


ERRATA nos 2 exemplares da dissertação do aluno Ariston Lopes Fernandes
Em folha ii:

Onde se lê:	
Área de concentração: Sistemas Dinâmicos	Desconsidere
Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática Universitária	Leia-se: Programa de Pós-Graduação: Matemática Universitária


Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta
Coordenador CPG/IMECC
Matric. 042471 - UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Uma abordagem de sistemas hamiltonianos no plano

Ariston Lopes Fernandes

Orientador: **Prof.º Dr. Fabiano Borges da Silva**

Uma abordagem de sistemas hamiltonianos no plano

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Ariston Lopes Fernandes e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 03 de Junho de 2011.



Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva (UFMA)
Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Axel Peter Winterhalder (UEMA)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Universitária.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Fernandes, Ariston Lopes
F391a Uma abordagem de sistemas hamiltonianos no plano/Ariston Lopes
Fernandes– Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : Fabiano Borges da Silva
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Sistemas hamiltonianos. 2.Geometria simplética. 3.Equações
diferenciais. 4.Campos vetoriais. I. Silva, Fabiano Borges da.
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: An approach to systems hamiltonian on the plane

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Hamiltonian systems. 2.Symplectic geometry.
3.Differential equations. 4.Vector fields.

Área de concentração: Sistemas dinâmicos

Titulação: Mestre em Matemática Universitária

Banca examinadora: Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva (UFMA)
Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Axel Peter Winterhalder (UEMA)

Data da defesa: 03/06/2011

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática Universitária

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 03 de junho de 2011 e
aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



Prof. (a). Dr (a). FABIANO BORGES DA SILVA



Prof. (a). Dr (a). PAULO REGIS CARON RUFFINO



Prof. (a). Dr (a). AXEL PETER WINTERHALDER

Agradecimentos

Inicialmente agradeço a Deus por ter me proporcionado mais esta realização, dando-me coragem necessária para enfrentar as ocasiões difíceis.

À minha mãe Rubenita pelo apoio que me deu ao longo desta jornada.

Aos meus familiares pelo incentivo.

Ao professor Fabiano Borges da Silva pela orientação segura.

Ao professor Axel Peter Winterhalder, que prestou valiosas informações para a realização deste trabalho.

Ao professor Paulo Regis Caron Ruffino pelo estudo atencioso desta dissertação.

A todo corpo docente do Programa.

Aos professores do Departamento de Matemática da UEMA.

A todas as pessoas que participaram, contribuindo para realização deste trabalho, direta ou indiretamente, meu agradecimento.

Resumo

Este trabalho tem como propósito estudar trajetórias geradas por sistemas hamiltonianos no plano. Para isso, são analisados os diversos tipos de retratos de fase dos sistemas lineares planares e a classificação destes. Sistemas hamiltonianos surgiram na mecânica clássica e seus pontos de equilíbrio são classificados em selas ou centros, conforme os sinais dos autovalores da matriz do sistema linearizado. Além disso, é apresentada a relação entre campos de vetores hamiltonianos e espaços vetoriais simpléticos.

Palavras-chave: Sistemas hamiltonianos, Geometria simplética, Equações diferenciais, Campos vetoriais.

Abstract

This work has the objective of studying trajectories generated by Hamiltonian systems on the plane. For this, we analyse the various types of phase portraits of planar and linear systems. Hamiltonian systems have emerged in the mechanical and their classical equilibrium points are classified into saddles or centers, as the signs of the eigenvalues of linearized system matrix. We have also illustrated the connection between Hamiltonian vector fields and symplectic spaces.

Keywords: Hamiltonian systems, Symplectic geometry, Differential equations, Vector fields.

Sumário

Introdução	1
1 Sistemas de Equações Diferenciais	4
1.1 Resolvendo Sistemas Lineares Planares	9
1.2 Exponencial de Matrizes	11
1.3 Linearização	17
1.3.1 Diferenciabilidade de uma Função	19
2 Retratos de Fase Para Sistemas Planares	21
2.1 Autovalores Reais, Distintos e Não Nulos	22
2.2 Autovalores Complexos	28
2.3 Autovalores Repetidos	31
2.4 Mudança de Coordenadas	33
3 Classificação dos sistemas planares	43
4 Sistemas Hamiltonianos	47
4.1 Mecânica clássica	47
4.2 Sistemas Hamiltonianos Planares	49
4.3 Gradiente Simplético	63

4.4	Considerações Finais	69
	Referências Bibliográficas	70

Introdução

Nesta trabalho estaremos interessados em estudar a classificação dos pontos críticos (pontos de equilíbrio) de sistemas hamiltonianos planares. Isto é feito através da linearização e da análise do plano traço-determinante. Mostramos que a função hamiltoniana é constante ao longo de cada solução ou trajetória desse sistema. Destacamos, também, que os pontos de equilíbrio do sistema hamiltoniano correspondem ao pontos críticos da função hamiltoniana. Além disso, definimos função newtoniana e relacionamos campos de vetores hamiltonianos com espaços vetoriais simpléticos.

Este trabalho está organizado como segue

- **Capítulo 1:** Começamos este capítulo definindo sistemas de equações diferenciais e ponto de equilíbrio de um sistema. Destacamos a diferença entre sistemas autônomos e não autônomos. Em seguida, definimos autovetor e autovalor de uma matriz e ilustramos uma técnica prática de como encontrá-los. Registramos a definição de exponencial de matrizes e calculamos a exponencial de algumas matrizes canônicas. Introduzimos, de maneira concisa, os conceitos de linearização e diferenciabilidade de uma função F de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 .
- **Capítulo 2:** Neste capítulo estudamos os retratos de fase para sistemas lineares planares. Classificamos os pontos de equilíbrio, de acordo com o formato dos autovalores da matriz do sistema. Por exemplo, se temos autovalores complexos puros, então o ponto de

equilíbrio do sistema é chamado centro, e assim por diante. Em seguida, apresentamos a mudança de coordenadas, que converte um sistema linear dado em outro na forma canônica.

- **Capítulo 3:** Este capítulo se baseia fortemente no anterior. Analisamos o traço e o determinante da equação característica da matriz A do sistema. O traço é a soma dos autovalores de A e o determinante é o produto dos autovalores de A . O traço e determinante nos diz quem são os autovalores de A , e portanto, praticamente tudo sobre a geometria das soluções de $X' = AX$. Por exemplo, os valores do traço e determinante nos conta se temos soluções em espiral estável ou instável, se temos uma sela, centro e assim por diante. Em seguida, confeccionamos o plano-TD (plano traço- determinante), onde aparecem os diversos tipos de pontos de equilíbrio.
- **Capítulo 4:** Iniciamos este capítulo mostrando que as equações de Hamilton podem ser obtidas a partir da segunda lei de Newton. Definimos sistemas hamiltonianos planares e ilustramos alguns exemplos. Provamos que a função hamiltoniana H permanece constante ao longo de cada solução do sistema. Realçamos a importância de saber que um dado sistema é hamiltoniano é o fato de que podemos esboçar seu retrato de fase, sem resolver o sistema.

Usamos o program *Maxima* (de uso livre) para calcular os pontos críticos e esboçar o retrato de fase de um sistema hamiltoniano não linear. Em seguida, mostramos que os pontos de equilíbrio de um sistema hamiltoniano só podem ser **selas** ou **centros**. Definimos sistemas newtonianos e verificamos que eles são hamiltonanos.

Por fim, fazemos a geometrização das equações de Hamilton, ou seja, explicitamos que o vetor $J_0 \nabla H$ é tangente às curvas de nível da função hamiltoniana H . Em seguida, verificamos que na geometrização do campo de vetores X_H , usamos a matriz J_0 e uma

base de \mathbb{R}^2 , que juntos definem uma forma bilinear, anti-simétrica e não-degenerada $\Omega_0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, concluímos que X_H é o único campo que verifica a equação

$$\Omega_0(X_H, v) = dH(v),$$

para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$, onde $dH(v)$ é a diferencial de H em v . Isto leva a definição de espaço vetoriais simpléticos, que é introduzida superficialmente.

Capítulo 1

Sistemas de Equações Diferenciais

Um sistema de equações diferenciais é uma coleção de n equações diferenciais inter-relacionadas da forma

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\x'_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\x'_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{1.0.1}$$

As f_j são funções de $n + 1$ variáveis reais x_1, x_2, \dots, x_n e t a valores reais. Salvo disposição em contrário, vamos supor que as f_j são de classe C^∞ . Isto significa que as derivadas parciais de todas as ordens de f_j existem e são contínuas.

Para simplificar a notação, usaremos a notação vetorial

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Frequentemente escrevemos o vetor X como (x_1, \dots, x_n) .

O sistema (1.0.1) pode então ser escrito sinteticamente como

$$X' = F(t, X), \quad (1.0.2)$$

onde

$$F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, X) \\ \vdots \\ f_n(t, X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

A solução do sistema (1.0.2) é uma função da forma $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$ tal que

$$X'(t) = F(t, X(t)),$$

onde $X'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$ e X_0 é o valor de $X(t)$ em $t = 0$.

Se nenhum dos f_j depende de t , o sistema de equações (1.0.2) é denominado de autônomo. Sendo assim, $X' = F(X)$. Neste trabalho, estaremos interessados em sistemas autônomos.

Obs: Quando $n = 2$, dizemos que o sistema $X' = F(X)$ é planar, e $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como

$$F(X) = F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)). \quad (1.0.3)$$

onde $X \in \mathbb{R}^2$.

Definição 1.0.1 *Um vetor X_0 para o qual $F(X_0) = 0$ é chamado um ponto de equilíbrio para o sistema $X' = F(X)$ com condição inicial $X_0 = X(0)$. Um ponto de equilíbrio corresponde a uma solução constante $X(t) \equiv X_0$ do sistema.*

Definição 1.0.2 *Seja $M(n)$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ reais. Um vetor não nulo V é chamado de autovetor de $A \in M(n)$ se $AV = \lambda V$ para algum λ . E a constante $\lambda \in \mathbb{R}$ é chamada de autovalor de A associado ao autovetor V .*

De acordo com a definição, um vetor $V \neq 0$ é autovetor se a imagem AV for um múltiplo escalar de V . No plano ou no espaço tridimensional dizemos que V e AV têm a mesma direção.

Note que λ pode ser o escalar 0, mas V não pode ser o vetor nulo 0.

Os autovetores são também rotulados de vetores próprios ou vetores característicos, e os autovalores de valores próprios ou valores característicos.

Exemplo 1.0.3 O vetor $V = (2, 1)$ é autovetor da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ associado ao autovalor $\lambda = 2$ pois

$$AV = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Há uma relação importante entre os autovalores, autovetores e soluções de sistemas de equações diferenciais da forma

$$X' = AX, \tag{1.0.4}$$

com $A \in M(n)$, como podemos ver no seguinte teorema.

Teorema 1.0.4 Seja V um autovetor da matriz A com autovalor associado λ . Então, a função $X(t) = e^{\lambda t}V$ é uma solução do sistema $X' = AX$.

Demonstração: Por hipótese, V é autovetor de A associado a λ , ou seja, $AV = \lambda V$. Então

$$\begin{aligned} X'(t) &= \lambda e^{\lambda t}V \\ &= e^{\lambda t}(\lambda V) \\ &= e^{\lambda t}(AV) \\ &= A(e^{\lambda t}V) \\ &= AX(t). \end{aligned}$$

Ou seja, $X(t)$ resolve o sistema de equações $X' = AX$, com condição inicial $X(0) = V$. \square

Exemplo 1.0.5 Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M(2)$. Então A possui vários autovetores na direção do autovetor particular $V_1 = (3, 1)$ com autovalor associado $\lambda = 2$, uma vez que

$$AV_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma, $V_2 = (1, -1)$ é um autovetor com autovalor associado $\lambda = -2$. Assim o sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X$$

possui três soluções: a solução de equilíbrio na origem, juntamente com

$$X_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Veremos mais adiante que podemos usar estas soluções para gerar todas as soluções do sistema. Mas primeiro mostraremos uma técnica de como obter autovalores e autovetores. De agora em diante, iremos trabalhar especificamente com matrizes 2×2 , pois será relevante para o estudo de fluxos hamiltonianos planares.

