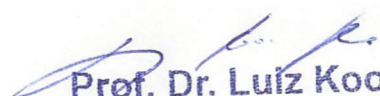


ERRATA nos 2 exemplares da tese do aluno Washington Alves de Oliveira

Em folha ii:

Onde se lê:	Desconsidere
Área de concentração: Pesquisa Operacional	


Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta
Coordenador CPG/IMECC
Matric. 042471 - UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Condições de Otimalidade em Programação Multiobjetivo Fracional Quadrático

Washington Alves de Oliveira

Doutorado em Matemática Aplicada - Campinas - SP

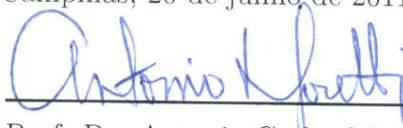
Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Moretti

Coorientadora: Profa. Dra. Margarida Pinheiro Mello

Condições de Otimalidade em Programação Multiobjetivo Fracional Quadrático

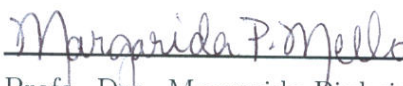
Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Washington Alves de Oliveira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de junho de 2011



Prof. Dr. Antonio Carlos Moretti

Orientador



Profª. Dra. Margarida Pinheiro Mello

Coorientadora

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Antonio Carlos Moretti

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar

Prof. Dr. Luiz Leduino de Salles Neto

Prof. Dra. Lucelina Batista dos Santos

Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão

Tese apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **DOUTOR em MATEMÁTICA APLICADA**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8/6162 – BIBLIOTECA DO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Oliveira, Washington Alves de
OL43c Condições de otimalidade em programação multiobjetivo
fracional quadrático / Washington Alves de Oliveira.--
Campinas, SP : [s.n.], 2011.

Orientadores: Antonio Carlos Moretti, Margarida
Pinheiro Mello.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica.

1. Otimização multiobjetivo. 2. Programação
quadrática. 3. Pesquisa operacional. I. Moretti, Antônio
Carlos, 1958-. II. Mello, Margarida Pinheiro, 1957-. III.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Multiobjective quadratic fractional programming
problems

Palavras-chave em inglês:

Multiobjective optimization

Quadratic programming

Operational research

Área de concentração: Pesquisa Operacional

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Antonio Carlos Moretti [Orientador]

Marko Antonio Rojas Medar

Luiz Leduino de Salles Neto

Lucelina Batista dos Santos

Adilson José Vieira Brandão

Data da defesa: 20-06-2011

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 20 de junho de 2011 e aprovada

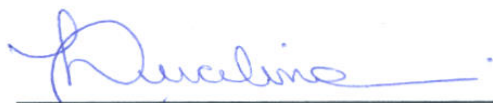
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). ANTONIO CARLOS MORETTI



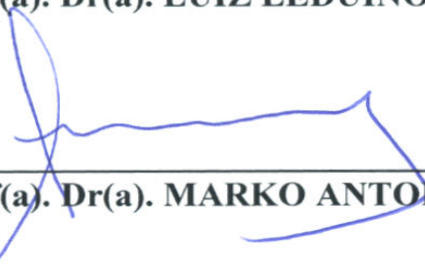
Prof(a). Dr(a). ADILSON JOSÉ VIEIRA BRANDÃO



Prof(a). Dr(a). LUCELINA BATISTA DOS SANTOS



Prof(a). Dr(a). LUIZ LEDUINO DE SALLES NETO



Prof(a). Dr(a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR

À minha família e amigos
Dedico

Agradecimentos

Agradeço:

À minha família e às pessoas mais próximas, pela compreensão e apoio.

Aos professores e grandes orientadores Antônio C. Moretti e Margarida P. Mello.

Ao professor Antonio Beato Moreno por sua contribuição neste trabalho, e ao professor Marko Rojas Medar, que me ajudou com grandes conselhos e incentivos.

À banca examinadora pelas sugestões e críticas.

Aos colegas, professores, funcionários do IMECC e à todos aqueles que me apoiaram de alguma forma.

À CAPES e ao BANCO SANTANDER pelo apoio financeiro.

A Deus acima de tudo.

Resumo

Existem na literatura diversos conceitos e definições que caracterizam e dão condições de otimalidade para as soluções de um problema de programação multiobjetivo. A mais importante é a condição necessária de primeira ordem, que generaliza a condição clássica do tipo Karush-Kuhn-Tucker em otimização não linear. Esta condição garante a existência de uma vizinhança arbitrária onde uma solução ótima está contida. No entanto, para se obter condições suficientes de otimalidade, tanto local como global, é necessário impor hipóteses adicionais sobre as funções objetivo e o conjunto de restrições, como convexidade ou as suas generalizações. Em determinados problemas tais hipóteses podem ser muito restritivas. Neste trabalho, introduzimos um conceito alternativo para identificar a vizinhança de uma solução ótima local em problemas de programação multiobjetivo. Em uma primeira etapa, usando este conceito, obtemos condições necessárias e suficientes de otimalidade para as soluções de um problema particular, onde cada função objetivo é constituída de um quociente de funções quadráticas e o conjunto de restrições é formado por desigualdades lineares. Então, mostramos como calcular o maior raio da região esférica centrada em uma solução ótima local na qual esta solução é ótima. Nesse processo, podemos concluir que esta solução também é globalmente ótima. Em uma segunda etapa, usando o gradiente e a Hessiana de cada função quadrática, caracterizamos as soluções ótimas locais. Em uma terceira etapa, obtemos condições suficientes de otimalidade global impondo algumas hipóteses adicionais, porém essas hipóteses não caracterizam nenhum tipo de convexidade generalizada sobre as funções objetivo. Finalizamos com alguns resultados de dualidade.

Este problema particular, envolvendo otimização fracional, surge frequentemente em aplicações nos processos de tomada de decisão em Ciência da Gestão, por exemplo, quando se deseja otimizar razões como desempenho/custo, lucro/investimento, custo/tempo, etc. Por isso, também propomos ao longo do texto vários métodos computacionais derivados dos nossos resultados que podem ser usados na obtenção de soluções para esses tipos de aplicações.

Palavras-chave: Programação multiobjetivo fracional quadrático, soluções eficientes.

Abstract

In the literature there are several concepts and definitions that characterize and give optimality conditions for solutions of a multiobjective programming problem. The most important is the necessary first-order optimality condition that generalizes the Karush-Kuhn-Tucker conditions. This condition ensures the existence of an arbitrary neighborhood that contains an optimal solution. However, in order to obtain optimality sufficient conditions, both local and global, it is necessary to impose additional assumptions on the objective functions and on the feasible set such as convexity and its generalizations. Sometimes, in some problems, such assumptions are too restrictive. In this work, we introduce an alternative concept to identify the local optimal solution neighborhood in multiobjective programming problems. In a first step, using this concept, we obtain necessary and sufficient optimality conditions for the solutions of a particular problem, where each objective function consists of a ratio quadratic functions and the feasible set is defined by linear inequalities. Then we show how to calculate the largest radius of the spherical region centered on a local optimal solution in which the local solution is optimal. In this process we may conclude that the solution is also globally optimal. In a second step, using the gradient and the Hessian of each quadratic function, we characterize the local optimal solutions. In a third step, we obtain global optimality sufficient conditions by imposing some additional assumptions but these assumptions do not characterize any kind of generalized convexity on the objective functions. We conclude this work with some results of the duality.

This particular problem, involving fractional optimization, arises frequently in the decision making of the management science applications, for example, if you want to optimize the performance/cost ratio, or profit/investment, or cost/time, etc.. Therefore, we also propose throughout the text various computational methods derived from our results. These methods can be used to obtain solutions to these types of applications.

Keywords: Quadratic fractional multiobjective programming, efficient solutions.

Conteúdo

Introdução	1
1 Alguns Conceitos e Definições em Programação Multiobjetivo	5
1.1 Programação multiobjetivo	5
1.2 Soluções eficientes	7
1.3 Direções viáveis e qualificação de restrições	9
1.4 Condições necessárias de primeira ordem	12
1.5 Convexidade e convexidade generalizada	17
1.6 O problema dual multiobjetivo	20
2 Apresentação do Problema em Estudo	23
2.1 Formulação do problema em estudo	23
2.2 O problema escalar fracional	24
2.3 O problema multiobjetivo fracional	28
2.4 O problema escalar fracional quadrático	31
2.5 O problema multiobjetivo fracional quadrático	32
2.6 Conclusão	34
3 Condições de Otimalidade Via Raio de Eficiência	35
3.1 Raio de eficiência	35
3.2 Raio de eficiência no problema (PMFQ)	36
3.3 Raio de eficiência nos problemas sem restrições	38
3.4 Raio de eficiência nos problemas com restrições	56
3.5 Métodos computacionais	65
3.5.1 Ramificação	66
3.5.2 Raio de eficiência 1	69
3.6 Direções parametrizadas	70
3.6.1 Raio de eficiência 2	72

3.6.2	Raio de eficiência 2 ($n = 2, m = 2$)	74
3.7	Conclusão	79
4	Caracterização de Soluções Localmente Eficientes	81
4.1	Introdução	81
4.2	Caracterização de soluções localmente eficientes	82
4.3	Métodos computacionais	85
4.3.1	Teste de eficiência local 1	86
4.3.2	Teste de eficiência local 2	88
4.4	Método de busca por soluções eficientes	89
4.4.1	Método de busca local	90
4.5	Conclusão	92
5	Condições de Otimalidade Global	93
5.1	Condições suficientes	93
5.2	Observações quanto a convexidade	97
5.3	Condições sem hipóteses de convexidade	99
5.3.1	Teste de eficiência global	101
5.4	Método de busca por soluções eficientes	106
5.4.1	Método de busca global	110
5.5	Conclusão	112
6	Dualidade	113
6.1	Introdução	113
6.2	Relação entre os problemas associados	114
6.3	Dualidade	117
6.3.1	Dualidade fraca	118
6.3.2	Dualidade forte	119
6.3.3	Dualidade inversa	120
6.4	Conclusão	121
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	123
7.1	Conclusões	123
7.1.1	Condições de otimalidade e o raio de eficiência	123
7.1.2	Solução localmente eficiente e sua caracterização	124
7.1.3	Condições de otimalidade e soluções eficientes	124
7.1.4	Resultados de dualidade	124
7.1.5	Métodos computacionais	125

7.1.6	Aplicações para o problema em estudo	126
7.2	Trabalhos Futuros	126
7.2.1	Propostas diretamente relacionadas ao tema	126
7.2.2	Propostas de temas correlatos	126
7.2.3	Propostas com outras perspectivas	128
Referências Bibliográficas		128

Lista de Tabelas

3.1	Raio de eficiência para as soluções localmente eficientes do ramo A do Exemplo 1	77
3.2	Raio de eficiência para as soluções localmente eficientes do ramo B do Exemplo 1	78
3.3	Raio de eficiência para as soluções localmente eficientes do ramo C do Exemplo 1	79
5.1	Quatro maneiras de se obter as desigualdades (5.12)	107

Lista de Figuras

1.1	Soluções localmente eficientes para o Exemplo 1	16
1.2	Curva de Pareto para as soluções localmente eficientes do Exemplo 1	17
3.1	Gráfico de r_i cujo índice i pertence ao conjunto X_1 ou X_2	39
3.2	Representa $i \in X_0$ ou $i \in X_2$ e uma raiz $\bar{\lambda}$ da equação $r_i(\lambda) - p_i(x^*) = 0$	40
3.3	Representa $i \in X_1$ e uma raiz $\bar{\lambda}$ da equação $r_i(\lambda) - p_i(x^*) = 0$	41
3.4	Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$	42
3.5	Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$	44
3.6	Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$	45
3.7	Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$	46
3.8	Vizinhança de x^* e o comportamento das funções r_i	50
3.9	Algumas vizinhanças de interesse da solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$	54
3.10	Espaço de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$	55
3.11	Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$	59
3.12	Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$	60
3.13	Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$	61
3.14	Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$	62
3.15	Alguns subconjuntos de interesse relacionado com a solução x^*	64
7.1	Exemplo de trabalho futuro: busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$	127

Notação Utilizada

PM	Problema de programação multiobjetivo.
PMF	Problema de programação multiobjetivo fracional.
PMFQ	Problema de programação multiobjetivo fracional quadrático.
DFQ	Problema dual fracional quadrático.
$B(x, r)$	Bola aberta de raio r e centro $x \in \mathbb{R}^n$.
$\bar{B}(x, r)$	Bola fechada de raio r e centro $x \in \mathbb{R}^n$.
$\partial B(x, r)$	Fronteira de $B(x, r)$ definida pela distância Euclidiana.
$Leff(PM)$	Conjuntos das soluções localmente eficientes do problema PM.
$Eff(PM)$	Conjuntos das soluções globalmente eficientes do problema PM.
$FEff(PM)$	Conjuntos das soluções fracamente eficientes do problema PM.
$PEff(PM)$	Conjuntos das soluções propriamente eficientes do problema PM.
$N(x^*)$	Vizinhança de um ponto x^* .
$\text{diam}(S)$	Diâmetro do conjunto S .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.
$\ \cdot \ $	Norma Euclidiana.
$\mathcal{P}(A)$	Conjunto das partes do conjunto A .
I	Conjunto $\{1, \dots, m\}$, onde m é o número de funções objetivo.
J	Conjunto $\{1, \dots, n\}$, onde n é a dimensão do espaço $\mathbb{R}^n$.
K	Conjunto $\{1, \dots, p\}$, onde p é o número de funções restrições.
$ I $	Cardinalidade do conjunto I .
$\text{cl}(A)$	Fecho do conjunto A .
$\text{co}(A)$	Envoltivo convexo do conjunto A .
$\text{Nu}(A)$	Núcleo da matriz A .

Introdução

Diariamente encontramos situações em gestão de empresas, administração de recursos, escolhas estratégicas, etc., que levam a um processo de tomada de decisão. Essas situações frequentemente estão associadas a vários objetivos simultâneos como metas para o decisor. É para esses tipos de contextos que vemos a necessidade de se estudar problemas de otimização com mais de um objetivo. Os fundamentos matemáticos dos processos de decisão com múltiplos objetivos têm suas origens nas Ciências Econômicas, com suas primeiras aplicações na Teoria da Utilidade, no final do século XIX. Vilfredo Pareto, em 1896 [50], estudou a utilidade que um conjunto de bens induz em uma coletividade de pessoas e, para definir a situação de Equilíbrio Econômico, deduziu a maneira que uma coletividade de consumidores, em situação de máxima utilidade de bens, está em situação de Equilíbrio Econômico: *“Os membros de uma coletividade apresentam máxima utilidade em certa posição quando é impossível encontrar uma forma de movermos ligeiramente desta posição de forma que a utilidade de cada um dos membros da coletividade aumente ou diminua”*. Esta propriedade se resume no conceito de solução eficiente em otimização com múltiplos objetivos, que pode ser reescrita da seguinte maneira: um ponto é considerado uma solução eficiente quando qualquer ligeira melhora em uma das funções objetivo implica na piora de alguma das outras.

Posteriormente, a partir de 1960, seguindo o trabalho de Pareto, ocorre um grande crescimento nas áreas em que se aplicam os processos de tomada de decisão com múltiplos objetivos. Vários trabalhos surgiram neste campo tentando obter condições necessárias e suficientes para determinar e caracterizar pontos viáveis que tenham características semelhantes à definição de Pareto. Neste processo, foi necessário introduzir conceitos matemáticos importantes para relacionar os pontos viáveis com os objetivos. Os pontos viáveis são descritos através de variáveis de decisão e tanto os objetivos como as restrições estão funcionalmente relacionados com essas variáveis. Assim, cada objetivo e cada restrição são representadas por funções, e cada objetivo é chamado de função objetivo. Quando pretendemos minimizar as funções objetivos buscando o equilíbrio entre elas no sentido de Pareto, estamos diante de um problema de programação multiobjetivo. Neste contexto, os pontos viáveis que satisfazem a

definição de Pareto são denominados soluções Pareto-ótimas, soluções eficientes ou soluções não dominadas. Os problemas de programação multiobjetivo têm muitas aplicações em diversos campos do conhecimento, como na área financeira, Internet, Biomedicina, Gestão de Negócios, Teoria dos Jogos, Engenharia, entre outros. No entanto, resolver um problema de programação multiobjetivo não é considerado uma tarefa fácil. Encontrar todas as soluções de Pareto requer grande consumo de tempo em processos computacionais, porque normalmente a busca por essas soluções está vinculada a algoritmos cujo tempo de resposta cresce exponencialmente com relação ao tamanho do problema. Um simples teste para verificar se um ponto é Pareto-ótimo, em muitos casos, é considerado um problema de grande complexidade computacional.

Neste trabalho, consideramos um caso particular de um problema de programação multiobjetivo, no qual cada função objetivo é um quociente de funções quadráticas e o conjunto de restrições é formado por desigualdades lineares. Esse tipo de problema surge frequentemente em aplicações nos processos de tomada de decisão em Ciência da Gestão, por exemplo, quando se deseja otimizar razões como desempenho/custo, lucro/investimento, custo/tempo, etc.. Em uma primeira etapa, introduzimos um conceito alternativo para as soluções localmente eficientes, que chamaremos de *raio de eficiência*, e que não usa hipóteses de convexidade generalizada sobre as funções objetivo. Com este novo conceito, produzimos uma técnica que fornece condições necessárias e suficientes de otimalidade para o nosso problema. Visamos a dar argumentos que facilitem a construção de métodos computacionais para auxiliar nos processos de busca por uma solução localmente eficiente, e naqueles que testam se um ponto viável é localmente eficiente ou não. Os resultados podem ser usados em estratégias de busca mais interessantes no conjunto viável ao considerar algumas características específicas de cada função objetivo. Na mesma linha de pensamento, verificamos sobre quais condições as soluções localmente eficientes também são globalmente eficientes, medindo o tamanho da vizinhança dessas soluções locais dentro do conjunto viável, onde não é possível encontrar uma solução melhor. Em uma segunda etapa, utilizamos os gradientes e as Hessianas de cada função quadrática para caracterizar as soluções localmente eficientes do nosso problema particular. Em uma terceira etapa, apresentamos outros resultados que fornecem condições suficientes de otimalidade global. Neste caso, introduzimos hipóteses mais fortes que na etapa anterior, porém evitando ao máximo incluir algum tipo de convexidade generalizada sobre as funções objetivo. Para isso, consideramos algumas características das Hessianas de cada função quadrática que compõe as funções objetivo, por exemplo, suas diagonalizações. Por fim, obtemos alguns resultados dentro da teoria de dualidade.

Alguns conceitos importantes na teoria de programação multiobjetivo são apresentados no Capítulo 1, para facilitar o entendimento deste texto. No Capítulo 2, definimos conceitualmente o problema fracional quadrático que estudaremos ao longo deste trabalho, e

apresentamos um resumo dos trabalhos e resultados anteriores existentes na literatura. No Capítulo 3, apresentamos o conceito de raio de eficiência e os resultados obtidos dele. Nesta fase, trabalhamos com problemas sem restrições e com restrições lineares. No Capítulo 4, apresentamos algumas formas de caracterizar as soluções localmente eficientes. Com uma abordagem um pouco distinta, apresentamos no Capítulo 5 outras condições de otimalidade para o nosso problema. No Capítulo 6, obtemos alguns resultados em relação à teoria de dualidade. Nos Capítulos 3, 4 e 5, apresentamos seções com propostas de métodos computacionais derivados dos resultados obtidos. Por fim, no Capítulo 7, concluímos este trabalho e discutimos algumas propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 1

Alguns Conceitos e Definições em Programação Multiobjetivo

Neste capítulo, vamos definir formalmente um problema de programação multiobjetivo e, em seguida, vamos apresentar alguns conceitos e definições importantes para que a leitura deste trabalho torne-se mais fácil. Por exemplo, a definição de ponto crítico no contexto multiobjetivo e alguns conceitos de convexidade generalizada.

1.1 Programação multiobjetivo

Os problemas de otimização multiobjetivo têm aplicações em diversos campos do conhecimento, como na área financeira, Internet, Biomedicina, Gestão de Negócios, Teoria de Jogos, Engenharia, entre outras. No entanto, resolver um problema deste tipo não é uma tarefa considerada fácil. Precisamos, muitas vezes, de condições teóricas favoráveis e de implementações que resolvam o problema da complexidade computacional exigida.

Para resolver os problemas de otimização multiobjetivo, também conhecidos como problemas de otimização vetorial, por métodos analíticos, é mais interessante que os objetivos estejam representados e relacionados em termos numéricos. No entanto, para excluir aquelas influências subjetivas de um decisor que muitas vezes não podem ser mensuradas, restringimos esses termos numéricos à medidas, como por exemplo, peso, tempo, preço, etc., ou seja, vamos trabalhar com valores reais. Nesta situação, cada objetivo do nosso problema de decisão, e as restrições estarão associados a uma função real. Um problema de otimização multiobjetivo pode ser formulado como segue.

$$\begin{array}{ll}
\text{(PM)} & \text{Minimizar} \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \\
& \text{s.a} \quad h_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, p, \\
& \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,
\end{array}$$

onde $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $h = (h_1, \dots, h_p) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Definimos $S = \{x \in \Omega \mid h_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, p\}$ como o espaço de decisões admissíveis, ou *conjunto viável*. Diremos que x é um *ponto viável*, se $x \in S$. O valor $f_i(x)$ fornece o resultado do i -ésimo objetivo se o decisor escolhe a ação $x \in S$. Vamos assumir ainda, que f e h são diferenciáveis em Ω .

Neste caso, a expressão “Minimizar” não tem o mesmo sentido que se propõe no caso clássico de problemas de programação com um único objetivo. No entanto, a definição de solução ótima para o caso com um único objetivo pode ser considerada como um caso particular da definição de solução ótima que estudaremos para o caso multiobjetivo. Nos problemas de programação com um único objetivo, quando uma solução ótima existe, ela sempre atinge o mínimo da função objetivo. Por outro lado, nos problemas de programação multiobjetivo, quando existe uma solução ótima, ela não necessariamente atinge o valor mínimo de todas as funções objetivo simultaneamente, ou seja, pode ocorrer que o mínimo de uma das funções objetivo seja atingido, enquanto o mínimo de outra função objetivo não é atingido, ou ainda, nenhum dos mínimos das funções objetivo são atingidos. O conceito mais similar ao de solução ótima para o caso com um único objetivo é o ponto chamado de *solução ideal*. Se existe um ponto $x^* \in S$, que satisfaz simultaneamente

$$f_i(x^*) = \min_{x \in S} f_i(x), \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

então diremos que este ponto é a *solução ideal* do problema (PM). O estudo de solução ideal em programação multiobjetivo não é de todo interesse, pois acaba recaindo na resolução de problemas de programação não linear.

Raramente existe uma solução ideal nos problemas de programação multiobjetivo, pois o comum são situações em que há objetivos conflitantes. O que se pretende na verdade é escolher, dentro do conjunto de decisões admissíveis, soluções que reúnam melhores características de um certo equilíbrio entre os objetivos. Ou seja, temos que entender o conceito de solução introduzido por Pareto [50], denominado *solução eficiente*. Frequentemente essas soluções aparecem na literatura denominadas por Pareto-ótimas, não dominadas, não inferiores, etc., e são objetos de estudo no campo dos problemas multiobjetivo. O mais comum em otimização multiobjetivo é encontrar problemas com infinitas soluções eficientes. Para evitar confusão, às vezes chamaremos os problemas multiobjetivo de *problemas vetoriais*, e aqueles com um único objetivo, $m = 1$, de *problemas escalares*.

1.2 Soluções eficientes

Em geral, para estudar as soluções eficientes é necessário utilizar alguma estrutura de dominância [62], que define as preferências do decisor. Utilizaremos a mais natural possível, que compara vetores no $\mathbb{R}^m$. Para fixar notação, definimos os conjuntos $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$ e $K = \{1, \dots, p\}$. Se $x = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ e $y = (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$, admitiremos as relações para igualdades e desigualdades abaixo.

$$x = y \Leftrightarrow x_i = y_i, \quad \forall i \in I,$$

$$x < y \Leftrightarrow x_i < y_i, \quad \forall i \in I,$$

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \quad \forall i \in I,$$

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \quad \forall i \in I, \text{ e existe } j, \text{ tal que, } x_j < y_j.$$

Similarmente as relações valem para $>$, $\geq$ e $\geq$. Se $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, usaremos as notações usuais.

Diremos que $x \in S$ *domina* $z \in S$, ou que $x \in S$ é *preferido* a $z \in S$ se $f(x) \leq f(z)$. E que $N(y) \subseteq S$ é uma *vizinhança* de $y \in S$.

Um ponto viável x^* é uma *solução eficiente* para o problema (PM), se não existe um outro ponto viável $x \in S$, tal que, $f(x) \leq f(x^*)$.

Resumidamente, um ponto é chamado de solução eficiente quando não é possível melhorar nenhum objetivo sem piorar algum outro objetivo. Esta noção de otimalidade tem sido amplamente utilizada em Ciências Econômicas, pois está intimamente ligada à chamada Teoria do Bem-Estar Social [44]. É fácil notar porque essas soluções também são conhecidas como não dominadas. Podemos destacar mais dois conceitos de otimalidade, a *eficiência fraca* e a *eficiência própria*.

Um ponto viável x^* é uma *solução fracamente eficiente* para o problema (PM), se não existe um outro ponto viável $x \in S$, tal que, $f(x) < f(x^*)$.

Um ponto viável x^* é uma *solução propriamente eficiente* para o problema (PM), se existe um escalar $M > 0$, tal que, para todo $x \in S$ satisfazendo $f_r(x) < f_r(x^*)$, existe j , tal que, $f_j(x) > f_j(x^*)$ e

$$\frac{f_r(x^*) - f_r(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)} \leq M, \quad r, j \in I, \quad r \neq j.$$

Resumidamente, um ponto é chamado de fracamente eficiente se não é possível melhorar todos os objetivos simultaneamente e é chamado de propriamente eficiente se é uma solução eficiente e se os quocientes entre o ganho de um objetivo e a perda com respeito aos demais

objetivos são limitados. Ainda, é possível verificar, pelos três conceitos de soluções ótimas apresentados, que eles se relacionam da seguinte maneira

$$\text{soluções próprias} \implies \text{soluções eficientes} \implies \text{soluções fracas.}$$

As recíprocas não são válidas em geral.

Na prática, as soluções propriamente eficientes e as soluções eficientes são mais desejáveis do que as soluções fracamente eficientes, no entanto, teoricamente, é muito mais fácil tratar do conceito de eficiência fraca, por esta possuir, sob certas hipóteses, propriedades topológicas que as soluções eficientes não possuem. Naccache [45] mostra algumas dessas propriedades. Neste trabalho, focamos o estudo nas soluções eficientes, para as quais obtemos alguns resultados teóricos e outros computacionais. Naturalmente, os conceitos de soluções ótimas também podem ser definidas em uma vizinhança de um ponto.

Um ponto viável x^* é uma *solução localmente eficiente* para o problema (PM), se não existe um outro ponto viável $x \in N(x^*)$, tal que, $f(x) \leq f(x^*)$.

Por definição, as soluções eficientes também são localmente eficientes. Vamos denotar por $Eff(PM)$ o conjunto formado pelas soluções eficientes, e por $Leff(PM)$ o conjunto formado pelas soluções localmente eficientes do problema (PM). Para evitar algum tipo de confusão, as vezes chamaremos as soluções eficientes de soluções globalmente eficientes.

Existem vários resultados na literatura que caracterizam as soluções eficientes de um problema (PM) sob hipóteses de convexidade generalizada e com condições de primeira ordem sob hipóteses de diferenciabilidade das funções. Alguns desses resultados podem ser encontrados em [11], [24], [41], [47] e [54]. Se retiramos as hipóteses de convexidade generalizada, as caracterizações somente são possíveis para as soluções localmente eficientes. Na Seção 1.4, apresentamos um exemplo que ilustra a dificuldade de se obter as soluções dos conjuntos $Leff(PM)$ e $Eff(PM)$. Neste exemplo, que o conjunto $Eff(PM)$ está contido estritamente no conjunto $Leff(PM)$.

Como resultado fundamental dentro da Teoria de Otimização, enunciamos dois Teoremas de Alternativa, que serão usados em momento oportuno neste trabalho.

Teorema 1.1 (*Teorema de Alternativa de Gordan*) *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Então exatamente uma das seguintes afirmações é correta,*

1. $A^T y < 0$ tem solução $y \in \mathbb{R}^n$, ou
2. $Ax = 0, x \geq 0$ tem solução $x \in \mathbb{R}^m$.

Demonstração: Veja [22], página 128. ■

Teorema 1.2 (*Teorema de Alternativa de Stiemke*) Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Então exatamente uma das seguintes afirmações é correta,

1. $A^T y \leq 0$ tem solução $y \in \mathbb{R}^n$, ou
2. $Ax = 0$, $x > 0$ tem solução $x \in \mathbb{R}^m$.

Demonstração: Veja [22], página 129. ■

1.3 Direções viáveis e qualificação de restrições

Nos problemas escalares de programação não linear a chamada *qualificação de restrições* desempenha um papel extremamente importante na obtenção dos multiplicadores de Lagrange, fato este, que pode ser visto em [33] e [38]. Por exemplo, com uma qualificação de restrições adequada é possível garantir a existência de um multiplicador de Lagrange positivo associado a função objetivo. Isto implica que a conhecida condição necessária de otimalidade Fritz John e a condição necessária de otimalidade Karush-Kuhn-Tucker (abreviadamente, *KKT*) são equivalentes. Sem uma qualificação de restrições adequada, como por exemplo, a qualificação de restrições do tipo Slater, podemos usar somente a condição necessária de otimalidade Fritz John.

Por outro lado, em problemas de otimização multiobjetivo, muitos autores têm obtido condições necessárias de otimalidade para pontos eficientes utilizando as mesmas qualificações de restrições como no caso escalar. Esta abordagem, no entanto, não garante a existência de multiplicadores de Lagrange positivos associados ao vetor de funções objetivo, ou seja, alguns desses multiplicadores podem ser nulos. Desta maneira, as componentes do vetor objetivo associadas aos multiplicadores nulos não influenciam na condição necessária de otimalidade. Para evitar esta situação indesejável, precisamos de uma qualificação de restrições que garanta a existência de multiplicadores positivos associados às funções objetivo.

Nesta seção, vamos fazer um breve comentário sobre direções no conjunto viável em problemas escalares, conforme descreve Minoux [42], que mostra a necessidade do uso de qualificação de restrições nas condições de otimalidade. Posteriormente, sabendo da importância deste tema, vamos apresentar uma qualificação de restrições, conforme descreve Maeda [37], para os problemas (PM).

Afirmar que x^* é um ótimo local de um problema de otimização escalar, implica em afirmar que $f(x)$ não pode decrescer quando x é descrito por um arco de curva Γ , que inicia em x^* e está contido no conjunto viável. Neste caso, diremos que Γ é *admissível* em x^* , e pode ser representado por uma função continuamente diferenciável $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$\varphi(\theta) = [\varphi_1(\theta), \dots, \varphi_n(\theta)]$, tal que, $\varphi(0) = x^*$, e para $\theta > 0$, suficientemente pequeno, $\varphi(\theta) \in S$. Diremos ainda, que

$$y = \frac{d\varphi}{d\theta}(0) = \left(\frac{d\varphi_1}{d\theta}(0), \frac{d\varphi_2}{d\theta}(0), \dots, \frac{d\varphi_n}{d\theta}(0) \right)^T,$$

o vetor tangente ao arco de curva admissível $\varphi(\theta)$ em x^* , é uma *direção viável* em x^* .

Vamos denotar por C_v o cone formado pelo conjunto de direções viáveis em x^* e por $K(x^*) = \{j \in K \mid h_j(x^*) = 0\}$ o conjunto de índices de restrições ativas em x^* . Considere ainda, o cone G definido por

$$G = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h_j(x^*)^T y \leq 0, j \in K(x^*)\}. \quad (1.1)$$

É possível mostrar que $C_v \subseteq G$. Por outro lado, uma dificuldade importante para se obter as condições de otimalidade em problemas escalares, que também ocorre nos problemas (PM), está no fato de que nem todas as direções y que satisfazem (1.1) são direções viáveis. Em outras palavras, em geral existem cones G gerados pelo vetor de funções restrições h , nos quais alguns de seus elementos não são direções viáveis em algum ponto x^* viável, ou seja, para todo $\theta > 0$, por menor que seja, $x^* + \theta y \notin S$. Para evitar essas situações é necessário introduzir outras condições importantes sobre o conjunto de restrições. Uma delas, é a qualificação de restrições. Semelhante ao apresentado em [33] e [1], diremos que o ponto $x^* \in S$ satisfaz a hipótese de qualificação de restrições *KKT* se e somente se

$$(QR) \quad \text{cl}(C_v) = G,$$

onde $\text{cl}(C_v)$ é o fecho de C_v .

A condição (QR) é uma condição necessária e suficiente para que $y \in G$ seja uma direção viável. Na prática, verificar (QR) pode ser uma tarefa muito difícil, por isso, a melhor estratégia é buscar condições suficientes para que (QR) seja válida. Como por exemplo, as condições de Karlin [27], Slater [60] e de Fiacco e McCormick [17].

É comum utilizar algumas variantes das qualificações de restrições para problemas escalares nos problemas de otimização multiobjetivo. No entanto, algumas generalizações da condição (QR) para os problemas (PM) têm sido propostas na literatura. Abaixo, vamos apresentar uma dessas generalizações, que tem fundamental importância para este trabalho, porque garante que cada multiplicador de Lagrange associado às funções objetivo é positivo.

Em [20], Guignard introduz uma qualificação de restrições para problemas de otimização escalar e, posteriormente, Maeda [37] considera uma condição que generaliza o trabalho Guignard para problemas (PM). Vamos usar esta generalização em momento oportuno para obter algumas condições suficientes de otimalidade global para nosso problema em estudo.

Denotaremos o produto interno usual de x e y em $\mathbb{R}^n$ por $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Seja Q um subconjunto não vazio de Ω , diremos que $T(Q; x^*)$ é o *cone tangente* de Q em $x^* \in \text{cl}(Q)$, definido por

$$T(Q; x^*) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid d = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(x^n - x^*), \text{ tal que, } x^n \in Q, \right. \\ \left. \text{com } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x^* \text{ e } t_n \in \mathbb{R}, t_n > 0, \forall n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Definimos ainda, para cada $i \in I$, os conjuntos não vazios Q^i e Q ,

$$Q^i = Q^i(x^*) = \{x \in \Omega \mid h(x) \leq 0, f_k(x) \leq f_k(x^*), k \in I, k \neq i\}, \\ Q = Q(x^*) = \{x \in \Omega \mid h(x) \leq 0, f(x) \leq f(x^*)\}.$$

Observe que Q^i , $i \in I$, é um subconjunto de S , tal que, existe um índice $k \in I$, $k \neq i$, com $f_k(x) \leq f_k(x^*)$. Ou seja, $f_k(x^*)$ não é melhor que $f_k(x)$, $x \in \Omega$, para algum $k \neq i$. Enquanto que o conjunto Q é um subconjunto de S , tal que, para toda componente de f , $f_i(x^*)$ não é melhor que $f_i(x)$, $i \in I$. Se $m = 1$, temos $Q^i = Q^1 \equiv S$. Diremos que $C(Q; x^*)$ é o *cone linearizado* de Q em $x^* \in Q$, ou *cone aproximado*, definido por

$$C(Q; x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla f_i(x^*), d \rangle \leq 0, i \in I, \langle \nabla h_j(x^*), d \rangle \leq 0, j \in K(x^*) \text{ e } x^* \in Q\}.$$

Com as definições anteriores e, conforme introduziu Maeda em [37], diremos que um ponto viável x^* satisfaz a *qualificação de restrições generalizada de Guignard* (QRGG), se a seguinte relação é válida em x^* ,

$$(\text{QRGG}) \quad C(Q; x^*) = \bigcap_{i=1}^m \text{cl}(\text{co}(T(Q^i; x^*))),$$

onde $\text{co}(T(Q^i; x^*))$ é o envolvente convexo de $T(Q^i; x^*)$.

Em seguida, listamos algumas condições suficientes para que (QRGG) seja válida. Os nomes dados às condições fazem referência direta às qualificações de restrições para problemas escalares. Suas demonstrações podem ser encontradas em [37].

1. Qualificação de restrições tipo Cottle (QRC): Para cada $i \in I$, o sistema

$$\langle \nabla f_k(x^*), d \rangle < 0, \quad k \in I, \quad k \neq i, \\ \langle \nabla h_j(x^*), d \rangle < 0, \quad j \in K(x^*),$$

tem uma solução $d \in \mathbb{R}^n$.

2. Qualificação de restrições tipo Slater (QRS): $f_i, i \in I$, e $h_j, j \in K$, são todas convexas em $\mathbb{R}^n$, e para cada $i \in I$, o sistema

$$\begin{aligned} f_k(x) &< f_k(x^*), & k \in I, & k \neq i, \\ h_j(x) &< 0, & j \in K, \end{aligned}$$

tem uma solução $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Qualificação de restrições linear (QRL): $f_i, i \in I$, e $h_j, j \in K$, são todas lineares.
4. Qualificação de restrições com objetivo Linear (QROL): $f_i, i \in I$, são todas lineares e o sistema

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_i(x^*), d \rangle &\leq 0, & i \in I, \\ \langle \nabla h_j(x^*), d \rangle &< 0, & j \in K(x^*), \end{aligned}$$

tem uma solução $d \in \mathbb{R}^n$.

5. Qualificação de restrições tipo Mangasarian-Fromovitz (QRMF): os vetores $\nabla f_i, i \in I$, são linearmente independentes e o sistema

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_i(x^*), d \rangle &= 0, & i \in I, \\ \langle \nabla h_j(x^*), d \rangle &< 0, & j \in K(x^*), \end{aligned}$$

tem uma solução $d \in \mathbb{R}^n$.

Por comodidade, ao estudar algumas condições suficientes de otimalidade global para o nosso problema em estudo, vamos assumir diretamente (QRGG), apesar de que algumas características do nosso problema, como por exemplo funções quadráticas, sugere o uso de algo mais simples, como é o caso dos itens anteriores.

1.4 Condições necessárias de primeira ordem

As condições necessárias de primeira ordem para os problemas (PM) são obtidas de forma análoga ao caso escalar, por isso, são denominadas de condições do tipo KKT .

Diremos que um ponto viável x^* é um *ponto crítico vetorial KKT* do problema (PM) se existem $\tau \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}^p$, tais que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \tau_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x^*) &= 0, \\ \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(x^*) &= 0, \\ \tau &\geq 0, \quad \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Se $m = 1$, diremos que x^* é um *ponto crítico* ou um *ponto estacionário*.

Lema 1.1 (*Chankong e Haimes [11]*) *Seja $x^* \in \text{Eff}(PM)$. Suponha que x^* satisfaz a qualificação de restrições (QR). Então x^* é um ponto crítico vetorial KKT do problema (PM).*

Maeda, em [37], utiliza a qualificação de restrições (QRGG) para obter uma condição necessária do tipo *KKT* para que um ponto viável x^* seja uma solução eficiente do problema (PM). Neste caso, garante a existência de multiplicadores de Lagrange positivos associados as funções objetivo.

Lema 1.2 (*Maeda [37]*) *Seja $x^* \in \text{Eff}(PM)$. Suponha que x^* satisfaz a qualificação de restrições (QRGG), então existem vetores $\tau \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$, tais que,*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \tau_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x^*) &= 0, \\ \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(x^*) &= 0, \\ \tau &> 0, \quad \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Note que a definição de ponto crítico vetorial *KKT* vale para o caso em que $\tau > 0$.

Uma dificuldade quanto à determinação das soluções eficientes é a não equivalência, em geral, entre as soluções localmente eficientes e as soluções eficientes. Vamos analisar um exemplo simples, que ilustra a não equivalência entre os conjuntos $\text{Leff}(PM)$ e $\text{Eff}(PM)$ no caso de funções quadráticas.

Diremos que $B(x, r)$ é a *bola aberta* de raio r e centro $x \in \mathbb{R}^n$, $\partial B(x, r)$ sua *fronteira* definida pela distância Euclidiana, e $\bar{B}(x, r)$ a *bola fechada*. Dado o conjunto $\text{Leff}(PM) \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que $f(\text{Leff}(PM)) \subseteq \mathbb{R}^m$ é a *curva de Pareto* em $\mathbb{R}^m$.

Exemplo 1 Considere o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2) = (4x_1^2 - x_2^2, -(x_1 - 2)^2 + 4(x_2 + 1)^2) \\ \text{s.a} & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \end{array}$$

onde suas funções objetivo podem ser expressas como

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0,5 x^T A_1 x + b_1^T x + c_1 = 4x_1^2 - x_2^2, \\ f_2(x) &= 0,5 x^T A_2 x + b_2^T x + c_2 = -(x_1 - 2)^2 + 4(x_2 + 1)^2, \end{aligned}$$

com $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $b_1 = (0, 0)^T$, $b_2 = (4, 8)^T$, e cujas matrizes A_1 e A_2 são

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Estamos diante de um problema biobjetivo irrestrito, onde os objetivos são funções quadráticas com matrizes Hessianas indefinidas. Com cálculos simples, verificamos que para essas matrizes, se $d \neq 0$, não podem ocorrer simultaneamente

$$d^T A_1 d \leq 0 \text{ e } d^T A_2 d \leq 0, \quad \forall d \in \partial B(0, 1). \quad (1.2)$$

De fato, seja $d = (d_1, d_2)^T \neq (0, 0)^T$, se $d^T A_1 d = 8d_1^2 - 2d_2^2 \leq 0$ e $d^T A_2 d = -2d_1^2 + 8d_2^2 \leq 0$, então $4d_1^2 \leq d_2^2$ e $4d_2^2 \leq d_1^2$, e assim

$$0 \leq 3d_1^2 + 3d_2^2 \leq (4d_1^2 - d_2^2) + (4d_2^2 - d_1^2) \leq 0.$$

O que é um absurdo, portanto as desigualdades (1.2) só ocorrem se $d \equiv 0$. De acordo com o Lema 1.1, uma condição necessária para que uma solução x^* seja localmente eficiente é que existam valores $\tau_1, \tau_2 \geq 0$, não todos nulos, tais que

$$\tau_1 \nabla f_1(x^*) + \tau_2 \nabla f_2(x^*) = 0. \quad (1.3)$$

Se $\tau_2 = 0$ então $x^* = (0, 0)^T$. É possível verificar que ponto $(0, 0)^T$ não é uma solução localmente eficiente. Basta ver, por exemplo, que na direção $d = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})^T \in \partial B(0, 1)$, em todo ponto da forma $x' = x^* + \lambda d$, para cada valor real $\lambda \in (0, \frac{12\sqrt{5}}{15})$, ocorrem simultaneamente $f_1(x') = f_1(x^*)$ e $f_2(x') < f_2(x^*)$.

Se $\tau_1 = 0$ então $x^* = (2, -1)^T$. Este ponto também não é uma solução localmente eficiente. Basta ver, por exemplo, que na direção $d = (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})^T$, em todo ponto da forma $x' = x^* + \lambda d$, para cada valor real $\lambda \in (0, 2\sqrt{5})$, ocorrem simultaneamente $f_1(x') < f_1(x^*)$ e $f_2(x') = f_2(x^*)$.

Agora vamos ver o que ocorre para $\tau_1, \tau_2 > 0$. Neste caso, a condição (1.3) pode ser reescrita como

$$\tau \nabla f_1(x^*) + \nabla f_2(x^*) = 0, \text{ com } \tau = \frac{\tau_1}{\tau_2} > 0. \quad (1.4)$$

Excluindo-se os pontos $x^* = (0, 0)^T$ e $x^* = (2, -1)^T$, podemos verificar que a condição necessária (1.4) também é suficiente para que os demais pontos x^* sejam localmente eficientes. De fato, suponha que x^* , diferente de $(0, 0)^T$ e $(2, -1)^T$, não seja localmente eficiente, então existiria uma direção $d \in \partial B(0, 1)$ e um escalar $\lambda > 0$, tal que, $f(x^* + \lambda d) \leq f(x^*)$ tem solução. Analisando localmente, existiria uma direção de descida d , tal que, $\nabla f_1(x^*)^T d \leq 0$ e $\nabla f_2(x^*)^T d \leq 0$, com $\nabla f_1(x^*) \neq 0$ e $\nabla f_2(x^*) \neq 0$. Porém, como em x^* a equação (1.4) é válida para $\tau > 0$, pelo Teorema de Alternativa de Stiemke, descrito na Seção 1.2, $\nabla f_1(x^*)^T d < 0$ e $\nabla f_2(x^*)^T d \leq 0$ não tem solução, bem como $\nabla f_1(x^*)^T d \leq 0$ e $\nabla f_2(x^*)^T d < 0$ não tem solução. Desta forma, para satisfazer $f(x^* + \lambda d) \leq f(x^*)$ e, ao mesmo tempo, não contrariar o Teorema de Alternativa de Stiemke, deve ocorrer $\nabla f_1(x^*)^T d = 0$ e $\nabla f_2(x^*)^T d = 0$ e, deve ocorrer simultaneamente, $d^T A_1 d \leq 0$ e $d^T A_2 d < 0$, ou $d^T A_1 d < 0$ e $d^T A_2 d \leq 0$. O que é impossível devido a (1.2). Portanto, as soluções localmente eficientes, são todas aquelas que satisfazem (1.4), ou seja,

$$\begin{cases} 8\tau x_1^* - 2(x_1^* - 2) = 0 \\ -2\tau x_2^* + 8(x_2^* + 1) = 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{2}{-4\tau+1}, \tau \neq \frac{1}{4} \\ x_2^* = \frac{4}{\tau-4}, \tau \neq 4, \end{cases} \quad (1.5)$$

com $\tau > 0$.

A Figura 1.1 ilustra o gráfico no plano (x_1, x_2) que representa as soluções (x_1^*, x_2^*) do Exemplo 1 que satisfazem (1.5). Observe na figura, que as soluções localmente eficientes para este problema estão agrupadas em três ramos desconectados: A , B e C . Além disso, é possível concluir que somente o conjunto das soluções geradas pela desigualdade $\frac{1}{4} < \tau < 4$ são globalmente eficientes (ramo C apresentado no gráfico). Por enquanto, vamos constatar esta conclusão observando a Figura 1.2. Ela ilustra o gráfico no plano que representa a curva de Pareto, ou seja, as imagens dos ramos A , B e C , pelas funções f_1 e f_2 , plotadas nas coordenadas $(f_1(x_1^*, x_2^*), f_2(x_1^*, x_2^*))$. Nela, $f(A) = (f_1(A), f_2(A))$, $f(B) = (f_1(B), f_2(B))$ e $f(C) = (f_1(C), f_2(C))$ representam as imagens dos ramos A , B e C respectivamente.

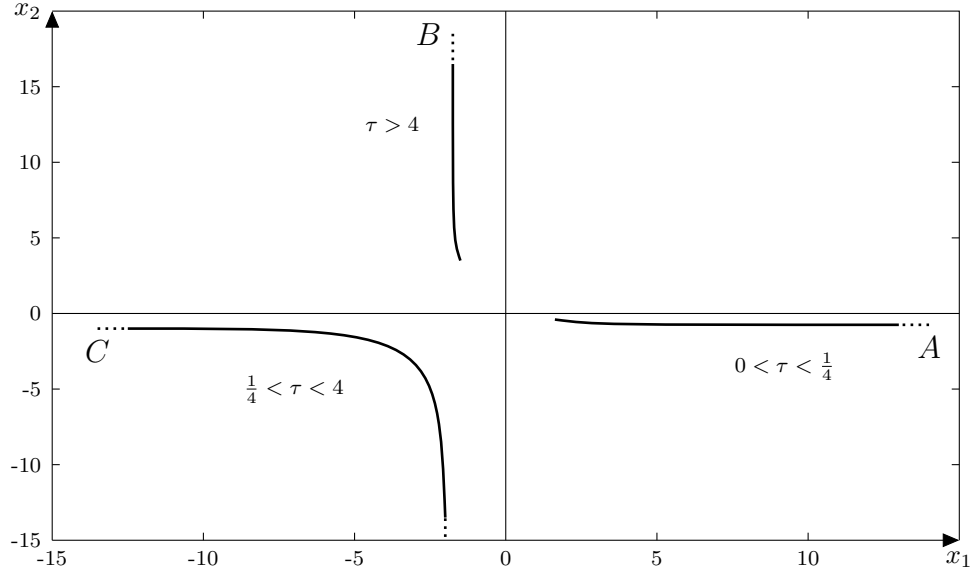


Figura 1.1: Soluções localmente eficientes para o Exemplo 1

Constatamos na Figura 1.2, que o conjunto de soluções localmente eficientes pertencentes ao ramo C também são globalmente eficientes, ou seja, globalmente não dominadas. ■

Acabamos de ver um exemplo onde o conjunto de soluções globalmente eficientes está contido estritamente no conjunto de soluções localmente eficientes. E mesmo sendo um exemplo simples, investigar as soluções localmente eficientes ou globalmente eficientes não é uma tarefa trivial. Por isso, é importante termos ferramentas que facilitem esta análise. A constatação de que algumas soluções localmente eficientes também são globalmente eficientes foi feita visualmente nos gráficos do Exemplo 1, porém, no Capítulo 3, onde propomos um método computacional para avaliar se uma solução local também é global, apresentamos alguns dados computacionais obtidos através da implementação deste método que confirmam o que foi constatado visualmente em relação às soluções no Exemplo 1. Por outro lado, no Capítulo 5, caracterizamos as situações nas quais solução local equivale a solução global através de um teorema e, novamente, confirmamos o que foi constatado visualmente em relação às soluções no Exemplo 1.

