CLASSIFICAÇÃO DOS GRUPOS DE LIE REAIS CONEXOS DE DIMENSÃO $\leq$ 3.

Herbert de Jesus Bazani

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nelo da Silva Allan

CAMPINAS

1978

Meus agradecimentos ao Prof. Dr. Nelo da Silva Allan pela orientação e incentivo e também ao Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira que me orientou nos estudos iniciais.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O estudo dos grupos de Lie lineares data do século passado, principalmente com os trabalhos de Sophus Lie (1878). No início do século, Cartan (1908), Weyl (1925) e outros, continuaram este trabalho, dando um caráter mais geral à teoria. Dos grupos de Lie o mais simples é o grupo aditivo dos números reais $\mathbb{R}$. O grupo das transformações lineares inversíveis de um espaço vetorial real de dimensão finita constitui um grupo de Lie, este é o grupo $Gl(n,\mathbb{R})$ das matrizes quadradas das inversíveis de ordem $n \times n$ sobre o corpo dos números reais. Assim, a primeira etapa de um estudo de grupos de Lie é o estudo de $Gl(n,\mathbb{R})$ e seus subgrupos.

A cada grupo de Lie pode-se associar um álgebra de Lie e reciprocamente. No caso acima, associamos $Gl(n,\mathbb{R})$ à álgebra das matrizes $n \times n$ reais $M(n,\mathbb{R})$. Assim, classificando todas as subálgebras de Lie da álgebra $M(n,\mathbb{R})$ obtemos a classificação de todos os subgrupos de Lie (fechados) do grupo de Lie $Gl(n,\mathbb{R})$.

Para grupos de Lie de pequena dimensão é possível fazer uma classificação completa de todos os seus subgrupos. Nosso objetivo é classificar os grupo de Lie de dimensão 1, 2 e 3. Nossa referência é o recente trabalho feito por Koch & Lowenthal - [6].

Iniciamos o capítulo I, recordando as propriedades principais dos grupos topológicos, que são ao mesmo tempo grupos algébricos. Em seguida, no capítulo II, introduzimos o conceito de álgebra de Lie, relacionando-a com a álgebra das matrizes $n \times n$ reais. Com a noção de grupo de Lie estabelecemos a relação entre estes e as álgebras de Lie.

Para cada álgebra de Lie g é possível construir um grupo de Lie G simplesmente conexo cuja álgebra de Lie é g. Se $Z(G)$ é o centro de G e N um subgrupo discreto de $Z(G)$ então G/N é também um grupo de Lie de álgebra g e todo grupo de Lie com álgebra g pode ser obtido por este processo.

No capítulo III, baseado em Jacobson - [4], fazemos a classificação de todas as álgebras de Lie de dimensão 1, 2 e 3. Finalmente, no capítulo IV, associamos a cada uma dessas álgebras de Lie um grupo de Lie G, calculamos seu centro $Z(G)$ e subgrupos discretos N de $Z(G)$ e descrevendo os grupos G/N obtemos a completa classificação.

CAPÍTULO I : GRUPOS TOPOLÓGICOS

Neste trabalho admitimos conhecido a noção de grupo bem como a noção de espaço topológico e suas propriedades. Neste capítulo vamos recordar algumas propriedades de grupo topológico, subgrupo topológico, subgrupo invariante, grupo local e grupo simplesmente conexo.

1.1 - GRUPO TOPOLÓGICO

Vamos introduzir a noção de continuidade em um grupo, obtemos os grupos topológicos e estudaremos algumas principais propriedades.

1.1.1 - Definição : Um espaço topológico G, com uma estrutura de grupo é um grupo topológico se a aplicação $\phi: G \times G \longrightarrow G$ definida por $\phi(x, y) = xy^{-1}$ for contínua.

Vemos que a continuidade da aplicação ϕ equivale à continuidade das aplicações $\psi : G \times G \longrightarrow G$ e $\eta: G \longrightarrow G$ definidas por $\psi(x, y) = xy$ e $\eta(x) = x^{-1}$, respectivamente.

1.1.2 - Definição : Chamaremos de translação à direita (à esquerda) pelo elemento $a \in G$ à função $R_a(L_a)$ definida por

$$R_a : G \longrightarrow G \qquad (L_a : G \longrightarrow G)$$
$$x \longrightarrow xa \qquad\qquad x \longrightarrow ax$$

1.1.3 - Proposição : A translação é uma função contínua.

Demonstração : Basta analisar a função R_a. A prova para L_a é similar.

Consideremos as aplicações

$$\phi : G \longrightarrow G \times G$$
$$x \longrightarrow (x, a) \quad e$$
$$\psi : G \times G \longrightarrow G$$
$$(x, a) \longrightarrow xa$$

Vemos que R_a é a composta $\psi \circ \phi$ que consequentemente é contínua. $\square$

<u>1.1.4 - Definição</u> : Um homomorfismo entre grupos topológicos G e G' é uma aplicação contínua $f : G \longrightarrow G'$ tal que

$f(xy) = f(x)f(y)$, para todo x e y em G.

<u>1.1.5 Definição</u> : Um isomorfismo entre grupos topológicos é um homomorfismo bijetor.

<u>1.1.6 - Proposição</u> : As translações são homeomorfismos de G em G.

<u>Demonstração</u> : Mostremos inicialmente que $R_{a^{-1}} = (R_a)^{-1}$. De fato,

$R_a . R_{a^{-1}}(x) = R_a(xa^{-1}) = (xa^{-1})a = x$, portanto $R_a . R_{a^{-1}} = Id$. Analogamente mostramos que $R_{a^{-1}} . R_a = Id$, logo $R_{a^{-1}} = (R_a)^{-1}$. Sendo R_a bijeção contínua, o mesmo acontece com $R_{a^{-1}}$, o que conclui a nossa demonstração. Com raciocínio semelhante mostramos que L_a é um homeomorfismo. $\square$

Desta proposição segue-se que as vizinhanças de $a \in G$ são da forma $a\mathcal{U}$ onde $\mathcal{U}$ é uma vizinhança da origem.

<u>1.1.7 - Proposição</u> : Se $f : G \longrightarrow G'$ é homomorfismo entre grupos topológicos então f é contínua se e somente se f for contínua em $e \in G$.

<u>Demonstração</u> : Basta mostrar que se f é contínua em $e \in G$ então f é contínua em todo ponto a de G.

Seja $f(a).\mathcal{U}'$ uma vizinhança de $f(a)$ em G', onde $\mathcal{U}'$ é uma vizinhança de e'. Como f é contínua em $e \in G$ e $f(e) = e'$ existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de e em G tal que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}'$; portanto $a\mathcal{U}$ é vizinhança de a e $f(a\mathcal{U}) \subset f(a).f(\mathcal{U}) \subset f(a).\mathcal{U}'$, portanto f é contínua em a. □

<u>1.1.8 - Proposição</u> : Seja V uma vizinhança do elemento neutro e de G. Então

i) $V^{-1} = \{ x^{-1} \in G;\ x \in V \}$ é uma vizinhança de e.

ii) Existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de e tal que $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \subset V$.

iii) Existe uma vizinhança W de e tal que

$$W^2 = WW = \{ xy\ ;\ x \in W,\ y \in W \} \subset V.$$

<u>Demonstração</u> : i) Seja $\phi : G \longrightarrow G$ a aplicação $\phi(x) = x^{-1}$. Como V é aberto (consideraremos sempre neste trabalho vizinhanças abertas), $\phi^{-1}(V) = \{x \in G;\ \phi(x) \in V \} = \{ x \in G;\ x^{-1} \in V \} = \{ (x^{-1})^{-1} \in G,\ x^{-1} \in V \} = V^{-1}$ é aberto e também vizinhança de e, pois $\phi(e) = e$.

ii) Tomando $\mathcal{U} = V \cap V^{-1}$ temos que $\mathcal{U} \subset V$ e $\mathcal{U}^{-1} =$

$= \{ x^{-1} \in G;\ x \in V \cap V^{-1} \} = \{ x^{-1} \in G;\ (x^{-1})^{-1} \in V \cap V^{-1} \} =$

$= \{ x \in G;\ x^{-1} \in V \cap V^{-1} \} = \{x \in G; x \in V^{-1} \cap V\} = \mathcal{U}.$

Para demonstrar (iii) consideremos a aplicação $\psi : G \times G \longrightarrow G$ definida por $\psi(x, y) = xy$. Sendo V aberto, $\psi^{-1}(V)$ é aberto em $G \times G$ na topologia produto, então $\psi^{-1}(V) \supset \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, onde $\mathcal{U}_1$e $\mathcal{U}_2$ são vizinhanças de e em G. Tomemos $W = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap V$. Assim, se a e b estão em W então $(a, b) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \subset \psi^{-1}(V)$ e daí $\psi(a,b) \in V$ ou seja $ab \in V$, portanto $WW \subset V$. □

<u>1.1.9 - Proposição</u> : Sejam F um subconjunto fechado, $\mathcal{U}$ um aberto e P um subconjunto qualquer de um grupo topológico G e $a \in G$. Então Fa, aF e F^{-1} são fechados enquanto que $\mathcal{U}P$, $P\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^{-1}$ são abertos.

<u>Demonstração</u> : Basta observar que as operações em G são contínuas, translações são homeomorfismos e que $\mathcal{U}P = \{up; u \in \mathcal{U},\ p \in P\} = \bigcup_{p \in P} \{\mathcal{U}p\}$ e $P\mathcal{U} = \bigcup_{p \in P} \{p\mathcal{U}\}$. □

<u>1.1.10 - Proposição</u> : Um grupo topológico G é separado (Hausdorff) se e somente se $\{ e \}$ é fechado.

<u>Demonstração</u> : Dados dois pontos $a, b \in G$, a fim de provar o teorema podemos sempre supor que $b = e$, pois translação é contínua.

a) Se G é separado então "seus pontos" são conjuntos fechados e em particular $\{ e \}$ é fechado.

b) Seja agora $\{ e \}$ fechado. Dado a em G, sendo $a \neq e$, temos $R_a\{ e \} = \{ a \}$ fechado pois R_a é homeomorfismo. Logo $G - \{ a \}$ é um aberto contendo e, Pela proposição (1.1.8) existe uma vizinhança W de e, tal que $W = W^{-1}$ e $WW \subset G - \{a\}$. Desta forma $L_a W = aW$ é vizinhança de a e $W \cap aW = \emptyset$, pois caso contrário existiria $b \in W$, tal que $b \in aW$ ou seja $b = ac$ para algum $c \in W = W^{-1}$. Daí, $bc^{-1} = a$ com o que temos $a \in W^2 \subset G - \{a\}$ contradição. As vizinhanças W e aW são disjuntas, consequentemente G é separado. $\square$

1.2 - SUBGRUPO TOPOLÓGICO

Estudaremos aqui algumas condições para que um subconjunto de um grupo topológico seja um grupo topológico.

1.2.1 - Definição : Um subgrupo H de um grupo topológico G é um subgrupo topológico se, com a topologia induzida, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : H \times H &\longrightarrow H \\ (x, y) &\longrightarrow xy^{-1} \end{aligned}$$ for contínua.

1.2.2 - Proposição : Se H é um subgrupo topológico aberto de G então H é fechado em G.

Demonstração : Se H é aberto então $G-H$ é fechado e H é vizinhança de e. Logo existe uma vizinhança W de e tal que $W = W^{-1}$ e $W^2 \subset H$. Assim, dado um elemento qualquer a de $G-H$, aW é vizinhança de a e $aW \cap H = \emptyset$, senão existiria $c = ab \in H$, com $b \in W$; logo $cb^{-1} = a$ e daí $a \in H$, o que é contradição. Portanto $G-H$ é aberto ou seja H é fechado. $\square$

1.2.3 - Proposição : Se H é um subgrupo topológico de G, então a aderência $\overline{H}$ é um subgrupo topológico de G.