Para determinar um autovetor $V = (x, y)$ associado ao autovalor λ , devemos encontrar uma solução não-nula (x, y) da equação

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.0.5}$$

Seja $I = \text{diag}(1, 1) \in M(2)$ a matriz identidade. Então podemos reescrever a equação (1.0.5) como

$$(A - \lambda I)V = 0, \tag{1.0.6}$$

onde $0 = (0, 0)$.

Agora, $A - \lambda I$ é uma matriz de ordem 2 com entradas que envolvem a variável λ . Para que o sistema (1.0.6) admita soluções não nulas, isto é, $V \neq 0$ é necessário que $\det(A - \lambda I) = 0$. Esta equação é chamada equação característica da matriz A . Chamamos $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ de polinômio característico de A . Assim a estratégia para obter autovetores é primeiro encontrar as raízes da equação característica, que são os autovalores. Em seguida, usamos cada um desses autovalores para determinar um autovetor associado.

Exemplo 1.0.6 *Vamos obter os autovalores e autovetores da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como o polinômio característica de A é

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 5\lambda - 6, \end{aligned}$$

segue que $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$ é a equação característica da matriz A . As raízes desta equação são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$. E portanto estes valores são os autovalores da matriz A .

Vamos determinar agora os autovetores associados. Por meio da equação (1.0.6), ou seja, queremos encontrar $V = (x, y)$ tal que

$$\begin{pmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.0.7}$$

Substituindo λ pelo autovalor $\lambda_1 = 6$ no sistema (1.0.7), obtemos o autovetor associado ao autovalor

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{cases} -2x + 5y = 0 \\ 2x - 5y = 0. \end{cases}$$

O sistema admite infinitas soluções do tipo $y = \frac{2}{5}x$. Portanto, os vetores da forma $U = (x, \frac{2}{5}x) = x(1, \frac{2}{5})$, $x \neq 0$, são os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 6$.

Da mesma maneira, qualquer vetor da forma $V = (x, -x)$, $x \neq 0$, é um autovetor associado a $\lambda_2 = -1$.

O que foi feito acima com uma matriz $A \in M(2)$ pode ser generalizado de maneira análoga para matrizes $n \times n$.

1.1 Resolvendo Sistemas Lineares Planares

Como vimos no exemplo (1.0.5), se encontramos duas raízes reais λ_1 e λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) da equação característica, então podemos obter um par de soluções do sistema de equações diferenciais da forma $X_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i$, onde V_i é o autovetor associado a λ_i . Observemos que cada uma destas soluções está sobre uma reta que passa pela origem e tem direção do vetor V_i . Na verdade, $X_i(0) = V_i$ é um ponto não nulo no plano. Cada autovetor V_i da matriz A gera um subespaço unidimensional $[V_i] = \{aV_i; a \in \mathbb{R}\}$ de \mathbb{R}^2 que é invariante pela ação de A . Notemos que, se $\lambda_i > 0$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X_i(t)\| = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} X_i(t) = (0, 0).$$

O limite da norma de $X_i(t)$ tende a ∞ ao longo da reta $[V_i] = \{aV_i; a \in \mathbb{R}\}$ quando t aumenta, e $X_i(t)$ tende a origem ao longo desta reta quando t diminui. A situação oposta ocorre se $\lambda_i < 0$, enquanto que, se $\lambda_i = 0$, a solução $X_i(t)$ é a solução constante $X_i(t) = V_i$, para todo t em \mathbb{R} .

Agora, como podemos encontrar todas as soluções do sistema (1.0.4) quando se conhece um par de soluções particulares $X_1(t)$ e $X_2(t)$? A resposta é dada pelo seguinte teorema, que é demonstrado em Smale [4].

Teorema 1.1.1 *Se $A \in M(2)$ possui um par de autovalores reais $\lambda_1 \neq \lambda_2$ associados aos autovetores V_1 e V_2 , então a solução geral do sistema linear $X' = AX$ é dada por*

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} V_1 + \beta e^{\lambda_2 t} V_2.$$

Este Teorema é conhecido como o **princípio da linearidade**.

Exemplo 1.1.2 *Tomemos a equação diferencial ordinária de segunda ordem*

$$x'' + 3x' + 2x = 0.$$

Esta equação pode ser reescrita na forma de um sistema de equações de primeira ordem como

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -2x - 3y. \end{aligned}$$

Este sistema, por sua vez, ainda pode ser escrito como

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} X = AX,$$

onde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Usando o método do exemplo (1.0.6), obtemos $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ para os autovalores da matriz A . Assim, não é difícil verificar que um autovetor associado ao autovalor -1 é $V_1 = (1, -1)$, e um autovetor associado ao autovalor -2 é $V_2 = (1, -2)$. Como estes dois autovetores são LI, pelo teorema anterior a solução geral do sistema é

$$X(t) = \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1.2 Exponencial de Matrizes

Passamos agora a uma abordagem alternativa e elegante para resolver sistemas lineares usando a exponencial de uma matriz. Em certo sentido, este é o caminho mais natural de atacar esses sistemas.

Em cálculo, aprendemos que a função e^a possui a expansão por séries de potências dada por

$$\begin{aligned} e^a &= 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} a^j, \end{aligned}$$

que converge para todo número real a . Sendo assim, por analogia podemos definir a matriz exponencial de uma matriz $A \in M(n)$ como segue.

Definição 1.2.1 *Seja A uma matriz em $M(n)$. A exponencial de A é dada por*

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k,$$

onde $A^0 = I$, $A^1 = A$ e $A^{m+1} = A^m A$.

Às vezes, denotamos e^A por $\exp(A)$.

Com essa definição, e^A é uma matriz chamada exponencial de A .

A série de potências dada pela definição anterior converge no espaço normado $M(n)$, de acordo com Doering [2].

Exemplo 1.2.2 *Seja $I = \text{diag}(1, 1)$ a matriz identidade em $M(2)$. Pela definição de exponencial, temos que $\exp(0) = I$.*

Exemplo 1.2.3 Podemos calcular a exponencial de uma matriz diagonal $D = \text{diag}(\lambda, \mu) \in M(2)$. Como para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \mu^k \end{pmatrix},$$

a exponencial de D é dada por

$$\begin{aligned} \exp D &= I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} \\ &= \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\exp I = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.2.4 Vamos agora encontrar a exponencial da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. Com efeito,

$$\begin{aligned} A^0 &= I, \quad A^2 = -b^2 I, \quad A^3 = -b^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ A^4 &= b^4 I, \quad A^5 = b^5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \end{aligned}$$

Desenvolvendo a exponencial de A , obteremos

$$\begin{aligned}\exp(A) &= \exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix},\end{aligned}$$

pois ,

$$\begin{aligned}\cos b &= 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \dots \\ \sin b &= b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \dots\end{aligned}$$

Diferente do caso real, onde $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $e^{a+b} = e^a e^b$, para exponencial de matrizes isto nem sempre é verdade. Mais precisamente, temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em Perko [5].

Proposição 1.2.5 *Sejam A, B e C matrizes em $M(n)$. Então*

- i) Se $AB = BA$, então $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.*
- ii) Se $B = T^{-1}AT$, então $\exp(B) = T^{-1} \exp(A)T$.*
- iii) $\exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$.*

Sabemos que se $x = x(t)$ é uma função diferenciável em t , então a solução geral da equação diferencial ordinária $x' = ax$ é $x = ke^{at}$, onde k é um escalar. Temos uma solução análoga para os sistemas de equações diferenciais lineares $X' = AX$ que estamos considerando, e essa solução é dada por $X = e^{tA}X_0$, conforme o Teorema fundamental das equações diferenciais lineares (1.2.11). Daí a importância dos próximos exemplos, onde temos que calcular exponenciais do tipo e^{tA} .

Exemplo 1.2.6 Como as matrizes $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ comutam, segue que

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} &= \exp \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \right] = \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.7 Vamos encontrar a exponencial da matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$. Observemos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = 0 \in M(2).$$

Assim, por indução sobre $k \geq 2$ temos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}^k = 0 \in M(2).$$

Portanto,

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.2.8 As matrizes $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ comutam. Então segue que

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} &= \exp \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \right] = \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ be^a & e^a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, também temos que

$$\exp \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & be^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

E em particular que

$$\exp t \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} t\lambda & t \\ 0 & t\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}.$$

Há uma relação entre os autovetores de A e os de $\exp(A)$, que é o seguinte resultado.

Proposição 1.2.9 *Se $V \in \mathbb{R}^n$ é um autovetor de A associado ao autovalor λ , então V também é um autovetor de $\exp(A)$ associado a e^λ .*

Demonstração: Por hipótese, V é um autovetor da matriz A associado a λ . Isto significa que

$$AV = \lambda V$$

Assim,

$$\begin{aligned} \exp(A)V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k V}{k!} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} V \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) V \\ &= e^\lambda V \end{aligned}$$

□

Agora vamos voltar à definição de sistemas de equações diferenciais. Seja o sistema $X' = AX$ definido pela matriz $A \in M(n)$. Denotemos por $L(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial de todos os

operadores lineares T de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n . Podemos considerar a função $\mathbb{R} \mapsto L(\mathbb{R}^n)$, que atribui para cada t real a matriz $\exp(tA)$. Uma vez que $L(\mathbb{R}^n)$ é identificado com \mathbb{R}^{n^2} , o espaço dos n vetores colunas, faz sentido falar da derivada desta função. Ou seja, a função $t \mapsto \exp(tA)$ define um caminho no espaço euclidiano $M(n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ das matrizes que generaliza a função exponencial de números reais $t \mapsto e^{ta}$.

Proposição 1.2.10

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = e^{tA}A = Ae^{tA}$$

Em outras termos, a derivada do caminho $t \mapsto \exp(tA)$ é o caminho $t \mapsto A \exp(tA)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h} \\ &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - I}{h} \\ &= e^{tA}A \end{aligned}$$

onde o último limite é igual a matriz A e segue da definição de $\exp(hA)$. Como a matriz A comuta com cada termo da série $\exp(tA)$, então a matriz A comuta com $\exp(tA)$. \square

Vamos agora retomar as equações diferenciais. O resultado a seguir pode ser considerado como o Teorema fundamental das equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Sua demonstração pode ser encontrada em Doering [2].

Teorema 1.2.11 *Sejam A em $M(n)$ e X_0 em \mathbb{R}^n . Então, a solução do problema de valor inicial $X' = AX$ com $X(0) = X_0$ é $X(t) = \exp(tA)X_0$, onde $t \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 1.2.12 Considere o sistema $X' = AX$, onde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Pelo teorema anterior, a solução geral é dado por

$$X(t) = \exp(tA)X_0 = \exp \begin{pmatrix} t\lambda & t \\ 0 & t\lambda \end{pmatrix} X_0.$$

Usando o Exemplo (1.2.8), encontramos a solução

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} X_0.$$

1.3 Linearização

Em geral, é impossível escrever soluções explícitas de sistemas não lineares $X' = F(X)$ de equações diferenciais. A única exceção a isso ocorre quando temos soluções de equilíbrio. Desde que podemos resolver as equações algébricas $F(X) = 0$, podemos escrever os pontos de equilíbrio (soluções da equação) de forma explícita. Muitas vezes, essas são as soluções mais importante de tais sistemas. Sendo assim, podemos geralmente usar a técnica da **linearização** para determinar o comportamento das soluções próximo dos pontos de equilíbrio.

Definição 1.3.1 Um ponto $X_0 \in \mathbb{R}^2$ é chamado um ponto de equilíbrio ou ponto crítico do sistema $X' = F(X)$ se $F(X_0) = 0$. Um ponto de equilíbrio X_0 é chamado um ponto de equilíbrio hiperbólico desse sistema quando nenhum dos autovalores da matriz $A = DF(X_0)$ tem parte real zero. O sistema linear $X' = AX$, onde $A = DF(X_0)$, é denominado a linearização de $X' = F(X)$ em X_0 .

Para maiores detalhes sobre a derivada da função F o leitor pode ir para a subseção (1.3.1) desta dissertação.