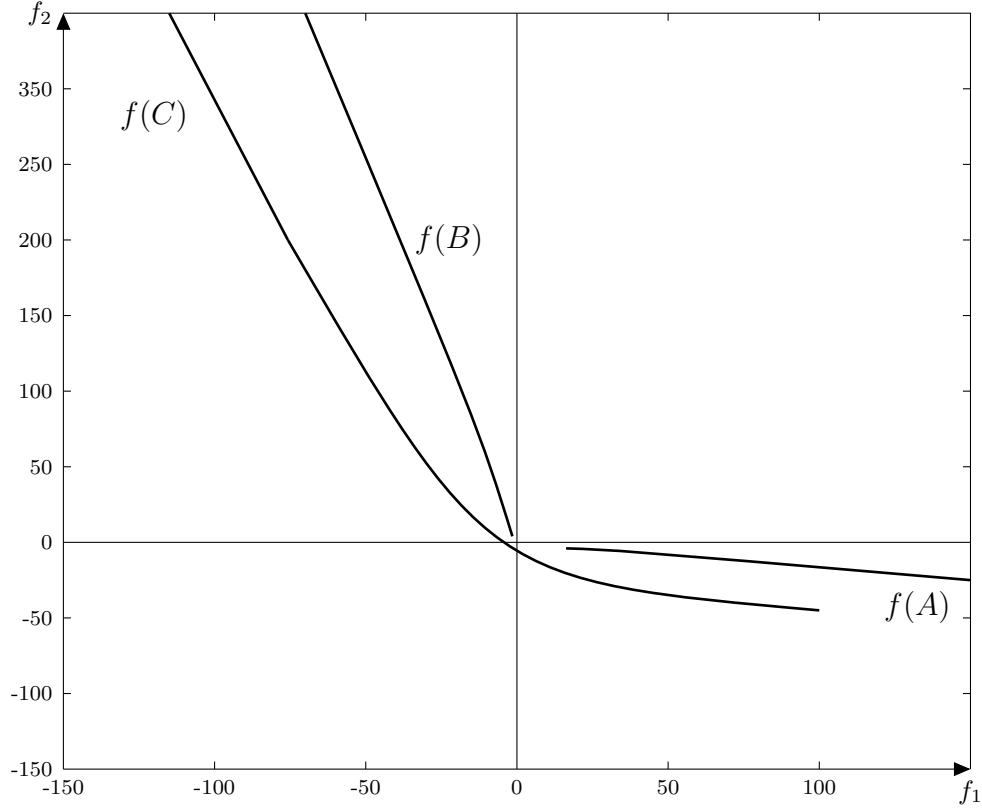


Figura 1.2: Curva de Pareto para as soluções localmente eficientes do Exemplo 1

1.5 Convexidade e convexidade generalizada

Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto x^* do conjunto aberto Ω , f é uma *função convexa* em $x^* \in \Omega$, se para todo $x \in \Omega$,

$$f(x) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*)^T (x - x^*).$$

Quando f é convexa em cada ponto de Ω , dizemos simplesmente que f é convexa.

As funções convexas são extremamente importantes dentro da teoria de programação não linear por possuir algumas características interessantes. Por exemplo, o fato de que todo mínimo local de uma função convexa também é mínimo global, e que é possível, nos casos com e sem diferenciabilidade, estabelecer condições necessárias e suficientes de otimalidade local. Muitos esforços vêm sendo feitos na tentativa de ampliar o campo das funções com características que mantêm algumas das propriedades das funções convexas. Assim, surgiram as funções quaseconvexas, Nikaidô [46], e as funções pseudoconvexas, Tuy [61], Mangasarian e

Ponstein [39], que ainda mantêm a propriedade de que todo ponto estacionário é um mínimo da função, como é o caso das funções convexas diferenciáveis.

Outro feito importante no campo da programação não linear foi a classe de funções introduzida simultaneamente por Craven [13] e por Hanson [21]. O primeiro introduziu as funções pré-convexas e o segundo as funções invexas, sendo que a última permaneceu como a mais conhecida.

(Hanson [21]) Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto x^* do conjunto aberto Ω , f é uma *função invexa* em $x^* \in \Omega$, se existe uma aplicação $\eta : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que, para todo $x \in \Omega$,

$$f(x) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*)^T \eta(x, x^*).$$

Quando f é invexa em cada ponto de Ω em relação à mesma η , dizemos simplesmente que f é invexa ou, para evitar confusão, dizemos que f é invexa com respeito a η .

No caso escalar, as funções invexas podem ser caracterizadas por seus pontos estacionários, ou seja, f é invexa em Ω se e somente se todo ponto estacionário de f é um mínimo global. Na mesma linha de pensamento e, tentando generalizar as funções pseudoconvexas e quaseconvexas diferenciáveis, também surgiram as funções pseudoinvexas e quaseinvexas.

Recentemente, surgiram novos tipos de funções que pretendem generalizar ainda mais as funções convexas. Um exemplo, introduzido por Jeyakumar em [25], são as funções ρ -invexas.

(Jeyakumar [25]) Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto x^* do conjunto aberto Ω , f é uma *função ρ -invexa* em $x^* \in \Omega$, se existirem uma aplicação $\eta : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, um número real ρ e uma função escalar $d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tais que, para todo $x \in \Omega$,

$$f(x) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*)^T \eta(x, x^*) + \rho d^2(x, x^*).$$

Quando f é ρ -invexa em cada ponto de Ω em relação aos mesmos parâmetros η , ρ e d , dizemos simplesmente que f é ρ -invexa ou, para evitar confusão, dizemos que f é ρ -invexa com respeito a η e d .

Mais tarde, pesquisando problemas multiobjetivos fracionais, Jeyakumar e Mond [26] introduzem o conceito de v -invexidade.

(Jeyakumar e Mond [26]) Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função vetorial definida no conjunto aberto Ω e cada componente de f diferenciável no ponto $x^* \in \Omega$. Diremos que f

é uma *função vetorial v -invexa* em $x^* \in \Omega$, se existirem uma aplicação $\eta : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e funções escalares $\alpha_i : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $i \in I$, tais que, para todo $x \in \Omega$,

$$f_i(x) - f_i(x^*) \geq \alpha_i(x, x^*) \nabla f_i(x^*)^T \eta(x, x^*).$$

Quando a função vetorial f é v -invexa em cada ponto de Ω em relação aos mesmos parâmetros η e α_i , $i \in I$, dizemos simplesmente que f é v -invexa ou, para evitar confusão, dizemos que f é v -invexa com respeito a η e α_i , $i \in I$.

Recordamos, conforme definição dada por Preda [51], que um funcional $F : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado de sublinear na terceira variável, se dados $x_1, x_2 \in \Omega$,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2; v_1 + v_2) &\leq F(x_1, x_2; v_1) + F(x_1, x_2; v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n, \\ F(x_1, x_2; rv) &= rF(x_1, x_2; v), \quad \forall r \in \mathbb{R}, r \geq 0, v \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Segue de (1.6) que

$$F(x_1, x_2; \vec{0}) = F(x_1, x_2; 0\vec{v}) = 0F(x_1, x_2; \vec{v}) = 0, \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Movido por vários conceitos de convexidade generalizada, Liang et al. [34] introduzem um tipo de convexidade generalizada que tenta unificar todas as generalizações de convexidade introduzidas anteriormente, o qual recebe o nome de (F, α, ρ, d) -convexidade.

(Liang et al. [34]) Sejam $F : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear na terceira variável, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto x^* do conjunto aberto Ω , um número $\rho \in \mathbb{R}$ e duas funções escalares $\alpha : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, e $d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f é uma *função (F, α, ρ, d) -convexa* em x^* , se para todo $x \in \Omega$ a seguinte desigualdade é válida

$$f(x) - f(x^*) \geq F(x, x^*; \alpha(x, x^*) \nabla f(x^*)) + \rho d^2(x, x^*).$$

Quando a função f é (F, α, ρ, d) -convexa em cada ponto de Ω em relação aos mesmos parâmetros F , α , ρ e d , dizemos simplesmente que f é (F, α, ρ, d) -convexa ou, para evitar confusão, dizemos que f é (F, α, ρ, d) -convexa com respeito a F , α , ρ e d .

Martin, em seu artigo The essence of invexity [40], fez algumas observações importantes em relação ao conceito de invexidade dado por Hanson [21] e introduziu a noção de KT -invexidade para problemas de otimização escalar com restrições.

(Martin [40]) O problema (PM) diferenciável em Ω , com $m = 1$, é um *problema KT -inverso*, se existe uma aplicação $\eta : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que, para todo $x_1, x_2 \in \Omega$,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &\geq \nabla f(x_2)^T \eta(x_1, x_2), \\ -\nabla h_j(x_2)^T \eta(x_1, x_2) &\geq 0, \quad \forall j \in K(x_2), \end{aligned}$$

onde $K(x_2) = \{j \in K \mid h_j(x_2) = 0\}$.

A mesma noção de KT -inversidade dada por Martin [40] é usada por Osuna-Gómez et al. [49] em problemas multiobjetivo para obter algumas condições de otimalidade.

(Osuna-Gómez et al. [49]) O problema (PM) diferenciável em Ω é um *problema KT -inverso vetorial* no conjunto viável com respeito a uma aplicação $\eta : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, se para qualquer $x_1, x_2 \in \Omega$, existe $\eta(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\begin{aligned} f_i(x_1) - f_i(x_2) &\geq \nabla f_i(x_2)^T \eta(x_1, x_2), \quad \forall i \in I, \\ -\nabla h_j(x_2)^T \eta(x_1, x_2) &\geq 0, \quad \forall j \in K(x_2). \end{aligned}$$

Além disto, para problemas não diferenciáveis, noções similares a estes conceitos podem ser definidas utilizando-se para isto alguma noção de derivada e/ou gradientes generalizados. Veja por exemplo [55]. No caso de problemas multiobjetivo envolvendo funções objetivo e restrições não necessariamente diferenciáveis, outros conceitos importantes foram introduzidos para produzir condições de otimalidade, entre eles, Yang [65] introduziu o conceito de funções *subconvexlike generalizada*.

(Yang [65]) Uma função vetorial $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é *subconvexlike generalizada* em Ω , se existe $u \in \mathbb{R}^m$, $u > 0$, tal que, $\forall \alpha \in (0, 1)$, $\forall x_1, x_2 \in \Omega$ e $\forall \epsilon > 0$, existem $x_3 \in \Omega$ e $\rho > 0$, tais que,

$$\rho f(x_3) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2) + \epsilon u.$$

As noções de convexidade e convexidade generalizada apresentadas acima serão usadas ao longo deste trabalho, quando, em momento oportuno, faremos comparações entre alguns trabalhos da literatura e o desenvolvido nesta pesquisa.

1.6 O problema dual multiobjetivo

Outro tema muito estudado e que tem gerado muitos trabalhos nos últimos anos é a teoria de dualidade para problemas multiobjetivos. Existem muitos tipos de duais para um

dado problema de programação matemática. Dois duais bem conhecidos são os duais tipo Wolfe [64] e o tipo Mond-Weir [43]. O foco da teoria de dualidade multiobjetivo, não é apenas introduzir problemas duais mais fáceis de resolver que seu problema primal, mas também procura encontrar condições que favoreçam a demonstração de três principais teoremas: o teorema da dualidade fraca, da dualidade forte e da dualidade inversa. Esses três teoremas relacionam as soluções do problema primal (PM) com as soluções de um determinado dual. Outros tipos de duais são frequentemente considerados na literatura, como dual tipo Schaible [56], [57], o dual tipo Bector [7] e, mais recentemente, um caso mais geral de dual, chamado de *dual misto*, vem sendo considerado para vários problemas de otimização [2], [66]. O dual misto, inclui o dual tipo Wolfe e o dual tipo Mond-Weir como casos particulares. Uma boa revisão para os dois tipos de duais mais estudados, Wolfe e Mond-Weir, em programação multiobjetivo pode ser encontrado em [48].

Neste trabalho, vamos obter alguns resultados de dualidade utilizando o dual Mond-Weir para o problema primal (PM), que pode ser formulado como segue.

$$\begin{aligned}
 \text{(DMW)} \quad & \text{Maximizar} \quad f(u) = (f_1(u), \dots, f_m(u)) \\
 & \text{s.a} \quad \sum_{i=1}^m \tau_i \nabla f_i(u) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(u) = 0, \\
 & \quad \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(u) \geq 0, \\
 & \quad \tau > 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \sum_{j=1}^p \lambda_j = 1, \\
 & \quad u \in S.
 \end{aligned}$$

onde f_i , $i \in I$ e h_j , $j \in K$, são as mesmas funções definidas no problema (PM), e o seu conjunto viável denotamos por Y .

Analogamente à definição de pontos eficientes para o problema de minimização, diremos que um ponto $(u^*, \tau^*, \lambda^*) \in Y$ é uma *solução eficiente* do problema dual (DMW), se não existe um outro ponto $(u, \tau, \lambda) \in Y$, tal que, $f(u) \geq f(u^*)$.

Capítulo 2

Apresentação do Problema em Estudo

Neste capítulo, vamos definir e apresentar em detalhes o problema particular de programação multiobjetivo que é o motivo deste trabalho de pesquisa. No capítulo anterior, na Seção 1.1, definimos o problema (PM) e apresentamos alguns conceitos importantes relacionados com ele. Agora, vamos tratar do mesmo problema, porém, o caso particular onde cada função objetivo é constituída por um quociente entre duas funções. Também vamos apresentar uma pequena revisão de alguns trabalhos anteriores da literatura relacionados com o tema.

2.1 Formulação do problema em estudo

Nesta seção, apresentamos a formulação do problema que é tema deste trabalho. Vamos estudar e analisar um caso particular de problema (PM), onde cada função objetivo é constituída por um quociente entre duas funções quadráticas. Este problema, chamaremos de problema de programação multiobjetivo fracional quadrático (PMFQ), que pode ser formulado como segue.

$$\begin{aligned} \text{(PMFQ)} \quad & \text{Minimizar} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \dots, \frac{f_m(x)}{g_m(x)} \right) \\ \text{s.a} \quad & h_j(x) \leq 0 \quad j \in K, \\ & x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

onde f_i e g_i são funções quadráticas de n variáveis reais, para qualquer $i \in I$. Além disso, supomos que $g_i(x) > 0$ para qualquer x em Ω e qualquer $i \in I$. Os domínios das funções reais h_j 's contém Ω . O conjunto viável S é a interseção de Ω com o conjunto de vetores x nos quais $h_j(x) \leq 0$ para qualquer x e $j \in K$.

Para os resultados que seguem, não podemos permitir que as funções g_i , $i \in I$, se anulem no conjunto viável e é importante que elas preservem sinal. Vamos denotar o problema (PMFQ) sem restrições por (PMFQ'). Ou seja,

$$\begin{aligned} \text{(PMFQ')} \quad & \text{Minimizar} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \dots, \frac{f_m(x)}{g_m(x)} \right) \\ & \text{s.a} \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

onde f_i, g_i , $i \in I$, são definidas como no problema (PMFQ).

Agora, vamos fazer uma breve revisão em relação aos problemas de otimização escalar e multiobjetivo envolvendo funções objetivo fracionais, que vamos chamar de problema de programação multiobjetivo fracional (PMF) e, no caso escalar, vamos chamar simplesmente de problema de programação fracional (PF).

2.2 O problema escalar fracional

O problema (PF) surge como aplicação em muitas áreas do conhecimento, incluindo corte e estoque, teoria dos jogos, etc. Condições de otimalidade e resultados de dualidade para este problema vêm sendo estudados por diversos autores.

Em [16], Dinkelbach estuda o problema (PF) utilizando uma abordagem paramétrica, que transforma o problema original em um problema associado mais simples de tratar. Ele apresenta alguns resultados teóricos que relacionam os dois problemas e, com base nesses resultados, Dinkelbach propõe um algoritmo que converge para o mínimo do problema (PF) ao executar uma sequência de operações no problema paramétrico associado. Resumidamente, se f é côncava, g convexa, $g(x) > 0$, $\forall x \in S$, S um conjunto convexo e compacto, Dinkelbach apresenta alguns resultados que relacionam os seguintes problemas,

$$\begin{aligned} \text{(PF)} \quad & \text{Maximizar} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \\ & x \in S \\ \text{(P)} \quad & \text{Maximizar} \quad f(x) - \alpha g(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \\ & x \in S \end{aligned}$$

Utilizando tais resultados e, assumindo de início que f e g são lineares e S um poliedro, ele propõe um algoritmo que gera uma sequência de problemas lineares do tipo (P), sendo que as soluções desses problemas convergem para a solução do problema (PF). No caso linear, o algoritmo sempre encerra em um número finito de passos, porém isso não é necessariamente verdade para o caso não linear. Ao final de seu trabalho, Dinkelbach mostra em um apêndice como seu algoritmo resolve um problema (PF) com numerador e denominador da função objetivo constituídos por dois exemplos de funções quadráticas.

Em [23], Jagannathan estende os resultados apresentados por Dinkelbach [16] para obter resultados de dualidade para o problema (PF). Resumidamente, com a mesma abordagem paramétrica, que transforma o problema original em um problema associado, Jagannathan estuda o seguinte problema dual para problema primal (PF),

$$\begin{aligned}
 (\text{DPF})_1 \quad & \text{Maximizar} \quad \alpha \\
 \text{s.a} \quad & \nabla f(x) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x) = \alpha \nabla g(x), \\
 & f(x) - \alpha g(x) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(x) \geq 0, \\
 & x \in S, \quad \alpha \geq 0, \quad \lambda \geq 0.
 \end{aligned}$$

Seu trabalho consiste na demonstração de três teoremas de dualidade que relacionam os problemas (PF), (P) e $(\text{DPF})_1$.

Em [28], Khan e Hanson estudam o problema (PF) assumindo que a função objetivo é formada por funções invexas diferenciáveis no numerador e no denominador. Eles mostram que com esta hipótese a função objetivo também é uma função invexa diferenciável, e assumindo que as funções do conjunto de restrições são invexas diferenciáveis, apresentam condições suficientes de otimalidade e teoremas de dualidade para este problema fracional invexo. Resumidamente, se $f(x) \leq 0$, $g(x) > 0$, $\forall x \in S$, f e $-g$ são funções invexas em x^* com respeito ao mesmo $\eta(x, x^*)$, $\forall x \in S$, então é possível mostrar que $\frac{f}{g}$ é uma função invexa em x^* com respeito a $\tilde{\eta}(x, x^*) = \frac{g(x)}{g(x^*)}\eta(x, x^*)$, $\forall x \in S$. E, assumindo que cada função h_j , $j \in K$, é uma função invexa em x^* com respeito ao mesmo $\tilde{\eta}(x, x^*)$, $\forall x \in S$, Khan e Hanson provam que a condição necessária de primeira ordem do tipo KKT também é uma condição suficiente para que x^* seja um mínimo para (PF). Considerando o seguinte problema dual para o primal (PF),

$$\begin{aligned}
 (\text{DPF})_2 \quad & \text{Maximizar} \quad \frac{f(u)}{g(u)} \\
 \text{s.a} \quad & \nabla \frac{f(u)}{g(u)} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(u) = 0, \\
 & \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(u) = 0, \\
 & u \in S, \quad \lambda \geq 0.
 \end{aligned}$$

Khan e Hanson demonstram os teoremas da dualidade fraca e da dualidade forte que relacionam os problemas (PF) e $(\text{DPF})_2$, com as mesmas hipóteses de invexidade sobre as funções

f , g e h_j , $j \in K$, e ainda discutem algumas possibilidades para um problema dual do tipo Bector generalizado [7] para o primal (PF).

Em [52], Reddy e Mukherjee utilizam o conceito de funções ρ -invexas introduzido por Jeyakumar [25] para obter condições suficientes de otimalidade e resultados de dualidade para o problema (PF). Assumindo que as funções f , g e h são diferenciáveis em S e que a função objetivo é formada por funções ρ -invexas em ambos numerador e denominador, eles mostram que a função objetivo também satisfaz o conceito de ρ -invexidade. Para obter as condições de otimalidade e os resultados de dualidade, Reddy e Mukherjee precisam de hipóteses adicionais, além de assumirem que as funções do conjunto de restrições sejam ρ -invexas. Resumidamente, se $f(x) \leq 0$, $g(x) > 0$, $\forall x \in S$, f e $-g$ são funções ρ -invexas em x^* com respeito ao mesmo $\eta(x^*, x)$ e $d(x^*, x)$, $\forall x \in S$, então é possível mostrar que $\frac{f}{g}$ é uma função ρ -invexa em x^* com respeito a $\tilde{\eta}$ e $\tilde{d}$, onde

$$\tilde{\eta}(x, x^*) = \frac{g(x)}{g(x^*)}\eta(x, x^*), \quad \tilde{d}(x, x^*) = \sqrt{\frac{1}{g(x)} \left(1 - \frac{f(x^*)}{g(x^*)}\right)} d(x, x^*), \quad \forall x \in S.$$

Assumindo que cada função h_j , $j \in K$, é uma função ρ'_j -invexa em x^* com respeito ao mesmo $\tilde{\eta}(x, x^*)$ e $\tilde{d}(x, x^*)$, $\forall x \in S$, com $\rho' \in \mathbb{R}^p$, e ainda, se para a condição necessária de primeira ordem,

$$\begin{aligned} \nabla \frac{f(x^*)}{g(x^*)} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x^*) &= 0, \\ \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(x^*) &= 0, \\ \lambda &\geq 0, \end{aligned}$$

ocorre $(\rho + \langle \lambda, \rho' \rangle) \geq 0$, então esta condição também é suficiente para que x^* seja um mínimo para (PF). Considerando as mesmas hipóteses de ρ -invexidade sobre as funções f , g e h_j , $j \in K$, Reddy e Mukherjee ainda apresentam três teoremas de dualidade que relacionam os problemas (PF) e (DPF)₂, e discutem as possibilidades de estender tais resultados para problemas multiobjetivo.

Em [34], Liang et al. introduzem um tipo de convexidade generalizada chamada de (F, α, ρ, d) -convexidade e, baseados neste tipo de convexidade e nas propriedades de funcionais sublineares introduzido por Preda [51], apresentam condições suficientes de otimalidade e alguns resultados de dualidade para o problema (PF). Diferentemente das propostas apresentadas em [28] e [52], Liang et al. assumem que a função do numerador do objetivo é não negativa em todo ponto viável. Assumindo ainda, que as funções f , g e h_j , $j \in K$, são continuamente diferenciáveis em S e satisfazem o conceito de (F, α, ρ, d) -convexidade com

parâmetros F , α , ρ e d adequados, eles mostram que a função objetivo também satisfaz o conceito de (F, α, ρ, d) -convexidade, apresentam condições suficientes de otimalidade para as soluções do problema (PF) e apresentam dois teoremas de dualidade que relacionam os problemas (PF) e (DPF)₂. Resumidamente, se $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$, $\forall x \in S$, f e $-g$ são funções (F, α, ρ, d) -convexas em x^* , $\rho \geq 0$, então é possível mostrar que $\frac{f}{g}$ é uma função $(F, \bar{\alpha}, \rho, \bar{d})$ -convexa em x^* , onde

$$\bar{\alpha}(x, x^*) = \frac{g(x^*)}{g(x)} \alpha(x, x^*) > 0, \quad \bar{d}(x, x^*) = \sqrt{\frac{1}{g(x)}} d(x, x^*), \quad \forall x \in S.$$

Assumindo que cada função h_j , $j \in K$, é $(F, \bar{\alpha}, \rho, \bar{d})$ -convexa em x^* , $\rho \geq 0$, Liang et al. provam que a condição necessária de primeira ordem do tipo KKT também é uma condição suficiente para que x^* seja um mínimo para (PF), conseguem demonstrar os teoremas da dualidade fraca e forte que relacionam (PF) e (DPF)₂ e discutem as possibilidades de entender tais resultados para problemas multiobjetivo. O que é feito mais tarde por eles no trabalho [35].

Recentemente, a abordagem de utilizar problemas auxiliares que transformam o problema (PF) em um problema mais fácil de tratar vem sendo usada com novas propostas. Por exemplo, em [3], Antczak obtém condições de otimalidade para as soluções do problema (PF) ao considerar um outro problema de otimização que tem como objetivo uma função construída a partir de um ponto viável fixo e uma aplicação vetorial como fator multiplicativo. Ele mostra que sob hipóteses de invexidade esses dois problemas têm as mesmas soluções ótimas. Resumidamente, sejam $\bar{x}$ um ponto viável e uma aplicação $\eta : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, Antczak considera o seguinte problema associado ao problema (PF),

$$(\bar{P}) \quad \underset{x \in S}{\text{Minimizar}} \quad \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} + \nabla \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} \eta(x, \bar{x}).$$

Se $\bar{x}$ é uma solução ótima do problema (PF), as funções h_j , $j \in K$, são quaseinvexas em $\bar{x}$ com respeito a η e $\eta(\bar{x}, \bar{x}) = 0$, então é possível mostrar que $\bar{x}$ também é uma solução ótima do problema $(\bar{P})$. Por outro lado, se $\bar{x}$ é uma solução ótima do problema $(\bar{P})$, as funções f e $-g$ são invexas em $\bar{x}$ com respeito a η e $\eta(\bar{x}, \bar{x}) = 0$, então é possível mostrar que $\bar{x}$ também é uma solução ótima do problema (PF). Antczak, também mostra com a sua estratégia que é possível transformar alguns problemas de otimização fracional complicados em problemas de otimização linear. Por exemplo, ele mostra que os dois problemas abaixo são equivalentes no contexto de seu trabalho,

$$\begin{aligned}
(\overline{\text{PF}})_1 \quad & \text{Minimizar} \quad \frac{e^{-x} - 3}{\ln(x + 1) + 1} \\
& \text{s.a} \quad x^2 - x \leq 0, \\
& \quad X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\overline{\text{P}})_1 \quad & \text{Minimizar} \quad -2 + \alpha x \\
& \text{s.a} \quad -\alpha x \leq 0, \\
& \quad \alpha \geq 1, \ x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

onde η é definida por $\eta(x - \bar{x}) = \alpha(x - \bar{x})$ e α um número real satisfazendo $\alpha \geq 1$. Pode-se conferir que o ponto $\bar{x} = 0$ é solução ótima de ambos os problemas $(\overline{\text{PF}})_1$ e $(\overline{\text{P}})_1$.

Diversos trabalhos que apresentam resultados importantes para o problema (PF) poderiam ser citados, entre eles, os trabalhos de Craven [12] e [14], e o trabalho de Weir [63].

2.3 O problema multiobjetivo fracional

O problema (PMF) surge como aplicação em muitas áreas do conhecimento, incluindo problemas de tomada de decisão em ciência de gestão, seleção de carteiras, etc. Condições de otimalidade e resultados de dualidade para este problema vêm sendo estudados por diversos autores.

Em [59], Singh e Hanson estendem os resultados obtidos por Geoffrion [18], em relação às soluções eficientes e propriamente eficientes do problema (PM), para o problema (PMF). Os resultados são obtidos relacionando o problema (PMF) com um problema paramétrico associado e assumindo hipóteses de quaseconvexidade e pseudoconvexidade sobre as funções envolvidas no problema. Os teoremas de dualidade fraca, dualidade forte e dualidade inversa também são estabelecidos e demonstrados utilizando as mesmas hipóteses.

Em [26], Jeyakumar e Mond introduzem um conceito de convexidade generalizada para caracterizar um vetor de funções chamada de v -inconvexidade e obtêm condições de otimalidade e resultados de dualidade assumindo este tipo de convexidade sobre as funções que compõem o problema (PM). Como aplicação de seus resultados, eles estudam um caso particular do problema (PMF), onde as funções objetivo são formadas por funções convexas no numerador e por funções côncavas no denominador.

Em [8], Bector et al. utilizam uma abordagem conhecida como *linearização* das funções do vetor objetivo para obter resultados de dualidade para o problema (PM), no caso em que o vetor objetivo é formado por funções pseudoconvexas e o conjunto de restrições por

desigualdades lineares. Como aplicação de seus resultados, eles estudam o problema primal (PMF) com denominadores das funções objetivo todos distintos e constroem um tipo de problema dual, no qual as funções objetivo são lineares. Resumidamente, sejam Ω um subconjunto aberto e convexo de $\mathbb{R}^n$, f_i convexa e $f_i(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$, g_i côncava e $g_i(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$, $\forall i \in I$, então $\frac{f_i}{g_i}$ é uma função pseudoconvexa para cada $i \in I$. Apesar de não muito razoável, a hipótese sobre g_i , para cada $i \in I$, é original em [8]. Sejam ainda, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $b \in \mathbb{R}^p$ e A_j a j -ésima linha da matriz A , então Bector et al. conseguem obter resultados de dualidade para o seguinte par primal-dual multiobjetivo,

$$\begin{aligned}
 (\overline{\text{PMF}}) \quad & \text{Minimizar} \quad \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \dots, \frac{f_m(x)}{g_m(x)} \right) \\
 & \text{s.a} \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0, \\
 & \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\
 \\
 (\overline{\text{DPMF}}) \quad & \text{Maximizar} \quad (v_1, \dots, v_m) \\
 & \text{s.a} \quad \sum_{i=1}^m \xi_i [\nabla f_i(u) - v_i \nabla g_i(u)] - \sum_{j=1}^p w_j A_j \geq 0, \\
 & \quad \sum_{i=1}^m \xi_i [f_i(u) - v_i g_i(u)] w^T (Au - b) = 0, \\
 & \quad u \in \Omega, \quad \xi > 0, \quad w \geq 0, \quad v \geq 0.
 \end{aligned}$$

Observe que o problema dual $(\overline{\text{DPMF}})$ tem funções objetivo lineares e, quando $m = 1$, o problema $(\overline{\text{DPMF}})$ equivale a abordagem paramétrica feita por Jagannathan, em [23], o qual estuda o problema dual $(\text{DPF})_1$ em relação ao problema escalar primal (PF), ou equivalentemente ao problema escalar primal (P), apresentados na Seção 2.2.

Em [49], Osuna-Gómez et al. utilizam uma abordagem paramétrica semelhante à usada por Dinkelbach [16], Jagannathan [23] e Bector et al. [8], e estudam o seguinte par primal-dual multiobjetivo,

$$\begin{aligned}
(\overline{\text{PM}}) \quad & \text{Minimizar} && (f_1(x) - v_1 g_1(x), \dots, f_m(x) - v_m g_m(x)) \\
& \text{s.a} && h_j(x) \leq 0 \quad j \in K, \\
& && x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\
\\
(\overline{\text{DPM}}) \quad & \text{Maximizar} && (v_1, \dots, v_m) \\
& \text{s.a} && \sum_{i=1}^m \tau_i [\nabla f_i(u) - v_i \nabla g_i(u)] + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(u) = 0, \\
& && \sum_{i=1}^m \tau_i [f_i(u) - v_i g_i(u)] \geq 0, \\
& && \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(u) = 0, \\
& && u \in \Omega, \quad \tau \geq 0, \quad \lambda \geq 0.
\end{aligned}$$

Para evitar confusão, vamos denotar por $(\overline{\text{PMF}})_h$ o problema $(\overline{\text{PMF}})$, tal que, o seu conjunto viável é $S = \{x \in \Omega \mid h(x) \leq 0\}$. O problema $(\overline{\text{PM}})$ é um problema associado ao problema $(\overline{\text{PMF}})_h$. Osuna-Gómez et al. provam que existe uma relação entre as soluções do problema $(\overline{\text{PMF}})_h$ e as do problema $(\overline{\text{PM}})$ e, a partir dessa relação, obtêm algumas condições de otimalidade para o problema $(\overline{\text{PMF}})_h$ estudando o problema $(\overline{\text{PM}})$. Essas condições são obtidas assumindo, em um primeiro momento, que a função vetorial $(f_1 - v_1 g_1, \dots, f_m - v_m g_m, h)$ é subconvexlike generalizada em Ω e, em um segundo momento, assumindo que o problema $(\overline{\text{PM}})$ é um problema KT -invexo vetorial. Com esta segundo hipótese, também são demonstrados os teoremas de dualidade fraca, dualidade forte e dualidade inversa para o problema dual $(\overline{\text{DPM}})$.

Em [35], Liang et al. estendem os seus resultados obtidos em [34] para uma classe de problemas (PMF). Assumindo que as funções f_i , g_i , $i \in I$, e h_j , $j \in K$, são continuamente diferenciáveis em S e satisfazem adequadamente o conceito de (F, α, ρ, d) -convexidade, introduzido por eles em [34], Liang et al. apresentam condições suficientes de otimalidade para as soluções do problema (PMF) e demonstram os teoremas de dualidade fraca e dualidade forte utilizando hipóteses de (F, α, ρ, d) -convexidade sobre as funções do problema primal (PMF) em relação aos seguintes tipos de duais: Mond-Weir [43]; Schaible [56], [57]; e Bector [7].

Em [55], Santos et al. estudam uma classe de problemas (PMF) com funções não convexas e não diferenciáveis. Utilizando a abordagem paramétrica introduzida por Dinkelbach [16] e Jagannathan [23], eles obtêm condições de otimalidade para o problema (PMF) e resultados de dualidade ao estudar um problema parametrizado, que neste caso, é idêntico ao problema

($\overline{\text{PM}}$) acima. Este trabalho generaliza os resultados obtidos por Osuna-Gómez et al., em [49], por considerar o caso não diferenciável.

2.4 O problema escalar fracional quadrático

Encontramos poucos trabalhos na literatura que fornecem condições de otimalidade e resultados de dualidade para o problema (PF) envolvendo funções quadráticas em ambos numerador e denominador da função objetivo. As abordagens mais próximas deste problema, que vamos chamar de problema escalar fracional quadrático (PFQ), envolve uma mistura de funções quadráticas e lineares.

Em [15], Crouzeix et al. estudam um problema fracional onde a função objetivo é formada por um quociente de funções lineares, porém introduzem uma abordagem que pode ser estendida para funções quadráticas no quociente. Eles obtêm resultados de dualidade para um problema de programação não linear onde o máximo de vários quocientes de funções lineares é minimizado sujeito a restrições lineares, que o chamam de problema de programação fracional linear generalizado do tipo Min-Max. Para este problema, eles introduzem um problema dual do tipo Max-Min para encontrar as suas relações com o problema primal Min-Max. Resumidamente, sejam $f_i, g_i, i \in I$, funções lineares, onde $g_i(x) > 0, \forall x \in \Omega$, Crouzeix et al. trabalham com o seguinte problema,

$$(\overline{\text{PF}})_2 \quad \inf_{x \in S} \max_{1 \leq i \leq m} \frac{f_i(x)}{g_i(x)},$$

onde $m > 1$ e $S = \{x \in \Omega \mid Ax \leq b\} \subseteq \mathbb{R}_+^n$, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $b \in \mathbb{R}^p$. Para obter o problema dual, é feita uma transformação no problema $(\overline{\text{PF}})_2$, criando um problema associado, que posteriormente é estudado por uma abordagem paramétrica.

Posteriormente, outros autores obtiveram novos resultados e algoritmos para resolver algumas aplicações do problema $(\overline{\text{PF}})_2$, incluindo o caso em que há funções quadráticas no quociente da função objetivo. Uma revisão desses trabalhos feita por Schaible and Shi, pode ser encontrada em [58].

Em [19], Gotoh e Konno estudam uma aplicação do problema (PFQ) introduzida por Lo e MacKinlay [36] em um modelo de maximização da previsibilidade nos mercados de ações e títulos, como alternativa para se analisar carteiras. A função objetivo deste problema é formada pelo quociente de duas funções quadráticas convexas, que tem múltiplos ótimos locais. Eles desenvolvem um algoritmo para resolver alguns problemas de aplicações práticas e com bom desempenho. O algoritmo tem uma estratégia de busca do tipo branch-and-bound que explora o problema paramétrico introduzido por Dinkelbach [16].

Em [10], Cambini et al. estudam um caso particular do problema (PFQ) onde a função objetivo é formada por uma função quadrática no numerador e por uma linear no denominador. Eles fornecem uma condição necessária e suficiente para que a função objetivo seja pseudoconvexa e obtêm alguns resultados dessa hipótese. Os resultados obtidos os permitiram sugerir um algoritmo simples para testar se uma função com determinadas características é pseudoconvexa. Este algoritmo também pode ser usado para caracterizar a pseudoconvexidade da soma de uma função linear com uma função fracional, sendo a última formada por funções lineares em ambos numerador e denominador.

Em [9], Benson estuda dois tipos de problemas de otimização fracional, um (PFQ) com ambas funções quadráticas do numerador e denominador convexas, e um caso um pouco mais geral, onde o numerador leva uma função quadrática convexa e o denominador uma função, não necessariamente quadrática, convexa e estritamente positiva. Resumidamente, sejam $Q, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes simétricas, Q semidefinida positiva, P definida positiva e g uma função convexa, $g(x) > 0$, $\forall x \in S$, tal que, $0 \notin S$. Benson estuda os seguintes problemas,

$$(PFQ) \quad \text{Maximizar}_{x \in S} \frac{x^T Q x}{x^T P x},$$

$$(\overline{PF})_3 \quad \text{Maximizar}_{x \in S} \frac{x^T Q x}{g(x)},$$

onde o conjunto S é não vazio, convexo e compacto. Primeiro, ele apresenta e demonstra algumas propriedades teóricas desses problemas. Entre elas, que qualquer solução ótima global do problema (PFQ) pertence à fronteira do seu conjunto viável e, que o problema $(\overline{PF})_3$ pode ser reformulado como um problema de maximização convexo. Em seguida, Benson apresenta um algoritmo para encontrar soluções globais do problema $(\overline{PF})_3$ que usa uma estratégia de busca do tipo branch-and-bound. O principal esforço computacional deste algoritmo envolve a solução de uma sequência de problemas de otimização convexo. Propriedades de convergência do algoritmo também são apresentadas.

2.5 O problema multiobjetivo fracional quadrático

Até o momento, poucos trabalhos foram produzidos no campo da programação multiobjetivo fracional onde se especifica o uso de funções quadráticas em ambos numerador e denominador de cada função objetivo. Como o mais próximo disso, podemos citar alguns trabalhos, entre eles, Beato et al. [5] e [6], Arévalo e Zapata [4], Konno e Inori [29], Rhode e Weber [53], Korhoen e Yu [30] e [31].

Em [5], Beato et al. apresentam uma caracterização das soluções eficientes de um problema (PM) com o vetor objetivo formado por funções quadráticas, porém não fracionárias,

baseada em um teste feito através de um método computacional iterativo, que considera as condições necessárias de primeira ordem. Em [4], Arévalo e Zapata estudam um problema de seleção de carteiras modelado por um problema multiobjetivo fracional, onde cada função objetivo é formada pelo quociente entre uma função quadrática no numerador e uma linear no denominador, que medem fatores como a rentabilidade, o risco e a liquidez de cada carteira. Com o mesmo tipo de funções objetivo, em [29], Konno e Inori estudam problemas de investimentos institucionais e, Rhode e Weber [53], estudam a seleção de carteiras em investimentos.

Em [32], Kornbluth e Steuer estudam um problema multiobjetivo fracional onde cada função do vetor objetivo é o quociente de duas funções lineares, e o conjunto de restrições é formado por desigualdades lineares. Eles desenvolvem um algoritmo para encontrar todas as soluções fracamente eficientes deste problema baseado no clássico algoritmo Simplex para problemas escalares lineares. Kornbluth e Steuer discutem as dificuldades encontradas no desenvolvimento deste método para problemas multiobjetivo, como a determinação de *vértices* e *bases* associadas à uma solução.

Em [30], Korhonen e Yu estudam um problema (PM) que tem as entradas do vetor objetivo formado por uma função quadrática e o restante por funções lineares, porém não fracionárias, e tem o conjunto de restrições formado por desigualdades lineares. Eles propõem um método computacional iterativo para resolução deste problema baseado em direções de busca e somas ponderadas, que são usadas em um tipo de parametrização das funções objetivo, para implementar a busca por soluções não dominadas. A estratégia produz uma formulação do problema de complementaridade linear paramétrico, sendo que uma abordagem para lidar com este último problema também é apresentada e ilustrada com um exemplo numérico. Em [31], Korhonen e Yu estendem os resultados anteriores para uma gama maior de abordagens computacionais e fazem uma comparação entre essas distintas abordagens.

Em [6], Beato et al. obtêm condições necessárias e suficientes de otimalidade para as soluções eficientes de um caso particular de problemas multiobjetivo fracional, onde cada função objetivo é formada pelo quociente entre uma função quadrática no numerador e uma linear no denominador. Resumidamente, sejam $b_i, c_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in I$, e $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in I$, matrizes simétricas semidefinidas positiva, Beato et al. trabalham com problemas onde o vetor objetivo é formado por funções que satisfazem $f_i(x) = \frac{1}{2}x^T A_i x + b_i^T x$ e $g_i(x) = c_i^T x > 0$, $\forall x \in S$, onde S é formado por desigualdades lineares. Alguns dos resultados teóricos são obtidos efetuando uma linearização do problema, da mesma forma que é proposto por Bector et al. [8]. Outro resultado de Beato et al. é a introdução de um método computacional que testa se um ponto viável é uma solução eficiente.

2.6 Conclusão

As abordagens tratadas neste trabalho de pesquisa para a resolução de problemas de otimização fracional são distintas das abordagens apresentadas nesta pequena revisão bibliográfica. Não foi encontrado na literatura nenhum método semelhante ao método que apresentamos no Capítulo 3 para obter condições de otimalidade para o problema (PMFQ), descrito na Seção 2.1. Apesar da abordagem feita no Capítulo 4, quanto à caracterização de soluções localmente eficientes, ser uma mera leitura das características do problema (PMFQ), esta abordagem também não foi encontrada na literatura. Para obter algumas condições suficientes de otimalidade para as soluções do problema (PMFQ), apresentadas no Capítulo 5, utilizamos alguns dos conceitos apresentados por Liang et al., em [34] e [35], porém, utilizamos hipóteses mais fracas e distintas sobre as funções objetivo em relação a Liang et al., sendo que as diferenças são explicadas em detalhes. No que se refere à teoria de dualidade, apresentada no Capítulo 6, utilizamos alguns dos conceitos apresentados por Osuna-Gómez et al., em [48] e [49], porém, novamente, com hipóteses mais fracas e particulares ao problema (PMFQ).

Acreditamos que as abordagens que seguem neste trabalho de pesquisa facilitem a resolução de problemas de otimização multiobjetivo fracional com as mesmas características do problema (PMFQ).

Capítulo 3

Condições de Otimalidade Via Raio de Eficiência

Neste capítulo apresentamos a principal contribuição deste trabalho, caracterizada por uma abordagem alternativa de obtenção de condições de otimalidade para problemas multiobjetivo. Introduzimos o conceito de raio de eficiência para o problema (PM) e estudamos algumas condições de otimalidade para o problema (PMFQ) via raio de eficiência. Inicialmente alguns resultados são obtidos para o problema (PMFQ') e, em seguida, estendemos para o caso com restrições.

3.1 Raio de eficiência

Nesta seção vamos apresentar algumas condições sob as quais eficiência local equivale a eficiência global. Introduzimos um conceito alternativo para soluções localmente eficientes com o objetivo de detectar a sua eficiência global ou não, através de determinadas propriedades particulares das funções objetivo ao longo de uma direção de busca. Com esta abordagem é possível identificar um subconjunto de pontos do conjunto viável onde uma solução localmente eficiente é não dominada. Este conceito é o raio de eficiência, que vamos definir primeiramente para o problema (PM).

Diremos que um ponto $x^* \in S$ é λ -eficiente ou tem *raio de eficiência* λ para o problema (PM) se $x^* \in \text{Leff}(PM)$ e não existe um outro ponto $x' \in B(x^*, \lambda) \subseteq S$ que domina x^* .

Apesar da semelhança, chamamos a atenção para uma importante diferença entre a definição de solução localmente eficiente apresentada na Seção 1.2, e a definição do raio de eficiência de uma solução localmente eficiente. No primeiro caso, de um ponto de vista teórico, sabemos que sempre existe uma vizinhança arbitrária $N(x^*) \subseteq S$ de x^* , onde x^* é não dominado. Naturalmente, esta vizinhança pode ser considerada como uma bola de $\mathbb{R}^n$

de raio arbitrário. Mostraremos ser possível calcular $\lambda^* > 0$, tal que, $B(x^*, \lambda^*) \subseteq S$ é a maior bola onde x^* é não dominado, ou ainda, concluir que x^* é não dominado em todo o conjunto viável S .

Podemos indicar algumas razões importantes para o uso do raio de eficiência nos problemas (PM). Deixar de estudar uma solução em uma bola de raio arbitrário para estudá-la em uma bola fixa e conhecida. Determinar um subconjunto compacto, no qual não existam outros pontos que dominem uma certa solução. Isto é útil na resolução dos problemas (PM), porque na prática, se for conhecido um raio de eficiência, o decisor pode estimar qual o custo para procurar por uma nova solução, e ainda, escolher qual procedimento de busca usar. Concluir a eficiência global através de problemas auxiliares induzidos pelo conceito de raio de eficiência.

Naturalmente, se x^* é λ -eficiente, então ele é β -eficiente, $\forall \beta < \lambda$. Similarmente dizemos que x^* é ∞ -eficiente se ele for eficiente em S .

3.2 Raio de eficiência no problema (PMFQ)

Nosso objetivo é calcular o raio de eficiência de uma solução x^* e obter resultados a partir deste cálculo. Para a nossa abordagem, precisamos iniciar com a hipótese de que $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$. Para determinar o raio de eficiência $\lambda > 0$ desta solução x^* , a questão que devemos formular é: *Qual é o menor valor de $\lambda > 0$, tal que, existe uma direção unitária d , onde $\frac{f(x^* + \lambda d)}{g(x^* + \lambda d)} \leq \frac{f(x^*)}{g(x^*)}$?* Esta questão, pode ser formulada de outra maneira: *Qual é o maior valor de $\lambda > 0$, tal que, dada uma direção unitária d , $\frac{f(x^* + \lambda d)}{g(x^* + \lambda d)} \leq \frac{f(x^*)}{g(x^*)}$ não tem solução?*

A resposta para qualquer uma dessas questões fornece o raio de eficiência máximo de x^* . Os teoremas que seguem nos permitem caracterizar quando uma solução localmente eficiente equivale a uma solução eficiente. Usaremos esses teoremas para identificar o raio de eficiência máximo e analisar a dominância de uma solução localmente eficiente no conjunto viável.

