

MÉTODO DA MÉDIA  
E  
APLICAÇÕES

*Arcio*  
Marcia Aparecida Andreazzi Borges

Orientador:

Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro da CAPES e FINEP

outubro de 1977

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

## ÍNDICE

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| INTRODUÇÃO .....                                     | 1  |
| CAPÍTULO 0                                           |    |
| Preliminares Básicos .....                           | 2  |
| CAPÍTULO I                                           |    |
| Perturbações de Sistemas Lineares não Críticos ..... | 16 |
| Alternativa de Fredholm .....                        | 18 |
| Sistemas Fracamente não Lineares .....               | 26 |
| Sistemas mais Gerais .....                           | 33 |
| CAPÍTULO II                                          |    |
| Método da Média .....                                | 38 |
| CAPÍTULO III                                         |    |
| Aplicações do Método da Média .....                  | 47 |
| BIBLIOGRAFIA .....                                   | 70 |

Agradeço:

Ao Prof. Orlando Francisco Lopes por ter proposto o tema do presente trabalho, pela orientação e incentivo.

Aos meus pais, avô, marido, professores e colegas por seus estímulos, dedicação, amor, compreensão e ensinamentos.

À CAPES e à FINEP, que, com seu apoio financeiro, possibilitaram a realização deste trabalho.

A meus pais, avô e Eduardo José

## INTRODUÇÃO

No capítulo 0 serão dadas definições e enunciados de teoremas que serão utilizados nos capítulos subsequentes. Detalhes e demonstrações poderão ser encontrados nas referências.

Desenvolvemos, no capítulo I, a teoria de Perturbações de Sistemas Lineares não críticos passando depois para a Alternativa de Fredholm, Sistemas fracamente não lineares e Sistemas mais gerais.

O Método da Média é desenvolvido no capítulo II.

Esse método é muito eficaz no estudo de diversas questões sobre comportamento assintótico de soluções de equações periódicas e quase-periódicas.

O problema que abordamos neste trabalho é o seguinte: se  $\dot{x} = f(t, x, \epsilon)$  é uma equação diferencial quase-periódica em  $t$  e dependendo de um parâmetro  $\epsilon$ , e se para  $\epsilon = 0$  existe uma família de soluções quase-periódicas, então se pergunta se algum elemento dessa família gera uma família de soluções periódicas dependendo de  $\epsilon$ .

As aplicações desse Método são dadas no capítulo III.

## CAPÍTULO 0

### Preliminares Básicos

Seja  $D$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  cujos elementos são da forma  $(t, x)$  onde  $t$  está em  $\mathbb{R}$  e  $x$  está no  $\mathbb{R}^n$ , e seja  $f$  uma função contínua definida em  $D$  e com valores em  $\mathbb{R}^n$ .

Definição 0.1: Uma equação diferencial é uma relação da forma:

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

ou abreviadamente

$$\dot{x} = f(t, x)$$

onde  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ . Dizemos que  $x$  é uma solução de (1) no intervalo  $I$  contido em  $\mathbb{R}$  se  $x$  é uma função continuamente derivável definida em  $I$ , tal que  $(t, x(t))$  está em  $D$ , para todo  $t$  em  $I$ . e satisfaz (1) em  $I$ .

Suponhamos que seja dado  $(t_0, x_0)$  em  $D$ ; o problema de valores iniciais para a equação (1) consiste em encontrar um intervalo  $I$  contendo  $t_0$  e uma solução  $x$  de (1) satisfazendo  $x(t_0) = x_0$  ou simbolicamente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) \\ (2) \quad x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Se existir um intervalo  $I$  contendo  $t_0$  e um  $x$  satis

fazendo (2), então dizemos que a solução da equação (1) passa pelo ponto  $(t_0, x_0)$ .

**Definição 0.2:** Dizemos que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é localmente Lipschitziana em relação à variável  $x$  se para todo  $(t_0, x_0)$  em  $D$ , existe uma vizinhança  $V(t_0, x_0)$  e uma constante  $K$  tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

se  $(t, x)$  e  $(t, y)$  estão em  $V(t_0, x_0)$ .

Por exemplo, se  $f$  é de classe  $C^1$  na variável  $x$ , então  $f$  é localmente Lipschitziana (pela desigualdade do valor médio).

**Teorema 0.1:** (Teorema de existência e unicidade na forma local): Se  $f$  é uma função contínua em  $D$  e localmente Lipschitziana em relação a  $x$ , então para todo  $(t_0, x_0)$  em  $D$ , existe um intervalo  $I$  contendo  $t_0$  e uma solução  $\psi$  definida em  $I$  com  $\psi(t_0) = x_0$ ; além disso, se  $L$  é um intervalo contendo  $t_0$  e  $\bar{\psi}$  definida em  $L$  é solução satisfazendo  $\bar{\psi}(t_0) = x_0$ , então  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  coincidem em  $I \cap L$ .

**Definição 0.3:** Se  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  são soluções definidas em  $I$  e  $L$ , então  $\bar{\psi}$  é uma continuação de  $\psi$  se  $L$  contém  $I$  e  $\bar{\psi}$  é uma extensão de  $\psi$ .

Dizemos que  $\psi$  é solução maximal se não admitir continuação não trivial. O correspondente intervalo de  $\psi$  é chamado intervalo maximal.

Nas hipóteses do teorema de existência e unicidade os seguintes teoremas valem:

Teorema 0.2: Para todo  $(t_0, x_0)$  em  $D$  existe uma e uma só solução maximal com  $\varphi(t_0) = x_0$ .

Teorema 0.3: Seja  $C$  compacto contido em  $D$  e  $\varphi(t)$  com  $m_1 < t < m_2$  uma solução maximal com intervalo maximal  $(m_1, m_2)$ . Então existem  $t_1$  e  $t_2$  tais que  $(t, \varphi(t)) \notin C$  se  $m_1 < t < t_2$  ou  $t_2 < t < m_2$ .

Corolário 0.1: Se  $D = \mathbb{R}^{n+1}$  e  $\varphi(t)$  é uma solução com intervalo maximal  $(m_1, m_2)$  e  $m_2 < \infty$  então  $\lim_{t \rightarrow m_2} |\varphi(t)| = \infty$ , e se  $\varphi$  é uma solução maximal à direita e é limitada então  $m_2 = +\infty$ .

Se  $f(t, x)$  é contínua num domínio  $D$  e localmente Lipschitziana em relação a  $x$  então o teorema de existência e unicidade implica que para todo  $(t_0, x_0)$  em  $D$  existe uma única solução maximal  $x(t, t_0, x_0)$  com intervalo maximal  $(m_1, m_2)$  e  $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ . Seja  $E \subset \mathbb{R}^{n+2}$  o conjunto formado por  $(t, t_0, x_0)$  onde  $m_1(t_0, x_0) < t < m_2(t_0, x_0)$  e  $(t_0, x_0)$  está em  $D$ .

A trajetória passando por  $(t_0, x_0)$  é o conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^{n+1}$  dado por  $(t, x(t, t_0, x_0))$  para  $t$  variando sobre todos os possíveis valores para os quais  $(t, t_0, x_0)$  pertence a  $E$ . O conjunto  $E$  é chamado domínio de definição de  $x(t, t_0, x_0)$ .

Teorema 0.4: O conjunto  $E$  é aberto,  $x$  uma função contínua em  $E$ ; além disso, se  $f$  depende continuamente ou diferenciaciavelmente de um parâmetro  $\lambda$  em  $\mathbb{R}^p$ , então  $x$  também depende con

tinuamente ou diferenciavelmente de  $\lambda$ .

É importante observar que vale a igualdade

$$x(t, s, x(s, t_0, x_0)) = x(t, t_0, x_0)$$

sempre que ambos os lados estiverem definidos, pois são soluções que coincidem para  $t = s$ .

$$\text{Em particular } x(t_0, s, x(s, t_0, x_0)) = x_0.$$

Definição 0.4: Dizemos que a equação é autônoma se  $f$  não depende de  $t$ , isto é:

$$\dot{x} = f(x).$$

Nesse caso se  $\psi(t)$  é solução e  $c$  é uma constante, então  $\psi(t) = \psi(t+c)$  também é solução e temos que

$$x(t, t_0, x_0) = x(t-t_0, 0, x_0),$$

chamando  $x(t, x_0) = x(t, 0, x_0)$ , vale a igualdade

$$x(t+s, x_0) = x(t, x(s, x_0)).$$

Se  $A(t) = (a_{ij}(t))$  é uma matriz  $n \times n$  cujos elementos são funções contínuas, na reta e  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é função contínua, a equação:

$$\dot{x} = A(t)x$$

é chamada equação linear homogênea, e

$$\dot{x} = A(t)x + h(t)$$

é chamada equação linear não homogênea ou linear forçada.

Teorema 0.5: No caso de um sistema linear (homogêneo ou forçado) o operador solução  $x(t, t_0, x_0)$  está definido em  $R^{n+2} = R \times R \times R^n$ .

Observemos que uma matriz  $X(t)$  satisfaz a equação matricial

$$\dot{X} = A(t)X$$

se e somente se as colunas de  $X$  satisfazem

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Teorema de Liouville 0.6: Se  $X$  satisfaz  $\dot{X} = A(t)X$ , então  $\det X(t) = \det X(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{tr } A(s) ds$ .

Em particular  $\det X(t)$  ou é nulo ou é sempre diferente de zero.

Corolário 0.2: Se  $x_1, \dots, x_n$  são soluções de  $\dot{x} = A(t)x$ , então ou os vetores  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  são linearmente independentes para todo  $t$ , ou linearmente dependentes para todo  $t$ .

Definição 0.5: Se  $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$  e  $X(t)$  é inversível (para o que basta ser inversível para algum  $t_0$ ), então  $X(t)$  é uma matriz fundamental.

Aqui devemos observar que se  $X(t)$  é uma matriz fundamental e  $\det C \neq 0$  então  $Y(t) = X(t).C$  também é uma matriz fundamental, e reciprocamente se  $X(t)$  e  $Y(t)$  são fundamentais então  $\exists C$  cujo  $\det C \neq 0$  e tal que  $X(t) = Y(t).C$ .

Definição 0.6: Matriz Principal é a matriz  $X$  tal que  $X(t, t_0)$  é solução e  $X(t_0, t_0) = I$ . Se  $Y(t)$  é uma matriz fundamental qualquer, então:

$$X(t, t_0) = Y(t) \cdot Y^{-1}(t_0).$$

Teorema 0.7: Vale a seguinte igualdade

$$X(t, s) = X(t, r) \cdot X(r, s)$$

para todo  $t, r, s$ .

Usando a matriz principal, a solução geral do sistema linear não homogêneo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + h(t)$$

é dada por:

$$x(t, t_0, x_0) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, s) \cdot h(s) ds.$$

Uma classe importante de sistemas lineares, é aquela em que a matriz  $A$  é constante.

Consideremos a equação homogênea

$$\dot{x} = Ax \quad (I)$$

e a equação não homogênea

$$\dot{x} = Ax + h(t) \quad (II)$$

onde  $A$  é uma matriz constante real ou complexa  $n \times n$  e  $h$  é uma função contínua  $n$ -vetorial real ou complexa sobre  $(-\infty, \infty)$ .

Nesse caso a matriz principal  $X(t, t_0)$  de (I) é  $e^{A(t-t_0)}$  onde a exponencial de uma matriz  $C$  é definida por:

$$e^C = I + C + \frac{C^2}{2!} + \frac{C^3}{3!} + \dots + \frac{C^n}{n!} + \dots$$

Teorema 0.8: Todos os auto-valores de  $e^{At}$  são da forma  $e^{\lambda t}$ , onde  $\lambda$  é auto-valor de  $A$ .

Teorema 0.9: Se nenhum auto-valor de  $A$  tem parte real nula, então existe uma mudança linear de coordenadas tal que nas novas coordenadas  $A$  assume a forma  $\begin{pmatrix} B_+ & 0 \\ 0 & B_- \end{pmatrix}$ , onde

$B_+$  e  $B_-$  são quadradas  $p \times p$  e  $k \times k$ ,  $p + k = n$ , onde  $p$  é a quantidade de auto-valores com parte real positiva e  $k$  a quantidade de auto-valores com parte real negativa. Além disso existe  $K$  e  $\alpha > 0$  tal que:

$$|e^{B_+ t}| \leq K e^{\alpha t}, \quad t \leq 0.$$

$$|e^{B_- t}| \leq K e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

Definição 0.7: Consideremos a equação  $\dot{x} = f(t, x)$ , e suponhamos  $f(t, 0) \equiv 0$ ,  $t \in [0, \infty)$ .

a) A solução  $x = 0$  é chamada estável se para todo  $\epsilon > 0$  e todo  $t_0 \geq 0$ , existir  $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$  tal que  $|x_0| < \delta$  implica  $|x(t, t_0, x_0)| < \epsilon$  para  $t$  em  $[t_0, \infty)$ .

b) A solução  $x = 0$  é uniformemente estável (U.S.) se é estável e  $\delta$  pode ser escolhido independente de  $t_0 \geq 0$ .

c) A solução  $x = 0$  é uniformemente assintoticamente estável (U.A.S.) se fôr uniformemente estável e existe  $\eta > 0$  tal que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $T(\epsilon)$  de forma que  $|x(t, t_0, x_0)| < \epsilon$  para todo  $t \geq t_0 + T(\epsilon)$  e  $|x_0| < \eta$ .