De acordo com essa definição, analisamos o comportamento do sistema não linear

$$X' = F(X) \tag{1.3.8}$$

próximo de seus pontos de equilíbrio. O comportamento local do sistema (1.3.8) próximo de um ponto de equilíbrio hiperbólico X_0 é qualitativamente determinado pelo comportamento do sistema linear

$$X' = AX$$

com $A = DF(X_0)$, próximo de X_0 . Dizemos que $X' = AX$ é o campo linear associado a $X' = F(X)$. A função linear $AX = DF(X_0)X$ é chamada a parte linear de F em X_0 . Este comportamento local do sistema que é qualificado por um sistema linear é conhecido como o Teorema de Hartman-Grobman e pode ser visto em Perko [5].

Exemplo 1.3.2 *Linearizando o sistema planar $X' = F(X) = (x^2 - y^2 - 1, 2y)$, onde $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ obtemos o sistema linear $X' = AX$, onde*

$$\begin{aligned} A = DF(X) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Os únicos pontos de equilíbrio do sistema $X' = F(X)$ são $X_0 = (1, 0)$ e $X_0 = (-1, 0)$.

Em $X_0 = (1, 0)$, obtemos

$$A = DF(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dizemos que o sistema $X' = F(X)$ foi linearizado em $(1, 0)$.

Em $X_0 = (-1, 0)$, obtemos

$$A = DF(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dizemos que o sistema $X' = F(X)$ foi linearizado em $(-1, 0)$.

1.3.1 Diferenciabilidade de uma Função

Definição 1.3.3 A função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é diferenciável em $X_0 \in \mathbb{R}^2$ quando existe uma aplicação linear $DF(X_0) \in L(\mathbb{R}^2)$ que satisfaz

$$\lim_{B \rightarrow 0} \frac{|F(X_0 + B) - F(X_0) - DF(X_0)B|}{|B|} = 0$$

onde $| \cdot |$ é a norma Euclidiana em \mathbb{R}^2 e $B \in \mathbb{R}^2$.

A aplicação linear $DF(X_0) \in L(\mathbb{R}^2)$ é chamada a derivada de F em X_0 .

A função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser expressada como $F(X) = (f_1(X), f_2(X))$. As funções $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, são chamadas de funções coordenadas da função F .

A derivada parcial da função F é o vetor dado por

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(X) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(X), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(X) \right)$$

O teorema seguinte estabelecido por Rudin [7] nos dá um método para encontrar a derivada em coordenadas.

Teorema 1.3.4 Se $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é diferenciável em X_0 , então todas as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2$, existem em $X_0 = (k_1, k_2)$ e para todo $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$DF(X_0)X = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial F}{\partial x_j}(X_0)x_j$$

Notemos que para $E_1 = (1, 0)$ e $E_2 = (0, 1)$, temos

- i) $DF(X_0)E_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}(X_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) \right) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0)E_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0)E_2$
- ii) $DF(X_0)E_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2}(X_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) \right) = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0)E_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0)E_2$

Logo, a transformação linear $DF(X_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ possui a seguinte matriz associada com relação à base canônica

$$DF(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) \end{pmatrix}$$

Esta matriz é chamada de matriz jacobiana da função F no ponto X_0 .

Exemplo 1.3.5 *A derivada da função*

$$F(X) = (x_1 - x_2^2, x_1x_2 - x_2)$$

é dada por

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2x_2 \\ x_2 & -1 + x_1 \end{pmatrix}$$

Esta derivada calculada no ponto $X_0 = (1, -1)$ é

$$DF(1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição 1.3.6 *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável. Dizemos que F é continuamente diferenciável ou de classe C^1 , se a derivada $DF : \mathbb{R}^2 \rightarrow L(\mathbb{R}^2)$ é contínua em \mathbb{R}^2 .*

O próximo teorema dá um teste simples para decidir se a função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 .

Teorema 1.3.7 *Seja a função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Então, F é de classe C^1 se, e somente se, as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2$, existem e são contínuas em \mathbb{R}^2 .*

Demonstração: Esta demonstração pode ser vista em Rudin [7]. □

Geralmente, neste trabalho, assumimos que a função $F : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é continuamente diferenciável ou de classe C^1 , isto é, que a derivada $DF(X)$, considerada como uma função $DF : \mathbb{R}^2 \rightarrow L(\mathbb{R}^2)$, é uma função contínua de X em algum conjunto aberto $E \subset \mathbb{R}^2$.

Capítulo 2

Retratos de Fase Para Sistemas Planares

A classificação geométrica do comportamento das soluções dos sistemas lineares

$$X' = AX, \quad X(0) = (x_0, y_0)$$

planares pode ser dividido em três casos, conforme o Teorema 1.10 de Doering [2], isto é, de acordo com a quantidade (dois, um ou zero) de autovalores de $A \in M(2)$.

Notemos que cada solução $X = (x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de $X' = AX$ é uma curva parametrizada no plano, ou seja

$$X(t) = \{(x(t), y(t)) ; t \in \mathbb{R}\}$$

é o conjunto de pontos equipado com uma orientação dada pelo sentido de percurso com t crescente, desde $-\infty$ até ∞ . Quando traçamos uma solução no plano, indicamos o sentido de percurso com uma seta.

O **retrato de fase** do sistema linear $X' = AX$, com $X \in \mathbb{R}^2$, é uma figura que representa o conjunto de todas as soluções $X(t)$ desse sistema no plano, com diferentes condições iniciais.

Enfatizamos, neste trabalho, a construção de retratos de fase de sistemas dinâmicos.

Tendo em conta o princípio da linearidade do capítulo anterior, podemos agora encontrar a solução geral de qualquer sistema planar.

2.1 Autovalores Reais, Distintos e Não Nulos

Consideremos o sistema planar $X' = AX$ e suponhamos que A tenha dois autovalores reais não nulos $\lambda_1 < \lambda_2$. Há três casos a considerar

1. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
2. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
3. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Daremos um exemplo específico de cada caso. Qualquer sistema que cai em um destes três casos pode ser tratado de maneira semelhante.

Exemplo 2.1.1 *Primeiro, consideramos o sistema $X' = AX$, onde*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

com $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Este sistema pode ser resolvido de imediato, pois temos a seguir o sistema desacoplado em duas equações de primeira ordem independentes

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 x \\ y' &= \lambda_2 y. \end{aligned}$$

Sabemos resolver estas equações, mas vamos encontrar os autovalores e autovetores da matriz A . A equação característica é

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0,$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores. Um autovetor correspondente a λ_1 é $(1, 0)$ e para λ_2 é $(0, 1)$. Assim, de acordo com o Teorema (1.1.1) encontramos a solução geral

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\lambda_1 < 0$, as soluções sobre a reta da forma $\alpha e^{\lambda_1 t}(1, 0)$ estão no eixo- x e tendem a $(0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$. Este eixo é chamado *reta estável*. Quando $\lambda_2 > 0$, as soluções $\beta e^{\lambda_2 t}(0, 1)$ estão sobre o eixo- y e se afastam da origem quando $t \rightarrow \infty$; este eixo é a *reta instável*. Todas as outras soluções (com $\alpha, \beta \neq 0$) tendem para ∞ na direção da *reta instável*, quando $t \rightarrow \infty$, uma vez que $X(t)$ se aproxima cada vez mais de $(0, \beta e^{\lambda_2 t})$, na medida em que t aumenta. Quando $t \rightarrow -\infty$, estas soluções tendem para ∞ na direção da *reta estável*.

Na Figura (2.1), traçamos o retrato de fase deste sistema para $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. O retrato de fase é uma figura que representa uma coleção de soluções do sistema em \mathbb{R}^2 . O ponto de equilíbrio $(0, 0)$ de um sistema $X' = AX$ deste tipo (autovalores satisfazendo $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$) é chamado **sela**.

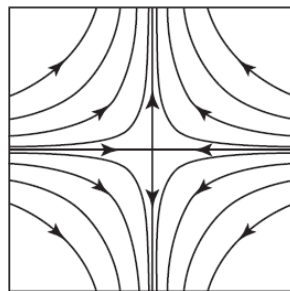


Figura 2.1: O retrato de fase para o sistema $x' = -x$ e $y' = y$.

Vamos dar agora um exemplo em que o sistema acima é rotacionado. Consideremos $X' = AX$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz A são ± 2 . O autovetor associado a $\lambda = 2$ é o vetor $(3, 1)$; o autovetor associado a $\lambda = -2$ é $(1, -1)$. Então, temos uma reta instável que contém as soluções da forma

$$X_1 = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cada uma das quais tende para longe da origem, quando $t \rightarrow \infty$. A reta estável contém as soluções

$$X_2 = \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

que tendem para a origem quando $t \rightarrow \infty$. Pelo Teorema (1.1.1), qualquer outra solução assume a forma

$$X(t) = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

para algum α e β . Notemos que, se $\alpha \neq 0$, quando $t \rightarrow \infty$, temos que $X(t)$ se aproxima de $X_1(t)$, isto é,

$$X(t) \cong \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1(t)$$

enquanto que, se $\beta \neq 0$, quando $t \rightarrow -\infty$,

$$X(t) \cong \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = X_2(t).$$

Assim, conforme aumenta o tempo, a solução geral se aproxima de $X_1(t)$, enquanto o tempo diminui, esta solução tende a $X_2(t)$, tal como no caso anterior. A Figura (2.2) mostra este retrato de fase.

No caso geral em que a matriz A tem um autovalor positivo e um negativo, sempre encontramos uma reta estável e instável em que as soluções tendem a origem ou se afastam dela. Todas as outras soluções se aproximam da reta instável, quando $t \rightarrow \infty$, e tendem a reta estável quando $t \rightarrow -\infty$.

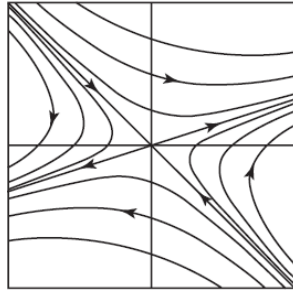


Figura 2.2: O retrato de fase para o sistema $x' = x + 3y$ e $y' = x - y$. A origem é um ponto de sela.

Exemplo 2.1.2 Agora vamos considerar o caso $X' = AX$ onde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

com $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Como no exemplo anterior, encontramos duas soluções sobre retas pela origem. A solução geral é dada por

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ao contrário do caso sela, agora todas as soluções tendem a $(0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$. A questão é: Como é que elas se aproximam da origem? Para responder isto, vamos calcular o coeficiente angular dy/dx de uma solução com $\beta \neq 0$ ou $\alpha \neq 0$. Escrevemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{\lambda_1 t} \\ y(t) &= \beta e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

e calculamos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\lambda_2 \beta e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 \alpha e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 \beta}{\lambda_1 \alpha} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}.$$

Desde que $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$, segue que estes coeficientes se aproximam de $\pm\infty$ (dado $\beta \neq 0$). Assim, estas soluções tendem a origem tangencialmente ao eixo- y .

Se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, então chamamos λ_1 o autovalor dominante ¹ e λ_2 o não dominante. A razão para isto, neste caso particular, é que as coordenadas x das soluções tendem a 0 muito mais rapidamente do que as coordenadas y . Isto explica por que as soluções (exceto os da reta correspondente ao autovalor λ_1) tendem a "abraçar" a solução sobre o eixo- y correspondente ao autovalor não dominante λ_2 , a medida que se aproximam da origem.

O retrato de fase desse sistema é mostrado na Figura (2.3). Nesse caso, o ponto de equilíbrio do sistema $X' = AX$, na origem $(0, 0)$, é chamado de um **poço ou atrator (nó estável)**.

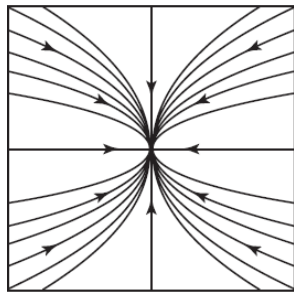


Figura 2.3: O retrato de fase para o sistema dado. A origem é um atrator ou poço.