Usando uma abordagem paramétrica, semelhante à usada por Dinkelbach [16] e Jaganathan [23], que transformam o problema de otimização escalar fracional em um novo problema escalar, consideramos o seguinte problema associado ao (PMFQ), descrito na Seção 2.1.

$$\begin{aligned}
 (\text{PMFQ})_{x^*} \quad & \text{Minimizar} \quad f(x) - \frac{f(x^*)}{g(x^*)}g(x) = \left(f_1(x) - \frac{f_1(x^*)}{g_1(x^*)}g_1(x), \dots, f_m(x) - \frac{f_m(x^*)}{g_m(x^*)}g_m(x) \right) \\
 \text{s.a} \quad & h_j(x) \leq 0 \quad j \in K, \\
 & x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,
 \end{aligned}$$

onde f_i e g_i são funções quadráticas de n variáveis reais, para qualquer $i \in I$. Além disso, supomos que $g_i(x) > 0$ para qualquer x em Ω e qualquer $i \in I$. Os domínios das funções reais h_j 's contém Ω . O conjunto viável S é a interseção de Ω com o conjunto de vetores x

nos quais $h_j(x) \leq 0$ para qualquer x e $j \in K$, e $x^* \in S$.

O problema $(PMFQ)_{x^*}$ é introduzido de forma semelhante por Osuna-Gómez et al. [49]. No entanto, os autores abordam o problema de forma distinta obtendo condições necessárias e suficientes de otimalidade e resultados de dualidade para soluções fracamente eficientes. Nas referências [16], [23] e [49] os autores consideram cada função objetivo como $f_i(x) - \alpha_i g_i(x)$, $i \in I$, dada por um parâmetro $\alpha_i \in \mathbb{R}$, e obtêm alguns de seus resultados quando $\bar{\alpha}_i = \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}$, onde x^* resolve o problema (PF) nas referências [16], [23], e $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$ na referência [49]. Não pretendemos estender nosso estudo quanto às propriedades dos parâmetros $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$, portanto vamos considerar diretamente que $\bar{\alpha}_i = \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}$, onde $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$. Também vamos considerar apenas condições de otimalidade para as soluções eficientes que, em geral, são mais complicadas teoricamente de se obter em comparação com as soluções fracamente eficientes. O teorema que segue e sua demonstração é uma abordagem equivalente ao Lema 1.1 apresentado em [49].

Teorema 3.1 *Seja $x^* \in S$. $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$ se e somente se $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$. Além disso, x^* é localmente eficiente para $(PMFQ)$ em $N(x^*)$ se e somente se é localmente eficiente para $(PMFQ)_{x^*}$ em $N(x^*)$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja $N(x^*) \subseteq S$, tal que, x^* é localmente eficiente para $(PMFQ)$ em $N(x^*)$. Suponha que $x^* \notin \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$, então existe um outro ponto $x' \in N(x^*)$, satisfazendo

$$f(x') - \frac{f(x^*)}{g(x^*)}g(x') \leq f(x^*) - \frac{f(x^*)}{g(x^*)}g(x^*) = 0 \implies \frac{f(x')}{g(x')} \leq \frac{f(x^*)}{g(x^*)}.$$

O que contradiz $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$ em $N(x^*)$. Portanto $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$ em $N(x^*)$.

$(\Leftarrow)$ Analogamente, seja $N(x^*) \subseteq S$, tal que, x^* é localmente eficiente para $(PMFQ)_{x^*}$ em $N(x^*)$. Suponha que $x^* \notin \text{Leff}(PMFQ)$, então existe um outro ponto $x' \in N(x^*)$, satisfazendo

$$\frac{f(x')}{g(x')} \leq \frac{f(x^*)}{g(x^*)} \implies f(x') - \frac{f(x^*)}{g(x^*)}g(x') \leq 0 = f(x^*) - \frac{f(x^*)}{g(x^*)}g(x^*).$$

O que contradiz $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$ em $N(x^*)$. Portanto $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$ em $N(x^*)$. ■

Para esses problemas associados, para cada $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$, podemos assegurar que $\text{Leff}(PMFQ) \subset \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$. Como o subconjunto $N(x^*)$, que equivale a uma bola de raio arbitrário em $\mathbb{R}^n$ centrada em x^* , aparece em ambos os problemas $(PMFQ)$ e $(PMFQ)_{x^*}$ e queremos calcular uma vizinhança $B(x^*, \lambda^*)$ de raio λ^* máximo, tal que, $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$

em $B(x^*, \lambda^*)$, calcular o raio de eficiência λ^* de uma solução x^* no problema (PMFQ) é equivalente à calcular o raio de eficiência λ^* de x^* no problema (PMFQ) $_{x^*}$, e assim, podemos escolher entre os dois problemas aquele que facilita este cálculo.

3.3 Raio de eficiência nos problemas sem restrições

De forma análoga ao apresentado na Seção 2.1, denotamos por (PMFQ') $_{x^*}$ o problema (PMFQ) $_{x^*}$ sem restrições. Inicialmente, nos resultados que seguem, vamos estudar o problema (PMFQ'), no qual as funções objetivo são definidas para cada $i \in I$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$, como segue.

$$f_i(x) = x^T A_i x + a_i^T x + \bar{a}_i, \quad \text{e} \quad g_i(x) = x^T B_i x + b_i^T x + \bar{b}_i,$$

onde $A_i, B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A_i simétrica, B_i simétrica semidefinida positiva, $a_i, b_i \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{a}_i, \bar{b}_i \in \mathbb{R}$, com $\bar{b}_i > -(\hat{x}^{iT} B_i \hat{x}^i + b_i^T \hat{x}^i)$, onde $\hat{x}^i$ é uma solução do sistema $2B_i x + b_i = 0$. Ou seja, $\hat{x}^i$ é o ponto em que a função $x^T B_i x + b_i^T x$ atinge o seu mínimo e isso garante que $g_i(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Não vamos considerar os casos em que $2B_i x + b_i = 0$ não tem solução.

Precisamos definir alguns conjuntos e parâmetros que serão usados ao longo deste texto. Dado $x^* \in \mathbb{R}^n$, definimos a função quadrática

$$p_i(x) = x^T \left(A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right) x + \left(a_i^T - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} b_i^T \right) x, \quad i \in I, \quad (3.1)$$

e dado uma direção unitária d , definimos

$$X_0 = \{i \in I \mid [d^T \nabla^2 p_i(x^*) d, \nabla p_i(x^*)^T d]^T \geq [0, 0]^T\},$$

$$X_1 = \{i \in I \mid d^T \nabla^2 p_i(x^*) d > 0 \text{ e } \nabla p_i(x^*)^T d < 0\},$$

$$X_2 = \{i \in I \mid d^T \nabla^2 p_i(x^*) d < 0 \text{ e } \nabla p_i(x^*)^T d > 0\},$$

$$\lambda_2^d = \max_{i \in X_2} \left\{ \frac{-2 \nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d} \right\}, \quad \lambda_1^d = \begin{cases} \min_{i \in X_1} \left\{ \frac{-2 \nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d} \right\}, & \text{se } X_1 \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{se } X_1 = \emptyset, \end{cases}$$

$$\Lambda_2^d = [\lambda_2^d, \infty), \quad \Lambda_1^d = \begin{cases} (0, \lambda_1^d], & \text{se } X_1 \neq \emptyset \\ (0, \lambda_1^d), & \text{se } X_1 = \emptyset, \end{cases} \quad \Lambda^d = \Lambda_2^d \cap \Lambda_1^d.$$

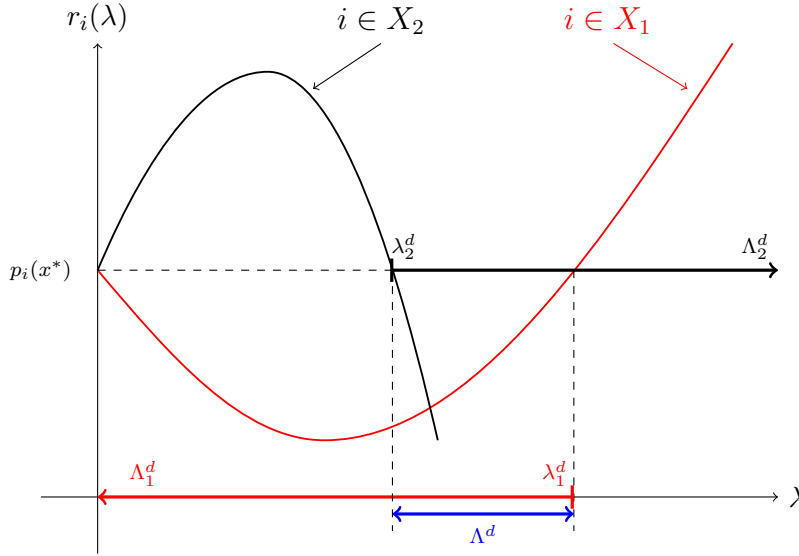


Figura 3.1: Gráfico de r_i cujo índice i pertence ao conjunto X_1 ou X_2

Observe que as funções p_i , $i \in I$, definidas em (3.1), são as mesmas funções objetivo do problema $(\text{PMFQ})_{x^*}$ a menos das parcelas constantes $\bar{a}_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}\bar{b}_i$ e, portanto, $p_i(x^*) = -[\bar{a}_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}\bar{b}_i]$.

Para o melhor entendimento dos conjuntos e parâmetros acima, considere a expansão de Taylor em torno do zero da função $r_i(\lambda) = p_i(x^* + \lambda d)$, $i \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$. A princípio seria uma aproximação, mas como r_i é uma função quadrática, então

$$r_i(\lambda) = p_i(x^*) + \lambda \nabla p_i(x^*)^T d + \frac{\lambda^2}{2} d^T \nabla^2 p_i(x^*) d.$$

Ou seja, r_i é uma função real de uma variável, cujo gráfico é uma parábola, e tem termo constante $p_i(x^*)$, termo linear $\nabla p_i(x^*)^T d$ e termo quadrático $\frac{1}{2} d^T \nabla^2 p_i(x^*) d$. Então, fica fácil interpretar quem são os conjuntos X_0 , X_1 e X_2 . Dada uma direção unitária d , o conjunto X_1 é formado pelos índices $i \in I$ cujas funções r_i decrescem para valores próximos de $\lambda = 0$ e são convexas, enquanto que o conjunto X_2 é formado pelos índices $i \in I$ cujas funções r_i crescem para valores próximos de $\lambda = 0$ e são côncavas. Exemplos de elementos dos conjuntos X_1 e X_2 estão ilustrados na Figura 3.1. Nela, aparecem dois gráficos que representam duas funções r_i . O que nos interessa são os valores de $\lambda > 0$, por isso estão representados na Figura 3.1 os pontos da função $r_i(\lambda) = p_i(x^* + \lambda d)$ plotados nas coordenadas $(\lambda, r_i(\lambda))$, para $\lambda > 0$, que neste caso, são duas parábolas. Nela, está ilustrado uma parábola convexa em cor vermelha indicando que o índice da função r_i pertence ao conjunto X_1 . Não é difícil notar que neste caso temos $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d > 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d < 0$. Por outro lado, também está

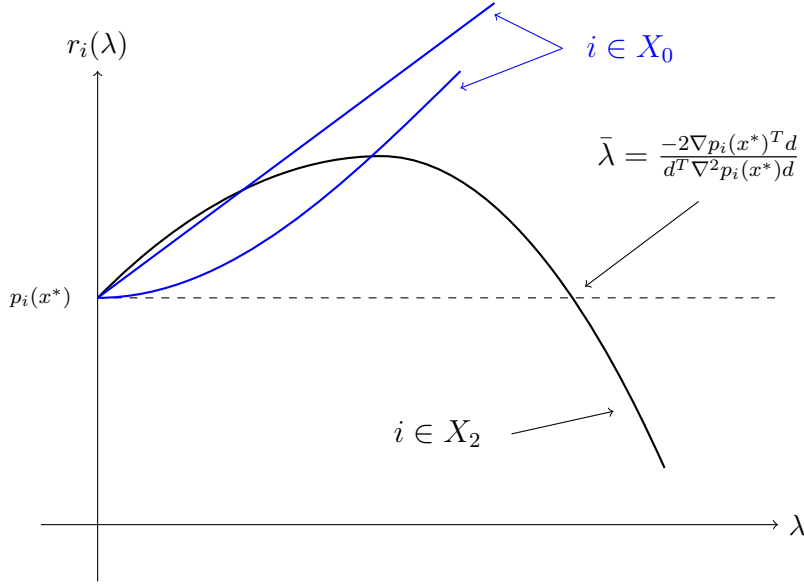


Figura 3.2: Representa $i \in X_0$ ou $i \in X_2$ e uma raiz $\bar{\lambda}$ da equação $r_i(\lambda) - p_i(x^*) = 0$

ilustrado uma parábola côncava em cor preta indicando que o índice da função r_i pertence ao conjunto X_2 , sendo que neste caso temos $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d < 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d > 0$.

O conjunto X_0 é formado pelos índices $i \in I$, tais que, cada função quadrática r_i tem termo linear não negativo e o termo quadrático positivo ou tem termo linear positivo e o termo quadrático não negativo. Dois elementos do conjunto X_0 estão ilustrados na Figura 3.2. Nela, está ilustrado uma parábola convexa em cor azul, que representa o gráfico de uma função quadrática r_i , no caso em que ocorre $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d > 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d \geq 0$. Neste caso, o índice da função r_i pertence ao conjunto X_0 . Também está ilustrado na Figura 3.2 uma reta crescente, para $\lambda > 0$, em cor azul, que representa o gráfico de uma função linear r_i , no caso em que ocorre $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d = 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d > 0$. Note que neste caso, o índice da função r_i também pertence ao conjunto X_0 .

O parâmetro λ_2^d é igual ao máximo dos valores das raízes positivas das equações $r_i(\lambda) - p_i(x^*) = 0$, cujos índices i pertencem a X_2 . Analogamente, quando $X_1 \neq \emptyset$, o parâmetro λ_1^d é igual ao mínimo dos valores das raízes positivas das equações $r_i(\lambda) - p_i(x^*) = 0$, cujos índices i pertencem a X_1 . Quando $X_1 = \emptyset$, escolhemos $\lambda_1^d = \infty$. Observe que para cada índice i a outra raiz da equação $r_i(\lambda) - p_i(x^*) = 0$ é $\lambda = 0$, porém estamos interessados nos valores de $\lambda > 0$. Esses parâmetros são ilustrados na Figura 3.1. Nela, o parâmetro λ_2^d aparece em cor preta, enquanto que o parâmetro λ_1^d em cor vermelha. Na Figura 3.2, é ilustrado em cor preta uma raiz positiva $\bar{\lambda}$ da equação $r_i(\lambda) - p_i(x^*) = 0$ quando $i \in X_2$.

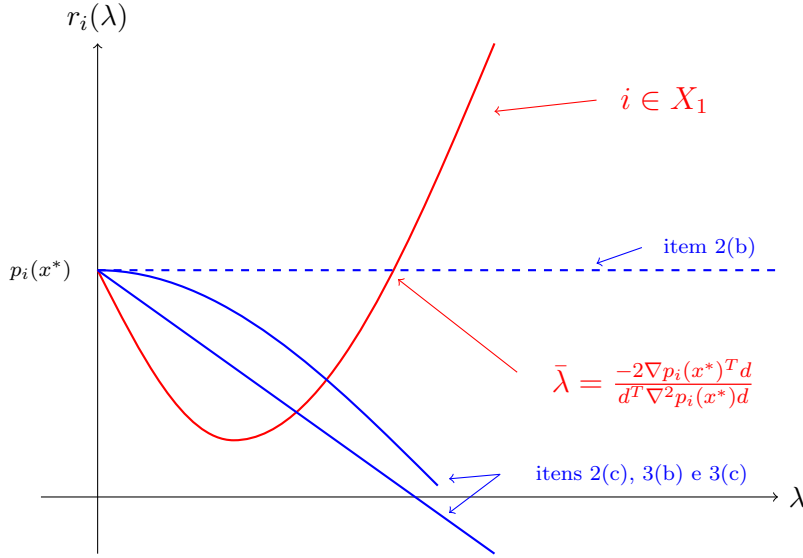


Figura 3.3: Representa $i \in X_1$ e uma raiz $\bar{\lambda}$ da equação $r_i(\lambda) - p_i(x^*) = 0$

Dada uma direção unitária d , os conjuntos Λ_2^d , Λ_1^d e Λ^d são intervalos contidos em $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, sendo que λ_2^d o menor valor do intervalo Λ_2^d e λ_1^d o maior valor do intervalo Λ_1^d . Quando $\lambda_2^d \leq \lambda_1^d$, eles são os extremos do intervalo Λ^d e, se $\lambda_2^d > \lambda_1^d$, obtemos $\Lambda^d = \emptyset$. Porém, em alguns casos particulares, por exemplo, quando a cardinalidade de X_1 e X_2 satisfazem $|X_1| = |X_2| = 1$ e ainda ocorre $\lambda_2^d = \lambda_1^d$, vamos obter $\Lambda^d = \{\lambda_2^d\}$, ou seja, $\Lambda^d \neq \emptyset$, no entanto, veremos que o ideal neste caso é escolher $\Lambda^d = \emptyset$. Este caso particular e outros parecidos são importantes e serão explicados em detalhes em momento oportuno. Exemplos dos intervalos Λ_2^d , Λ_1^d e Λ^d são ilustrados na Figura 3.1. Nela, observamos em cor preta o intervalo $\Lambda_2^d = [\lambda_2^d, \infty)$ e, em cor vermelha, o intervalo $\Lambda_1^d = (0, \lambda_1^d]$. Logo abaixo do eixo das abscissas, encontra-se em cor azul o intervalo $\Lambda^d = \Lambda_2^d \cap \Lambda_1^d$. A escolha de $\lambda_1^d = \infty$ quando $X_1 = \emptyset$ é feita para que tenhamos $\Lambda^d \neq \emptyset$ sempre que $X_2 \neq \emptyset$. É importante observar na Figura 3.1 que dado $\lambda \in \Lambda^d$ e $x' = x^* + \lambda d$, obtemos $p_i(x') \leq p_i(x^*)$, $i \in I$. Por outro lado, é ilustrado na Figura 3.4 um exemplo em que $\Lambda^d = \emptyset$.

Antes do próximo resultado, vamos entender melhor a possibilidade de obter uma direção unitária d e uma constante $\lambda > 0$, tal que, dada uma solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$, $\frac{f(x^* + \lambda d)}{g(x^* + \lambda d)} \leq \frac{f(x^*)}{g(x^*)}$ tem solução, e quais são as relações entre este fato, a equação (3.1) e os conjuntos X_0 , X_1 e X_2 .

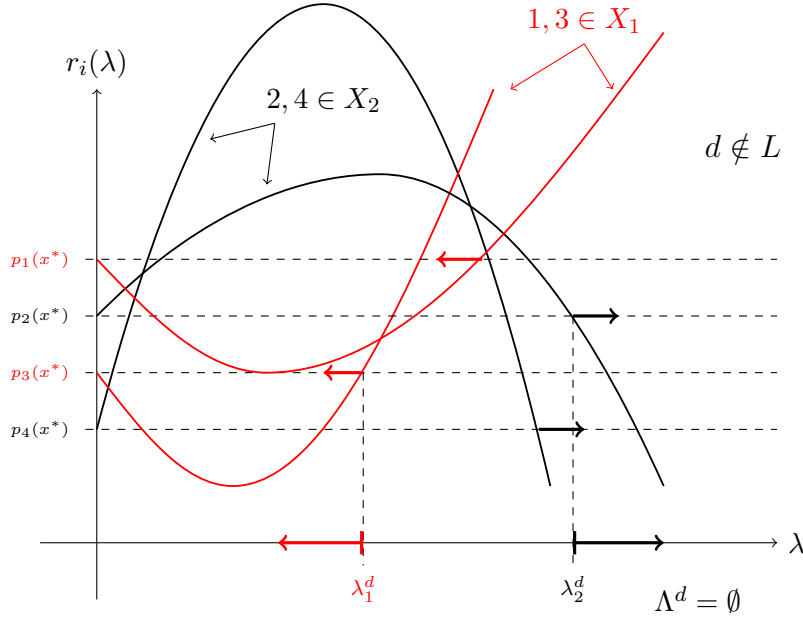


Figura 3.4: Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$

Considere a expansão de Taylor em torno do zero de cada função $\bar{r}_i(\lambda) = f_i(x^* + \lambda d)$ e $\tilde{r}_i(\lambda) = g_i(x^* + \lambda d)$, $i \in I$, na solução x^* , ao longo da direção unitária d ,

$$\bar{r}_i(\lambda) = f_i(x^* + \lambda d) = f_i(x^*) + \lambda \nabla f_i(x^*)^T d + \lambda^2 d^T A_i d,$$

$$\tilde{r}_i(\lambda) = g_i(x^* + \lambda d) = g_i(x^*) + \lambda \nabla g_i(x^*)^T d + \lambda^2 d^T B_i d.$$

Efetuada algumas manipulações, obtemos

$$\frac{f_i(x^* + \lambda d)}{g_i(x^* + \lambda d)} \leq \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \iff \lambda d^T \left(\lambda A_i - \lambda \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right) d \leq \left(\lambda \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \nabla g_i(x^*) - \lambda \nabla f_i(x^*) \right)^T d.$$

Considere $p_i(x)$ em (3.1), então

$$\begin{aligned} \lambda d^T \left(\lambda A_i - \lambda \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right) d &\leq \left(\lambda \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \nabla g_i(x^*) - \lambda \nabla f_i(x^*) \right)^T d \iff \\ &\iff \lambda \left(\nabla p_i(x^*)^T d + \frac{\lambda}{2} d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \right) \leq 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde

$$\frac{1}{2}\nabla^2 p_i(x^*) = A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}B_i \quad \text{e} \quad \nabla p_i(x^*) = \nabla f_i(x^*) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}\nabla g_i(x^*).$$

De (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} p_i(x^* + \lambda d) - p_i(x^*) &= \lambda \left(\nabla p_i(x^*)^T d + \frac{\lambda}{2} d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \right) \leq 0 \iff \\ &\iff r_i(\lambda) = p_i(x^* + \lambda d) \leq p_i(x^*). \end{aligned}$$

Para cada direção d e para cada $i \in I$ podem ocorrer as seguintes situações quanto à existência de soluções positivas para a desigualdade (3.2).

1. $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d > 0$,
 - (a) $\nabla p_i(x^*)^T d > 0$, não existe $\lambda > 0$, que satisfaz (3.2) e $i \in X_0$,
 - (b) $\nabla p_i(x^*)^T d = 0$, não existe $\lambda > 0$, que satisfaz (3.2) e $i \in X_0$,
 - (c) $\nabla p_i(x^*)^T d < 0$, $\lambda \in \left(0, \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d}\right]$, que satisfaz (3.2) e $i \in X_1$.
2. $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d = 0$,
 - (a) $\nabla p_i(x^*)^T d > 0$, não existe $\lambda > 0$, que satisfaz (3.2) e $i \in X_0$,
 - (b) $\nabla p_i(x^*)^T d = 0$, $\lambda \in (0, \infty)$, que satisfaz (3.2),
 - (c) $\nabla p_i(x^*)^T d < 0$, $\lambda \in (0, \infty)$, que satisfaz (3.2).
3. $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d < 0$,
 - (a) $\nabla p_i(x^*)^T d > 0$, $\lambda \in \left[\frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d}, \infty\right)$, que satisfaz (3.2) e $i \in X_2$,
 - (b) $\nabla p_i(x^*)^T d = 0$, $\lambda \in (0, \infty)$, que satisfaz (3.2),
 - (c) $\nabla p_i(x^*)^T d < 0$, $\lambda \in (0, \infty)$, que satisfaz (3.2).

Os itens acima informam quando existe $\lambda > 0$ satisfazendo a desigualdade (3.2) e a qual intervalo ele pertence. Eles também informam qual é o comportamento de cada função r_i ao longo da direção d . Por exemplo, os itens 1.(a), 1.(b) e 2.(a) representam as funções r_i que crescem na direção d e, portanto, não existe $\lambda > 0$ satisfazendo (3.2). Nesses casos o índice da função r_i pertence ao conjunto X_0 e ocorre $r_i(\lambda) > p_i(x^*)$. O comportamento da função r_i para os itens 1.(a), 1.(b) e 2.(a) está ilustrado em cor azul na Figura 3.2. Nela, aparece uma parábola e uma reta que crescem para $\lambda > 0$.

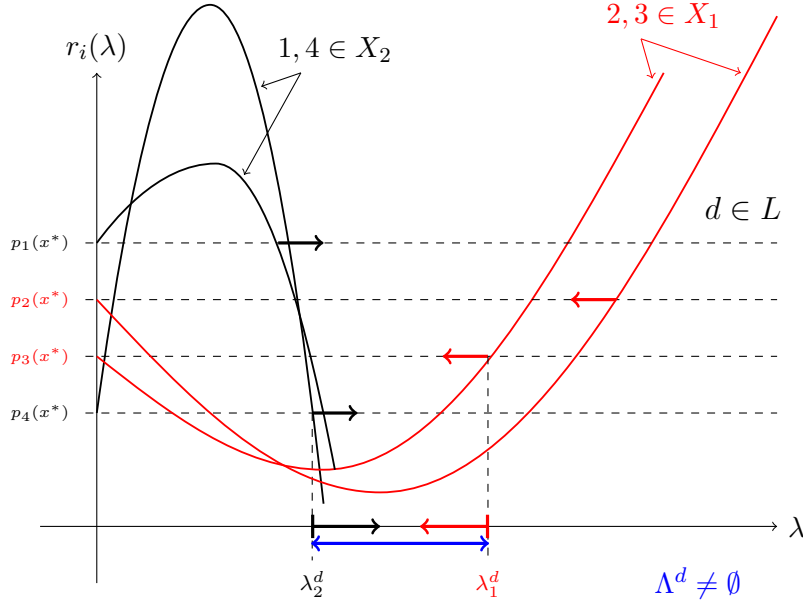


Figura 3.5: Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$

Na Figura 3.3 está representado o que ocorre no item 1.(c). Nela, está ilustrado em cor vermelha a função r_i , que neste caso, é o gráfico de uma parábola convexa. No item 1.(c), existe $\lambda > 0$ satisfazendo (3.2) e ele fornece as condições para que r_i seja uma função quadrática convexa, tal que, a equação $r_i(\lambda) - p_i(x^*) = 0$ tem raiz positiva $\bar{\lambda} = \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d}$. Então, para ocorrer $p_i(x^* + \lambda d) \leq p_i(x^*)$, neste caso, devemos ter $\lambda \in \left(0, \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d}\right]$. Excluímos o zero do intervalo porque estamos interessados em pontos $x^* + \lambda d$ diferentes de x^* .

Os itens 2.(b), 2.(c), 3.(b) e 3.(c) representam as funções r_i que não crescem na direção d e, portanto, todo $\lambda \in (0, \infty)$ satisfaz (3.2). O comportamento das funções r_i para esses itens estão ilustrados em cor azul na Figura 3.3. O item 2.(b) implica que, para algum $i \in I$, a função r_i é constante, uma vez que o termo linear e o termo quadrático desta função são nulos. Para os itens 2.(c), 3.(b) e 3.(c) que ocorrem quando $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d < 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d \leq 0$, ou quando $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \leq 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d < 0$, para algum $i \in I$, poderão ocorrer duas situações quando temos $X_0 = \emptyset$ e $X_2 \neq \emptyset$ na direção d . Na primeira, se $X_1 = \emptyset$, então $\lambda_1^d = \infty$ e a desigualdade $r_i(\lambda) \leq p_i(x^*)$ será válida para valores de $\lambda > 0$ determinados pelas raízes positivas das equações $r_i(\lambda) - p_i(x^*) = 0$ cujos índices $i \in X_2$. Na segunda, quando $X_1 \neq \emptyset$, se existir um índice $k \in I$, tal que, $d^T \nabla^2 p_k(x^*) d \leq 0$ e $\nabla p_k(x^*)^T d \leq 0$, o valor de λ_1^d não é influenciado pela função r_k , pois λ_1^d é determinado pelas raízes positivas das equações $r_i(\lambda) - p_i(x^*) = 0$ cujos índices $i \in X_1$.

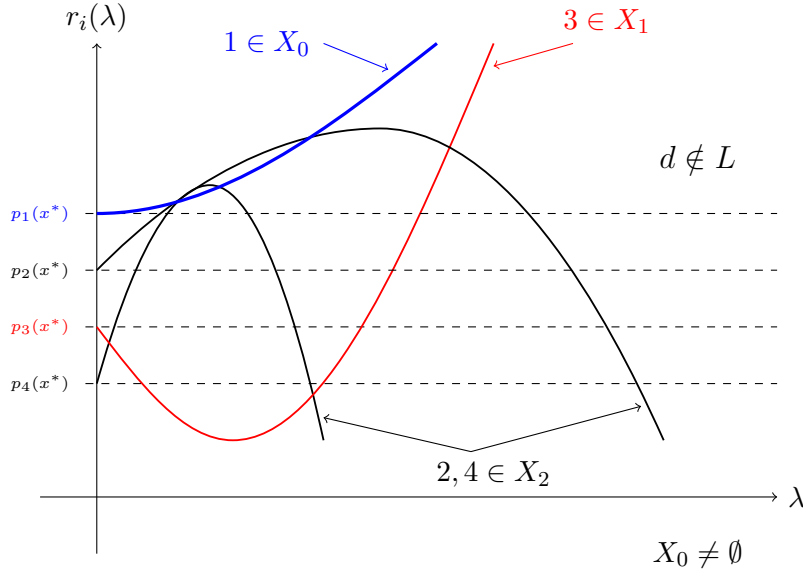


Figura 3.6: Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$

Na Figura 3.2 está representado o que ocorre no item 3.(a). Nela, está ilustrado em cor preta a função r_i , que neste caso, é o gráfico de uma parábola cônica. No item 3.(a), existe $\lambda > 0$ satisfazendo (3.2) e ele fornece as condições para que r_i seja uma função quadrática cônica, tal que, a equação $r_i(\lambda) - p_i(x^*) = 0$ tem raiz positiva $\bar{\lambda} = \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d}$. Então, para ocorrer $p_i(x^* + \lambda d) \leq p_i(x^*)$, neste caso, devemos ter $\lambda \in \left[\frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d}, \infty \right)$.

Dada uma direção unitária d , o que procuramos é um intervalo Λ^d não vazio, tal que, $x' = x^* + \lambda d$, $p_i(x') \leq p_i(x^*)$, $\forall i \in I$, com $\lambda \in \Lambda^d$ e $X_0 = \emptyset$. Então, temos que verificar os itens acima para m funções. Como exemplo, estão plotados os pontos das parábolas que são os gráficos das funções $r_i(\lambda) = p_i(x^* + \lambda d)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, nas coordenadas $(\lambda, r_i(\lambda))$ nas Figuras 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7. Na Figura 3.5, está ilustrado um caso em que $\Lambda^d \neq \emptyset$. Nela, temos $X_1 = \{2, 3\}$ em cor vermelha, $X_2 = \{1, 4\}$ em cor preta e vemos claramente que $\lambda_2^d \leq \lambda_1^d$. Observe ainda, que se $\lambda \in \Lambda^d$, $x' = x^* + \lambda d$, temos $p_i(x') \leq p_i(x^*)$, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Na Figura 3.6, está ilustrado um caso em que $X_0 \neq \emptyset$. Nela, temos em cor azul $X_0 = \{1\}$, em vermelho $X_1 = \{3\}$ e em preto $X_2 = \{2, 4\}$. Como $r_1(\lambda)$ sempre cresce para $\lambda > 0$, x^* é globalmente eficiente nesta direção, ou seja, quando ocorre $X_0 \neq \emptyset$ em uma direção d , então a solução x^* é globalmente eficiente nesta direção. Por outro lado, dada uma direção d , se $X_0 = \emptyset$ e $X_1 \neq \emptyset$, então não pode ocorrer $X_2 = \emptyset$ nesta direção, porque, caso ocorresse, a solução x^* não seria localmente eficiente, uma vez que $p(x^* + \lambda d) \leq p(x^*)$ teria solução na direção d para todo $\lambda > 0$. Esta situação pode ser observada nas Figuras 3.4 e 3.5, bastando

mos escolher adequadamente $\lambda > 0$, tal que, $\lambda_2^d \leq \lambda \leq \lambda_1^d$. Esta escolha deve garantir que pelo menos uma desigualdade seja estrita e, para isso, precisamos analisar duas situações que podem ocorrer e que dificultam as demonstrações dos nossos resultados. Temos que entender o que ocorre quando existe uma direção d , tal que, $X_0 = \emptyset$, $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$ e $\lambda_2^d = \lambda_1^d = \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d}$, $\forall i \in X_1$ e, uma última situação que ainda não analisamos, quando existe uma direção d , tal que, $X_0 = \emptyset$, $X_1 = \emptyset$ e $X_2 = \emptyset$.

Na primeira situação, suponha que dada uma direção d , obtemos $X_0 = \emptyset$, $X_1 \neq \emptyset$ e $X_2 \neq \emptyset$, então

4. Se $|X_1| = 1$,

- (a) $|X_2| = 1$ e $\lambda_2^d = \lambda_1^d$. Como $\Lambda_1^d = (0, \lambda_1^d)$, obtemos $\Lambda^d = \Lambda_2^d \cap \Lambda_1^d = \emptyset$. Assim, não existe $\lambda \in \Lambda^d$, tal que, $x^* + \lambda d$ domina x^* nesta direção. Este é um caso em que temos duas funções objetivo, $p(x^* + \lambda_1^d d) = p(x^*)$ e $p(x^* + \lambda d) \leq p(x^*)$ não tem solução para todo $\lambda > 0$,
- (b) $|X_2| > 1$ e $\lambda_1^d = \lambda_2^d = \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d}$, $\forall i \in X_2$. Como $\Lambda_1^d = (0, \lambda_1^d)$, obtemos $\Lambda^d = \Lambda_2^d \cap \Lambda_1^d = \emptyset$. Assim, não existe $\lambda \in \Lambda^d$, tal que, $x^* + \lambda d$ domina x^* nesta direção. Este é um caso em que temos $m > 2$, $p(x^* + \lambda_1^d d) = p(x^*)$ e $p(x^* + \lambda d) \leq p(x^*)$ não tem solução para todo $\lambda > 0$,
- (c) $|X_2| > 1$ e existe $j \in X_2$, tal que, $\frac{-2\nabla p_j(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_j(x^*) d} < \lambda_2^d = \lambda_1^d$. Como $\Lambda_1^d = (0, \lambda_1^d)$, obtemos $\Lambda^d = \Lambda_2^d \cap \Lambda_1^d = \emptyset$. Assim, não existe $\lambda \in \Lambda^d$, tal que, $x^* + \lambda d$ domina x^* nesta direção. Este é um caso em que temos $m > 2$ e $p(x^* + \lambda d) \leq p(x^*)$ não tem solução para todo $\lambda > 0$.

5. Se $|X_1| > 1$,

- (a) $|X_2| \geq 1$ e $\lambda_2^d = \lambda_1^d = \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d}$, $\forall i \in X_1$. Como $\Lambda_1^d = (0, \lambda_1^d]$, obtemos $\Lambda^d = \Lambda_2^d \cap \Lambda_1^d = \{\lambda_1^d\}$, e assim, existe $\lambda \in \Lambda^d$. Porém, com uma observação mais cuidadosa, pode-se verificar que $p(x^* + \lambda d) \leq p(x^*)$ não tem solução para todo $\lambda > 0$. Esta é uma situação que causa mais dificuldade nas nossas demonstrações, por que obtemos o intervalo $\Lambda^d = \{\lambda_1^d\}$ não vazio, porém $p(x^* + \lambda_1^d) \leq p(x^*)$ não tem solução,
- (b) $|X_2| \geq 1$ e existe $j \in X_1$, tal que, $\lambda_2^d = \lambda_1^d > \frac{-2\nabla p_j(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_j(x^*) d}$. Como $\Lambda_1^d = (0, \lambda_1^d]$, obtemos $\Lambda^d = \Lambda_2^d \cap \Lambda_1^d = \{\lambda_1^d\}$. Assim, existe $\lambda \in \Lambda^d$ e, como existe $j \in X_1$, tal que, $\lambda_1^d > \frac{-2\nabla p_j(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_j(x^*) d}$, pode-se verificar que $p(x^* + \lambda_1^d) \leq p(x^*)$ tem solução. Com uma observação mais cuidadosa podemos concluir o seguinte. Se $k \in X_1$ é o argumento de λ_1^d e se escolhermos $\bar{\lambda}_1^d = \min_{j \in X_1 \setminus \{k\}} \left\{ \frac{-2\nabla p_j(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_j(x^*) d} \right\}$, então pode-se verificar que para todo $\lambda \in (\lambda_1^d, \bar{\lambda}_1^d]$, $p(x^* + \lambda d) \leq p(x^*)$ não tem solução.

Esta é uma situação que também causa dificuldade, por que obtemos o intervalo $\Lambda^d = \{\lambda_1^d\}$ não vazio e, diferentemente do item 5.(a), $p(x^* + \lambda_1^d) \leq p(x^*)$ tem solução, e mais, λ_1^d é o único parâmetro de interesse.

Os itens anteriores podem ser melhor entendidos observando detalhadamente a Figura 3.5. Afim de evitar as problemáticas causadas pelos itens 5.(a) e 5.(b), e acreditando que esses eventos são difíceis de ocorrer, vamos impor uma condição que falicitará as demonstrações dos próximos resultados.

Condição 3.1 *Seja $d \in \partial B(0, 1)$, tal que, $X_0 = \emptyset$, $X_1 \neq \emptyset$ e $X_2 \neq \emptyset$. Se $\lambda_2^d = \lambda_1^d = \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d}$, $\forall i \in X_1$, então $\Lambda^d := \emptyset$. Ou se existir $j \in X_1$, tal que, $\lambda_2^d = \lambda_1^d > \frac{-2\nabla p_j(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_j(x^*) d}$, então $\Lambda^d := \{\lambda_1^d\}$.*

Temos que verificar uma outra situação, que ainda não foi analisada. Suponha que dada uma direção d , obtemos $X_0 = \emptyset$, $X_1 = \emptyset$ e $X_2 = \emptyset$. Isso significa que quanto à existência de soluções positivas para a desigualdade (3.2), apenas o item 2.(b) ocorre para todo $i \in I$. Ou seja, ocorre simultaneamente $\nabla p_i(x^*)^T d = d^T \nabla^2 p_i(x^*) d = 0$, $\forall i \in I$, e a desigualdade (3.2) é válida para $\lambda \in (0, \infty)$. Neste caso, entre outras hipóteses, podem ocorrer um dos itens abaixo.

6. d é ortogonal ao conjunto $\{\nabla p_i(x^*)\}_{i \in I}$,
 - (a) d é ortogonal ao conjunto $\{\nabla^2 p_i(x^*) d\}_{i \in I}$,
 - (b) Existe $\bar{I} \subseteq I$, tal que, d é ortogonal ao conjunto $\{\nabla^2 p_i(x^*) d\}_{i \in \bar{I}}$ e $d \in \text{Nu}(\nabla^2 p_i(x^*))$, $\forall i \in I \setminus \bar{I}$, onde $\text{Nu}(\nabla^2 p_i(x^*))$ é o Núcleo da matriz $\nabla^2 p_i(x^*)$.
7. Existe $\bar{I} \subseteq I$, tal que, d é ortogonal ao conjunto $\{\nabla p_i(x^*)\}_{i \in \bar{I}}$ e $\nabla p_i(x^*) = 0$, $\forall i \in I \setminus \bar{I}$,
 - (a) d é ortogonal ao conjunto $\{\nabla^2 p_i(x^*) d\}_{i \in I}$,
 - (b) Existe $\tilde{I} \subseteq I$, tal que, d é ortogonal ao conjunto $\{\nabla^2 p_i(x^*) d\}_{i \in \tilde{I}}$ e $d \in \text{Nu}(\nabla^2 p_i(x^*))$, $\forall i \in I \setminus \tilde{I}$.

Acreditamos que um desses eventos é difícil de ocorrer, pois normalmente em problemas com objetivos múltiplos as funções objetivo são conflitantes e, espera-se que funções que satisfaçam um dos itens 6.(a), 6.(b), 7.(a) ou 7.(b) sejam semelhantes, ou ao menos sejam semelhantes em uma vizinhança do ponto x^* . Vamos impor uma outra condição para facilitar as demonstrações dos próximos resultados que não admite que um dos eventos anteriores ocorra.

Condição 3.2 *Seja $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$ e $d \in \partial B(0, 1)$, então não ocorre simultaneamente $\nabla p_i(x^*)^T d = d^T \nabla^2 p_i(x^*) d = 0, \forall i \in I$.*

Lema 3.1 *Seja $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$, então x' domina x^* se e somente se existe $d \in \partial B(0, 1)$, tal que, $X_0 = \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$ e $\Lambda^d \neq \emptyset$. Neste caso, existe $\lambda^* \in \Lambda^d$, tal que, $x' = x^* + \lambda^* d \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Por hipótese, $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$, então segue do Teorema 3.1 que $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$ e existe uma vizinhança $N(x^*)$, tal que, $f(x) - \frac{f(x^*)}{g(x^*)}g(x) \leq 0$ não tem solução para todo $x \in N(x^*)$. Pela equação (3.1), $p(x) \leq p(x^*)$ não tem solução para todo $x \in N(x^*)$. Como estamos considerando que $N(x^*)$ é uma bola de $\mathbb{R}^n$, digamos que ela tenha raio $\bar{\lambda}$, ou seja, $p(x) \leq p(x^*)$ não tem solução para todo $x \in N(x^*) = B(x^*, \bar{\lambda})$ e, se d é uma direção unitária, $p(x) \leq p(x^*)$ não tem solução para todo $x = x^* + \lambda d$, tal que, $\|x - x^*\| \leq \lambda$, $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$, onde $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana. Portanto, se x' domina x^* , $x' \notin B(x^*, \bar{\lambda})$ e existe uma direção unitária d , tal que, $x' = x^* + \lambda^* d$, com $\lambda^* \geq \bar{\lambda}$. O que precisamos verificar é o que ocorre quanto aos elementos dos conjuntos X_0 , X_1 , X_2 e Λ^d nesta direção d . Na Figura 3.8 encontramos um exemplo que ilustra a vizinhança unidimensional $B(0, \bar{\lambda})$ de $\lambda = 0$, que representa a vizinhança n -dimensional $B(x^*, \bar{\lambda})$ do ponto x^* . Nela, observamos que em uma dada direção d , tomada como exemplo, existem funções r_i , cujos gráficos mostram que os seus índices i pertencem a X_0 (curva crescente em linha pontilhada em cor azul), ou X_1 (parábola convexa em linha contínua em vermelha), ou X_2 (parábola côncava em linha pontilhada em cor preta), ou quando λ satisfaz os itens 3.(b) e 3.(c) para um índice i (curva decrescente em linha contínua em cor azul). É possível observar ainda, que se $X_0 = \emptyset$ nesta figura, só podemos ter solução para $r_i(\lambda) \leq p_i(x^*)$, $\forall i$, se $\lambda \in \Lambda^d$ (representado em cor azul logo abaixo do eixo das abscissas do plano cartesiano). Ou seja, se $X_0 = \emptyset$ na Figura 3.8, $p(x^* + \lambda d) \leq p(x^*)$ tem solução se e somente se $\lambda_2^d \leq \lambda \leq \lambda_1^d$. O conjunto Λ_2^d está representado em cor preta, enquanto que o conjunto Λ_1^d está representado em vermelha nesta figura.

Dada uma direção arbitrária $d \in \partial B(0, 1)$, suponha que $X_0 \neq \emptyset$ nesta direção. Então existe um índice $i \in I$, tal que, um dos itens 1.(a), 1.(b) ou 2.(a) é satisfeito, ou seja, $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d > 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d \geq 0$ ou $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \geq 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d > 0$. Neste caso, $r_i(\lambda)$ cresce indefinidamente para $\lambda > 0$ e, portanto, dada qualquer vizinhança de x^* na direção d (por exemplo, $B(0, \lambda)$ com $\lambda \geq \bar{\lambda}$, na Figura 3.8), por maior que seja, $p(x) \leq p(x^*)$ não tem solução para todo $x = x^* + \lambda d$ nesta vizinhança e, assim, não existe $x' = x^* + \lambda d$, tal que, x' domina x^* nesta direção. Portanto, X_0 tem que ser vazio na direção d .

Suponha agora que $X_0 = \emptyset$ e $X_2 = \emptyset$ na direção d . Como $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$ em $B(x^*, \bar{\lambda})$, x^* também é localmente eficiente em $B(0, \bar{\lambda})$ na direção d . Então nesta direção não pode ocorrer $X_1 \neq \emptyset$ e nenhum dos itens 2.(c), 3.(b) ou 3.(c) (curva decrescente em

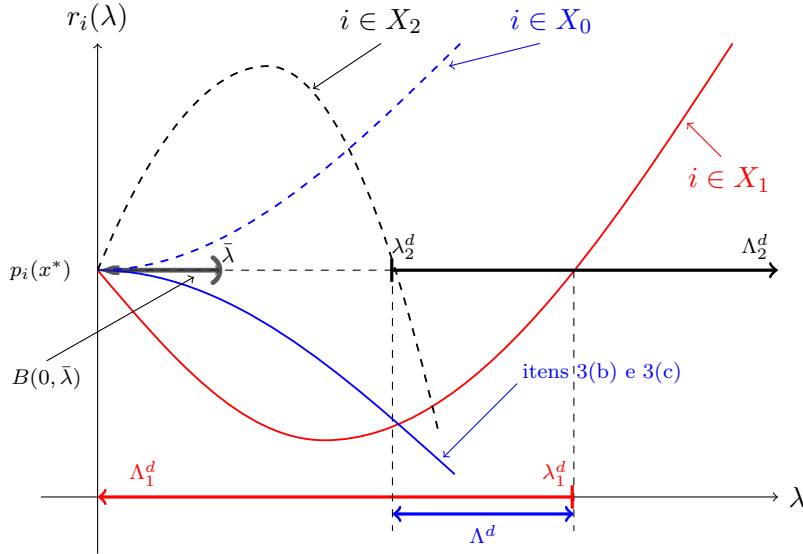


Figura 3.8: Vizinhança de x^* e o comportamento das funções r_i

linha contínua em cor azul ilustrado na Figura 3.8) podem ser satisfeitos, ou seja, não pode ocorrer $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d > 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d < 0$, bem como, não podem ocorrer $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \leq 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d < 0$, ou $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d < 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d \leq 0$. Assim, apenas o item 2.(b) poderia ser satisfeito nesta direção, ou seja, $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d = 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d = 0$, $\forall i \in I$. O que é impossível, devido à Condição 3.2. Portanto, $X_0 = \emptyset$ e $X_2 \neq \emptyset$ na direção d .

Suponha agora que $X_0 = \emptyset$ e $X_2 \neq \emptyset$, porém $\Lambda^d = \emptyset$ na direção d . Com essas hipóteses, $X_1 = \emptyset$ não pode ocorrer na direção d , senão teríamos $\lambda_1^d = \infty$ e $\Lambda^d \neq \emptyset$. Então, se $X_0 = \emptyset$, $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$ e $\Lambda^d = \emptyset$ podem ocorrer dois casos. Ou $\lambda_1^d < \lambda_2^d$ e $p(x^* + \lambda d) \leq p(x^*)$ não tem solução para $\lambda > 0$, ou pela Condição 3.1 e item 5.(a), $\lambda_2^d = \lambda_1^d = \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d}$, $\forall i \in X_1$, e $p(x^* + \lambda d) \leq p(x^*)$ não tem solução para $\lambda > 0$. Portanto, $x' = x^* + \lambda d$ não domina x^* nesta direção.

Concluimos que se x' domina x^* , então existe uma direção unitária d , tal que, $X_0 = \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$ e $\lambda^* \in \Lambda^d \neq \emptyset$, tal que, $x' = x^* + \lambda^* d$.