Em particular, toda solução tende a zero.

d) A solução  $x = 0$  é instável se não fôr estável.

Teorema 0.8: Para o sistema linear com coeficientes constantes (I):

1) A solução nula é U.A.S. se e somente se  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  para todo auto-valor  $\lambda$ .

2) A solução nula é U.S. se e somente se  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  e os  $\lambda$ 's com  $\operatorname{Re} = 0$  tem multiplicidade algébrica igual a multiplicidade geométrica.

Teorema 0.9: Se a matriz principal  $X(t, t_0)$  de  $\dot{x} = A(t)x$  satisfaz  $|X(t, s)| \leq K e^{-\alpha(t-s)}$ ,  $t \geq s$  e  $\alpha > 0$  e se

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(t, x)}{|x|} = 0$  uniformemente em  $t$  em  $\mathbb{R}$  então existe  $r_0 > 0$

tal que  $|x_0| < r_0$  implica que a solução de  $\dot{x} = A(t)x + f(t, x)$  satisfaz

$$|x(t, t_0, x_0)| \leq K e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} |x_0|.$$

Observação: Se  $f$  depende também de  $\lambda$  e

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow 0}} \frac{f(t, x, \lambda)}{|x|} = 0$$

uniformemente em  $t \in \mathbb{R}$ , então existem  $\lambda_0$  e  $r_0$  tais que  $|\lambda| \leq \lambda_0$  e  $|x_0| < r_0$  implicam

$$|x(t, t_0, x_0, \lambda)| \leq K e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} |x_0|, \quad t \geq t_0.$$

Teorema 0.10: Seja

$$\dot{x} = Ax + f(t, x)$$

onde  $A$  é constante. Se existe auto-valores de  $A$  com parte real maior que zero e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(t, x)}{|x|} = 0$$

então a solução nula de  $\dot{x} = Ax + f(t, x)$  é instável.

Vamos agora enunciar alguns resultados sobre sistemas lineares com coeficientes periódicos.

Teorema de Floquet: 0.11: Se  $A(t)$  é contínua real ou complexa, e periódica de período  $T > 0$ , então existe uma mudança de variável

$$x = P(t)y$$

onde  $P$  é  $T$ -periódica e inversível (eventualmente complexa) que transforma o sistema  $\dot{x} = A(t)x$  em  $\dot{y} = By$  onde  $B$  é constante.

Corolário 0.3: Toda solução de  $\dot{x} = A(t)x$  é da forma  $x(t) = P(t) e^{Bt} x_0$ , onde  $B$  é constante e  $P$  periódica e inversível.

Definição 0.8: A matriz  $C = X(T, 0)$  onde  $X$  é a matriz principal é chamada matriz monodrômica.

Os auto-valores  $\rho$  da matriz monodrômica são chamados multiplicadores característicos de

$$\dot{x} = A(t)x \quad (*)$$

e qualquer  $\lambda$  tal que  $\rho = e^{\lambda T}$  é chamado expoente característico de (\*); observe-se que  $\lambda = \frac{\log \rho}{T}$  não está bem definido, mas a sua parte real está.

Podemos escolher  $\lambda$  de forma que seja auto-valor de  $B$ , usando a mesma determinação para o logarítmo.

Corolário 0.4: A equação  $\dot{x} = A(t)x$ ,  $A(t+T) = A(t)$  tem solução  $T$ -periódica não trivial se e somente se 1 é multiplicador característico.

Teorema 0.12: A solução nula de  $\dot{x} = A(t)x$ ,  $A(t+T) = A(t)$  é assintoticamente estável (estável) se e somente se a solução nula de  $\dot{y} = By$  for assintoticamente estável (estável) e isso ocorre se e somente se os expoentes característicos tem parte real menor que zero (menor ou igual a zero e os  $\lambda$ 's com  $\text{Re} \lambda = 0$  tem multiplicidade algébrica igual à multiplicidade geométrica).

Faremos agora um resumo das funções quase periódicas.

Definição 0.9: Uma função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) é um polinômio trigonométrico se

$$h(t) = \sum_{j=1}^n a_j e^{i w_j t},$$

onde os  $a_j$  são elementos de  $R^n$  (ou  $C^n$ ).

Teorema 0.13: Seja  $f : R \rightarrow R^n$  (ou  $C^n$ ) uma função contínua e limitada. As seguintes proposições são equivalentes:

- 1.<sup>a</sup>)  $f$  é limite uniforme de uma seqüência de polinômios trigonométricos.
- 2.<sup>a</sup>) O conjunto das translações  $f_\tau$ ,

$$f_\tau(t) = f(t+\tau)$$

onde  $\tau$  está em  $R$ , tem fecho compacto no espaço das funções contínuas e limitadas em  $R$  com a norma do supremo.

Definição 0.10: Uma função  $f : R \rightarrow R^n$  (ou  $C^n$ ) contínua é quase-periódica ( $f \in A.P.$ ) se satisfaz as condições do teorema anterior.

Propriedades:

1.<sup>a</sup>) A.P. é fechado em relação a limite uniforme, isto é; se  $f_n$  está em A.P. e  $f_n$  converge uniformemente para  $f$  em  $R$ , então  $f$  está em A.P.

2.<sup>a</sup>) Se  $F : \Omega \subset R^n \rightarrow R^m$  é uniformemente contínua e  $f_1, \dots, f_n$  estão em A.P.(R) então a função  $g : R \rightarrow R^m$ , definida por  $g(t) = F(f_1(t), \dots, f_n(t))$  está em A.P.

Em particular se  $f, g$  estão em A.P. então  $f+g$  e  $f.g$  também estão em A.P.

Definição 0.11: Se  $f(t)$  pertence a A.P. então a média de  $f$  é dada por:

$$M(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt.$$

Pode-se mostrar que esse limite existe, independente de  $a$  e é uniforme para  $a$  em  $\mathbb{R}$ .

Definição 0.12:  $\lambda$  é um expoente de Fourier de  $f$  se  $a(\lambda) \neq 0$  e  $a(\lambda)$  é chamado coeficiente de Fourier onde

$$a(\lambda) = M[f(t) e^{-i\lambda t}] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

Chamando  $\Lambda$  o conjunto dos expoentes de Fourier de  $f$ , definimos módulo de  $f$  como sendo o módulo sobre os inteiros gerado por  $\Lambda$ ; seus elementos são da forma  $\sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i$ , onde os  $\alpha_i$  são inteiros.

Teorema 0.14: Se  $f, g$  pertencem a A.P., então  $m(g) < m(f)$  se e somente se para toda sequência  $\tau_j$  em  $\mathbb{R}$  tal que  $f(t+\tau_j)$  converge uniformemente,  $g(t+\tau_j)$  também converge uniformemente.

Definição 0.13: Dada a função  $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  onde  $\Omega$  está contido em  $\mathbb{R}^n$ , dizemos que  $f$  é A.P. uniformemente em conjuntos compactos  $K \subset \Omega$  se satisfaz a uma das duas seguintes condições equivalentes:

1) se  $\tau_k$  é uma sequência de números reais, existe uma subsequência  $\tau'_k$  tal que  $f(t+\tau'_k x)$  converge uniformemente em

$R \times$  (conjuntos compactos);

2)  $f$  é limite uniforme em  $R \times$  (conjuntos compactos) de uma sequência de polinômios trigonométricos

$$p_k(t, x) = \sum_{j=1}^{N(k)} a_{j,k}(x) e^{i\omega_{j,k}(t)},$$

onde  $a_{j,k} : \Omega \rightarrow R^m$  são contínuas.

As propriedades 1 e 2 das funções A.P. permanecem válidas para as funções  $f(t, x)$  A.P. uniformemente em conjuntos compactos.

Define-se média de  $f$  como sendo  $(Mf)(x) =$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t, x) dt, \text{ onde o limite independe de } a \text{ e é uniforme}$$

para  $a$  em  $R$  e  $x$  em compactos; se a função de  $x$   $a(\lambda, x) =$

$= M(f(t, x) e^{-i\lambda t})$  não é identicamente nula dizemos que  $\lambda$  é expoente de Fourier de  $f$  e  $a(\lambda, x)$  é o coeficiente de Fourier.

O módulo de  $f$  é o módulo sobre  $Z$  gerado pelo conjunto dos expoentes de Fourier de  $f$  (pode-se mostrar que tal conjunto é enumerável).

Vamos lembrar também a definição de contração uniforme e o teorema do ponto fixo de Banach.

Definição 0.14: Se  $E$  é um subconjunto fechado de um espaço de Banach,  $F$  um espaço métrico,  $T : E \times F \rightarrow E$  função então  $T(x, \lambda)$  é uma contração uniforme em  $x$ , se existe  $K \in R$ ,  $0 < K < 1$  tal que

$$|T(x, \lambda) - T(y, \lambda)| \leq K|x - y|$$

para todos os pares  $(x, y)$  de elementos de  $E$ .

Teorema 0.15: Se  $E$  é um subconjunto fechado de um espaço de Banach e  $T : E \rightarrow E$  é uma contração, então  $T$  tem um ponto fixo.

Teorema 0.16: Se  $E$  é um subconjunto fechado de um espaço de Banach,  $F$  um espaço métrico  $T : E \times F \rightarrow E$  é contínua e é contração uniforme, então o ponto fixo de  $T(.,\lambda)$  é função contínua de  $\lambda$ .

## CAPÍTULO I

### *Perturbações de Sistemas Lineares não Críticos*

Definição 1.1: Se  $A(t)$  é uma matriz  $n \times n$  definida em  $\mathbb{R}$  e  $D$  uma classe de funções que contém a função zero; o sistema

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1)$$

é dito não crítico com respeito a  $D$  se a única solução de (1) que pertence a  $D$  é a solução  $x = 0$ .

Por  $B(-\infty, \infty)$  denotamos o conjunto das funções  $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ , contínuas e limitadas. Nesse espaço vamos considerar a norma

$$|f| = \sup_{-\infty < t < \infty} |f(t)|.$$

O conjunto das funções A.P. é um subconjunto de  $B(-\infty, \infty)$ .

A.P. é o conjunto das funções quase periódicas.

O subconjunto  $P_T$  de A.P. denota o conjunto das funções periódicas de período  $T$ .

Temos que:  $P_T \subset A.P. \subset B(-\infty, \infty)$ .

Lema 1.1.a) O sistema (1) com  $A \in P_T$  é não crítico em relação a  $B(-\infty, \infty)$  (ou A.P.) se e somente se as partes reais dos expoentes característicos de (1) são diferentes de zero.

Demonstração:

Suponhamos que as partes reais dos expoentes caracte-

rísticos de (1) são diferentes de zero, então a representação de Floquet de soluções implica que a única solução de (1) em  $B(-\infty, \infty)$  é  $x = 0$  e (1) não é crítico em relação a  $B(-\infty, \infty)$  e como  $A.P. \subset B$ ;  $x = 0$  é a única solução em A.P..

Reciprocamente, se não existe solução  $x \neq 0$  de (1) em  $B(-\infty, \infty)$ , então a representação de Floquet implica que não pode existir um expoente característico  $\lambda$  de (1) com  $\lambda = i0$ , pois se  $\lambda = i0$ , então a equação (1) precisaria ter a solução  $e^{i0} p(t)$ ,  $p(t+T) = p(t)$ ,  $p(t)$  não trivial, que é diferente de zero. c.q.d.

1.1.b) O sistema (1) com  $A \in P_T$  é não crítico em relação a  $P_T$  se e somente se  $I - X(T)$  é não singular, onde  $X(t)$ ,  $X(0) = I$  é a matriz fundamental de (1).

Demonstração:

Como  $X(t)$ ,  $X(0) = I$  é a matriz fundamental de (1), então a solução geral de (1) é  $X(t)x_0$ , onde  $x_0$  é um vetor constante arbitrário.

O sistema (1) tem uma solução  $T$ -periódica não trivial se e somente se  $\exists x_0 \neq 0$  tal que  $X(T)x_0 = x_0$ . c.q.d.

Observação: Se  $A$  na equação (1) é constante, então (1) é não crítico em relação a  $B(-\infty, \infty)$  ou A.P. se e somente se todos os auto-valores de  $A$  tem parte real diferente de zero.

A equação (1) é não crítico em relação a  $P_T$  se e somente se todos os auto-valores  $\lambda$  de  $A$  satisfazem  $\lambda T \not\equiv 0 \pmod{2\pi i}$ , ou equivalentemente os auto-valores puramente imaginários  $i\omega$  de  $A$  satisfaz  $\omega \not\equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{T}}$ .

*Alternativa de Fredholm*

Consideremos o sistema linear não homogêneo

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

e o homogêneo

$$\dot{x} = A(t)x$$

onde  $A(t+T) = A(t)$  e  $f(t+T) = f(t)$ .

Definição 1.2: Chamamos equação adjunta de  $\dot{x} = A(t)x$  a equação

$$\dot{y} = -yA(t) \quad (2) \quad y\text{-vetor linha.}$$

Consideremos também a equação matricial:

$$\dot{Y} = -YA(t)$$

Lema: Se  $X(t)$ ,  $X(0) = I$  é a matriz principal de (1) então  $Y(t) = X^{-1}(t)$  é a matriz principal de (2).