Demonstração: Dado $h \in H$, temos $Hh=H \subset \bar{H}$ ou seja $H \subset \bar{H}h^{-1}$. Sendo $\bar{H}h^{-1}$ fechado, temos $\bar{H} \subset \bar{H}h^{-1}$ e daí $\bar{H}h \subset \bar{H}$. Como vale para todo h em H, temos $\bar{H}H \subset \bar{H}$. Assim se $x \in \bar{H}$ temos $xH \subset \bar{H}$ ou seja $H \subset x^{-1}\bar{H}$, sendo $x^{-1}\bar{H}$ fechado temos $\bar{H} \subset x^{-1}\bar{H}$ e daí $x\bar{H} \subset \bar{H}$. Como vale para todo x, segue-se que $\bar{H}\bar{H} \subset \bar{H}$.

Por outro lado, $\bar{H}^{-1} = \bar{H} \subset \bar{H}$, de modo que $\bar{H} \subset \bar{H}^{-1} \subset \bar{H}$. Concluimos assim que $\bar{H}$ é subgrupo de G. Para ser subgrupo topológico basta observar que a aplicação $\phi : G \times G \longrightarrow G$, dada por $\phi(x, y) = xy^{-1}$ é contínua, portanto $\phi/_{\bar{H}\times\bar{H}}$ também o é. $\square$

1.2.4 - Definição : Um subgrupo H de G, diz-se subgrupo invariante, se para todo $t \in H$ e para todo $s \in G$ tivermos $sts^{-1} \in H$.

Se h é um homomorfismo entre dois grupos topológicos G e G', então $\mathrm{Ker}h = \{ x \in G; h(x) = e' \}$ é um subgrupo invariante de G, onde e' é o elemento neutro de G'.

1.2.5 - Definição : O centro de um grupo topológico G e' o conjunto $Z(G) = \{ t \in G; sts^{-1} = t$, para todo $s \in G \}$.

É fácil verificar que $Z(G)$ é um subgrupo topológico invariante de G.

1.2.6 - Proposição : Seja G grupo topológico conexo. Então todo subgrupo topológico discreto e invariante de G está contido no centro de G.

Demonstração : Suponhamos que H seja um subgrupo topológico discreto e invariante. Seja $\phi_t : G \longrightarrow G$ a aplicação dada por $\phi_t(s) = sts^{-1}$, para t fixado em H. Com H invariante e ϕ_t

contínua temos $\phi_t(G) \subset H$. Sendo H discreto e G conexo temos ϕ_t constante. Como $\phi_t(e) = t$ temos $sts^{-1} = t$ para todo s em G, portanto $H \subset Z(G)$. $\square$

1.3 - A COMPONENTE CONEXA

Um subgrupo muito útil no estudo de grupos topológicos é o subgrupo constituído pela componente conexa do elemento neutro e de G.

<u>1.3.1 - Definição</u> : A componente conexa neutra C_o de um grupo topológico G é a componente conexa que contém a identidade e de G.

<u>1.3.2 - Proposição</u> : A componente conexa neutra C_o de um grupo topológico G é um subgrupo topológico invariante de G.

<u>Demonstração</u> : a) Sejam s e t elementos de C_o. Então $st \in C_o$, pois C_o e sC_o são conexos contendo s. Seja agora $s \in C_o$ (que é conexo); como a aplicação $\phi(s) = s^{-1}$ é contínua, temos que $s^{-1}C_o$ é conexo e contém e; daí $s^{-1}C_o \subset C_o$, pois C_o é o maior conexo contendo a identidade. Assim $s^{-1} = s^{-1}e \in C_o$, portanto concluimos que C_o é um subgrupo.

b) A função $\eta: C_o \times C_o \longrightarrow C_o$ dada por $\eta(s, t) = st^{-1}$ é contínua.

c) Como em (a), temos sC_os^{-1} conexo e $sC_os^{-1} \subset C_o$, portanto C_o é invariante. $\square$

<u>1.3.3 - Teorema</u> : Se G é um grupo topológico conexo, então G é gerado por uma vizinhança arbitrária U da identidade. Isto significa que G coincide com a reunião de todos os conjuntos

da forma $\mathcal{U}^n$, $n = 1,2,3,\ldots$, isto é, todo elemento de G pode ser escrito como um produto finito de elementos de $\mathcal{U}$.

Demonstração : Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança qualquer da identidade e façamos $V = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{U}^n$, portanto aberto. Se $a \in \overline{V}$, como $a\mathcal{U}^{-1}$ é vizinhança de a temos $a\mathcal{U}^{-1} \cap V \neq \emptyset$. Logo existe $b \in a\mathcal{U}^{-1} \cap V$. Como $b \in V$, existe um inteiro positivo m, tal que $b \in \mathcal{U}^m$, isto é, $b = u_1 . u_2 . \ldots . u_m$, onde $u_i \in \mathcal{U}$, para $i = 1, 2, \ldots, m$. Por outro lado $b \in a\mathcal{U}^{-1}$, isto é, b pode ser escrito na forma $b = au_{m+1}^{-1}$, onde $u_{m+1} \in \mathcal{U}$. Logo, $a = u_1 . u_2 . \ldots . u_m . u_{m+1}$, onde $u_j \in \mathcal{U}$ para $j = 1, 2, \ldots, m, m+1$; portanto $a \in \mathcal{U}^{m+1} \subset V$, o que nos permite concluir que V é fechado.

Como V é aberto, fechado e não vazio em G conexo, temos $G = V$. $\square$

1.3.4 - Definição : Seja M um espaço topológico (de Hausdorff) e G um grupo topológico.

a) Temos uma ação de G em M quando existir uma função (sobrejetora)

$$G \times M \longrightarrow M$$
$$(g, t) \longrightarrow gt, \text{ tal que}$$
$$(g_1 . g_2)t = g_1(g_2 t) \quad \text{e}$$
$$e.t = t, \text{ para todo } g_1 \text{ e } g_2 \text{ em } G \text{ e todo } t \text{ em } M.$$

De modo análogo, poderíamos definir

$$M \times G \longrightarrow M$$
$$(t, g) \longrightarrow tg, \text{ tal que}$$
$$t(g_1 . g_2) = (tg_1)g_2 \quad \text{e}$$
$$te = t, \ \forall\, g_1, g_2 \in G, \forall t \in M.$$

b) Diz-se que G atua transitivamente em M, se para todo t_1 e t_2 em M, existir $g \in G$ tal que $gt_1 = t_2$.

c) Diz-se que G atua continuamente em M, se a aplicação acima definida for contínua. Neste caso G é chamado grupo topológico de transformação em M. (observe que a aplicação $\begin{array}{l} M \longrightarrow M \\ t \longrightarrow gt \end{array}$ é homeomorfismo para cada $g \in G$).

d) G é efetivo se, sempre que $at = t$, para todo t em M, então $a = e$.

e) Seja t um elemento fixo de M. Então $G(t) = \{ g \in G; gt = t \}$ é um subgrupo de G, chamado subgrupo de isotropia de G em t ou subgrupo que deixa fixo o ponto t.

f) O conjunto $G(t) = \{ gt \in M; g \in G \}$ é chamado a G-órbita de t.

Se H é subgrupo de G, podemos obter o espaço quociente G/H, definido por

$$G/H = \{ gH;\ g \in G \}.$$

<u>1.3.5 - Proposição</u> : Se H é um subgrupo normal aberto de um grupo topológico G, então G/H é discreto.

<u>Demonstração</u> : Se H é normal então G/H possui estrutura de grupo. Sendo H aberto, aH também o é, para todo $a \in G$. Como a projeção canônica π é aberta, temos $\pi(aH) = aH$ aberto em G/H, portanto $\{ aH \}$ é aberto em G/H ou seja G/H é discreto. $\square$

<u>1.3.6 - Proposição</u> : Sejam G grupo topológico e H subgrupo topológico de G. Se H e G/H são conexos, então G é conexo.

Demonstração : Suponhamos que G pode ser decomposto na forma $G = A \cup B$, com A e B abertos não vazios. Como π é uma aplicação aberta, temos $\pi(A) = AH$ e $\pi(B) = BH$ abertos em G/H. Além disso, sendo π sobrejetora, segue-se que $\pi(A \cup B) = (A \cup B)H = AH \bigcup BH = G/H$, que por ser conexo admite um elemento gH em $AH \cap BH$, uma vez que $AH \neq \emptyset$ e $BH \neq \emptyset$. Assim, para todo $h \in H$, podemos escrever $gh = ah_1$, com $a \in A$ e $h_1 \in H$; logo $a = gh\, h_1^{-1} = gh_2$, onde $h_2 = hh_1^{-1} \in H$. Portanto $gH \cap A \neq \emptyset$. De modo análogo temos $gH \cap B \neq \emptyset$.

Por outro lado, H conexo implica que gH também o é e $gH = gH \cap G = gH \cap (A \cup B) = (gH \cap A) \bigcup (gH \cap B)$, onde $gH \cap A$ e $gH \cap B$ são abertos em gH. Logo $(gH \cap A) \cap (gH \cap B) \neq \emptyset$, por conseguinte $A \cap B \neq \emptyset$, o que conclui a demonstração. $\square$

1.4 - SUBGRUPO LOCAL E GRUPO DE LIE

Neste parágrafo abordaremos a noção de grupo local e estudaremos as condições para que dois grupos topológicos sejam localmente isomorfos.

1.4.1 - Definição : Dois grupos topológicos G e G' dizem-se localmente isomorfos, se existirem vizinhanças $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ das identidades e de G e e' de G' e um homeomorfismo f de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{U}'$ tal que

i) Se x, y e xy estão em $\mathcal{U}$, então $f(xy) = f(x).\, f(y)$

ii) Se x', y' e $x'y'$ estão em $\mathcal{U}'$, então $f^{-1}(x'y') = f^{-1}(x').\, f^{-1}(y')$.

<u>1.4.2 - Definição</u> : Dizemos que H é um subgrupo local de G se

i) $e \in H = H^{-1}$

ii) H está contido em algum aberto $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1}$ tal que $HH \cap \mathcal{U} = H$.

H diz-se subgrupo local fechado de G, se for fechado em $\mathcal{U}$.

<u>1.4.3 - Proposição</u> : Um subgrupo H de G é um subgrupo local fechado de G se e somente se $e \in H = H^{-1}$ e H é aberto no fecho $\overline{HH}$ de HH.

<u>Demonstração</u> : a) Seja H aberto em $\overline{HH}$. Então $\mathcal{U} = G-(\overline{HH}-H)$ é aberto. Assim $e \in \mathcal{U}$ e como $H = H^{-1}$ temos $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1}$, pois:

i) $(A^{-1})^c = \{ x;\ x \notin A^{-1} \} = \{ x;\ x^{-1} \notin A \} =$

$= \{ x;\ x^{-1} \in A^c \} = (A^c)^{-1})$,

ii) $(A \cup B)^{-1} = \{ x;\ x^{-1} \in A \cup B \} = \{ x;\ x^{-1} \in A \text{ ou } x^{-1} \in B\} =$
$= A^{-1} \cup B^{-1}$,

iii) $(A \cap B)^{-1} = A^{-1} \cap B^{-1}$ (análogo a(ii)),

iv) Se $A \subset B$ então $A^{-1} \subset B^{-1}$

v) Se F é fechado então F^{-1} também o é.

vi) $\overline{A}^{-1} = \{ x;\ x^{-1} \in \overline{A} \} = \{ x;\ x^{-1} \in F_i,\ \forall_i,\ F_i$ fechado, $A \subset F_i \} = \{ x;\ x \in F_i^{-1},\ \forall_i,\ F_i^{-1}$ fechado, $A^{-1} \subset F_i^{-1} \} =$
$= \overline{(A^{-1})}$.