($\Leftarrow$) Suponha que $X_0 = \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$ e $\Lambda^d \neq \emptyset$ em uma direção d . Se $X_1 = \emptyset$, então existe $\lambda^* \in \Lambda^d$, tal que, para $x' = x^* + \lambda^*d$, $p(x') \leq p(x^*)$ tem solução. Se $X_1 \neq \emptyset$, então ou a Condição 3.1 e item 5.(b) garantem que existe $\lambda^* \in \Lambda^d$, tal que, para $x' = x^* + \lambda^*d$, $p(x') \leq p(x^*)$ tem solução, ou $\lambda_2^d < \lambda_1^d$ e existe $\lambda^* \in \Lambda^d$, tal que, para $x' = x^* + \lambda^*d$, $p(x') \leq p(x^*)$ tem solução. Portanto, x' domina x^* . ■

Teorema 3.2 *Seja $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$. Então $x^* \in \text{Eff}(PMFQ')$ se e somente se $\forall d \in \partial B(0, 1)$, $X_0 \neq \emptyset$ ou $\Lambda^d = \emptyset$ sempre que $X_1 \neq \emptyset$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que exista uma direção $d \in \partial B(0, 1)$, tal que $X_0 = \emptyset$ e $\Lambda^d \neq \emptyset$ com $X_1 \neq \emptyset$. Como $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$, segue do Teorema 3.1 que $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$ e devemos ter $X_2 \neq \emptyset$ nesta direção. Pelo Lema 3.1, existe $\lambda^* \in \Lambda^d$ e $x' = x^* + \lambda^* d \in \mathbb{R}^n$, tal que, $p(x') \leq p(x^*)$ tem solução. Pela equação (3.1), $\frac{f(x')}{g(x')} \leq \frac{f(x^*)}{g(x^*)}$ tem solução. O que contradiz $x^* \in \text{Eff}(PMFQ')$.

($\Leftarrow$) Seja $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$, então segue do Teorema 3.1 que $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$. Seja $d \in \partial B(0, 1)$ arbitrário e suponha que $X_0 \neq \emptyset$ na direção d , então existe um índice $i \in I$, tal que, um dos itens 1.(a) e 1.(b) ou 2.(a) é satisfeito, ou seja, $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d > 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d \geq 0$, ou $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \geq 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d > 0$. Logo, $r_i(\lambda)$ cresce indefinidamente para $\lambda > 0$ e, portanto, dada qualquer vizinhança de x^* na direção d , por maior que seja, $p(x) \leq p(x^*)$ não tem solução para todo $x = x^* + \lambda d$ nesta vizinhança e, assim, não existe outro ponto $x' = x^* + \lambda d$, tal que, x' domina x^* , então x^* é eficiente nesta direção. Esta possibilidade está ilustrada em cor azul na Figura 3.6. Nela, é possível observar que a função r_1 cresce indefinidamente para $\lambda > 0$.

Por outro lado, suponha que $X_0 = \emptyset$ e que $\Lambda^d = \emptyset$ com $X_1 \neq \emptyset$ na direção d . Como $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$, obrigatoriamente $X_2 \neq \emptyset$ nesta direção. Temos assim $X_0 = \emptyset$, $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$, $\Lambda^d = \emptyset$ e podem ocorrer dois casos. Ou $\lambda_1^d < \lambda_2^d$ e $p(x^* + \lambda d) \leq p(x^*)$ não tem solução para $\lambda > 0$, ou pela Condição 3.1 e item 5.(a), $\lambda_2^d = \lambda_1^d = \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d}$, $\forall i \in X_1$, e $p(x^* + \lambda d) \leq p(x^*)$ não tem solução para $\lambda > 0$. Logo, não existe $\lambda > 0$, tal que, um outro ponto $x' = x^* + \lambda d \in \mathbb{R}^n$ domina x^* e, portanto, x^* é uma solução eficiente nesta direção. Esta possibilidade está ilustrada na Figura 3.4. Nela, é possível observar que $X_0 = \emptyset$, $X_1 = \{1, 3\}$, $X_2 = \{2, 4\}$ e, para qualquer $\lambda > 0$, $p(x^* + \lambda d) \leq p(x^*)$ não tem solução. Destacado em cor vermelha, temos $\lambda_1^d < \lambda_2^d$, ou seja, $\Lambda^d = \emptyset$.

Portanto, dado uma direção $d \in \partial B_n(0, 1)$ arbitrária, quando $X_0 \neq \emptyset$, obtemos x^* não dominado, ou quando $\Lambda^d = \emptyset$ com $X_1 \neq \emptyset$, obtemos novamente x^* não dominado. Logo, não existe um outro ponto $x' = x^* + \lambda d \in \mathbb{R}^n$ que domina x^* , e $x^* \in \text{Eff}(PMFQ')$. ■

Dada uma direção d , exigimos no Teorema 3.2 que X_1 seja não vazio quando $X_0 = \emptyset$ e $\Lambda^d = \emptyset$, pois se tomarmos $X_1 = \emptyset$, a Condição 3.2 nos garante que apenas $X_2 \neq \emptyset$ quando $X_0 = \emptyset$ e, neste último caso, obtemos $\lambda_1^d = \infty$ e $\lambda_2^d < \lambda_1^d$. Quando isso ocorre nos problemas sem restrições, sempre teremos $\Lambda^d \neq \emptyset$, ou seja, existe $\lambda \in \Lambda^d$, tal que $x^* + \lambda d \in \mathbb{R}^n$ domina x^* na direção d . Esta possibilidade está ilustrada na Figura 3.7. Nela, observamos facilmente que $X_1 = \emptyset$, $X_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ e o intervalo Λ^d é não vazio. Podemos antecipar que nos problemas com restrições isso nem sempre ocorre, pois o conjunto viável pode ser limitado

em uma determinada direção.

Diferentemente do trabalho de Osuna-Gómez et al. [49], não exigimos nenhum tipo de convexidade generalizada sobre as funções do problema auxiliar $(PMFQ')_{x^*}$ para obter as condições de otimalidade do Teorema 3.2.

Nos resultados que seguem, definimos $L = \{d \in \partial B(0, 1) \mid \Lambda^d \neq \emptyset\}$.

Corolário 3.1 *Sejam $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$ e $\beta = \inf_{d \in L} \{\lambda_2^d\}$. Então não existe um outro ponto $x' \in B(x^*, \beta)$, tal que, $\frac{f(x')}{g(x')} \leq \frac{f(x^*)}{g(x^*)}$.*

Demonstração: Segue imediatamente do Teorema 3.2. Seja $d \in L$, então existe um $\lambda > 0$ em Λ^d , tal que, um outro ponto $x' \in \mathbb{R}^n$ domina x^* nesta direção. Porém, o primeiro ponto x' que domina x^* ao longo da direção d será $x' = x^* + \lambda_2^d d$. Quando analisamos $\forall d \in L$, concluímos que o primeiro ponto x' que domina x^* será $x' = x^* + \beta d$. Portanto x^* é β -eficiente. Uma possibilidade de direção onde $\Lambda^d \neq \emptyset$ está ilustrada na Figura 3.5. Nela, o intervalo não vazio Λ^d aparece destacado em cor azul. Observe que para $x' = x^* + \lambda_2^d d$, $p(x') \leq p(x^*)$ tem solução. ■ É possível reescrever o Corolário 3.1 substituindo o conjunto L pelo conjunto $L' = \{d \in \partial B_n(0, 1) \mid X_0 = \emptyset\}$, se estivermos interessados em constatar que a solução x^* é β -eficiente ou se x^* é ∞ -eficiente quando $\Lambda^d = \emptyset, \forall d \in L'$. De fato, observe ilustrado na Figura 3.4 que temos $d \in L'$ e na Figura 3.5, temos $d \in L$.

Na continuação, apresentamos um resultado muito útil, que fornece um limite inferior para o raio de eficiência de uma solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$.

Corolário 3.2 *Sejam $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$ e*

$$F(d) = \max_{i \in X_2} \{ 2\nabla p_i(x^*)^T d \}.$$

Suponha que existe um número ρ , tal que, $F(d) \geq \rho, \forall d \in \partial B(0, 1)$. Então não existe um outro ponto $x' \in B(x^, \frac{\rho}{-\gamma})$, tal que, $\frac{f(x')}{g(x')} \leq \frac{f(x^*)}{g(x^*)}$, onde $\gamma < 0, \gamma = \min_{i \in I} \{\gamma_i\}, \gamma_i = \sum_{j \in \tilde{I}} \mu_j^{p_i}$, $\tilde{I} = \{j \in J \mid \mu_j^{p_i} < 0\}$ e $\mu_j^{p_i}$ são os autovalores das matrizes $\nabla^2 p_i(x^*), i \in I$.*

Demonstração: Pela prova do Teorema 3.2 e o valor de β no Corolário 3.1, se procuramos por um ponto $x' = x^* + \lambda d$ que domina x^* , temos que encontrar um valor $\lambda > 0$ que satisfaça

$$\lambda \geq \beta = \inf_{d \in L} \left\{ \max_{i \in X_2} \left\{ \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d} \right\} \right\}.$$

Dado a matriz $\nabla^2 p_i(x^*), i \in X_2$, obtemos $0 > d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \geq \gamma_i$, onde γ_i é a soma dos seus autovalores negativos e, portanto

$$\begin{aligned}
\lambda \geq \beta &= \inf_{d \in L} \left\{ \max_{i \in X_2} \left\{ \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d} \right\} \right\} \\
&\geq \inf_{d \in L} \left\{ \max_{i \in X_2} \left\{ \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{\gamma_i} \right\} \right\} \\
&\geq \inf_{d \in L} \left\{ \max_{i \in X_2} \left\{ \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{\gamma} \right\} \right\} = \inf_{d \in L} \frac{F(d)}{-\gamma},
\end{aligned}$$

onde $\gamma = \min_{i \in I} \{\gamma_i\}$. Como por hipótese $F(d) \geq \rho$, $\forall d \in \partial B(0, 1)$, obtemos $\beta \geq \frac{\rho}{-\gamma}$. Obviamente, se $\Lambda^d = \emptyset$, $\forall d \in \partial B(0, 1)$, temos que x^* é ∞ -eficiente e se existe d , tal que, $\Lambda^d \neq \emptyset$, temos que x^* é β -eficiente. Como $\infty > \beta \geq \frac{\rho}{-\gamma}$, o teorema é válido. ■

É fácil observar que a passagem da primeira para a segunda linha da desigualdade na demonstração acima é válida porque $i \in X_2$. Isso também garante que $\rho > 0$ e, portanto, $\frac{\rho}{-\gamma} > 0$.

Na sequência, obtemos um outro resultado importante que limita o espaço de busca por um possível ponto que domina uma solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$, e que também fornece uma condição para decidir se esta solução é eficiente em $(PMFQ')$.

Teorema 3.3 *Seja $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$. Suponha que $X_1 \neq \emptyset$ para algum $d \in L$ e*

$$\{ d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \} \geq \alpha > 0, \quad \forall i \in X_1.$$

Se não existe um outro ponto $x' \in B(x^, M)$, tal que, $\frac{f(x')}{g(x')} \leq \frac{f(x^*)}{g(x^*)}$, onde*

$$M = \min_{i \in X_1} \left\{ \frac{\|2\nabla p_i(x^*)\|}{\alpha} \right\}.$$

Então $x^ \in \text{Eff}(PMFQ')$.*

Demonstração: Por hipótese, temos $X_1 \neq \emptyset$ para algum $d \in L$ e $\{ d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \} \geq \alpha > 0$, $\forall i \in X_1$. Deduzimos do Lema 3.1 e dos resultados anteriores, que se existe um ponto x' que domina x^* na direção d , então $X_2 \neq \emptyset$ e $\lambda_2^d \leq \|x' - x^*\| \leq \lambda_1^d$. Se

$$P = \sup_{d \in L} \{\lambda_1^d\}, \quad \text{obtemos} \quad \|x' - x^*\| \leq P.$$

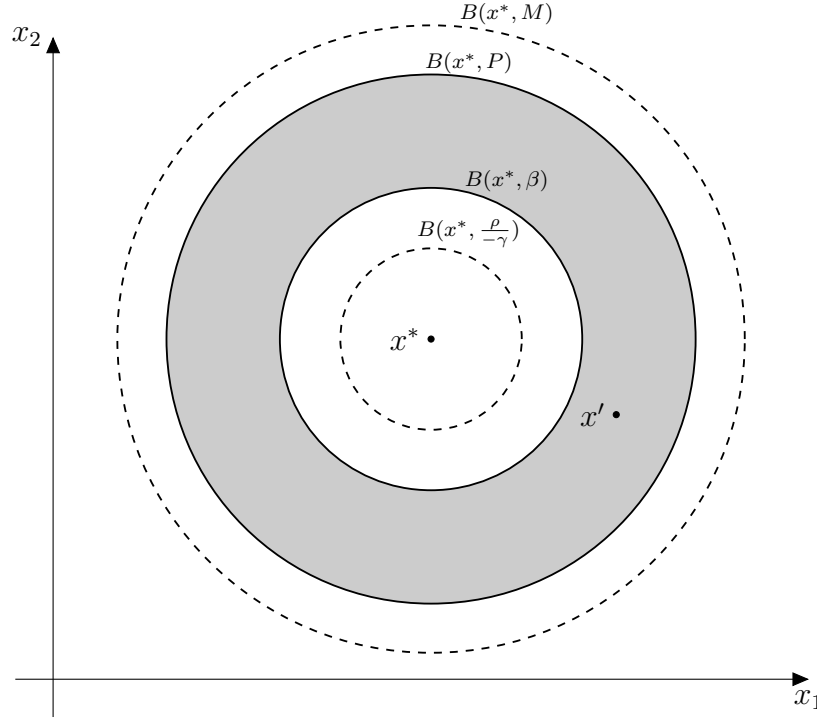


Figura 3.9: Algumas vizinhanças de interesse da solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$

Pelas hipóteses, obtemos ainda

$$\begin{aligned}
 P &= \sup_{d \in L} \left\{ \min_{i \in X_1} \left\{ \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d} \right\} \right\} \\
 &\leq \sup_{d \in L} \left\{ \min_{i \in X_1} \left\{ \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{\alpha} \right\} \right\} \\
 &\leq \min_{i \in X_1} \left\{ \frac{\|2\nabla p_i(x^*)\|}{\alpha} \right\} = M.
 \end{aligned}$$

Portanto se não existe um ponto que domina x^* em $B(x^*, M)$, então não existe um outro ponto em $\mathbb{R}^n$ com esta propriedade, e $x^* \in \text{Eff}(PMFQ')$. ■

É fácil observar que a passagem da primeira para a segunda linha da desigualdade na demonstração acima é válida porque $i \in X_1$. Também é interessante observar que independentemente da sua demonstração, o Teorema 3.3 apenas tem utilidade se $M < \infty$.

Com os resultados anteriores podemos reduzir o problema de determinar se uma solução localmente eficiente é dominada por um outro ponto em $\mathbb{R}^n$, ao compará-la apenas em um

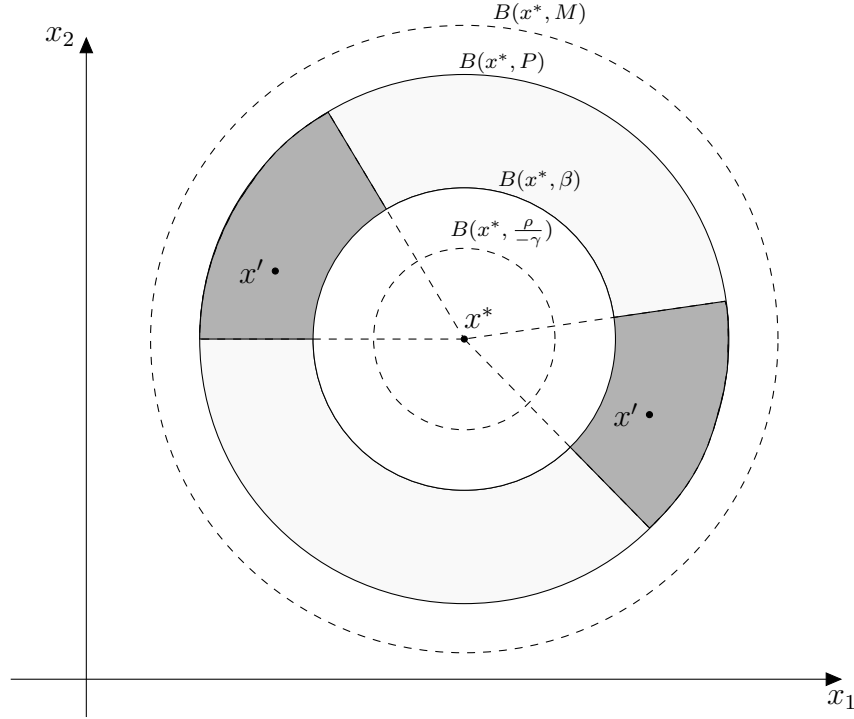


Figura 3.10: Espaço de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$

certo subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Observe que o Corolário 3.1 fornece o raio $\beta = \inf_{d \in L} \{\lambda_2^d\}$ máximo de uma vizinhança $B(x^*, \beta)$, onde x^* é não dominado, o Corolário 3.2 fornece uma cota inferior, $\frac{\rho}{-\gamma}$, para β , e conseqüentemente, uma nova vizinhança $B(x^*, \frac{\rho}{-\gamma})$ para x^* . Por outro lado, do Teorema 3.3, obtemos duas novas vizinhanças para x^* , uma com raio $P = \sup_{d \in L} \{\lambda_1^d\}$, $B(x^*, P)$, e outra que tem seu raio como uma cota superior para P , $M = \min_{i \in X_1} \left\{ \frac{\|2\nabla p_i(x^*)\|}{\alpha} \right\}$. Ou seja, obtemos quatro vizinhanças satisfazendo $B(x^*, \frac{\rho}{-\gamma}) \subseteq B(x^*, \beta) \subseteq B(x^*, P) \subseteq B(x^*, M)$.

Por serem mais simples de calcular, as cotas inferior e superior são mais atrativas computacionalmente. Se tivermos um bom método computacional de busca para encontrar um ponto que domina a solução x^* , basta que esta busca seja feita no subconjunto fechado $\bar{B}(x^*, P) \setminus B(x^*, \beta)$, ou ainda, no subconjunto $\bar{B}(x^*, M) \setminus B(x^*, \frac{\rho}{-\gamma})$.

A Figura 3.9 ilustra os raios das vizinhanças discutidas acima, em um caso mais simples, quando o domínio das funções é o $\mathbb{R}^2$, ou seja, as vizinhanças são discos no $\mathbb{R}^2$. Em geral, estaríamos falando em esferas no $\mathbb{R}^n$. Nela, tendo a solução x^* como o centro de referência, observamos as quatro vizinhanças de interesse: mais ao centro, ilustrada com linhas pontilhadas, aparece o raio da vizinhança $B(x^*, \frac{\rho}{-\gamma})$; afastando-se mais do centro, aparecem ilustradas com linhas contínuas os raios das vizinhanças $B(x^*, \beta)$, $B(x^*, P)$ e, sombreado,

aparece em destaque o subconjunto fechado $\bar{B}(x^*, P) \setminus B(x^*, \beta)$; por fim, o raio da maior vizinhança, $B(x^*, M)$, aparece em seguida ilustrada com linhas pontilhadas. Se existe um ponto x' que domina a solução x^* , ele deve pertencer ao subconjunto $\bar{B}(x^*, P) \setminus B(x^*, \beta)$, como é ilustrado na Figura 3.9.

Métodos computacionais auxiliares podem ser desenvolvidos para reduzir ainda mais o tamanho do subconjunto $\bar{B}(x^*, P) \setminus B(x^*, \beta)$. Basta observar que $x' \in \bar{B}(x^*, P) \setminus B(x^*, \beta)$ se e somente se existe uma direção unitária d , tal que, $\lambda_2^d \leq \lambda \leq \lambda_1^d$, com $x' = x^* + \lambda d$. Portanto, todas aquelas direções que participam do subconjunto $\bar{B}(x^*, P) \setminus B(x^*, \beta)$ com $\Lambda^d = \emptyset$, podem ser excluídas. Esta possibilidade é ilustrada na Figura 3.10. Nela, existem dois subconjuntos sombreados contidos em $\bar{B}(x^*, P) \setminus B(x^*, \beta)$, cada um contendo um possível ponto x' . Os subconjuntos sombreados representam as únicas direções d em que ocorre $\lambda_2^d \leq \lambda \leq \lambda_1^d$.

3.4 Raio de eficiência nos problemas com restrições

Sob algumas hipóteses de convexidade generalizada das funções objetivo e do conjunto de restrições, a equivalência entre soluções localmente eficientes e eficientes pode ser demonstrada [11], [24], [41]. No entanto, em casos mais gerais, esta questão não pode ser tratada localmente.

Para obter resultados mais gerais sobre o raio de eficiência de uma solução localmente eficiente do nosso problema (PMFQ) é necessário estudar as características do conjunto de restrições S e do problema como um todo. Devido a complexidade, às vezes, mais importante do que descobrir se uma solução localmente eficiente é também eficiente, é conhecer que não existem outros pontos que a dominam em uma certa vizinhança ou em um subconjunto. Precisamos de uma ferramenta que permita de forma mais simples, determinar o tamanho deste subconjunto. Como alternativa, podemos utilizar o conceito de raio de eficiência, que já estudamos para o problema (PMFQ').

Podemos agora, estender os resultados desenvolvidos na Seção 3.3 para o caso de problemas com restrições. Em (PMFQ), a eficiência de raio $\text{diam}(S)$ é equivalente a eficiência de raio ∞ , onde $\text{diam}(S) = \sup \{\|x - y\|, x, y \in S\}$. Se x^* é λ -eficiente, então é β -eficiente, $\forall \beta < \lambda \leq \text{diam}(S)$. Diremos que x^* é $\text{diam}(S)$ -eficiente se ele é eficiente em S .

Vários conjunto de restrições podem ser considerados no problemas (PM), porém vamos considerar nesta seção, o problema (PMFQ) com o conjunto viável S definido como

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \leq b, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, b \in \mathbb{R}^p\}.$$

Decidimos trabalhar com o conjunto S definido por desigualdades lineares, no entanto, acreditamos que os resultados podem ser estendidos para os problemas com o conjunto de

restrições mais gerais. Uma razão para esta escolha é a facilidade de calcular, fixada uma direção arbitrária, a distância de um ponto $x^* \in S$ até a fronteira do conjunto viável. Veremos que isto é indispensável no cálculo do raio de eficiência.

Para aplicar o conceito de raio de eficiência, partimos novamente de uma solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$. O objetivo é calcular o seu raio de eficiência para verificar se x^* é na verdade uma solução eficiente no conjunto viável e também obter algumas informações quanto às vizinhanças de x^* .

Considerando o conceito de raio de eficiência e admitindo o caso de problemas com restrições, os dois próximos resultados estendem de forma natural a relação existente entre os problemas associados $(PMFQ)$ e $(PMFQ)_{x^*}$ apresentada na Seção 3.3. Agora podemos admitir uma vizinhança particular de raio fixo, que pode ser calculada usando nossa metodologia, onde uma solução x^* é não dominada. A relação entre os problemas associados é que a mesma vizinhança particular de raio fixo pode ser considerada em ambos os problemas. O teorema que segue é uma releitura do Teorema 3.1, que agora trata do raio de uma vizinhança de um ponto x^* dos problemas associados $(PMFQ)$ e $(PMFQ)_{x^*}$ como sendo o seu raio de eficiência, o qual podemos calcular.

Teorema 3.4 *Seja $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$. x^* é λ -eficiente para o problema $(PMFQ)$ se e somente se x^* é λ -eficiente para o problema $(PMFQ)_{x^*}$.*

Demonstração: Seguindo as idéias apresentadas até o momento, para calcular o raio de eficiência de uma solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$, devemos encontrar, caso existam, os valores de $\lambda > 0$ e uma direção viável unitária d , tal que, $x^* + \lambda d \in S$ domina x^* . Em outras palavras, para as funções $f_i(x) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}g_i(x)$, $i \in I$, devemos encontrar um par $(\bar{\lambda}, \bar{d})$ que resolve para cada $i \in I$ as seguintes desigualdades

$$f_i(x^* + \lambda d) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}g_i(x^* + \lambda d) \leq f_i(x^*) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}g_i(x^*) = 0.$$

O que implica na solução das desigualdades (3.2), definidas na Seção 3.3. Por outro lado, para encontrar um par $(\tilde{\lambda}, \tilde{d})$ para uma solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$, com respeito ao seu raio de eficiência, devemos resolver para cada $i \in I$ as seguintes desigualdades

$$\frac{f_i(x^* + \lambda d)}{g_i(x^* + \lambda d)} \leq \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \iff \lambda \left(\nabla p_i(x^*)^T d + \frac{\lambda}{2} d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \right) \leq 0.$$

O que implica novamente na solução da Equação (3.2). Logo, se existe um par $(\bar{\lambda}, \bar{d})$ para uma solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$, e um par $(\tilde{\lambda}, \tilde{d})$ para a mesma solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$, eles são obtidos do mesmo conjunto de desigualdades (3.2). Portanto, $(\bar{\lambda}, \bar{d}) = (\tilde{\lambda}, \tilde{d})$ e x^* é λ -eficiente para ambos os problemas, com $\lambda = \bar{\lambda} = \tilde{\lambda}$. ■

Corolário 3.3 $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$ se e somente se $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)_{x^*}$.

Demonstração: Se $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$, concluímos que não existe um $\lambda > 0$ e uma direção viável unitária d , tal que, $x^* + \lambda d \in S$ domina x^* . Então, basta tomar o par $(\lambda, d) = (\infty, d)$ no Teorema 3.4. ■

Associado ao conjunto S , temos o conjunto de índices das restrições ativas em $x^* \in S$, definido por

$$K(x^*) = \{j \in K \mid C_j x^* = b_j\},$$

onde C_j representa a j -ésima linha da matriz C . Também temos o cone tangente a S no ponto $x^* \in S$, definido por

$$\tilde{T}(x^*) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid C_j y \leq 0, \forall j \in K(x^*), \|y\| = 1\}.$$

Para simplificar nossa notação, diremos que $T(x^*) = \tilde{T}(x^*) \cap \partial B(0, 1)$ é o conjunto das *direções viáveis* no ponto x^* . Desta forma, se o ponto pertence à fronteira do conjunto S , obtemos $T(x^*) = \tilde{T}(x^*)$ e se o ponto estiver no interior do conjunto S , obtemos $T(x^*) = \partial B(0, 1)$.

Na continuação, extraímos alguns resultados como no caso sem restrições e omitiremos algumas demonstrações por serem muito similares.

Dado $x^* \in S$, para cada direção viável d , diremos que o valor real $\lambda_\ell^d \in (0, +\infty)$ é o *maior limite* para o raio de eficiência no conjunto S , tal que, $x^* + \lambda_\ell^d d \in S$. Desta forma, e analogamente ao apresentado na Seção 3.3, definimos

$$\lambda_\ell^d = \min_{j \in K, C_j d > 0} \left\{ \frac{b_j - C_j x^*}{C_j d} \right\},$$

$$\lambda_2^d = \max_{i \in X_2} \left\{ \frac{-2 \nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d} \right\}, \quad \lambda_1^d = \begin{cases} \min \left\{ \min_{i \in X_1} \left\{ \frac{-2 \nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d} \right\}, \lambda_\ell^d \right\} & , \text{ se } X_1 \neq \emptyset \\ \inf \{+\infty, \lambda_\ell^d\} & , \text{ se } X_1 = \emptyset, \end{cases}$$

$$\Lambda_2^d = [\lambda_2^d, \infty), \quad \Lambda_1^d = \begin{cases} (0, \lambda_1^d] & , \text{ se } X_1 \neq \emptyset \\ (0, \lambda_1^d) & , \text{ se } X_1 = \emptyset, \end{cases} \quad \Lambda^d = \Lambda_2^d \cap \Lambda_1^d,$$

onde p_i , $i \in I$, X_0 , X_1 e X_2 são as mesmas funções e os mesmos conjuntos definidos na Seção 3.3.

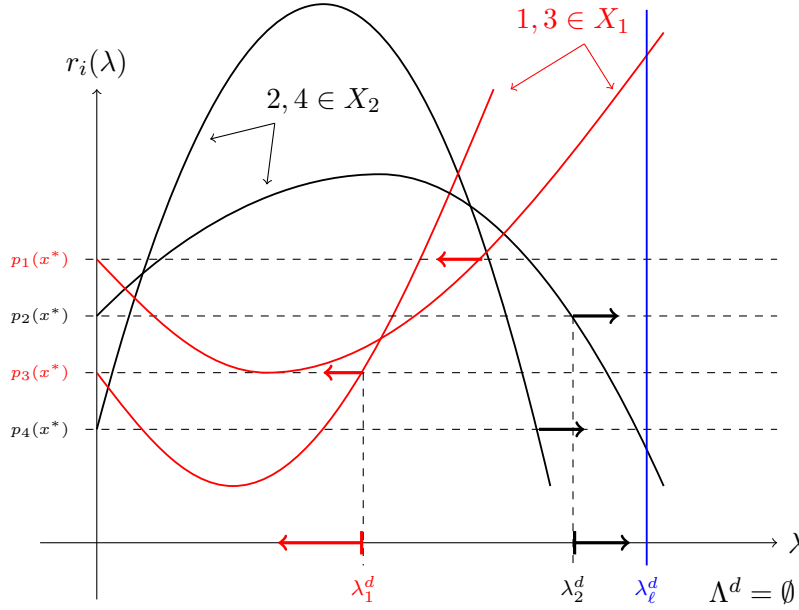


Figura 3.11: Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(\text{PMFQ})_{x^*}$

Relembramos que para uma solução x^* localmente eficiente, dada uma direção $d \in T(x^*)$, se $X_0 = \emptyset$ e $X_1 \neq \emptyset$ então $X_2 = \emptyset$ não pode ocorrer, porque neste caso, a solução x^* não seria localmente eficiente. Também, se $X_0 \neq \emptyset$ então x^* é eficiente nesta direção e, se $X_0 = \emptyset$, então $X_1 \neq \emptyset$ e $X_2 \neq \emptyset$, ou apenas $X_2 \neq \emptyset$. Nas Figuras 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14 estão ilustradas algumas dessas situações, incluindo agora, a possibilidade de termos λ_ℓ^d para limitar o raio de eficiência em uma direção d . Em cada uma dessas figuras estão ilustrados os gráficos das funções

$$r_i(\lambda) = p_i(x^*) + \lambda \nabla p_i(x^*)^T d + \frac{\lambda^2}{2} d^T \nabla^2 p_i(x^*) d,$$

$i \in I$, onde podemos verificar exemplos de como os conjuntos X_0 , X_1 , X_2 e Λ^d são formados. Nelas, estão plotados os pontos das funções $r_i(\lambda) = p_i(x^* + \lambda d)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, nas coordenadas $(\lambda, r_i(\lambda))$, $\lambda > 0$, cujos gráficos são parábolas. Por exemplo, na Figura 3.11, é possível observar em cor vermelha um exemplo de direção onde $X_1 = \{1, 3\}$ é formado pelos índices das funções r_1 e r_3 , e em cor preta $X_2 = \{2, 4\}$ é formado pelos índices das funções r_2 e r_4 , com $\Lambda^d = \emptyset$. Nas Figuras 3.11, 3.12 e 3.13 estão representados os casos em que X_0 e $X_1 \neq \emptyset$ e, portanto, $X_2 \neq \emptyset$. Observe ainda, que na Figura 3.14, está representado o caso em que $X_1 = \emptyset$ e apenas $X_2 \neq \emptyset$.

Em relação aos parâmetros λ_1^d e λ_2^d , uma mudança importante é feita na definição de λ_1^d . Agora, temos que incluir a possibilidade de λ_1^d tornar-se λ_ℓ^d em uma determinada direção

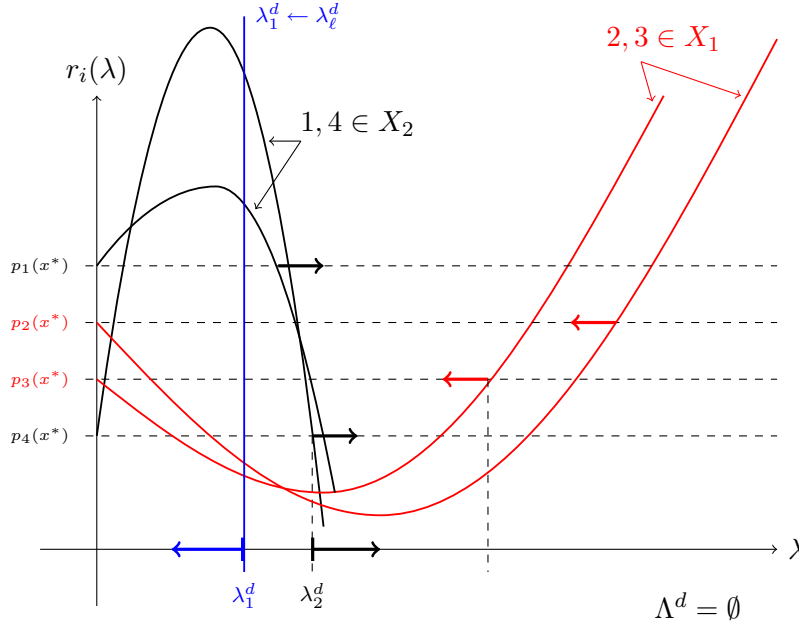


Figura 3.12: Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$

$d \in T(x^*)$, para evitar pontos $x' \notin S$ que dominam x^* . Nos problemas sem restrições, o interesse era pelas direções d , tais que, $\lambda_2^d \leq \lambda_1^d$, onde definimos $\lambda_1^d = \min_{i \in X_1} \left\{ \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d} \right\}$, quando $X_1 \neq \emptyset$. Continuamos interessados nessas direções, porém, observe que dado $d \in T(x^*)$, se ocorrer $\lambda_\ell^d < \lambda_2^d$, não faz sentido escolher λ , $\lambda_\ell^d < \lambda_2^d \leq \lambda \leq \lambda_1^d$, tal que, $x' = x^* + \lambda d$ domina x^* , porque $x' \notin S$. Portanto, como foi definido anteriormente, o correto é tomar o novo $\lambda_1^d := \min\{\lambda_1^d, \lambda_\ell^d\}$, quando $X_1 \neq \emptyset$ e $\lambda_1^d := \inf\{\infty, \lambda_\ell^d\}$, quando $X_1 = \emptyset$.

Vamos observar o papel dos limitantes λ_ℓ^d no cálculo do raio de eficiência de uma solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$ observando as Figuras 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14. Nelas, λ_ℓ^d está ilustrado em cor azul por uma linha vertical contínua que representa, na posição em que ela cruza o eixo das abscissas do plano cartesiano, a fronteira do conjunto S em relação a uma determinada direção d . Por exemplo, a Figura 3.11 representa o caso em que $\lambda_1^d < \lambda_2^d \leq \lambda_\ell^d$ e, portanto, temos $\Lambda^d = \emptyset$. A Figura 3.13, representa o caso em que $\lambda_2^d \leq \lambda_1^d < \lambda_\ell^d$ e, portanto, temos $\Lambda^d \neq \emptyset$. Por outro lado, na Figura 3.12, temos representado o caso em que $\lambda_1^d := \lambda_\ell^d < \lambda_2^d$ e, portanto, $\Lambda^d = \emptyset$. Um outro caso que pode ocorrer, está ilustrado na Figura 3.14. Nela, está representado em cor vermelha o conjunto vazio X_1 e, neste exemplo, temos em cor preta apenas $X_2 \neq \emptyset$. Como $\lambda_1^d =: \lambda_\ell^d < \lambda_2^d$, obtemos $\Lambda^d = \emptyset$.

Outras situações semelhantes às que foram ilustradas podem ocorrer, porém entre essas, podemos exemplificar duas possibilidades para existir um ponto viável x' que domina x^*

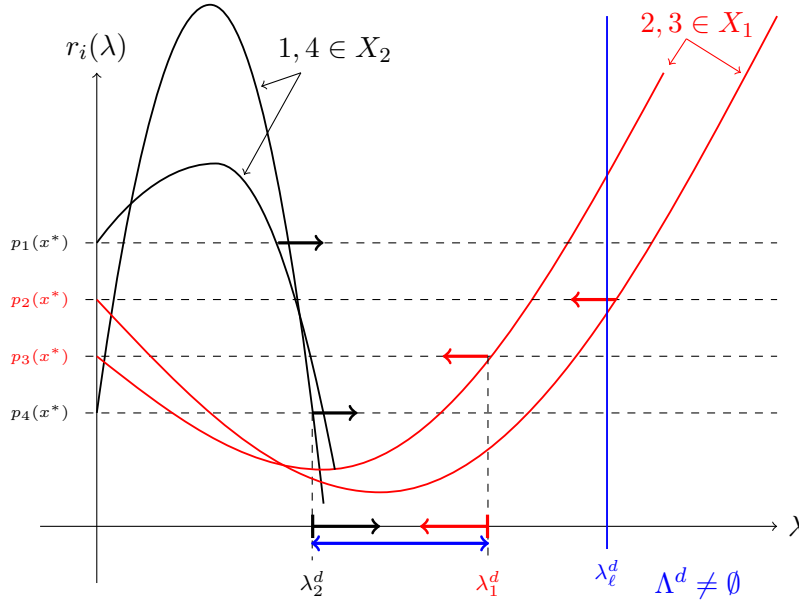


Figura 3.13: Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$

em uma direção $d \in T(x^*)$. A primeira, está ilustrada na Figura 3.13, onde existe $\lambda > 0$, $\lambda_2^d \leq \lambda \leq \lambda_1^d \leq \lambda_\ell^d$, tal que, $x^* + \lambda d$ domina x^* . Observe em cor azul que o intervalo Λ^d é não vazio e que $p(x') \leq p(x^*)$ tem solução. A segunda, é semelhante ao ilustrado na Figura 3.14. Nesta figura, se movimentarmos o valor de λ_ℓ^d mais para a direita do eixo das abscissas, tal que, $\lambda_2^d \leq \lambda_\ell^d$, então teríamos $\lambda_2^d \leq \lambda_1^d := \lambda_\ell^d$ e $\Lambda^d \neq \emptyset$.

Teorema 3.5 *Seja $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$. Então $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$ se e somente se $\forall d \in T(x^*)$, $X_0 \neq \emptyset$ ou $\Lambda^d = \emptyset$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Idêntico ao demonstrado no Teorema 3.2, considerando agora, as direções em $T(x^*)$ e o fato de S ser ilimitado ou não em uma determinada direção d .

($\Leftarrow$) Seja $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$, então segue do Teorema 3.4 que $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$. Seja $d \in T(x^*)$ arbitrário e suponha que $X_0 \neq \emptyset$ na direção d , então existe um índice $i \in I$, tal que, um dos itens 1.(a) e 1.(b) ou 2.(a) é satisfeito, ou seja, $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d > 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d \geq 0$, ou $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \geq 0$ e $\nabla p_i(x^*)^T d > 0$. Logo, $r_i(\lambda)$ cresce indefinidamente para $\lambda > 0$ e, portanto, dada qualquer vizinhança de x^* na direção d , por maior que seja, $p(x) \leq p(x^*)$ não tem solução para todo $x = x^* + \lambda d$ nesta vizinhança e, assim, não existe outro ponto $x' = x^* + \lambda d$, tal que, x' domina x^* , então x^* é eficiente nesta direção. Esta situação está ilustrada na Figura 3.6.

Por outro lado, suponha que $X_0 = \emptyset$ e que $\Lambda^d = \emptyset$ em uma direção $d \in T(x^*)$ arbitrária,

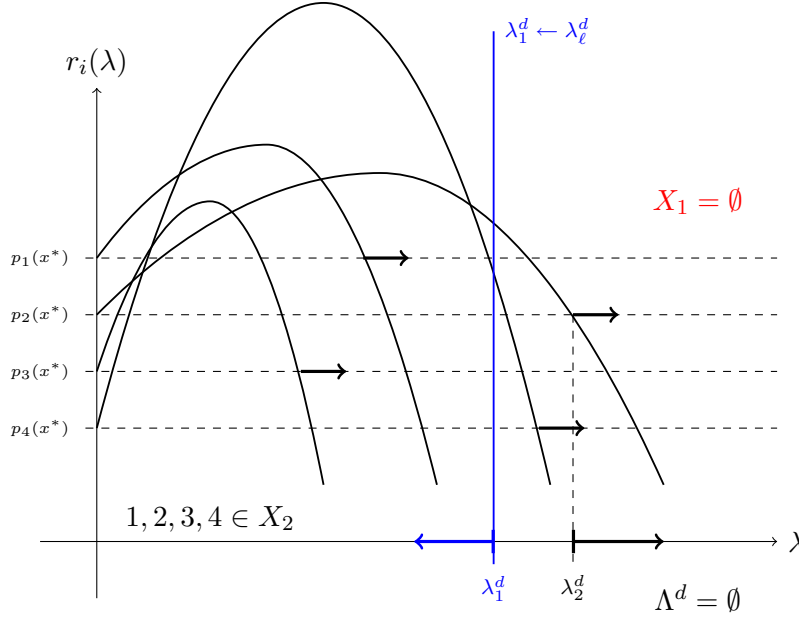


Figura 3.14: Uma direção de busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)_{x^*}$

então podemos dividir em dois casos quanto a cardinalidade de X_1 . No primeiro caso, suponha que $X_1 = \emptyset$, então a Condição 3.2 garante que apenas $X_2 \neq \emptyset$. $\Lambda^d = \emptyset$ significa que o conjunto S é limitado ($\lambda_\ell^d < \infty$) na direção d e que $\lambda_1^d := \lambda_\ell^d < \lambda_2^d$, ou seja, para todo $\lambda_2^d \leq \lambda$, qualquer outro ponto $x' = x^* + \lambda d \notin S$. Portanto, não existe um outro ponto viável que domina x^* e ela é eficiente nesta direção. Esta situação está ilustrada na Figura 3.14.

No segundo caso, suponha que $X_1 \neq \emptyset$, como $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$, obrigatoriamente $X_2 \neq \emptyset$ nesta direção. Temos assim $X_0 = \emptyset$, $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$, $\Lambda^d = \emptyset$ e, como $\lambda_1^d := \lambda_\ell^d$ sempre que $\lambda_\ell^d \leq \lambda_1^d$, retornamos ao caso sem restrições como no Teorema 3.2. Logo, ou $\lambda_1^d < \lambda_2^d$ e $p(x^* + \lambda d) \leq p(x^*)$ não tem solução para $\lambda > 0$, ou pela Condição 3.1 e item 5.(a), $\lambda_2^d = \lambda_1^d = \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d}$, $\forall i \in X_1$, e $p(x^* + \lambda d) \leq p(x^*)$ não tem solução para $\lambda > 0$. Então, não existe $\lambda > 0$, tal que, um outro ponto $x' = x^* + \lambda d \in \mathbb{R}^n$ domina x^* e, portanto, x^* é uma solução eficiente nesta direção. Esta situação pode ser subdividida em dois casos que estão ilustrados nas Figuras 3.11 e 3.12. No primeiro caso, conforme ilustrado na Figura 3.11, pode ocorrer que $\lambda_1^d = \min_{i \in X_1} \left\{ \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d} \right\} < \lambda_\ell^d$ e $\lambda_2^d \leq \lambda_\ell^d$, porém $\Lambda^d = \emptyset$ significa que $\lambda_1^d < \lambda_2^d$, e as desigualdades (3.3), definidas na Seção 3.3, não se verificam para $\lambda > 0$. Logo, não existe outro ponto viável $x' = x^* + \lambda d$ que domina x^* na direção d . No segundo caso, conforme ilustrado na Figura 3.12, mesmo tendo $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$ e $\lambda_2^d \leq \min_{i \in X_1} \left\{ \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d} \right\}$, $\Lambda^d = \emptyset$ significa que existe $j \in X_2$, tal que, $\lambda_\ell^d < \frac{-2\nabla p_j(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_j(x^*) d}$ e $\lambda_\ell^d < \lambda_2^d$. Neste caso, para todo λ , tal

que, $\lambda_2^d \leq \lambda \leq \min_{i \in X_1} \left\{ \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d} \right\}$, qualquer outro ponto $x' = x^* + \lambda d \notin S$ e não existe um outro ponto viável que domina x^* nesta direção.

Podemos concluir que para qualquer direção $d \in T(x^*)$, quando $X_0 \neq \emptyset$, obtemos x^* não dominado, ou quando $\Lambda^d = \emptyset$, obtemos novamente x^* não dominado. Portanto, não existe um outro ponto $x^* + \lambda d \in S$ que domina x^* , e $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$. ■

É importante observar, que diferentemente do caso sem restrições, quando $X_0 = \emptyset$, $X_1 = \emptyset$ e apenas $X_2 \neq \emptyset$ em uma direção $d \in T(x^*)$, é possível obter $\Lambda^d = \emptyset$. No caso sem restrições, sempre ocorre $\Lambda^d \neq \emptyset$. Esta possibilidade está ilustrada na Figura 3.14, pois temos $\lambda_\ell^d < \lambda_2^d$, o que implica em $\lambda_1^d := \lambda_\ell^d < \lambda_2^d$ e $\Lambda^d = \emptyset$. Porém, se ainda quando $X_0 = \emptyset$, $X_1 = \emptyset$ e apenas $X_2 \neq \emptyset$, obtemos $\lambda_1^d = \inf \{+\infty, \lambda_\ell^d\}$ e, se $\forall j \in X_2$, $\frac{-2\nabla p_j(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_j(x^*) d} \leq \lambda_\ell^d$, retornamos ao caso sem restrições, pois teremos $\lambda_2^d \leq \lambda_1^d$ e $\Lambda^d \neq \emptyset$. Ou seja, existe $\lambda \in \Lambda^d$ na direção d , tal que $x^* + \lambda d \in S$ domina x^* .

Os resultados que seguem, referentes aos problemas com restrições, estende naturalmente os resultados dos Corolários 3.1, 3.2 e do Teorema 3.3, por isso suas demonstrações são equivalentes e serão omitidas. Para facilitar a apresentação, definimos $\hat{L} = \{d \in T(x^*) \mid \Lambda^d \neq \emptyset\}$.

Corolário 3.4 *Seja $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$ e $\beta = \inf_{d \in \hat{L}} \{\lambda_2^d\}$. Então não existe um outro ponto $x' \in B(x^*, \beta) \cap S$, tal que, $\frac{f(x')}{g(x')} \leq \frac{f(x^*)}{g(x^*)}$.* ■

Corolário 3.5 *Seja $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$ e*

$$F(d) = \max_{i \in X_2} \{ 2\nabla p_i(x^*)^T d \}.$$

Suponha que existe um número ρ , tal que, $F(d) \geq \rho$, $\forall d \in T(x^)$. Então não existe um outro ponto $x' \in B(x^*, \frac{\rho}{-\gamma}) \cap S$, tal que, $\frac{f(x')}{g(x')} \leq \frac{f(x^*)}{g(x^*)}$, onde $\gamma < 0$, $\gamma = \min_{i \in I} \{\gamma_i\}$, $\gamma_i = \sum_{j \in \tilde{I}} \mu_j^{p_i}$,*

$\tilde{I} = \{j \in J \mid \mu_j^{p_i} < 0\}$ e $\mu_j^{p_i}$ são os autovalores das matrizes $\nabla^2 p_i(x^)$, $i \in I$.* ■

Teorema 3.6 *Seja $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$. Suponha que $X_1 \neq \emptyset$ para algum $d \in \hat{L}$ e*

$$\{ d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \} \geq \alpha > 0, \quad \forall i \in X_1.$$

Se não existe um outro ponto $x' \in B(x^, M) \cap S$, tal que, $\frac{f(x')}{g(x')} \leq \frac{f(x^*)}{g(x^*)}$, onde*

$$M = \min \left\{ \min_{i \in X_1} \frac{\|2\nabla p_i(x^*)\|}{\alpha}, \text{diam}(S) \right\},$$

então $x^ \in \text{Eff}(PMFQ)$.* ■

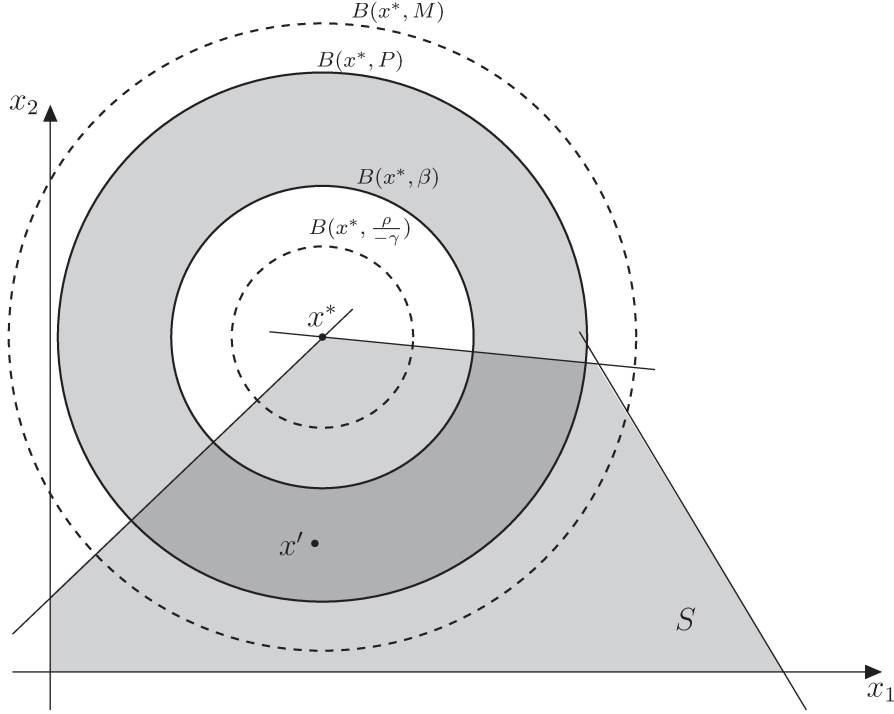


Figura 3.15: Alguns subconjuntos de interesse relacionado com a solução x^*

Se as hipóteses dos Corolários 3.4, 3.5 e Teorema 3.6 são satisfeitas, podemos identificar quatro subconjuntos importantes relacionados com uma solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$, $B(x^*, \frac{\rho}{\gamma}) \cap S$, $B(x^*, \beta) \cap S$, $B(x^*, P) \cap S$ e $B(x^*, M) \cap S$. Esses subconjuntos satisfazem $(B(x^*, \frac{\rho}{\gamma}) \cap S) \subseteq (B(x^*, \beta) \cap S) \subseteq (B(x^*, P) \cap S) \subseteq (B(x^*, M) \cap S)$. Semelhantemente ao apresentado na Seção 3.3, se tivermos um bom método computacional de busca para encontrar um ponto x' que domina a solução x^* , basta que esta busca seja feita no subconjunto fechado $(\bar{B}(x^*, P) \cap S) \setminus (B(x^*, \beta) \cap S)$, ou ainda, no subconjunto $(\bar{B}(x^*, M) \cap S) \setminus (B(x^*, \frac{\rho}{\gamma}) \cap S)$. Desta forma, podemos apresentar o seguinte corolário sem demonstração.