Demonstração:

$$Y(0) = X^{-1}(0) = I$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= (X^{-1}(t))' = -X^{-1}(t) \cdot \dot{X}(t) \cdot X^{-1}(t) = \\ &= -X^{-1}(t) \cdot A(t) \cdot X(t) \cdot X^{-1}(t) \end{aligned}$$

$$\dot{Y}(t) = -X^{-1}(t) \cdot A(t) = -Y(t) \cdot A(t). \quad \text{c.q.d.}$$

Como as soluções T-periódicas de (1) e (2) são dadas respectivamente pelas condições iniciais  $x_0$  e  $y_0$  tais que  $(I - X(T))(x_0) = 0$  e  $y_0(I - Y(T)) = 0$ , do lema anterior concluímos que esses conjuntos de condições iniciais são subespaços de mesma dimensão.

Teorema 1.1: (Alternativa de Fredholm)

Se  $A, f \in P_T$ , então a equação

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \quad (1.1)$$

tem solução periódica em  $P_T$  se e somente se

$$\int_0^T y(t)f(t)dt = 0$$

para todo  $y \in P_T$  solução da equação adjunta

$$\dot{y} = -yA(t).$$

Neste caso, existe uma família de soluções periódicas dependendo de r-parâmetros, onde  $r$  é o número de soluções linearmente independentes de (1) em  $P_T$ . Além disso, se alguma condição de ortogonalidade não estiver satisfeita, então todas as soluções são ilimitadas.

Demonstração:

Como  $A, f \in P_T$ , temos que  $x(t)$  é solução de (1.1) em  $P_T$  se e só se  $x(0) = x(T)$ .

Se  $X(t, \tau)$ ,  $X(\tau, \tau) = I$  é a matriz principal de (1)

e  $x(0) = x_0$ . Então

$$(1.2) \quad x(t) = X(t,0)x_0 + \int_0^t X(t,s)f(s)ds$$

$$x(t) = X(t) \cdot X^{-1}(0)x_0 + \int_0^t X(t) \cdot X^{-1}(s)f(s)ds$$

$$x_0 = X(T)x_0 + \int_0^T X(T) \cdot X^{-1}(s)f(s)ds$$

$$x_0 = X(T) \left[ x_0 + \int_0^T X^{-1}(s)f(s)ds \right]$$

$$X^{-1}(T)x_0 = x_0 + \int_0^T X^{-1}(s)f(s)ds$$

$$[X^{-1}(T) - I]x_0 = \int_0^T X^{-1}(s)f(s)ds \quad (3)$$

$$\text{Se } B = X^{-1}(T) - I$$

$$b = \int_0^T X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Então (3) é equivalente a  $Bx_0 = b$ .

Por um teorema de álgebra linear, esta equação matricial tem uma solução se e somente se  $ab = 0$ ; para todo vetor  $a$  tal que  $aB = 0$ .

Como  $X^{-1}(t)$  é a matriz principal da equação  $\dot{y} = -yA(t)$ ; o conjunto dos vetores  $a$  para os quais  $aB = 0$  coincide com o

conjunto dos valores iniciais destas soluções  $y$  as quais são  $T$ -periódicas. Como a solução  $y(t) = aX^{-1}(t)$  é uma solução  $T$ -periódica de (2) se e somente se  $aB = 0$ , segue-se que as condições de ortogonalidade são equivalentes à solubilidade de (3).

Suponhamos agora que exista uma solução periódica  $y(t) = y(0)X^{-1}(t, 0)$  do sistema adjunto tal que

$$\int_0^T y(t)f(t)dt \neq 0.$$

Usando a fórmula (1.2) e levando em conta que  $X(t, s) = X(t, 0) \cdot X^{-1}(s, 0)$  podemos escrever:

$$\begin{aligned} y(t)x(t) &= y_0 x_0 + \int_0^t y(0)X^{-1}(t, 0)X(t, 0)X^{-1}(s, 0)f(s)ds = \\ &= y_0 x_0 + \int_0^t y(s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Como este último integrando é  $T$ -periódico e

$$\int_0^T y(t)f(t)dt \neq 0$$

segue-se que  $y(t)x(t)$  é ilimitada e portanto  $x(t)$  também é. c.q.d.

**Teorema 1.2:**  $\dot{x} = A(t)x + h(t)$  (1.1) onde  $A(t)$  pertence a  $P_T$  tem solução única em  $X$ , onde  $X = B(-\infty, \infty)$  ou  $X = A.P.$  ou  $X = P_T$ , para todo  $h$  em  $X$ , se e somente se  $\dot{x} = A(t)x$  (1) é não crítico em relação a  $X$ .

Nesse caso está definido um operador

$$\begin{aligned} K : X &\longrightarrow X \\ h &\longrightarrow Kh \end{aligned}$$

$Kh$  é a única solução,  $K$  é linear e contínua, isto é, existe  $k$  tal que  $|Kh| \leq k|h|$ .

Além disso, se  $X = A.P.$  então  $m(Kh) \subset m[A, h]$ .

Demonstração:

Caso 1: Suponhamos  $X = P_T$ . Provemos que se (1.1) tem solução única em  $X = P_T$ , então (1) é não crítico em relação a  $X = P_T$ .

Se (1) é crítico em  $X = P_T$ , então  $\dot{y} = -yA(t)$  tem soluções periódicas não triviais.

Seja  $\tilde{y}(t)$  uma tal solução e consideremos

$$h(t) = \tilde{y}^t(t)$$

$\int_0^T \tilde{y}(t)h(t)dt = \int_0^T |\tilde{y}(t)|^2 dt > 0$ . Pela alternativa de Fredholm (1.1) não tem soluções  $T$ -periódicas para esse  $h$ .

Provemos agora que se  $\dot{x} = A(t)x$  é não crítico em relação a  $x$ , então (1.1) tem solução única em  $X = P_T$ .

Se (1) é não crítico pelo Lema 1.1.b, temos que  $[I - X(T)]$  é inversível.

$$x_0 = X(T)x_0 + X(T) \int_0^T X^{-1}(s)h(s)ds.$$

$$x_0 - X(T)x_0 = X(T) \int_0^T X^{-1}(s)h(s)ds.$$

$$[I - X(T)]x_0 = X(T) \int_0^T X^{-1}(s)h(s)ds.$$

$$x_0 = [I - X(T)]^{-1} X(T) \int_0^T X^{-1}(s)h(s)ds.$$

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t) [I - X(T)]^{-1} X(T) \int_0^T X^{-1}(s)h(s)ds + \\ &+ X(t) \int_0^t X^{-1}(s)h(s)ds = K(h). \end{aligned}$$

$$|K(h)| = \sup_{0 \leq t \leq T} | \dots | \leq k|h| \quad \text{c.q.d.}$$

Caso 2: Suponhamos que  $X = B(-\infty, \infty)$ . Provemos que se (1.1) tem uma única solução em  $B(-\infty, \infty)$  então (1) é crítico em  $B(-\infty, \infty)$ .

Se  $\dot{x} = A(t)x$  é crítico, seja a mudança de variável dada pelo Teorema de Floquet.

$$x = P(t)y \quad \text{onde } P(t) \in P_T.$$

$$\dot{x} = \dot{P}(t)y + P(t)\dot{y}$$

$$A(t)x + h(t) = \dot{P}(t)y + P(t)\dot{y}$$

$$\dot{y} = P^{-1}(t) [A(t)x + h(t) - \dot{P}(t)y]$$

$$\dot{y} = P^{-1}(t)A(t)P(t)y + P^{-1}(t)h(t) - P^{-1}(t)\dot{P}(t)y$$

$$\dot{y} = P^{-1}(t) [A(t)P(t) - \dot{P}(t)]y + P^{-1}(t)h(t)$$

$$\text{Fazendo } P^{-1}(t) [A(t)P(t) - \dot{P}(t)] = B \quad \text{e}$$

$P^{-1}(t)h(t) = g(t)$  temos:

$$\dot{y} = By + g(t)$$

Se (1) é crítico, existe um auto-valor de  $B$  do tipo  $\frac{2k\pi i}{T_1}$ , então  $\dot{y} = -yB$  tem solução  $T_1$ -periódica não trivial e portanto para alguma  $g \in P_{T_1}$  não existe solução limitada pelo teorema 1.1.

Sejam  $y(t)$  a solução  $T_1$ -periódica não trivial de  $\dot{y} = -yB$  e  $g(t) = y(t)^t$

$$\int_0^T y(t)g(t)dt = \int_0^T y(t)y(t)^t dt = \int_0^T |y(t)|^2 dt > 0.$$

Para esse  $g$  não tem solução  $T_1$ -periódica. Então não existem soluções periódicas pelo teorema da alternativa de Fredholm.

Provemos agora se (1) é não crítico então (1.1) tem uma única solução em  $X = B(-\infty, \infty)$ ,  $\forall h \in B$ .

Se por hipótese  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ , então decompomos o espaço em subespaços invariantes por  $B$  tais que os auto-valores  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  em um dos subespaços e  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  em outro, assim o sistema fica:

$$\dot{u} = B_+ u + g_+(t)$$

$$\dot{v} = B_- v + g_-(t)$$

e existe  $k$  tal que:

$$|e^{B_+ t}| \leq k e^{+\alpha t}, \quad t \leq 0, \quad \alpha > 0$$

$$|e^{B_- t}| \leq k e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad \alpha > 0.$$

Para  $v$  temos:

$$v(t) = e^{B_-(t-t_0)} v(t_0) + e^{B_-t} \int_{t_0}^t e^{-B_-s} g_-(s) ds, \quad \forall t, t_0,$$

fixando  $t$ , e variando  $t_0$  temos que  $e^{-B_-t_0}$  tende a zero quando  $t_0$  tende a  $-\infty$ .

$$v(t) = e^{B_-t} \int_{-\infty}^t e^{-B_-s} g_-(s) ds = K(g_-).$$

$K(g_-) = v(t)$  é solução limitada pois

$$\dot{v}(t) = B_- e^{B_-t} \int_{-\infty}^t e^{-B_-s} g_-(s) ds + e^{B_-t} \cdot e^{-B_-t} g_-(t).$$

$$\dot{v}(t) = B_- v(t) + g_-(t).$$

$$K(g_-) = v(t) = \int_{-\infty}^t e^{B_-(t-s)} g_-(s) ds = \int_{-\infty}^0 e^{-B_-u} g_-(t+u) du$$

onde  $s = t + u$ .

$$|K(g_-)| \leq \left| \int_{-\infty}^0 k e^{\alpha u} du \right| |g_-| = \frac{k}{\alpha} |g_-|.$$

Fazemos análogamente para  $u$ .

Caso 3:  $X = A.P.$

$$v(t) = \int_{-\infty}^0 e^{-B_-u} g_-(t+u) du.$$

Falta mostrar que se  $g_- \in A.P.$  então  $v \in A.P.$  Se  
ja  $g_-(t+\tau_{n_k}) \rightarrow \tilde{g}_-(t)$ .

Então  $v(t+\tau_{n_k}) \rightarrow \tilde{v}(t) = \int_{-\infty}^0 e^{-B_-s} \tilde{g}_-(t+s) ds$ , porque se

$$g_{-k} = g_-(t+\tau_{n_k}) \quad \text{e} \quad v_k = v(t+\tau_{n_k}).$$

$$|v_k - \tilde{v}| = |Kg_{-k} - K\tilde{g}_-| \leq k|g_{-k} - \tilde{g}_-| \rightarrow 0.$$

Afirmção:  $m(P(t)) \subset m(A(t))$ .

Como  $g = P^{-1}(t)h(t) \rightarrow m(g) \subset m(A, h)$ . Temos que  $m(v) \subset m(g)$ .  
 $m(Kh) \subset m(A, g) \subset m(A, h)$ .

### *Sistemas Fracamente não Lineares*

Seja  $\dot{x} = A(t)x + q(t, x, \varepsilon)$  onde  $A \in P_T$ ,  $n \times n$ .

Suponhamos que  $q(t, x, 0) \equiv 0$ , e que  $\dot{x} = A(t)x$  seja não crítico em  $X$ . Em particular  $q(t, 0, 0) = 0$ , vemos que  $x = 0$  é solução, está em  $X$ , e o problema é saber se para  $\varepsilon$  pequeno existe solução única em  $X$ . Para isto vamos impor as seguintes condições sobre  $q$ :

Se  $X = P_T$  então  $q(., x, \varepsilon)$  está em  $P_T$ .

Se  $X = B(-\infty, \infty)$  então  $q(., x, \varepsilon)$  está em  $B$ .

Se  $X = A.P.$  então  $q(., ., \varepsilon)$  é uniformemente quase periódica para  $|x| \leq a$ .

Façamos as hipóteses abaixo sobre  $q$ :

$$1) |q(t, 0, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon) \quad \forall t, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \text{com } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(\varepsilon) = 0,$$

onde  $M$  é uma função contínua não decrescente.

$$\text{Em particular } q(t, 0, 0) = 0.$$

2) Vamos supor também que a derivada de  $q$  em relação a segunda variável seja pequena, para isso damos a condição de Lipshitz para  $q$ :

$$|q(t, x, \varepsilon) - q(t, y, \varepsilon)| \leq L(\varepsilon, b) |x - y| \quad \forall t, \quad \forall x, y \quad \text{tal}$$

que  $|x|, |y| \leq b$  onde  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0}} L(\varepsilon, b) = 0.$

Teorema 1.3: Nas hipóteses acima sobre  $q$  se  $\dot{x} = A(t)x$  é não crítico em relação a  $X$ , existem  $\varepsilon_0$  e  $b_0$  e uma função  $x^*(t, \varepsilon)$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  tais que:

- 1)  $x^*$  é contínua em  $R \times [0, \varepsilon_0]$
- 2)  $x^*$  é solução em  $X$ ,  $x^*(t, 0) = 0$ ,  $|x^*(t, \varepsilon)| \leq b_0$ ,  
 $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$
- 3)  $x^*$  é a única solução com as propriedades acima.

$$\text{Se } X = A.P. \quad m(x^*(., \varepsilon)) \subset m(A, q(., ., \varepsilon)).$$

Demonstração:

$$\dot{x}^* = A(t)x^* + q(t, x^*, \varepsilon) \text{ e } X.$$

a) Para  $X = P_T$

Afirmção: Se  $x^* \in X$  então  $q(t, x^*, \epsilon) \in X$ .