Além disso, temos $H \subset \mathcal{U}$ e $HH \cap \mathcal{U} = H$, pois $HH \cap \mathcal{U} =$
$= HH \cap (G-(\overline{HH} \cap H^c)) = HH \cap (G \cap ((\overline{HH})^c \cup H)) = HH \cap ((\overline{HH})^c \cup H) =$

$(HH \cap (\overline{HH})^c) \bigcup (HH \cap H) = HH \cap H = H$. Portanto, H é subgrupo local fechado.

b) Se $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1}$ é aberto, com $e \in H = H^{-1}$, H fechado em $\mathcal{U}$ e $HH \cap \mathcal{U} = H$, fazendo $A = G - \mathcal{U}$, temos $HH = H \cup (HH \cap A)$, portanto $\overline{HH} = \overline{H \cup (HH \cap A)} = (\overline{H} \bigcup \overline{HH \cap A}) \subset (\overline{H} \bigcup (\overline{HH} \cap \overline{A})) = (\overline{H} \bigcup (\overline{HH} \cap A)) \subset \overline{H} \cup A$. Logo $\overline{HH} \cap \mathcal{U} \subset (\overline{H} \cup A) \cap \mathcal{U} = (\overline{H} \cap \mathcal{U}) \bigcup (A \cap \mathcal{U}) = (\overline{H} \cap \mathcal{U}) \bigcup \emptyset = \overline{H} \cap \mathcal{U} = H \cap \mathcal{U} = H$, pois H é fechado e está contido em $\mathcal{U}$. Assim $\overline{HH} \cap \mathcal{U} \subset H$ e como $H \subset \overline{HH} \cap \mathcal{U}$, temos $H = \overline{HH} \cap \mathcal{U}$ ou seja H é aberto em $\overline{HH}$. □

Estenderemos um subgrupo local H de G a um grupo topológico $\hat{H}$, de um modo natural e único. Como grupo, $\hat{H}$ será o subgrupo de G gerado por H e a topologia de $\hat{H}$ será dada por:

i) Todo aberto em H é aberto em $\hat{H}$

ii) Todo aberto em $\hat{H}$ intercepta H em um conjunto aberto.

Dado um subgrupo local H de um grupo topológico G, o subgrupo $\hat{H}$ gerado por H com a única topologia que estende a de H, tem estrutura de grupo topológico. Se H é conexo $\hat{H}$ também o é. Ainda mais, se G é grupo topológico satisfazendo o segundo axioma da enumerabilidade, H é um subgrupo local fechado de G e $\hat{H}$ é o subgrupo gerado por H, então dado um subconjunto A de $\hat{H}$, localmente conexo na topologia de G, temos que as topologias induzidas em A por G e por $\hat{H}$ coincidem.

<u>1.4.4 - Definição</u>: Dizemos que M é uma variedade topológica de dimensão n se:

i) M é um espaço topológico de Hausdorff.

ii) A topologia de M tem base enumerável,

iii) Para cada $x \in M$, existe uma vizinhança V de x e um homeomorfismo $f : V \longrightarrow \mathcal{U}$, onde $\mathcal{U}$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$.

As aplicações f são chamadas cartas locais de M.

1.4.5 - Definição: Uma estrutura diferenciável de classe C^r numa variedade topológica M, de dimensão n, é uma coleção $\mathcal{D}$, de cartas locais de M tal que:

i) Os domínios das cartas de $\mathcal{D}$ cobrem M,

ii) Se h_α e h_β são dois elementos de $\mathcal{D}$, então a composta $h_{\beta\alpha} = h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$ é diferenciável de classe C^r,

iii) $\mathcal{D}$ é maximal com relação a (ii).

A coleção $\{(\mathcal{U}_\alpha, h_\alpha)\}_\alpha$ é chamada atlas de M.

1.4.6 - Definição: Uma variedade diferenciável de classe C^r e dimensão n é uma variedade topológica de dimensão n, juntamente com uma estrutura diferenciável.

Se M e N são variedades diferenciáveis de classe C^r e dimensão m e n respectivamente, com atlas $\{(\mathcal{U}_\alpha, h_\alpha)\}_\alpha$ e $\{(\mathcal{U}_i, h_i)\}_i$ respectivamente, então o produto $M \times N$ com a topologia produto é uma variedade diferenciável de dimensão $m + n$, cujo atlas é $\{(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_i, h_\alpha \times h_i)\}_{(\alpha,i)}$ onde $h_\alpha \times h_i : \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_i \longrightarrow V_\alpha \times V_i$ é dada por

$$(h_\alpha \times h_i)(x, y) = (h_\alpha(x), h_i(y)).$$

Sejam M e N variedades diferenciáveis de classe C^r, $r \geq 1$

com dimensão m e n respectivamente, e f uma aplicação de M em N. Dado $x \in M$, tomemos $h_\alpha : V_\alpha \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha$, carta local de M e $h_{\alpha'}$: : $V'_{\alpha'} \longrightarrow \mathcal{U}'_{\alpha'}$, carta local de N, tais que $f(x) \in V'_{\alpha'}$ e $f(V_\alpha) \subset \subset V'_{\alpha'}$. Dizemos que f é diferenciável de classe C^s, $s \leq r$, se a aplicação $h'_{\alpha'} . f . h_\alpha^{-1} : \mathcal{U}_\alpha \longrightarrow \mathcal{U}'_{\alpha'}$ for diferenciável de classe C^s, onde $\mathcal{U}_\alpha$ e $\mathcal{U}'_{\alpha'}$ são abertos de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente.

<u>1.4.7 - Definição</u>: Um grupo topológico G é chamado Grupo de Lie, se for uma variedade diferenciável e a aplicação $\phi : GxG \longrightarrow G$ dada $\phi(x, y) = xy^{-1}$ for diferenciável.

Nós não precisamos aqui, a noção de diferenciabilidade porque em virtude do teorema de Gleason-Montgomery-Zippin (que dá uma resposta positiva para o quinto problema de Hilbert) cada grupo de Lie de classe C^0 admite uma estrutura diferenciável de qualquer ordem, compatível com sua estrutura de grupo.

<u>1.4.8 - Lema</u>: Se f é um homomorfismo local entre grupos de Lie G e G' com G conexo, então existe no máximo um homomorfismo $\hat{f} : G \longrightarrow G'$ que coincide com f em uma vizinhança de e.

<u>Demonstração</u>: A demonstração segue da definição (1.4.7), do teorema (1.3.3) e do fato de um homomorfismo ser determinado pela imagem de um conjunto de geradores para o grupo. $\square$

<u>1.4.9 - Alguns exemplos de grupos de Lie</u>:

a) O grupo aditivo dos números reais, com a estrutura de variedade diferenciável usual é um grupo de Lie de dimensão um.

b) Se G_1 e G_2 são grupos de Lie de dimensão m e n respectivamente, então o produto direto $G_1 x G_2 = \{ (g_1, g_2); g_1 \in G_1, g_2 \in$

$\varepsilon\ G_2$ }, com a operação usual $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$ é um grupo de Lie de dimensão $m + n$. Assim $\mathbb{R}^n$ é um grupo de Lie de dimensão n.

c) O grupo S^1, dos números complexos de norma igual a 1, com a multiplicação, é um grupo de Lie dimensão um.

d) O grupo $Gl(n,\mathbb{R})$ das matrizes reais inversíveis de ordem $n \times n$, com a operação multiplicação de matrizes é um grupo de Lie. Em particular, para $n = 1$, temos o grupo multiplicativo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{ 0 \}$.

e) O grupo real afim $A(n)$, atuando em $\mathbb{R}^n$, é o conjunto de todas as transformações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ da forma $v \longrightarrow Av + \ell$, onde $A \in Gl(n, \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}^n$ Denotaremos uma tal transformação por $< A, \ell >$. O grupo afim pode ser considerado como um subgrupo de $Gl(n+1,\mathbb{R})$ se colocarmos ℓ como um vetor coluna e identificarmos $< A, \ell >$ com a matriz $\begin{pmatrix} A & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Desta forma, temos

i) $$< A, \ell > \cdot < B, k > \equiv \begin{pmatrix} A & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} AB & Ak + \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv < AB, Ak + \ell > \quad \text{e}$$

ii) $$< A, \ell >^{-1} = < A^{-1}, A^{-1}(-\ell) > .$$

1.5 - A EXPONENCIAL

Seja V um espaço vetorial normado, de dimensão n, sobre um corpo k, de característica zero ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). O conjunto End(V) das aplicações lineares de V em V é uma álgebra, se definirmos as operações de adição, multiplicação por escalar e a multiplicação de operadores por

i) $(A + B)x = Ax + Bx$,

ii) $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$,

iii) $(AB)x = A(Bx)$, $\forall x, y \in V$, $\forall \lambda \in K$, respectivamente.

Definindo $|A| = \sup\limits_{|x| \leq 1} |Ax|$ obtemos um espaço vetorial normado.

<u>1.5.1 - Definição</u>: Dados a_n, $a \in V$, dizemos que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ se $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n - a| = 0$

<u>1.5.2 - Definição</u>: Dados A_n, A operadores em V, dizemos que $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = A$ se $\lim\limits_{n \to \infty} A_n x = Ax$, para todo x de V.

De $|Ax| \leq |A| . |x|$ segue-se que todo operador linear é contínuo. Sabemos também que se K é completo, então $End(V)$ é completo. Dado $A \in End(V)$, tem sentido considerarmos polinômios em A e séries de potências, sendo $A^o = I$, desde que estas convirjam.

Estudaremos condição para convergência de série de potências.

<u>1.5.3 - Proposição</u>: Dada a série de potências $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$ em $\mathbb{C}$, com raio de convergência ρ e $A \in End(V)$ tal que suas raízes características r_k satisfazem $|r_k| < \rho$, então a série de potên-

cias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$ converge em End(V). Em particular converge a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ chamada exponencial de A e será denotada por exp A ou e^A.

Demonstração: Escolhemos uma base de V de modo que a matriz A tem a forma (forma canônica de Jordan).

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ 0 & A_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{pmatrix}, \text{ onde } A_i = \begin{pmatrix} r & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r \end{pmatrix}$$

sendo r raiz característica.

Para $K \geq 1$, a matriz A^K tem a mesma forma de blocos, portanto basta considerarmos uma matriz do tipo A_i acima.

A soma parcial $S_k(Z) = \sum_{j=0}^{k} a_j Z^j = a_o + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_k Z^k$ nos dá

$$S_k'(Z) = \sum_{j=1}^{k} j\, a_j Z^{j-1}, \quad S_k''(Z) = \sum_{j=2}^{k} j(j-1) a_j Z^{j-2} \quad \text{e}$$

assim por diante. Logo, por indução temos $S_k(A) = a_o I + a_1 A + \dots + a_k A^k =$

$$= a_o \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} r & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r \end{pmatrix} + \dots + a_k \begin{pmatrix} r^k & kr^{k-1} & \dots & 0 \\ 0 & r^k & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & r^k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} S_k(r) & S'_k(r) & \frac{S''_k(r)}{2!} & \frac{S'''_k(r)}{3!} & \dots & \\ 0 & S_k(r) & S'_k(r) & \frac{S''_k(r)}{2!} & \dots & \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & S_k(r) \end{pmatrix}.$$

Assim, se $|r|<\rho$, as sequências $\{S_K(r)\}$ $\{S'_K(r)\},\ldots,$ convergem para $S(r)$, $S'(r)$, ..., o que significa que $\{S_K(A)\}$ converge, portanto $\sum_{K=0}^{\infty} a_K A^K$ converge. □

1.6 - GRUPO SIMPLESMENTE CONEXO

Neste parágrafo vamos estudar quando a existência de um homomorfismo local entre dois grupos topológicos implica na existência de um homeomorfismo. Esta é a propriedade característica dos espaços simplesmente conexos.