Corolário 3.6 *Seja $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$. Suponha que as hipóteses dos Corolários 3.4, 3.5 e Teorema 3.6 são satisfeitas, se existe x' que domina x^* no problema $(PMFQ)$, então $x' \in (\bar{B}(x^*, P) \cap S) \setminus (B(x^*, \beta) \cap S)$.* ■

Podemos entender o Corolário 3.6 observando a Figura 3.15. Nela, está ilustrado uma solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$ na fronteira do conjunto viável S para um caso mais simples, quando o domínio das funções é o $\mathbb{R}^2$. Dois subconjuntos de interesse estão ilustrados em linhas pontilhadas, $B(x^*, \frac{\rho}{\gamma}) \cap S$ e $B(x^*, M) \cap S$. E os outros dois em linhas contínuas,

$B(x^*, \beta) \cap S$ e $B(x^*, P) \cap S$. Se existe um ponto x' que domina a solução x^* , ele deve pertencer ao subconjunto fechado $(\bar{B}(x^*, P) \cap S) \setminus (B(x^*, \beta) \cap S)$, como está ilustrado na Figura 3.15.

As relações encontradas a partir da solução das desigualdades (3.2) também são válidas para alguns casos particulares de programação fracional multiobjetivo, nos quais os objetivos são constituídos de funções quadráticas e ou lineares em ambos os numeradores e denominadores das frações, sempre que as funções dos denominadores são estritamente positivas ou estritamente negativas em todos os pontos do conjunto viável. Utilizando nosso conceito de raio de eficiência, no próximo corolário apresentamos um resultado para um caso particular de programação fracional multiobjetivo linear.

Corolário 3.7 Se $\frac{f_i(x)}{g_i(x)} = \frac{a_i^T x + \bar{a}_i}{b_i^T x + \bar{b}_i}$, para cada $i \in I$ no problema (PMFQ), com conjunto de restrições convexo. Então $Leff(PMFQ) \equiv Eff(PMFQ)$.

Demonstração: Se $x^* \in Leff(PMFQ)$ então existe $i \in I$ para cada direção $d \in T(x^*)$, tal que, $(a_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}b_i)^T d > 0$. Ao mesmo tempo, da solução das desigualdades (3.2), se existe um outro ponto x' que domina x^* , deve existir $\lambda > 0$ que satisfaça $\lambda(a_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}b_i)^T d \leq 0$, $\forall i \in I$. O que é uma contradição. Logo, não existe $\lambda > 0$, tal que, $x' = x^* + \lambda d \in S$ domina x^* , e $x^* \in Eff(PMFQ)$. ■

Este resultado já foi demonstrado de outras formas, por exemplo, Beato et al. [6] mostram que cada função $\frac{f_i(x)}{g_i(x)}$, $i \in I$, do Corolário 3.7 é pseudoconvexa em S , e o resultado segue da equivalência dos conjuntos $Leff(PM)$ e $Eff(PM)$ no caso de funções objetivo pseudoconvexas e conjunto de restrições convexo.

3.5 Métodos computacionais

Utilizando os resultados das Seções 3.3 e 3.4, vamos apresentar agora algumas propostas de métodos computacionais para calcular o raio de eficiência de uma solução localmente eficiente, ou concluir que esta solução é eficiente no conjunto viável.

A estratégia no primeiro método, que vamos chamar de *Ramificação*, é obter uma cota inferior para o raio de eficiência de $x^* \in Leff(PMFQ)$ utilizando os resultados dos Corolários 3.2 e 3.5. Inicialmente o método deve encontrar o conjunto de direções viáveis $T(x^*)$. No caso de restrições lineares, se x^* pertencer a fronteira de S , deve-se calcular o cone tangente $\tilde{T}(x^*)$ e tomar $T(x^*) = \tilde{T}(x^*)$. Se a caso x^* estiver no interior de S deve-se escolher $T(x^*) = \partial B(0, 1)$. Uma dificuldade nesses colorários é obter um número ρ , tal que, $\max_{i \in X_2} \{ 2\nabla p_i(x^*)^T d \} \geq \rho$, $\forall d \in T(x^*)$. A estratégia, em seguida, é subdividir o conjunto $T(x^*)$ de modo a designar

alguns valores para ρ . Este processo consiste em ramificar o conjunto de direções viáveis em subconjuntos menores, onde o máximo do produto escalar do gradiente das funções p_i , $i \in I$, no ponto x^* com as direções nos subconjuntos sejam limitados inferiormente e superiormente por valores distintos para ρ , escolhidos adequadamente, de tal forma, que a união dos subconjuntos menores seja igual ao conjunto $T(x^*)$. Em seguida, calcula-se para cada um desses subconjuntos uma cota inferior para o raio de eficiência e, no final, escolhe-se a maior delas. Esta é uma aproximação para o raio de eficiência de x^* .

3.5.1 Ramificação

Seja $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$.

Passo 1. Obtenha $T(x^*)$. Se x^* está na fronteira de S , $T(x^*) := \tilde{T}(x^*)$. Caso contrário, $T(x^*) := \partial B(0, 1)$.

Passo 2. Divida $T(x^*)$ em $T_1(x^*), T_2(x^*), \dots, T_r(x^*)$, tal que,

$$T_j(x^*) = \left\{ d \in T(x^*) \mid \rho_j \leq 2\nabla p_i(x^*)^T d \leq \rho_{j+1}, i \in \hat{I} \right\},$$

para $j \in \{1, \dots, r\}$, onde

$$\hat{I} = \{i \in I \mid d^T \nabla^2 p_i(x^*) d < 0, d \in T(x^*)\},$$

e os valores ρ_j , $j \in \{1, \dots, r+1\}$, são tais que

$$\bigcup_{j=1}^{r+1} T_j(x^*) = T(x^*).$$

Passo 3. Determine os valores $\gamma_j < 0$, $j \in \{1, \dots, r+1\}$, tais que

$$\gamma_j = \min_{i \in I, d \in T_j(x^*)} \{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d\}.$$

Passo 4. Conclua que o raio de eficiência aproxima de x^* é

$$\bar{\lambda} = \max_{j \in \{1, \dots, r+1\}} \left\{ \frac{\rho_j}{-\gamma_j} \right\}.$$

Observe no Passo 1 do método acima, que o conjunto de restrições S pode ser constituído por funções mais gerais que funções lineares, desde que, seja possível calcular o cone tangente a S no ponto x^* . No Passo 2 são utilizados os valores do produto escalar $2\nabla p_i(x^*)^T d$, $i \in I$, para subdividir o conjunto de direções viáveis $T(x^*)$ em r subconjuntos, chamados de $T_j(x^*)$, $j \in \{1, \dots, r\}$. Um processo de subdivisão adequado, fornece $r + 1$ valores para ρ , chamados ρ_j , $j \in \{1, \dots, r + 1\}$, tal que, $\bigcup_{j=1}^{r+1} T_j(x^*) = T(x^*)$. Esta subdivisão pode ser feita utilizando a estratégia do método *Auxiliar da ramificação* descrito abaixo.

Dado $d \in T(x^*)$, sabemos que

$$-2\|\nabla p_i(x^*)\| \leq 2\nabla p_i(x^*)^T d \leq 2\|\nabla p_i(x^*)\|, \quad \forall i \in I.$$

Vamos definir o limite inferior $\underline{\delta}_i = -2\|\nabla p_i(x^*)\|$ e o limite superior $\bar{\delta}_i = 2\|\nabla p_i(x^*)\|$ de $2\nabla p_i(x^*)^T d$ para cada $i \in I$. E os conjuntos $\underline{\Delta} = \{\underline{\delta}_1, \dots, \underline{\delta}_m\}$ e $\bar{\Delta} = \{\bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_m\}$.

Auxiliar da ramificação

$$\rho_1 := \min\{\underline{\Delta}\}.$$

Passo 1. Para $j = 2, \dots, m$.

1. $\underline{\Delta} := \underline{\Delta} \setminus \{\rho_{j-1}\}$
2. $\rho_j := \min\{\underline{\Delta}\}.$

Passo 2. $\rho_{m+1} := 0$. $\rho_{m+2} := \min\{\bar{\Delta}\}.$

Passo 3. Para $k = 3, \dots, m + 2$.

1. $\bar{\Delta} := \bar{\Delta} \setminus \{\rho_{m+k-1}\}$
 2. $\rho_j := \min\{\bar{\Delta}\}.$
-

É fácil ver que o método acima ordena em ordem crescente todos os limites em $\underline{\Delta}$ e $\bar{\Delta}$, formando a sequência $\rho_1 \leq \dots \leq \rho_m \leq 0 \leq \rho_{m+1} \leq \dots \leq \rho_{2m+1}$, com $r = 2m$. Com essas escolhas de ρ_j , temos $\max_{i \in \hat{I}} \{2\nabla p_i(x^*)^T d\} \geq \rho_j$, $\forall d \in T_j(x^*)$, e, para aqueles índices j , tais que, $\rho_j > 0$, obtemos as razões $\frac{\rho_j}{-\gamma_j}$ adequadas com os Corolários 3.2 e 3.5.

No Passo 3 do método Ramificação cada γ_j , $j \in \{1, \dots, r+1\}$, pode ser obtido como nos Corolários 3.2 e 3.5, onde $\gamma_j < 0$, $\gamma_j = \min_{i \in I} \{\gamma_i\}$, $\gamma_i = \sum_{k \in \tilde{I}} \mu_k^{p_i}$, $\tilde{I} = \{k \in J \mid \mu_k^{p_i} < 0\}$, sendo $\mu_k^{p_i}$ os autovalores das matrizes $\nabla^2 p_i(x^*)$, $i \in I$. O método encerra com uma escolha simples da maior entre as razões $\frac{\rho_j}{-\gamma_j}$, $j \in \{1, \dots, r+1\}$, que fornece uma cota inferior $\bar{\lambda}$ para o raio de eficiência de $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$.

Observe que podemos obter $\rho_j < 0$ para algum $j \in \{1, \dots, r+1\}$, implicando em $\frac{\rho_j}{-\gamma_j} < 0$, que será descartado no Passo 4 do método. Porém, se na escolha de ρ_j , ocorrer $\rho_j < 0$ para todo $j \in \{1, \dots, r+1\}$, então o método não tem utilidade, pois a bola $B(x^*, \bar{\lambda})$, com $\bar{\lambda} < 0$ não está definida.

Em relação a uma implementação computacional do método Ramificação, as dificuldades estão nos Passos 1 e 2. Se estivermos trabalhando com um problema (PMFQ) com restrições lineares, a dificuldade de obter o conjunto de direções viáveis $T(x^*)$ diminui, porém em casos mais gerais, só é possível obter uma aproximação do conjunto $T(x^*)$, sempre que x^* está no fronteira de S .

No próximo método, que vamos chamar de *Raio de eficiência 1*, apresentamos uma rotina que tem como estratégia principal identificar iterativamente os conjuntos X_0 , X_1 e X_2 através das direções em $T(x^*)$. Feita essa identificação, é possível calcular o raio de eficiência de $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$ ou concluir que esta solução é eficiente. Inicia-se obtendo o conjunto $T(x^*)$ como no método Ramificação. No segundo passo, que é o mais complexo, através de um laço de quatro itens sobre os índices $k \in I$, deve-se considerar as direções do conjunto $T(x^*)$, identificando em qual conjunto X_0 , X_1 ou X_2 o índice k pertence. Todas as direções com $k \in X_0$ são eliminadas iterativamente do conjunto $T(x^*)$, pois nessas direções só pode ocorrer crescimento da função p_k . Contudo, se $k \in X_0$, $\forall d \in T(x^*)$, conclui-se que x^* é eficiente. Identificados os conjuntos X_1 e X_2 para cada direção de $T(x^*)$, o próximo passo é verificar para quais dessas direções d ocorrem $\lambda_2^d \leq \lambda_1^d$, e assim, é possível obter o raio de eficiência λ de x^* , escolhendo o menor valor de λ_2^d . Para facilitar a apresentação do método, vamos supor que existe $d \in T(x^*)$, tal que, $\nabla p_i(x^*)^T d \neq 0$, $\forall i \in I$.

3.5.2 Raio de eficiência 1

Sejam $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$.

Passo 1. Obtenha $T(x^*)$ e faça $M^0 := T(x^*)$.

Passo 2. Faça $k := 1$ e repita os itens de 1 à 4 até $k = m$.

1. $M^k := M^{k-1}$.
2. Calcule $D_2^k = \{d \in M^k \mid \nabla p_k(x^*)^T d > 0\}$.
 - (a) Se $D_2^k \equiv \emptyset$, retorne ao Passo 2 com $k := k + 1$.
 - (b) Caso contrário, calcule $D_0^k = \{d \in D_2^k \mid d^T \nabla^2 p_k(x^*) d \geq 0\}$
 - (c) Se $D_0^k \equiv M^k$ pare. Podemos concluir que $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$ e $\lambda = \infty$.
 - (d) Caso contrário, $D_2^k := D_2^k \setminus D_0^k$ e $M^k := M^k \setminus D_0^k$
3. Calcule $I(X_1^k) = \{j \neq k \mid j \in X_1, \forall d \in D_2^k\}$ e $I(X_2^k) := \{1, \dots, m\} \setminus I(X_1^k)$
 - (a) Calcule $D(X_0^k) = \{d \in D_2^k \mid j \in X_0, \forall j \in I(X_2^k)\}$ e $M^k := M^k \setminus D(X_0^k)$
 - (b) Se $M^k \equiv \emptyset$ pare. Podemos concluir que $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$ e $\lambda = \infty$.
 - (c) Se $D(X_0^k) \equiv D_2^k$, retorne ao Passo 2 com $k := k + 1$
 - (d) Caso contrário, $D_2^k := D_2^k \setminus D(X_0^k)$
4. $\forall d \in D_2^k$, calcule λ_ℓ^d , λ_2^d usando $X_2 \equiv I(X_2^k)$ e λ_1^d usando $X_1 \equiv I(X_1^k)$.
 - (a) Se existe $d \in D_2^k$, tal que, $\lambda_2^d \leq \lambda_1^d$. Calcule $\lambda^k = \inf_{d \in D_2^k} \{\lambda_2^d \mid \lambda_2^d \leq \lambda_1^d\}$ e $d^k = \arg\{\lambda^k\}$. Guarde o par (λ^k, d^k) e retorne ao Passo 1 com $k := k + 1$.
 - (b) Caso contrário, $\lambda^k := \infty$ e retorne ao Passo 2 com $k := k + 1$.

Passo 3. Se o método não encerra no Passo 2.2 ou no Passo 2.3, calcule $\lambda = \inf_{k \in I} \{\lambda^k\}$ e, caso exista, encontre o par (λ, d) armazenado no Passo 2.4.(a).

Passo 4. Se $\lambda < \infty$, conclua que x^* é λ -eficiente e que $x^* + \lambda d$ domina x^* . Caso contrário, $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$.

Pela hipótese de que existe $d \in T(x^*)$, tal que, $\nabla p_i(x^*)^T d \neq 0, \forall i \in I$, no Passo 2.2.(a) não pode ocorrer $D_2^k \equiv \emptyset, \forall k \in I$, pois se isso ocorresse $x^* \notin \text{Leff}(x^*)$. Para cada iterando

$k \in I$ no laço do Passo 2, temos o Passo 2.2.(c) sendo o primeiro a verificar se $\forall d \in T(x^*)$ existe um índice $k \in X_0$ para concluir que $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$. Quando o Passo 2.2.(d) termina para o iterando k , temos identificadas todas as direções em $T(x^*)$, tais que, $k \in X_2$ e $k \notin X_0$. Os Passos 2.3 e 2.4 identificam todas as direções d que ainda restam em $T(x^*)$, tais que, os índices $j \neq k$ pertencem ao conjunto X_1 para calcular cada valor de λ_2^d , em cada direção d , tal que, ocorre $\lambda_2^d \leq \lambda_1^d$. Por fim, o raio de eficiência é escolhido como o menor entre os valores λ_2^d , ou conclui-se que $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$ se $\lambda_1^d < \lambda_2^d, \forall d$. A complexidade deste método cresce com o tamanho de m e a dimensão n do domínio. Se o método não para no Passo 2.2 ou no Passo 2.3, ele deve encontrar todas as combinações possíveis dos índices $i \in I$ nos conjuntos X_0, X_1 e X_2 , em cada direção $d \in T(x^*)$, considerando por um lado, que pode ocorrer $X_0 \neq \emptyset$, e de outro, que pode correr $X_0 = \emptyset$ com $X_2 \neq \emptyset$ em cada direção.

Em relação a uma implementação computacional do método Raio de eficiência 1, podemos ter dificuldades importantes em relação às direções do conjunto $T(x^*)$. Na prática, o número de funções objetivo nos problemas que se pretende resolver não costuma ser grande, então o valor de m que aumenta as possíveis combinações de índices $i \in I$ nos conjuntos X_0, X_1 e X_2 não preocupa. O problema está na dimensão do domínio das funções, pois quanto maior a dimensão, maior a dificuldade de se analisar as direções unitárias em $\mathbb{R}^n$.

3.6 Direções parametrizadas

Outra possibilidade de construir métodos computacionais para calcular o raio de eficiência de uma solução x^* é considerar algum tipo de parametrização das direções em $T(x^*)$. Por exemplo, no caso em que o conjunto viável é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, podemos considerar uma parametrização em coordenadas polares e, no caso de $\mathbb{R}^3$, em coordenadas esféricas.

Vamos considerar uma parametrização das direções em $T(x^*)$ por uma função bijetiva,

$$\begin{aligned} d : \Omega &\longrightarrow T(x^*) \\ \alpha &\longmapsto d(\alpha), \end{aligned}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. O próximo método, que vamos chamar de *Raio de eficiência 2*, tem algumas semelhanças com o método Raio de eficiência 1. Iterativamente, identifica os conjuntos X_0, X_1 e X_2 para cada direção em $T(x^*)$, porém agora, cada direção está parametrizada por um parâmetro $\alpha \in \Omega$. Essa estrutura é mais adequada e simples de descrever, principalmente quando a dimensão do domínio das funções é pequena.

O método inicia com uma solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$ e considera diretamente cada representante do intervalo Ω como uma direção de $T(x^*)$. No primeiro passo, é identificado para quais parâmetros $\alpha \in \Omega$, existem índices $i \in I$ em X_0 . Esses parâmetros podem ser

desprezados, pois existirá uma função p_i sempre crescente na direção $d(\alpha)$. Se isso ocorrer para todo elemento de Ω , o método encerra no Passo 2, concluindo que $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$. Caso contrário, ainda no Passo 2, o método entra em um laço, Passo 2.3, com outro laço interno, Passo 2.3.(b), que é a parte mais complexa do método.

No Passo 2.1, o método elimina os parâmetros selecionados no Passo 1, restando apenas os parâmetros associados às direções nas quais $X_0 = \emptyset$. No Passo 2.2, o método identifica para os parâmetros α restantes, em qual dos conjuntos, X_1 ou X_2 , pertencem os índices $i \in I$, de acordo com as direções $d(\alpha)$, definindo assim, novos subconjuntos $D_2^i \subset \Omega$ e $D_1^i \subset \Omega$, $i \in I$. Por exemplo, se $\tilde{\alpha} \in D_1^5$, implica que $5 \in X_1$ na direção $d(\tilde{\alpha})$. Como nessas direções temos $X_0 = \emptyset$, sempre ocorre $X_2 \neq \emptyset$, então o método deve identificar todas as combinações possíveis dos índices $i \in I$, tais que, $i \in X_2$ com os demais fora de X_2 . Lembrando que, conforme observações feitas na Seção 3.3, página 44, se $X_0 = \emptyset$ e $k \notin X_2$ em uma direção d , não significa que $k \in X_1$, porque podem ocorrer $d^T \nabla^2 p_k(x^*) d \leq 0$ e $\nabla p_k(x^*)^T d \leq 0$. Assim, em seguida, o método verifica nos Passos 2.3.(a) e 2.3.(b) para todos elementos N_s pertencentes ao conjunto das partes do conjunto de índices I , $\mathcal{P}(I)$, com execução do elemento $N_s = \emptyset$, se os subconjuntos D_2^q , $q \in N_s$ e D_1^p , $p \in I \setminus N_s$ são todos simultaneamente não vazios. Desta forma, pode ocorrer que $\bigcap_{q \in N_s} D_2^q \bigcap_{p \in I \setminus N_s} D_1^p$ seja não vazio, ou seja, podem existir $\alpha \in \bigcap_{q \in N_s} D_2^q \bigcap_{p \in I \setminus N_s} D_1^p$, tal que, na direção $d(\alpha)$ seja possível calcular valores $\lambda_1^{d(\alpha)}$ e $\lambda_2^{d(\alpha)}$, com $\lambda_2^{d(\alpha)} \leq \lambda_1^{d(\alpha)}$.

Quando o Passo 2 encerra, são criados novos subconjuntos $C_j = \bigcap_{q \in N_s} D_2^q \bigcap_{p \in I \setminus N_s} D_1^p$, com $j = 1, \dots, T$, onde $T = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} = 2^m - 1$ é a quantidade de elementos N_s pertencentes a $\mathcal{P}(I) \setminus \{\emptyset\}$. O Passo 3 verifica se existe $\alpha \in C_j$, $j = 1, \dots, T$, tal que, $\lambda_2^{d(\alpha)} \leq \lambda_1^{d(\alpha)}$ e, caso exista, armazena α em novos subconjuntos V_j .

O método encerra no Passo 4 concluindo que $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$ se $V = \bigcup_{i=1}^T V_i \equiv \emptyset$, ou calcula o raio de eficiência $\lambda(\bar{\alpha}) = \min_{\alpha \in V} \{\lambda_2^{d(\alpha)}\}$ da solução x^* .

3.6.1 Raio de eficiência 2

Sejam $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$, $D := \Omega$ e $j := 0$.

Passo 1. Para $i \in I$, calcule $D_0^i = \{\alpha \in D \mid i \in X_0\}$.

Passo 2. Se $D \equiv \bigcup_{i=1}^m D_0^i$ pare, $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$. Caso contrário,

1. $D := D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m D_0^i \right)$.
2. Para $i \in I$, calcule $D_2^i = \{\alpha \in D \mid i \in X_2\}$ e $D_1^i = \{\alpha \in D \mid i \in X_1\}$.
3. Para $k = 1, \dots, m$.

(a) Sejam $N_s \in \mathcal{P}(I)$, tal que, $|N_s| = k$ e $s \in \left\{ 1, \dots, \binom{m}{k} \right\}$.

(b) Para $s = 1, \dots, \binom{m}{k}$.

i. $j := j + 1$.

ii. Se $\left(\bigwedge_{q \in N_s} D_2^q \bigwedge_{p \in I \setminus N_s} D_1^p \right) \neq \emptyset$, então $C_j := \bigcap_{q \in N_s} D_2^q \bigcap_{p \in I \setminus N_s} D_1^p$.

iii. Caso contrário $C_j := \emptyset$.

Passo 3. Para $i = 1, \dots, T = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k}$.

1. Calcule $\lambda_\ell^{d(\alpha)}$, $\alpha \in C_i$ e $V_i = \{\alpha \in C_i \mid \lambda_2^{d(\alpha)} \leq \lambda_1^{d(\alpha)}\}$.

Passo 4. Se $V = \bigcup_{i=1}^T V_i \equiv \emptyset$ pare, $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$. Caso contrário, calcule $\lambda(\bar{\alpha}) = \min_{\alpha \in V} \{\lambda_2^{d(\alpha)}\}$.

Conclua que x^* é $\lambda(\bar{\alpha})$ -eficiente, e que $x^* + \lambda(\bar{\alpha})d(\bar{\alpha})$ domina x^* em (PMFQ).

Observe que no Passo 2.3.(b) o método verifica se D_2^q é não vazio, com $q \in N_s$, $N_s \in \mathcal{P}(I)$ e se D_1^p é não vazio, com $p \in I \setminus N_s$, porque a referência são os índices no conjunto X_2 , o qual deve ser não vazio, pois as direções $d(\alpha)$ com $X_0 \neq \emptyset$ já foram eliminadas no Passo 2.1.

Em relação a uma implementação computacional do método Raio de eficiência 2, temos que considerar que a complexidade do método cresce exponencialmente com o tamanho de m . Contudo, nos problemas práticos m costuma ser pequeno. Então, a dificuldade maior está na possibilidade de parametrizar e identificar todas as direções em $T(x^*)$ de acordo com o tamanho da dimensão n do domínio das funções objetivo.

Para facilitar o entendimento do método acima, vamos ver um caso particular quando o conjunto viável do problema (PMFQ) é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Então, para $n = 2$ e $S \subseteq \mathbb{R}^2$, se $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$, podemos usar a seguinte parametrização usual para as direções $d \in T(x^*)$,

$$\begin{aligned} d : [0, 2\pi) &\longrightarrow T(x^*) \\ \theta &\longmapsto d(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)^T. \end{aligned}$$

E definindo para cada $i \in I$,

$$\nabla p_i(x^*) = \begin{bmatrix} g_i^1 \\ g_i^2 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 p_i(x^*) = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i \end{bmatrix},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \nabla p_i(x^*)^T d(\theta) &= g_i^1 \cos \theta + g_i^2 \sin \theta, \\ d(\theta)^T \nabla^2 p_i(x^*) d(\theta) &= a_{11}^i \cos^2 \theta + 2a_{21}^i \cos \theta \sin \theta + a_{22}^i \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Apresentamos agora, o método anterior para o caso particular de $m = 2$, que vamos aplicar em seguida em dois exemplos.

Os passos descritos abaixo pode facilitar o entendimento do método Raio de eficiência 2.

3.6.2 Raio de eficiência 2 ($n = 2, m = 2$)

Sejam $x^* \in \text{Leff}(PMFQ)$ e $D := [0, 2\pi)$.

Passo 1. Para $i = 1, 2$, calcule $D_0^i = \{\theta \in D \mid i \in X_0\}$.

Passo 2. Se $D \equiv D_0^1 \cup D_0^2$ pare, $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$. Caso contrário,

1. $D := D \setminus (D_0^1 \cup D_0^2)$.
2. Para $i = 1, 2$, calcule $D_2^i = \{\theta \in D \mid i \in X_2\}$ e $D_1^i = \{\theta \in D \mid i \in X_1\}$.
3. Se $(D_2^1 \neq \emptyset) \wedge (D_1^2 \neq \emptyset)$, então $C_1 := D_2^1 \cap D_1^2$, caso contrário $C_1 := \emptyset$.
4. Se $(D_2^2 \neq \emptyset) \wedge (D_1^1 \neq \emptyset)$, então $C_2 := D_2^2 \cap D_1^1$, caso contrário $C_2 := \emptyset$.
5. Se $(D_2^1 \neq \emptyset) \wedge (D_2^2 \neq \emptyset)$, então $C_3 := D_2^1 \cap D_2^2$, caso contrário $C_3 := \emptyset$.

Passo 3. Para $i = 1, 2, 3$, calcule $\lambda_\ell^{d(\theta)}, \theta \in C_i$ e $V_i = \{\theta \in C_i \mid \lambda_2^{d(\theta)} \leq \lambda_1^{d(\theta)}\}$.

Passo 4. Se $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \equiv \emptyset$ pare, $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$. Caso contrário, calcule $\lambda(\bar{\theta}) = \min_{\theta \in V} \{\lambda_2^{d(\theta)}\}$.

Conclua que x^* é $\lambda(\bar{\theta})$ -eficiente, e que $x^* + \lambda(\bar{\theta})d(\bar{\theta})$ domina x^* em $(PMFQ)$.

Vamos utilizar o método Raio de eficiência 2 em dois exemplos. No Exemplo 2, tomamos uma solução localmente eficiente de um problema biobjetivo e calculamos o seu raio de eficiência descrevendo passo a passo as operações. Em seguida, voltamos ao Exemplo 1, apresentado na Seção 1.4, para conferir através de um método computacional, e não apenas graficamente, que alguns pontos localmente eficientes deste exemplo também são eficientes.

Exemplo 2 Considere um problema $(PMFQ')$, onde

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{e} \quad \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = -x_1^2 + x_2^2 + x_1.$$

Vamos exemplificar os passos do método Raio de eficiência 2 neste exemplo, onde $x \in \mathbb{R}^2$. Para isso, precisamos de uma solução $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$ e de uma parametrização para

$T(x^*) = \partial B(0, 1)$. É fácil verificar que o ponto $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma solução localmente eficiente deste problema. Como $g_1 = g_2 = 1$, temos $\nabla p_i = \nabla f_i$ e $\frac{1}{2}\nabla^2 p_i = \nabla^2 f_i$, $i = 1, 2$, e assim,

$$\nabla p_1(x^*) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla p_2(x^*) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 p_1(x^*) = 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla^2 p_2(x^*) = 2 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para cada direção $d(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)^T$, $\theta \in D := [0, 2\pi)$, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla p_1(x^*)^T d(\theta) &= 2 \cos \theta, \\ \nabla p_2(x^*)^T d(\theta) &= -\cos \theta, \\ d(\theta)^T \nabla^2 p_1(x^*) d(\theta) &= 4, \\ d(\theta)^T \nabla^2 p_2(x^*) d(\theta) &= -4 \cos 2\theta. \end{aligned}$$

Portanto, conforme o Passo 1, precisamos primeiro verificar em quais direções ocorrem somente crescimento em uma das funções objetivo, encontrando os conjuntos D_0^1 e D_0^2 . Ou seja,

$$\begin{aligned} D_0^1 &= \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \\ D_0^2 &= \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

No Passo 2, se o crescimento de alguma das funções objetivo ocorre em todas as direções, o método encerra concluindo que x^* é eficiente. Porém, temos $D \neq D_0^1 \cup D_0^2$ e, conforme Passo 2.1, resta verificar o que ocorre com as direções $d(\theta)$, tais que, $\theta \in D := D \setminus (D_0^1 \cup D_0^2)$, ou seja, quando $\theta \in D = [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.

Em seguida, no Passo 2.2, as demais direções são separadas de acordo com as distintas possibilidades de combinar os índices $i = 1, 2$ nos conjuntos X_1 e X_2 , armazenando $\theta \in D$ em novos subconjuntos D_2^i e D_1^i , $i = 1, 2$. Como $d(\theta)^T \nabla^2 p_1(x^*) d(\theta) = 4 > 0$ e $\nabla p_1(x^*)^T d(\theta) = 2 \cos \theta < 0$, para todo $\theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, implica que $1 \in X_1$, para todo $\theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Analogamente, obtemos $2 \in X_2$, para todo $\theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Portanto, $D_1^1 \neq \emptyset$, $D_2^2 \neq \emptyset$, $D_1^2 = \emptyset$, $D_2^1 = \emptyset$.

Nos Passos 2.3-2.5, temos que verificar se existe interseção não vazia entre os quatro subconjuntos D_2^i e D_1^i , $i = 1, 2$, de tal forma, que seja possível calcular $\lambda_2^{d(\theta)}$ e $\lambda_1^{d(\theta)}$ com o intervalo $\Lambda^{d(\theta)}$ não vazio. As direções $d(\theta)$, tais que, $X_0 \neq \emptyset$ já foram excluídas, então temos que considerar as possibilidades do conjunto $X_2 \neq \emptyset$. Como $m = 2$, a regra é verificar quando $|X_2| = 1$ e quando $|X_2| = 2$. Logo, as possibilidades de interseção entre os subconjuntos D_2^i

e D_1^i , $i = 1, 2$, são três. Ou seja, para $D_1^1 = D_2^2 = \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, temos

$$\begin{aligned} (D_2^1 = \emptyset) \wedge (D_1^2 = \emptyset), & \text{ então } C_1 := \emptyset, \\ (D_2^2 \neq \emptyset) \wedge (D_1^1 \neq \emptyset), & \text{ então } C_2 := D_2^2 \cap D_1^1 = \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right], \\ (D_2^1 = \emptyset) \wedge (D_2^2 \neq \emptyset), & \text{ então } C_3 := \emptyset. \end{aligned}$$

No Passo 3, temos que verificar para quais parâmetros $\theta \in C_j$, $j = 1, 2, 3$, existem direções $d(\theta)$, tais que, $\lambda_2^{d(\theta)} \leq \lambda_1^{d(\theta)}$, armazenando esses parâmetros em novos subconjuntos V_j , $j = 1, 2, 3$. Caso $\Lambda^{d(\theta)} = \emptyset$ para todas essas direções, o método encerra no Passo 4 concluindo que a solução x^* é eficiente. Por outro lado, se existe alguma direção $d(\theta)$ com $\Lambda^{d(\theta)} \neq \emptyset$, o método encerra calculando o raio de eficiência $\lambda(\bar{\theta})$ da solução x^* , tal que, $\Lambda^{d(\bar{\theta})} \neq \emptyset$, e encontra um outro ponto x' que domina x^* .

Neste exemplo, temos que encontrar $\theta \in C_2$, tal que, $\lambda_2^{d(\theta)} \leq \lambda_1^{d(\theta)}$, com $1 \in X_1$ e $2 \in X_2$. Ou seja, temos que resolver

$$\begin{aligned} \lambda_2^{d(\theta)} &= \frac{-2(-\cos \theta)}{-4 \cos 2\theta}, \text{ com } -\cos \theta > 0 \text{ e } -4 \cos 2\theta < 0 \implies \cos \theta < 0 \text{ e } \cos 2\theta > 0, \\ \lambda_1^{d(\theta)} &= \frac{-2(2 \cos \theta)}{4}, \text{ com } 2 \cos \theta < 0 \text{ e } 4 > 0 \implies \cos \theta < 0 \text{ e } 4 > 0, \\ \lambda_2^{d(\theta)} \leq \lambda_1^{d(\theta)} &\implies \cos 2\theta \geq \frac{1}{2} \iff \theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]. \end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \theta \in V_2 &= \left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]\right) \cap C_2 = \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right], \text{ e} \\ \lambda(\bar{\theta}) &= \min_{\theta \in V_2} \left\{ \lambda_2^{d(\theta)} \right\} = \min_{\theta \in V_2} \left\{ \frac{\cos \theta}{-2 \cos 2\theta} \right\} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sendo $\lambda(\bar{\theta}) = \frac{1}{2}$ atingindo quando $\bar{\theta} = \pi$ e $d(\pi) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Portanto, $x^* + \lambda(\pi)d(\pi) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ domina $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e x^* é $\frac{1}{2}$ -eficiente.

Por outro lado, se mudarmos a solução localmente eficiente para $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, obtemos $d(\theta)^T \nabla^2 p_1(x^*) d(\theta) = 4 > 0$ e $\nabla p_1(x^*)^T d(\theta) = 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, ou seja, $D \equiv D_0^1 \cup D_0^2$. Portanto, $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é ∞ -eficiente.

ramo A , $0 < \tau < \frac{1}{4}$							
τ	x^{*T}	$h(x^*)^T$	$\bar{\theta}$	$\lambda(\bar{\theta})$	$d(\bar{\theta})^T$	x'^T	$h(x')^T$
0.05	(2.50, -1.01)	(23.97, -0.25)	3.14	1.00	(-1, 0)	(1.50, -1.01)	(7.97, -0.25)
0.06	(2.63, -1.01)	(26.67, -0.40)	3.14	1.26	(-1, 0)	(1.37, -1.01)	(6.46, -0.40)
0.07	(2.77, -1.02)	(29.83, -0.60)	3.14	1.56	(-1, 0)	(1.22, -1.02)	(4.94, -0.60)
0.08	(2.94, -1.02)	(33.56, -0.88)	3.14	1.88	(-1, 0)	(1.06, -1.02)	(3.44, -0.88)
0.09	(3.12, -1.02)	(38.02, -1.26)	3.14	2.25	(-1, 0)	(0.87, -1.02)	(2.01, -1.26)
0.10	(3.33, -1.03)	(43.39, -1.77)	3.14	2.67	(-1, 0)	(0.67, -1.03)	(0.72, -1.77)
0.11	(3.57, -1.03)	(49.96, -2.47)	3.14	3.15	(-1, 0)	(0.43, -1.03)	(-0.32, -2.47)
0.12	(3.85, -1.03)	(58.11, -3.40)	3.14	3.69	(-1, 0)	(0.15, -1.03)	(-0.97, -3.40)
0.13	(4.17, -1.03)	(68.38, -4.69)	3.14	4.33	(-1, 0)	(-0.17, -1.03)	(-0.96, -4.69)
0.14	(4.54, -1.04)	(81.57, -6.47)	3.14	5.09	(-1, 0)	(-0.54, -1.04)	(0.12, -6.47)
0.15	(5.00, -1.04)	(98.92, -8.99)	3.14	6.00	(-1, 0)	(-1.00, -1.04)	(2.92, -8.99)
0.16	(5.55, -1.04)	(122.4, -12.63)	3.14	7.11	(-1, 0)	(-1.56, -1.04)	(8.59, -12.63)
0.17	(6.25, -1.04)	(155.2, -18.05)	3.14	8.50	(-1, 0)	(-2.25, -1.04)	(19.16, -18.05)
0.18	(7.14, -1.05)	(203.0, -26.44)	3.14	10.29	(-1, 0)	(-3.14, -1.05)	(38.41, -26.44)
0.19	(8.33, -1.05)	(276.7, -40.10)	3.14	12.67	(-1, 0)	(-4.33, -1.05)	(74.01, -40.10)
0.20	(10.00, -1.05)	(398.9, -63.99)	3.14	16.00	(-1, 0)	(-6.00, -1.05)	(142.9, -63.99)
0.21	(12.50, -1.05)	(623.9, -110.2)	3.14	21.00	(-1, 0)	(-8.50, -1.05)	(287.9, -110.2)
0.22	(16.67, -1.06)	(1110, -215.1)	3.14	29.33	(-1, 0)	(-12.67, -1.06)	(641, -215.1)
0.23	(25.00, -1.06)	(2499, -528.9)	3.14	46.00	(-1, 0)	(-21.00, -1.06)	(1763, -528.9)
0.24	(50.00, -1.06)	(9999, -2304)	3.14	96.00	(-1, 0)	(-46.00, -1.06)	(8463, -2304)

Tabela 3.1: Raio de eficiência para as soluções localmente eficientes do ramo A do Exemplo 1

Implementamos o método Raio de eficiência 2 ($n = 2, m = 2$) no aplicativo Matlab® para calcular o raio de eficiência das soluções localmente eficientes do problema do Exemplo 1. Alguns resultados do experimento são apresentados Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3.

Cada tabela refere-se a um dos ramos A , B e C de pontos localmente eficientes do Exemplo 1. O objetivo dos resultados apresentados é comprovar que a afirmação feita anteriormente sobre as soluções que pertencem ao ramo C é verdadeira, ou seja, queremos confirmar que essas soluções também são eficientes. Os dados do ramo A estão na Tabela 3.1, do ramo B na Tabela 3.2 e do ramo C estão na Tabela 3.3. Os valores apresentados na primeira coluna de cada tabela referem-se aos multiplicadores τ da condição de primeira ordem. Na segunda coluna estão as soluções $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$ obtidas a partir de cada valor τ . A terceira coluna refere-se aos valores do vetor objetivo $h(x^*) = (h_1(x^*), h_2(x^*))$. As três próximas colunas fornecem o valor do ângulo $\bar{\theta} \in [0, 2\pi)$, do raio de eficiência $\lambda(\bar{\theta})$ e da direção $d(\bar{\theta})$ encontrados pelo método, respectivamente. Com esses valores, obtemos $x' = x^* + \lambda(\bar{\theta})d(\bar{\theta})$ que domina x^* , e o vetor objetivo $h(x') = (h_1(x'), h_2(x'))$. Os pontos x' são apresentados na penúltima coluna, enquanto $h(x')$ na última coluna.

ramo B , $\tau > 4$							
τ	x^{*T}	$h(x^*)^T$	$\bar{\theta}$	$\lambda(\bar{\theta})$	$d(\bar{\theta})^T$	x'^T	$h(x')^T$
4.10	(-0.13, 40.00)	(-1600, 6719)	4.71	80.0	(-0.00, -1)	(-0.13, -40.00)	(-1600, 6079)
4.50	(-0.12, 8.00)	(-63.94, 319.5)	4.71	16.0	(-0.00, -1)	(-0.12, -8.00)	(-63.94, 191.5)
4.90	(-0.11, 4.44)	(-19.71, 114.1)	4.71	8.89	(-0.00, -1)	(-0.11, -4.44)	(-19.71, 43.01)
5.30	(-0.10, 3.077)	(-9.43, 62.08)	4.71	6.15	(-0.00, -1)	(-0.10, -3.077)	(-9.43, 12.85)
5.70	(-0.09, 2.353)	(-5.50, 40.60)	4.74	4.70	(0.03, -0.99)	(0.06, -2.35)	(-5.50, 3.49)
6.10	(-0.08, 1.905)	(-3.60, 29.40)	4.74	3.80	(0.03, -0.99)	(0.03, -1.90)	(-3.60, -0.64)
6.50	(-0.08, 1.600)	(-2.53, 22.71)	4.74	3.19	(0.03, -0.99)	(0.02, -1.59)	(-2.53, -2.51)
6.90	(-0.07, 1.379)	(-1.88, 18.34)	4.74	2.75	(0.03, -0.99)	(0.01, -1.37)	(-1.88, -3.40)
7.30	(-0.07, 1.212)	(-1.45, 15.28)	4.74	2.42	(0.03, -0.99)	(0.00, -1.20)	(-1.45, -3.81)
7.70	(-0.07, 1.081)	(-1.15, 13.05)	4.74	2.15	(0.03, -0.99)	(0.00, -1.07)	(-1.15, -3.98)
8.10	(-0.06, 0.976)	(-0.93, 11.35)	4.74	1.94	(0.03, -0.99)	(-0.00, -0.97)	(-0.93, -4.01)
8.50	(-0.06, 0.889)	(-0.77, 10.02)	4.74	1.77	(0.03, -0.99)	(-0.00, -0.88)	(-0.77, -3.96)
8.90	(-0.06, 0.816)	(-0.65, 8.96)	4.74	1.62	(0.03, -0.99)	(-0.01, -0.81)	(-0.65, -3.88)
9.30	(-0.05, 0.754)	(-0.56, 8.09)	4.74	1.50	(0.03, -0.99)	(-0.01, -0.75)	(-0.56, -3.77)
9.70	(-0.05, 0.702)	(-0.48, 7.37)	4.74	1.40	(0.03, -0.99)	(-0.01, -0.69)	(-0.48, -3.66)
10.1	(-0.05, 0.656)	(-0.42, 6.76)	4.74	1.30	(0.03, -0.99)	(-0.01, -0.65)	(-0.42, -3.54)
10.5	(-0.05, 0.615)	(-0.37, 6.24)	4.74	1.22	(0.03, -0.99)	(-0.01, -0.61)	(-0.37, -3.43)
10.9	(-0.05, 0.580)	(-0.33, 5.79)	4.74	1.15	(0.03, -0.99)	(-0.01, -0.57)	(-0.33, -3.31)
11.3	(-0.04, 0.548)	(-0.29, 5.40)	4.74	1.09	(0.03, -0.99)	(-0.01, -0.54)	(-0.29, -3.20)
11.7	(-0.04, 0.519)	(-0.26, 5.06)	4.74	1.03	(0.03, -0.99)	(-0.01, -0.51)	(-0.26, -3.09)

Tabela 3.2: Raio de eficiência para as soluções localmente eficientes do ramo B do Exemplo 1

Por exemplo, na terceira linha da Tabela 3.1, temos $\tau = 0.07$. Com este valor, obtemos $x^{*T} = (2.77, -1.02)$ com vetor objetivo $h(x^*)^T = (h_1(x^*), h_2(x^*))^T = (29.83, -0.60)$. Esta linha mostra que o método Raio de eficiência 2 encontrou $x'^T = (1.22, -1.02)$ que domina x^* , tal que, $x' = x^* + \lambda(\bar{\theta})d(\bar{\theta})$, onde $\bar{\theta} \approx 3.14$, $\lambda(\bar{\theta}) = 1.56$ e $d(\bar{\theta})^T = (-1, 0)$. Então, o vetor objetivo de x' é $h(x')^T = (4.94, -0.60)$ e x^* é 1.56-eficiente. Em cada um dos ramos A , B e C foram selecionadas 20 soluções para serem testadas. Assim, foram calculados 60 raios de eficiência utilizando o método Raio de eficiência 2. Todos valores estão aproximados na segunda casa decimal.

Observe que os vetores x' e $h(x')$ só aparecem nas Tabelas 3.1 e 3.2. Ou seja, cada solução x^* dos ramos A e B que foi testada não é eficiente, pois existe um outro ponto x' , apresentado na penúltima coluna, que a domina. Outro fato importante a ser observado, é que o valor $\bar{\theta}$ encontrado é predominante em cada tabela. Na Tabela 3.1, temos aproximadamente $\bar{\theta} = \pi$ e na Tabela 3.2 temos aproximadamente $\bar{\theta} = \frac{3\pi}{2}$, para todas as soluções testadas. Se observarmos a Figura 1.1, apresentada na Seção 1.4, página 16, podemos concluir que as direções $d(\bar{\theta})$, geradas por esses valores $\bar{\theta}$, podem ser ilustradas na figura por vetores,

ramo C , $\frac{1}{4} < \tau < 4$							
τ	x^{*T}	$h(x^*)^T$	$\bar{\theta}$	$\lambda(\bar{\theta})$	$d(\bar{\theta})^T$	x'^T	$h(x')^T$
0.30	(-10.00, -1.081)	(398.83, -143.97)	-	∞	-	-	-
0.49	(-2.08, -1.140)	(16.06, -16.60)	-	∞	-	-	-
0.68	(-1.16, -1.205)	(3.96, -9.83)	-	∞	-	-	-
0.87	(-0.81, -1.278)	(0.97, -7.57)	-	∞	-	-	-
1.06	(-0.62, -1.360)	(-0.33, -6.33)	-	∞	-	-	-
1.25	(-0.50, -1.454)	(-1.12, -5.42)	-	∞	-	-	-
1.44	(-0.42, -1.562)	(-1.73, -4.59)	-	∞	-	-	-
1.63	(-0.36, -1.688)	(-2.32, -3.69)	-	∞	-	-	-
1.82	(-0.32, -1.835)	(-2.96, -2.59)	-	∞	-	-	-
2.01	(-0.28, -2.010)	(-3.72, -1.14)	-	∞	-	-	-
2.20	(-0.26, -2.222)	(-4.67, 0.88)	-	∞	-	-	-
2.39	(-0.23, -2.484)	(-5.95, 3.82)	-	∞	-	-	-
2.58	(-0.21, -2.817)	(-7.75, 8.30)	-	∞	-	-	-
2.77	(-0.20, -3.252)	(-10.42, 15.45)	-	∞	-	-	-
2.96	(-0.18, -3.846)	(-14.66, 27.63)	-	∞	-	-	-
3.15	(-0.17, -4.706)	(-22.03, 50.21)	-	∞	-	-	-
3.34	(-0.16, -6.061)	(-36.63, 97.76)	-	∞	-	-	-
3.53	(-0.15, -8.511)	(-72.34, 221.01)	-	∞	-	-	-
3.72	(-0.14, -14.286)	(-203.99, 701.44)	-	∞	-	-	-
3.91	(-0.14, -44.444)	(-1975.23, 7545.11)	-	∞	-	-	-

Tabela 3.3: Raio de eficiência para as soluções localmente eficientes do ramo C do Exemplo 1

cada um deles, partindo da respectiva solução x^* nos ramos A e B na direção do ramo C . Portanto, as soluções do ramo C , ou outros pontos próximos delas, dominam as soluções dos ramos A e B .