$q(t+T, x^*(t+T), \epsilon) = q(t+T, x^*(t), \epsilon) = q(t, x^*(t), \epsilon) \in P_T$   
pois se  $X = P_T$  então  $q(\cdot, x, \epsilon) \in P_T$ .

b) Para  $X = B(-\infty, \infty)$ .

Afirmção: Se  $x^* \in B$  então  $q(t, x^*, \epsilon) \in B$ .

Se  $x^* \in B$  então  $\exists a > 0$  tal que  $|x^*| \leq a$ .

$$|q(t, 0, \epsilon)| \leq M(\epsilon).$$

$$|q(t, x^*, \epsilon) - q(t, y, \epsilon)| \leq L(\epsilon, b_0) |x^* - y| \quad \text{para } y=0 \text{ temos}$$

$$|q(t, x^*, \epsilon)| \leq M(\epsilon) + L(\epsilon, b_0) |x| \leq M(\epsilon) + L(\epsilon, b_0) \cdot a \leq K(\epsilon, b_0)$$

e  $x^*$  é contínua,  $q(t, x^*, \epsilon)$  é contínua como composições de funções contínuas.

c) Para  $X = A.P.$

Afirmção: Se  $x^* \in A.P.$  então  $q(t, x^*(t), \epsilon) \in A.P.$

Dada uma seqüência  $\tau_n$  conseguimos uma subsequência que indicaremos também por  $\tau_n$ , tal que:

$$x^*(t+\tau_n) \rightarrow \tilde{x}^*(t) \quad \text{uniformemente na reta}$$

$q(t+\tau_n, x^*(t+\tau_n), \epsilon) \rightarrow \tilde{q}(t, \tilde{x}^*(t), \epsilon)$  uniformemente na reta, para todo  $x$ , tal que  $|x| \leq a$ .

Vamos mostrar que  $q(t+\tau_n, x^*(t+\tau_n), \epsilon)$  converge para  $\tilde{q}(t, \tilde{x}^*(t), \epsilon)$  uniformemente em  $R$ .

Dado  $\rho > 0$ , seja  $\alpha$  tal que para  $|x-y| < \alpha$  implica que  $|g(t, x, \varepsilon) - g(t, y, \varepsilon)| < \frac{\rho}{2}$

$$|x^*(t+\tau_n) - x^*(t)| < \delta \Rightarrow |\tilde{q}(t, x^*(t+\tau_n), \varepsilon) - \tilde{q}(t, x^*(t), \varepsilon)| < \frac{\rho}{2}.$$

Seja agora  $N$  tal que  $n \geq N$  temos

$$|q(t+\tau_n, x, \varepsilon) - \tilde{q}(t, x, \varepsilon)| < \frac{\rho}{2} \quad \forall t, \quad \forall x \text{ tal que } |x| \leq a.$$

Estão para  $n \geq N$ :

$$\begin{aligned} & |q(t+\tau_n, x^*(t+\tau_n), \varepsilon) - \tilde{q}(t, \tilde{x}^*(t), \varepsilon)| \leq \\ & \leq |q(t+\tau_n, x^*(t+\tau_n), \varepsilon) - \tilde{q}(t, x^*(t+\tau_n), \varepsilon)| + \\ & + |\tilde{q}(t, x^*(t+\tau_n), \varepsilon) - \tilde{q}(t, \tilde{x}^*(t), \varepsilon)| < \rho \end{aligned}$$

Portanto está bem definido

$$Q(\varepsilon) : X \longrightarrow X$$

$$y(t) \rightarrow (Q(\varepsilon)y)(t) = q(t, y(t), \varepsilon).$$

e sendo

$K : X \rightarrow X$  o operador definido no teorema 1.2 precisamos encontrar  $y \in X$ , tal que  $y(t) = K(q(t, y(t), \varepsilon))$  ou seja precisamos resolver a equação  $x = KQ(\varepsilon)x$  em  $X$ .

Seja  $X_{b_0}$  o conjunto dos  $x \in X$  tal que  $|x| \leq b_0$ .

Chamemos  $KQ(\varepsilon)x = T(x, \varepsilon)$ . Queremos que  $T(x, \varepsilon)$  tenha um ponto fixo, ou seja, queremos achar  $b_0$  e  $\varepsilon_0 > 0$ ;  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , tais que:

$T(., \varepsilon) : X_{b_0} \rightarrow X_{b_0}$  seja uma contração. Provemos esta

afirmação:

$$\begin{aligned}
|T(x, \epsilon)| &= |K q(., x, \epsilon)| \leq |K| |q(., x, \epsilon)| \leq k |q(., x, \epsilon)| \leq \\
&\leq k |q(., x, \epsilon) - q(., 0, \epsilon) + q(., 0, \epsilon)| \leq \\
&\leq k |q(., x, \epsilon) - q(., 0, \epsilon)| + k |q(., 0, \epsilon)| \leq \\
&\leq k |q(., x, \epsilon) - q(., 0, \epsilon)| + kM(\epsilon) \leq \\
&\leq kL(\epsilon, b_0) |x| + kM(\epsilon) \leq kL(\epsilon, b_0) \cdot b_0 + kM(\epsilon).
\end{aligned}$$

$$|T(x, \epsilon) - T(y, \epsilon)| \leq kL(\epsilon, b_0) |x - y|.$$

Seja  $\epsilon_0$  e  $b_0$  tal que  $kL(\epsilon, b_0) \leq \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$  e  $kM(\epsilon) \leq \frac{b_0}{2}$ .

Então

$$|T(x, \epsilon) - T(y, \epsilon)| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - y|.$$

Como  $T(., \epsilon)$  é uma contração uniforme e é contínua, pelo teorema 0.15, existe uma função  $x : [0, \epsilon_0] \rightarrow X$  que é contínua em  $\epsilon$ , ponto fixo de  $T$ , e então solução da equação

$$\dot{x} = A(t)x + q(t, x, \epsilon).$$

Como consequência  $x^*(t, \epsilon)$  é contínua por que se  $t_n \rightarrow t$  e  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon$  temos:

$$|x^*(t_n, \epsilon_n) - x^*(t, \epsilon)| \leq |x^*(t_n, \epsilon_n) - x^*(t_n, \epsilon)| + |x^*(t_n, \epsilon) - x^*(t, \epsilon)|$$

$$|x^*(t_n, \epsilon_n) - x^*(t_n, \epsilon)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } \epsilon_n \rightarrow \epsilon \quad \text{e}$$

$$|x^*(t_n, \epsilon) - x^*(t, \epsilon)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t_n \rightarrow t.$$

Suponhamos que  $X = A.P.$  falta mostrar que

$$m(x^*(., \epsilon)) \subset m(A, q(., \epsilon)).$$

Dado  $\epsilon > 0$ , tomamos uma seqüência  $\tau_m$  tal que  $A(t+\tau_m) \rightarrow B(t) \in P_T$ .

$$q(t+\tau_m, x, \epsilon) \rightarrow \tilde{q}(t, x, \epsilon) \text{ uniformemente em } R \times \{|x| \leq b_0\}.$$

Queremos mostrar que:

$$x^*(t+\tau_m, \epsilon) \rightarrow y^*(t, \epsilon) \text{ uniformemente.}$$

Sabemos que o conjunto das translações tem fecho compacto.

Usaremos os seguintes resultados: Se  $x_n \in M$ , espaço métrico:

1)  $\overline{\{x_1, \dots, x_n, \dots\}}$  é compacto.

2) Se  $x_n \rightarrow x_0$ , então toda subsequência de  $(x_n)$  converge para  $x_0$ .

Por esse mesmo teorema  $\dot{y} = B(t)y + \tilde{q}(t, y, \epsilon)$  tem uma única solução  $y^*(t, \epsilon)$  porque  $\dot{y} = B(t)y$  é não crítico. Existe  $\tau$  tal que  $B(t) = A(t+\tau)$  (Tomamos  $0 \leq \tau_m \leq T$ ).

$X(t)$  é matriz principal de  $\dot{x} = A(t)x$ .

Então:

$$\dot{X}(t+\tau) = A(t+\tau)X(t+\tau)$$

$Y(t) = X(t+\tau).X^{-1}(\tau)$  é matriz principal de

$$\dot{y} = B(t)y.$$

Então

$$Y(T) = X(T+\tau) \cdot X^{-1}(\tau) = X(T) \cdot X(\tau) \cdot X^{-1}(\tau) = X(T).$$

Portanto  $Y(T)$  tem os mesmos auto-valores de  $X(T)$ .

$$\dot{x}^*(t+\tau_m, \epsilon) = A(t+\tau_m)x(t+\tau_m, \epsilon) + q(t+\tau_m, x^*(t+\tau_m), \epsilon).$$

Se  $x^*(t+\tau_m, \epsilon) \rightarrow z(t, \epsilon)$  em A.P. onde  $z(t, \epsilon)$  é solução de

$$\dot{z}(t, \epsilon) = B(t)z(t) + \tilde{q}(t, z(t), \epsilon).$$

Usando o teorema da dependência contínua temos que  $z = y^*$ .

Portanto  $x^*(t+\tau_m, \epsilon) \rightarrow y^*(t, \epsilon)$  c.q.d.

Vamos agora estudar a estabilidade da solução.

**Teorema 1.4:** Nas condições do teorema anterior se os expoentes característicos de  $\dot{x} = A(t)x$  tem parte real negativa, a solução  $x^*(t, \epsilon)$  é assintoticamente estável; se algum tiver parte real positiva  $x^*(t, \epsilon)$  é instável.

**Demonstração:**

$$\dot{x} = A(t)x + q(t, x, \epsilon).$$

Fazendo a mudança de variável:

$$y = x - x^*(t, \epsilon),$$

temos:

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \dot{x} - \dot{x}^*(t, \epsilon) = A(t)x - A(t)x^* + q(t, x, \epsilon) - q(t, x^*, \epsilon) = \\
&= A(t)y + q(t, y+x^*(t, \epsilon), \epsilon) - q(t, x^*(t, \epsilon), \epsilon) = \\
&= A(t)y + f(t, x, \epsilon).
\end{aligned}$$

O teorema é então uma consequência imediata dos teoremas 0.9 e 0.10.

### *Sistemas mais Gerais*

Consideremos agora os sistemas:

$$(4) \quad \dot{x} = \epsilon Ax$$

$$(5) \quad \dot{x} = \epsilon (Ax + h(t))$$

onde  $A$  é constante.

Lema:  $\dot{x} = \epsilon Ax$  é não crítico em relação a A.P. ou  $B(-\infty, \infty)$  ou  $P_T$  para  $\epsilon \neq 0$  se e somente se  $\operatorname{Re} \lambda(A) \neq 0 \exists \epsilon_0 > 0$  tal que (4) é não crítico em relação a  $P_T$  se e somente se o determinante de  $A$  é diferente de zero.

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que  $\operatorname{Re} \lambda(A) = 0$ . Então pelo lema 1.1.a temos que  $\dot{x} = \epsilon Ax$  é crítico em relação a  $B(-\infty, \infty)$  ou A.P. O lema 1.1.b implica que  $\dot{x} = \epsilon Ax$  é não crítico em relação a  $P_T$  se e somente se  $\epsilon \omega T \neq 2k\pi$  para todo  $k = 0, \pm 1, \dots$  e todo real  $\omega$  tal que  $\lambda = i\omega$  é auto-valor de  $A$ . Se  $\omega = 0$  não é auto-valor de  $A$ , existe sempre um  $\epsilon_0 > 0$  tal que estas desigualdades são

satisfeitas para  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ .

Se  $\omega = 0$  é auto-valor, então não existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $\dot{x} = \epsilon Ax$  é não crítico em relação a  $P_T$ .

**Teorema 1.5:** Se (4) é não crítico em relação a  $X$  para  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ , então para todo  $h \in X$ , existe uma única solução de (5) em  $X$ .

$$K_\epsilon : X \rightarrow X$$

e existe  $k$  independente de  $\epsilon$  tal que  $|K_\epsilon| \leq k$ .

**Demonstração:**

Pelo teorema 1.2  $\dot{x} = \epsilon Ax + \epsilon h(t)$  tem uma única solução  $K_\epsilon h$  em  $X$  e existe  $k(\epsilon)$  tal que

$$|K_\epsilon h| \leq k(\epsilon) \cdot |h|.$$

Precisamos mostrar que  $k(\epsilon)$  independe de  $\epsilon$ .

Se  $X = A.P.$  ou  $B(-\infty, \infty)$ .

A matriz  $A$  é transformada pela forma de Jordam na matriz  $B$ , e portanto  $\epsilon A$  é transformada em  $\epsilon B$ .