Dado M um espaço topológico, conexo por caminhos e p um de seus pontos, denotamos por P, a totalidade de caminhos fechados em M, que começam em p. Dividimos o conjunto P em classes de equivalência, colocando em cada classe todos os caminhos homotópicos entre si. O conjunto dessas classes, denotado por $\pi_1(M, p)$ com a operação composição de caminhos tem estrutura de grupo e é chamado Grupo Fundamental do espaço M. Se tomássemos um outro ponto p', em lugar de p, obteríamos um outro grupo isomorfo a $\pi_1(M,p)$.

1.6.1 - Definição: Um espaço topológico M, conexo por arcos, diz-se simplesmente conexo se seu grupo fundamental contém somente a identidade, isto é, todo caminho fechado em M, é homotópico a zero.

1.6.2 - Definição : Um espaço topológico M, diz-se localmente simplesmente conexo, se para todo ponto p de M e vizinhança U de p, existir uma vizinhança $V \subset U$, do mesmo ponto p, tal que qualquer caminho fechado começando em p e contido em V for homotópico a zero em U.

<u>1.6.3 - Definição</u>: Um espaço topológico M, diz-se localmente conexo por caminhos, se para todo ponto $p \in M$ e vizinhança U de p, existir uma vizinhança $V \subset U$ do mesmo ponto p tal que, para todo $x \in V$ tenhamos um caminho em U ligando x a p.

Consideremos agora, um espaço topológico M, conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e localmente simplesmente conexo. Dado um ponto p de M, denotemos por Q, o conjunto de todos os caminhos fechados começando em p. Dividimos o conjunto Q em classes, cada uma formada por todos os caminhos homotópicos entre si; denotando por S esse conjunto de classes. Se A é um elemento de S então todos os caminhos que pertencem a A terminam em um mesmo ponto a. Assim, podemos definir uma aplicação $\phi: S \longrightarrow M$ por $\phi(A) = a$.

Introduzimos uma topologia em S, definindo uma vizinhança arbitrária $\tilde{U}$ de S, a partir de uma vizinhança U do espaço M e um caminho $\ell \in Q$, que termina em U. Dado um caminho x arbitrário em U, cujo início é o término de ℓ, façamos $y = \ell x$ e denotemos por Y, a totalidade de caminhos homotópicos a y e por $\tilde{U}$, o conjunto de todas as classes Y obtidas de todas as escolhas possíveis de x em U. Vemos que $\tilde{U}$ independe da escolha do caminho ℓ. As vizinhanças assim obtidas formam um sistema fundamental de vizinhanças para S. O espaço topológico S é chamado espaço recobrimento universal para M.

A aplicação ϕ é uma aplicação aberta e mais ainda, é um homeomorfismo local, o que nos permite concluir que o espaço recobrimento universal é conexo por arcos, localmente conexo por arcos e localmente simplesmente conexo. Temos então o seguinte

<u>1.6.4 - Teorema</u>: O espaço recobrimento universal de um espaço topológico é sempre simplesmente conexo.

<u>Demonstração</u>: (Vide - [10] - Pontrjagin - pg. 224). □

<u>1.6.5 - Teorema</u>: Se M e N são espaços topológicos conexos e T é o produto desses espaços, então T é conexo e seu grupo fundamental é isomorfo ao produto direto do grupo fundamental do espaço M com o grupo fundamental do espaço N. Em particular, o produto de dois espaços topológicos simplesmente conexos é simplesmente conexo.

<u>Demonstração</u>: (Vide - [10] - Pontrjagin - pg. 224). □

Já vimos pela proposição (1.3.2) que a componente conexa neutra é um subgrupo topológico invariante do grupo topológico G. Assim, basta considerarmos grupos de Lie conexos. Além disso, como os grupos de Lie são localmente homeomorfos a abertos de R^n, têm as seguintes propriedades

(I)
i) conexos por caminhos,
ii) localmente conexos por caminhos,
iii) localmente simplesmente conexo.

<u>1.6.6 - Teorema</u>: Para todo grupo topológico G, existe um grupo topológico $\tilde{G}$ simplesmente conexo que é localmente isomorfo a G e tal que G é isomorfo ao grupo fator $\tilde{G}/N$, onde N é subgrupo normal discreto de $\tilde{G}$ e mais ainda, o grupo fundamental do espaço G é isomorfo ao grupo N.

<u>Esboço da demonstração</u>: Suponhamos G com as condições (I) e $\tilde{G}$ o espaço recobrimento universal, onde tomamos a identidade como ponto fundamental. Assim, o grupo topológico $\tilde{G}$ tem também as propriedades (I). Seja N o núcleo da aplicação natural $\phi: \tilde{G} \longrightarrow G$ que é contínua, aberta e homomorfismo. Como ϕ é também homeomorfismo local, existe uma vizinhança $\tilde{U}$ da identidade do grupo $\tilde{G}$ na qual ϕ é bijeção; portanto N é subgrupo normal discreto de $\tilde{G}$. Se A é um elemento de N, então $\phi(A) = e$, isto é, todos os caminhos da classe A são fechados. Reciprocamente, se todos os caminhos da classe A são fechados, então $\phi(A) = e$, com o que segue que A é um elemento de N, ou seja, N é constituido por todas as classes de caminhos fechados, isto é, N considerado como um conjunto, coincide com o grupo fundamental do espaço topológico G. Finalmente, pelo teorema do isomorfismo entre grupos, temos $\tilde{G}/N \cong G$.

Pela proposição (1.2.6), N está contido no centro de $\tilde{G}$; assim podemos concluir que todo grupo de Lie G, é isomorfo a $\tilde{G}/N$, onde N é subgrupo discreto contido no centro de G.

O problema de classificação de grupos topológicos agora recai na classificação de todos os grupos simplesmente conexos e todos os seus respectivos subgrupos discretos. Isto constitui a parte central do nosso trabalho, quando o grupo G tem dimensão menor ou igual a 3.

CAPÍTULO II: A ÁLGEBRA DE LIE

Neste capítulo introduziremos o conceito de álgebra de Lie e estudaremos sua relação com os grupos de Lie. Estudaremos em particular a relação entre a álgebra de Lie das matrizes $M(n,\mathbb{R})$ e o grupo de Lie $Gl(n,\mathbb{R})$.

2.1 - CAMINHOS DIFERENCIÁVEIS

2.1.1 - Definição: Um caminho diferenciável em $M(n,\mathbb{R})$ é uma função $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow M(n,\mathbb{R})$ definida por $\phi(t) = A(t) = (a_{ij}(t))$, $i, j = 1,2, \ldots, n$, onde $a_{ij}(t)$ são funções diferenciáveis de classe C^∞.

A derivada de $\phi(t)$ em um ponto t_o é o limite $\lim\limits_{t\to o} \dfrac{\phi(t_o+t) - \phi(t_o)}{t}$ se existir; é um elemento de $M(n,\mathbb{R})$ e será denotado por $\dfrac{d\phi}{dt}(t_o)$ ou $\phi'(t_o)$.

2.1.2 - Lema: Se $A(t)$ e $B(t)$ são dois caminhos diferenciáveis em $M(n,\mathbb{R})$, então o produto $A(t).B(t)$ é diferenciável e a derivada é dada por

$$\frac{d}{dt}(A(t).B(t)) = \frac{d\,A(t)}{dt}.B(t) + A(t).\frac{d\,B(t)}{dt}.$$

Demonstração: Se $A(t) = (a_{ij}(t))$ e $B(t) = (b_{ij}(t))$ então $A(t).B(t) = (C_{iK}(t))$, onde $C_{iK}(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(t).\, b_{jK}(t)$. Assim,

$$\frac{d}{dt}(c_{iK}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d(a_{ij}(t))}{dt}.b_{jK}(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,\frac{d}{dt}\,b_{jK}(t)),$$

o que conclui a demonstração. $\square$

<u>2.1.3 - Lema</u>: Se $A(t)$ é inversível e diferenciável então $A^{-1}(t)$ é diferenciável e sua derivada é dada por

$$\frac{d}{dt}(A^{-1}(t)) = -A^{-1}(t) . \frac{d\,A(t)}{dt} . A^{-1}(t) .$$

<u>Demonstração</u>: Como $\frac{d}{dt}(A(t).\,A^{-1}(t)) = \frac{d}{dt}(Id) = 0$,

temos $\frac{d\,A(t)}{dt} . A^{-1}(t) + A(t). \frac{d\,A^{-1}(t)}{dt} = 0$

ou seja $A(t). \frac{d\,A^{-1}(t)}{dt} = -\frac{d\,A(t)}{dt} .A^{-1}(t).$

Portanto $\frac{d}{dt}(A^{-1}(t)) = -A^{-1}(t). \frac{d\,A(t)}{dt} . A^{-1}(t).$ □

<u>2.1.4 - Proposição</u>: Se $A \in M(n, \mathbb{R})$ então $\exp(tA)$ é diferenciável e $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A\,e^{tA}$.

<u>Demonstração</u>: Imediato. □

<u>2.1.5 - Proposição</u>: Se A e B são dois elementos de $M(n,\mathbb{R})$ tais que $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^{A}.\,e^{B}$.

<u>Demonstração</u>: Como $e^{tA+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA+B)^n$ e A e B comutam, temos $\frac{d}{dt}(e^{tA+B}) = A + (tA+B)\,A + \frac{1}{2!}(tA+B)^2\,A + \dots =$

$$= [\, I + (tA+B) + \frac{1}{2!}(tA+B)^2 + \dots \,]. A = e^{tA+B}.A.$$

Assim

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}.\ e^{tA+B}) = -A\,e^{-tA}.\ e^{tA+B} + e^{-tA}.\ e^{(tA+B)}.A =$$

$$= -A\,e^{-tA}.\ e^{tA+B} + A\,e^{-tA}.\ e^{tA+B} = 0,$$ isto é, não depende de t. Logo, a matriz $e^{-tA}.\ e^{tA+B}$ é constante e como para $t = 0$ ela vale e^B, segue-se que para $t=1$, $e^{-A}.\ e^{A+B} = e^B$. Como $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, temos $e^A.\ e^B = e^{A+B}$. $\square$

Seja G um subgrupo topológico do grupo das matrizes reais inversíveis $Gl(n, \mathbb{R})$. Seja $\mathcal{A}(G)$ o conjunto de todos os caminhos $\phi : V \longrightarrow Gl(n, \mathbb{R})$, contínuamente diferenciáveis, onde V é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ contendo a origem, tais que:

i) $\phi(0) = I$

ii) existe uma vizinhança W do zero tal que $\phi(W) \subset G$.

Denotaremos por g o conjunto de todos os vetores tangentes a $\mathcal{A}(G)$ em I. Por definição de derivada, $g \subset M(n, \mathbb{R})$ e $g = \{\phi'(0),\ \phi \in \mathcal{A}(G)\}$.

<u>2.1.6 - Proposição</u>: O conjunto g pode ser identificado como um subespaço vetorial real de $M(n, \mathbb{R})$.