A Tabela 3.3 fornece $\lambda(\bar{\theta}) = \infty$ para todas as 20 soluções testadas e pertencentes ao ramo C , ou seja, todas essas soluções x^* são eficientes. Apesar de não testarmos todas as soluções pertencentes aos ramos A , B e C deste exemplo, temos mais segurança em afirmar que realmente apenas as soluções do ramo C são eficientes. No Capítulo 5, isso será comprovado através de um teorema.

3.7 Conclusão

Apresentamos como contribuição neste capítulo uma forma alternativa de obter condições de otimalidade em programação multiobjetivo. Utilizando o conceito de raio de eficiência, obtemos vários resultados para o problema particular (PMFQ). Nossa estratégia tem um aspecto computacional e, por isso, propomos alguns métodos computacionais para a resolução de

problemas fracionais quadráticos com objetivos múltiplos. Outro aspecto importante é que não utilizamos hipóteses adicionais sobre as funções objetivo, como alguns tipos de convexidade generalizadas, que é muito comum nesta área de pesquisa. Encerramos o capítulo com algumas propostas de métodos computacionais que objetivam calcular o raio de eficiência de uma solução localmente eficiente e permite obter outras conclusões. Por exemplo, medir duas vizinhanças distintas desta solução, que permite diminuir o espaço de busca por outros pontos que a dominem.

Capítulo 4

Caracterização de Soluções Localmente Eficientes

Neste capítulo aproveitamos algumas propriedades particulares do problema (PMFQ) para propor outra contribuição deste trabalho, a caracterização das suas soluções localmente eficientes. Tema importante para dar continuidade às propostas sugeridas no Capítulo 3, onde apresentamos algumas condições de otimalidade via raio de eficiência e desenvolvemos alguns métodos computacionais que, além de medir o raio, determinam um subconjunto de interesse associado às vizinhanças de uma solução localmente eficiente e permite constatar a eficiência global desta solução ou encontrar um outro ponto viável que a domina em tal subconjunto. Como a hipótese principal na abordagem apresentada no Capítulo 3 era que o ponto estudado fosse localmente eficiente, uma caracterização adequada desta solução permite a construção de métodos computacionais de busca. Vamos apresentar agora novos resultados teóricos e propor um método de busca por soluções do problema (PMFQ).

4.1 Introdução

Vamos estudar sob que condições podemos caracterizar as soluções localmente eficientes do problema (PMFQ'). O Teorema 3.1 apresenta a relação existente entre as soluções dos problemas associados (PMFQ') e $(PMFQ')_{x^*}$, para $x^* \in Leff(PMFQ')$. Portanto, se caracterizarmos as soluções locais do problema $(PMFQ')_{x^*}$ estaremos caracterizando as soluções locais do problema (PMFQ').

Para os resultados que seguem, dado $x^* \in S$, usaremos para cada $i \in I$ as identidades

$$\begin{aligned}\nabla p_i(x^*) &= \nabla f_i(x^*) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \nabla g_i(x^*), \\ \frac{1}{2} \nabla^2 p_i(x^*) &= \nabla^2 f_i(x^*) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \nabla^2 g_i(x^*),\end{aligned}$$

onde $p_i(x) = f_i(x) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} g_i(x)$. Podemos constatar que se existe um vetor $\lambda \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, tal que, $\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} = 0$, então existe um vetor $\tau \geq 0$, $\tau \in \mathbb{R}^m$, tal que, $\sum_{i=1}^m \tau_i \nabla p_i(x^*) = 0$. Ou melhor,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} = 0 \iff \sum_{i=1}^m \tau_i \nabla p_i(x^*) = 0.$$

De fato, seja $\tau_i = \frac{\lambda_i}{g_i(x^*)} \geq 0$, $i \in I$, então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} &= \sum_{i=1}^m \tau_i g_i(x^*) \left[\frac{\nabla f_i(x^*) g_i(x^*) - \nabla g_i(x^*) f_i(x^*)}{[g_i(x^*)]^2} \right] \\ &= \sum_{i=1}^m \tau_i \left[\nabla f_i(x^*) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \nabla g_i(x^*) \right] \\ &= \sum_{i=1}^m \tau_i \nabla p_i(x^*).\end{aligned}$$

4.2 Caracterização de soluções localmente eficientes

Usaremos a notação abaixo para o próximo resultado.

$$\begin{aligned}E(x^*) &= \{d \in \partial B(0, 1) \mid \max_{i \in I} \{\nabla p_i(x^*)^T d\} = 0\}, \\ I(d) &= \{i \in I \mid \nabla p_i(x^*)^T d = 0\}.\end{aligned}$$

Teorema 4.1 *Considere o problema (PMFQ'). Então $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$ se e somente se existe $\tau \geq 0$, $\tau \in \mathbb{R}^m$, tais que,*

$$\sum_{i=1}^m \tau_i \nabla p_i(x^*) = 0 \tag{4.1}$$

e $\forall d \in E(x^*)$, obtemos $d^T \nabla^2 p_j(x^*) d > 0$ para algum $j \in I(d)$, ou $\nabla p_i(x^*)^T d = d^T \nabla^2 p_i(x^*) d = 0$, $\forall i \in I$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Pelo Teorema de Alternativa de Gordan, apresentado na Seção 1.2, a condição exigida pela igualdade (4.1) implica que o sistema

$$\nabla p_i(x^*)^T d < 0, \quad \forall i \in I,$$

não tem solução para uma direção arbitrária $d \in \mathbb{R}^n$. Ou seja, não pode haver decréscimo de todas as funções p_i , numa vizinhança de x^* , simultaneamente. Portanto, dado uma direção unitária d , se existe algum índice $i \in I$, tal que, $\nabla p_i(x^*)^T d < 0$, deve existir ao menos um índice $j \neq i$, tal que, $\nabla p_j(x^*)^T d \geq 0$. Neste caso, se $\nabla p_j(x^*)^T d > 0$ para algum $j \in I$, então a função p_j cresce na direção d em alguma vizinhança de x^* . Se $\nabla p_j(x^*)^T d = 0$, obtemos $I(d) \neq \emptyset$, ou seja, $j \in I(d)$ e por hipótese $d^T \nabla^2 p_k(x^*) d > 0$ para algum $k \in I(d)$. Se $j = k$, a função p_j cresce na direção d em alguma vizinhança de x^* . Por outro lado, se $j \neq k$, existe uma função p_k que cresce na direção d em alguma vizinhança de x^* . Quando $\nabla p_i(x^*)^T d = 0$, $\forall i \in I$, então por hipótese $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d = 0$, $\forall i \in I$. Em qualquer um dos eventos anteriores, existe uma função objetivo que cresce na direção unitária d , ou nenhuma função decresce nesta direção, em uma vizinhança de x^* . Portanto $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$.

($\Rightarrow$) Suponha que $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$. Neste caso, se a condição exigida pela igualdade (4.1) não se verifica, então podemos encontrar uma direção d , tal que, $\nabla p_i(x^*)^T d < 0$, $\forall i \in I$. O que contradiz $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$. Por outro lado, se a igualdade (4.1) se verifica, mas o restante das hipóteses não são satisfeitas, então existe $d \in E(x^*)$, tal que, $\forall i \in I(d)$, $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \leq 0$, e ainda, não pode ocorrer $\nabla p_i(x^*)^T d = d^T \nabla^2 p_i(x^*) d = 0$, $\forall i \in I$. Pela definição do conjunto $E(x^*)$, para todo $j \notin I(d)$, $\nabla p_j(x^*)^T d < 0$. Temos assim, $\nabla p_i(x^*)^T d = 0$ e $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \leq 0$, $\forall i \in I(d)$ e $\nabla p_j(x^*)^T d < 0$, $\forall j \notin I(d)$. O que contradiz $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$, pois dada uma direção unitária d , se $j \notin I(d)$ a função p_j decresceria na direção d em alguma vizinhança de x^* e, se $i \in I(d)$ e $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \leq 0$, as funções p_i não cresceriam na mesma direção e vizinhança de x^* . E mesmo que ocorra, $I(d) \equiv I$, como não pode ocorrer $\nabla p_i(x^*)^T d = d^T \nabla^2 p_i(x^*) d = 0$, $\forall i \in I(d)$, existiria um índice $k \in I(d)$, tal que, $d^T \nabla^2 p_k(x^*) d < 0$, e a função p_k decresceria na direção d em alguma vizinhança de x^* , e as demais funções não cresceriam na mesma direção e vizinhança de x^* . ■

Observe que escolhemos de forma adequada o conjunto $E(x^*)$ no Teorema 4.1. Isto facilita a sua demonstração. Porém, se $d \notin E(x^*)$, implica que existe um índice $j \in I$, tal que, $\nabla p_j(x^*)^T d > 0$, e isso não altera a validade do teorema. Na sequência, apresentamos duas condições suficientes para um ponto x^* pertencer ao conjunto $\text{Leff}(PMFQ')$. Ambas seguem diretamente do Teorema 4.1, porém a segunda, tem uma particularidade útil que será usada em um método computacional apresentado posteriormente.

Corolário 4.1 *Considere o problema (PMFQ'). Então $x^* \in \text{Leff}(\text{PMFQ}')$ se existe $\tau \geq 0$, $\tau \in \mathbb{R}^m$, tal que,*

$$\sum_{i=1}^m \tau_i \nabla p_i(x^*) = 0 \quad (4.2)$$

e $\forall d \in \partial B(0, 1)$, tal que $I(d) \neq \emptyset$, obtemos $d^T \nabla^2 p_k(x^) d > 0$, para algum $k \in I(d)$.*

Demonstração: Por (4.2), o Teorema de Alternativa de Gordan garante que o sistema

$$\nabla p_i(x^*)^T d < 0, \quad \forall i \in I,$$

não tem solução para uma direção arbitrária $d \in \mathbb{R}^n$. Portanto, dado uma direção unitária d , se existe algum índice $i \in I$, tal que, $\nabla p_i(x^*)^T d < 0$, deve existir ao menos um índice $j \neq i$, tal que, $\nabla p_j(x^*)^T d \geq 0$. Neste caso, se $\nabla p_j(x^*)^T d > 0$ para algum $j \in I$, então a função p_j cresce na direção d em alguma vizinhança de x^* . Se $\nabla p_j(x^*)^T d = 0$, obtemos $I(d) \neq \emptyset$, ou seja, $j \in I(d)$ e por hipótese, existe um índice $k \in I(d)$, tal que, $d^T \nabla^2 p_k(x^*) d > 0$. Se $j = k$, a função p_j cresce na direção d em alguma vizinhança de x^* . Por outro lado, se $j \neq k$, existe uma função p_k que cresce na direção d em alguma vizinhança de x^* . Então, dada uma direção unitária d , sempre existe uma função objetivo que cresce em alguma vizinhança de x^* nesta direção. Portanto $x^* \in \text{Leff}(\text{PMFQ}')$. ■

Corolário 4.2 *Considere o problema (PMFQ'). Então $x^* \in \text{Leff}(\text{PMFQ}')$ se existe $\tau \geq 0$, $\tau \in \mathbb{R}^m$, tal que,*

$$\sum_{i=1}^m \tau_i \nabla p_i(x^*) = 0 \quad (4.3)$$

e $G(d) > 0$ em $R(x^)$, onde*

$$G(d) = \max_{\{i \mid \tau_i > 0\}} \{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d\},$$

$$R(x^*) = \{d \in \partial B(0, 1) \mid \nabla p_i(x^*)^T d = 0, \quad \forall i \text{ com } \tau_i > 0\}.$$

Demonstração: Dada uma direção unitária d , se $\nabla p_i(x^*)^T d > 0$ para algum $i \in I$, então a função p_i cresce na direção d em alguma vizinhança de x^* . Se $\nabla p_i(x^*)^T d < 0$ para algum $i \in I$, tal que, $\tau_i > 0$, então pela condição (4.3) e pelo Teorema de Alternativa de Gordan, deve existir um índice $j \neq i$, tal que, $\nabla p_j(x^*)^T d > 0$. Assim, existe uma função p_j que cresce na direção d em alguma vizinhança de x^* . Se $\nabla p_i(x^*)^T d = 0$ para todo $i \in I$, tal que, $\tau_i > 0$, então $d \in R(x^*)$ e a hipótese do corolário, $G(d) > 0$, assegura que existe um índice $k \in I$ com $\tau_k > 0$, tal que, $\nabla p_k(x^*)^T d = 0$ e $G(d) = d^T \nabla^2 p_k(x^*) d > 0$. Portanto, existe uma

função p_k que cresce na direção d em alguma vizinhança de x^* . Mesmo quando, para algum índice $j \in I$, ocorre $\nabla p_j(x^*)^T d = 0$, com $\tau_j = 0$, como $\tau \geq 0$, sempre existirá um outro índice $i \in I$, com $\tau_i > 0$, e o resultado segue dos itens anteriores. Então, dada uma direção unitária d , sempre existe uma função objetivo que cresce em alguma vizinhança de x^* nesta direção. Portanto $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$. ■

Para tentar resumir os resultados anteriores, temos que observar que a existência de um vetor $\tau \geq 0$, tal que, $\sum_{i=1}^m \tau_i \nabla p_i(x^*) = 0$ e o Teorema de Alternativa de Gordan garantem a caracterização na maioria das direções. O problema ocorre nas direções d , tais que, $\nabla p_i(x^*)^T d = 0$ para algum $i \in I$. Neste caso, hipóteses adicionais devem ser incluídas, por exemplo, garantir que $d^T \nabla^2 p_j(x^*) d > 0$ sempre que $\nabla p_j(x^*)^T d = 0$ para algum $j \in I$.

4.3 Métodos computacionais

A caracterização das soluções localmente eficientes obtida pelo Teorema 4.1 não é fácil de ser aplicada. Apresentamos nesta seção dois métodos computacionais de teste, que verificam se um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ pertence ao conjunto $\text{Leff}(PMFQ')$. Um deles, utiliza a condição suficiente do Corolário 4.2 que é um pouco mais simples de ser obtida. Propomos ainda um terceiro método, no caso um método de busca, que aproveita a relação existente entre a teoria apresentada neste capítulo e a teoria do Capítulo 3, para encontrar soluções localmente eficientes e outras eficientes do problema (PMFQ').

A estratégia no primeiro método, que vamos chamar de *Teste de eficiência local 1*, é verificar iterativamente se ocorre decréscimo de todas as funções objetivo simultaneamente em uma vizinhança de x^* . Se isto ocorrer, estaremos comprovando que x^* não pode ser localmente eficiente. Portanto, temos um método de teste, que inicia com um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ e, no Passo 1, verifica e armazena recursivamente em um laço no conjunto D^k , para cada iterando k , todas as direções unitárias d satisfazendo $\nabla p_k(x^*)^T d \leq 0, \nabla p_{k-1}(x^*)^T d \leq 0, \dots, \nabla p_1(x^*)^T d \leq 0$. Observe que as direções unitárias d , tais que, $\nabla p_k(x^*)^T d > 0, k \in I$, são todas aquelas que pertencem ao complemento de D^k . Portanto, como critério de parada no Passo 1, se existe $k \in I$, tal que, $D^k \equiv \emptyset$, significa que $\forall d \in \partial B(0, 1)$ existe uma função $p_j, j \in \{1, \dots, k\}$ que cresce localmente, ou seja, $\forall d \in \partial B(0, 1), \nabla p_j(x^*)^T d > 0$, para algum $j \in \{1, \dots, k\}$. Neste caso, $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$.

No Passo 2, o método cria para cada $d \in D^m$ o subconjunto de índices $I(d) \subseteq I$, tal que, $\nabla p_j(x^*)^T d = 0, j \in I$. Como critério de parada no Passo 2.1, se existe $d \in D^m$, tal que, $I(d) \equiv \emptyset$, então $x^* \notin \text{Leff}(PMFQ')$, pois neste caso, existe uma direção d , tal que, $\nabla p_j(x^*)^T d < 0, \forall i \in I$. Por outro lado, dada uma direção d , se $I(d) \neq \emptyset, I(d) \subset I$, significa

que para todos os índices $i \in I \setminus I(d)$, temos $\nabla p_i(x^*)^T d < 0$, e para todos os índices $j \in I(d)$, temos $\nabla p_j(x^*)^T d = 0$. Portanto, como critério de parada no Passo 2.2, o método verifica se existe uma direção $d \in D^m$, tal que, $d^T \nabla^2 p_j(x^*) d \leq 0, \forall j \in I(d)$. Se isso se cumpre, então $x^* \notin \text{Leff}(PMFQ')$, pois podemos ter um subconjunto de índices $\hat{I} \subseteq I(d)$, tal que, $d^T \nabla^2 p_j(x^*) d = 0, \forall j \in \hat{I}$, e assim, teremos os conjuntos, $\hat{I} \subseteq I(d) \subset I$, tais que, as funções $p_i, i \in \hat{I}$, não crescem, e todas as outras funções $p_i, i \in I \setminus \hat{I}$, decrescem.

De forma análoga, se $I(d) \equiv I$, significa que para todos os índices $j \in I$, temos $\nabla p_j(x^*)^T d = 0$. Portanto, como critério de parada no Passo 2.3, o método verifica se existe uma direção $d \in D^m$, tal que, $d^T \nabla^2 p_j(x^*) d \leq 0, \forall j \in I(d)$, com no mínimo uma desigualdade estrita. Se isso se cumpre, então $x^* \notin \text{Leff}(PMFQ')$, pois teremos um subconjunto de índices $\hat{I} \subseteq I$, tal que, as funções $p_i, i \in \hat{I}$, não crescem, e todas as outras funções $p_i, i \in I \setminus \hat{I}$, decrescem. Se o método não encerra nos passos anteriores, então ele encerra no Passo 2.4 concluindo que $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$.

Para simplificar a exposição dos dois próximos métodos, vamos supor que $\nabla p_i(x^*) \neq 0, \forall i \in I$.

4.3.1 Teste de eficiência local 1

Sejam $x^* \in \mathbb{R}^n$ e $D^0 := \partial B(0, 1)$.

Passo 1. Repita para $k = 1, \dots, m$.

1. Obtenha $D^k := \{d \in D^{k-1} \mid \nabla p_k(x^*)^T d \leq 0\}$
2. Se $D^k \equiv \emptyset$ pare. Podemos concluir que $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$.

Passo 2. $\forall d \in D^m$, obtenha $I(d) := \{j \in I \mid \nabla p_j(x^*)^T d = 0\}$

1. Se existe $d \in D^m$, tal que, $I(d) \equiv \emptyset$ pare. Podemos concluir que $x^* \notin \text{Leff}(PMFQ')$.
 2. Se existe $d \in D^m$, tal que, $I(d) \subset I$ e $d^T \nabla^2 p_j(x^*) d \leq 0, \forall j \in I(d)$, pare. Podemos concluir que $x^* \notin \text{Leff}(PMFQ')$.
 3. Se existe $d \in D^m$, tal que, $I(d) \equiv I$ e $d^T \nabla^2 p_j(x^*) d \leq 0, \forall j \in I(d)$, com no mínimo uma desigualdade estrita, pare. Podemos concluir que $x^* \notin \text{Leff}(PMFQ')$.
 4. Caso contrário, $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$.
-

As operações que devem ser realizadas no método Teste de eficiência local 1 não são triviais. No primeiro passo, deve-se resolver para cada $k \in I$, uma desigualdade linear $\nabla p_k(x^*)^T d \leq 0$ sujeito a $k-1$ desigualdades lineares $\nabla p_j(x^*)^T d \leq 0$, $j \in \{1, \dots, k-1\}$, com variáveis d no $\mathbb{R}^n$. Ou seja, se o método não encerra neste passo, deve-se resolver m sistemas lineares, cujo número de equações de cada sistema cresce de 1 a m , sendo que cada um deles contém n variáveis. O Passo 2 é o mais complexo, pois é impraticável obter os conjuntos de índices $I(d)$ para toda direção $d \in D^m$. Se isso for feito, por algum método de aproximação, deve-se ainda resolver, nos Passos 2.2 e 2.3, para cada d , um sistema com $|I(d)|$ igualdades lineares e $|I(d)|$ desigualdades quadráticas.

É possível, caso o método encerre em algum dos Passos 2.1–2.3, com $x^* \notin \text{Leff}(PMFQ')$, obter uma direção $\bar{d}$ para ser usada por um algoritmo de busca unidimensional para encontrar um outro ponto x' que domina x^* .

Em relação a uma implementação computacional do método Teste de eficiência local 1, as dificuldades estão em resolver vários sistemas de equações consecutivamente, alguns mais simples tendo desigualdades lineares e outros mais difíceis tendo desigualdades quadráticas. O uso de métodos aproximados para resolver cada um desses sistemas pode propagar erros de arredondamento para os demais. Outra dificuldade é considerar todas as direções $d \in D^m$ para obter os conjuntos de índices $I(d)$. Neste caso, outros métodos devem ser usados para reduzir a busca no conjunto D^m .

A estratégia usada no segundo método, que vamos chamar de *Teste de eficiência local 2*, é análoga ao anterior, ou seja, verificar iterativamente se ocorre decréscimo de todas as funções objetivo simultaneamente em uma vizinhança do ponto x^* . Porém, este novo método considera o resultado do Corolário 4.2, onde uma informação importante a ser analisada é o que ocorre nas direções unitárias d , tais que, $\nabla p_i(x^*)^T d = 0$, com $\tau_i > 0$, $i \in I$.

O método inicia com um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ a ser testado. No Passo 1, ele deve encontrar um vetor $\tau \geq 0$, tal que, $\sum_{i=1}^m \tau_i \nabla p_i(x^*) = 0$. Esta é uma condição necessária de primeira ordem, então se tal vetor não existe, o método encerra no Passo 2 concluindo que $x^* \notin \text{Leff}(PMFQ')$. Caso contrário, deve-se encontrar o subconjunto de índices $i \in I_p \subseteq I$, tais que, τ_i são positivos. Observe, de acordo com o Corolário 4.2, que um ponto x^* é localmente eficiente se $G(d) > 0$ em $R(x^*)$. Então, no Passo 3, o método encontra os conjuntos $R_j(x^*) = \{d \in \partial B(0, 1) \mid \nabla p_j(x^*)^T d = 0\}$, para cada $j \in I_p$, ou seja, $R(x^*) = \bigcap_{j \in I_p} R_j(x^*)$ e verifica se o sistema misto de equações $d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \leq 0$, $i \in I$, com no mínimo uma desigualdade estrita, $\nabla p_k(x^*)^T d \leq 0$, $k \in I \setminus \{j\}$ e $\nabla p_j(x^*)^T d = 0$, para cada $j \in I_p$, com variáveis no $\mathbb{R}^n$, tem solução d . Se algum desses sistemas não tem solução, o método encerra no Passo 4 concluindo que $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$. Porque, neste caso, não existirá uma direção unitária com decréscimo local de todas as funções objetivo simultaneamente.

4.3.2 Teste de eficiência local 2

Seja $x^* \in \mathbb{R}^n$.

Passo 1. Encontre $\tau \geq 0$, tal que, $\sum_{i=1}^m \tau_i \nabla p_i(x^*) = 0$.

Passo 2. Se não existe $\tau \geq 0$, então $x^* \notin \text{Leff}(PMFQ')$. Caso contrário, defina $I_p = \{j \in I \mid \tau_j > 0\}$.

Passo 3. Verifique se cada sistema de equações

$$\begin{cases} d^T \nabla^2 p_i(x^*) d \leq 0, \quad i \in I, \text{ com no mínimo uma desigualdade estrita,} \\ \nabla p_k(x^*)^T d \leq 0, \quad k \in I \setminus \{j\}, \end{cases} \quad (4.4)$$

tem solução $d \in R_j(x^*)$ para todo $j \in I_p$, onde $R_j(x^*)$ é o conjunto definido por

$$R_j(x^*) = \{d \in \partial B(0, 1) \mid \nabla p_j(x^*)^T d = 0\}. \quad (4.5)$$

Passo 4. Se não existe alguma solução, então $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$.

Este método também não é simples de ser resolvido, no entanto, ele tem um aspecto computacional mais interessante que método Teste de eficiência local 1. Porque os únicos conjuntos de direções que devem ser considerados são aqueles cujos elementos são ortogonais aos gradientes $\nabla p_i(x^*)$, com $i \in I_p$. No primeiro passo, é preciso resolver um sistema de equações com uma igualdade linear e m desigualdades $\tau \geq 0$, onde τ_i , $i \in I$, são as incógnitas. Caso este sistema tenha solução, no Passo 3 é preciso verificar se $|I_p|$ sistemas misto de equações, (4.4) e (4.5), com m desigualdades quadráticas, $m - 1$ desigualdades lineares e uma igualdade linear.

Diferentemente do método anterior, neste caso, é preciso resolver $|I_p|$ sistemas misto de equações complicadas, porém independentes. Da mesma forma, caso o método encontre uma solução $\bar{d}$ que satisfaz um dos sistemas de equações no Passo 3, com $x^* \notin \text{Leff}(PMFQ')$, é possível obter um outro ponto x' que domina x^* efetuando uma busca unidimensional nesta direção.

Em relação a uma implementação computacional do método Teste de eficiência local 2, as dificuldades estão em encontrar $\tau \geq 0$ que satisfaça (4.3), determinar os conjuntos $R_j(x^*)$, $j \in I_p$, e resolver os sistemas misto de equações no Passo 3.

4.4 Método de busca por soluções eficientes

Estudamos neste capítulo algumas condições que garantem que um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ pertence ao conjunto $Leff(PMFQ')$, enquanto que no Capítulo 3 vimos como calcular o raio de eficiência de x^* , se $x^* \in Leff(PMFQ')$. Podemos agora, fazer uma ligação entre a teoria e os métodos computacionais apresentados nesses dois capítulos.

O Corolário 3.6, apresentado na Seção 3.4, e o método Raio de eficiência 2, apresentado na Seção 3.6.1 são usados juntamente com o Corolário 4.2 e o método Teste de eficiência local 2 para propormos um método computacional de busca, que vamos chamar de *Método de busca local*. O objetivo é encontrar soluções localmente eficientes e soluções eficientes utilizando as ferramentas apresentadas até o momento.

Para simplificar a exposição do método, diremos que um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ satisfaz a *Propriedade R-2*, se ele cumpre todos os passos do método Raio de eficiência 2. Observe que se x^* satisfaz a Propriedade R-2 implica que $x^* \in Leff(PMFQ')$, x^* satisfaz as hipóteses do Corolário 3.6 e ainda existe $x' \in \bar{B}(x^*, P) \setminus B(x^*, \beta)$, tal que, x' domina x^* , onde

$$\beta = \inf_{d \in L} \left\{ \max_{i \in X_2} \left\{ \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d} \right\} \right\},$$

$$P = \sup_{d \in L} \left\{ \min_{i \in X_1} \left\{ \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T d}{d^T \nabla^2 p_i(x^*) d} \right\} \right\},$$

X_1 , X_2 e L são definidos na Seção 3.2. Por outro lado, diremos que x^* não satisfaz a Propriedade R-2, se algum dos passos do método Raio de eficiência 2 falha. Neste caso, podemos concluir que $\bar{B}(x^*, P) \setminus B(x^*, \beta) = \emptyset$ e $x^* \in Eff(PMFQ')$, pois estas são as conclusões nos critérios de parada do método Raio de eficiência 2.

Analogamente, diremos que $x^* \in \mathbb{R}^n$ satisfaz a *Propriedade T-2*, se ele cumpre todos os passos do método Teste de eficiência local 2. Neste caso, x^* também satisfaz as hipóteses do Corolário 4.2, ou seja, $x^* \in Leff(PMFQ')$. Por outro lado, diremos que x^* não satisfaz a Propriedade T-2, se algum dos passos do método Teste de eficiência local 2 falha. Neste caso, podem ocorrer duas situações. Na primeira, se a falha ocorre no Passo 4 do método Teste de eficiência local 2, significa que é possível encontrar uma direção $\bar{d}$, que é uma solução de um sistema misto de equações (4.4) e (4.5). Ou seja, $x^* \notin Leff(PMFQ')$ e podemos obter um outro ponto x' que domina x^* efetuando uma busca unidimensional nesta direção. Na segunda situação, se a falha ocorre no Passo 2 do método Teste de eficiência local 2, significa que não existe o vetor $\tau \geq 0$ satisfazendo (4.3) do Corolário 4.2. Neste caso, podemos encontrar uma direção $\bar{d}$ usando, por exemplo, o método Teste de eficiência local 1, para obter um outro ponto x' que domina x^* efetuando uma busca unidimensional nesta direção.

O Método de busca local inicia com um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Entra em um laço definindo

x^* como ponto atual e, em seguida, verifica se este ponto satisfaz a Propriedade T-2. Se não satisfaz, então o método encontra x' que domina x^* fazendo uma busca unidimensional, atualiza o ponto $x^* := x'$ e reinicia o processo. Se o ponto atual x^* satisfaz T-2, implica que $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')$. Neste caso, o método armazena o ponto atual x^* em um conjunto de soluções locais e muda de passo. No novo passo, o método verifica se x^* satisfaz a Propriedade R-2. Se agora, o ponto atual x^* satisfaz R-2, o método encontra x' que domina x^* fazendo uma busca no conjunto $\bar{B}(x^*, P) \setminus B(x^*, \beta)$, atualiza o ponto $x^* := x'$ e reinicia o processo. Por outro lado, se o ponto atual x^* não satisfaz R-2, então o método encerra concluindo que $x^* \in \text{Eff}(PMFQ')$. Outra maneira de encerrar o processo é quando o número de atualizações do ponto x^* ultrapassa um limite definido previamente.

4.4.1 Método de busca local

Sejam $x^* \in \mathbb{R}^n$, $\bar{M} \in \mathbb{R}$ e $LE = \emptyset$. Faça $x^0 := x^*$ e $k := 0$.

Passo 1. Verifique se x^k satisfaz o Propriedade T-2.

1. Se não satisfaz T-2, encontre uma direção $\bar{d}$ e $\bar{\lambda} > 0$, tal que, $x' = x^k + \bar{\lambda}\bar{d}$ domina x^k . Faça $k := k + 1$, $x^k := x'$ e retorne ao Passo 1 ou vá para o Passo 3 se $k > \bar{M}$.
2. Se satisfaz T-2, então $x^k \in \text{Leff}(PMFQ')$. Faça $LE := LE \cup \{x^k\}$ e vá para o Passo 2.

Passo 2. Verifique se x^k satisfaz o Propriedade R-2.

1. Se satisfaz R-2, encontre $x' \in \bar{B}(x^*, P) \setminus B(x^*, \beta)$, tal que, x' domina x^k . Faça $k := k + 1$, $x^k := x'$ e retorne ao Passo 1 ou vá para o Passo 3 se $k > \bar{M}$.
2. Se não satisfaz R-2, então $x^k \in \text{Eff}(PMFQ')$. Faça $x^* := x^k$ e vá para o Passo 4.

Passo 3. Faça $x^* := x^k$. Conclua que x^* domina os pontos $\{x^{k-1}, x^{k-2}, \dots, x^1, x^0\}$, que x^* é uma aproximação de algum ponto pertencente ao conjunto $\text{Eff}(PMFQ')$ e que $LE \subset \text{Leff}(PMFQ')$.

Passo 4. Conclua que $x^* \in \text{Eff}(PMFQ')$, que x^* domina os pontos $\{x^{k-1}, x^{k-2}, \dots, x^1, x^0\}$ e que $LE \subset \text{Leff}(PMFQ')$.

A complexidade do Método de busca local depende do número de vezes que os Passos 1 e 2 são repetidos. No Passo 1, temos que somar a dificuldade em avaliar se um ponto atual x^* satisfaz a Propriedade T-2, ou seja, deve-se incluir toda a complexidade do método Teste de eficiência local 2. A busca feita no Passo 1.1 não é complicada. Suponha que a direção $\bar{d}$ já foi obtido quando o método Teste de eficiência local 2 falha, ou alternativamente, quando o método Teste de eficiência local 1 falha, então $\bar{\lambda}$ pode ser obtido calculando

$$\bar{\lambda} := \begin{cases} \frac{1}{2} \min_{i \in X_1} \left\{ \frac{-2\nabla p_i(x^*)^T \bar{d}}{\bar{d}^T \nabla^2 p_i(x^*) \bar{d}} \right\}, & \text{se } X_1 \subseteq I \\ \bar{\lambda}_\ell, & \text{se } X_1 = \emptyset, \end{cases}$$

onde $\bar{\lambda}_\ell < \infty$ é definido para limitar $\bar{\lambda}$. Como x^* não satisfaz a Propriedade T-2, implica que $x^* \notin \text{Leff}(PMFQ')$ e que $\nabla p_i(x^*)^T \bar{d} \leq 0, \forall i \in I$. Quando existe $i \in I$, tal que, $\bar{d}^T \nabla^2 p_i(x^*) \bar{d} > 0$, implica que $i \in X_1 \subseteq I$. Então, $\bar{\lambda}$ será o menor valor entre os mínimos das parábolas $r_i(\lambda) = p_i(x^* + \lambda \bar{d})$, $i \in X_1$, onde as parábolas r_i foram definidas na Seção 3.2. O problema ocorre quando $X_1 \equiv \emptyset$. Neste caso, como $x^* \notin \text{Leff}(PMFQ')$, implica que $\nabla p_i(x^*)^T \bar{d} \leq 0$ e $\bar{d}^T \nabla^2 p_i(x^*) \bar{d} \leq 0, \forall i \in I$, com no mínimo uma desigualdade estrita, e assim, para todo $\lambda > 0$, $x' = x^* + \lambda \bar{d}$ domina x^* . Este último caso é raro de ocorrer porque normalmente as funções objetivo são conflitantes, porém, caso ocorra, basta definir $\bar{\lambda} := \bar{\lambda}_\ell$, tal que, $\bar{\lambda}_\ell < \infty$. Mas, por razões óbvias, é importante eliminar a possibilidade de escolher, ao retornar em seguida ao Passo 1 com $x^* := x^* + \bar{\lambda}_\ell \bar{d}$, a direção $\bar{d}$.

No Passo 2, temos que somar a dificuldade em avaliar se um ponto atual x^* satisfaz a Propriedade R-2, ou seja, deve-se incluir toda a complexidade do método Raio de eficiência 2. A busca feita no Passo 2.1 pode ser muito complicada, pois depende da forma que a busca é feita no conjunto $\bar{B}(x^*, P) \setminus B(x^*, \beta)$. Porém, observe que uma maneira simples, é tomar $x' = x^* + \beta d$, tal que, d satisfaz a definição de β , ou tomar $x' = x^* + \lambda^d d$, tal que, d satisfaz $\lambda_2^d \leq \lambda_1^d$, conforme definição de λ_1^d e λ_2^d apresentada na Seção 3.2.

A constante $\bar{M}$ é um valor escolhido para limitar o número de iterações do método, pois não é possível provar convergência. Porém, observe que se o método encerra no Passo 4 estando no iterando k , implica que o ponto final $x^k \in \text{Eff}(PMFQ')$. Apesar de não podermos garantir que x^k seja eficiente quando o método encerra no Passo 3, em ambos critérios de parada geramos uma sequência de pontos $\{x^{k-1}, x^{k-2}, \dots, x^1, x^0\}$, que satisfaz

$$\frac{f(x^k)}{g(x^k)} \leq \frac{f(x^{k-1})}{g(x^{k-1})} \leq \frac{f(x^{k-2})}{g(x^{k-2})} \leq \dots \leq \frac{f(x^1)}{g(x^1)} \leq \frac{f(x^0)}{g(x^0)}. \quad (4.6)$$

Devido a (4.6), podemos afirmar que se k é suficientemente grande no critério de parada do Passo 3, então x^k é uma boa aproximação de algum ponto no conjunto $\text{Eff}(PMFQ')$, pois x^k domina todos os pontos da sequência $\{x^{k-1}, x^{k-2}, \dots, x^1, x^0\}$. O método ainda armazena no

conjunto LE todas as soluções localmente eficientes que são encontradas durante o processo. Portanto, o Método de busca local retorna um subconjunto $LE \subset Leff(PMFQ')$, um ponto $x^* := x^k$ que é uma aproximação de algum ponto em $Eff(PMFQ')$ quando ele encerra no Passo 3, ou com $x^* := x^k \in Eff(PMFQ')$ quando ele encerra no Passo 4.

Uma implementação computacional do Método de busca local fica dependente de implementações adequadas dos métodos Teste de eficiência local 2 e Raio de eficiência 2.

4.5 Conclusão

Apresentamos como contribuição neste capítulo uma caracterização para soluções localmente eficientes do problema $(PMFQ')$. Esta caracterização permitiu propor dois métodos computacionais que testam se um ponto é localmente eficiente. Fazendo uma ligação entre os resultados deste capítulo e do Capítulo 3, propomos também um método computacional de busca. Este método é capaz de identificar soluções localmente eficientes durante seu processo de busca e, dependendo do critério de parada, encerra encontrando uma solução eficiente.

Capítulo 5

Condições de Otimalidade Global

Neste capítulo apresentamos algumas condições suficientes de otimalidade global para as soluções do problema (PMFQ). A abordagem agora é distinta do tema raio de eficiência apresentado anteriormente. Vamos mostrar que se impormos algumas hipóteses sob as Hessianas das funções f_i e g_i , $i \in I$, podemos garantir que um determinado ponto viável é eficiente. Uma diferença com o tema anterior é que não assumimos inicialmente que este ponto seja localmente eficiente. O mais comum ao se obter condições suficientes de otimalidade global para os problemas (PM) é supor que as funções atendem a algum tipo de convexidade generalizada. A contribuição deste capítulo está na maneira em que abordamos o tema otimalidade global, analisamos quais das propriedades apresentadas pelo nosso problema particular (PMFQ) se assemelham com alguns dos tipos de convexidade generalizada e vemos que com uma hipótese mais fraca, mesmo sem atender a esses tipos de convexidade, podemos obter as condições suficientes otimalidade. Esta abordagem também permite propor métodos computacionais de teste e de busca por soluções eficientes do problema (PMFQ).

5.1 Condições suficientes

Maeda em [37] utilizou a qualificação de restrições (QRGG), apresentada na Seção 1.3, para obter uma condição necessária de otimalidade do tipo KKT com uma particularidade que será muito útil no restante deste trabalho: pode-se garantir a existência de multiplicadores associados as funções objetivo, na condição necessária de primeira ordem, todos estritamente positivos.

Para o próximo teorema, que dá uma condição suficiente de otimalidade para um ponto viável do problema (PMFQ), precisamos de algumas hipóteses e definições. Conforme definição de função vetorial v -invexa, apresentada na Seção 1.5, vamos supor inicialmente que

o vetor de funções restrições h do problema (PMFQ) é v -invexo em todo conjunto viável com respeito a $\eta : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\eta(x, x^*) = (x - x^*)$, e as funções $\alpha_j : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $j \in K$, são quaisquer. Também, dado $x^* \in S$, para cada $i \in I$, definimos as funções escalares $u_i : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ e $s_i : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo.

$$\begin{aligned} u_i(x, x^*) &= \frac{g_i(x^*)}{g_i(x)}, \\ s_i(x, x^*) &= \frac{1}{g_i(x)} \left\{ (x - x^*)^T \left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right] (x - x^*) \right\}. \end{aligned}$$

Teorema 5.1 *Seja x^* um ponto viável do problema (PMFQ). Suponha que o vetor h é v -invexo com respeito a $\eta(x, x^*) = (x - x^*)$, $x \in S$ e $\alpha_j : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $j \in K$, e que existem vetores $\tau \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$, tais que,*

$$\sum_{i=1}^m \tau_i \nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x^*) = 0, \quad (5.1)$$

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(x^*) = 0, \quad (5.2)$$

$$\tau > 0, \quad \lambda \geq 0. \quad (5.3)$$

Se obtemos, que para qualquer $x \in S$,

$$\sum_{i=1}^m \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)} \geq 0, \quad (5.4)$$

então x^* é uma solução eficiente para o problema (PMFQ).

Demonstração: Dado $x \in S$, com algumas operações, obtemos para cada $i \in I$,

$$\begin{aligned} f_i(x) - f_i(x^*) &= x^T A_i x + a_i^T x - x^{*T} A_i x^* - a_i^T x^* \\ &= x^T A_i x - x^T A_i x^* + x^T A_i x^* - x^{*T} A_i x^* + a_i^T (x - x^*) \\ &= x^T A_i (x - x^*) + x^{*T} A_i (x - x^*) + a_i^T (x - x^*) \\ &= (A_i x + A_i x^* + a_i)^T (x - x^*) \\ &= (A_i (x - x^*) + 2A_i x^* + a_i)^T (x - x^*) \\ &= (x - x^*)^T A_i (x - x^*) + (2A_i x^* + a_i)^T (x - x^*) \\ &= (x - x^*)^T A_i (x - x^*) + \nabla f_i(x^*)^T (x - x^*), \end{aligned}$$

$$g_i(x) - g_i(x^*) = (x - x^*)^T B_i (x - x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*),$$

$$\begin{aligned}
\frac{f_i(x)}{g_i(x)} - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} &= \frac{f_i(x)g_i(x^*) - g_i(x)f_i(x^*)}{g_i(x)g_i(x^*)} \\
&= \frac{f_i(x)g_i(x^*) - f_i(x^*)g_i(x^*) + f_i(x^*)g_i(x) - g_i(x)f_i(x^*)}{g_i(x)g_i(x^*)} \\
&= \frac{g_i(x^*)\{f_i(x) - f_i(x^*)\} - f_i(x^*)\{g_i(x) - g_i(x^*)\}}{g_i(x)g_i(x^*)} \\
&= \frac{1}{g_i(x)} \left\{ (x - x^*)^T A_i(x - x^*) + \nabla f_i(x^*)^T (x - x^*) \right\} + \\
&\quad - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x)g_i(x^*)} \left\{ (x - x^*)^T B_i(x - x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*) \right\} \\
&= \frac{1}{g_i(x)} \left\{ (x - x^*)^T A_i(x - x^*) \right\} - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x)g_i(x^*)} \left\{ (x - x^*)^T B_i(x - x^*) \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{g_i(x)} \left\{ \nabla f_i(x^*)^T (x - x^*) \right\} - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x)g_i(x^*)} \left\{ \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*) \right\} \\
&= \frac{1}{g_i(x)} \left\{ (x - x^*)^T \left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right] (x - x^*) \right\} + \\
&\quad + \frac{g_i(x^*)}{g_i(x)} \left\{ \left[\frac{\nabla f_i(x^*)g_i(x^*) - \nabla g_i(x^*)f_i(x^*)}{[g_i(x^*)]^2} \right]^T (x - x^*) \right\} \\
&= \frac{1}{g_i(x)} \left\{ (x - x^*)^T \left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right] (x - x^*) \right\} + \frac{g_i(x^*)}{g_i(x)} \left\{ \left[\nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \right]^T (x - x^*) \right\}.
\end{aligned}$$

Assim, cada função $\frac{f_i}{g_i}$, $i \in I$, satisfaz

$$\frac{f_i(x)}{g_i(x)} - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} = u_i(x, x^*) \left[\nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \right]^T (x - x^*) + s_i(x, x^*), \quad \forall x \in S. \quad (5.5)$$

Suponha que x^* não seja uma solução eficiente para o problema (PMFQ). Então existe outro ponto $x \in S$, tal que,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{f(x^*)}{g(x^*)}. \quad (5.6)$$

Como $u_i(x, x^*) > 0$, $i \in I$, da Equação (5.5), obtemos

$$\frac{1}{u_i(x, x^*)} \left(\frac{f_i(x)}{g_i(x)} - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \right) = \left[\nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \right]^T (x - x^*) + \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)}, \quad i \in I.$$

Pela hipótese (5.6)

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x^*)}{g(x^*)} \leq 0,$$

obtemos m desigualdades

$$\left[\nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \right]^T (x - x^*) + \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)} \leq 0, \quad i \in I,$$

com no mínimo uma desigualdade estrita. Multiplicando as m desigualdades acima pelo seu respectivo $\tau_i > 0$, $i \in I$, e somando todos os produtos, obtemos

$$\sum_{i=1}^m \tau_i \left[\nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \right]^T (x - x^*) + \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)} < 0.$$

Então, segue que

$$\left[\sum_{i=1}^m \tau_i \nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \right]^T (x - x^*) + \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)} < 0. \quad (5.7)$$

Substituindo (5.1) em (5.7), obtemos

$$\left[- \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x^*) \right]^T (x - x^*) + \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)} < 0. \quad (5.8)$$

De (5.4) e (5.8), temos

$$0 \leq \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)} < \left[\sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x^*) \right]^T (x - x^*).$$

Ou seja,

$$\left[\sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x^*) \right]^T (x - x^*) > 0. \quad (5.9)$$

Agora, com relação as restrições, como o vetor de funções h é v -invexo em x^* com respeito a $\eta(x, x^*) = (x - x^*)$, então existem funções $\alpha_j : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $j \in K$, tais que,

$$h_j(x) - h_j(x^*) \geq \alpha_j(x, x^*) \nabla h_j(x^*)^T (x - x^*).$$

Como $\lambda_j \geq 0$ e $\alpha_j(x, x^*) > 0$, $j \in K$, temos

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j \left(\frac{h_j(x) - h_j(x^*)}{\alpha_j(x, x^*)} \right) \geq \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x^*)^T (x - x^*) = \left[\sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x^*) \right]^T (x - x^*).$$

Porém, como x é viável, de (5.2), $\lambda_j \geq 0$ e $\alpha_j(x, x^*) > 0$, $j \in K$, implica que

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j \left(\frac{h_j(x) - h_j(x^*)}{\alpha_j(x, x^*)} \right) \leq 0.$$

Concluimos que

$$\left[\sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(x^*) \right]^T (x - x^*) \leq 0.$$

O que contradiz (5.9). Portanto $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$. ■

5.2 Observações quanto a convexidade

Algumas observações importantes sobre o Teorema 5.1 devem ser feitas. Da igualdade

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^*)}{g_i(x) - g_i(x^*)} = \frac{1}{g_i(x)} \left\{ (x - x^*)^T \left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right] (x - x^*) \right\} + \frac{g_i(x^*)}{g_i(x)} \left\{ \left[\nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \right]^T (x - x^*) \right\},$$

se por hipótese, dado $x^* \in S$, supormos que cada matriz $\left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right]$, $i \in I$, é semidefinida positiva, então

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^*)}{g_i(x) - g_i(x^*)} \geq \frac{g_i(x^*)}{g_i(x)} \left\{ \left[\nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \right]^T (x - x^*) \right\}.$$

Com essa hipótese, de acordo com a definição de funções invexas, apresentada na Seção 1.5, podemos considerar que cada função $\frac{f_i}{g_i}$ é invexa em x^* com respeito a $\eta_i : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\eta_i(x, x^*) = \frac{g_i(x^*)}{g_i(x)}(x - x^*)$, $i \in I$. Algumas condições de otimalidade envolvendo funções invexas podem ser encontradas em [28], [52] e [59]. Ainda, de acordo com a definição de função vetorial v -invexa, podemos considerar que a função vetorial $\frac{f}{g}$ é v -invexa em x^* com respeito a $\eta : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\eta(x, x^*) = (x - x^*)$ e as funções $\alpha_i : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, dadas por $\alpha_i(x, x^*) = \frac{g_i(x^*)}{g_i(x)}$, $i \in I$. Algumas condições de otimalidade para soluções fracamente eficientes em programação multiobjetivo envolvendo funções v -invexas podem ser encontradas em [26].