Seja  $P$  a matriz mudança de base, que leva  $\epsilon A$  em  $\epsilon B$ .

$$\dot{u} = \epsilon B_+ u + \epsilon h_+(t)$$

onde  $u(t)$  é dada por:

$$u(t) = e^{\epsilon B_+ t} \int_{+\infty}^t e^{-B_+ s} \epsilon h_+(s) ds = K_\epsilon(h_+)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t e^{\epsilon B_+(t-s)} \epsilon h_+(s) ds$$

$$v(t) = \int_{-\infty}^0 e^{-\epsilon B_+ r} \epsilon h_+(t+r) dr = - \int_0^{\infty} e^{-\epsilon B_+ r} \epsilon h_+(t+r) dr.$$

onde  $s = t + r$ .

$$K_{\epsilon} h_+(t) = - \int_0^{+\infty} e^{-\epsilon B_+ r} \epsilon h_+(t+r) dr.$$

$$|e^{-B_+ r}| \leq K_1 e^{-\alpha r} \quad r \geq 0 \quad \text{e} \quad \alpha > 0.$$

Então:

$$|e^{-\epsilon B_+ r}| \leq K_1 e^{-\epsilon \alpha r} \quad r \geq 0 \quad \text{pois} \quad \epsilon r > 0 \quad \text{e} \quad \alpha > 0.$$

$$|K_{\epsilon} h_+| \leq \sup |h_+| \epsilon \cdot \int_0^{+\infty} K_1 e^{-\epsilon \alpha r} dr = \sup |h_+| \epsilon K_1 \frac{1}{-\epsilon \alpha} = - \sup |h_+| \frac{K_1}{\alpha}.$$

Portanto  $k(\epsilon)$  não depende de  $\epsilon$ .

Analogamente para a parte negativa.

Devemos observar se  $h \in A.P.$

$$\text{mod}(K_{\epsilon} h) \subset \text{mod}(h).$$

Análogo para  $h \in P_T$ .

Teorema 1.6: Se  $\dot{x} = \epsilon(Ax + q(t, x, \epsilon))$  onde  $q \in X$

$$\dot{x} = \epsilon Ax$$

é não crítico em relação a  $X$ .

$$|q(t, 0, \epsilon)| \leq M(\epsilon), \quad M \text{ contínua e } M(0) = 0$$

$$|q(t, x, \epsilon) - q(t, y, \epsilon)| \leq L(\epsilon, b_0) |x - y| \quad \text{para } |x|, |y| \leq b_0 \quad \text{e}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} L(\epsilon, b_0) = 0.$$

$$\epsilon \rightarrow 0 \\ b_0 \rightarrow 0$$

Então existem  $\epsilon_0 > 0$ ,  $r_0 > 0$  e  $x^*(t, \epsilon)$  tal que

$x^*(t, \epsilon)$  é contínua

$x^*(t, \epsilon)$  é solução do sistema

$x^*(t, \epsilon) \in X$

$$|x^*(t, \epsilon)| \leq r_0$$

$$x^*(t, 0) = 0$$

$x^*(t, \epsilon)$  é a única solução com as propriedades acima.

Se  $X = A.P.$  então  $\text{mod}(x^*(t, \epsilon)) \subset \text{mod}(q)$ .

Se  $\text{Re} \lambda(A) < 0$  então  $x^*(t, \epsilon)$  é assintoticamente es  
tável.

Se existir um com parte real maior que zero então é  
instável.

Demonstração:

Para  $\epsilon > 0$  definimos  $y(t) = x(\frac{t}{\epsilon})$

$$\dot{y} = \frac{1}{\epsilon} \dot{x}(\frac{t}{\epsilon}) = A x(\frac{t}{\epsilon}) + q(\frac{t}{\epsilon}, x(\frac{t}{\epsilon}), \epsilon) = Ay + q_1(t, y, \epsilon)$$

$$\text{e } |q_1(t, 0, \epsilon)| = |q(\frac{t}{\epsilon}, 0, \epsilon)| \leq M(\epsilon), \quad M \text{ contínua e } M(0) = 0$$

$$|q_1(t, x, \epsilon) - q_1(t, y, \epsilon)| = |q(\frac{t}{\epsilon}, x, \epsilon) - q(\frac{t}{\epsilon}, y, \epsilon)| \leq L(\epsilon, b_0) |x - y| \quad \text{para}$$

$$|x|, |y| \leq b_0 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ b_0 \rightarrow 0}} L(\varepsilon, b_0) = 0.$$

Logo pelo teorema 1.3 existe  $y^*(t, \varepsilon)$  e obtemos  $x^*(t, \varepsilon) = y^*(\varepsilon t, \varepsilon)$ . As propriedades são demonstradas da mesma forma que no teorema 1.3.

## CAPÍTULO II

### Método da Média

Neste capítulo, queremos encontrar para a equação

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x, \epsilon)$$

uma solução  $x^*(t, \epsilon)$  periódica ou quase-periódica tal que  $x^*(t, \epsilon) \rightarrow x_0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Se

$$\dot{u}(t, \epsilon) = \epsilon f(t, u(t, \epsilon), \epsilon)$$

e

$u(t, \epsilon)$  está em A.P.

$$M(\dot{u}(t, \epsilon)) = \epsilon M(f(t, u(t, \epsilon), \epsilon)).$$

$$M(\dot{u}(t, \epsilon)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{u}(t, \epsilon) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (u(T, \epsilon) - u(0, \epsilon))$$

Portanto  $M(\dot{u}(t, \epsilon)) = 0$ . Então  $M(f(t, u(t, \epsilon), \epsilon)) = 0$ .

Se  $u(t, \epsilon) \rightarrow u_0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  deveríamos ter

$M(f(t, u_0, 0)) = 0$ . Então  $u_0$  tem que ter a propriedade

$M(f(t, u_0, 0)) = 0$ . Esta é a condição necessária. Vamos dar a condição suficiente.

Lema 1.7: Seja  $h \in \text{A.P.}$  com  $M(h) = 0$  e definimos

$$g(t, \epsilon) = \int_{-\infty}^t e^{-\epsilon(t-s)} h(s) ds. \quad (\text{solução da equação} \quad \dot{g} = -\epsilon g + ht).$$

Então existe  $\tau(\epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$  tal que  $\tau(\epsilon) \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  de forma que

$$|g(t, \epsilon)| \leq \frac{\tau(\epsilon)}{\epsilon} \left| \frac{\partial g}{\partial t}(t, \epsilon) - h(t) \right| \leq \tau(\epsilon).$$

$$g \in \Lambda.P. \quad \text{mod}(g) \subset \text{mod}(h).$$

$$0 = N(h) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} h(s) ds \quad \text{é uniforme em } t \text{ em } \mathbb{R}.$$

$$\text{Então} \quad \left| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} h(s) ds \right| \leq \delta(T), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \delta(T) = 0 \quad (\text{decrecente})$$

$$g(t, \epsilon) = \int_0^{+\infty} e^{-\epsilon u} h(t-u) du \quad \text{onde} \quad u = t - s.$$

$$g(t, \epsilon) = \int_0^{\infty} e^{-\epsilon(u-kT)} e^{-\epsilon kT} h(t-u) du =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\epsilon k} \int_{kT}^{(k+1)T} h(t-u) e^{-\epsilon(u-kT)} du =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\epsilon k} \int_{kT}^{(k+1)T} h(t-u) (+1 - 1 + e^{-\epsilon(u-kT)}) du =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\epsilon k} \int_{kT}^{(k+1)T} h(t-u) du +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\epsilon k} \int_{kT}^{(k+1)T} h(t-u) (-1 + e^{-\epsilon(u-kT)}) du$$

$$|g(t, \epsilon)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\epsilon k} \left| \int_{kT}^{(k+1)T} h(t-u) du \right| + B \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\epsilon kT} \int_{kT}^{(k+1)T} |1 - e^{-\epsilon(u-kT)}| du$$

$$|g(t, \varepsilon)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\varepsilon k T} \delta(T) \cdot T + B \left( \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\varepsilon k T} \right) \int_0^T (1 - e^{-\varepsilon s}) ds \quad \text{onde } s = u - kT.$$

$$|g(t, \varepsilon)| \leq \delta(T) \cdot T \frac{1}{1 - e^{-\varepsilon T}} + B \frac{1}{1 - e^{-\varepsilon T}} \int_0^T (1 - e^{-\varepsilon s}) ds.$$

$$\text{Como } \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{1 - e^{-\varepsilon T}} \leq 1.$$

Temos:

$$|g(t, \varepsilon)| \leq \delta(T) \cdot T \frac{1}{1 - e^{-\varepsilon T}} + BT.$$

Então  $1 - e^{-\varepsilon T} = \delta(T)$  tem uma única solução  $T(\varepsilon)$  e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = +\infty.$$

$$1 - e^{-\varepsilon T(\varepsilon)} = \delta(T(\varepsilon)) \quad \text{e} \quad \varepsilon T(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$\text{Definimos } \tau(\varepsilon) = (B+1)\varepsilon T(\varepsilon)$$

$$|g(t, \varepsilon)| \leq BT + T = (B+1)T = \frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, \varepsilon) = -\varepsilon g(t, \varepsilon) + h(t).$$

$$\text{Chamando } \alpha(\varepsilon, t) = -\varepsilon g(t, \varepsilon)$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t} - h(t) \right| \leq \frac{\varepsilon \tau(\varepsilon)}{\varepsilon} = \tau(\varepsilon).$$

**Teorema 1.8:** Sejam  $\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$ , onde  $x$  está em  $\Omega$ ,  $f$  está em A.P. ou  $P_T$ , de classe  $C^1$  em  $x$  e contínua.

$f(t, x, \epsilon)$  e  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \epsilon)$  são uniformemente contínuas em  $R \times \text{compacto} \times \text{compacto}$ .

$$f_0(x) = M(f(t, x, 0)).$$

Suponhamos que  $f_0(0) = 0$  e  $A = -\frac{\partial f}{\partial x}(0)$ .

Se  $f$  está em A.P. e  $\text{Re} \lambda(A) \neq 0$ . ( $f$  em  $P_T$  com  $\det A \neq 0$ ). Então existe um  $\epsilon_0 > 0$ ,  $x^*(t, \epsilon)$ ,  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ , tal que  $x^*(t, \epsilon)$  é contínua, é solução, está em A.P. (ou em  $P_T$ ) e  $\text{mod}(x^*(., \epsilon)) \subset \text{mod}(f(., x, \epsilon))$  e  $x^*(t, 0) = 0$ .

Além disso se  $\text{Re} \lambda(A) < 0$ ,  $x^*(t, \epsilon)$  é uniformemente assintoticamente estável, e se algum tiver parte real maior que zero  $x^*(t, \epsilon)$  é instável.

Demonstração:

Sejam  $\hat{x} = \epsilon f(t, x, \epsilon)$ .

$f_0(x) = M(f(t, x, 0))$  que é a média em  $t$ .

$$f_0(0) = M(f(t, 0, 0)) = 0$$

$$\hat{x} = \epsilon(f(t, x, 0) + f(t, x, \epsilon) - f(t, x, 0))$$

Chamemos  $q_1(t, x, \epsilon) = f(t, x, \epsilon) - f(t, x, 0)$

Provemos que  $q_1$  satisfaz as condições:

a)  $|q_1(t, 0, \epsilon)| = |f(t, 0, \epsilon) - f(t, 0, 0)| \leq M(\epsilon)$  pois  $f$  é uniformemente contínua em  $R \times \text{compacto} \times \text{compacto}$  e  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} M(\epsilon) = 0$  então  $M(0) = 0$ .

$$q_1(t, 0, 0) = f(t, 0, 0) - f(t, 0, 0) = 0$$

$$\begin{aligned}
& |q_1(t, x, \varepsilon) - q_1(t, y, \varepsilon)| = \\
& = |f(t, x, \varepsilon) - f(t, x, 0) - f(t, y, \varepsilon) + f(t, y, 0)| \leq \\
& \leq \sup_{0 < \rho < 1} |f'(t, y + \rho(x-y), \varepsilon) - f'(t, y + \rho(x-y), 0)| |x-y| \leq \\
& \leq L(\varepsilon, b_0) |x-y|
\end{aligned}$$

onde

$$L(\varepsilon, b_0) = \sup_{0 < \rho < 1} |f'(t, y + \rho(x-y), \varepsilon) - f'(t, y + \rho(x-y), 0)|$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ b_0 \rightarrow 0}} L(\varepsilon, b_0) = 0 \quad \text{se} \quad |x|, |y| \leq b_0.$$

$$\dot{x} = \varepsilon(f(t, x, 0) + q_1(t, x, \varepsilon))$$

$$f(t, x, 0) - f(t, 0, 0) = A(t)x + r(t, x) \quad \text{onde} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(t, x)}{|x|} = 0$$

$$\dot{x} = \varepsilon[f(t, 0, 0) + A(t)x + r(t, x) + q_1(t, x, \varepsilon)].$$

Seja

$$q_2(t, x, \varepsilon) = r(t, x) + q_1(t, x, \varepsilon).$$

Provemos que  $q_2$  satisfaz as condições:

$$|r(0)| = 0$$

$$|r(t, x) - r(t, y)| =$$

$$= |f(t, x, 0) - f(t, 0, 0) - A(t)x - f(t, y, 0) + f(t, 0, 0) + A(t)y|$$

$$\begin{aligned}
& |x(t,x) - x(t,y)| = \\
& = |f(t,x,0) - f(t,y,0) - A(t)x + A(t)y| \leq \\
& \leq \sup_{0 < \rho < 1} |f'(t, y + \rho(x-y), 0) - A(t)| \cdot |x-y| \leq L_1(b_0) \cdot |x-y|
\end{aligned}$$

onde

$$L_1(b_0) = \sup_{0 < \rho < 1} |f'(t, y + \rho(x-y), 0) - A(t)|.$$

e

$$\lim_{b_0 \rightarrow 0} L_1(b_0) = 0.$$

Provemos que se  $q_1$  e  $q_2$  satisfazem as propriedades de  $q$ . Então  $q_1 + q_2$  também satisfaz:

$$q_1(t, x, \varepsilon) + q_2(t, x, \varepsilon)$$

$$|q_1(t, 0, \varepsilon) + q_2(t, 0, \varepsilon)| \leq |q_1(t, 0, \varepsilon)| + |q_2(t, 0, \varepsilon)| \leq M_1(\varepsilon) + M_2(\varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_1(\varepsilon) + M_2(\varepsilon) = 0$$

$$|q_1(t, x, \varepsilon) + q_2(t, x, \varepsilon) - q_1(t, y, \varepsilon) - q_2(t, y, \varepsilon)| \leq$$

$$\leq |q_1(t, x, \varepsilon) - q_1(t, y, \varepsilon)| + |q_2(t, x, \varepsilon) - q_2(t, y, \varepsilon)| \leq$$

$$\leq L_1(\varepsilon, b_0) |x-y| + L_2(\varepsilon, b_0) |x-y| = (L_1(\varepsilon, b_0) + L_2(\varepsilon, b_0)) |x-y|$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ b_0 \rightarrow 0}} L_1(\varepsilon, b_0) + L_2(\varepsilon, b_0) = 0$$

Portanto  $q_2(t, x, \epsilon) = r(x) + q_1(t, x, \epsilon)$  satisfaz as condições de  $q$ .