Genericamente, se o sistema possui autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ com autovetores (u_1, u_2) e (v_1, v_2) , respectivamente, então a solução geral é

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

O coeficiente angular dy/dx desta solução geral é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_1 \alpha e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} u_2 + \lambda_2 \beta v_2}{\lambda_1 \alpha e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} u_1 + \lambda_2 \beta v_1},$$

que tende a inclinação v_2/v_1 do autovetor associado a λ_2 , exceto quando temos $\beta = 0$. Se $\beta = 0$, nossa solução é a reta que corresponde ao autovalor λ_1 . Assim, todas as soluções (exceto aquelas sobre a reta associada ao autovalor dominante) tendem a origem tangencialmente à reta associada ao autovalor não dominante λ_2 .

¹Autovalor dominante é um autovalor λ cujo valor absoluto é maior que todos os outros autovalores (Cf Poole [6]).

Exemplo 2.1.3 Quando a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

satisfaz $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, nosso campo de vetores pode ser considerado como a negativa do exemplo anterior. A solução geral e retrato de fase permanecem os mesmos, exceto que todas as soluções tendem agora para longe da origem $(0,0)$ ao longo dos mesmos caminhos. Ver Figura (2.4). Nesse caso, o ponto de equilíbrio na origem é chamado **fonte, repulsor ou nó instável**.

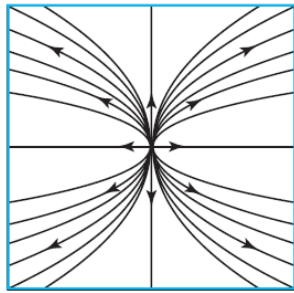


Figura 2.4: O retrato de fase para o sistema dado. A origem é um repulsor ou fonte (nó instável).

Todo sistema de equações diferenciais cuja matriz possui autovalores reais distintos pode ser manipulado em uma das formas vistas acima, através de mudança de coordenadas, conforme seção (2.4).

Finalmente, um caso especial ocorre quando um dos autovalores é igual a 0. Neste caso, há infinitos pontos de equilíbrio sobre uma reta. Se o outro autovalor λ é não nulo, então o sinal de λ determina se as outras soluções tendem para a reta ($\lambda < 0$) ou se afastam desta reta ($\lambda > 0$). Esta reta corresponde ao autovalor 0. Nesse caso, os pontos de equilíbrio são chamados de **pontos fixos não hiperbólicos**.

2.2 Autovalores Complexos

Quando a matriz A tem autovalores complexos, já não temos soluções sobre uma reta. No entanto, podemos ainda obter a solução geral como antes, usando algumas técnicas que envolvem números complexos e funções. Os exemplos a seguir indicam o procedimento geral.

Exemplo 2.2.1 (*Centro*) Considere o sistema linear $X' = AX$ com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

e $\beta \neq 0$. A equação característico é $\lambda^2 + \beta^2 = 0$, então os autovalores agora são os números imaginários $\pm i\beta$. O autovetor associado a $\lambda = i\beta$ é encontrado com a equação

$$\begin{pmatrix} -i\beta & \beta \\ -\beta & -i\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

que equivale a $i\beta x = \beta y$, pois a segunda equação é redundante. Assim, encontramos um autovetor complexo $(1, i)$, e então a função

$$X(t) = e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

é uma solução complexa de $X' = AX$.

Usando a fórmula de Euler temos que

$$e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \sin \beta t.$$

Assim podemos reescrever a solução como

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos \beta t + i \sin \beta t \\ i(\cos \beta t + i \sin \beta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta t + i \sin \beta t \\ -\sin \beta t + i \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Melhor ainda, quebrando $X(t)$ em suas partes real e imaginária, temos

$$X(t) = X_{Re}(t) + iX_{Im}(t)$$

onde

$$X_{Re}(t) = \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix}, X_{Im}(t) = \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Mas, agora vemos que tanto $X_{Re}(t)$ e $X_{Im}(t)$ são soluções reais para o sistema original. Para ver isto, basta verificar que

$$\begin{aligned} X'_{Re}(t) + iX'_{Im}(t) &= X'(t) \\ &= AX(t) \\ &= A(X_{Re}(t) + iX_{Im}(t)) \\ &= AX_{Re}(t) + iAX_{Im}(t). \end{aligned}$$

Igualando as partes real e imaginária desta equação encontramos $X'_{Re} = AX_{Re}$ e $X'_{Im} = AX_{Im}$, o que mostra que $X_{Re}(t)$ e $X_{Im}(t)$ são de fato soluções. Além disso, desde que as condições iniciais

$$X_{Re}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad X_{Im}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes, a combinação linear destas soluções

$$X(t) = c_1 X_{Re}(t) + c_2 X_{Im}(t) \tag{2.2.2}$$

fornece uma solução para qualquer problema de valor inicial, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

A solução (2.2.2) é a solução geral para o sistema $X' = AX$, como vimos na Seção (1.1).

Notemos que cada uma dessas soluções é uma função periódica de período $2\pi/\beta$. De fato, o retrato de fase mostra que todas as soluções estão sobre circunferências concêntricas, de centro

na origem. Estas circunferências são percorridas no sentido horário, se $\beta > 0$, e no sentido anti-horário, se $\beta < 0$. Este tipo de sistema é chamado centro. Veja a Figura (2.5).

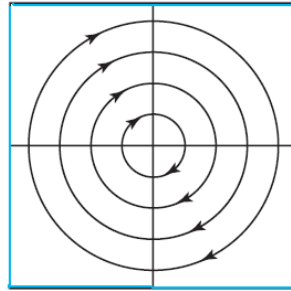


Figura 2.5: Retrato de fase para um centro. A origem é um centro. Neste caso, $\beta > 0$.

Exemplo 2.2.2 (*Espiral Estável, Espiral Instável*) Mais genericamente, consideremos $X' = AX$, onde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

e $\alpha, \beta \neq 0$. A equação característica é agora $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2 = 0$, de modo que os autovalores são $\lambda = \alpha \pm i\beta$. Um autovetor associado a $\alpha + i\beta$ é determinado de modo análogo a equação (2.2.1), que é equivalente a

$$-i\beta x + \beta y = 0.$$

Então, $(1, i)$ é novamente um autovetor. Assim, obtemos soluções complexas da forma

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + ie^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix} \\ &= X_{Re}(t) + iX_{Im}(t). \end{aligned}$$

Como foi dito acima, ambos $X_{Re}(t)$ e $X_{Im}(t)$ produzem soluções reais do sistema original, cujas condições iniciais $X_{Re}(0)$ e $X_{Im}(0)$ são linearmente independentes. Assim, encontramos a solução geral

$$X(t) = c_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + c_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Sem o termo $e^{\alpha t}$, estas soluções estariam periodicamente sobre circunferências centradas na origem. O termo $e^{\alpha t}$ converte soluções concêntricas em espirais que se aproximam da origem (quando $\alpha < 0$) ou se afastam dela (quando $\alpha > 0$). Nestes casos, o ponto de equilíbrio é chamado espiral estável (foco atrativo) ou espiral instável (foco repulsivo), respectivamente. Vide Figura (2.6).

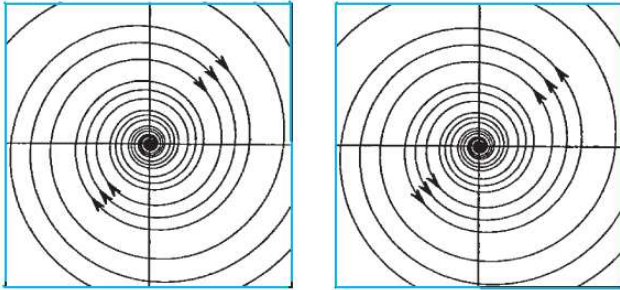


Figura 2.6: Retratos de fase para uma espiral estável e uma espiral instável.

2.3 Autovalores Repetidos

Os únicos casos restantes ocorrem quando a matriz A tem autovalores reais repetidos e não nulos. Um caso mais simples ocorre quando A é uma matriz diagonal da forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são ambos iguais a λ . Neste caso, cada vetor não nulo é um autovetor pois

$$AV = \lambda V$$

para todo $V \in \mathbb{R}^2$. Assim, as soluções são da forma

$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} V.$$

Cada uma destas soluções estão sobre a reta gerada por V e tendem para $(0, 0)$ (se $\lambda > 0$) ou se afastam de $(0, 0)$ (se $\lambda < 0$). Neste caso, o ponto de equilíbrio do sistema $X' = AX$, na origem $(0, 0)$, é chamado **nó próprio** (estável ou instável segundo λ por negativo ou positivo).

Vamos ver o caso em que a matriz A é da forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Novamente os dois autovalores são iguais a λ , mas agora há somente um autovetor linearmente independentes dado por $(1, 0)$. Assim, as soluções são da forma

$$X_1(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar outras soluções, observemos que o sistema $X' = AX$ pode ser escrito com

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + y \\ y' &= \lambda y. \end{aligned}$$

Então, se $y \neq 0$, devemos ter

$$y(t) = \beta e^{\lambda t}.$$

Portanto, a equação diferencial em $x = x(t)$ é

$$x' = \lambda x + \beta e^{\lambda t}. \tag{2.3.3}$$

Esta é uma equação diferencial de primeira ordem não autônoma em $x(t)$. Usando fator integrante visto no cálculo, obtemos uma solução da forma

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t} + \mu t e^{\lambda t}$$

para algumas constante α e β . Inserindo $x(t)$ na equação diferencial (2.3.3), obtemos $\mu = \beta$, enquanto α é arbitrário. Daí, a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que, se $\lambda < 0$, cada termo nesta solução tende a $(0, 0)$, quando $t \rightarrow \infty$. Isto é claro para os termos $\alpha e^{\lambda t}$ e $\beta e^{\lambda t}$. Para o termo $\beta t e^{\lambda t}$, isto é uma consequência imediata da regra de L'Hôpital. Assim, todas as soluções tendem a $(0, 0)$, quando $t \rightarrow \infty$ (ver Figura 2.7). Quando $\lambda > 0$, todas as soluções se afastam de $(0, 0)$. As órbitas perto da origem se acumulam todas numa única direção; o ponto de equilíbrio é chamado **nó impróprio**.

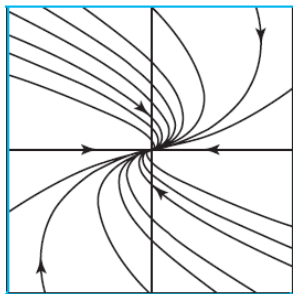


Figura 2.7: Retrato de fase para um sistema com autovalores negativos repetidos: nó impróprio estável

2.4 Mudança de Coordenadas

Apesar das diferenças nos retratos de fase associados aos sistemas $X' = AX$, temos lidado só com três tipos de matrizes, vistas nas três seções anteriores, uma vez que em Doering [2] é

mostrado que, para toda matriz real $A \in M(2)$, há uma matriz invertível P (cujas colunas consistem dos autovetores da matriz A), tal que a matriz

$$B = P^{-1}AP$$

possui uma das seguintes formas

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde λ pode ser igual a μ no primeiro caso.

Qualquer sistema $X' = AX$, onde A é uma matriz igual a uma das 3 tipos acima, é dito **sistema na forma canônica**.

Dado qualquer sistema linear $X' = AX$, podemos sempre trocar as coordenadas, de modo que a matriz dos coeficientes do novo sistema esteja na forma canônica. Vejamos como fazer isso.

Uma transformação linear em \mathbb{R}^2 é uma função $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ da forma

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Vamos denotar a transformação linear e sua matriz pela mesma letra T , de modo que fixada a base canônica podemos escrever

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Notemos T é a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ em relação à base canônica fixada $\beta = \{E_1, E_2\}$, onde $E_1 = (1, 0)$ e $E_2 = (0, 1)$.

Agora, em vez de considerar um sistema linear $X' = AX$, vamos considerar o seguinte sistema

$$Y' = BY, \quad \text{onde } B = T^{-1}AT \quad (2.4.4)$$

para alguma transformação linear invertível T , onde B é uma matriz igual a uma das 3 tipos acima. Observe que se $Y(t)$ é a solução deste novo sistema, então $X(t) = TY(t)$ é solução de $X' = AX$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} X'(t) &= (TY(t))' &= TY'(t) \\ &= T(T^{-1}AT)Y(t) \\ &= A(TY(t)) \\ &= AX(t) \end{aligned}$$

conforme requerido. Ou seja, a transformação linear T leva as soluções de $Y' = (T^{-1}AT)Y$ em soluções de $X' = AX$. Alternativamente, T^{-1} leva as soluções de $X' = AX$ em soluções $Y' = (T^{-1}AT)Y$.

