B'$. Assim, $U \leq h$ em $B'$ e $U$ é subharmônica em $\Omega$.

(vii) Sejam $B \subset\subset \Omega$ e $h$ uma função tal que $\Delta h = 0$ em $B$ e $u \leq h$ em $\partial\Omega$. Logo $u(x) = \max\{u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)\} \leq h(x)$ implica que

$u_1 \leq h, \cdots, u_n \leq h$ em $\partial B$. Pela subharmonicidade das funções $u_i$ temos que $u_i \leq h$ em $B$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Logo

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{u_i(x)\} = u_(x) \leq h(x) \text{ em } B.$$

Assim, $u$ é subharmônica em $\Omega$. ■

**Definição 1.5.9:** Consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ domínio limitado e $\varphi$ uma função limitada em $\partial\Omega$. Uma função $u \in C^0(\overline{\Omega})$ subharmônica é chamada *subfunção relativa a* $\varphi$ se satisfaz $u \leq \varphi$ em $\partial\Omega$.

**Definição 1.5.10:** Consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ domínio limitado e $\varphi$ uma função limitada em $\partial\Omega$. Uma função $v \in C^0(\overline{\Omega})$ superharmônica é chamada *superfunção relativa a* $\varphi$ se satisfaz $u \geq \varphi$ em $\partial\Omega$.

Observe que a classe das subfunções é não vazia pois a função constante

$$c = \min_{\partial\Omega}\{|\varphi(x)|\}$$

é uma subfunção (análogo para superfunções trocando min por max). Pelo Princípio do Máximo, qualquer subfunção é menor ou igual a qualquer superfunção . Em particular, funções constantes menores ou iguais ao ínfimo de $\varphi$ em $\partial\Omega$ são subfunções .

Seja $S_\varphi$ o conjunto de subfunções relativas a $\varphi$.

O resultado básico do Método de Perron está contido no seguinte teorema:

**Teorema 1.5.11:** *A função*

$$U(x) = \sup_{v \in S_\varphi} \{v(x)\}$$

*é harmônica em $\Omega$.*

**Demonstração:** Primeiramente notemos que a função de Perron é limitada em $\overline{\Omega}$. De fato, seja $M = \max_{\partial\Omega}|\varphi|$ e $v \in S_\varphi$. Como $v$ é subharmônica em $\Omega$ e contínua em $\overline{\Omega}$, pelo Princípio do Máximo, o máximo de $v$ é assumido em um ponto da fronteira de $\Omega$, considerando agora o Princípio do Mínimo, segue-se que para todo $v \in S_\varphi$, $|v(x)| \leq M$, o que resulta $|U(x)| \leq M$. Para mostrar que $U$ é harmônica mostremos que o é em qualquer bola $B_R(y)$, de raio $R$ e centrada em $y$, compactamente contida em $\Omega$.

Pela definição de $U$, existe uma seqüência $\{v_n\} \subset S_\varphi$ tal que $\lim v_n(y) = U(y)$. Podemos assumir que a seqüência $v_n$ é limitada se considerarmos a seqüência $v_n = \max(v_n, \inf \varphi)$.

Definamos $V_n$ como sendo o levantamento harmônico de $v_n$ em $B$, isto é,

$$V_n(x) = \begin{cases} \overline{v_n}(x) & \text{se } x \in B; \\ v_n(x) & \text{se } x \in \Omega - B \end{cases} \tag{1.5.9}$$

Então, $V_n(x) \in S_\varphi$ e $\lim V_n(y) = U(y)$.

Pelo teorema 1.5.2, a seqüência $V_n$ contém uma subseqüência $V_{n_k}$ convergindo uniformemente, em qualquer bola $B_\rho(y)$ com $\rho < R$, para uma função $v$ que é harmônica em $B$. Claramente $v \leq U$ em $B$ e $v(y) = U(y)$.

Mostremos que $v = U$ em $B$. Suponha, por absurdo, que existe $z \in B$ tal que $v(z) < U(z)$. Então existe uma função $\overline{u} \in S_\varphi$ tal que $v(z) < \overline{u}(z)$. Definimos $w_k = \max(\overline{u}, V_{n_k})$ e consideramos $W_k$ os levantamentos harmônicos de $w_k$. Obtemos, como anteriormente, uma subseqüência de $\{w_k\}$ convergindo para uma função harmônica $w$ satisfazendo $v \leq w \leq U$ em $B$ e $v(y) = w(y) = U(y)$. Pelo princípio do Máximo, precisamos ter $v = w$ em $B$ e isto contradiz a definição de $\overline{u}$.

Assim, $U$ é harmônica em $\Omega$. ■

A importância deste resultado para o nosso problema reside em que obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 1.5.12:** *Se o problema de Dirichlet tem solução, então esta será a função de Perron $U(x)$ a ele associada.*

**Demonstração:** Admitamos que exista uma função $u(x)$ que é solução do problema de Dirichlet (1.1.1). Notamos que $u \in S_f$ e portanto $u \leq U$. Por outro lado, sendo $v \in S_f$, temos que $v - u$ é subharmônica, pelo item (iii) do lema (1.5.6) e na fronteira de $\Omega$, $v - u \leq 0$. Pela propriedade (i) do lema (1.5.6), segue que $v - u \leq 0$ em $\Omega$. Como $v \leq u$ para toda $v \in S_f$, temos $U \leq u$. Logo $u = U$. ■

Notemos, porém, que o teorema não fornece condições existenciais para a solução do problema. Neste sentido, podemos dizer que, dentro do método de Perron, o estudo do comportamento da solução na fronteira do domínio considerado está essencialmente separado do problema de existência. A hipótese de continuidade dos valores de fronteira está intimamente relacionada com as propriedades geométricas da fronteira, o que nos direciona ao estudo de função barreira.