Portanto

$$\dot{x} = \epsilon (f(t, 0, 0) + \Lambda(t)x + q_2(t, x, \epsilon))$$

$$\dot{x} = \epsilon (\Lambda x + \Lambda(t)x - \Lambda x + f(t, 0, 0) + q_2(t, x, \epsilon)) =$$

$$= \epsilon (\Lambda x + (\Lambda(t) - \Lambda)x + h(t) + q_2(t, x, \epsilon)) \quad \text{onde}$$

$h(t) = f(t, 0, 0)$  e  $\Lambda = \frac{\partial f_0(0)}{\partial x}$  e temos  $M(h(t)) = 0$  por hipótese.

$$M(\Lambda(t) - \Lambda) = 0 \quad \text{pois} \quad \Lambda(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0, 0) \quad \text{e}$$

$M(\Lambda(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0, 0) dt(a)$ . Como  $\frac{\partial f}{\partial x}$  é uniformemente contínua temos que (a) é igual.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_0^T f(t, 0, 0) dt = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, 0, 0) dt = \frac{\partial}{\partial x} M(f(t, 0, 0)).$$

Portanto

$$M(\Lambda(t)) = \frac{\partial}{\partial x} M(f(t, 0, 0)) = \frac{\partial}{\partial x} M(f_0(0)) = M\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}(0)\right) = M(\Lambda).$$

Façamos a mudança de variável

$$x = (I + \epsilon C(t, \epsilon))y + \epsilon g(t, \epsilon)$$

$$y = (I + \epsilon C(t, \epsilon))^{-1}(x - \epsilon g(t, \epsilon)) =$$

$$= (I - \epsilon D(t, \epsilon))(x - \epsilon g(t, \epsilon))$$

$$\dot{y} = -\varepsilon \frac{\partial D}{\partial t}(x - \varepsilon g(t, \varepsilon)) + (I - \varepsilon D(t, \varepsilon))(\dot{x} - \frac{\partial g}{\partial t})$$

Substituindo na equação temos:

$$\begin{aligned} \dot{y} = & -\varepsilon \frac{\partial D}{\partial t}((I + \varepsilon C(t, \varepsilon))y + \varepsilon g(t, \varepsilon) - \varepsilon g(t, \varepsilon)) + \\ & + (I - \varepsilon D(t, \varepsilon))\{A[(I + \varepsilon C(t, \varepsilon))y + \varepsilon g(t, \varepsilon)] + \\ & + (A(t) - A)[(I + \varepsilon C(t, \varepsilon))y + \varepsilon g(t, \varepsilon)] + \\ & + h(t) + q_2(t, x, \varepsilon) - \frac{\partial g}{\partial t}(t, \varepsilon)\}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\dot{y} = \varepsilon [Ay + (\Lambda(t) - A - \frac{\partial D}{\partial t})y + h(t) - \frac{\partial g}{\partial t}(t, \varepsilon) + q_4(t, y, \varepsilon)].$$

Como  $h(t) \in A.P.$  e  $\dot{g} = -\varepsilon g$  é não crítico pois  $-\varepsilon$  é auto-valor com parte real diferente de zero, existe uma única solução  $g$  da equação  $\dot{g} = -\varepsilon g + h(t)$ , e a solução é dada por:

$$g(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t e^{-\varepsilon(t-s)} h(s) ds \quad \text{e} \quad M(h) = 0.$$

Aplicando o teorema anterior temos que

$$h(t) - \frac{\partial g}{\partial t}(t, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

e

$$A(t) - A - \frac{\partial D}{\partial t} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Portanto

$$\dot{y} = \varepsilon [Ay + q_4(t, y, \varepsilon)] \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Então pelo teorema 1.6 temos que existe  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $x^*(t, \varepsilon)$ ,  $0 \leq t \leq c_0$  tal que  $x^*(t, \varepsilon)$  é contínua, é solução, está em A.P. e  $\text{mod}(x^*(\cdot, \varepsilon)) \subset \text{mod}(f(\cdot, x, \varepsilon))$  e  $x^*(t, 0) = 0$ .

Além disso se  $\text{Re} \lambda(\Lambda) < 0$ ,  $x^*(t, \varepsilon)$  é U.A.S., e se algum tiver parte real maior que zero é instável.

## CAPÍTULO III

### Aplicações do Método da Média

#### 1ª Aplicação:

Seja  $\ddot{x} - \epsilon(1-x^2)\dot{x} + x = 0$ . Mostre que para  $\epsilon$  pequeno, a solução do sistema se aproxima da solução do sistema para  $\epsilon = 0$ .

O sistema  $\ddot{x} - \epsilon(1-x^2)\dot{x} + x = 0$  pode ser escrito:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = \epsilon(1-x^2)y - x.$$

Façamos a seguinte mudança de variável:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = -r \sin \theta$$

Temos que:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = -\dot{r} \sin \theta - r \cos \theta \dot{\theta}$$

Então

$$\dot{x} \cos \theta = \dot{r} \cos^2 \theta - r \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}$$

$$-\dot{y} \sin \theta = \dot{r} \sin^2 \theta + r \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}.$$

Portanto

$$\dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta = \dot{r}$$

Então

$$\dot{r} = y \cos \theta - [\epsilon(1-r^2)y - x] \sin \theta$$

$$\dot{\theta} = (-r \sin \theta) \cos \theta - [\epsilon(1-r^2 \cos^2 \theta)(-r \sin \theta) - r \cos \theta] \sin \theta$$

$$\dot{r} = -r \sin \theta \cos \theta - [\epsilon(1-r^2 \cos^2 \theta)(-r \sin^2 \theta)] + r \sin \theta \cos \theta$$

$$\dot{r} = \epsilon(1-r^2 \cos^2 \theta)(r \sin^2 \theta).$$

Temos que:

$$\dot{x} \sin \theta = \dot{r} \cos \theta \sin \theta - r \sin^2 \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{y} \cos \theta = -\dot{r} \cos \theta \sin \theta - r \cos^2 \theta \dot{\theta}.$$

Então:

$$\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta = -r \dot{\theta}.$$

Portanto

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{r}(\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{r}\{-r \sin^2 \theta + [\epsilon(1-r^2 \cos^2 \theta)(-r \sin \theta) - (r \cos \theta)] \cos \theta\}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{r}[-r + \epsilon(1-r^2 \cos^2 \theta)(-r \cos \theta \sin \theta)]$$

$$\dot{\theta} = 1 + \epsilon(1-r^2 \cos^2 \theta)(\cos \theta \sin \theta)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \frac{\epsilon(1-r^2 \cos^2 \theta)(r \sin^2 \theta)}{1 + \epsilon(1-r^2 \cos^2 \theta)(\cos \theta \sin \theta)} = \epsilon \frac{(1-r^2 \cos^2 \theta) r \sin^2 \theta}{1 + \epsilon(1-r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = c f(r, \theta, c).$$

Onde

$$f(r, \theta, c) = \frac{(1-r^2 \cos^2 \theta) r \sin^2 \theta}{1+c(1-r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta}$$

$$f(r, \theta, 0) = (1-r^2 \cos^2 \theta) r \sin^2 \theta = r \sin^2 \theta - r^3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta.$$

$$f_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r \sin^2 \theta - r^3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) d\theta.$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2 \theta d\theta = \frac{r}{2\pi} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{r\pi}{2\pi} = \frac{r}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{r^3}{2\pi} \left[ \frac{\theta}{8} - \frac{\sin 4\theta}{32} \right]_0^{2\pi} = \frac{r^3}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{8} = \frac{r^3}{8}$$

Portanto

$$f_0(r) = \frac{r}{2} - \frac{r^3}{8} = \frac{r}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{4} \right).$$

Mas  $f_0(r) = 0$  se e somente se

$$\frac{r}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{4} \right) = 0.$$

Então temos que:

$$r = 0$$

ou

$$r = \pm 2$$

$$f'_0(r) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{4} \right) + \frac{r}{2} \left( -\frac{2r}{4} \right) = \frac{4 - 3r^2}{8}.$$

$(f'_0(r))_0 = \frac{1}{2}$ . Então zero é instável.

$(f'_0(r))_{-2} = -1$ . Então -2 é estável.

$(f'_0(r))_2 = -1$ . Então 2 é estável.

## 2.<sup>a</sup> Aplicação:

Consideremos a equação

$$(I) \quad \dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = -z_1 + \varepsilon(1-z_1^2)z_2 + A\sin\omega_1 t + B\sin\omega_2 t.$$

onde  $\varepsilon > 0$ ,  $\omega_1 > 0$ ,  $\omega_2 > 0$ ,  $A, B$  são constantes reais e  $m + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \neq 0$  para todos os inteiros  $m, m_1, m_2$  com  $|m| + |m_1| + |m_2| \leq 4$ . (II)

Para  $\varepsilon = 0$ , a solução geral de (I) é dada por:

$$(III) \quad \begin{aligned} z_1 &= x_1 \cos t + x_2 \sin t + A_1 \sin\omega_1 t + B_1 \sin\omega_2 t \\ z_2 &= -x_1 \sin t + x_2 \cos t + A_1 \omega_1 \cos\omega_1 t + B_1 \omega_2 \cos\omega_2 t \end{aligned}$$

onde  $A_1 = \frac{A}{1-\omega_1^2}$ ,  $B_1 = \frac{B}{1-\omega_2^2}$  e  $x_1, x_2$  constantes arbitrárias.

Consideremos o sistema (III) como uma mudança de variável.

As equações em  $x_1$  e  $x_2$  são dadas por:

$$\dot{x}_1 = -\epsilon(1-z_1^2)z_2 \text{sent}$$

(IV)

$$\dot{x}_2 = \epsilon(1-z_1^2)z_2 \text{cost}$$

onde  $z_1$  e  $z_2$  são funções dadas por (III).

O sistema IV é um caso particular de  $\dot{x} = \epsilon f(t, z_1, z_2, \epsilon)$  e os coeficientes quase periódicos do lado direito tem frequência básica  $1, \omega_1, \omega_2$ .

$$f(t, z_1, z_2, \epsilon) = -(1-z_1^2)z_2 \text{sent.}$$

$$g(t, z_1, z_2, \epsilon) = (1-z_1^2)z_2 \text{cost.}$$

$$f(t, z_1, z_2, 0) = -(1-z_1^2)z_2 \text{sent.}$$

$$g(t, z_1, z_2, 0) = (1-z_1^2)z_2 \text{cost.}$$

As médias das funções  $f$  e  $g$  em relação a  $t$  são dadas abaixo obedecendo as condições (II)

$$f_0(z_1, z_2) = M(f(t, z_1, z_2, 0)) = \frac{1}{8} x_1 [2(2-A_1^2-B_1^2) - (x_1^2+x_2^2)]$$

$$g_0(z_1, z_2) = M(g(t, z_1, z_2, 0)) = \frac{1}{8} x_2 [2(2-A_1^2-B_1^2) - (x_1^2+x_2^2)]$$

Temos que  $x_1 = x_2 = 0$  é solução de

$$\dot{x}_1 = \epsilon f_0(z_1, z_2)$$

$$\dot{x}_2 = \epsilon g_0(z_1, z_2)$$

$$A = \left( \frac{\partial(f_0, g_0)}{\partial(x_1, x_2)} \right)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2-A_1^2-B_1^2) & -\frac{1}{4}x_1 & -\frac{1}{4}x_2 \\ -\frac{1}{4}x_1 & \frac{1}{4}(2-A_1^2-B_1^2) & -\frac{1}{4}x_2 \end{pmatrix}_{(0,0)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2-A_1^2-B_1^2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(2-A_1^2-B_1^2) \end{pmatrix}$$

Os auto-valores de A são:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2-A_1^2-B_1^2) - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(2-A_1^2-B_1^2) - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \left[ \frac{1}{4}(2-A_1^2-B_1^2) - \lambda \right]^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}(2-A_1^2-B_1^2)\lambda + \frac{1}{16}(2-A_1^2-B_1^2)^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2}(2-A_1^2-B_1^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(2-A_1^2-B_1^2)^2 - \frac{1}{4}(2-A_1^2-B_1^2)^2}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(2-A_1^2-B_1^2) \quad \text{Raiz dupla.}$$

Para aplicarmos o Teorema da Média precisamos ter:

$$2-A_1^2-B_1^2 \neq 0 \quad \text{ou seja} \quad A_1^2+B_1^2 \neq 2.$$

Se  $A_1^2 + B_1^2 > 2$  então zero para  $\epsilon = 0$  é uniformemente assintoticamente estável, e se  $A_1^2 + B_1^2 < 2$ , então é instável.