<u>Demonstração</u>: Primeiramente $o \in g$, porque se tomarmos o arco constante $\phi(t) = I$, teremos $\phi'(0) = 0$. Mostremos que g é fechado para multiplicação por escalar. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A \in g$. Então existe arco continuamente diferenciável $\phi : V \longrightarrow Gl(n, \mathbb{R})$ tal que $\phi'(0) = A$ e $\phi(0) = I$. Existe também vizinhança W de 0 tal que

$\phi(W) \subset G$. Seja agora o arco $\psi(t) = \phi(\lambda t)$, para $\lambda \neq 0$. Assim, ψ é arco continuamente diferenciável tal que $\psi(0) = \phi(0) = I$ e $W' = \frac{1}{|\lambda|} W$ é uma vizinhança do zero tal que $\psi(W') = \psi(\frac{W}{|\lambda|}) = \phi(\frac{\lambda W}{|\lambda|}) \subset G$. Como $\frac{d\psi}{dt} = \lambda \frac{d\phi}{dt}$, temos que $\psi'(0) = \lambda A \varepsilon g$.

Provemos agora que g é fechado com respeito à adição de matrizes. Sejam A e B dois elementos de g. Existem então, arcos ϕ e ψ em $\mathcal{A}(G)$ e vizinhanças W_1 e W_2 do zero tais que $\phi(0) = \psi(0) = I$, $\phi(W_1) \subset G$, $\psi(W_2) \subset G$, $\phi'(0) = A$ e $\psi'(0) = B$. Fazendo $W = W_1 \cap W_2$ e $\rho(t) = \phi(t)\,\psi(t)$, vemos que ρ é arco continuamente diferenciável tal que $\rho(0) = I$, $\rho(W) = \phi(W).\,\psi(W) \subset G$ e $\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\phi}{dt}.\psi(t) + \phi(t)\frac{d\psi}{dt}$. Portanto $\left.\frac{d\rho}{dt}\right|_{t=0} = AI + IB = A+B$ que pertence a g, o que conclui a demonstração. $\square$

2.1.7 - Proposição: Se $A \varepsilon G$ então $AgA^{-1} \subset g$.

Demonstração: Seja Y um elemento qualquer de g. Existem então, um arco ϕ tal que $Y = \phi'(0)$ e $\phi(0) = I$ e uma vizinhança W do zero, tal que $\phi(W) \subset G$. Consideremos agora o arco $\psi(t) = A\phi(t)\,A^{-1}$; portanto ψ é derivável e $\psi'(0) \varepsilon g$. Como $\psi'(0) = A\phi'(0).A^{-1} = AYA^{-1}$, segue-se que $AYA^{-1} \varepsilon g$. Consequentemente $AgA^{-1} \subset g$. $\square$

2.1.8 - Proposição: Se X e Y são elementos de g, então $XY - YX$ também é um elemento de g.

Demonstração: Dado $X \varepsilon g$, existem arco ϕ e vizinhança W do zero tais que $\phi(0) = I$, $\phi(W) \subset G$ e $X = \phi'(0)$. Seja $\psi(t) =$

$\phi(t).\ Y.\phi(t)^{-1}$, para $t \in W$; temos que $\psi(t) \in g$, pois $\phi(t) \in G$ e $Y \in g$. Assim $\psi(t)$ é arco derivável em g tal que $\psi(0) = Y$, portanto $\psi'(0) \in g$. Mas $\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\phi(t)}{dt}.Y.\phi(t)^{-1} + \phi(t)Y\frac{d}{dt}(\phi(t)^{-1}) =$

$$= \frac{d\phi(t)}{dt}.Y.\ \phi(t)^{-1} - \phi(t).Y.\phi(t)^{-1}.\ \frac{d\phi(t)}{dt}.\phi(t)^{-1}$$

e daí segue-se que

$$\psi'(0) = XY - YX, \text{ portanto } XY - YX \in g. \qquad \square$$

<u>2.1.9 - Lema</u>: Se $X \in g$ então a equação

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \alpha(t).X \quad , \quad \alpha(0) = e \qquad (1)$$

tem uma única solução $\alpha(t) \in G$, $-\infty < t < +\infty$.

<u>Demonstração</u>: Com estudo semelhante ao que se faz para equações diferenciais, mostra-se que a equação (1) tem uma solução local próxima de $t=0$, definida para $0 \leq t \leq a$, com $a > 0$. Chamemos esta solução de $\alpha_1(t)$. Por indução, estendemos $\alpha_1(t)$ para todo $t \geq 0$:

A partir de $\alpha_n(t)$ definida para $0 \leq t \leq na$, obtemos $\alpha_{n+1}(t)$, definida por

$$\alpha_{n+1}(t) = \alpha_n(t) \ , \text{ se } \ 0 \leq t \leq na$$

$$= \alpha_n(na).\alpha_1(t-na) \ , \text{ se } \ na \leq t \leq (n+1)a$$

de modo que $\alpha_{n+1}(t)$ é uma extensão de $\alpha_n(t)$. É fácil ver que $\alpha_{n+1}(t)$ satisfaz (1). Assim construimos uma função $\alpha_X^+(t)$, satisfazendo (1), para $t \geq 0$:

$$\frac{d\alpha_X^+(t)}{dt} = \alpha_X^+(t).X \quad , \quad 0 \leq t < \infty \quad e \quad \alpha^+(0) = e.$$

Finalmente, definimos

$$\alpha_X^-(t) = \alpha_{-X}^+(-t) \quad , \quad -\infty < t \leq 0$$

e obtemos

$$\frac{d\alpha_X^-(t)}{dt} = \frac{d(\alpha_{-X}^+(-t))}{dt} = (-1)\frac{d}{ds}\alpha_{-X}^+(s)\Big|_{s=-t} = -\alpha_{-X}^+(-t)(-X) =$$

$$= \alpha_X^-(t).X,$$

de modo que $\alpha_X^-(t)$ satisfaz (1) para $-\infty < t \leq 0$. Como $\alpha_X^-(0) = \alpha_X^+(0)$, encontramos então $\alpha_X(t)$ para todo t real.

Mostremos agora, a unicidade de $\alpha(t)$. Sejam $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ duas soluções da equação (1). Seja $A = \{ x \in \mathbb{R} \; \alpha_1(t) = \alpha_2(t)\}$. Como α_1 e α_2 são contínuas e G é de Hausdorff, temos que A é fechado. A é aberto devido a unicidade da solução e $A \neq \emptyset$, pois $0 \in A$. Como o conjunto dos números reais é conexo temos $A = \mathbb{R}$ $\square$

A aplicação $\alpha(t) = \exp(tX)$ é solução (única) de (1). Temos então

$$\frac{d}{dt}(\exp tX) = (\exp tX).X$$

e o seguinte

<u>2.1.10 - Teorema</u>: Para X fixo, a aplicação $t \longrightarrow \exp(tX)$ é um homomorfismo de $\mathbb{R}$ em G. Assim $\exp(s+t)X = \exp(sX).\exp(tX)$.

<u>Demonstração</u>: Seja s_o fixo e considermos a aplicação

$$h(t) = (\exp s_o X)^{-1}.\ \exp\,[s_o+t)X\,].$$

Temos então $h(0) = e$

e $$\frac{dh(t)}{dt} = (\exp s_o X)^{-1}.\ \exp[\,(s_o+t)X\,]\,X = h(t)X,$$

portanto $h(t)$ satisfaz a equação (1). Logo $h(t) = \exp(tX)$, consequentemente $\exp(tX) = (\exp s_o X)^{-1}.\ \exp\,[\,s_o+t)X\,]$, o que conclui a demonstração. □

<u>2.1.11 - Corolário</u>: $\exp(tX)$ e $\exp(sX)$ comutam.

<u>Demonstração</u>: Trivial. □

<u>2.1.12 - Corolário</u>: Se n é um número inteiro, $(\exp X)^n = \exp(n\,X)$. Em particular, $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.

<u>Demonstração</u>: Imediato. □

<u>2.1.13 - Corolário</u>: $(\exp X)X = X(\exp X)$

<u>Demonstração</u>: Imediato. □

2.2 - <u>A ÁLGEBRA DE LIE</u>

Vamos definir agora a álgebra de Lie em geral e estudaremos algumas de suas propriedades.

<u>2.2.1 - Definição</u>: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Dizemos que V é uma álgebra, se estiver munido de uma

multiplicação, tal que:

i) $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$,

ii) $(x+y)z = xz + yz$ e

$z(x+y) = zx + zy$, $\forall\, x, y, z \in V$ e $\forall\, \lambda \in K$.

Se a multiplicação for associativa, a álgebra diz-se associativa. Uma subálgebra de V é um subespaço vetorial de V, que é fechado para a multiplicação.

O conjunto M, de todas as transformações lineares de V em V, com a operação composição é uma álgebra associativa, chamada álgebra das transformações lineares.

Dada uma álgebra A e $a \in A$, a aplicação $L_a : A \longrightarrow A$ definida por $L_a x = ax$ é uma transformação linear. É fácil ver que $L_{a+b} = L_a + L_b$, $\alpha L_a = L_{\alpha a}$ e que se A é associativa, vale $L_{ab} = L_a . L_b$. A aplicação $\phi: A \longrightarrow M$ dada por $\phi(a) = L_a$, onde M é o conjunto dos operadores lineares em A, é um homomorfismo entre álgebras. Se $\phi(a) = \phi(b)$, então $L_a = L_b$, isto é, $ax = bx$ para todo $x \in A$. Se A possui identidade 1, temos $a = b$, portanto ϕ é injetora. Com isso, ϕ é um isomorfismo entre A e uma subálgebra de M. Consequentemente a álgebra A pode ser representada por uma subálgebra de $End_k(A) = M$.

2.2.2 - Definição: Seja A uma álgebra associativa. Chamaremos de produto de Lie em A à aplicação $[,]: A \longrightarrow A$, definida por

$$[x,y] = xy - yx.$$

O produto de Lie tem as seguintes propriedades:

i) $[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y]$,

ii) $[x, y_1 + y_2] = [x, y_1] + [x, y_2]$,

iii) $\lambda[x, y] = [\lambda x, y] = [x, \lambda y]$,

iv) $[x, x] = 0$,

v) $\Big[x, [y, z]\Big] + \Big[y, [z, x]\Big] + \Big[z, [x, y]\Big] = 0$,

$\forall x_1, x_2, y_1, y_2, x, y, z \in A$ e $\forall \lambda \in K$.

A propriedade (v) é chamada identidade de Jacobi.

A álgebra munida de um produto de Lie é chamada ÁLGEBRA DE LIE da álgebra associativa. O espaço vetorial $M(n, R)$ das matrizes reais $n x n$, com o produto usual é uma álgebra de Lie.

No caso geral definimos

<u>2.2.3 - Definição</u>: Um espaço vetorial V, sobre um corpo K, de característica zero, é uma álgebra de Lie, se existir em V, uma operação $[,]$, tal que

i) $[,]$ é bilinear

ii) $[X, X] = 0$, $\forall X \in V$

iii) $\Big[X, [Y, Z]\Big] + \Big[Y, [Z, X]\Big] + \Big[Z, [X, Y]\Big] = 0$,

$\forall X, Y, Z \in V$.

<u>2.2.4 - Definição</u>: Uma subálgebra de Lie de uma álgebra de Lie A é um subespaço vetorial B de A tal que $[X, Y] \in B$, para todo $X, Y \in B$.

A partir da álgebra M, descrita em (2.2.1), obtemos a álgebra de Lie M_L ; mostra-se que toda álgebra de Lie é isomorfa a uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie M_L.