**Definição 1.5.13:** Seja $\xi$ um ponto de $\Omega$. Uma função $w = w_\xi \in C^0(\overline{\Omega})$ é chamada uma *barreira em $\xi$ relativa a* $\Omega$ se:

(a) $w$ é superharmônica em $\Omega$;

(b) $w > 0$ em $\overline{\Omega} - \xi$ ; $w(\xi) = 0$.

É fundamental percebermos o caráter local da definição de função barreira. Especificamente, definimos $w$ como sendo uma *barreira local* em $\xi \in \partial\Omega$ se existe uma vizinhança $V$ de $\xi$ tal que $w$ satisfaz a definição acima em $\Omega \cap V$. Por exemplo, uma barreira em $\xi$ relativa a $\Omega$ pode ser definida como se segue: considere $B$ uma bola tal que $\xi \in B \subset\subset V$ e $m := \inf_{V-B} w > 0$. A função

$$\overline{w}(x) = \begin{cases} \min(m, w(x)), & x \in \overline{\Omega} \cap B \\ m, & x \in \overline{\Omega} - B \end{cases} \tag{1.5.10}$$

é uma barreira em $\xi$ relativa a $\Omega$.

De fato, $\overline{w}$ é contínua em $\overline{\Omega}$ e é superharmônica em $\Omega$ pela propriedade (vii) de funções subharmônicas. A propriedade (b) é imediata.

**Definição 1.5.14:** Um ponto $\xi \in \partial\Omega$ será dito *regular*, com respeito ao Laplaciano, se existe uma barreira neste ponto.

O vínculo entre função barreira e o comportamento das soluções na fronteira do domínio está contido no resultado a seguir.

**Teorema 1.5.15:** *Seja $u$ uma função harmônica definida em $\Omega$ pelo método de Perron (1.5.9) . Se $\xi$ é um ponto regular de $\Omega$ e $\varphi$ é contínua em $\xi$, então*

$$u(x) \longrightarrow \varphi(\xi) \quad \textit{quando} \quad x \longrightarrow \xi \ .$$

**Demonstração:**

Sejam $\epsilon > 0$ e $M = \sup|\varphi|$. Como $\xi$ é um ponto regular, existe uma barreira $w$ em $\xi$, e como $\varphi$ é contínua em $\xi$, existem $\delta > 0$ e $k$ tal que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon \ \text{ se } \ |x - \xi| < \delta$$

e

$$k\, w(x) \geq 2M \ \text{ se } \ |x - \xi| \geq \delta \ .$$

Temos que

$$\varphi(\xi) + \epsilon + k\,w$$

é uma superfunção relativa a $\varphi$ e

$$\varphi(\xi) - \epsilon - k\,w$$

é uma subfunção relativa a $\varphi$.

Decorre da definição de $u$ e do fato de que qualquer superfunção domina qualquer subfunção, que

$$\varphi(\xi) - \epsilon - k\,w(x) \leq u(x) \leq \varphi(\xi) + \epsilon + k\,w(x)$$

em $\Omega$, ou ainda

$$|u(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon + k\,w(x)\ .$$

Como $w(x) \to 0$ com $x \to \xi$, obtemos $u(x) \to \varphi(\xi)$ com $x \to \xi$. ∎

Imediatamente obtemos um resultado crucial para os nossos estudos:

**Teorema 1.5.16:** *O problema clássico de Dirichlet (1.1.1) em um domínio limitado é solúvel para funções de fronteira contínuas arbitrárias se, e somente se, os pontos de fronteira são todos regulares.*

**Demonstração:** Suponhamos que os valores de fronteira $\varphi$ são contínuos e a fronteira $\partial\Omega$ consiste de pontos regulares, então o teorema (1.5.12) garante que a função harmônica $U$ dada pelo método de Perron é solução do problema de Dirichlet (1.1.1).

Reciprocamente, suponhamos que o problema (1.1.1) é solúvel para funções de fronteira contínuas arbitrárias. Seja $\xi \in \partial\Omega$. Então a função

$$\varphi(x) = |x - \xi|$$

é contínua em $\partial\Omega$ e a função harmônica resolvendo o problema de Dirichlet em $\Omega$ com dados de fronteira iguais a $\varphi$ é uma barreira em $\xi$. Logo, $\xi$ é regular e, portanto, $\partial\Omega$ é regular.

■

A relevância deste último resultado se traduz justamente pelo caráter existencial do mesmo, assegurando a existência de solução clássica do problema de Dirichlet em domínios de fronteira regular.

## 1.6 Comentários sobre os métodos

Nesta seção encontram-se alguns comentários sobre os vários métodos estudados anteriormente e a maneira pela qual garantem a existência da solução fraca para o problema de Dirichlet.

Pode-se perceber que, tanto o método de Weyl como os teoremas de Stampacchia e Lax-Milgram, exploram fortemente o aspecto geométrico dos espaços de Hilbert para tratar os problemas (1.1.1) e (1.1.3) respectivamente, mostrando a importância dos espaços de Sobolev dentro da teoria de equações diferencias parciais. Há, no entanto, uma diferença marcante entre os dois procedimentos, enquanto o método de Weyl restringe-se à dimensão três, os teoremas de Stampacchia e Lax-Milgram apresentam um caráter bastante geral, apresentando-se como ferramenta útil para tratar problemas elíticos mais elaborados, inclusive de ordem superior[6].