Pensamos em T como uma mudança de coordenadas, que converte um dado sistema linear em outro sistema. Geralmente, queremos encontrar uma transformação linear T , que converta o sistema dado em um sistema da forma $Y' = (T^{-1}AT)Y$, que é mais fácil de ser resolvido. Podemos sempre encontrar uma transformação linear que converta um sistema linear dado em um na forma canônica.

Exemplo 2.4.1 (*Autovalores reais*) *Suponha que a matriz $A \in M(2)$ do sistema $X' = AX$ tenha dois autovalores distintos λ_1 e λ_2 . Sabemos da Álgebra linear que os autovetores associados V_1 e V_2 são LI. Seja T a matriz cujas colunas são V_1 e V_2 . Assim, $TE_i = V_i$, para $i = 1, 2$, onde $E_1 = (1, 0)$ e $E_2 = (0, 1)$ formam a base canônica de \mathbb{R}^2 . Também temos $T^{-1}V_i = E_i$,*

uma vez que T é invertível. Portanto

$$\begin{aligned}(T^{-1}AT)E_i &= T^{-1}AV_i = T^{-1}(\lambda_i V_i) \\ &= \lambda_i T^{-1}V_i \\ &= \lambda_i E_i\end{aligned}$$

Assim, a matriz $B = T^{-1}AT$ assume a forma canônica

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

e o sistema pode ser resolvido de acordo com Teorema (1.1.1).

Exemplo 2.4.2 Os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. Um autovetor associado a $\lambda_1 = -1$ é dado por $(1, 1)$ e um autovetor correspondente a $\lambda_2 = -2$ é $(0, 1)$.

Temos, portanto, um par de soluções sobre retas pela origem, cada uma se aproximando de $(0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$. A solução correspondente ao autovalor não dominante $\lambda_1 = -1$ está sobre a reta $y = x$; a solução associada ao autovalor dominante $\lambda_2 = -2$ está sobre o eixo- y . Todas as outras soluções tendem para a origem tangencialmente à reta $y = x$.

Para expressar o sistema $X' = AX$ na forma canônica, tomamos a matriz T cujas colunas são os autovetores de A , ou seja

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos que

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, calculamos

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

então B está na forma canônica. A solução geral do sistema $Y' = BY$ é dado por de acordo com o Teorema (1.1.1).

$$Y(t) = \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, a solução geral de $X' = AX$ é

$$\begin{aligned} X(t) = TY(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação linear T transforma o retrato de fase do sistema

$$Y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} Y$$

no retrato de $X' = AX$, como mostra a figura (2.8).

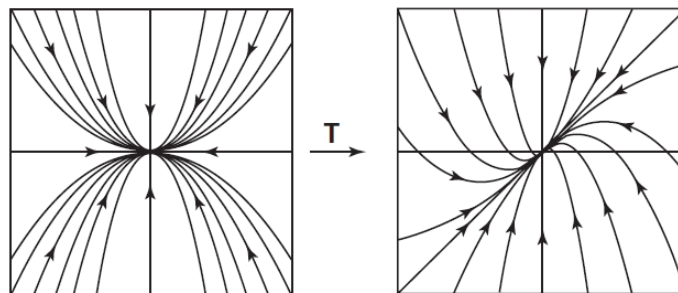


Figura 2.8: A mudança de variáveis T no caso de um nó estável (atrator ou poço).

Observe que não temos que passar pela etapa de conversão de um sistema específico para um sistema forma canônica; uma vez que temos os autovalores e autovetores, podemos simplesmente escrever a solução geral. Quando tentamos classificar todos os possíveis sistemas lineares, a forma canônica irá simplificar muito o processo.

Exemplo 2.4.3 (*Autovalores Complexos*) *Seja o sistema linear $X' = AX$, onde assumimos que matriz A possua autovalores complexos $\alpha \pm i\beta$, onde $\beta \neq 0$. Queremos encontrar a matriz $B = T^{-1}AT$ tal que o sistema inicial $X' = AX$ seja conjugado (equivalente) ao sistema $Y' = BY$. Com efeito, podemos encontrar um autovetor complexo $V_1 + iV_2$ correspondente a $\alpha + i\beta$, onde V_1 e V_2 são vetores reais. Afirmamos que V_1 e V_2 são vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^2 . Se não fosse este o caso, teríamos $V_1 = cV_2$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Assim temos*

$$A(V_1 + iV_2) = (\alpha + i\beta)(V_1 + iV_2) = (\alpha + i\beta)(c + i)V_2.$$

Por outro lado

$$A(V_1 + iV_2) = (c + i)AV_2.$$

Assim, concluímos que $AV_2 = (\alpha + i\beta)V_2$. Ou seja, chegamos a uma contradição, pois o lado esquerdo é um vetor real, enquanto o direito é complexo.

Desde que $V_1 + iV_2$ é um autovetor associado a $\alpha + i\beta$, temos

$$A(V_1 + iV_2) = (\alpha + i\beta)(V_1 + iV_2).$$

Igualando as partes real e imaginária desta igualdade, encontramos

$$AV_1 = \alpha V_1 - \beta V_2$$

$$AV_2 = \beta V_1 + \alpha V_2.$$

Seja T a matriz cujas colunas são V_1 e V_2 . Daí $TE_i = V_i$, para $i = 1, 2$. Tomando $B = T^{-1}AT$,

obtemos

$$\begin{aligned}
 BE_1 &= (T^{-1}AT)E_1 = T^{-1}A(T E_1) \\
 &= (T^{-1}A)V_1 \\
 &= T^{-1}(AV_1) \\
 &= T^{-1}(\alpha V_1 - \beta V_2) \\
 &= \alpha T^{-1}V_1 - \beta T^{-1}V_2 \\
 &= \alpha E_1 - \beta E_2
 \end{aligned}$$

e similarmente

$$BE_2 = (T^{-1}AT)E_2 = \beta E_1 + \alpha E_2.$$

Assim, a matriz $B = T^{-1}AT$ na base canônica é escrita como

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Vimos na Seção (2.2) que o sistema $Y' = (T^{-1}AT)Y$ possui retrato de fase correspondente à uma espiral estável, centro, ou espiral instável, dependendo se $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$. Assim, o retrato de fase do sistema original $X' = AX$ é equivalente a um destes, depois da troca de coordenadas via T .

Exemplo 2.4.4 (*Oscilador Harmônico Simples*) Considere a equação de segunda ordem

$$x'' + 4x = 0.$$

Esta equação corresponde a um oscilador harmônico não amortecido, de massa igual a 1 e constante de elasticidade 4 (maiores detalhes em Smale [4]). Como um sistema, temos

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} X = AX.$$

A equação característica da matriz A é

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

e claramente seus autovalores são $\pm 2i$. Um autovetor complexo associado a $\lambda = 2i$ é uma solução do sistema

$$\begin{aligned} -2ix + y &= 0 \\ -4x - 2iy &= 0. \end{aligned}$$

Uma dessas soluções é o vetor $(1, 2i)$. Portanto, temos uma solução complexa da forma

$$X(t) = e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Quebrando esta solução em suas partes real e imaginária, encontramos a solução geral

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2 \sin 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Assim, a posição do oscilador conforme Smale [4] é dada por

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t,$$

que é uma função periódica de período π .

Agora, seja T a matriz cujas colunas são as partes real e imaginária do autovetor $(1, 2i)$, conforme exemplo anterior.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então, calculamos facilmente que

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

que está na forma canônica. Os retratos de fase destes sistemas são apresentados na Figura (2.9). Notemos que T transforma as soluções circulares do sistema $Y' = (T^{-1}AT)Y$ em soluções elípticas de $X' = AX$, uma vez que o primeiro sistema está na forma canônica e o segundo não.

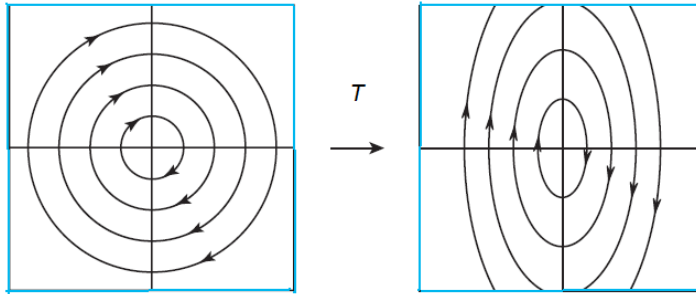


Figura 2.9: A troca de variáveis T no caso de um centro.

Exemplo 2.4.5 Seja o sistema $X' = AX$, onde a matriz A não é diagonal. Vamos agora supor que V é um autovetor de A associado ao autovalor λ e que todos os outros autovetores são múltiplos de V . Agora, seja W um vetor qualquer tal que V e W são linearmente independentes. Então temos

$$AW = \mu V + \nu W$$

para algumas constantes $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Notemos que $\mu \neq 0$, caso contrário, teríamos um segundo autovetor linearmente independente W com autovalor ν . Afirmamos que $\nu = \lambda$. Se $\nu - \lambda \neq 0$, então

$$A \left(W + \left(\frac{\mu}{\nu - \lambda} \right) V \right) = \nu \left(W + \left(\frac{\mu}{\nu - \lambda} \right) V \right).$$

Isto significa que ν é um segundo autovalor diferente de λ . Assim, devemos ter $\nu = \lambda$.

Finalmente, seja $U = (1/\mu)W$. Então,

$$AU = V + \frac{\lambda}{\mu}W = V + \lambda U.$$

Assim, se definimos $TE_1 = V$, $TE_2 = U$, obtemos

$$\begin{aligned}
 (T^{-1}AT)E_1 &= T^{-1}A(TE_1) \\
 &= (T^{-1}A)V \\
 &= T^{-1}(AV) \\
 &= T^{-1}(\lambda V) \\
 &= \lambda T^{-1}V \\
 &= \lambda E_1
 \end{aligned}$$

e similarmente

$$(T^{-1}AT)E_2 = E_1 + \lambda E_2.$$

Assim, a matriz $T^{-1}AT$ na base canônica é escrita como

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

tal como exigido. Portanto, $X' = AX$ está novamente em forma canônica, após esta mudança de coordenadas.

Capítulo 3

Classificação dos sistemas planares

Para $A \in M(2)$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

sabemos que os autovalores desta matriz são as raízes da seguinte equação característica

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Observemos que o termo independente nesta equação é $\det A = ad - bc$, que é o determinante de A e é denotado por $\det A = D$. O coeficiente de λ é a quantidade $a + d$, que é traço de A e é denotada por $\text{tr} A = T$.

Assim, os autovalores satisfazem

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0, \tag{3.0.1}$$

e são dados por

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(T - \sqrt{T^2 - 4D} \right) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(T + \sqrt{T^2 - 4D} \right).$$

Notemos que $\lambda_1 + \lambda_2 = T$ e $\lambda_1 \lambda_2 = D$. Então o traço é a soma dos autovalores de A , enquanto o determinante é o produto dos autovalores de A . O traço T e o determinante D nos diz

quem são os autovalores de A , e portanto, praticamente tudo sobre a geometria das soluções de $X' = AX$. Por exemplo, os valores de T e D nos conta se temos soluções em espiral estável ou instável, se temos um centro, sela e assim por diante.

Podemos visualizar essa classificação no plano traço-determinante, ou seja, uma matriz com traço T e determinante D corresponde ao ponto de coordenadas (T, D) . A localização desse ponto no plano- TD determina a geometria do retrato de fase. Por exemplo, o sinal de $T^2 - 4D$ nos diz que os autovalores λ_1 e λ_2 de A são

1. Complexos com parte imaginária diferente de zero se $T^2 - 4D < 0$
2. Reais e distintos se $T^2 - 4D > 0$
3. Reais e repetidos se $T^2 - 4D = 0$.

Assim, a localização de (T, D) em relação à parábola $T^2 - 4D = 0$ no plano- TD nos diz tudo o que precisamos saber sobre os autovalores da matriz A , de um ponto de vista algébrico.