2.2.5 - Proposição: Com a operação $[X, Y] = XY - YX$, o conjunto g descrito em (2.1.6) é uma álgebra de Lie.

Demonstração:

i) bilinear (imediato).

ii) $[X, X] = XX - XX = 0 \quad , \quad \forall X \in g.$

iii) $\Big[X, [Y, Z]\Big] + \Big[Y, [Z, X]\Big] + \Big[Z, [X,Y]\Big] =$

$= [X, YZ - ZY] + [Y, ZX - XZ] + [Z, XY - YX] =$

$= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X + Y(ZX - XZ) - (ZX - XZ)Y +$

$+ Z(XY - YX) - (XY - YX)Z =$

$= XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XZY$

$+ ZXY - ZYX - XYZ + YXZ = 0$ □

2.3 - ALGUNS EXEMPLOS DE ÁLGEBRA DE LIE

a) O exemplo mais simples de álgebra de Lie é o conjunto dos números reais com as operações usuais.

b) O grupo de Lie $Gl(n, \mathbb{R})$, das matrizes reais nxn inversíveis tem por álgebra de Lie, o conjunto $M(n, \mathbb{R})$ das matrizes reais nxn, com as operações usuais.

c) Se G_1 e G_2 são grupos de Lie com álgebras de Lie g_1 e g_2, respectivamente, então ao grupo de Lie $G_1 \times G_2$ associamos a álgebra de Lie $g_1 \times g_2$. Assim, $\mathbb{R}^n$ é álgebra de Lie de dimensão n. Sejam $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ base de uma álgebra de Lie g abeliana (isto é, $[X, Y] = 0 \;\; \forall X, Y \in g$) e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ base canônica do $\mathbb{R}^n$. A aplicação $\phi: g \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(X_i) = e_i$ é um é um isomorfismo entre espaços vetoriais e também isomorfismo entre álgebras de Lie, pois $\phi[X_i, X_j] = \phi(0) = 0 = [e_i, e_j] = [\phi(X_i), \phi(X_j)]$. Portanto, toda álgebra de Lie abeliana de dimensão n é isomorfa a $\mathbb{R}^n$.

d) A álgebra de Lie do grupo real afim A(n), descrito em (1.4.9) é o conjunto das matrizes da forma $\begin{pmatrix} A & \ell \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, onde A é uma matriz real nxn arbitrária e $\ell \in R^n$. Denotando por $< A|\ell >$ um elemento genérico dessa álgebra, temos

i) $< A|\ell > . < B|k > = < AB|Ak >$ e

ii) $\left[< A|\ell > ; < B|k >\right] = < A|\ell > . < B|k > - < B|k > . < A|\ell > = < AB|Ak > - < BA|B\ell > = <[A,B] \,|\, Ak-B\ell >.$

Consideraremos agora, alguns casos especiais de subálgebras de Lie da álgebra de Lie M_L, onde M é a álgebra associativa das transformações lineares em um espaço vetorial V de dimensão finita sobre um corpo k.

2.3.1 - Álgebra de Lie Ortogonal

Seja V um espaço vetorial munido de uma forma bilinear simétrica não degenerada $< x, y >$. Toda transformação linear A em V admite uma transformação adjunta A^*, relativa a $< x, y >$, isto é,

$$< Ax, y > = < x, A^{*}y > \quad , \quad \forall x, y \in V.$$

A aplicação $A \longrightarrow A^{*}$ é um anti-automorfismo na álgebra M, pois

i) $(A+B)^{*} = A^{*} + B^{*}$

ii) $(\lambda A)^{*} = \lambda A^{*}$

iii) $(AB)^{*} = B^{*}A^{*}$, $\forall$ A, B ε M, $\forall\lambda \varepsilon$ k.

Seja $H = \{ A \varepsilon M ; A^{*} = -A \}$. Vemos que H é subespaço de M e que se A e B são dois elementos de H então $[A, B]^{*} = (AB - BA)^{*} = (AB)^{*} - (BA)^{*} = B^{*}A^{*} - A^{*}B^{*} = BA - AB = -[A, B]$, isto é, $[A, B] \varepsilon H$; portanto H é subálgebra de M_L.

Se K é o corpo dos números reais, então a álgebra de Lie H é a álgebra de Lie do grupo ortogonal de V, relativa a $< x,y >$. Este é o grupo das transformações lineares O em V, que são ortogonais no seguinte sentido.

$$< Ox, Oy > = < x,y > \quad , \quad \forall x, y \in V.$$

2.3.2 - Álgebra de Lie Simplética

Seja $< x,y >$ uma forma alternada não degenerada, isto é, $< x, x > = 0$; temos que dim V = 2n. Seja A^{*} a forma adjunta de A relativa a $< x, y >$. Então o conjunto $H = \{ A \varepsilon M; A^{*} = -A \}$ é uma subálgebra de M_L. Esta álgebra é chamada álgebra de Lie simplética H, da forma alternada $< x, y >$.

2.3.3 - Álgebra das derivações

Seja A uma álgebra qualquer não associativa. Uma derivação D em A é uma transformação linear de A em A tal que

$$D(xy) = (Dx)y + x(Dy) \ , \ \forall x, y \in A.$$

Denotaremos por $\mathcal{D}(A)$, o conjunto das derivações em A. Assim, se D_1 e D_2 são dois elementos de $\mathcal{D}(A)$, então

$$(D_1 + D_2)(xy) = D_1(xy) + D_2(xy) = (D_1x)y + x(D_1y) +$$
$$+ (D_2x)y + x(D_2y) = (D_1x + D_2x)y + x(D_1y) + D_2y) =$$
$$= [(D_1 + D_2)x]y + x [(D_1 + D_2)y]$$, o que significa que $D_1 + D_2 \in \mathcal{D}(A)$.

Analogamente, se $D_1 \in \mathcal{D}(A)$ e $\lambda \in K$, então $\lambda D_1 \in \mathcal{D}(A)$.

Além disso, com D_1 e $D_2 \in \mathcal{D}(A)$, temos

$(D_1D_2)(xy) = D_1(D_2\ xy) = D_1 [(D_2x)y + x(D_2y)] = D_1[(D_2x)y] + + D_1 [x(D_2y)] = (D_1D_2x)y + (D_2x)(D_1y) + (D_1x)(D_2y) + x(D_1D_2y)$.

Trocando D_1 por D_2, vem $(D_2D_1)(xy) = (D_2D_1x)y + (D_1x)(D_2y) + (D_2x)(D_1y) + x(D_2D_1y)$. Logo, $[D_1, D_2] (xy) = (D_1D_2 - D_2D_1)(xy) = (D_1D_2)(xy) - (D_2D_1)(xy) = (D_1D_2x)y - (D_2D_1x)y + x(D_1D_2y) - - x (D_2D_1y) = (D_1D_2x - D_2D_1x)y + x(D_1D_2y - D_2D_1y) = [(D_1D_2 - D_2D_1)x]y + x [(D_1D_2 - D_2D_1)y] = ([D_1, D_2]x)y + x ([D_1,D_2]y)$.

Assim, $[D_1, D_2] \in \mathcal{D}(A)$; portanto $\mathcal{D}(A)$ é uma subálgebra de Lie de M_L. A álgebra de Lie assim obtida é chamada álgebra das derivações de A e é a álgebra de Lie do grupo dos automorfismos em A, se A for uma álgebra de dimensão finita sobre o corpo dos números reais.

Seja A uma álgebra associativa e sejam L_a e R_a translações à esquerda e à direita respectivamente, determinadas pelo elemento a. Fazendo $D_a = R_a - L_a$, temos $D_a(xy) = (xy)a - a(xy) = xay - xay + xya - axy = (xa-ax)y + x(ya-ay) = (D_a x)y + x(D_a y)$, portanto D_a é uma derivação na álgebra A, chamada derivação interna determinada por a.

Para cada elemento fixo a de uma álgebra de Lie L, consideremos a aplicação linear

$$\begin{aligned} ad_a : L &\longrightarrow L \\ x &\longrightarrow [x,a]. \end{aligned}$$

Como $[[x,y],a] + [[y,a],x] + [[a,x],y] = 0$, segue-se que $ad_a[x,y] = [[x,y],a] = -[[y,a],x] - [[a,x],y] = [x,[y,a]] + [[x,a],y] = [x, ad_a y] + [ad_a x, y]$, o que nos permite concluir, que ad_a é uma derivação, que também é chamada derivação interna determinada pelo elemento $a \in L$.

2.4 - DECOMPOSIÇÃO DE UMA ÁLGEBRA DE LIE

Mostraremos neste parágrafo, que se A é uma subálgebra completa e um ideal em uma álgebra de Lie L, então L pode ser decomposta na soma direta $L = A \oplus B$, onde B é um ideal em L.

2.4.1 - Definição : Um subconjunto não vazio B de uma álgebra não associativa A diz-se um ideal em A se

i) B é um subespaço do espaço vetorial A e

ii) Para todo $a \in A$ e todo $b \in B$, tem-se $ab, ba \in B$.

O subconjunto $L' = \{[a,b] \in L;\ a,b \in L\}$ de uma álgebra de Lie L é um ideal. Mais ainda, um subespaço B de L é um ideal se e somente se $[a,b] \in B$, para todo $a \in L$ e todo $b \in B$. Também o centro $\mathcal{C}(L) = \{a \in L;\ [a,x] = 0,\ \forall x \in L\}$ de L é um ideal e vemos que L é abeliana se $L = \mathcal{C}(L)$, o que equivale a $L' = \{0\}$.

O conjunto das derivações internas de uma álgebra A é um subespaço de A; além disso, de D é uma derivação em A, temos

$D(ax) = (Da)x + a(Dx)$,

daí $D(ax) - a(Dx) = (Da)x$,

ou seja, $D(L_a x) - L_a Dx = L_{Da}x$,

portanto $[D, L_a] = L_{Da}$. Analogamente $[D, R_a] = R_{Da}$. Assim $[D, Da] = [D, L_a - R_a] = [D, L_a] - [D, R_a] = L_{Da} - R_{Da} = D_{Da}$.

Desta forma, se I é derivação interna e D é uma derivação qualquer, temos $[D, I] = [D, L_a - R_a] = L_{Da} - R_{Da}$, que é também derivação interna. Podemos assim concluir que o conjunto das derivações internas de A é um ideal em $\mathcal{D}(A)$.

Dizemos que uma álgebra de Lie é completa se seu centro é $\{0\}$ e todas as suas derivações são internas.

<u>2.4.2 - Proposição</u>: Se A é uma subálgebra completa e um ideal em uma álgebra de Lie L, então L pode ser decomposta na soma direta $L = A \oplus B$, onde B é um ideal em L.

Demonstração: Seja B o centralizador de A, isto é, $B = \{ b \in A; [x,b] = 0, \forall x \in A \}$. É fácil ver que B é um subespaço de L. Se $b \in B$, e $a \in L$ então $[a,x] \in A$ e $[x,b] = 0$, para todo $x \in A$.

Com a identidade de Jacobi

$$\left[x, [b, a] \right] + \left[b, [a,x] \right] + \left[a, [x,b] \right] = 0,$$

temos $\left[x, [b,a] \right] + [b,x'] = 0$, onde $x' = [a,x] \in A$.

Assim $[b,x'] = 0$, portanto $\left[x, [b,a] \right] = 0$, ou seja $[b,a] \in B$. Logo B é um ideal em L.

Todo elemento c de $A \cap B$ está no centro de A, que por sèr completa, temos $c = 0$; portanto $A \cap B = \{0\}$.