O método de Dirichlet apresentado na seção 1.4 difere muito do inicialmente proposto por Dirichlet. Foi preciso quase meio século para encontrar na Análise rigor matemático suficiente que justificasse as idéias de Dirichlet

[6]Exemplos podem ser encontrados em [1, 7, 22, 23].

e devemos a Hilbert tal mérito. Os procedimentos em 1.4.1 e 1.4.2 têm em comum a idéia básica de minimização de um funcional e diferem na maneira pela qual buscam a existência do ínfimo. Em 1.4.1 os argumentos baseam-se em propriedades estruturais dos espaços de Banach, enquanto que em 1.4.2 é construída uma seqüência minimizante pensando-se tão somente no conceito de ínfimo. Assim sendo, 1.4.1 apresenta a vantagem de poder tratar problemas mais gerais, como o citado problema do p-Laplaciano, perdendo a regularidade já obtida através da harmonicidade, como demonstrado em 1.4.35.

Finalmente, o método de Perron discutido na seção 1.5 é extremamente diferente dos anteriores, pois permite obter diretamente uma solução clássica do problema de Dirichlet (1.1.1) para regiões cujos pontos de fronteira são regulares. Naturalmente, deveria apresentar restrições por ser um resultado tão forte, e podemos encontrá-las na dificuldade para se decidir se um ponto da fronteira é ou não regular. Neste sentido as condições (suficientes) da esfera de Poincaré e do cone de Zaremba tornam-se valiosas, podemos encontrar essas condições em [10].

# Capítulo 2

# Regularidade das soluções fracas e exemplos

## 2.1 Regularidade da solução obtida em 1.4.1

Consideremos o problema (1.1.3) e suponhamos que a função $\phi$ seja Hölder-contínua. Mostremos que a solução $u_0$ obtida em (1.4.1) possui derivadas segundas contínuas.

A solução fundamental[1] da equação de Laplace (1.1.5) é a função

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\omega_n}|x|^{2-n}, & \text{para } n \geq 3; \\ \frac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{para } n = 2, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

onde $\omega_n$ é a área da fronteira da bola unitária de $\mathbb{R}^n$. Se $\phi \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ então $u = \phi * G \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = \phi$. A função $u$ é definida por

$$u(x) = \int_\Omega G(x-y)\phi(y) \ dy. \tag{2.1.2}$$

Basta mostrar que $u_0 \in C^2(\Omega')$ para abertos $\Omega'$ tais que $\overline{\Omega}' \subset \Omega$. Seja $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\psi = 1$ em $\Omega'$. Então $-\psi\phi \in C_0^\alpha(\Omega)$, e pelo resultado

[1] Veja secção 2.3.1 a seguir.

anterior obtemos que

$$\Psi = (-\psi\phi) * G \in C^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \Delta\Psi = -\phi \quad \text{em } \Omega'.$$

Conseqüentemente, usando integração por partes, temos

$$\int \nabla(u_0 - \Psi) \cdot \nabla\nu = 0 \qquad \forall \nu \in C_0^1(\Omega')$$

de onde se segue, usando o Lema de Weyl (1.2.5), que $u_0 - \Psi \in C^\infty(\Omega')$. Como $\Psi \in C^2(\Omega')$, obtemos finalmente que $u_0 \in C^2(\Omega')$, como queríamos provar.

## 2.2 Regularidade da solução obtida em 1.4.2

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e consideremos $u$ uma solução fraca do problema (1.1.1) obtida pelo método de Dirichlet. Vamos mostrar que a solução $u \in H^1(\Omega)$ é de fato uma solução clássica, como foi definido em (1.1.2), no caso de $n = 2$.

**Teorema 2.2.1:** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma região do plano que satisfaz a seguinte propriedade, para cada $x^0 \in \partial\Omega$ existe um número $R > 0$ tal que todo círculo de raio menor que $R$ e centrado em $x^0$ intercepta a fronteira $\partial\Omega$. Então, dada $\varphi(x)$ contínua em $\overline{\Omega}$ e pertencente a $H^1(\Omega)$, a função $u(x)$, obtida pelo processo das médias descrito na seção 1.4, é tal que*

$$u(x) \to \varphi(x^0) \quad \textit{quando} \quad x \to x^0 \, .$$

**Demonstração:**

Seja P qualquer ponto de $\Omega$ cuja distância, 2h, da fronteira é menor que $\frac{2R}{3}$, seja $\Delta$ o disco de raio h, com centro em P, seja Q um ponto da fronteira tal que $\overline{PQ} = 2h$ (ao menos um tal ponto existe, por hipótese), e seja S o conjunto consistindo de todos os pontos de $\Omega$ cuja distância a Q é menor que 3h. Então S é aberto, contém $\Delta$, e cada círculo $C_k$ de raio k menor que 3h com centro em Q, pertence parcialmente, mas não inteiramente, a S. Denotemos a parte de $C_k$ pertencente a $S$ como $\Gamma_k$; $\Gamma_k$ consiste de um ou mais, talvez infinitos, arcos circulares cujos pontos finais são pontos da fronteira de $\Omega$.

Nós mostraremos que, para qualquer função $\varrho$ pertencente a $H_0^1$, a desigualdade

$$(\int\int_{\Delta} \varrho dxdy)^2 \leq 36\pi^3 h^4 \int\int_{S} (\varrho_x^2 + \varrho_y^2) dxdy \qquad (2.2.2)$$

é verificada. Aceitando tal fato momentaneamente, notemos que $\int\int_S(\varrho_x^2 + \varrho_y^2)dxdy$ cresce quando S é substituído pelo conjunto de pontos de $\Omega$ cuja distância da fronteira é menor que 3h, e que a nova integral obtida aproxima-se de zero com h (isto é apenas uma reformulação de que $\varrho \in H_0^1$), nós concluímos que $(\pi h^2)^{-1} \int\int_\Delta \varrho dxdy$ aproxima-se de zero com P aproximando-se da fronteira.