Em termos de retratos de fase, no entanto, podemos dizer mais. Se $T^2 - 4D < 0$, então a parte real dos autovalores é $T/2$, e assim temos

1. Espiral estável se $T < 0$
2. Espiral instável se $T > 0$
3. Centro se $T = 0$.

Se $T^2 - 4D > 0$, temos uma classificação similar. Neste caso, ambos os autovalores λ_1 e λ_2 são reais. Se $D < 0$, então temos uma sela. Isto segue do fato de D ser o produto de autovalores, um positivo e o outro negativo. Equivalentemente, se $D < 0$, calculamos

$$T^2 < T^2 - 4D$$

de modo que

$$\pm T < \sqrt{T^2 - 4D}.$$

Assim, temos

$$T + \sqrt{T^2 - 4D} > 0;$$

$$T - \sqrt{T^2 - 4D} < 0;$$

e assim os autovalores são reais e têm sinais diferentes. Se $D > 0$ e $T < 0$, então

$$T \pm \sqrt{T^2 - 4D} < 0.$$

Assim, temos um atrator. Da mesma forma, se $T > 0$ e $D > 0$, então temos uma fonte (repulsor).

Quando $D = 0$ e $T \neq 0$, temos um autovalor nulo, enquanto ambos autovalores se anulam quando $D = T = 0$. $T^2 = 4D$

Esboçando toda essa informação verbal no plano- TD , obtemos um resumo visual de todos os diferentes tipos de sistemas lineares. As equações acima particionam o plano- TD em várias regiões, em que os sistemas de um particular tipo se localizam. Ver a Figura (3.1). Isso produz uma classificação geométrica de sistemas lineares 2×2 .

A propósito, duas observações são importantes. Primeiro, o plano traço-determinante é uma representação bidimensional do que é realmente um espaço de dimensão quatro, uma vez que matrizes 2×2 são determinadas por quatro parâmetros, que são as entradas da matriz. Ou seja, cada matriz está associada a um ponto (T, D) do plano- TD .

Finalmente, note que podemos obter um pouco de informação sobre o sistema a partir de T e D , sem calcular os autovalores. Por exemplo, se $D < 0$, sabemos que temos uma sela na origem. Da mesma forma, se ambos T e D são positivos, então temos uma fonte na origem.

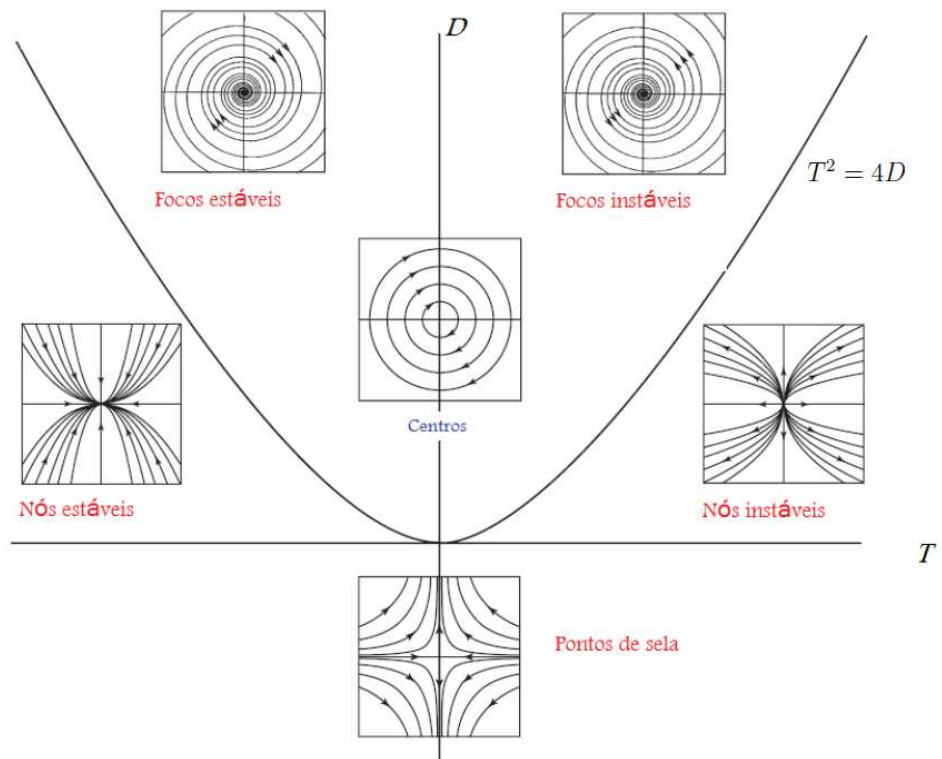


Figura 3.1: Classificação dos sistemas planares lineares: o plano traço-determinante.

Capítulo 4

Sistemas Hamiltonianos

Neste capítulo iremos lidar com um tipo especial de sistema, chamado de sistema hamiltoniano planar. Antes, no entanto, na próxima seção, vamos fazer um comentário breve sobre a origem destes sistemas, que aparecem na mecânica clássica.

4.1 Mecânica clássica

A base da mecânica clássica é a segunda lei de Newton. Esta lei assevera que a força exercida pelo campo é igual à massa vezes a aceleração.

A partir da segunda lei de Newton podemos obter as equações de Hamilton. Os sistemas hamiltonianos descrevem a evolução de sistemas mecânicos de natureza conservativa.

Como exemplo, seja uma partícula de massa $m > 0$ em movimento no espaço \mathbb{R}^3 . Vamos supor que essa partícula seja submetida a um campo de forças conservativo F . Este campo por definição é igual a um gradiente. Então, para cada ponto $q = (q_1, q_2, q_3)$ em \mathbb{R}^3 , temos

$$F(q) = -\nabla V(q), \tag{4.1.1}$$

onde $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função chamada de energia potencial, $q = q(t)$ é a posição da partícula

no instante t . Em outros termos, q é a trajetória da partícula, que é determinada através da segunda lei newton

$$mq''(t) = -\nabla V(q(t)). \quad (4.1.2)$$

Seja p o momento linear da partícula, ou seja, $p = mq'$, onde q' é a velocidade. Como $p = mq'$, então $p' = mq''$. Usando a igualdade (4.1.2), obtemos

$$p' = -\nabla V.$$

Como $q' = \frac{p}{m}$, abrindo estas duas últimas igualdades, obtemos as equações

$$\begin{aligned} p'_1 &= -\frac{\partial V}{\partial q_1} \\ p'_2 &= -\frac{\partial V}{\partial q_2} \\ p'_3 &= -\frac{\partial V}{\partial q_3} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

e

$$\begin{aligned} q'_1 &= \frac{p_1}{m} \\ q'_2 &= \frac{p_2}{m} \\ q'_3 &= \frac{p_3}{m}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

O que fizemos foi reescrever o sistema de 3 equações de segunda ordem (4.1.2) como 6 equações de primeira ordem nas variáveis q_i e p_i dadas por (4.1.3) e (4.1.4).

Definição 4.1.1 *O espaço de configurações é o espaço $\mathbb{R}^3 = \{q = (q_1, q_2, q_3)\}$ de possíveis posições da partícula.*

Definição 4.1.2 *O espaço de fase é o espaço $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \{(q, p)\}$, que consiste de posições e momentos.*

A energia total da partícula é dada por

$$\begin{aligned}
 H = H(p, q) &= \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + V(q) \\
 &= \frac{m}{2}(q'_1)^2 + \frac{m}{2}(q'_2)^2 + \frac{m}{2}(q'_3)^2 + V(q) \\
 &= \begin{pmatrix} q'_1 & q'_2 & q'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m/2 & 0 & 0 \\ 0 & m/2 & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{pmatrix} + V(q) \\
 &= q^t M q + V(q),
 \end{aligned}$$

onde a forma quadrática $q^t M q$ indica a energia cinética. Nesta forma q está sendo visto como vetor coluna. Agora, podemos escrever as equações (4.1.2) no espaço de fase como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial p_1} &= \frac{p_1}{m} = q'_1 \\
 \frac{\partial H}{\partial p_2} &= \frac{p_2}{m} = q'_2 \\
 \frac{\partial H}{\partial p_3} &= \frac{p_3}{m} = q'_3
 \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial q_1} &= \frac{\partial V}{\partial q_1} = -p'_1 \\
 \frac{\partial H}{\partial q_2} &= \frac{\partial V}{\partial q_2} = -p'_2 \\
 \frac{\partial H}{\partial q_3} &= \frac{\partial V}{\partial q_3} = -p'_3.
 \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

As equações (4.1.5) e (4.1.6) são chamadas equações de Hamilton e descrevem o sistema nesse exemplo. Estas equações podem ser escritas compactamente como

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} p'_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{4.1.7}$$

4.2 Sistemas Hamiltonianos Planares

Vamos restringir a atenção aos sistemas hamiltonianos em \mathbb{R}^2 . Um sistema hamiltoniano é um sistema de equações diferenciais que podem ser escritas na forma das equações de Hamilton

(4.1.7). Dizemos que esses sistemas são conservativos ou conservam energia, pois a energia total do sistema permanece constante ao longo de suas soluções. Ou seja, a energia total do sistema permanece constante ao longo do tempo. Os sistemas hamiltonianos são um caso especial de sistemas dinâmicos.

Definição 4.2.1 *Um sistema hamiltoniano em \mathbb{R}^2 é um sistema da forma*

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = f_1(x, y) \\y' &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = f_2(x, y)\end{aligned}\tag{4.2.8}$$

onde $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ chamada função hamiltoniana ou função energia total do sistema.

Podemos encontrar uma definição mais geral de sistemas hamiltonianos em \mathbb{R}^{2n} como pode ser visto em Perko [5].

Exemplo 4.2.2 *Seja a função hamiltoniana*

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

então

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\partial H}{\partial y} = y \\y' &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -x\end{aligned}$$

que é um sistema hamiltoniano planar linear, cuja solução $X(t)$ pode ser encontrada usando o Teorema (1.2.11).

Usando o Teorema de Schwartz visto em Flemming [3], podemos afirmar que se o sistema

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\y' &= g(x, y)\end{aligned}$$

é hamiltoniano, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \\
 &= \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} (-g(x, y)) \\
 &= -\frac{\partial g}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

No entanto, de acordo com a definição alternativa de Villate [8], temos a validade da recíproca anterior, ou seja, se as funções f e g verificam a relação

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y},$$

então o sistema

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

é hamiltoniano.

Exemplo 4.2.3 *Vamos verificar que o sistema*

$$x' = x$$

$$y' = \sin x - y$$

é hamiltoniano, e encontrar a função hamiltoniana.

Como $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} = 1$, pois $f(x, y) = x$ e $g(x, y) = \sin x - y$, o sistema é hamiltoniano. Então existe uma função H que satisfaz as equações

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = x \quad (4.2.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -(\sin x - y). \quad (4.2.10)$$

A solução da equação (4.2.8) é dada por

$$H(x, y) = xy + h(x),$$

onde h pode ser qualquer função que depende unicamente de x . Para achar a função h , derivamos H em relação à x

$$\frac{\partial H}{\partial x} = y + \frac{dh}{dx}.$$

Comparando esta equação com (4.2.9), obtemos

$$h(x) = \cos x + C, \quad \text{onde } C \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a função hamiltoniana é

$$H(x, y) = xy + \cos(x) + C.$$

Exemplo 4.2.4 O sistema do Oscilador Harmônico não Amortecido é dado por

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -kx, \end{aligned}$$

onde $k > 0$, é hamiltoniano. Analogamente ao caso anterior, segue que a função hamiltoniana associado ao sistema dado é

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

O que faz sistemas hamiltonianos tão importante é o fato de que enquanto esses sistemas evoluem com o tempo, a função H permanece constante ao longo de cada solução do sistema. Assim, temos a seguinte proposição.