Como A é ideal, para todo $a \in L$, a aplicação ad_a leva A em A, portanto induz uma derivação D em A. Essa derivação é interna, de modo que existe $k \in A$ tal que $D_x = [x,a] = [x,k]$, para todo $x \in A$. Daí temos $xa - ax = xk - kx$, ou seja $x(a-k) = (a-k)x$.

Fazendo $b = a-k$, tem-se $b \in B$ e $a = b + k$, portanto $L = A + B$. Como $A \cap B = \{0\}$, temos $L = A \oplus B$. $\square$

2.5 - RELAÇÃO ENTRE ÁLGEBRA DE LIE E GRUPO DE LIE

Completaremos este capítulo, relacionando álgebra de Lie com grupo de Lie.

2.5.1 - Definição: Dado um homomorfismo diferenciável θ entre dois grupos de Lie G e H, estendemos θ às álgebras de Lie g e h de G e H respectivamente, definindo Θ_* , $g \longrightarrow h$ por

$$\Theta_*(X) = \frac{d}{dt} \left(\Theta(\phi(t)) \right)\Big|_{t=0} \in h.$$

Reciprocamente, dado um homomorfismo $\Omega : g \longrightarrow h$ entre as álgebras de Lie, definimos $j = \{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \Omega(A) \end{pmatrix} ; A \in g \}$; portanto $j \subset M(2n,\mathbb{R})$. É fácil verificar que j é uma álgebra de Lie. Seja e^j o grupo local definido por

$$e^{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \Omega(A) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^{\Omega(A)} \end{pmatrix} .$$

Definimos $\tilde{\Omega} : G \longrightarrow H$ da seguinte maneira

$$\tilde{\Omega}(e^A) = e^{\Omega(A)}.$$

Finalmente, estendemos $\tilde{\Omega}$ para todo G.

<u>2.5.2 - Lema</u>: Se $f: G \longrightarrow G'$ é um homomorfismo entre grupos de Lie e $f_*: g \longrightarrow g$ é o homomorfismo induzido entre suas álgebras de Lie, então para todo $X \in g$ tem-se $f(\exp X) = \exp(f_* X)$, isto é, o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ \uparrow \exp & & \uparrow \exp \\ g & \xrightarrow{f_*} & g' \end{array}$$

Se f é homomorfismo local então a igualdade acima é válida para X em alguma vizinhança do zero.

<u>Demonstração</u>: Imediato. $\square$

2.5.3 - Teorema: Se g e g' são álgebras de Lie dos grupos de Lie G e G', respectivamente, então g e g' são isomorfas se e somente se G e G' são localmente isomorfos. Se G e G' são simplesmente conexos, então g e g' são isomorfas se e somente se G e G' são isomorfos.

Demonstração: A demonstração decorre do lema anterior, da definição (2.5.1) e do corolário (1.4.10). $\square$

CAPÍTULO III

CLASSIFICAÇÃO DAS ÁLGEBRAS DE LIE REAIS, DE DIMENSÃO 1,2 e 3.

Utilizando a álgebra derivada $g' = \{[X,Y] \; ; \; X, Y \in g\}$, que é uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie g, estudaremos as propriedades que uma base de g deve ter. Em seguida, exibiremos uma álgebra de Lie, suficiente para caracterizar todas as álgebras de Lie de cada caso. Descrevemos assim, a menos de isomorfismo, todas as álgebras de Lie de dimensão ≤ 3.

3.1 - Teorema: Toda álgebra de Lie real de dimensão 1 é isomorfa a $\mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $\{X\}$ uma base para a álgebra de Lie g. Então $g' = \{0\}$, isto é, g é abeliana. Já vimos que o conjunto dos números reais, como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ é uma álgebra de Lie abeliana de dimensão 1. Se h é uma álgebra de Lie de dimensão 1, então h é isomorfa a $\mathbb{R}$, como espaço vetorial e o isomorfismo é obviamente um isomorfismo entre álgebras de Lie. $\square$

3.2 - Teorema: Toda álgebra de Lie real, de dimensão 2 é isomorfa a:

(1) $\mathbb{R}^2$ ou

(2) $a(1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Demonstração: Seja g uma álgebra de Lie de dimensão 2, com base $\{X,Y\}$.

a) Se $g' = \{0\}$, então g é abeliana e consequentemente g é isomorfa a $\mathbb{R}^2$.

b) Se $g' \neq \{0\}$, então g' tem dimensão 1 e é gerada por $[X,Y]$. Podemos supor que g' é gerada por X, portanto $[X,Y] = \beta X \neq 0$. Trocando Y por $\beta^{-1}Y$, obtemos $[X,Y] = X$. Qualquer outra álgebra de Lie g', com base $\{X_1, Y_1\}$ tal que $[X_1, Y_1] = X_1$ é isomorfa a g. Basta definir a aplicação linear $\phi: g_1 \longrightarrow g$ tal que $\phi(X_1) = X$ e $\phi(Y_1) = Y$.

Tomando $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, temos que $\{X,Y\}$ é uma base para a álgebra de Lie $a(1) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \}$ e vale $[X,Y] = X$, o que conclui a demonstração. $\square$

<u>3.3 - Teorema</u>: Toda álgebra de Lie real de dimensão três é isomorfa a uma única das seguintes álgebras:

(1) $\mathbb{R}^3$,

(2) $\{\langle A|\ell\rangle \in a(2);$ A múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$,

(3_α) $\{\langle A|\ell\rangle \in a(2);$ A múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\}$,

para α fixo, $|\alpha| \leq 1$,

(4) $\{\langle A|\ell\rangle \in a(2);$ A múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$,

(5_α) $\{\langle A|\ell\rangle \in a(2);$ A múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}\}$,

para α fixo, $\alpha \geq 0$, .

(6) $su(2)$

(7) $s\ell(2,\mathbb{R})$.

<u>Demonstração</u>: Vamos examinar as possibilidades para g':

a) Se $g' = \{0\}$, então g é isomorfa a $\mathbb{R}^3$.

b) Seja g uma álgebra de Lie com base $\{X,Y,Z\}$, tal que g' tenha dimensão 1.

b_1) Suponhamos $g' \subseteq \mathscr{C}$, onde $\mathscr{C}$ é o centro de g. Podemos considerar g' gerada por X; daí $X \in \mathscr{C}$ ou seja, X comuta com todo elemento de g. Em particular, comuta com Y e com Z, o que nos fornece $[X,Y] = [X,Z] = 0$. Portanto g' deve ser gerada por $[Y,Z]$ e sem perda de generalidade, podemos admitir que $[Y,Z] = X$. Obtemos assim, a seguinte tabela de multiplicação:

$$[X,Y] = [X,Z] = 0$$

$$[Y,Z] = X.$$

Observe que $g' \subset \mathscr{C}$, pois para todo $F \in g'$ tem-se $F = \lambda X$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, e daí

$$[F,X] = [\lambda X,X] = 0$$

$$[F,Y] = [\lambda X,Y] = 0$$

$$[F,Z] = [\ X,Z] = 0,$$

ou seja $[F,H] = 0$ para todo $H \in g$.

Consideremos $g = \{<A|\ell> \in (2);\ A$ múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$. Se $X = < t_1.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} >$ e $Y = < t_2.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} >$ são dois elementos quaisquer de g, então $[X,Y] = <0| \begin{pmatrix} 0 & t_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & t_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > = <0| \begin{pmatrix} t_1 d - t_2 b \\ 0 \end{pmatrix} >$, que pertence a g. Portanto g

é subálgebra de Lie de $a(2)$.

Tomando $X = \langle 0 \mid \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rangle$, $Y = \langle \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rangle$ e $Z = \langle 0 \mid \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rangle$, constituindo uma base de g, encontramos

$$[X,Y] = [X,Z] = 0 \quad \text{e}$$

$$[Y,Z] = \langle 0 \mid \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rangle = \langle 0 \mid \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rangle =$$

X. Esta álgebra de Lie, caracteriza, portanto todas as álgebras de Lie de dimensão 3, tal que g' tem dimensão 1 e $g' \subset \mathcal{C}$. Temos assim (2).

b_2) Se $g' \not\subset \mathcal{C}$, então podemos admitir que $[X,Y] = X$. Assim X e Y geram uma álgebra de Lie h, de dimensão 2, que é não abeliana, pois $h' = [h, h] = \{\alpha X;\ \alpha \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$. Como $g' \subset h$, temos que h é um ideal em g, pois

i) h é subespaço vetorial de g,

ii) Para todo $H \in h$ e todo $G \in g$ tem-se $G = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$ e $H = aX + bY$, com $\alpha,\beta,\gamma,a,b \in \mathbb{R}$; portanto

$$[H,X] = [aX + bY, X] = b[Y,X] = -bX \in h,$$

$$[H,Y] = [aX + bY, Y] = aX \in h \quad \text{e}$$

$[H,Z] = [aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z] \in g'$ e por conseguinte, $[H,Z] \in h$.

Logo $[H,G] \in h$.

Dado $Z = \alpha_1 X + \alpha_2 Y$, um elemento qualquer de h; como o centro de h é o conjunto $\mathcal{C}(h) = \{F = aX + bY;\ [F,Z] = 0,\ \forall Z \in h\}$, devemos ter $[aX + bY, \alpha_1 X + \alpha_2 Y] = 0$, isto é, $a\alpha_2 [X,Y] + b\alpha_1 [Y,X] = 0$, ou seja $(a\alpha_2 - b\alpha_1) X = 0$.

Logo $a\alpha_2 = b\alpha_1$; como deve valer para todo α_1 e α_2 reais, temos $a = b = 0$. Portanto $F = 0$, isto é, $\mathcal{C}(h) = \{0\}$. Além disso, como todas as derivações são internas, segue pela proposição (2.4.2) que a álgebra g pode ser decomposta em $g = h \oplus \ell$, onde ℓ é um ideal em g. Podemos concluir então, que ℓ é gerado por Z.

Como h e ℓ são ideais, temos $[X,Z] \in h \cap \ell$, portanto $[X,Z] = 0$. Igualmente temos $[Y,Z] = 0$. Resumindo, temos a seguinte tabela de multiplicação:

$$[X,Y] = X, \text{ portanto } g' \not\subset \mathcal{C}$$

$$[X,Z] = [Y,Z] = 0.$$

Observe que podemos considerar $g = a(1) \oplus \mathbb{R}$. Consideremos agora o subespaço vetorial $g = \{ < A|\ell> \in a(2);$ A múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$ de $a(2)$. Se $X = < \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} >$ e $Y = < \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} >$ são dois elementos quaisquer de g, então

$$[X,Y] = < \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \Big| \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > =$$

$= < 0 \mid \begin{pmatrix} \lambda_1 c - \lambda_2 a \\ 0 \end{pmatrix} > \in g$, o que significa que g é subálgebra de Lie de $a(2)$.

Tomando a base $\{X,Y,Z\}$ de g, onde $X = < 0 \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$, $Y = < \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$ e $Z = < 0 \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$,

temos

$$[X,Y] = X$$

$$[X,Z] = [Y,Z] = 0.$$

Esta álgebra de Lie caracteriza, portanto todas as álgebras de Lie de dimensão 3, com g' de dimensão 1 e $g' \not\subset \mathcal{C}$. Temos então (3_α) para $\alpha = 0$.

c) Seja g' de dimensão 2 e $\{X,Y,Z\}$ uma base de g. Afirmamos que g' não pode ser a álgebra de Lie não abeliana h, gerada por X e Y. De fato, se tal ocorresse, teríamos h completa, então $g = h \oplus \ell$, sendo ℓ a álgebra gerada por Z. Daí, $g' = h'$ e $\ell' = \{0\}$ ou seja $h = g' = h'$, contradição pois h tem dimensão 2 e h' tem dimensão 1.