Substituindo-se $\varrho$ por $u - \varphi$ (relembrando que $u - \varphi \in H_0^1(\Omega)$, nós concluímos que, com P se aproximando da fronteira,

$$\frac{1}{\pi h^2} \int\int_{\Delta} u dxdy - \varphi(P) - \frac{1}{\pi h^2} \int\int_{\Delta} [\varphi - \varphi(P)] dxdy \quad \longrightarrow 0 \qquad (2.2.3)$$

Pelo teorema do valor médio, o primeiro membro da esquerda é igual a u(P). O último termo é dominado por

$$\max_{P' \in \Delta} |\varphi(P') - \varphi(P)|$$

que, por sua vez, é dominado por

$$\max |\varphi(P') - \varphi(P)| \quad (P \in \Omega, P' \in \Omega, \overline{PP'} < h) \; .$$

Observe que para isso estamos utilizando o fato de que $\varphi$ pode ser extendida continuamente para $\overline{\Omega}$, pois isto garante a continuidade uniforme de $\varphi$ em $\Omega$ e, conseqüentemente, a existência do máximo acima. Como este máximo precisa se aproximar de zero com h (novamente pela continuidade uniforme), obtemos que $u - \varphi$ aproxima-se de zero na fronteira, como queríamos provar.

Resta estabelecer (2.2.2).

Pela desigualdade de Schwartz, o lado esquerdo de (2.2.2) é dominado por

$$(\int\int_{\Delta} 1^2 dxdy)(\int\int_{\Delta} \varrho^2 dxdy)$$

e, portanto, por $\pi h^2 \int\int_S \varrho^2 dxdy$. Assim, é suficiente provar que

$$\int\int_S \varrho^2 dxdy \leq 36\pi^2 h^2 \int\int_S (\varrho_x^2 + \varrho_y^2) dxdy \tag{2.2.4}$$

Consideremos as coordenadas polares, r e $\theta$ e introduzamos a origem em Q, então $\varrho$ é expressa em qualquer ponto T de S na forma

$$\varrho(T) = \int \varrho_\theta d\theta \tag{2.2.5}$$

onde a integração é tomada ao longo do arco de $\Gamma_r$, cujos pontos finais são T e um ponto da fronteira de $\Omega$. (Aqui, r=$\overline{QT}$, e estamos usando o fato de que $\varrho \in H_0^1(\Omega)$.) Aplicando mais uma vez a desigualdade de Schwartz, obtemos,

$$\varrho^2(T) \leq (\int_{\Gamma_r} 1^2 d\theta)(\int_{\Gamma_r} \varrho_\theta^2 d\theta) \leq 2\pi \int_{\Gamma_r} \varrho_\theta^2 d\theta \tag{2.2.6}$$

Como (2.2.6) é válida para todos os pontos $T$ em $\Gamma_r$, obtemos, integrando ambos os lados

$$\int_{\Gamma_r} \varrho^2(T) \ \ d\theta \leq (2\pi)^2 \int_{\Gamma_r} \varrho_\theta^2 \ \ d\theta$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $rdr$ e integrando de 0 à $3h$, obtemos

$$\int\int_S \varrho^2 \ \ dxdy \leq (2\pi)^2 \int\int_S \varrho_\theta^2 \ \ dxdy \tag{2.2.7}$$

O lado direito de (2.2.7) aumenta quando a integral é multiplicada por $(\frac{3h}{r})^2$, pois $r < 3h$ em todo o $S$. Assim,

$$\int\int_S \varrho^2 \quad dxdy \leq 36\pi^2 h^2 \int\int_S (r^{-1}\varrho_\theta)^2 \quad dxdy \tag{2.2.8}$$

Finalmente, notamos que

$$(r^{-1}\varrho_\theta)^2 < (r^{-1}\varrho_\theta)^2 + (\varrho_r)^2 = \varrho_x^2 + \varrho_y^2 \tag{2.2.9}$$

e temos que (2.2.7) implica (2.2.2), a prova está completa.

■

## 2.3 Solução em alguns casos especiais

### 2.3.1 Solução Fundamental para o Laplaciano

Uma das principais características da equação de Laplace é a simetria esférica. A equação é preservada sobre rotações ao redor de um ponto $\xi$, isto é, sobre substituições ortogonais lineares de $x - \xi$. Isto torna razoável que existam soluções $v(x)$ para esta equação que são invariantes sobre rotações ao redor de $\xi$. Tais soluções são da forma

$$v = \psi(r) \ , \tag{2.3.1}$$

onde

$$r = |x - \xi| = \sqrt{\sum_i (x_i - \xi_i)^2} \tag{2.3.2}$$

representa a distância euclideana entre $x$ e $\xi$.

Derivando (2.3.1) e usando a regra da cadeia encontramos que, em dimensão $n$, $\psi$ satisfaz a equação diferencial ordinária

$$\Delta v = \psi''(r) + \frac{n-1}{r}\psi(r) = 0 \tag{2.3.3}$$

cuja solução é dada por

$$\psi'(r) = Cr^{1-n} \tag{2.3.4}$$

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{Cr^{2-n}}{2-n} & \text{se } n > 2 \\ C\log r & \text{se } n = 2 \end{cases} \tag{2.3.5}$$

onde $C$ é uma constante.

A função $v(x) = \psi(r)$ satisfaz a equação de Laplace (0.1.1) para $r > 0$, isto é, para $x \neq \xi$, mas tende a infinito para $x \to \xi$.