Sob um outro ponto de vista, ainda considerando a mesma hipótese, da igualdade

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^*)}{g_i(x) - g_i(x^*)} = u_i(x, x^*) \left[\nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \right]^T (x - x^*) + s_i(x, x^*), \quad \forall x \in S,$$

obtemos $s_i(x, x^*) \geq 0$, e podemos considerar outros dois casos. O primeiro, de acordo com a definição de funções ρ -invexas, apresentada na Seção 1.5, se considerarmos $\rho_i = 1$ e

$d_i = \sqrt{s_i} \in \mathbb{R}$, $i \in I$, então cada função $\frac{f_i}{g_i}$ é ρ_i -invexa em x^* com respeito a $\eta_i : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\eta_i(x, x^*) = \frac{g_i(x^*)}{g_i(x)}(x - x^*)$, $i \in I$. Alguns resultados de otimalidade envolvendo funções ρ -invexas podem ser encontrados em [28] e [52].

Vamos dar mais importância para o segundo caso. Devido ao trabalho de Liang et al. [34] e, de acordo com a definição de funções (F, α, ρ, d) -convexa, apresentada na Seção 1.5, podemos considerar que cada função $\frac{f_i}{g_i}$ é $(F, \alpha_i, \rho_i, d_i)$ -convexa em x^* , onde $\alpha_i = u_i$, $\rho_i = 1$, $d_i = \sqrt{s_i}$, $i \in I$ e $F : S \times S \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é o funcional sublinear na terceira variável dado por $F(x, x^*; \cdot) = [\cdot]^T (x - x^*)$. Desta forma, impor que cada matriz $\left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}B_i\right]$, $i \in I$, seja semidefinida positiva em x^* , faz com que o Teorema 5.1 torne-se um caso particular do Teorema 2.1 apresentado por Liang et al. em [35]. Sendo que neste último teorema, as funções $\frac{f_i}{g_i}$ seriam $(F, \alpha_i, \rho_i, d_i)$ -convexas em x^* , com $\alpha_i = u_i$, $\rho_i = 1$, $d_i = \sqrt{s_i}$ e $F\left(x, x^*; \nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}\right) = \left[\nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}\right]^T (x - x^*)$, $i \in I$, e como a função vetorial h é v -invexa, as funções h_j seriam $(F, \bar{\alpha}_j, \bar{\rho}_j, \bar{d}_j)$ -convexas em x^* , com $\bar{\alpha}_j = \alpha_j$, $\bar{\rho}_j = 0$, $\bar{d}_j = 0$ e $F(x, x^*; \nabla h_j(x^*)) = [\nabla h_j(x^*)]^T (x - x^*)$, $j \in K$.

Somente para casos muito particulares, teremos pontos $x^* \in S$ implicando em todas as matrizes $\left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}B_i\right]$, $i \in I$, semidefinidas positiva. Por isso, consideramos forte a hipótese de positividade semidefinida dessas matrizes e tentaremos ao longo deste trabalho optar por uma hipótese mais fraca. Contudo, com esta hipótese o próximo corolário segue imediatamente do Teorema 5.1.

Corolário 5.1 *Seja x^* um ponto viável do problema (PMFQ). Suponha que existam vetores $\tau \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$, tais que, (5.1), (5.2) e (5.3) sejam válidos. Se as matrizes $\left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}B_i\right]$ são semidefinidas positiva para todo $i \in I$, então $x^* \in \text{Eff}(\text{PMFQ})$.*

Demonstração: Pelas hipóteses, Dados $x \in S$ e $i \in I$, obtemos

$$\begin{aligned} (x - x^*)^T \left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}B_i\right] (x - x^*) &\geq 0 \iff \\ \tau_i \frac{1}{g_i(x^*)} \left\{ (x - x^*)^T \left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}B_i\right] (x - x^*) \right\} &\geq 0 \iff \\ \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{g_i(x)}{g_i(x^*)} \frac{1}{g_i(x)} \left\{ (x - x^*)^T \left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}B_i\right] (x - x^*) \right\} &\geq 0 \iff \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)} \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade (5.4) é válida e o resultado segue do Teorema 5.1. ■

5.3 Condições sem hipóteses de convexidade

Com a particularidade de não usarmos hipóteses de convexidade generalizada sobre as funções objetivo, utilizamos o conceito de raio de eficiência no Capítulo 3 como uma abordagem alternativa para obter condições de otimalidade para soluções eficientes do problema (PMFQ). Pretendemos agora, obter novas condições de otimalidade enfraquecendo ao máximo as hipóteses sobre as funções objetivo, ou seja, usar os conceitos mais fracos de convexidade ou evitá-los.

No trabalho [35], Liang et al. ebtêm condições de otimalidade global e resultados de dualidade para problemas fracionais multiobjetivo mais gerais utilizando a hipótese de (F, α, ρ, d) -convexidade sobre as funções objetivo e as funções restrições. A definição de (F, α, ρ, d) -convexidade foi introduzida a primeira vez pelos mesmos autores em [34], com a intenção de unificar todas as outras convexidades generalizadas apresentadas anteriormente. Eles admitem que cada função $f_i, -g_i, i \in I$, satisfazem esta definição, e assim, mostram que $\frac{f_i}{g_i}, i \in I$, também satisfazem.

Em particular, no problema (PMFQ) as hipóteses que temos sobre as funções f_i, g_i , não garantem que as funções $\frac{f_i}{g_i}, i \in I$, sejam (F, α, ρ, d) -convexas. A única forma de ocorrer isto, seria admitir que $s_i \geq 0$, para todo $i \in I$, ou seja, impor que as matrizes $\left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right]$ sejam semidefinidas positiva em x^* , para todo $i \in I$. No entanto, vamos optar por hipóteses mais fracas que esta. Uma das diferenças que existe entre o Teorema 5.1 e o Teorema 2.1 apresentado por Liang et al. [35] é que nossas funções $\frac{f_i}{g_i}, i \in I$, não satisfazem em geral nenhum tipo particular de (F, α, ρ, d) -convexidade. Porém, admitimos que o vetor de restrições h é v -invexo, que é uma caso particular de (F, α, ρ, d) -convexidade.

A desigualdade (5.4) é satisfeita automaticamente no Corolário 5.2, porém se retirarmos a hipótese sobre as matrizes $\left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right], i \in I$, estaremos admitindo que podem ocorrer valores negativos em cada parcela $\tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)}$ do somatório $\sum_{i=1}^m \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)}$, que dependem de cada matriz $\left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right]$ e do vetor $(x - x^*)$. Esta é outra diferença entre o que vamos apresentar e o trabalho de Liang et al.. Para o caso particular de problemas fracionais com o vetor de restrições v -invexo, Liang et al. usam a seguinte hipótese no lugar de (5.4),

$$\sum_{i=1}^m \tau_i \rho_i \frac{d_i^2(x, x^*)}{\alpha_i(x, x^*)} \geq 0, \quad (5.10)$$

onde o número $\rho_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ e $d_i : S \times S \rightarrow \mathbb{R}, i \in I$. Neste caso, a positividade de (5.10) depende das constantes $\rho_i, i \in I$, porque os outros valores envolvidos no somatório são todos não negativos. Então, verificar se (5.10) é positivo, é mais simples

do que (5.4), pois neste último, é preciso analisar o comportamento de cada função $s_i(x, x^*)$, $i \in I$, para todo $x \in S$.

Vamos retornar mais uma vez ao Exemplo 1, apresentado na Seção 1.4, para conferir teoricamente utilizando o Teorema 5.1, e não apenas graficamente, que algumas soluções localmente eficientes deste exemplo são na verdade soluções eficientes. Dado uma direção unitária $d = (d_1, d_2)^T$ e $\lambda > 0$, tal que, $x = x^* + \lambda d \in \mathbb{R}^2$, do somatório $\sum_{i=1}^m \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)}$ no Exemplo 1, obtemos

$$\sum_{i=1}^2 \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)} = \tau_1 \lambda^2 (\mu_1^{A_1} d_1^2 + \mu_2^{A_1} d_2^2) + \tau_2 \lambda^2 (\mu_1^{A_2} d_1^2 + \mu_2^{A_2} d_2^2) = \lambda^2 (\tau_1 (8d_1^2 - 2d_2^2) + \tau_2 (-2d_1^2 + 8d_2^2)),$$

onde $g_1(x) = g_2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$ e, portanto, $B_1 = B_2 = 0$. Para que o Teorema 5.1 faça sentido, consideramos apenas os valores de $\tau_1, \tau_2 > 0$ e $\tau = \frac{\tau_1}{\tau_2} > 0$. Neste caso, quando $\frac{1}{4} < \tau < 4$, sempre ocorre

$$\sum_{i=1}^m \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)} = \tau_2 \lambda^2 (\tau (8d_1^2 - 2d_2^2) + (-2d_1^2 + 8d_2^2)) > 0, \forall d \in \partial B(0, 1).$$

De fato, pois $\tau_2 \lambda^2 > 0$ e $\tau (8d_1^2 - 2d_2^2) + (-2d_1^2 + 8d_2^2) = (8\tau - 2)d_1^2 + (8 - 2\tau)d_2^2$. Assim, para $\frac{1}{4} < \tau < 4$, obtemos $0 < (8\tau - 2)d_1^2 < 30d_1^2$ e $0 < (8 - 2\tau)d_2^2 < \frac{15}{2}d_2^2$. Portanto, confirmamos a nossa afirmação no Exemplo 1, de que as soluções localmente eficientes pertencentes ao ramo C ($\frac{1}{4} < \tau < 4$) são na verdade soluções eficientes.

Pretendemos a partir de agora, discutir algumas condições para que o somatório $\sum_{i=1}^m \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)}$ implique na condição (5.4). Ou seja, podemos garantir o resultado do Teorema 5.1 estudando diretamente a função

$$\begin{aligned} Z(x, x^*) &= \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)} = \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{g_i(x)}{g_i(x^*)} \frac{1}{g_i(x)} \left\{ (x - x^*)^T \left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right] (x - x^*) \right\} \\ &= (x - x^*)^T \left\{ \sum_{i=1}^m \left[\frac{\tau_i}{g_i(x^*)} A_i - \frac{\tau_i f_i(x^*)}{[g_i(x^*)]^2} B_i \right] \right\} (x - x^*). \end{aligned}$$

Observe que $Z(\cdot, x^*)$ é uma função quadrática sem a parte linear em S , na qual podemos explorar duas propriedades importantes. Nos problemas (PMFQ'), teremos $Z(x, x^*) \geq 0$, se e somente se, a matriz $\sum_{i=1}^m \left[\frac{\tau_i}{g_i(x^*)} A_i - \frac{\tau_i f_i(x^*)}{[g_i(x^*)]^2} B_i \right]$ for semidefinida positiva. Por outro lado, nos problemas (PMFQ) teremos $Z(x, x^*) \geq 0$ em S , se e somente se, $\min_{x \in S} Z(x, x^*) \geq 0$, ou seja, podemos usar resultados clássicos da literatura em otimização quadrática para verificar se $\min_{x \in S} Z(x, x^*) \geq 0$.

Com as afirmações sobre a função $Z(\cdot, x^*)$, podemos apresentar um novo corolário que explora as propriedades desta função. Ele tem uma condição mais fraca que o Corolário 5.2, e também segue imediatamente do Teorema 5.1.

Corolário 5.2 *Seja x^* um ponto viável do problema (PMFQ). Suponha que existam vetores $\tau \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$, tais que, (5.1), (5.2) e (5.3) sejam válidos. Se $\min_{x \in S} Z(x, x^*) \geq 0$, então $x^* \in \text{Eff}(\text{PMFQ})$.*

Demonstração: $Z(x, x^*) = \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)} \geq 0$, se e somente se, $\min_{x \in S} Z(x, x^*) \geq 0$. E o resultado segue do Teorema 5.1. ■

Com o resultado anterior, podemos propor um método computacional de teste, que vamos chamar de *Teste de eficiência global*, para verificar se um ponto viável é uma solução eficiente do problema (PMFQ).

5.3.1 Teste de eficiência global

Seja $x^* \in S$.

Passo 1. Encontre os vetores $\tau > 0$ e $\lambda \geq 0$, tais que, (5.1) e (5.2) sejam válidos.

Passo 2. Se os vetores τ e λ não existem, então $x^* \notin \text{Eff}(\text{PMFQ})$.

Passo 3. Caso contrário, resolva $Z(\bar{x}, x^*) = \min_{x \in S} Z(x, x^*)$.

Se $Z(\bar{x}, x^*) \geq 0$, diremos que x^* passou no teste de eficiência global, e $x^* \in \text{Eff}(\text{PMFQ})$.

O método Teste de eficiência global inicia com um ponto viável e, no Passo 1, tenta resolver um sistema de equações lineares com $m + p$ incógnitas τ e λ , com as desigualdades $\tau > 0$, $\lambda \geq 0$ e duas equações de igualdade (5.1) e (5.2). Se este sistema não tem solução, significa que o ponto x^* não satisfaz a condição necessária de primeira ordem, e o método encerra no Passo 2 concluindo que $x^* \notin \text{Eff}(\text{PMFQ})$. Se for possível encontrar os vetores τ e λ , o método deve resolver um problema de otimização quadrática em S no Passo 3. Se a solução deste problema for não negativa, então o método encerra concluindo que $x^* \in \text{Eff}(\text{PMFQ})$. Caso contrário, diremos que x^* não passou no teste de eficiência global.

A complexidade do método Teste de eficiência global consiste em resolver um sistema de equações com igualdades e desigualdades lineares no Passo 1, mais um problema de otimização quadrática no Passo 3. Portanto, em relação a uma implementação computacional deste método, não acreditamos que haja grandes dificuldades.

Por outro lado, o que podemos afirmar sobre o método Teste de eficiência global se estivermos interessados em desolver um método de busca por soluções globais do problema (PMFQ)? Podemos apontar duas dificuldades: o sistema de equações, no Passo 1, deixaria de ser linear para conter produtos entre as incógnitas $\tau > 0$, $\lambda \geq 0$ e a nova incógnita $x \in S$; e a função $Z(\cdot, x^*)$ passaria a ter duas variáveis, ou seja, no Passo 3 o método teria que resolver um problema de otimização do tipo $\min_{x, y \in S} Z(x, y)$. Essas novas dificuldades não são triviais. Para resolver a primeira, podemos recorrer a alguns métodos de solução de sistemas não lineares propostos na literatura, como por exemplo, o método de Wilson-Newton, descrito em [42], página 188. Para tentar resolver a segunda, vamos explorar um pouco mais a matriz

$$F(x^*) = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\tau_i}{g_i(x^*)} A_i - \frac{\tau_i f_i(x^*)}{[g_i(x^*)]^2} B_i \right] \quad (5.11)$$

para obter novas condições que permitam encontrar pontos x^* , tais que, $Z(x, x^*) \geq 0$ em S . Como já sinalizamos anteriormente, uma possibilidade é que tais pontos impliquem em $F(x^*)$ semidefinida positiva. Neste caso, a positividade de $Z(x, x^*) = (x - x^*)^T F(x^*) (x - x^*)$, dependerá apenas de x^* .

O que precisamos é de um outro método computacional de busca que trabalhe, por exemplo, com as matrizes conhecidas A_i , B_i e as funções f_i e g_i , $i \in I$. Primeiramente, vamos considerar o ponto x^* fixo para encontrar condições sobre as matrizes A_i e B_i , $i \in I$, tais que, seja possível obter $Z(x, x^*) \geq 0$. Para isso, apresentamos o próximo corolário, que aproveita a simetria das matrizes A_i , B_i e suas diagonalizações. Considere $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.2 *Seja x^* um ponto viável do problema (PMFQ). Suponha que existam vetores $\tau \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$, tais que, (5.1), (5.2) e (5.3) sejam válidos. Considere ainda, para cada $i \in I$ e $j \in J$, as seguintes funções*

$$\gamma_i^j(x, x^*, \tau) = \frac{\tau_i}{g_i(x^*)} \langle x - x^*, p_i^j \rangle^2 \quad e \quad \eta_i^j(x, x^*, \tau) = \frac{\tau_i f_i(x^*)}{[g_i(x^*)]^2} \langle x - x^*, q_i^j \rangle^2,$$

tais que, p_i^j e q_i^j são as colunas das matrizes ortogonais P_i e Q_i , formadas pelos autovetores normalizados das matrizes A_i e B_i respectivamente. Se $\forall x \in S$, as seguintes desigualdades são válidas,

$$\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau), \quad \forall i \in I \text{ e } \forall j \in J, \quad (5.12)$$

onde $\mu_j^{A_i}$ e $\mu_j^{B_i}$ são os autovalores das matrizes A_i e B_i associados aos autovetores p_i^j e q_i^j respectivamente. Então $x^ \in \text{Eff}(\text{PMFQ})$.*

Demonstração: Como as matrizes A_i e B_i , $i \in I$, são simétricas, elas são diagonalizáveis e podem ser reescritas como $A_i = P_i D_{A_i} P_i^T = \sum_{j=1}^n \mu_j^{A_i} p_i^j p_i^{jT}$ e $B_i = Q_i D_{B_i} Q_i^T = \sum_{j=1}^n \mu_j^{B_i} q_i^j q_i^{jT}$, onde D_{A_i} e D_{B_i} são matrizes diagonais, com suas respectivas diagonais formadas pelos autovalores $\mu_j^{A_i}$ e $\mu_j^{B_i}$, $j \in J$, das matrizes A_i e B_i respectivamente. Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)} &= \sum_{i=1}^m \tau_i \frac{g_i(x)}{g_i(x^*)} \frac{1}{g_i(x)} \left\{ (x - x^*)^T \left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right] (x - x^*) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^m \left\{ (x - x^*)^T \left[\frac{\tau_i}{g_i(x^*)} A_i - \frac{\tau_i f_i(x^*)}{[g_i(x^*)]^2} B_i \right] (x - x^*) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^m \left\{ (x - x^*)^T \left[\frac{\tau_i}{g_i(x^*)} \left(\sum_{j=1}^n \mu_j^{A_i} p_i^j p_i^{jT} \right) - \frac{\tau_i f_i(x^*)}{[g_i(x^*)]^2} \left(\sum_{j=1}^n \mu_j^{B_i} q_i^j q_i^{jT} \right) \right] (x - x^*) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n \mu_j^{A_i} \left(\frac{\tau_i}{g_i(x^*)} \langle x - x^*, p_i^j \rangle^2 \right) - \sum_{j=1}^n \mu_j^{B_i} \left(\frac{\tau_i f_i(x^*)}{[g_i(x^*)]^2} \langle x - x^*, q_i^j \rangle^2 \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n \mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) - \sum_{j=1}^n \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau) \right] \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) - \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau) \right].
\end{aligned}$$

Como $\forall x \in S$, temos $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$, $\forall i \in I$ e $\forall j \in J$, concluímos que $Z(x, x^*) \geq 0$, a condição (5.4) é válida e o resultado segue do Teorema 5.1. ■

O resultado do Teorema 5.2 não é simples de se obter porque a condição (5.12) depende de todos os pontos do conjunto viável, ou seja, depende das funções $\gamma_i^j(x, x^*, \tau)$, $\eta_i^j(x, x^*, \tau)$, $\forall i \in I$, $\forall j \in J$ com $x \in S$. No entanto, mesmo que ocorra $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) < \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$, para algum $i \in I$ e para algum $j \in J$, não significa que a condição (5.12) não possa ser alcançada. Na sequência, apresentamos um corolário que segue imediatamente deste teorema e reduz a dificuldade de se obter a condição (5.12).

Corolário 5.3 *Seja x^* um ponto viável do problema (PMFQ). Suponha que existam vetores $\tau \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$, tais que, (5.1), (5.2) e (5.3) sejam válidos. Considere ainda, para cada $i \in I$ e $j \in J$, as seguintes identidades*

$$a_{i,j}^+ = \sqrt{\mu_j^{A_i}} p_i^j + \sqrt{\mu_j^{B_i} \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}} q_i^j, \quad a_{i,j}^- = \sqrt{\mu_j^{A_i}} p_i^j - \sqrt{\mu_j^{B_i} \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}} q_i^j, \quad (5.13)$$

$$\alpha_{i,j} = \langle x^*, a_{i,j}^+ \rangle a_{i,j}^- + \langle x^*, a_{i,j}^- \rangle a_{i,j}^+, \quad \beta_{i,j} = \langle x^*, a_{i,j}^+ \rangle \langle x^*, a_{i,j}^- \rangle, \quad (5.14)$$

$$H_{i,j}(x) = x^T \left[a_{i,j}^+ a_{i,j}^{-T} \right] x - \alpha_{i,j}^T x + \beta_{i,j}, \quad (5.15)$$

onde p_i^j e q_i^j são as colunas das matrizes ortogonais P_i e Q_i , formadas pelos autovetores normalizados das matrizes A_i , B_i , e $\mu_j^{A_i}$, $\mu_j^{B_i}$ são os autovalores das matrizes A_i e B_i associados aos autovetores p_i^j e q_i^j respectivamente. Se $\forall x \in S$, obtemos $H_{i,j}(x) \geq 0$ para cada $i \in I$ e $j \in J$. Então $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$.

Demonstração: De acordo com o Teorema 5.2, é suficiente mostrar que para todo ponto viável ocorre $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$, $\forall i \in I$ e $\forall j \in J$. Então, para $x \in S$ e um par $\{i, j\} \in I \times J$, obtemos

$$\begin{aligned} \mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau) &\iff \frac{\tau_i \mu_j^{A_i}}{g_i(x^*)} \langle x - x^*, p_i^j \rangle^2 \geq \frac{\tau_i \mu_j^{B_i} f_i(x^*)}{[g_i(x^*)]^2} \langle x - x^*, q_i^j \rangle^2 \\ &\iff \mu_j^{A_i} \langle x - x^*, p_i^j \rangle^2 \geq \mu_j^{B_i} \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \langle x - x^*, q_i^j \rangle^2 \iff \end{aligned}$$

$$\left(\sqrt{\mu_j^{A_i}} \langle x - x^*, p_i^j \rangle + \sqrt{\mu_j^{B_i} \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}} \langle x - x^*, q_i^j \rangle \right) \left(\sqrt{\mu_j^{A_i}} \langle x - x^*, p_i^j \rangle - \sqrt{\mu_j^{B_i} \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}} \langle x - x^*, q_i^j \rangle \right) \geq 0 \iff$$

$$\left(\left\langle x - x^*, \sqrt{\mu_j^{A_i}} p_i^j + \sqrt{\mu_j^{B_i} \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}} q_i^j \right\rangle \right) \left(\left\langle x - x^*, \sqrt{\mu_j^{A_i}} p_i^j - \sqrt{\mu_j^{B_i} \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}} q_i^j \right\rangle \right) \geq 0 \iff$$

$$(\langle x - x^*, a_{i,j}^+ \rangle) (\langle x - x^*, a_{i,j}^- \rangle) \geq 0 \iff$$

$$(\langle x, a_{i,j}^+ \rangle - \langle x^*, a_{i,j}^+ \rangle) (\langle x, a_{i,j}^- \rangle - \langle x^*, a_{i,j}^- \rangle) \geq 0 \iff$$

$$\langle x, a_{i,j}^+ \rangle \langle x, a_{i,j}^- \rangle - \langle x^*, a_{i,j}^- \rangle \langle x, a_{i,j}^+ \rangle - \langle x^*, a_{i,j}^+ \rangle \langle x, a_{i,j}^- \rangle + \langle x^*, a_{i,j}^+ \rangle \langle x^*, a_{i,j}^- \rangle \geq 0 \iff$$

$$\langle x, a_{i,j}^+ \rangle \langle x, a_{i,j}^- \rangle - \langle x, (\langle x^*, a_{i,j}^+ \rangle a_{i,j}^- + \langle x^*, a_{i,j}^- \rangle a_{i,j}^+) \rangle + \langle x^*, a_{i,j}^+ \rangle \langle x^*, a_{i,j}^- \rangle \geq 0 \iff$$

$$\langle x, a_{i,j}^+ \rangle \langle x, a_{i,j}^- \rangle - \langle x, \alpha_{i,j} \rangle + \beta_{i,j} \geq 0 \iff$$

$$x^T \left[a_{i,j}^+ a_{i,j}^{+T} \right] x - \alpha_{i,j}^T x + \beta_{i,j} \geq 0 \iff H_{i,j}(x) \geq 0.$$

Portanto, o resultado segue do Teorema 5.2. ■

Do Corolário 5.3, podemos afirmar que um ponto viável satisfazendo as condições (5.1), (5.2) e (5.3) é uma solução eficiente do problema (PMFQ), se cada função quadrática $H_{i,j}(x)$, $\{i, j\} \in I \times J$, é não negativa no conjunto viável. No entanto, para o caso de um método de teste, como é o caso do Teste de eficiência global, o uso deste corolário no lugar do Corolário 5.2 não é interessante, pois implica em deixar de resolver um problema de otimização quadrática $\min_{x \in S} Z(x, x^*)$, para resolver $m \times n$ problemas de otimização quadrática $\min_{x \in S} H_{i,j}(x)$.

Seja $[\bar{H}_{i,j}] = [a_{i,j}^+ a_{i,j}^-]^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então a não negatividade da quadrática $H_{i,j}(x) = x^T [\bar{H}_{i,j}] x - \alpha_{i,j}^T x + x^{*T} [\bar{H}_{i,j}] x^*$ depende de cada matriz $[\bar{H}_{i,j}]$ e de cada vetor $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}^n$, $\{i, j\} \in I \times J$. Por exemplo, para o problema (PMFQ'), é necessario que cada matriz $[\bar{H}_{i,j}]$ seja semidefinida positiva e que $\beta_{i,j} \geq (\alpha_{i,j} - \hat{x}^T [\bar{H}_{i,j}] \hat{x})$, onde $\hat{x}$ é uma solução do sistema $2 [\bar{H}_{i,j}] x = \alpha_{i,j}$. No entanto, para o problema (PMFQ) temos que estudar um pouco mais as quadráticas $H_{i,j}(x)$, $\{i, j\} \in I \times J$. Vamos reescrever cada entrada da matriz $[\bar{H}_{i,j}] = (\bar{H}_{i,j}(k, \ell))$, e cada entrada do vetor $\alpha_{i,j} = (\alpha_{i,j}(k))$ em função das entradas dos autovetores $p_i^j = (p_i^j(k))$ e $q_i^j = (q_i^j(k))$, onde $i \in I$, $j, k, \ell \in J$. Com algumas manipulações, obtemos para cada par $\{k, \ell\} \in J \times J$,

$$\bar{H}_{i,j}(k, \ell) = a_{i,j}^+(k) a_{i,j}^-(\ell) \quad (5.16)$$

$$= \mu_j^{A_i} p_i^j(k) p_i^j(\ell) + \sqrt{\mu_j^{A_i} \mu_j^{B_i} \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)}} \left(p_i^j(\ell) q_i^j(k) - p_i^j(k) q_i^j(\ell) \right) - \mu_j^{B_i} \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} q_i^j(k) q_i^j(\ell),$$

$$\bar{H}_{i,j}(k, k) = \mu_j^{A_i} (p_i^j(k))^2 - \mu_j^{B_i} \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} (q_i^j(k))^2, \quad (5.17)$$

$$\alpha_{i,j}(k) = 2\mu_j^{A_i} \langle x^*, p_i^j \rangle p_i^j(k) - 2\mu_j^{B_i} \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \langle x^*, q_i^j \rangle q_i^j(k). \quad (5.18)$$

Podemos tirar algumas conclusões de (5.16), (5.17) e (5.18). Por exemplo, para um par $\{i, j\} \in I \times J$ fixo, o vetor $\alpha_{i,j}$ é uma combinação linear dos autovetores p_i^j e q_i^j . Se $\mu_j^{A_i} = 0$, $\mu_j^{B_i} = 0$ ou $f_i(x^*) = 0$, então a matriz $[\bar{H}_{i,j}]$ é simétrica. Se $\mu_j^{A_i} \mu_j^{B_i} f_i(x^*) < 0$ e existe um par $\{k, \ell\} \in J \times J$, tal que, $p_i^j(\ell) q_i^j(k) \neq p_i^j(k) q_i^j(\ell)$, então a matriz $[\bar{H}_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Neste caso, dado $x \in S$, se $H_{i,j}(x) \in \mathbb{C}$, não faz sentido verificar $H_{i,j}(x) \geq 0$. Mostraremos na próxima seção que não é possível obter $H_{i,j}(x) \in \mathbb{C}$, quando exigimos que a condição (5.12) seja satisfeita.

Corolário 5.4 *Seja x^* um ponto viável do problema (PMFQ). Suponha que existam vetores $\tau \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$, tais que, (5.1), (5.2) e (5.3) sejam válidos. Considere para cada par $\{i, j\} \in I \times J$ as identidades (5.13), (5.14) e (5.15). Se a matriz $[\bar{H}_{i,j}]$ é semidefinida*

positiva e $\alpha_{i,j} = 0$, para cada par $\{i, j\} \in I \times J$, então $x^* \in \text{Eff}(\text{PMFQ})$.

Demonstração: Das hipóteses, $\forall x \in S$, obtemos $H_{i,j}(x) \geq 0$ para cada par $\{i, j\} \in I \times J$. Portanto, o resultado segue do Corolário 5.3. ■

Com base no Teorema 5.2 e seus corolários, discutimos na próxima seção as possibilidades de se obter um método computacional de busca por soluções eficientes do problema (PMFQ).

5.4 Método de busca por soluções eficientes

Do Teorema 5.2, dado $x^* \in S$, para obtermos a condição (5.4), precisamos garantir que $\forall x \in S$ as desigualdades (5.12) sejam válidas. Apesar das funções $\gamma_i^j(\cdot, x^*, \tau)$ e $\eta_i^j(\cdot, x^*, \tau)$, $\{i, j\} \in I \times J$, serem complicadas, podemos fazer algumas observações importantes que podem facilitar que as desigualdades (5.12) sejam satisfeitas.

Pela definição das matrizes A_i e B_i , $i \in I$, sabemos que para cada $j \in J$, $\mu_j^{A_i}$ assume qualquer valor real e que $\mu_j^{B_i} \geq 0$. Como $\tau_i > 0$ e $g_i(x^*) > 0$, $i \in I$, para cada par $\{i, j\} \in I \times J$, temos $\frac{\tau_i}{g_i(x^*)} \langle x - x^*, p_i^j \rangle^2 \geq 0$ e $\frac{\tau_i}{[g_i(x^*)]^2} \langle x - x^*, q_i^j \rangle^2 \geq 0$. Portanto, dados $x, x^* \in S$, $\tau \in \mathbb{R}^m$ e um par $\{i, j\} \in I \times J$, como $\gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq 0$, então se $\mu_j^{A_i} \geq 0$, implica que $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq 0$ e, se $\mu_j^{A_i} \leq 0$, implica que $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \leq 0$. Por outro lado, como $\mu_j^{B_i} \geq 0$, então se $f_i(x^*) \geq 0$, implica que $\mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau) \geq 0$ e, se $f_i(x^*) \leq 0$, implica que $\mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau) \leq 0$.

Admitindo que o vetor τ já foi obtido, tal que, (5.1) e (5.2) sejam válidos e pelas observações apontadas acima, vamos conferir o esquema apresentado na Tabela 5.1. Nela, apresentamos exatamente o que foi dito anteriormente sobre os casos que podem ocorrer com os sinais dos produtos entre as funções $\gamma_i^j(\cdot, x^*, \tau)$, $\eta_i^j(\cdot, x^*, \tau)$ e os autovalores $\mu_j^{A_i}$, e $\mu_j^{B_i}$, dependendo dos sinais de $\mu_j^{A_i}$ e $f_i(x^*)$, para cada par $\{i, j\} \in I \times J$. A primeira coluna indica os quatro casos distintos que podem ocorrer. A segunda e quarta colunas indicam as combinações de sinais que podem ocorrer com $\mu_j^{A_i}$ e $f_i(x^*)$ respectivamente, enquanto que a terceira e quinta colunas indicam, para um dado $x \in S$, o que ocorre com os sinais de $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau)$ e $\mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$ dependendo dos sinais de $\mu_j^{A_i}$ e $f_i(x^*)$ respectivamente. Por exemplo, para um par $\{i, j\} \in I \times J$, na última linha da tabela referente ao Caso (d), temos $\mu_j^{A_i} \leq 0$ que implica em $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \leq 0$, enquanto que $f_i(x^*) \geq 0$ implica em $\mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau) \geq 0$. A última coluna indica o que precisa ocorrer para se obter as desigualdades (5.12). Como na última linha, temos $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \leq 0$ e $\mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau) \geq 0$, então $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$ se e somente se $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) = \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$. Por outro lado, na segunda linha da Tabela 5.1, o Caso (a) implica diretamente em $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$.

Caso	$\mu_j^{A_i}$	$\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau)$	$f_i(x^*)$	$\mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$	Desejamos que ocorra
(a)	≥ 0	≥ 0	≤ 0	≤ 0	$(\Rightarrow) \mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$
(b)	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	$\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$
(c)	≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	$ \mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \leq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau) $
(d)	≤ 0	≤ 0	≥ 0	≥ 0	$\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) = \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$

Tabela 5.1: Quatro maneiras de se obter as desigualdades (5.12)

Dado $x \in S$, se $x = x^*$, sempre ocorre $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) = 0 = \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$, então vamos considerar $x \neq x^*$ e analisar separadamente os quatro casos da Tabela 5.1 para facilitar o entendimento do próximo método computacional que vamos descrever.

Caso (a)

Dados $x^* \in S$ e um par $\{i, j\} \in I \times J$, se ocorrer $\mu_j^{A_i} \geq 0$ e $f_i(x^*) \leq 0$, obtemos $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq 0$ e $\mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau) \leq 0$, ou seja, $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq 0 \geq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$, e a desigualdade (5.12) se verifica automaticamente para o par $\{i, j\} \in I \times J$. Observe ainda, que dada uma matriz A_i , $i \in I$, com $\mu_j^{A_i} \geq 0, \forall j \in J$, ou seja, A_i semidefinida positiva, e $f_i(x^*) \leq 0$, então $A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i$ é semidefinida positiva e, se isto ocorre $\forall i \in I$, as desigualdades (5.12) se verificam para todo par $\{i, j\} \in I \times J$. Logo, esta é uma condição suficiente para que (5.4) seja válido.

Caso (b)

Dados um ponto viável x^* e um par $\{i, j\} \in I \times J$, se ocorrer $\mu_j^{A_i} \geq 0$ e $f_i(x^*) \geq 0$, obtemos $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq 0$ e $\mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau) \geq 0$. Neste caso, temos $\mu_j^{A_i} \mu_j^{B_i} f_i(x^*) \geq 0$, e assim, $H_{i,j}(x) \in \mathbb{R}$. Desejamos que ocorra $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$ e, para isso, é possível utilizar o Corolário 5.3 para o par $\{i, j\} \in I \times J$, ou seja, construir a função quadrática $H_{i,j}$ e verificar se $\forall x \in S$ obtemos $H_{i,j}(x) \geq 0$.

Caso (c)

Dados um ponto viável x^* e um par $\{i, j\} \in I \times J$, se ocorrer $\mu_j^{A_i} \leq 0$ e $f_i(x^*) \leq 0$, obtemos $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \leq 0$ e $\mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau) \leq 0$. Neste caso, temos $\mu_j^{A_i} \mu_j^{B_i} f_i(x^*) \geq 0$, e assim, $H_{i,j}(x) \in \mathbb{R}$. Desejamos que ocorra $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$, isto é, $|\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \leq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)|$. Para isso, podemos utilizar o Corolário 5.3 para o par $\{i, j\} \in I \times J$, ou seja, construir a função quadrática $H_{i,j}$ e verificar se $\forall x \in S$ obtemos $H_{i,j}(x) \geq 0$.

Caso (d)

Dados um ponto viável x^* e um par $\{i, j\} \in I \times J$, se ocorrer $\mu_j^{A_i} \leq 0$ e $f_i(x^*) \geq 0$, obtemos $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \leq 0$ e $\mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau) \geq 0$. Portanto, $0 \geq \mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau) \geq 0$, se e somente se, $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) = \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau) = 0$, se e somente se,

$$\mu_j^{A_i} \langle x - x^*, p_i^j \rangle^2 = \mu_j^{B_i} \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \langle x - x^*, q_i^j \rangle^2 = 0. \quad (5.19)$$

Neste caso, temos $\mu_j^{A_i} \mu_j^{B_i} f_i(x^*) \leq 0$ e, de (5.19), podem ocorrer:

1. Se $\mu_j^{A_i} = 0$ com $\mu_j^{B_i} = 0$ ou $f_i(x^*) = 0$, então $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) = \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$, e a desigualdade (5.12) se verifica automaticamente para o par $\{i, j\} \in I \times J$.
2. Se $\mu_j^{A_i} = 0$, $\mu_j^{B_i} > 0$ e $f_i(x^*) > 0$, então (5.19) é válido, se e somente se $\langle x - x^*, q_i^j \rangle^2 = 0$, $\forall x \in S$, isto é, se e somente se $x = x^*$. Portanto, neste caso, não é possível utilizar o Corolário 5.3 para o par $\{i, j\} \in I \times J$.
3. Se $\mu_j^{A_i} < 0$ com $\mu_j^{B_i} = 0$ ou $f_i(x^*) = 0$, então (5.19) é válido, se e somente se $\langle x - x^*, p_i^j \rangle^2 = 0$, $\forall x \in S$, isto é, se e somente se $x = x^*$. Portanto, neste caso, não é possível utilizar o Corolário 5.3 para o par $\{i, j\} \in I \times J$.
4. Se $\mu_j^{A_i} < 0$, $\mu_j^{B_i} > 0$ e $f_i(x^*) > 0$, então (5.19) é válido, se e somente se $x = x^*$. Portanto, neste caso, não é possível utilizar o Corolário 5.3 para o par $\{i, j\} \in I \times J$. Observe ainda, que este é o único caso em que podemos obter $\mu_j^{A_i} \mu_j^{B_i} f_i(x^*) < 0$ e $\bar{H}_{i,j} \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Concluimos pelos itens acima, que dado um ponto x^* , o Caso (d) se verifica $\forall x \in S$ se e somente se $\mu_j^{A_i} = 0$ com $\mu_j^{B_i} = 0$ ou $f_i(x^*) = 0$. Contudo, dado um par $\{i, j\} \in I \times J$, os itens 2-4 não excluem a possibilidade de ocorrer

$$\sum_{i=1}^m \tau_i \frac{s_i(x, x^*)}{u_i(x, x^*)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) - \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)] \geq 0.$$

Eles apenas não satisfazem o Corolário 5.3.

Em seguida, apresentamos um método computacional de busca, que vamos chamar de *Método de busca global*. A estratégia deste método é usar as informações do Teorema 5.2, do Corolário 5.3 e os quatro casos apresentados na Tabela 5.1. Para facilitar, dados $x, x^* \in S$, nas identidades (5.13), (5.14) e (5.15), consideramos $a_{i,j}^+ = a_{i,j}^+(x^*)$, $a_{i,j}^- = a_{i,j}^-(x^*)$, $\alpha_{i,j} = \alpha_{i,j}(x^*)$, $\beta_{i,j} = \beta_{i,j}(x^*)$ e $H_{i,j}(x) = H_{i,j}(x, x^*)$.

Pelo exposto, as desigualdades (5.12) são válidas num ponto $x^* \in S$ dependendo dos sinais de $\mu_j^{A_i}$ e $f_i(x^*)$, $\{i, j\} \in I \times J$, então o método realiza suas operações em função desses sinais. Inicia criando os conjuntos $GE_>$, $GE_ =$ e $GE_<$, que irão representar, neste contexto, possíveis subconjuntos do conjunto de soluções globalmente eficientes, e fazem referência aos respectivos autovalores positivos, nulos e negativos das matrizes A_i , $i \in I$. Em seguida, o método entra em um laço, contendo outro laço interno, que juntos executam algumas tarefas computando todos os pares $\{i, j\} \in I \times J$. Neles, se $\mu_j^{A_i} > 0$, é armazenado no conjunto $GE_>$ os pontos viáveis que satisfazem a última coluna da Tabela 5.1 referente os Casos (a) e (b). Analogamente, se $\mu_j^{A_i} = 0$, é armazenado no conjunto $GE_ =$ os pontos viáveis que satisfazem os Casos (a) e (d) e, se $\mu_j^{A_i} < 0$, é armazenado no conjunto $GE_<$ os pontos viáveis que satisfazem o Caso (c). Então, encerrado as operações dos laços, em cada conjunto $GE_>$, $GE_ =$ e $GE_<$, ficam armazenados os pontos $x^* \in S$ que satisfazem $\mu_j^{A_i} \gamma_i^j(x, x^*, \tau) \geq \mu_j^{B_i} \eta_i^j(x, x^*, \tau)$, $\forall x \in S$, individualmente de acordo com o sinal de $\mu_j^{A_i}$. Como $x^* \in S$ é eficiente se ele satisfaz as desigualdades (5.12) para todo par $\{i, j\} \in I \times J$, o método armazena em seguida, no conjunto GE , a interseção dos conjuntos $GE_>$, $GE_ =$ e $GE_<$. Contudo, para que um ponto $x^* \in S$ satisfaça o Teorema 5.2, é preciso ainda existir vetores $\tau \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$, tais que, (5.1), (5.2) e (5.3) sejam válidos. Então, o método encerra selecionando do conjunto GE todos os pontos que satisfazem esta última observação.

5.4.1 Método de busca global

$GE_{>} := S$, $GE_{=} := S$ e $GE_{<} := S$.

Passo 1.

Para cada $i \in I$, repita.

Para cada $j \in J$, repita.

Se $\mu_j^{A_i} > 0$.

Encontre $P_1 = \{x \in S \mid f_i(x) \leq 0\}$. (**Caso (a)**)

Encontre $\tilde{P} = \{x \in S \mid f_i(x) > 0\}$ e

$P_2 = \{y \in \tilde{P} \mid H_{i,j}(x, y) \geq 0, \forall x \in S\}$. (**Caso (b)**)

Faça $GE_{>} := (GE_{>}) \cap (P_1 \cup P_2)$.

Se $\mu_j^{A_i} = 0$.

Encontre $N_1 = \{x \in S \mid f_i(x) < 0\}$. (**Caso (a)**)

Encontre $N_2 = \{x \in S \mid \mu_j^{B_i} = 0 \text{ ou } f_i(x) = 0\}$. (**Caso (d)**)

Faça $GE_{=} := (GE_{=}) \cap (N_1 \cup N_2)$.

Se $\mu_j^{A_i} < 0$.

Encontre $\tilde{M} = \{x \in S \mid f_i(x) < 0\}$ e

$M = \{y \in \tilde{M} \mid H_{i,j}(x, y) \geq 0, \forall x \in S\}$. (**Caso (c)**)

Faça $GE_{<} := (GE_{<}) \cap M$.

Passo 2. Faça $GE := (GE_{>}) \cap (GE_{=}) \cap (GE_{<})$.

Passo 3. Faça $GE := \{x \in GE \mid \exists \tau \text{ e } \lambda, \text{ tais que, (5.1), (5.2) e (5.3) sejam válidos}\}$.

O Método de busca global não é apresentado da forma clássica, em que, a partir de um ponto inicial, encontra-se um novo ponto que atenda a uma determinada propriedade e, iterativamente, repete-se este processo, tendo o novo ponto como ponto inicial, até que um critério de parada seja satisfeito. Na verdade, ele faz uma busca no conjunto viável por um subconjunto contido no conjunto $Eff(PMFQ)$ usando as informações da Tabela 5.1 e que atenda ao Teorema 5.2.

O Passo 1 do método é o mais complexo, pois é necessário fazer $m \times n$ buscas no conjunto viável por pontos que satisfazem as desigualdades (5.12). Dado um par $\{i, j\} \in I \times J$, se $\mu_j^{A_i} > 0$, o método encontra os conjuntos P_1 e P_2 que atendem às situações dos Casos (a) e (b) da Tabela 5.1, respectivamente. O conjunto P_1 trata-se dos pontos que satisfazem cada par de desigualdade (5.12) automaticamente, enquanto que os pontos do conjunto P_2 satisfazem as desigualdades (5.12) dependendo do resultado do Corolário 5.3, ou seja, se cada quadrática $H_{i,j}(\cdot, y)$, $y \in P_2$, é não negativa em S . Os pontos que pertencem ao conjunto P_1 ou P_2 para todo par $\{i, j\} \in I \times J$, tal que, $\mu_j^{A_i} > 0$, ficam armazenados no conjunto $GE_{>}$. Se $\mu_j^{A_i} = 0$, o método encontra os conjuntos N_1 e N_2 que atendem às situações dos Casos (a) e (d) da Tabela 5.1, respectivamente. Os pontos do conjunto N_1 satisfazem novamente cada par de desigualdade (5.12) automaticamente, enquanto que os pontos do conjunto N_2 são os únicos pontos que satisfazem as desigualdades (5.12) no Caso (d) da Tabela 5.1, ou seja, quando $\mu_j^{B_i} = 0$ ou quando $f_i(x) = 0$, $x \in S$. Neste caso, se $\mu_j^{B_i} = 0$, então $N_2 := S$ e, se $\mu_j^{B_i} > 0$, então N_2 são os zeros da função f_i . Os pontos que pertencem ao conjunto N_1 ou N_2 para todo par $\{i, j\} \in I \times J$, tal que, $\mu_j^{A_i} = 0$, ficam armazenados no conjunto $GE_{=}$. Por fim, se $\mu_j^{A_i} < 0$, o método encontra o conjunto M que atende à situação do Caso (c) da Tabela 5.1. O conjunto M trata-se dos pontos que satisfazem as desigualdades (5.12) dependendo do resultado do Corolário 5.3, ou seja, se cada quadrática $H_{i,j}(\cdot, y)$, $y \in M$, é não negativa em S . Os pontos que pertencem ao conjunto M para todo par $\{i, j\} \in I \times J$, tal que, $\mu_j^{A_i} < 0$, ficam armazenados no conjunto $GE_{<}$. Observe que para cada par $\{i, j\} \in I \times J$ e cada situação do autovalor $\mu_j^{A_i}$, um tipo distinto de busca deve ser feito no conjunto S .

Precisamos de pontos que satisfaçam (5.12) para todo par $\{i, j\} \in I \times J$. Então, no Passo 2, o método armazena tais pontos no conjunto GE , fazendo $GE := (GE_{>}) \cap (GE_{=}) \cap (GE_{<})$. O método encerra no Passo 3 fazendo uma busca no conjunto GE por pontos que satisfaçam (5.1), (5.2) e (5.3), ou seja, ele verifica para quais pontos $x \in GE$ existem vetores $\tau \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$, tais que, (5.1), (5.2) e (5.3) sejam válidos.

Apesar da grande quantidade de tarefas executadas no Método de busca global, acreditamos que cada uma possa ser implementada computacionalmente sem grandes dificuldades. Apresentamos o método escrito de uma forma mais simples de ser entendido, porém, a sua implementação, pode ser facilitada se ele for reescrito mais adequadamente. Por exemplo, para todo par $\{i, j\} \in I \times J$, tal que, $\mu_j^{A_i} > 0$, as operações para se obter os conjuntos P_1 , $\tilde{P}$ e P_2 podem ser substituídas pela solução de um sistema equações com desigualdades quadráticas. Poder usar os valores $\mu_j^{A_i}$ e $f_i(x^*)$ para guiar a busca no conjunto viável também é um ponto de destaque neste método.

Como as condições do Teorema 5.2 são suficientes, no final do Método de busca global é possível encontrar $GE \equiv \emptyset$. Por exemplo, quando o conjunto $Eff(PMFQ)$ é formado por pontos que não satisfazem as desigualdades (5.12), porém satisfazem a desigualdade (5.4).

Se isto ocorrer, para algum par $\{i, j\} \in I \times J$, teremos $(P_1 \cup P_2) = \emptyset$, $(N_1 \cup N_2) = \emptyset$ ou $M = \emptyset$. No entanto, se $GE \neq \emptyset$, podemos garantir que $GE \subseteq \text{Eff}(PMFQ)$.