A solução de (I) para  $\epsilon = 0$  é dada por:

$$z_1(t) = A_1 \operatorname{sen} \omega_1 t + B_1 \operatorname{sen} \omega_2 t$$

$$z_2(t) = z_1(t).$$

Observação: Verificamos que na aplicação (1) do Teorema da Média

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = -z_1 + \epsilon(1-z_1^2)z_2$$

o zero é instável para  $\epsilon = 0$ , e quando acrescentamos o termo forçado que é o caso da aplicação em questão, o zero pode ser estável ou instável dependendo das condições de  $A_1^2 + B_1^2$  ser maior ou menor que 2.

### 3ª Aplicação:

A equação de um pêndulo plano com suporte oscilando verticalmente e senoidalmente pode ser escrita como:

$$x'' + cx' + \frac{g - I\omega^2 \operatorname{sen} \omega t}{\ell} \operatorname{sen} x = 0$$

$$\text{Se } \tau = \omega t, \quad \frac{I}{\ell} = \epsilon, \quad \epsilon^2 k^2 = \frac{g}{\ell \omega^2}, \quad \frac{c}{\omega} = 2\epsilon\alpha \quad \text{temos:}$$

$$\ddot{x} + 2\epsilon\alpha \dot{x} + (\epsilon^2 k^2 - \epsilon \operatorname{sen} \tau) \operatorname{sen} x = 0 \quad = \frac{d}{d\tau}$$

Mostre que o sistema para  $\epsilon$  pequeno tem soluções periódicas de período  $\frac{2\pi}{\omega}$  quando  $\theta$  está numa vizinhança de 0 ou de  $\pi$  ou de  $2\pi$  e de  $\arccos -2k^2$ . Determine as propriedades de estabilidade como função de  $\alpha$  e  $k$ .

Transforma as variáveis  $\phi$  e  $\Omega$  por:

$$x = \phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi$$

$$\dot{x} = \epsilon \Omega - \epsilon \cos \tau \sin \phi$$

e use o Teorema da Média.

Temos:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -2\epsilon \alpha y - (\epsilon^2 k^2 - \epsilon \sin \tau) \sin(\phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi)$$

ou seja

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -2\epsilon^2 \alpha \Omega + 2\epsilon^2 \alpha \cos \tau \sin \phi - (\epsilon^2 k^2 - \epsilon \sin \tau) \sin(\phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi)$$

ou

$$\epsilon \Omega - \epsilon \cos \tau \sin \phi = \dot{\phi} - \epsilon \cos \tau \sin \phi - \epsilon \sin \tau \cos \phi \cdot \dot{\phi}$$

$$\begin{aligned} -2\epsilon^2 \alpha \Omega + 2\epsilon^2 \alpha \cos \tau \sin \phi - \epsilon^2 k^2 \sin(\phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi) + \epsilon \sin \tau \sin(\phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi) &= \\ &= \epsilon \dot{\Omega} + \epsilon \sin \tau \cdot \sin \phi - \epsilon \cos \tau \cos \phi \cdot \dot{\phi} \end{aligned}$$

Temos:

$$\dot{\phi} = \epsilon \frac{\Omega}{1 - \epsilon \sin \tau \cos \phi}$$

Portanto

$$\dot{\phi} = \epsilon f(\phi, \Omega, \epsilon)$$

onde

$$f(\phi, \Omega, \epsilon) = \frac{\Omega}{1 - \epsilon \sin \tau \cos \phi}$$

$$\epsilon \dot{\Omega} = -\epsilon \sin \tau \sin \phi + \epsilon \cos \tau \cos \phi \cdot \dot{\phi} - 2\epsilon^2 \alpha \Omega + 2\epsilon^2 \alpha \cos \tau \sin \phi - \epsilon^2 k^2 \sin(\phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi) + \\ + \epsilon \sin \tau \sin(\phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi)$$

$$\dot{\Omega} = -\sin \tau \sin \phi + \cos \tau \cos \phi \cdot \dot{\phi} - 2\epsilon \alpha \Omega + 2\epsilon \alpha \cos \tau \sin \phi - \epsilon k^2 \sin(\phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi) + \\ + \sin \tau \sin(\phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi).$$

Mas:

$$\dot{\Omega} = -\sin \tau \sin \phi + \epsilon \sin^2 \tau \cos \phi \sin \phi + \epsilon \Omega \cos \tau \cos \phi - 2\epsilon \alpha \Omega + 2\epsilon^2 \alpha \Omega \sin \tau \cos \phi + \\ + 2\epsilon \alpha \cos \tau \sin \phi - 2\epsilon^2 \alpha \cos \tau \sin \phi \sin \tau \cos \phi - \epsilon k^2 \sin(\phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi) + \\ + \epsilon^2 k^2 \sin \tau \cos \phi \sin(\phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi) + \sin \tau \sin(\phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi) - \\ - \epsilon \sin^2 \tau \cos \phi \sin(\phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi) / (1 - \epsilon \sin \tau \cos \phi)$$

Mas

$$\sin(\phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi) = \sin \phi \cos(\epsilon \sin \tau \sin \phi) - \cos \phi \sin(\epsilon \sin \tau \sin \phi).$$

Expandindo em série  $\cos(\epsilon \sin \tau \sin \phi)$  e  $\sin(\epsilon \sin \tau \sin \phi)$  e considerando apenas os termos em  $\epsilon$ , pois os termos em  $\epsilon^2, \epsilon^3, \dots$

não contribuem para a Média, temos:

$$\sin(\epsilon \sin \tau \sin \phi) = \epsilon \sin \tau \sin \phi$$

$$\cos(\epsilon \sin \tau \sin \phi) = 1$$

Portanto

$$\sin(\phi - \epsilon \sin \tau \sin \phi) = \sin \phi - \epsilon \sin \tau \cos \phi \sin \phi.$$

Então

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} = & -\sin \tau \sin \phi + \epsilon \sin^2 \tau \cos \phi \sin \phi + \epsilon \Omega \cos \tau \cos \phi - 2\epsilon \alpha \Omega + 2\epsilon^2 \alpha \Omega \sin \tau \cos \phi + \\ & + 2\epsilon \alpha \cos \tau \sin \phi - 2\epsilon^2 \alpha \cos \tau \sin \phi \sin \tau \cos \phi - \epsilon k^2 \sin \phi + \epsilon^2 k^2 \sin \tau \cos \phi \sin \phi + \\ & + \epsilon^2 k^2 \sin \tau \cos \phi \sin \phi - \epsilon^3 k^2 \sin^2 \tau \cos^2 \phi \sin \phi + \sin \tau \sin \phi - \epsilon \sin^2 \tau \cos \phi \sin \phi - \\ & - \epsilon \sin^2 \tau \cos \phi \sin \phi + \epsilon^2 \sin^3 \tau \cos^2 \phi \sin \phi / (1 - \epsilon \sin \tau \cos \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} = & \epsilon (-2\alpha \Omega + \Omega \cos \tau \cos \phi + 2\alpha \cos \tau \sin \phi - k^2 \sin \phi - \sin^2 \tau \cos \phi \sin \phi) + \\ & + \epsilon^2 (2\alpha \Omega \sin \tau \cos \phi - 2\alpha \cos \tau \sin \phi \sin \tau \cos \phi + 2k^2 \sin \tau \cos \phi \sin \phi + \sin^3 \tau \cos^2 \phi \sin \phi) - \\ & - \epsilon^3 k^2 \sin^2 \tau \cos^2 \phi \sin \phi / (1 - \epsilon \sin \tau \cos \phi) \end{aligned}$$

$$\dot{\Omega} = \epsilon g(\phi, \Omega, \epsilon)$$

$$\begin{aligned} \text{onde } g(\phi, \Omega, \epsilon) = & -2\alpha \Omega + \Omega \cos \tau \cos \phi + 2\alpha \cos \tau \sin \phi - k^2 \sin \phi - \sin^2 \tau \cos \phi \sin \phi + \\ & + \epsilon (2\alpha \Omega \sin \tau \cos \phi - 2\alpha \cos \tau \sin \phi \sin \tau \cos \phi + 2k^2 \sin \tau \cos \phi \sin \phi + \\ & + \sin^3 \tau \cos^2 \phi \sin \phi) - \epsilon^2 k^2 \sin^2 \tau \cos^2 \phi \sin \phi / (1 - \epsilon \sin \tau \cos \phi) \end{aligned}$$

$$g(\phi, \Omega, 0) = -2\alpha \Omega + \Omega \cos \tau \cos \phi + 2\alpha \cos \tau \sin \phi - k^2 \sin \phi - \sin^2 \tau \cos \phi \sin \phi.$$

$$f_0(\phi) = M(f(\phi, \Omega, 0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega d\tau = \Omega$$

$$g_0(\Omega) = M(g(\phi, \Omega, 0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-2\alpha\Omega + \Omega \cos\tau \cos\phi + 2\alpha \cos\tau \sin\phi - \\ - k^2 \sin\phi - \sin^2\tau \cos\phi \sin\phi) d\tau$$

$$\int_0^{2\pi} -2\alpha\Omega d\tau = [-2\alpha\Omega\tau]_0^{2\pi} = -4\pi\alpha\Omega.$$

$$\int_0^{2\pi} \Omega \cos\tau \cos\phi d\tau = \Omega \cos\phi [\sin\tau]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} 2\alpha \cos\tau \sin\phi d\tau = 2\alpha \sin\phi [\sin\tau]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} -k^2 \sin\phi d\tau = -2\pi k^2 \sin\phi$$

$$\int_0^{2\pi} -\sin^2\tau \cos\phi \sin\phi d\tau = -\cos\phi \sin\phi \left[ \frac{\tau}{2} - \frac{\sin 2\tau}{4} \right]_0^{2\pi} = -\pi \cos\phi \sin\phi.$$

Portanto

$$g_0(\Omega) = -2\alpha\Omega - k^2 \sin\phi - \frac{1}{2} \cos\phi \sin\phi.$$

Queremos

$$f_0(\phi) = 0$$

e

$$g_0(\Omega) = 0$$

Então

$$\Omega = 0$$

$$-k^2 \operatorname{sen} \phi - \frac{1}{2} \cos \phi \operatorname{sen} \phi = 0$$

Ou seja

$$\Omega = 0$$

$$\cos \phi = -2k^2$$

Portanto, temos

$$\Omega = 0$$

e

$$\phi = \arccos -2k^2, \text{ ou } 0, \text{ ou } \pi \text{ ou } 2\pi.$$

$$\left( \frac{\partial(f_o, g_o)}{\partial(\phi, \Omega)} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 \cos \phi + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \phi - \frac{1}{2} \cos^2 \phi & -2\alpha \end{pmatrix}$$

$$A = \left( \frac{\partial(f_o, g_o)}{\partial(\phi, \Omega)} \right) (0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 - \frac{1}{2} & -2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -k^2 - \frac{1}{2} & -2\alpha - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + k^2 + \frac{1}{2}$$

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + k^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\lambda = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4(k^2 + 1/2)}}{2}$$

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - k^2 - 1/2}$$

Primeiro caso: Se  $\alpha^2 - k^2 - \frac{1}{2} > 0$  temos duas raízes reais distintas e de sinais contrários, então o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é de sela.

Segundo caso: Se  $\alpha^2 - k^2 - \frac{1}{2} < 0$  as raízes são imaginárias.

Então precisamos considerar  $\text{Re} \lambda = -\alpha$ .

Se  $\alpha > 0$  então  $(0,0)$  é estável.

Se  $\alpha < 0$  então  $(0,0)$  é instável.

Analogamente para  $(2\pi, 0)$ .

Analisemos agora  $(\pi, 0)$ .

$$B = \left( \frac{\partial(f_0, g_0)}{\partial(\phi, \Omega)} \right)_{(\pi, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k^2 - \frac{1}{2} & -2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ k^2 - \frac{1}{2} & -2\alpha - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\alpha\lambda - k^2 + \frac{1}{2}$$

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda - k^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\lambda = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4(1/2 - k^2)}}{2}$$

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + k^2 - 1/2}$$

Primeiro caso: Se  $\alpha^2 + k^2 - \frac{1}{2} > 0$  então temos duas raízes reais distintas e de sinais contrários.

Então  $(\pi, 0)$  é um ponto de sela.

Segundo Caso: Se  $\alpha^2 + k^2 - \frac{1}{2} < 0$  temos duas raízes imaginárias. Então precisamos considerar  $\text{Re}(\lambda(B)) = -\alpha$ .