Escolhendo $C = \frac{1}{\omega_n}$,onde $\omega_n$ é a área da bola unitária em $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{r^{2-n}}{(2-n)\omega_n} & \text{para } n > 2 \\ \frac{\log r}{2\pi} & \text{para } n = 2 \end{cases} \tag{2.3.6}$$

que é a *solução fundamental* para o operador $\Delta$.

**Observação:** Usando a teoria de distribuições, podemos ver que $v$ satisfaz à equação : $\Delta v = \delta_\xi$. Aqui $\delta_\xi$ é a distribuição $\delta$ de Dirac, isto é, $\langle\delta(\xi), \varphi(x)\rangle = \varphi(\xi)$ , para funções "testes" $\varphi(x)$.

A solução fundamental é usada para compor novas funções harmônicas, veja, por exemplo, [12].

### 2.3.2 Solução do problema de Dirichlet para o disco

Usando coordenadas polares, o problema de Dirichlet para a equação de Laplace pode ser formulado da seguinte maneira: dada uma função contínua $f(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, com $f(0) = f(2\pi)$, determine-se $v(r, \theta)$ para $0 \leq r \leq \rho$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tal que

1. $v$ seja contínua e $v(r, 0) = v(r, 2\pi)$,

2. $v$ seja de classe $C^2$ em $0 < r < \rho$ e satisfaça a equação

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0 \ , \tag{2.3.7}$$

3. $v(\rho,\theta) = f(\theta)$.

Vamos buscar soluções na forma $v(r,\theta) = A(r)B(\theta)$, um método conhecido como de separação de variáveis. Substituindo em (2.3.7), obtemos duas equações diferenciais ordinárias

$$r^2A'' + rA' - \sigma A = 0 \tag{2.3.8}$$

$$B'' + \sigma B = 0 \ , \tag{2.3.9}$$

onde $\sigma$ é um parâmetro independente de $\rho$ e $\theta$.

Como $B$ deve ser uma função periódica de período $2\pi$, pois contém toda a dependência de $v$ com respeito a $\theta$, conclui-se que $\sigma = j^2$, $j \in \mathrm{N}$, e que a solução geral de (2.3.9) é dada por

$$B_j(\theta) = a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta \ . \tag{2.3.10}$$

A equação (2.3.8) tem, para cada j, um par de soluções linearmente independentes dadas por

$$1 \ \text{ e } \ \log r \ , \ \text{ se } \ j = 0 \ ,$$

$$r^j \ \text{ e } \ r^{-j} \ , \ \text{ se } \ j \geq 1 \ .$$

As soluções $\log r$ e $r^{-j}$ não podem ser usadas, pois o domínio onde buscamos a solução contém a origem. Logo $A_j(r) = r^j$, para $j \geq 0$.

Concluímos que para cada $j \geq 0$, a função com $a_j$ e $b_j$ constantes quaisquer, satisfaz (i) e (ii). A condição (iii) especifica estas constantes. Vejamos de que modo.

Como queremos $v(\rho,\theta) = f(\theta)$ temos que

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \rho^j \cos j\theta + b_j \rho^j \sin j\theta \tag{2.3.11}$$

o que exige

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta \\
a_j &= \frac{1}{\pi\rho^j}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos j\theta\, d\theta \ \text{ e} \qquad (2.3.12)\\
b_j &= \frac{1}{\pi\rho^j}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin j\theta\, d\theta
\end{aligned}
$$

**Teorema 2.3.13:** *Seja $f(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, uma função contínua com $f(0) = f(2\pi)$. Então*

$$v(r,\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} r^j(a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta)\ , \qquad (2.3.14)$$

*com os coeficientes $a_j$ e $b_j$ definidos pelas equações (2.3.12), é uma função harmônica no disco $D_\rho$ e*

$$v(r,\theta) \ \rightarrow\ f(\theta_0) \ \ \textit{quando} \ \ (r,\theta) \ \rightarrow\ (\rho,\theta_0)\ .$$

A demonstração deste teorema será feita através de vários lemas.

**Lema 2.3.15:** *Nas condições do teorema (2.3.13), a expressão (2.3.14) define uma função harmônica em $D_\rho$.*

**Demonstração:**

Esta demostração será feita em alguns passos:

(1) A série em (2.3.14) converge, quando $r < \rho$. De fato, de (2.3.12) concluímos que

$$|a_j| \leq K\rho^{-j} \quad \text{e} \quad |b_j| \leq K\rho^{-j}\ ,$$

onde $K$ é uma constante independente de $j$. Portanto a série em (2.3.14) é majorada por

$$2K\sum_{j=0}^{\infty}\left(\tfrac{r}{\rho}\right)^j\ ,$$

que converge se $r < \rho$.

(2) A série em (2.3.14) define uma função contínua no disco $D_\rho$. Para tal, basta mostrar que a série converge uniformemente nos discos $r \leq r_0$, para todo $r_0 < \rho$. Mas isso do teste M de Weierstrass, pois a série em (2.3.14) é majorada (uniformemente) pela série numérica convergente

$$2K\sum_{j=0}^{\infty}\left(\tfrac{r_0}{\rho}\right)^n ,$$

no disco $r \leq r_0$.

(3) A série em (2.3.14) define uma função de classe $C^2$ em $D_\rho$. Para isso basta mostrar que as séries obtidas de (2.3.14) por derivação termo a termo convergem uniformemente em discos $r \leq r_0$, para todo $r_0 < \rho$. Este fato decorre de que as séries derivadas são majoradas (uniformemente), no disco $r \leq r_0$, por séries numéricas da forma

$$\sum_{0}^{\infty} j(\frac{r_0}{\rho})^j \quad , \quad \sum_{0}^{\infty} j^2(\frac{r_0}{\rho})^j \tag{2.3.16}$$

as quais são convergentes.