5.5 Conclusão

Apresentamos como contribuição neste capítulo algumas condições suficientes de otimalidade global para as soluções do problema (PMFQ). Essas condições se dividem em duas partes. Na primeira parte, utilizamos uma abordagem semelhante à utilizada por Liang et al. em [35], porém com hipóteses mais relaxadas de convexidade genaralizada nas funções objetivo. Na segunda parte, aproveitamos as diagonalizações das matrizes A_i , B_i , $i \in I$. Desenvolvemos um método computacional de teste, que verifica se um ponto viável é eficiente, e que depende da solução de um problema de otimização quadrática. Outro método computacional de busca é proposto, que é guiado pelos autovalores das matrizes A_i , $i \in I$ e encontra um subconjunto contido no conjunto $\text{Eff}(PMFQ)$.

Capítulo 6

Dualidade

No capítulo anterior obtemos algumas condições de otimalidade global para as soluções do problema (PMFQ) estudando algumas características da matriz (5.11), apresentada na Seção 5.3, e impondo algumas hipóteses sobre ela. Com este estudo, foi possível, entre outros resultados, propor um método computacional de busca por soluções eficientes. Neste capítulo, vamos definir uma função matricial a partir da matriz (5.11) e mostrar que com a hipótese de semipositividade definida sobre tal função é possível obter novos resultados, entre eles, uma relação entre o problema (PMFQ) e um problema escalar associado a ele, e os três resultados principais de dualidade em problemas programação multiobjetivo. Em particular, optamos por trabalhar com o dual do tipo Mond-Weir. A contribuição deste capítulo é justamente demonstrar os principais teoremas de dualidade para o problema (PMFQ) sem utilizar hipóteses de convexidade generalizada.

6.1 Introdução

Osuna-Gómez et al. [49] obtêm algumas condições de otimalidade para soluções fracamente eficientes e resultados de dualidade para casos mais gerais de problemas de programação fracional multiobjetivo. As suas condições de otimalidade são obtidas supondo que um problema equivalente ao problema associado $(PMFQ)_{x^*}$, $x^* \in Leff(PMFQ)$, satisfaz um tipo de convexidade generalizada, no caso, a subconvexlike generalizada, descrita na Seção 1.5. Utilizando a definição de KT-invexidade para problemas (PM), descrita na Seção 1.5, os seus resultados de dualidade são obtidos supondo que o problema associado é KT-invexo.

Existem outras formas de caracterizar as soluções dos problemas (PM) utilizando determinados problemas associados. Por exemplo, Geoffrion [18] utilizou as soluções de problemas escalares. Neste contexto, vamos chamar o seguinte problema escalar de *problema escalar ponderado* associado ao problema $(PFMQ)_{x^*}$.

$$\begin{aligned}
(\text{PMFQ})_{x^*}^w \quad & \text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^m w_i \left(f_i(x) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} g_i(x) \right) \\
\text{s.a} \quad & h_j(x) \leq 0 \quad j \in K, \\
& x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

onde $w = (w_1, \dots, w_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $w > 0$ e $S = \{x \in \Omega \mid h_j(x) \leq 0, j \in K\}$ é o conjunto viável.

Vamos obter novos resultados seguindo as idéias apresentadas em [49]. Contudo, vamos tratar de soluções eficientes do problema (PMFQ) impondo condições sobre as matrizes $\left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right]$, $i \in I$, $x^* \in S$.

6.2 Relação entre os problemas associados

Definimos na Seção 5.3, a matriz $F(x^*) = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\tau_i}{g_i(x^*)} A_i - \frac{\tau_i f_i(x^*)}{[g_i(x^*)]^2} B_i \right]$, onde $x^* \in S$ e $\tau \in \mathbb{R}^m$, $\tau > 0$. Agora, vamos definir o conjunto $\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}^m \mid w > 0\}$ e a função $F : \mathcal{W} \times S \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, dada por

$$F(w, x) = \sum_{i=1}^m w_i \left[A_i - \frac{f_i(x)}{g_i(x)} B_i \right].$$

Observe que $F(x^*) = F\left(\frac{\tau}{g(x^*)}, x^*\right)$, onde $\frac{\tau}{g(x^*)} \in \mathcal{W}$. Também vamos definir para cada $i \in I$, as funções $F_i : S \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ dada por

$$F_i(x) = A_i - \frac{f_i(x)}{g_i(x)} B_i.$$

Então, temos $F(w, x) = \sum_{i=1}^m w_i F_i(x)$ e podemos estabelecer algumas relações entre os problemas associados (PMFQ), $(\text{PMFQ})_{x^*}$ e $(\text{PMFQ})_{x^*}^w$ a partir dessas definições.

Teorema 6.1 *Se x^* é uma solução ótima do problema escalar ponderado $(\text{PMFQ})_{x^*}^w$, então $x^* \in \text{Eff}(\text{PMFQ})$.*

Demonstração: Suponha que $x^* \notin \text{Eff}(\text{PMFQ})$, então existe um ponto $x \in S$, tal que,

$$\begin{aligned}
\frac{f_i(x)}{g_i(x)} \leq \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} & \implies f_i(x) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} g_i(x) \leq 0 \implies \sum_{i=1}^m w_i \left(f_i(x) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} g_i(x) \right) < 0 \\
& \implies \sum_{i=1}^m w_i \left(f_i(x) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} g_i(x) \right) < \sum_{i=1}^m w_i \left(f_i(x^*) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} g_i(x^*) \right).
\end{aligned}$$

O que contradiz a minimalidade de x^* em $(\text{PMFQ})_{x^*}^w$. ■

Lema 6.1 *Seja $x^* \in \text{Eff}(\text{PMFQ})$, e suponha que x^* satisfaz a qualificação de restrições (QRGG). Então existem vetores $\tau^* > 0$ e $\lambda^* \geq 0$, tais que,*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \tau_i^* \left(\nabla f_i(x^*) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \nabla g_i(x^*) \right) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) &= 0, \\ \sum_{j=1}^p \lambda_j^* h_j(x^*) &= 0. \end{aligned}$$

Demonstração: Sejam $x^* \in S$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, $\mu > 0$ e $\tau_i = \frac{\mu_i}{g_i(x^*)} > 0$, $i \in I$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} &= \sum_{i=1}^m \tau_i g_i(x^*) \nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \\ &= \sum_{i=1}^m \tau_i g_i(x^*) \left(\frac{\nabla f_i(x^*) g_i(x^*) - \nabla g_i(x^*) f_i(x^*)}{[g_i(x^*)]^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \tau_i \left(\nabla f_i(x^*) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \nabla g_i(x^*) \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Se $x^* \in \text{Eff}(\text{PMFQ})$, pelo Lema 1.2, apresentado na Seção 1.4, existem vetores $\mu^* > 0$ e $\lambda^* \geq 0$, tais que, (x^*, μ^*, λ^*) é um ponto crítico vetorial *KKT* do problema (PMFQ). Ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) &= 0, \\ \sum_{j=1}^p \lambda_j^* h_j(x^*) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, de (6.1), existem $\tau^* > 0$, $\tau_i^* = \frac{\mu_i^*}{g_i(x^*)} > 0$, $i \in I$, e $\lambda^* \geq 0$, tais que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \tau_i^* \left(\nabla f_i(x^*) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \nabla g_i(x^*) \right) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) &= 0, \\ \sum_{j=1}^p \lambda_j^* h_j(x^*) &= 0. \end{aligned}$$

■

Lema 6.2 *Seja $x^* \in S$. Se existe $w \in \mathcal{W}$, tal que, a matriz $F(w, x^*)$ é semidefinida positiva, então a função objetivo do problema $(PMFQ)_{x^*}^w$ é convexa. Por outro lado, se a matriz $F_i(x^*)$ é semidefinida positiva, $\forall i \in I$, então a função objetivo do problema $(PMFQ)_{x^*}^w$ e as funções objetivo do problema $(PMFQ)_{x^*}$ são convexas.*

Demonstração: Dado $x_1, x_2 \in S$, obtemos para cada $i \in I$,

$$\begin{aligned} f_i(x_1) - f_i(x_2) &= (x_1 - x_2)^T A_i(x_1 - x_2) + \nabla f_i(x_2)^T (x_1 - x_2), \\ g_i(x_1) - g_i(x_2) &= (x_1 - x_2)^T B_i(x_1 - x_2) + \nabla g_i(x_2)^T (x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Logo, para as funções objetivo do problema $(PMFQ)_{x^*}$, temos

$$\begin{aligned} &\left(f_i(x_1) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} g_i(x_1) \right) - \left(f_i(x_2) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} g_i(x_2) \right) = (f_i(x_1) - f_i(x_2)) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} (g_i(x_1) - g_i(x_2)) \\ &= \{ (x_1 - x_2)^T A_i(x_1 - x_2) + \nabla f_i(x_2)^T (x_1 - x_2) \} - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \{ (x_1 - x_2)^T B_i(x_1 - x_2) + \nabla g_i(x_2)^T (x_1 - x_2) \} \\ &= (x_1 - x_2)^T \left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right] (x_1 - x_2) + \left(\nabla f_i(x_2) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \nabla g_i(x_2) \right)^T (x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Se existe $w \in \mathcal{W}$, tal que, a matriz $F(w, x^*)$ é semidefinida positiva, então

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m w_i \left(f_i(x_1) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} g_i(x_1) \right) - \sum_{i=1}^m w_i \left(f_i(x_2) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} g_i(x_2) \right) = \\ &= (x_1 - x_2)^T \sum_{i=1}^m w_i \left[A_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} B_i \right] (x_1 - x_2) + \sum_{i=1}^m w_i \left(\nabla f_i(x_2) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \nabla g_i(x_2) \right)^T (x_1 - x_2) \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^m w_i \left(\nabla f_i(x_2) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \nabla g_i(x_2) \right) \right)^T (x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Portanto a função objetivo do problema $(PMFQ)_{x^*}^w$ é convexa. E se a matriz $F_i(x^*)$ é semidefinida positiva, $\forall i \in I$, por (6.2) cada função $f_i - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} g_i$ é convexa e a função objetivo do problema $(PMFQ)_{x^*}^w$ é convexa. ■

Observe que a hipótese de semipositividade definida sobre a matriz $F(w, x^*)$ ou sobre as matrizes $F_i(x^*)$, $i \in I$, $x^* \in S$, é pontual. Isso favorece a existência de pontos do problema $(PMFQ)$ onde ela seja válida. Contudo, é mais difícil obter pontos viáveis x^* onde a hipótese sobre as matrizes $F_i(x^*)$, $\forall i \in I$ seja válida do que sobre a matriz $F(w, x^*)$. No próximo exemplo, ilustramos uma situação em que $\forall x \in S$, obtemos $y^T F_i(x) y \geq 0$, $\forall y \in S$, $\forall i \in I$ e, consequentemente, $\forall x \in S$ obtemos $y^T F(w, x) y \geq 0$, $\forall y \in S$.

Exemplo 3 Considere o problema (PMFQ), onde $S = [-2, 2]$ e para todo $x \in S$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{x-2}{x^2+2}, \quad \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{2x^2-x-1}{x^2+1}, \quad \frac{f_3(x)}{g_3(x)} = \frac{-2x^2-2x-5}{x^2+x+1}.$$

Para essas funções, obtemos $\forall y \in S$

$$\begin{aligned} y^T \left[A_1 - \frac{f_1(x)}{g_1(x)} B_1 \right] y &= y^2 \left(0 - \frac{x-2}{x^2+2} \cdot 1 \right) = \frac{y^2(2-x)}{x^2+2} \geq 0, \\ y^T \left[A_2 - \frac{f_2(x)}{g_2(x)} B_2 \right] y &= y^2 \left(2 - \frac{2x^2-x-1}{x^2+1} \cdot 1 \right) = \frac{y^2(x+3)}{x^2+1} \geq 0, \\ y^T \left[A_3 - \frac{f_3(x)}{g_3(x)} B_3 \right] y &= y^2 \left(-2 - \frac{-2x^2-2x-5}{x^2+x+1} \cdot 1 \right) = \frac{3y^2}{x^2+x+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Mostramos na Seção 3.4, através do Corolário 3.3, que $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)$ se e somente se $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)_{x^*}$. No próximo resultado, apresentamos uma relação entre os problemas $(PMFQ)_{x^*}$ e $(PMFQ)_{x^*}^w$ que fornece o inverso do Teorema 6.1.

Teorema 6.2 *Seja $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)_{x^*}$. Suponha que x^* satisfaz a qualificação de restrições (QRGG) e que o vetor de restrições h é formado por funções convexas. Então existe $w \in \mathcal{W}$, tal que, se a matriz $F_i(w, x^*)$ é semidefinida positiva, x^* é solução ótima para o problema escalar ponderado $(PMFQ)_{x^*}^w$.*

Demonstração: Se $x^* \in \text{Eff}(PMFQ)_{x^*}$ e satisfaz (QRGG), pelo Lema 6.1 existem vetores $w > 0$ e $\lambda \geq 0$, tais que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m w_i^* \left(\nabla f_i(x^*) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \nabla g_i(x^*) \right) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) &= 0, \\ \sum_{j=1}^p \lambda_j^* h_j(x^*) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, x^* é um ponto crítico do problema escalar ponderado $(PMFQ)_{x^*}^w$ e, se $F(w, x^*)$ é semidefinida positiva, pelo Lema 6.2 a função objetivo do problema $(PMFQ)_{x^*}^w$ é convexa. Como o vetor de restrições h é formado por funções convexas, segue que x^* é solução ótima do problema $(PMFQ)_{x^*}^w$. ■

6.3 Dualidade

Existem algumas alternativas distintas de duais para se estudar em programação multiobjetivo, um dos mais abordados é o dual multiobjetivo do tipo Mond-Weir [43], descrito na

Seção 1.6. Escolhemos trabalhar com este tipo de dual referente ao problema primal (PMFQ), porém usaremos o problema associado $(\text{PMFQ})_{x^*}$ para gerar a condição de primeira ordem que deve aparecer no conjunto de restrições do problema dual. O problema dual fracional quadrático (DFQ) que vamos tratar é definido como segue.

$$\begin{aligned}
 (\text{DFQ}) \quad & \text{Maximizar} \quad \frac{f(u)}{g(u)} = \left(\frac{f_1(u)}{g_1(u)}, \dots, \frac{f_m(u)}{g_m(u)} \right) \\
 & \text{s.a} \quad \sum_{i=1}^m \tau_i \left(\nabla f_i(u) - \frac{f(u)}{g(u)} \nabla g_i(u) \right) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(u) = 0, \\
 & \quad \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(u) \geq 0, \\
 & \quad \tau > 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \sum_{j=1}^p \lambda_j = 1, \\
 & \quad u \in S,
 \end{aligned}$$

onde f_i e g_i , $i \in I$, são as mesmas funções quadráticas definidas no problema (PMFQ), e o seu conjunto viável denotamos por Y .

6.3.1 Dualidade fraca

Teorema 6.3 (*Dualidade fraca*) *Seja $x \in S$ e $(u, \tau, \lambda) \in Y$. Se a matriz $F(\tau, u)$ é semidefinida positiva e o vetor de restrições h é formado por funções convexas, então não pode ocorrer*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{f(u)}{g(u)}.$$

Demonstração: Suponha que existem $x \in S$ e $(u, \tau, \lambda) \in Y$, tais que, $\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{f(u)}{g(u)}$, então

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{f(u)}{g(u)} \implies f(x) - \frac{f(u)}{g(u)} g(x) \leq 0 \implies \sum_{i=1}^m \tau_i \left(f_i(x) - \frac{f_i(u)}{g_i(u)} g_i(x) \right) < 0.$$

Como $x \in S$, implica que $\sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(x) \leq 0$, e como $\sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(u) \geq 0$, obtemos

$$\sum_{i=1}^m \tau_i \left(f_i(x) - \frac{f_i(u)}{g_i(u)} g_i(x) \right) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(x) < \sum_{i=1}^m \tau_i \left(f_i(u) - \frac{f_i(u)}{g_i(u)} g_i(u) \right) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(u).$$

Se a matriz $F(\tau, u)$ é semidefinida positiva, pelo Lema 6.2, a função objetivo do problema $(\text{PMFQ})_{x^*}^\tau$ é convexa e, se o vetor de restrições h é formado por funções convexas, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &> \sum_{i=1}^m \tau_i \left[\left(f_i(x) - \frac{f_i(u)}{g_i(u)} g_i(x) \right) - \left(f_i(u) - \frac{f_i(u)}{g_i(u)} g_i(u) \right) \right] + \sum_{i=1}^p \lambda_j (h_j(x) - h_j(u)) \\
&\geq \sum_{i=1}^m \tau_i \left(\nabla f_i(u) - \frac{f_i(u)}{g_i(u)} \nabla g_i(u) \right)^T (x - u) + \sum_{i=1}^p \lambda_j \nabla h_j(u)^T (x - u) \\
&= (x - u)^T \left(\sum_{i=1}^m \tau_i \left(\nabla f_i(u) - \frac{f_i(u)}{g_i(u)} \nabla g_i(u) \right) + \sum_{i=1}^p \lambda_j \nabla h_j(u) \right) = 0.
\end{aligned}$$

O que é um absurdo. ■

6.3.2 Dualidade forte

Teorema 6.4 (*Dualidade forte*) *Seja $x^* \in \text{Eff}(\text{PMFQ})$, e suponha que x^* satisfaz a qualificação de restrições (QRGG). Então existe (τ^*, λ^*) , tal que, (x^*, τ^*, λ^*) é viável para o problema (DFQ) e os valores das funções objetivo dos problemas (PMFQ) e (DFQ) são iguais. E mais, se a matriz $F(\tau^*, x^*)$ é semidefinida positiva e o vetor de restrições h é formado por funções convexas, então $(x^*, \tau^*, \lambda^*) \in \text{Eff}(\text{DFQ})$.*

Demonstração: Se $x^* \in \text{Eff}(\text{PMFQ})$, pelo Lema 6.1, existem $\tau^* > 0$ e $\lambda^* \geq 0$, tais que, (x^*, τ^*, λ^*) satisfaz

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \tau_i^* \left(\nabla f_i(x^*) - \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} \nabla g_i(x^*) \right) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) &= 0, \\
\sum_{j=1}^p \lambda_j^* h_j(x^*) &= 0.
\end{aligned}$$

Então $(x^*, \tau^*, \lambda^*) \in Y$, e os valores das funções objetivo dos problemas (PMFQ) e (DFQ) são iguais. Por outro lado, se a matriz $F(\tau^*, x^*)$ é semidefinida positiva, o vetor de restrições h é formado por funções convexas e $(x^*, \tau^*, \lambda^*) \notin \text{Eff}(\text{DFQ})$, então existe um outro ponto $(u, \tau, \lambda) \in Y$, tal que,

$$\frac{f(u)}{g(u)} \geq \frac{f(x^*)}{g(x^*)}.$$

O que contradiz a dualidade fraca. ■

6.3.3 Dualidade inversa

Teorema 6.5 (*Dualidade inversa*) Seja $(u^*, \tau^*, \lambda^*) \in Y$, tal que, u^* é um ponto viável do problema primal (PMFQ). Se a matriz $F(\tau^*, u^*)$ é semidefinida positiva e o vetor de restrições h é formado por funções convexas, então $u^* \in \text{Eff}(\text{PMFQ})$.

Demonstração: Se $(u^*, \tau^*, \lambda^*) \in Y$ e $u^* \in S$, então $\sum_{j=1}^p \lambda_j^* h_j(u^*) \geq 0$, $\sum_{j=1}^p \lambda_j^* h_j(u^*) \leq 0$ e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \tau_i^* \left(\nabla f_i(u^*) - \frac{f_i(u^*)}{g_i(u^*)} \nabla g_i(u^*) \right) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* \nabla h_j(u^*) &= 0, \\ \sum_{j=1}^p \lambda_j^* h_j(u^*) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, u^* é um ponto crítico para o problema escalar ponderado $(\text{PMFQ})_{u^*}^{\tau^*}$. Se a matriz $F(\tau^*, u^*)$ é semidefinida positiva, pelo Lema 6.2 a função objetivo do problema $(\text{PMFQ})_{u^*}^{\tau^*}$ é convexa e, se o vetor de restrições h é formado por funções convexas, o ponto u^* é solução ótima do problema $(\text{PMFQ})_{u^*}^{\tau^*}$. Segue do Teorema 6.1 que $u^* \in \text{Eff}(\text{PMFQ})$. ■

Podemos obter um segundo tipo de teorema de dualidade inversa exigindo um pouco mais da função matricial F . Vamos precisar que existam vetores $(w, x) \in \mathcal{W} \times S$, tais que, $F(w, x)$ seja definida positiva, ou seja, $y^T F(w, x) y > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$.

Teorema 6.6 (*Dualidade inversa*) Seja $x^* \in S$ e $(u^*, \tau^*, \lambda^*) \in Y$, tais que,

$$\sum_{i=1}^m \tau_i^* \frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} = \sum_{i=1}^m \tau_i^* \frac{f_i(u^*)}{g_i(u^*)}. \quad (6.3)$$

Se a matriz $F\left(\frac{\tau}{g(x^*)}, u^*\right)$ é definida positiva e o vetor de restrições h é formado por funções convexas, então $x^* = u^*$.

Demonstração: Suponha que x^* e u^* são diferentes. Como $x^* \in S$ e $(u^*, \tau^*, \lambda^*) \in Y$, então $-\sum_{j=1}^p \lambda_j^* h_j(u^*) \leq 0$, $\sum_{j=1}^p \lambda_j^* h_j(x^*) \leq 0$ e, se o vetor de restrições h é formado por funções convexas, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\geq \sum_{j=1}^p \lambda_j^* h_j(x^*) - \sum_{j=1}^p \lambda_j^* h_j(u^*) \geq \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j^* \nabla h_j(u^*) \right)^T (x^* - u^*) = \\
&= \left(- \sum_{i=1}^m \tau_i^* \left(\nabla f_i(u^*) - \frac{f_i(u^*)}{g_i(u^*)} \nabla g_i(u^*) \right) \right)^T (x^* - u^*) \implies \\
&\implies \sum_{i=1}^m \tau_i^* \left(\nabla f_i(u^*) - \frac{f_i(u^*)}{g_i(u^*)} \nabla g_i(u^*) \right)^T (x^* - u^*) \geq 0.
\end{aligned}$$

Vimos na Seção 5.1 que dado $u^* \in S$, para cada $i \in I$ e $\forall x \in S$, temos

$$\frac{f_i(x)}{g_i(x)} - \frac{f_i(u^*)}{g_i(u^*)} = \frac{1}{g_i(x)} \left\{ (x - u^*)^T \left[A_i - \frac{f_i(u^*)}{g_i(u^*)} B_i \right] (x - u^*) \right\} + \frac{1}{g_i(x)} \left\{ \left(\nabla f_i(u^*) - \frac{f_i(u^*)}{g_i(u^*)} \nabla g_i(u^*) \right)^T (x - u^*) \right\}.$$

Portanto, para $(\tau^*, x^*) \in \mathcal{W} \times S$, obtemos

$$\sum_{i=1}^m \tau_i^* \left(\frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} - \frac{f_i(u^*)}{g_i(u^*)} \right) = (x^* - u^*)^T \left[F \left(\frac{\tau^*}{g(x^*)}, u^* \right) \right] (x^* - u^*) + \sum_{i=1}^m \frac{\tau_i^*}{g_i(x^*)} \left(\nabla f_i(u^*) - \frac{f_i(u^*)}{g_i(u^*)} \nabla g_i(u^*) \right)^T (x^* - u^*).$$

Se $F \left(\frac{\tau^*}{g(x^*)}, u^* \right)$ é definida positiva e $x^* \neq u^*$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \tau_i^* \left(\frac{f_i(x^*)}{g_i(x^*)} - \frac{f_i(u^*)}{g_i(u^*)} \right) &> \sum_{i=1}^m \frac{\tau_i^*}{g_i(x^*)} \left(\nabla f_i(u^*) - \frac{f_i(u^*)}{g_i(u^*)} \nabla g_i(u^*) \right)^T (x^* - u^*) \\
&\geq \min_{i \in I} \left\{ \frac{1}{g_i(x^*)} \right\} \sum_{i=1}^m \tau_i^* \left(\nabla f_i(u^*) - \frac{f_i(u^*)}{g_i(u^*)} \nabla g_i(u^*) \right)^T (x^* - u^*) \geq 0.
\end{aligned}$$

O que contradiz (6.3). ■

6.4 Conclusão

Apresentamos como contribuição neste capítulo alguns resultados que relacionam o problema (PMFQ) com um problema escalar ponderado associado. Com esses resultados e com hipóteses sobre uma determinada função matricial, que envolve as Hessianas das funções f_i e g_i , $i \in I$, foi possível demonstrar os principais teoremas de dualidade em programação multiobjetivo para o problema dual tipo Mond-Weir do problema (PMFQ).

Capítulo 7

Conclusões e Trabalhos Futuros

7.1 Conclusões

Neste trabalho de pesquisa apresentamos um estudo detalhado sobre as soluções eficientes de um problema particular de programação multiobjetivo, denominado de problema de programação multiobjetivo fracional quadrático (PMFQ), cujo o vetor objetivo é formado por frações entre funções quadráticas. A seguir, apresentamos as nossas conclusões e listamos as contribuições deste trabalho, que se divide basicamente em quatro partes.

7.1.1 Condições de otimalidade e o raio de eficiência

Na primeira parte das contribuições deste trabalho, introduzimos o conceito de raio de eficiência de uma solução localmente eficiente, que se traduz em uma abordagem alternativa para se estudar as soluções de um problema de programação multiobjetivo, que em nosso problema (PMFQ), permitiu obter condições de otimalidade que dispensa o uso de hipóteses adicionais sobre as funções objetivo, como alguns tipos de convexidade generalizadas, que é muito comum neste contexto.

Nossa abordagem tem aspecto computacional e trata-se basicamente de medir duas vizinhanças distintas de uma solução localmente eficiente. Sendo que uma delas tem raio máximo onde a solução é não dominada, e com a outra, podemos a partir da anterior, delimitar o espaço de busca por outros pontos que a dominem. Conhecer tais vizinhanças permite concluir ou não se uma solução localmente eficiente também é eficiente no conjunto viável e, permite ainda, reduzir o espaço de avaliação no uso de métodos computacionais de busca. O que facilita a construção de bons métodos computacionais para a resolução de problemas fracionais quadráticos com mais de um objetivo.

Encerramos esta parcela contribuições com algumas propostas de métodos computacionais que objetivam calcular o raio de eficiência de uma solução localmente eficiente e permite obter as demais conclusões.

7.1.2 Solução localmente eficiente e sua caracterização

Na segunda parte, levando-se em conta as características das funções objetivo do problema (PMFQ), apresentamos como contribuição uma caracterização para soluções localmente eficientes do problema irrestrito. Esta caracterização permitiu propor dois métodos computacionais que testam se um ponto é localmente eficiente e, com os resultados obtidos na primeira parte, foi possível construir um método computacional de busca que identifica no conjunto viável algumas soluções localmente eficientes e, dependendo do critério de parada utilizado, encerra seu processo encontrando uma solução eficiente.

7.1.3 Condições de otimalidade e soluções eficientes

Na terceira parte das contribuições deste trabalho, apresentamos algumas condições suficientes de otimalidade global para as soluções do problema (PMFQ). Essas condições se dividem em duas partes. Na primeira parte, utilizamos uma abordagem semelhante à utilizada por Liang et al. em [35], porém com hipóteses mais relaxadas de convexidade genaralizada nas funções objetivo. Na segunda parte, aproveitamos as diagonalizações das Hessianas A_i , B_i , $i \in I$, e vimos que as condições de otimalidade podem ser obtidas impondo algumas hipóteses sobre uma determinada função envolvendo o somatório das Hessianas. Esta abordagem possibilitou propor um método computacional de teste, que depende da solução de um problema de otimização quadrática e que verifica se um ponto viável é eficiente. Possibilitou ainda, propor um outro método computacional de busca, que é guiado pelos autovalores das matrizes A_i , $i \in I$, e encontra um subconjunto do conjunto de soluções eficientes.

7.1.4 Resultados de dualidade

Na quarta parte, apresentamos como contribuição alguns resultados que relacionam o problema (PMFQ) com um problema escalar ponderado associado. Com esses resultados e com hipóteses sobre uma determinada função matricial, que envolve as Hessianas das funções f_i e g_i , $i \in I$, foi possível demonstrar os principais teoremas de dualidade em programação multiobjetivo para o problema dual tipo Mond-Weir do problema (PMFQ).

7.1.5 Métodos computacionais

Ao longo deste trabalho foram propostos vários métodos computacionais desenvolvidos a partir dos resultados obtidos em cada capítulo. Os métodos que propomos são, em sua maioria, de difícil implementação, porém alguns deles merecem destaque.

No Capítulo 3, apresentamos o método computacional *Ramificação*, que consiste em ramificar o conjunto de direções viáveis em subconjuntos menores e mais fáceis de ser analisados. É obtido uma cota inferior para o raio de eficiência de uma solução localmente eficiente ao analisar cada um desses subconjuntos. Apesar da sua complexidade, acreditamos que este método possa ser implementado computacionalmente, porém tem a desvantagem de precisar iniciar com uma solução local previamente conhecida. Outro método interessante neste capítulo, é o método *Raio de eficiência 2*, que tem uma abordagem paramétrica e pode ser implementado computacionalmente se uma parametrização adequada das direções viáveis for conhecida. Fizemos ainda, um pequeno teste computacional para validar este último método, onde usamos uma parametrização usual em coordenadas polares para as direções viáveis.

No Capítulo 4, apresentamos o método computacional *Teste de eficiência local 2*, que consiste em um método que testa se um ponto viável é uma solução localmente eficiente. Sua característica interessante, é que apenas algumas das direções ortogonais aos gradientes das funções objetivo do problema associado $(PMFQ)_{x^*}$ devem ser considerados no teste. Sua complexidade consiste em resolver vários sistemas mistos de equações quadráticas e lineares. Utilizando os resultados deste capítulo e do Capítulo 3, propomos um primeiro método computacional de busca, chamado *Método de busca local*, que inicia de um ponto viável arbitrário e, gera durante seus passos, uma sequência de pontos localmente eficientes. Dependendo ainda do critério de parada, o método retorna no final uma solução eficiente ou uma aproximação de uma solução eficiente.

No Capítulo 5, propomos um método computacional de teste, chamado *Teste de eficiência global*, que consiste em verificar se um ponto viável é uma solução eficiente do problema $(PMFQ)$ ao resolver um problema escalar de otimização quadrática no conjunto viável e, por isso, pode ser facilmente implementado. Utilizando os resultados deste capítulo, propomos um segundo método computacional de busca, chamado *Método de busca global*, que identifica um subconjunto do conjunto $Eff(PMFQ)$ efetuando algumas buscas no conjunto viável. Essas buscas têm a particularidade de serem guiadas pelos sinais dos autovalores das matrizes A_i , $i \in I$, e pelas avaliações das funções f_i , $i \in I$, em um ponto que pretende-se incluir ou não neste subconjunto de soluções eficientes.

7.1.6 Aplicações para o problema em estudo

O problema (PMFQ) tem aplicações em algumas áreas do conhecimento, como por exemplo, em problemas de gestão na seleção de carteiras no setor financeiro. Acreditamos que nossa abordagem teórica possa contribuir para a resolução de alguns desses problemas e, principalmente, possa permitir o desenvolvimento de técnicas computacionais mais adequadas.

7.2 Trabalhos Futuros

A seguir, apresentamos algumas possibilidades de continuação deste trabalho de pesquisa.

7.2.1 Propostas diretamente relacionadas ao tema

Naturalmente, o próximo passo que deve seguir desta pesquisa é a implementação dos métodos computacionais propostos ao longo do texto. O mais interessante é que cada implementação seja validada efetuando-se testes computacionais em classes de exemplares selecionados a partir de problemas do cotidiano, porém, outra possibilidade é gerar classes de exemplares arbitrários.

Como todo trabalho de pesquisa pode ser melhorado, outro objetivo é a procura incessante por novos itens e temas que melhore cada vez mais toda a teoria e as contribuições aqui apresentadas. Por exemplo, ainda falta caracterizar as soluções localmente eficientes no Capítulo 4 para o caso de problemas com restrições.

7.2.2 Propostas de temas correlatos

Uma outra opção interessante para se trabalhar com o tema raio de eficiência é estender os resultados obtidos no problema (PMFQ) para problemas com outras classes de funções objetivo. Por exemplo, no caso de funções diferenciáveis, quando a expansão de Taylor de ordem 3 das funções objetivo, em uma determinada direção, possa ser calculada de forma exata. Neste caso, acrescentamos dificuldades extras, pois teremos nesta direção uma função de uma variável com até três raízes para serem analisadas no cálculo do raio de eficiência de uma solução localmente eficiente. Um exemplo que mostra tal dificuldade está ilustrado na Figura 7.1. Esta figura é análoga as figuras apresentadas na Seção 3.3, e representa a expansão de Taylor em torno do zero da função $r_i = p_i(x^* + \lambda d)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\lambda > 0$, ou seja, das funções p_i avaliadas ao longo do vetor $x^* + \lambda d$, no caso em que $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$. Nela, estão plotados os pontos das funções $r_i(\lambda) = p_i(x^* + \lambda d)$ nas coordenadas $(\lambda, r_i(\lambda))$, assumindo que cada função p_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, é uma função cúbica.

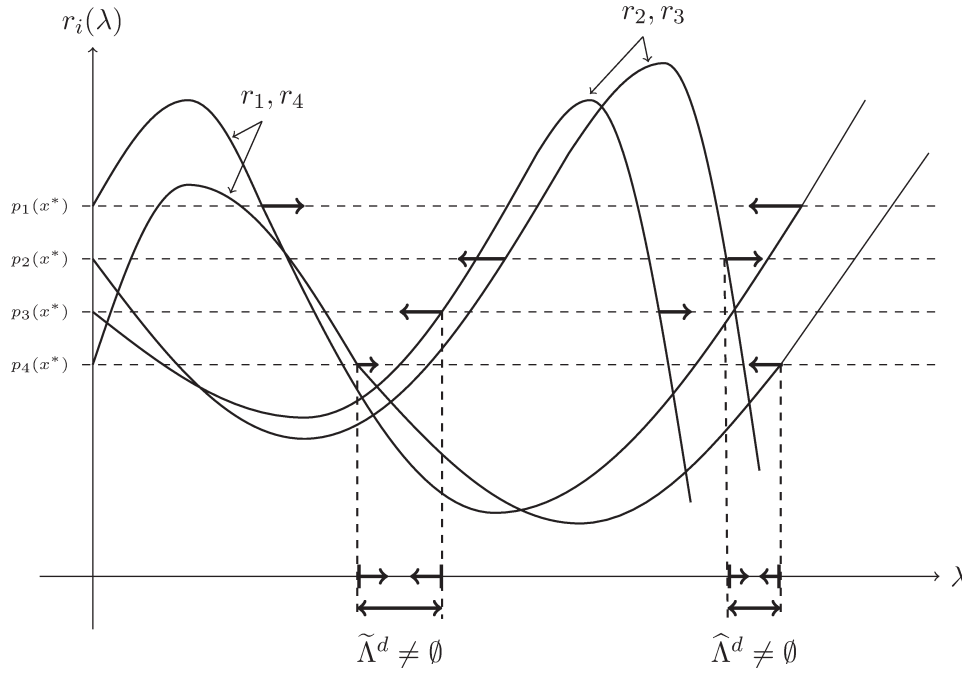


Figura 7.1: Exemplo de trabalho futuro: busca por x' que domina $x^* \in \text{Leff}(PMFQ')_{x^*}$

Observe na Figura 7.1 que cada equação $r_i(\lambda) - p_i(x^*) = 0$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, tem três raízes e, de forma análoga ao apresentado na Seção 3.3, encontramos dois intervalos não vazios $\tilde{\Lambda}^d$ e $\hat{\Lambda}^d$, tais que, $\forall \lambda \in \tilde{\Lambda}^d \cup \hat{\Lambda}^d$, o ponto $x' = x^* + \lambda d$ domina a solução x^* . Com esta perspectiva de trabalho, novos conjuntos e parâmetros do tipo X_0 , X_1 , X_2 , λ_1^d e λ_2^d precisam ser definidos para possibilitar o cálculo do raio de eficiência de x^* , bem como, a identificação dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ onde podem haver pontos x' que dominam x^* .

Ainda com o tema raio de eficiência, outra possibilidade é trabalhar com funções objetivo diferenciáveis, cuja expansão de Taylor de segunda ordem tem resto não negativo. Ou seja, dados $x^* \in \text{Leff}(PM)$, $\lambda > 0$ e uma direção d , suponha que para um problema (PM) cada função f_i , $i \in I$, satisfaz $f_i(x^* + \lambda d) = f_i(x^*) + \lambda \nabla f_i(x^*)^T d + \lambda^2 d^T \nabla^2 f_i(x^*) d + \lambda^2 \mathcal{O}(\lambda, d)$, então se ocorrer $\mathcal{O}(\lambda, d) \geq 0$, $\forall i \in I$, obtemos $f_i(x^* + \lambda d) - f_i(x^*) \geq \lambda \nabla f_i(x^*)^T d + \lambda^2 d^T \nabla^2 f_i(x^*) d$, $\forall i \in I$, e o que desejamos, é encontrar pontos viáveis $x' = x^* + \lambda d$, tais que, $0 \geq f_i(x') - f_i(x^*)$, $\forall i \in I$, ou seja, $0 \geq f_i(x') - f_i(x^*) \geq \lambda \nabla f_i(x^*)^T d + \lambda^2 d^T \nabla^2 f_i(x^*) d$, $\forall i \in I$. portanto, podemos tentar adaptar os resultados obtidos no Capítulo 3 para este caso.

7.2.3 Propostas com outras perspectivas

Podemos estudar o que ocorre com o cálculo do raio de eficiência de uma solução localmente eficiente, se admitirmos como hipótese para as funções objetivos do problema (PM) algum dos diversos tipos de convexidade generalizadas. Isso pode facilitar ou dificultar o cálculo do raio de eficiência.

Outra possibilidade, semelhante ao Capítulo 5, é verificar se em relação as condições de otimalidade global e resultados de dualidade, apresentados em trabalhos publicados na literatura, podemos enfraquecer as hipóteses de convexidade generalizada supondo algo parecido com as que foram feitas neste trabalho sobre a função matricial $F : \mathcal{W} \times S \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, dada por

$$F(w, x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m w_i \left[\nabla^2 f_i(x) - \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \nabla^2 g_i(x) \right],$$

que é análoga a função apresentada na Seção 6.2.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Abadie. On the Kuhn-Tucker theorem. In J. Abadie, editor, *Nonlinear Programming*. North-Holland, Amsterdam, 1967.
- [2] B. Aghezzaf and M. Hachimi. Generalized convexity and duality in multiobjective programming problems. *Journal of Global Optimization*, 18:91–101, 2000.
- [3] T. Antczak. Modified ratio objective approach in mathematical programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 126(1):23–40, 2005.
- [4] M. T. Arévalo and A. Zapata. Selección de carteras mediante programación fraccionada multiobjetivo. *XXIII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, Valencia, España*, 1997.
- [5] A. Beato, P. R. Canales, P. L. L. Calvo, and R. R. Bravo. Multiobjective quadratic problem: Characterization of the efficient points. In J.P. Crouzeix, J.E. Martinez-Legaz, and M. Volle, editors, *Generalized Convexity, Generalized Monotonicity: Recent Results*, pages 425–438. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
- [6] A. Beato, R. I. Macías, and P. R. Canales. Decisión multicriterio a través de problemas de optimización cuadrático-fraccionales. *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat., España*, 93(04):499–505, 1999.
- [7] C. R. Bector. Duality in nonlinear fractional programming. *Zeitschrift für Operations Research*, 17:183–193, 1973.
- [8] C. R. Bector, S. Chandra, and C. Singh. A linearization approach to multiobjective programming duality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 175:268–279, 1993.
- [9] H. P. Benson. Fractional programming with convex quadratic forms and functions. *European Journal of Operational Research*, 173:351–369, 2006.

- [10] A. Cambini, J. P. Crouzeix, and L. Martein. On the pseudoconvexity of a quadratic fractional function. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, 51(4):677–687, 2002.
- [11] V. Chankong and Y. Y. Haimes. *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*. North-Holland, Elsevier Science Publishing Co., Inc., New York, 1983.
- [12] B. D. Craven. Duality for the generalized convex fractional programs. In S. Schaible and W. T. Ziemba, editors, *Generalized Concavity in Optimization and Economics*, pages 473–490. Academic Press, New York, 1981.
- [13] B. D. Craven. Invex functions and constrained local minima. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 24:357–366, 1981.
- [14] B. D. Craven. *Fractional programming*. Sigma Series in Applied Mathematics, 4. Heldermann Verlag, Berlin, 1988.
- [15] J. P. Crouzeix, J. Ferland, and S. Schaible. Duality in generalized linear fractional programming. *Mathematical Programming*, 27:342–354, 1983.
- [16] W. Dinkelbach. On nonlinear fractional programming. *Management Science*, 13(07):492–498, 1967.
- [17] A. V. Fiacco and G. P. McCormick. *Nonlinear Programming*. Wiley, New York, 1968.
- [18] A. M. Geoffrion. Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22:618–630, 1968.
- [19] J. Y. Gotoh and H. Konno. Maximization of the ratio of two convex quadratic functions over a polytope. *Computational Optimization and Applications*, 20(1):43–60, 2001.
- [20] M. Guignard. Generalized Kuhn-Tucker conditions for mathematical programming problems in a Banach space. *SIAM Journal on Control*, 7:232–241, 1969.
- [21] M. A. Hanson. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 80:544–550, 1981.
- [22] A. Izmailov and M. Solodov. *Otimização - Volume 1: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade*. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [23] R. Jagannathan. Duality for nonlinear fractional programs. *Zeitschrift für Operations Research*, 17:1–3, 1973.

- [24] J. Jahn. *Vector Optimization-Theory, Applications and Extensions*. Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2004.
- [25] V. Jeyakumar. Strong and weak invexity in mathematical programming. *Methods of Operations Research*, 55:109–125, 1985.
- [26] V. Jeyakumar and B. Mond. On generalised convex mathematical programming. *The Journal of the Australian Mathematical Society*, 34:43–53, 1992. Series B. Applied Mathematics.
- [27] S. Karlin. *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*, volume 1. Addison-Wesley, 1959.
- [28] Z. A. Khan and M. A. Hanson. On ratio invexity in mathematical programming. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 205(2):330–336, 1997.
- [29] H. Konno and M. Inori. Bond portfolio optimization by bilinear fractional programming. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 32(02):143–158, 1989.
- [30] P. Korhonen and G. Y. Yu. A reference direction approach to multiple objective quadratic-linear programming. *European Journal of Operational Research*, 102(3):601–610, 1997.
- [31] P. Korhonen and G. Y. Yu. On computing objective function values in multiple objective quadratic-linear programming. *European Journal of Operational Research*, 106(1):184–190, 1998.
- [32] J. S. H. Kornbluth and R. E. Steuer. Multiple objective linear fractional programming. *Management Science*, 27(9):1024–1039, 1981.
- [33] H. W. Kuhn and A. W. Tucker. Nonlinear programming. Proc. Berkeley Sympos. on Mathematical Statistics and Probability, California Press, July 31 - August 12, 481–492, 1951.
- [34] Z. A. Liang, H. X. Huang, and P. M. Pardalos. Optimality conditions and duality for a class of nonlinear fractional programming problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 110:611–619, 2001.
- [35] Z. A. Liang, H. X. Huang, and P. M. Pardalos. Efficiency conditions and duality for a class of multiobjective fractional programming problems. *Journal of Global Optimization*, 27:447–471, 2003.

- [36] A. W. Lo and A. C. MacKinlay. Maximizing predictability in the stock and bond markets. *Macroeconomic Dynamics*, 1(01):102–134, January 1997.
- [37] T. Maeda. Constraint qualifications in multiobjective optimization problems: Differentiable case. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 80:483–500, 1994.
- [38] O. L. Mangasarian. *Nonlinear programming*. Ed. MacGraw-Hill, 1969.
- [39] O. L. Mangasarian and J. Ponstein. Minmax and duality in nonlinear programming. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 11:504–518, 1965.
- [40] D. H. Martin. The essence of invexity. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 47(01):65–76, 1985.
- [41] K. M. Miettinen. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Kluwer Academic Publishers, International Series in Operations Research & Management Science, Boston, 1999.
- [42] M. Minoux. *Mathematical Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons Ltd., Brighton-Sussex-UK, 1986.
- [43] B. Mond and T. Weir. Generalized concavity and duality. In S. Schaible and W.T. Ziemba, editors, *Generalized Concavity Optimization and Economics*, pages 263–280. Academic Press, New York, 1981.
- [44] H. Moulin and F. Fogelman-Soulié. *La convexité dans les mathématiques de la décision*. Hermann, Paris, 1979.
- [45] P. M. Naccache. Connectedness of the set of nondominated outcomes in multicriteria optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 25(03):459–467, 1978.
- [46] H. Nikaidô. On von Neumann’s minimax theorem. *Pac. J. Math.*, 4:65–72, 1954.
- [47] R. Osuna-Gómez. *Programación con objetivos múltiples: Dualidad*. Phd thesis, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Sevilla, Sevilla, Spain, 1995.
- [48] R. Osuna-Gómez, B. H. Jiménez, and L. L. Salles Neto. Duality theory for the multi-objective nonlinear programming involving generalized convex functions. In M. Arana-Jimenez, A. Rufián-Lizana, and G. Ruiz-Garzón, editors, *Optimality Conditions in Vector Optimization*, volume 1, pages 105–118. Sharjah: Bentham, 1 ed., 2010.

- [49] R. Osuna-Gómez, A. Rufián-Lizana, and P. R. Canales. Multiobjective fractional programming with generalized convexity. *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa, TOP*, 8(1):97–110, 2000.
- [50] V. Pareto. *Cours d'Economie Politique*. Rouge, Lausanne, Switzerland, 1896.
- [51] V. Preda. On efficiency and duality for multiobjective programs. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 166(2):365–377, 1992.
- [52] L. V. Reddy and R. N. Mukherjee. Some results on mathematical programming with generalized ratio invexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 240(2):299–310, 1999.
- [53] R. Rhode and R. Weber. *Multiple Objective Quadratic-Linear Programming*. in Operational Research, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, J.P. Brans edition, 1981.
- [54] C. Romero. *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones*. Alianza Universidad Textos, Madrid, Alianza Editorial, 1993.
- [55] L. B. Santos, R. Osuna-Gómez, and M. A. Rojas-Medar. Nonsmooth multiobjective fractional programming with generalized convexity. *Revista Integración, Escuela de Matemáticas Universidad Industrial de Santander*, 26(1):1–12, 2008.
- [56] S. Schaible. Duality in fractional programming: a unified approach. *Operations Research*, 24:452–461, 1976.
- [57] S. Schaible. Fractional programming, I: Duality. *Management Science*, 22:858–867, 1976.
- [58] S. Schaible and J. Shi. Recent developments in fractional programming: Single-ratio and Max-Min case. *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, pages 493–506, 2003.
- [59] C. Singh and M. A. Hanson. Multiobjective fractional programming duality theory. *Naval Research Logistics*, 38(06):925–933, 1991.
- [60] M. Slater. Lagrange multipliers revisited: a contribution to nonlinear programming. *Cowles Commission Discussion Paper: Mathematics 403*, 1950.
- [61] H. Tuy. Sur les inégalités linéaires. *Colloquium Mathematicum*, 13:107–123, 1964.

-
- [62] H. R. Varian. *Microeconomic analysis*. Norton & Company, New York, 1984.
- [63] T. Weir. A note on invex functions and duality in generalized fractional programming. *Research Report, Department of Mathematics, The University of New South Wales*, 1990. ACT 2600, Australia.
- [64] P. Wolfe. A duality theorem for nonlinear programming. *Quarterly of Applied Mathematics*, 19:239–244, 1961.
- [65] X. Yang. Alternative theorems and optimality conditions with weakened convexity. *Opsearch*, 29(2):125–135, 1992.
- [66] X. M. Yang, K. L. Teo, and X. Q. Yang. Duality for a class of nondifferentiable multi-objective programming problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 252:999–1005, 2000.