Se  $\alpha > 0$ . Então  $(\pi, 0)$  é estável.

Se  $\alpha < 0$ . Então  $(\pi, 0)$  é instável.

Consideremos agora o ponto  $(\arccos -2k^2, 0)$

$$C = \left( \frac{\partial(f_0, g_0)}{\partial(\phi, \Omega)} \right)_{(\arccos -2k^2, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2k^4 - \frac{1}{2}\cos^2\phi + \frac{1}{2}\sin^2(\arccos(-2k^2)) & -2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2k^4 + \frac{1}{2} & -2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\det(C - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} - 2k^4 & -\lambda - 2\alpha \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\alpha\lambda - \left(\frac{1}{2} - 2k^4\right)$$

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda - \left(\frac{1}{2} - 2k^4\right) = 0$$

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 1/2 - 2k^4}$$

Primeiro caso: Se  $\alpha^2 - 2k^4 + \frac{1}{2} > 0$ , temos duas raízes reais distintas e de sinais contrários. Portanto o ponto  $(\arccos - 2k^2, 0)$  é de sela.

Segundo caso: Se  $\alpha^2 - 2k^4 + \frac{1}{2} < 0$ . Precisamos verificar  $\text{Re} \lambda(C) = -\alpha$ .

Se  $\alpha > 0$ . Então  $(\arccos - 2k^2, 0)$  é estável.

Se  $\alpha < 0$ . Então  $(\arccos - 2k^2, 0)$  é instável.

4.<sup>a</sup> Aplicação: [4]

Faremos esta quarta aplicação usando o teorema:

Teorema: Seja

$$\dot{x} = (A + \varepsilon C(t))x + \varepsilon g(x, \varepsilon) + \varepsilon b(t) \quad (I)$$

onde  $x$ ,  $g(x, \varepsilon)$  e  $b(t)$  pertencem a  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $A$  é uma matriz semelhante a uma matriz diagonal com elementos imaginários puros, os elementos da  $n \times n$  matriz  $C(t)$  e  $b(t)$  são quase-periódicos e  $g$  e sua primeira derivada parcial com respeito a  $x$  são contínuas em  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ .

Seja:

$$C_0 = m(e^{-tA} C(t) e^{tA})$$

$$g_0(y) = m(e^{-tA} g(e^{tA} y, 0)) \quad e$$

$$b_0 = m(e^{-tA} b(t)).$$

Suponhamos que a equação

$$C_0 y + g_0(y) + b_0 = 0$$

tenha uma solução  $\bar{y}$  tal que todos os auto-valores de

$$C_0 + \frac{\partial g_0}{\partial y}(\bar{y})$$

tenham parte real diferente de zero. Então existe um  $\epsilon_0 > 0$  tal que para cada  $\epsilon$ ,  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ , a equação (I) tenha solução  $x(t, \epsilon)$  quase-periódica tal que

$$|x(t, \epsilon) - e^{tA} \bar{y}| \rightarrow 0$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$  uniformemente em  $t \in \mathbb{R}$ .

Demonstração:

Façamos a seguinte mudança de variável

$$x = e^{At} y$$

Portanto

$$\dot{x} = A e^{At} y + e^{At} \dot{y}$$

$$e^{At} \dot{y} + A e^{At} y = (A + \epsilon C(t)) e^{At} y + \epsilon g(e^{At} y, \epsilon) + \epsilon b(t)$$

$$\dot{y} = \frac{\epsilon C(t) e^{At} y + \epsilon g(e^{At} y, \epsilon) + \epsilon b(t)}{e^{At}} \quad (II)$$

$$\dot{y} = \epsilon \left( \frac{C(t) e^{At} y + g(e^{At} y, \epsilon) + b(t)}{e^{At}} \right)$$

Então

$$\dot{y} = \varepsilon f(t, y, \varepsilon)$$

onde

$$f(t, y, 0) = \frac{C(t)e^{\Lambda t}y + g(e^{\Lambda t}y, 0) + b(t)}{e^{\Lambda t}}$$

$$\begin{aligned} f_0(y) = M[f(t, y, 0)] &= M(e^{-\Lambda t}C(t)e^{\Lambda t}) + M(e^{-\Lambda t}g(e^{\Lambda t}y, 0)) + \\ &+ M(e^{-\Lambda t}b(t)) = 0 \end{aligned}$$

Chamando

$$C_0 = M(e^{-\Lambda t}C(t)e^{\Lambda t})$$

$$g_0(y) = M(e^{-\Lambda t}g(e^{\Lambda t}y, 0))$$

$$b_0 = M(e^{-\Lambda t}b(t))$$

Temos:

$$C_0 y + g_0(y) + b_0 = 0$$

$$A = \frac{\partial f_0}{\partial y}(0) = C_0 + g_0'(y) = 0$$

Estamos nas condições do Teorema da Média.

Então existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$  tal que

(II) tem uma solução A.P.  $y(t, \varepsilon)$ .

Portanto (I) tem uma solução quase-periódica  $x(t, \varepsilon)$

tal que

$$|x(t, \epsilon) - e^{-At} \bar{y}| \rightarrow 0$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$  uniformemente onde  $t$  está em  $R$ .

Aplicação:

Seja

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -y_1 + \epsilon v y_1 + \epsilon a_3 y_1^3 + \epsilon p(t)$$

onde  $va_3 < 0$  e  $p$  é uma função quase-periódica com série de Fourier

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos \lambda_j t + B_j \sin \lambda_j t$$

$$\text{e } A_1^2 + B_1^2 > 0 \quad \text{e } \lambda_1 = 1.$$

Para  $\epsilon = 0$  temos que

$$y_1 = z_1 \cos t + z_2 \sin t$$

$$y_2 = -z_1 \sin t + z_2 \cos t$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix}$$

$$g(y_1, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 y_1^3 \end{pmatrix}$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ p(t) \end{pmatrix}$$

$$C_0 = M(e^{-At} C(t) \cdot e^{At})$$

$$e^{-At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$e^{-At} C(t) e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$e^{-At} C(t) e^{At} = \begin{pmatrix} -v \sin t \cos t & \cos t & -v \sin^2 t \\ v \cos^2 t & & v \sin t \cos t \end{pmatrix}$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} M(-v \sin t \cos t) & M(-v \sin^2 t) \\ M(v \cos^2 t) & M(v \sin t \cos t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -v/2 \\ v/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{v}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_0 = M(e^{-At} b(t)) = \begin{pmatrix} M(-\sin t p(t)) \\ M(\cos t p(t)) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

$$g_0(y) = M(e^{-At} g(e^{At} y, 0))$$

$$\begin{aligned} e^{-At} g(e^{At} y, 0) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_3(\cos t y_1 + \sin t y_2)^3 \end{pmatrix} = \\ &= a_3 \begin{pmatrix} -\sin t(\cos t y_1 + \sin t y_2)^3 \\ \cos t(\cos t y_1 + \sin t y_2)^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$g_0(y) = a_3 \begin{pmatrix} -M[\sin t(\cos t y_1 + \sin t y_2)^3] \\ M[\cos t(\cos t y_1 + \sin t y_2)^3] \end{pmatrix}$$

$$g_0(y) = a_3 \begin{pmatrix} -M(\cos^3 t y_1^3 + 3\cos^2 t \sin t y_1^2 y_2 + 3\cos t \sin^3 t y_1 y_2^2 + \sin^4 t y_2^3) \\ M(\cos^4 t y_1^3 + 3\cos^3 t \sin t y_1^2 y_2 + 3\cos^2 t \sin^2 t y_1 y_2^2 + \cos t \sin^3 t y_2^3) \end{pmatrix}$$

$$g_0(y) = a_3 \begin{pmatrix} -3/8 y_1^2 y_2 - 3/8 y_2^3 \\ 3/8 y_1^3 + 3/8 y_1 y_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{III}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -v/2 \\ v/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -3/8 y_1^2 y_2 - 3/8 y_2^3 \\ 3/8 y_1^3 + 3/8 y_1 y_2^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-v/2 y_2 - 3/8 a_3 y_1^2 y_2 - 3/8 a_3 y_2^3 - B_1/2 = 0$$

IV

$$v/2 y_1 + 3/8 a_3 y_1^3 + 3/8 a_3 y_1 y_2^2 - A_1/2 = 0$$

Suponhamos sem perda de generalidade que  $A_1 = 0$  e  $B_1 > 0$ , pois podemos se necessário representar  $t$  por  $t + \omega$  com uma escolha própria de  $\omega$ .

Então temos:

$$-v/2 y_2 - 3/8 a_3 y_1^2 y_2 - 3/8 a_3 y_2^3 - B_1/2 = 0$$

V

$$v/2 y_1 + 3/8 a_3 y_1^3 + 3/8 y_1 y_2^2 = 0$$

O sistema V tem uma solução  $(y_1, y_2) = (0, \bar{y})$  visto que  $\bar{y}$  satisfaz:

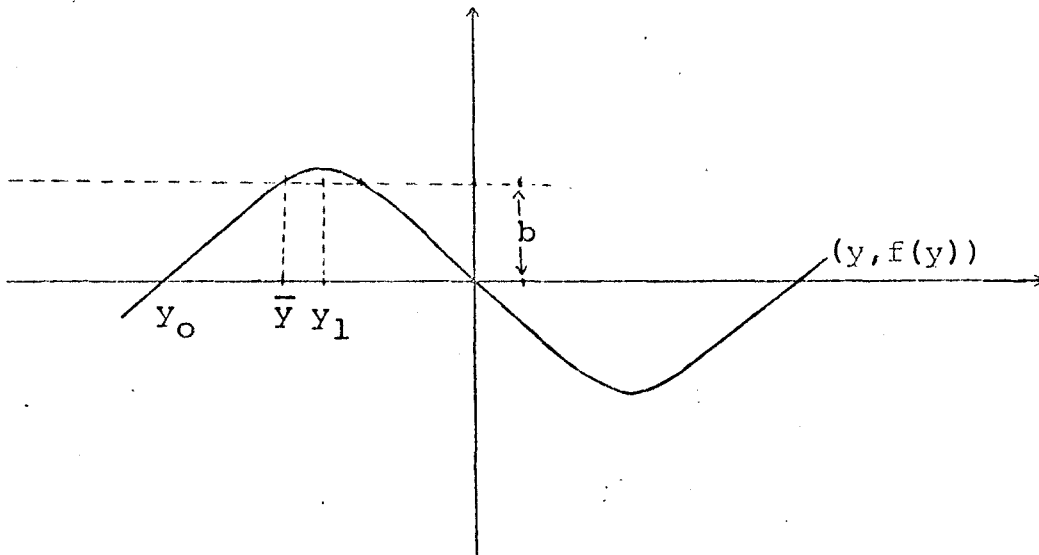
$$-3/4a_3\bar{y}^3 - v\bar{y} = B_1$$

Por hipótese  $va_3 < 0$

Suponhamos que  $a_3 < 0$  e  $v > 0$ .

Assim  $-3/4a_3 > 0$ .

Consideremos o gráfico de  $(y, f(y))$ , onde  $f(y) = -3/4a_3y^3 - vy$



Seja  $y_1$  o ponto negativo do qual  $f(y)$  tem um valor máximo e  $y_0$  o zero de  $f$ .

Então

$$y_0 = -\sqrt{-4v/3a_3}$$

$$f'(y) = -9/4a_3y^2 - v = 0$$

$$y = \pm \sqrt{-4v/9a_3}$$

$$f'(-\sqrt{-4v/9a_3}) = v > 0$$

Portanto

$$y_1 = -\sqrt{-4v/9a_3}$$

Tomemos  $v_0$  a raiz positiva de

$$2v/3\sqrt{-4v/9a_3} = B_1$$

isto é:

$$f(y_1) = B_1$$

Para  $v > v_0$ , existem três soluções reais de  $f(y)=b$ .

Escolhemos a solução  $\bar{y}$  de tal modo que

$$y_0 < \bar{y} < y_1$$

Então

$$\frac{\partial g_0}{\partial y}(0, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -9/8a_3\bar{y}^2 \\ 3/8a_3\bar{y}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim

$$VI \quad C_0 + \frac{\partial g_0}{\partial y}(0, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -v/2 - 9/8a_3\bar{y}^2 \\ v/2 + 3/8a_3\bar{y}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Mas

$$y_0^2 > \bar{y}^2 > y_1^2,$$

ou seja:

$$-4v/3a_3 > \bar{y}^2 > -4v/9a_3$$

isto é:

$$v/2 + 3/8a_3\bar{y}^2 > 0.$$

$$-v/2 - 9/8a_3\bar{y}^2 > 0.$$

Assim os elementos não nulos da matriz (IV) são ambos positivos e daí seus auto-valores são reais, não nulos, e de sentidos opostos.

Logo, pelo Teorema dado, existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , o sistema tem uma solução quase-periódica  $y(t, \varepsilon)$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] - HALE, J. K. - Ordinary Differential Equations  
Interscience, 1969.
- [2] - PONTRYAGYN, L. S. - Ordinary Differential Equations  
Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1962.
- [3] - BOGOLIUBOV, N. N. and V. A. MITROPOLSKII - Asymptotic Methods  
in the Theory of Nonlinear Oscillations  
Gordon and Breach, New York, 1961.
- [4] - SEIFERT, G. - Almost periodic solutions by the method of  
averaging  
Lectures Notes 243, 1971  
Japan-United States Seminar on Ordinary Differential and  
Functional Equations, 123-133.