(4) A função $v(r,\theta)$ definida em (2.3.14) é harmônica. De fato, como as derivadas de $v$ podem ser obtidas por derivação da série termo a termo, essa afirmação se segue lembrando que cada termo da série é uma função harmônica. ∎

**Lema 2.3.17:** *A função $v(r,\theta)$ definida em (2.3.14) para $r < \rho$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, pode ser expressa por*

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta-\alpha)} f(\alpha)d\alpha \ , \tag{2.3.18}$$

*conhecida como fórmula de Poisson.*

**Demonstração:**

Usando as expressões dos coeficientes, dadas em (2.3.12) e observando que a série converge uniformemente em $\alpha$,

$$v(r,\theta) = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\tfrac{r}{\rho}\right)^j \cos j(\theta - \alpha) \right] f(\alpha)\, d\alpha \ .$$

Para calcular a soma da série acima, notemos que

$$\sum_1^{\infty} \lambda^j \cos j\theta = Re \sum_1^{\infty} \lambda^j e^{i\, j\theta}$$

e que

$$\sum_1^{\infty} \lambda^j e^{i\, j\theta} = \frac{\lambda\, e^{i\theta}}{1 - \lambda\, e^{i\theta}} \quad \text{para} \quad |\lambda| < 1 \ .$$

Tomando a parte real e substituindo na equação para $v(r,\theta)$ mais acima, fica demonstrada a fórmula de Poisson. ■

**Lema 2.3.19:** *Suponha que, além das hipóteses do teorema (2.3.13), $f$ seja de classe $C^1$. Então a série em (2.3.14) define uma função $v(r,\theta)$ contínua em $\overline{D_\rho}$ e $v(\rho,\theta) = f(\theta)$.*

**Demonstração:**

Basta mostrar que a série (2.3.14) converge uniformemente em $\overline{D_\rho}$. A integração por partes, em (2.3.12) conduz a

$$a_j = -\frac{1}{j\rho^j}\beta_j \ \text{ e } \ b_j = \frac{1}{j\rho^j}\alpha_j \ ,$$

onde $\beta_j$ e $\alpha_j$ são os coeficientes da série de Fourier de $f'(\theta)$. Logo a série (2.3.14) é majorada, em $\overline{D_\rho}$, pela série numérica

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}(|\alpha_j| + |\beta_j|)$$

que é convergente, por ser majorada por

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(|\alpha_j|^2+|\beta_j|^2)\ ,$$

que finalmente é convergente, esta última pela desigualdade de Bessel.

Para garantir a convergência da série (2.3.14) em $\overline{D_\rho}$, basta aplicar o teste M de Weierstrass. ■

**Lema 2.3.20:** *Para $r<\rho$ e $0\leq\theta\leq 2\pi$ tem-se*

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\theta-\alpha}d\alpha=1 \qquad (2.3.21)$$

**Demonstração:**

Considere o problema de Dirichlet no disco com $f(\theta)=1$. Pela unicidade deste problema, provada na seção 1.1, segue-se que a única solução deste problema é $v(r,\theta)\equiv 1$. Por outro lado, $v(r,\theta)$ é também dada pela série (2.3.14), em $\overline{D_\rho}$, pois o lema (2.3.19) pode ser aplicado a dados de fronteira constantes. E, no disco $D_\rho$, $v(r,\theta)$ é também dada pela fórmula de Poisson. Daí se segue (2.3.21). ■

**Lema 2.3.22:** *Suponha as hipóteses do teorema (2.3.13) e seja $\theta_0\in[0,2\pi]$. Então $v(r,\theta)$ definida em (2.3.18) é tal que*

$$v(r,\theta)\to f(\theta_0)\ \textit{quando}\ (r,\theta)\to(\rho,\theta_0).$$

**Demonstração:**

Usando (2.3.18) e (2.3.21), temos

$$v(r,\theta) - f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos\theta - \alpha}[f(\alpha) - f(\theta_0)]d\alpha.$$

Mostremos que, dado $\epsilon > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se $|\rho - r| < \delta$ e $|\theta - \theta_0| < \delta$ então $|v_1(r,\theta) - f(\theta_0)| < \epsilon$. Para um $\mu > 0$, a ser fixado posteriormente, decompomos a integral em acima na soma

$$I_1 + I_2 = \int_{|\alpha-\theta_0|\leq\mu} + \int_{|\alpha-\theta_0|>\mu} .$$

A primeira,integral pode ser majorada assim

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\alpha-\theta_0|\leq\mu} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos\theta - \alpha}|f(\alpha) - f(\theta_0)|d\alpha \leq \omega(\mu) .$$

onde $\omega(\cdot)$ é o módulo da continuidade de f, e onde usamos o lema (2.3.20). Para majorar a segunda integral, tomamos $\delta < \frac{\mu}{2}$ e então, $|\theta - \alpha| > \frac{\mu}{2}$ se $|\theta - \theta_0| < \delta$, para os $\alpha$ tais que $|\alpha - \theta_0| > \mu$. Chamando de $M$ o máximo de $|f(\theta)|$, obtemos

$$|I_2| \leq 2M\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos\frac{\mu}{2}} \leq 2M\frac{2\rho(\rho - r)}{\rho - r\cos\frac{\mu}{2}}^2$$

e, se $r > \frac{\rho}{2}$, temos

$$|I_2| \leq \frac{4M\rho(\rho - r)}{r^2(1-\cos\frac{\mu}{2})^2} \leq \frac{16M}{\rho(1-\cos\frac{\mu}{2})^2}(\rho - r) \quad .$$