Proposição 4.2.5 *Para um sistema hamiltoniano em \mathbb{R}^2 , H é constante ao longo de cada solução do sistema.*

Demonstração: A derivada total da função hamiltoniana $H = H(x, y)$ ao longo das trajetórias $(x(t), y(t))$ de (4.2.8) é dado por

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} x' + \frac{\partial H}{\partial y} y' \\ &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned}$$

Assim, H é constante ao longo de qualquer solução de (4.2.8) e essas soluções (trajetórias) estão sobre a superfície de nível $H(x, y) = \text{constante}$. \square

A importância de saber que um dado sistema é hamiltoniano é o fato de que podemos esboçar o retrato de fase, sem resolver o sistema. Assumindo que H não é constante em qualquer conjunto aberto, traçamos simplesmente as curvas de nível de $H(x, y) = k$, $k \in \mathbb{R}$. As soluções do sistema estão sobre essas curvas de nível; tudo o que precisamos é descobrir os sentidos das soluções (trajetórias) nessas curvas de níveis. E isso pode ser feito através dos campos de vetores. Note também que os pontos de equilíbrio para um sistema hamiltoniano ocorrem em pontos críticos de H , ou seja, nos pontos onde ambas as derivadas parciais de H são iguais a zero.

Exemplo 4.2.6 *Seja o sistema não linear*

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x^3 + x. \end{aligned}$$

Uma função hamiltoniana para este sistema é

$$H(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}.$$

A constante $1/4$ é supérflua aqui. Optamos por ela para que H tenha valor mínimo 0 , que ocorre em $(\pm 1, 0)$. O outro (único) ponto de equilíbrio está na origem. O sistema linearizado (ver Seção 1.3.1) tem a forma

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} X.$$

Como em $(0, 0)$ este sistema tem autovalores ± 1 , segue que localmente temos uma sela para o sistema não linear, uma vez que o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é hiperbólico (ver Seção 2.1). Em $(\pm 1, 0)$, os autovalores são $\pm\sqrt{2}i$, logo temos um centro, pelo menos para o sistema linearizado.

Traçando as curvas de nível de H e destacando os sentidos nas órbitas (trajetórias) produzimos o retrato de fase (4.1), que foi obtido com os comandos do Maxima

```
(%i1) load("plotdf")$
(%i2) f:[y, -x^3 + x] $
(%i13) plotdf(f, [xradius,3], [yradius,3])$
```

Os três pontos fixos $(\pm 1, 0)$ e $(0, 0)$ foram obtidos com os comandos

```
(%i1) load("plotdf")$
(%i2) f: [y, -x^3 + x]
(%i4) fixos: ev(solve(f), numer);
(%o4) [[x = 0, y = 0], [x = 1, y = 0], [x = - 1, y = 0]]
```

Observe na Figura (4.1) que os pontos de equilíbrio $(\pm 1, 0)$ permanecem centros para o sistema não linear. Além disso, note que as curvas estável e instável na origem coincidem exatamente. Ou seja, temos soluções que tendem a $(0, 0)$ quando $t \rightarrow \pm\infty$. Tais soluções são conhecidas como soluções homoclínicas ou órbitas homoclínicas.

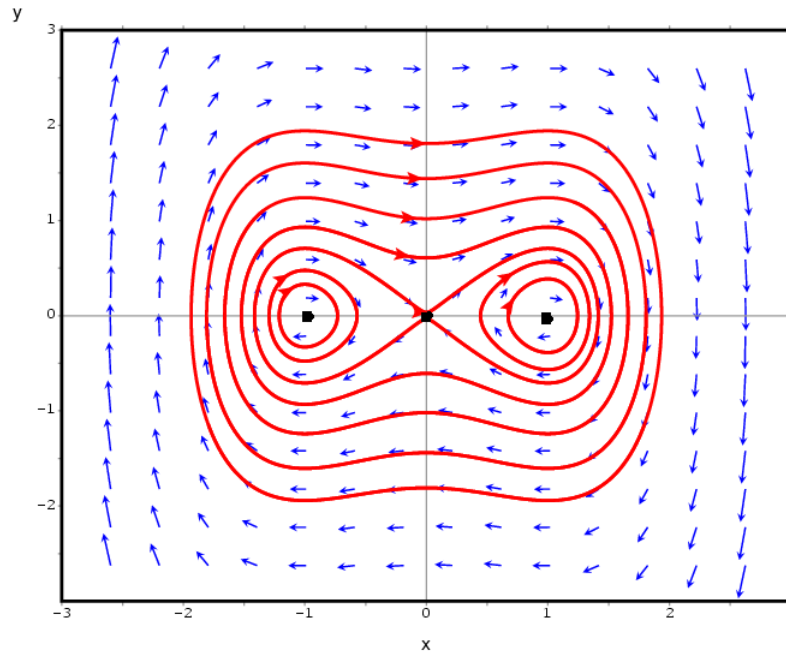


Figura 4.1: O retrato de fase para $x' = y$, $y' = -x^3 + x$. Confira o plano traço-determinante na Figura (3.1).

Os pontos fixos foram armazenadas na lista (comando) `fixos`. Para encontrar a matriz Jacobiana (ver seção 1.3.1), definimos uma lista com as variáveis de estado x e y e uma função h que define o termo geral da matriz

```
(%i6) v: [x,y]$
```

```
(%i7) h[i,j] := diff(f[i], v[j])$
```

Definimos a matriz Jacobiana de ordem 2 dando a função h o comando `genmatrix` do Maxima

```
(%i8) jacobiana: genmatrix(h,2,2);
```

O fato de que os autovalores do sistema hamiltoniano particular acima assumem as formas especiais ± 1 e $\pm\sqrt{2}i$ pode ser generalizado com a proposição seguinte

Proposição 4.2.7 *Seja (x_0, y_0) um ponto de equilíbrio para o sistema hamiltoniano planar*

(4.2.8). Então, os autovalores do sistema linearizado são $\pm\lambda$ ou $\pm\lambda i$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Por hipótese, $X_0 = (x_0, y_0)$ é um ponto crítico para o sistema hamiltoniano planar (4.2.8), então

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

Seja o sistema linearizado $X' = AX$ (Cf. Definição 1.3.1), onde

$$\begin{aligned} A = DF(X_0) &= DF(x_0, y_0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H_{yx}(x_0, y_0) & H_{yy}(x_0, y_0) \\ -H_{xx}(x_0, y_0) & -H_{xy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Então o traço $T = \text{tr } A = 0$, pois $H_{yx}(X_0) = H_{xy}(X_0)$. O determinante $D = \det A = H_{xx}(X_0)H_{yy}(X_0) - H_{xy}^2(X_0)$.

De acordo com a seção (3), a equação característica da matriz A é dada por

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0.$$

onde T é a soma dos autovalores da matriz A , e D o produto dos autovalores de A . Como $T = 0$ e o $D \neq 0$, obtemos

$$\lambda^2 + D = 0.$$

Então, temos dois casos:

- i) Se $D < 0$, então $-D > 0$. Sendo assim, $\lambda = \pm\sqrt{-D}$. Portanto, o ponto crítico X_0 é uma sela para o sistema hamiltoniano.
- ii) Se $D > 0$, então $-D < 0$. Sendo assim, $\lambda = \pm i\sqrt{D}$. Portanto, X_0 é um centro para o sistema hamiltoniano.

iii) Se $D = 0$ então os autovalores são nulos e neste caso o ponto crítico é chamado de degenerado. O leitor interessado em pontos degenerados pode ver maiores detalhes em Perko [5].

□

No que segue, estabelecemos alguns resultados muito específicos sobre a natureza dos pontos críticos dos sistemas hamiltonianos. Lembremos que os pontos de equilíbrio ou pontos críticos do sistema (4.2.8) correspondem aos pontos críticos da função hamiltoniana H , ou seja,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

Por exemplo, $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ são pontos críticos da função $H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$, uma vez que

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x}(0, 1) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que o ponto crítico em discussão foi transladado para a origem.

Exemplo 4.2.8 *Um tipo particular de sistema hamiltoniano é o sistema newtoniano em \mathbb{R}^2*

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= f(x), \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

onde $f \in C^1(a, b)$. Este sistema pode ser escrito no formato de uma EDO de segunda ordem dado por

$$x'' = f(x),$$

uma vez que $x'' = y'$. A energia total para esse sistema é

$$H(x, y) = T(y) + U(x),$$

onde $T(y) = y^2/2$ é a energia cinética e

$$U(x) = - \int_{x_0}^x f(s) ds$$

é a energia potencial. Vamos mostrar que o sistema (4.2.11) é hamiltoniano e efetuar a linearização.

Como

$$H(x, y) = T(y) + U(x),$$

então temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} &= T'(y) + 0 \\ &= y \\ &= x' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= 0 + \left(- \int_{x_0}^x f(t) dt \right)' \\ &= -f(x) \\ &= -y'. \end{aligned}$$

Isto significa que o sistema newtoniano (4.2.11) é hamiltoniano.

Linearizando o sistema (4.2.11) obtemos

$$X' = AX$$

onde

$$A = DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x) & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\text{tr}A=0$ e $\det A = -f'(x)$.

Propriedades de um sistema newtoniano

- i) Todos os pontos críticos do sistema newtoniano (4.2.11) estão sobre o eixo- x , ou seja, os pontos críticos são da forma $(x_0, 0)$, devido os campos do sistema newtoniano.
- ii) $(x_0, 0)$ é um ponto crítico do sistema newtoniano se, e somente se, $(x_0, 0)$ é um ponto crítico da função $U(x)$, isto é, um zero da função $f(x)$. De fato, basta observar que $U'(x_0) = f(x_0) = 0$.
- iii) Se $(x_0, 0)$ é um máximo local da função $U(x)$, então ele é uma sela para (4.2.11). Se $(x_0, 0)$ é um mínimo local de $U(x)$, então ele é um centro para (4.2.11).
- iv) O retrato de fase de (4.2.11) é simétrico em relação ao eixo- x .

Exemplo 4.2.9 *Vamos construir o retrato de fase para o pêndulo não amortecido*

$$x'' + \sin x = 0.$$

Esta equação diferencial pode ser escrita como um sistema newtoniano (vide exemplo anterior)

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\sin x = f(x), \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

onde a energia potencial é dada por

$$\begin{aligned} U(x) &= -\int_0^x f(t)dt \\ &= -\int_0^x (-\sin t)dt \\ &= \int_0^x \sin t dt \\ &= 1 - \cos x. \end{aligned}$$

O gráfico da função $U(x)$ é exibido abaixo

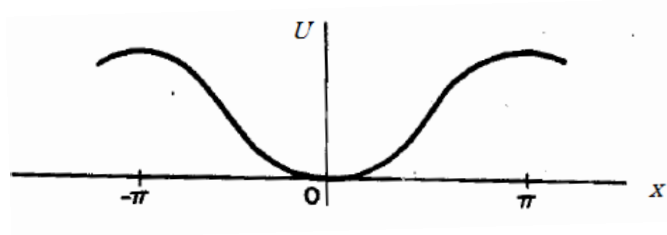


Figura 4.2: Gráfico da função $U(x)$.

Vamos usar o teorema anterior para analisar o sistema newtoniano (4.2.12). Os pontos críticos $(x_0, 0)$ do sistema newtoniano são os pontos críticos da função $U(x)$ (são os zeros da função $f(x)$). Ou seja,

$$U'(x) = -f(x) = \sin x$$

Esta igualdade implica que $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Tomando $k = -1, 0, 1$, obtemos alguns pontos críticos do sistema newtoniano

$$-\pi, \quad 0, \quad \pi$$

Isto significa que

$$U'(-\pi) = \sin(-\pi) = f(-\pi) = 0$$

$$U'(0) = \sin 0 = f(0) = 0$$

$$U'(\pi) = \sin(\pi) = f(\pi) = 0$$

Agora, como $x_0 = -\pi$ é um máximo local de $U(x) = 1 - \cos x$, então $(-\pi, 0)$ é uma sela para o sistema newtoniano (4.2.12). Realmente, linearizando esse sistema, obtemos $X' = AX$,

onde

$$\begin{aligned} A = DF &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(x) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Em $(-\pi, 0)$, temos

$$\begin{aligned} A = DF(-\pi, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(-\pi) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $D = \det A = -1 < 0$, usando a classificação dos sistemas planares da seção (3), concluímos que $(-\pi, 0)$ é uma sela para o sistema newtoniano (4.2.12).

De maneira análoga, como $(x_0 = 0, 0)$ é um mínimo local de $U(x) = 1 - \cos x$, então $(0, 0)$ é um centro para o sistema newtoniano e como $(x_0 = \pi, 0)$ é um máximo local de $U(x)$, então $(\pi, 0)$ é uma sela para o sistema. Cf a figura (4.2).