Para concluir a demonstração , tomamos $\mu$ tal que $\omega(\mu) < \frac{\epsilon}{2}$, a seguir, com $\mu$ fixado, tomamos $\delta$ tal que $\delta < \frac{\mu}{2}$ e $\frac{16M}{\rho(1-\cos\frac{\mu}{2})^2}(\rho - r) < \frac{\epsilon}{2}$. Assim, $|I_1|$ e $|I_2|$ são menores que $\frac{\epsilon}{2}$. ■

# Apêndice A

## A.1 Os espaços $H^k$

Nesta seção vamos estabelecer algumas propriedades dos espaços de Sobolev introduzidos na seção 1 do capítulo 1. Passemos assim a algumas definições.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio, não vazio, consideremos o espaço

$$\begin{aligned} C_0^\infty(\Omega) &= \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\text{, tal que } \varphi \in C^\infty(\Omega) \\ &\qquad \text{e suporte de } \varphi \text{ compactamente contido em } \Omega\}. \end{aligned}$$

Vamos introduzir em $C_0^\infty(\Omega)$ o seguinte conceito de convergência.

**Definição A.1.1:** Dizemos que uma seqüência $\{\varphi\}_{n \in \mathbb{N}} \in C_0^\infty(\Omega)$ *converge* para uma função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se:

1. $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K \subset\subset \Omega$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, onde $K$ é um conjunto compacto fixo contido em $\Omega$.

2. $D^\alpha \varphi_n$ converge uniformemente para $D^\alpha \varphi$ em $K$ para todo multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

$C_0^\infty\ (\Omega)$ com esta noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

**Definição A.1.2:** O *espaço das distribuições* sobre $\Omega$ é o espaço vetorial topológico $\mathcal{D}'(\Omega)$ dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto é, para toda $F \in \mathcal{D}'\ (\Omega)$ , $\varphi_1,\ \varphi_2\ \in \mathcal{D}\ (\Omega)$ e $\lambda\ \in \mathbb{C}$ , temos:

1. $F(\varphi_1\ +\ \varphi_2)\ =\ F(\varphi_1)\ +\ F(\varphi_2)$
2. $F(\lambda\varphi_1)\ =\ \lambda\ F(\varphi_1)$
3. Se $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}$ , então $F(\varphi_n)\ \to\ F(\varphi)$.

**Exemplo A.1.3:** Seja $L^1_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções integráveis sobre compactos contidos em $\Omega$ . Tomemos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Podemos associar a $f$ uma distribuição , $T_f \in \mathcal{D}'$, dada por:

$$T_f\Omega := \int_\Omega \varphi(x)f(x)\ dx\ .$$

**Definição A.1.4:** Seja $T \in \mathcal{D}'$, defininos

$$(D_{x_i}T)(\varphi) :=\ -T(D_{x_i}\varphi)\ .$$

Em geral, se $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ , e $\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ , $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

$$(D^\alpha T)(\varphi)\ =\ (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi)\ .$$

**Exemplo A.1.5:** Seja $\Omega = \mathbb{R}$ e definamos a função de Heaviside,

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se}\ \ x \geq 0; \\ 0 & \text{se}\ \ x\ <\ 0. \end{cases}$$

Então $(DH)(\varphi) = \delta_0(\varphi) = \varphi(0)$ onde $\delta_0$ representa o Delta de Dirac em zero.

**Definição A.1.6:** Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, domínio, não vazio. Definimos para $k \in \mathbb{N}$,

$$H^k(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ , para todo } \mid \alpha \mid \leq k\}$$

onde $D^\alpha$ indica derivadas no sentido de distribuições.

Em $H^k(\Omega)$, podemos introduzir o produto interno seguinte.

Dados $u, v \in H^k(\Omega)$,

$$(u,v)_k := \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

cuja norma associada é

$$\| u \|_k = ( \sum_{|\alpha|\leq k} \| D^\alpha u \|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

**Lema A.1.7:** $(H^k(\Omega) \; ; \; (\cdot \, , \, \cdot)_k)$ *é um espaço de Hilbert.*

**Definição A.1.8:** Definimos

$$H_0^k(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_k} .$$

**Lema A.1.9(Desigualdade de Poincaré):** *Suponhamos que $\Omega$ é um aberto limitado. Então existe uma constante $C$ (dependente de $\Omega$) tal que:*

$$||u||_{L^2} \leq C||\nabla u||_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) . \qquad \text{(A.1.10)}$$

**Demonstração:** Veja [1], pp. 174. ∎

**Teorema A.1.11:** *Suponhamos que $\Omega$ seja de classe $C^1$. Seja $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *$u = 0$ sobre $\partial\Omega$;*

2. *$u \in H_0^1(\Omega)$.*

**Demonstração:** Veja [1], pp. 172. ∎

**Observação:** Usando a noção de "traço" de uma distribuição , conceito que não definiremos aqui, é possível dizer que se $f \in H_0^k(\Omega)$ então $D^\alpha f = 0$ em $\partial\Omega$ para $|\,\alpha\,| < k$ .

A seguir vamos enunciar um lema que nos foi útil na secção 4 do capítulo 1.

**Lema A.1.12:** *Seja $(u_k)$ uma seqüência de Cauchy em $H^1$. Suponhamos que existe $u \in C^1$ tal que para toda subregião $\Omega'$ de $\Omega$ se tenha*

$$\int_{\Omega'} (u_k - u)v \quad dx \to 0.$$

*para qualquer $v \in L^2$. Então $u \in H^1$ e $u_k$ tende para $u$ na norma de $H^1$.*

**Demonstração:** Veja [12], pp. 149. ∎

## A.2 Teorema da Divergência

**Teorema A.2.1(Teorema da Divergência):** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega \in C^1$ e denotemos por $\nu$ a normal unitária exterior a $\partial\Omega$. Para todo campo vetorial $\mathbf{w} \in C^1(\overline{\Omega})$, temos que:*

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{w}\ dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \nu\ ds.$$

*onde ds indica o (n-1)-dimensional elemento de área em $\partial\Omega$.*

**Demonstração:** Veja [12]. ∎

**Observação:** Formulações mais gerais do Teorema da Divergência podem ser encontradas em [12].

Em particular, se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ obtemos, fazendo $\mathbf{w} = \nabla u$:

$$\int_\Omega \Delta u \mathrm{dx} = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu \mathrm{ds} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{ds}\ . \tag{A.2.2}$$

Como conseqüência desta identidade, obtemos a propriedade do valor médio para funções harmônicas, subharmônicas e hiperharmônicas .

**Teorema A.2.3:** *Seja $u \in C^2(\Omega)$ satisfazendo $\Delta u = 0(\leq 0, \geq 0)$ em $\Omega$. Então para qualquer bola $B \equiv B_R(y) \subset\subset \Omega$ temos:*

$$u(y) = (\geq, \leq)\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u\, ds\ , \tag{A.2.4}$$

$$u(y) = (\geq, \leq)\frac{1}{\omega_n R^n} \int_B u\, dx\ . \tag{A.2.5}$$

**Demonstração:** Veja [15], pp. 14. ∎

Para funções harmônicas, o teorema afirma que o valor da função no centro da bola $B$ é igual ao valor médio sobre a superfície da bola ou sobre a própria bola. Este resultado, de fato, caracteriza as funções harmônicas.

**Teorema A.2.6 (Propriedade do Valor Médio):** *Uma função $u \in C^0(\Omega)$ é harmônica se, e somente se, para qualquer bola $B \equiv B_R(y) \subset\subset \Omega$ ela satisfaz:*

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u ds \, . \tag{A.2.7}$$

**Demonstração:** Veja [15] , pp. 21. ∎

Para finalizar, enunciaremos o Teorema de Green utilizado na seção 4 do capítulo 1.

**Teorema A.2.8 (Teorema de Green):** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $u_1, u_2$ funções pertencentes a $C^1(\overline{\Omega})$. Então:*

$$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} u \; ds = \int_{\Omega} (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) \; dx \; ,$$

$$\int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}) \; ds = \int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) \; dx,$$

*onde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ é a derivada direcional na direção da normal unitária exterior $\nu$.*

**Demonstração:** Veja [13], pp. 89. ∎

# Bibliografia


[1] Brézis, H. *Analyse Fonctionelle - Théorie et Applications.* Masson, (1983).

[2] Courant, R. & Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics.* Interscience, (1953).

[3] Dieudonné, J. *History of Functional Analysis.* North-Holland Mathematics Studies, $2^{nd}$ edition, (1981).

[4] Dugundji, J. *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., (1966).

[5] Dugundji, J. & Granas, A. *Fixed Point Theory.* Warszana, (1982).

[6] Dunford, N. & Schwartz, J.T. *Linear Operators, Part I : General Theory.* Interscience Publishers, Inc., (1958).

[7] Duvaut, G. & Lions, J.L. *Les Inéquations en Mécanique et en Physique.* Dunod, (1972).

[8] Epstein, B. *Partial Diff. Equations, an introduction.* McGraw-Hill Co., (1962).

[9] Figueiredo, D.G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.* Projeto Euclides, IMPA, (1977).

[10] Figueiredo, D.G. O problema da Dirichlet. Atas do Décimo Colóquio Brasileiro de Matemática, vol. 1, pp. 21-68. IMPA, (1978).

[11] Figueiredo, D.G. O Princípio de Dirichlet. Revista Matemática Universitária, SBM, n.1, (1985).

[12] Figueiredo, D.G. *Teoria Clássica do Potencial.* Editora Universidade de Brasília, (1963).

[13] Folland, G.B. *Introduction to Partial Differential Equations.* Princeton University Press, (1976).

[14] Giglioli, A. *Equações Diferenciais Parciais Elíticas.* Décimo Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (1975).

[15] Gilbarg, D. & Trudinger, N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1983).

[16] Kaplan, W. *Cálculo Avançado*, vol.1. Ed. Edgard Blücher Ltda, (1972).

[17] Kellog, O.D. *Foundations of Potential Theory.* Springer-Verlag, (1967).

[18] Lang, S. *Analysis I.* Addison-Wesley Publishing Company,Inc., (1969).

[19] Lima, E. L. *Curso de Análise, vol.2.* Projeto Euclides, IMPA, (1981).

[20] Lima, E. L. *Elementos de Topologia Geral.* Ao Livro Técnico S.A., (1970).

[21] Lions, J.L. & Dautray, R. *Analyse Mathématique et calcul numérique, vol. 2.* Masson, (1987).

[22] Lions, J.L. & Stampacchia, G. Variational Inequalities. Comm. Pure Applied Math., vol. XX, n.3, 493-519, (1967).

[23] Medeiros, L.A. *Tópicos de Equações Diferenciais Parciais.* Notas da Escola de Verão sobre Métodos Numéricos em Mecânica do Contínuo, CBPF.(1978)

[24] Medeiros, L.A. & Miranda, M.M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais.* Notas de aula, (1989).

[25] Stein, E.M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princenton University Press, (1970).

[26] Taylor, A. E. *Introduction to Functional Analysis.* Princeton University Press, (1958).

[27] Ubilla, P.E.L. Alguns resultados de multiplicidade de soluções para equações elíticas quasilineares. Tese de doutoramento, (1992).

[28] Weyl, H. The method of orthogonal projection in potential theory. Duke Math. Journal, pp. 411-444, (1940).