Podemos fazer outra análise baseada na concavidade da função $U(x)$, que determina onde $D = \det A = U''(x) = \cos x$ é positivo ou negativo. Os pontos de inflexão de $U(x)$ são $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Como $D = U''(x) > 0$ para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, então $U(x)$ é côncava para cima no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Assim, pelo retrato de fase (plano-TD) da seção (3.1), concluímos que o sistema newtoniano admite centro nos pontos $(x, 0)$, onde $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

De maneira semelhante para o intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Observe que $\frac{3\pi}{2}$ é outro ponto de inflexão de $U(x)$. Como $D = U''(x) < 0$ para todo $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, temos que $U(x)$ é côncava para baixo nesse intervalo. Assim, pelo retrato de fase da seção (3.1), o sistema newtoniano admite sela nos pontos $(x, 0)$, onde $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

O retrato de fase para o pêndulo não amortecido é mostrado na figura (4.3). Observe que nesse retrato, a origem corresponde à posição de equilíbrio estável do pêndulo suspenso verticalmente para baixo. Os pontos críticos $(\pm\pi, 0)$ correspondem à posição de equilíbrio instável, onde o pêndulo está para cima. Trajetórias próximas da origem são quase círculos e são aproximadas pelas soluções curvas do pêndulo linear

$$x'' + x = 0.$$

As trajetórias fechadas circundando a origem descrevem os movimentos periódicos usuais associados com um pêndulo, onde o pêndulo oscila para trás e para frente. As separatrizes ligando as selas em $(\pm\pi, 0)$ correspondem aos movimentos com energia total $H(\pm\pi, 0) = 2$, caso em que o pêndulo se aproxima da posição vertical instável quando $t \rightarrow \pm\infty$. E as trajetórias fora dos laços das separatrizes, onde $H > 2$, correspondem aos movimentos onde o pêndulo vai mais para cima.

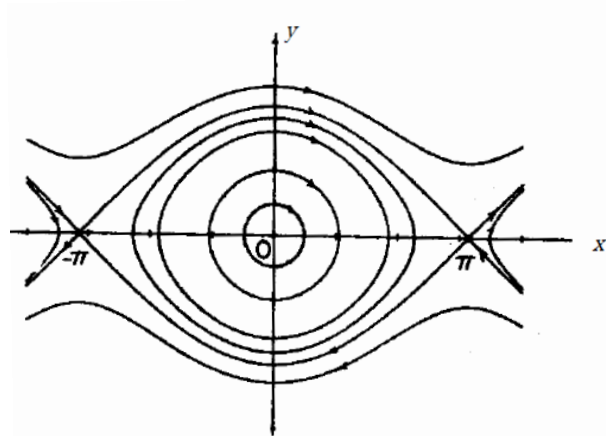


Figura 4.3: O retrato de fase para o pêndulo não amortecido. Veja o plano traço-determinante na Figura (3.1).

E por fim, pela propriedade iv), p.59, o retrato de fase do pêndulo não amortecido é simétrico em relação ao eixo- x .

A próxima proposição encontrada em Perko [5] pode ser útil para a identificação de sistemas hamiltonianos.

Proposição 4.2.10 *Seja $F : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe $C^1(E)$, onde E é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 . O sistema*

$$X' = F(X)$$

é um sistema hamiltoniano se, e somente se, $\nabla \cdot F(X) = 0$, para todo $X \in E$.

Exemplo 4.2.11 *Seja o sistema do exemplo (4.2.3). Então*

$$\begin{aligned} \nabla \cdot F(X) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (x, \sin x - y) \\ &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\sin x - y) \\ &= 1 + (-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Usando a proposição anterior, concluímos que o sistema do exemplo (4.2.3) é realmente hamiltoniano.

4.3 Gradiente Simplético

Na seção (4.1) obtemos as equações de Hamilton a partir das equações de Newton. Agora, vamos colocar as equações de Hamilton em um contexto geométrico, de maneira a expressar campos hamiltonianos como *gradientes simpléticos*, os quais estão relacionados com espaços vetoriais simpléticos. Esses espaços são tratados aqui de maneira muito consisa.

Sejam o espaço de fase $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$ e $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Esta função define um campo de vetores hamiltoniano $X' = X_H(X)$, onde $X_H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é

dada por

$$X_H(x, y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right).$$

Sabemos que a aplicação linear $dH : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, a diferencial de H , pode ser representada por

$$dH(\cdot) = \langle \nabla H, \cdot \rangle,$$

Ou seja $dH(v) = \langle \nabla H, v \rangle$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Proposição 4.3.1 *O campo hamiltoniano X_H mora no núcleo da aplicação linear dH .*

Demonstração: O núcleo de dH é dado por: $N(dH) = \{v \in \mathbb{R}^2; dH(v) = 0\}$. Então,

$$\begin{aligned} dH(X_H) &= \langle \nabla H, X_H \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right) \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $dH(X_H) = 0$, temos que $X_H \in N(dH)$. □

Alternativamente, podemos escrever

$$X_H = -J_0 \nabla H, \quad \text{onde } J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.13)$$

De fato,

$$\begin{aligned} -J_0 \nabla H &= - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= - \left(-\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ &= X_H. \end{aligned}$$

Note que $J_0 X_H = \nabla H$.

Podemos também escrever as equações de Hamilton (4.2.8) como

$$c'(t) = X_H(c(t)), \quad (4.3.14)$$

onde $c(t) = (x(t), y(t))$. Com efeito,

$$\begin{aligned} c'(t) &= (x'(t), y'(t)) \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right) \\ &= X_H(x, y) \\ &= X_H(x(t), y(t)) \\ &= X_H(c(t)). \end{aligned}$$

Notemos que H é preservado ao longo das soluções $c(t)$ de (4.3.14). Com efeito, pela regra da cadeia, temos

$$H'(c(t)) = \nabla H(c(t)) \cdot c'(t).$$

Como $c'(t) = X_H(c(t))$, obtemos

$$\begin{aligned} H'(c(t)) &= \nabla H(c(t)) \cdot X_H(c(t)) \\ &= \nabla H(c(t)) \cdot (-J_0 \nabla H(c(t))) \\ &= -\nabla H(c(t)) \cdot J_0 \nabla H(c(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Essa propriedade, geometricamente, nos diz que o vetor $J_0 \nabla H$ é tangente às curvas de nível da função H , uma vez que o produto interno usual entre ∇H e X_H é igual a zero, ou seja, ∇H é perpendicular ao campo X_H .

Exemplo 4.3.2 A função hamiltoniana $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $H(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ define o campo hamiltoniano

$$X_H(x, y) = (y, -x)$$

e

$$\begin{aligned}
 dH(X_H(x, y)) = dH(y, -x) &= \langle \nabla H, (y, -x) \rangle \\
 &= \langle (x, y), (y, -x) \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Observemos que na definição de X_H em (4.3.13) usamos dois dispositivos

- i) Uma base de \mathbb{R}^2 , em relação ao qual calculamos o gradiente ∇H .
- ii) A matriz J_0 .

Esses dois dispositivos juntos definem uma forma **bilinear**

$$\Omega_0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\Omega_0(u, v) := -u^t J_0 v,$$

que satisfaz as propriedades

Anti-simétrica De fato,

$$\begin{aligned}
 \Omega_0(u, v) &= -u^t J_0 v \\
 &= (-u^t J_0 v)^t \\
 &= -(v^t J_0^t (u^t)^t) \\
 &= -(v^t (-J_0) u) \\
 &= -(-v^t J_0 u) \\
 &= -\Omega_0(v, u)
 \end{aligned}$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Não-degenerada Se $\Omega_0(u, v) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$, então $v = 0$. Com efeito, por hipótese, $\Omega_0(u, v) = 0$, para todo $u \in \mathbb{R}^2$. Sendo assim, seja $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tomando $u = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\Omega_0(u, v) = -u^t J_0 v = -(1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Esta última igualdade implica que $y = 0$. De maneira análoga, tomando $u = (0, 1)$, obtemos $x = 0$. Portanto, $v = (x, y) = (0, 0) = 0$

Sendo assim, X_H pode ser interpretado como o "gradiente" de H com respeito a Ω_0 , isto, é, X_H é o único campo que verifica a equação

$$\Omega_0(X_H, v) = dH(v)$$

para todo $v \in \mathbb{R}^2$. Com efeito, sabendo que $J_0^2 = -I$ e $J_0^t = -J_0$, temos

$$\begin{aligned} \Omega_0(X_H, v) = -X_H^t J_0 v &= -(-J_0 \nabla H)^t J_0 v \\ &= (\nabla H)^t J_0^t J_0 v \\ &= (\nabla H)^t (-J_0) J_0 v \\ &= -(\nabla H)^t J_0^2 v \\ &= -(\nabla H)^t (-I) v \\ &= (\nabla H)^t v \\ &= \langle \nabla H, v \rangle \\ &= dH(v). \end{aligned}$$

A forma bilinear Ω_0 motivou a definição de espaços vetoriais simpléticos como podemos ver a seguir.

Definição 4.3.3 *Seja o par (V, Ω) , onde V é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear anti-simétrica. Dizemos que a forma Ω é não-degenerada, ou simplética, se*

$$\Omega(u, v) = 0 \quad \forall v \in V \quad \implies \quad u = 0.$$

Nesse caso, o par (V, Ω) é um espaço vetorial simplético.

Escolhendo uma base $\{e_1, e_2\}$ de \mathbb{R}^2 , podemos representar qualquer forma bilinear anti-simétrica Ω unicamente por uma matriz anti-simétrica

$$A = [A_{ij}], \quad \text{onde} \quad A_{ij} = \Omega(e_i, e_j).$$

de tal modo que $\Omega(u, v) = u^t A v$.

Exemplo 4.3.4 *Seja o espaço vetorial simplético (\mathbb{R}^2, Ω_0) , onde Ω_0 é dado por*

$$\Omega_0(u, v) := -u^t J_0 v.$$

Ω_0 é representada pela matriz $A = -J_0$. De fato

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_0(e_1, e_1) & \Omega_0(e_1, e_2) \\ \Omega_0(e_2, e_1) & \Omega_0(e_2, e_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e_1^t J_0 e_1 & -e_1^t J_0 e_2 \\ -e_2^t J_0 e_1 & -e_2^t J_0 e_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -J_0. \end{aligned}$$

Ou seja, como era de se esperar $\Omega_0(u, v) := u^t (-J_0) v$. O espaço (\mathbb{R}^2, Ω_0) é chamado também de espaço simplético padrão.

4.4 Considerações Finais

- O leitor interessado em espaços vetoriais simpléticos pode ver mais detalhes em Cannas [10].
- Este trabalho tratou de sistemas hamiltonianos planares. Mostramos que esses sistemas podem ser obtidos a partir da segunda lei de Newton. No entanto, podemos encontrar outra maneira de se obter as equações de Hamilton, que é via as equações Euler-Lagrange, derivadas de princípios variacionais, como pode ser visto em Bursztin [1].
- Tenho como um objetivo futuro estudar os campos hamiltonianos em variedades e geometria simplética.

Referências Bibliográficas

- [1] H. BURSZTIN, L. MACARINI, *Introdução a Geometria Simplética*, 2006, 99 p.
- [2] C. I. DOERING, A. O. LOPES, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro: IMPA, 2005, 416 p.
- [3] M. B. GONÇALVES, D. M. FLEMMING, *Cálculo B*, São Paulo: Makron-Books, 1999, 372 p.
- [4] M. W. HIRSCH, S. SMALE, R. L. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, San Diego: Elsevier Academic Press, 2004, 417 p.
- [5] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, New York: Springer-Verlag, 1991, 403 p.
- [6] L. POOLE, *Álgebra Linear*, São Paulo: Thomson , 2004, 690 p.
- [7] W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, New York: McGraw-Hill, 1964.
- [8] J. E. VILLATE, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma abordagem prática com o Maxima*, Porto: 2007, 206 p.
- [9] Eigenvalues and eigenvectors. Disponível em http://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors.

- [10] A. CANNAS da SILVA – *Introduction to symplectic and Hamiltonian geometry*, Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications] Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2003.