Portanto g' é a álgebra abeliana gerada por X e Y, isto é, $[X,Y] = 0$. Como g' tem dimensão 2, deve ser gerada por $[X,Z]$ e $[Y,Z]$; consequentemente, a aplicação linear $ad_Z; g \longrightarrow g$, definida por $ad_Z(X) = [X,Z]$, induz uma aplicação linear injetora em g'. Devemos ter então

$$(1) \qquad \begin{aligned} [X,Y] &= 0 \\ [X,Z] &= \alpha X + \beta Y \\ [Y,Z] &= \gamma X + \sigma Y. \end{aligned}$$

Como $[X,Z]$ e $[Y,Z]$ devem ser linearmente independentes, temos que a matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \sigma \end{pmatrix}$ é não singular.

Analisemos o que ocorre com a tabela de multiplicação (1), quando aplicarmos uma mudança de base em g.

Uma escolha de base significa o seguinte: escolhemos uma base $\{X,Y\}$ para g' e complementamos com Z, de modo a obter uma base para g. Uma mudança de base em g' implica em uma mudança da matriz A para uma matriz equivalente $M^{-1}AM$. O tipo de mudança a ser feita em relação a Z, consiste em sua substituição por $\rho Z + W$, com ρ real não nulo e $W \in g'$. Então, $W = aX + bY$ onde $a,b \in R$ e resulta que

$$[X, \rho Z + W] = [X, \rho Z + aX + bY] = \rho[X, Z] \text{ e}$$

$$[Y, \rho Z + W] = [Y, \rho Z + aX + bY] = \rho[Y, Z].$$

Assim , a matriz A é transformada em uma matriz ρA, com $\rho \neq 0$. Portanto as diferentes matrizes que podem ser usadas em (1), são as matrizes não nulas, múltiplas das matrizes equivalentes a A. Com isto, temos uma correspondência entre as álgebras de Lie g de dimensão 3, tais que g' tem dimensão 2 e as classes de conjugações no grupo colinear bidimensional.

A matriz A, sendo inversível, não tem zero como autovalor e o polinômio característico pode ter:

c_1) duas raízes distintas, que pela forma canônica de Jordan nos dá uma matriz do tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \text{ com } |\alpha| \leq 1, \ \alpha \neq 0,1,$$

c_2) duas raízes iguais. Neste caso, basta considerarmos duas raízes iguais a 1, ou seja, uma matriz do tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

c_3) Nenhuma raiz real, bastando para isso, considerar o caso em que o polinômio característico é $x^2 + 1$, o que equivale a usarmos a matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}, \text{ com } \alpha \geq 0.$$

Explicitaremos a seguir, uma álgebra de Lie para cada caso:

I-) Consideremos o seguinte subespaço vetorial de $a(2)$

$g_\alpha = \{< A|\ell> \in a(2);$ A múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\}$, onde α fixo, $\alpha \neq 0,1, |\alpha| \leq 1$.

Se $X = < t_1A|\ell >$ e $Y = <t_2A|K >$ são dois elementos quaisquer de g_α, então

$$[X,Y] = < t_1t_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} |t_1A K > - < t_2t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} | t_2A\ell > =$$

$= < 0|t_1AK - t_2A\ell > \in g_\alpha$, isto é, g_α é uma subálgebra de Lie de $a(2)$.

Tomando $X = < 0 \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$, $Y = < 0 \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$ e $Z = < \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$, com $|\alpha| \leq 1$, $\alpha \neq 0$, elementos constituindo uma base para g_α, obtemos

$$[X,Y] = 0,$$

$$[X,Z] = < 0| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > = < 0| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > = 1.X + 0Y \text{ e}$$

$$[Y,Z] = < 0| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} > = < 0 | \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} > = 0X + \alpha Y,$$

que nos fornece a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, descrita no item (c_1).

Esta álgebra de Lie caracteriza todas as álgebras de Lie nestas condições. Temos então (3_α).

II-) Seja agora, $g = \{< A|\ell > \in a(2);$ A múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. É fácil verificar que g é uma subálgebra de Lie de $a(2)$. Como $X = < 0 \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$, $Y = < 0 \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ e $Z = < \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$ constituem uma base para g, temos a seguinte tabela de multiplicação:

$[X,Y] = 0$,

$[X,Z] = < 0| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} > = < 0| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > = X + Y$

$[Y,Z] = < 0| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > = < 0| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > = Y$,

produzindo a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, descrita em (c_2).

Esta álgebra de Lie, é a única, a menos de isomorfismo, nas condições acima. Isso nos dá (4).

III-) O conjunto $g = \{<A|\ell> \in a(2)$; A múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\}$ é uma subálgebra de Lie de a(2), que tem base $\{ X,Y,Z \}$, onde $X = < 0| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$, $Y = < 0 | \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ e $Z = < \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$. Temos então

$[X,Y] = 0$,

$[X,Z] = <0| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} > = < 0| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > = Y$

$[Y,Z] = <0| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > = < 0| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} > = -X$,

que nos fornece a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, descrita no ítem (c_3), quando $\alpha = 0$.

Esta álgebra de Lie, caracteriza todas as álgebras de Lie com a mesma tabela de multiplicação. Temos assim (5_0).

IV-) Seja agora, $g = \{ < A|\ell > \in a(2)$; A múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha > 0\}$. Facilmente verifica-se que g é uma subálgebra de Lie de a(2).

Tomando $X = < 0| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$, $Y = < 0| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$ e $Z = < \begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$, formando uma base de g, temos a seguinte tabela de multiplicação:

$$[X,Y] = 0$$

$$[X,Z] = \langle 0 | \begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix} \rangle = \alpha X + Y$$

$$[Y,Z] = \langle 0 | \begin{pmatrix}-1\\\alpha\end{pmatrix} \rangle = -X + \alpha Y.$$

Obtemos assim, a matriz $A = \begin{pmatrix}\alpha & 1\\-1 & \alpha\end{pmatrix}$, descrita em (c_3), para $\alpha > 0$.

Esta álgebra de Lie, com as condições acima é única, a menos de isomorfismo. Temos então (5_α).

d) Finalmente, falta considerar o caso em que g e g' tem dimensão 3.

Seja $\{X_1, X_2, X_3\}$ uma base para g e façamos $[X_2, X_3] = Y_1$, $[X_3, X_1] = Y_2$ e $[X_1, X_2] = Y_3$. Como g e g' tem a mesma dimensão, então $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ também é uma base, portanto $Y_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} X_j$, onde $A = (\alpha_{ji})$ é uma matriz não singular. A condição de Jacobi $[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0$, nos fornece

$$[X_1, Y_1] + [X_2, Y_2] + [X_3, Y_3] = 0$$

e daí, $0 = [X_1, \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3] + [X_2, \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3] + [X_3, \alpha_{31} X_1 + \alpha_{32} X_2 + \alpha_{33} X_3] =$

$= \alpha_{12} [X_1, X_2] + \alpha_{13} [X_1, X_3] + \alpha_{21} [X_2, X_1] + \alpha_{23} [X_2, X_3] + \alpha_{31} [X_3, X_1] + \alpha_{32} [X_3, X_2] =$

$= \alpha_{12} Y_3 - \alpha_{13} Y_2 - \alpha_{21} Y_3 + \alpha_{23} Y_1 + \alpha_{31} Y_2 - \alpha_{32} Y_1 =$

$= (\alpha_{23} - \alpha_{32})Y_1 + (\alpha_{31} - \alpha_{13})Y_2 + (\alpha_{12} - \alpha_{21})Y_3.$

Como $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ é base, temos $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, ou seja, A é uma matriz real simétrica.

Se $\{\bar{X}_1,\bar{X}_2,\bar{X}_3\}$ é uma segunda base, temos $\bar{X}_i = \sum_{j=1}^{3} \mu_{ij} X_j$, gerando uma matriz $M = (\mu_{ji})$ não singular. Fazendo $\bar{Y}_1 = [\bar{X}_2,\bar{X}_3]$, $\bar{Y}_2 = [\bar{X}_3,\bar{X}_1]$ e $\bar{Y}_3 = [\bar{X}_1,\bar{X}_2]$, temos para qualquer permutação cíclica (i j k) de (1 2 3) que

$$\bar{Y}_i = [\bar{X}_j,\bar{X}_k] = [\sum_{r=1}^{3} \mu_{jr}X_r, \sum_{s=1}^{3} \mu_{ks}X_s] =$$

$$= [\mu_{j1}X_1 + \mu_{j2}X_2 + \mu_{j3}X_3, \mu_{k1}X_1 + \mu_{k2}X_2 + \mu_{k3}X_3] =$$

$$= (\mu_{j1}\mu_{k2} - \mu_{j2}\mu_{k1})[X_1,X_2] + (\mu_{j1}\mu_{k3} - \mu_{j3}\mu_{k1})[X_1,X_3] +$$

$$+ (\mu_{j2}\mu_{k3} - \mu_{j3}\mu_{k2})[X_2,X_3] =$$

$$= (\mu_{j2}\mu_{k3} - \mu_{j3}\mu_{k2})Y_1 + (\mu_{j3}\mu_{k1} - \mu_{j1}\mu_{k3})Y_2 + (\mu_{j1}\mu_{k2} -$$

$- \mu_{j2}\mu_{k1})Y_3 = \sum_{r=1}^{3} \gamma_{ir} Y_r$. Assim, a matriz de mudança de base $\{Y_i\}$, $i = 1,2,3$ para $\{\bar{Y}_i\}$, $i = 1,2,3$ é

$$N=(\gamma_{ij})=\begin{pmatrix} \mu_{22}\mu_{33}-\mu_{23}\mu_{32} & \mu_{32}\mu_{13}-\mu_{33}\mu_{12} & \mu_{12}\mu_{23}-\mu_{13}\mu_{22} \\ \mu_{23}\mu_{31}-\mu_{21}\mu_{33} & \mu_{33}\mu_{11}-\mu_{31}\mu_{13} & \mu_{13}\mu_{21}-\mu_{11}\mu_{23} \\ \mu_{21}\mu_{32}-\mu_{22}\mu_{31} & \mu_{31}\mu_{12}-\mu_{32}\mu_{11} & \mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{21} \end{pmatrix}$$

Por outro lado, sendo $M = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{21} & \mu_{31} \\ \mu_{12} & \mu_{22} & \mu_{32} \\ \mu_{13} & \mu_{23} & \mu_{33} \end{pmatrix}$, temos

$$\text{cofat } M = \begin{pmatrix} \mu_{22}\mu_{33}-\mu_{23}\mu_{32} & \mu_{13}\mu_{32}-\mu_{12}\mu_{33} & \mu_{12}\mu_{23}-\mu_{13}\mu_{22} \\ \mu_{23}\mu_{31}-\mu_{21}\mu_{33} & \mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31} & \mu_{13}\mu_{21}-\mu_{11}\mu_{23} \\ \mu_{21}\mu_{32}-\mu_{22}\mu_{31} & \mu_{12}\mu_{31}-\mu_{11}\mu_{32} & \mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{21} \end{pmatrix} = N.$$

Então

$$(M^t)^{-1} = \frac{1}{\det(M^t)}(\text{cofat } M^t)^t = \frac{1}{\det M}((\text{cofat } M)^t)^t = \frac{1}{\det M}\text{ cofat } M,$$

portanto, cofat $M = (\det M)(M^t)^{-1}$, ou seja

$$N = (\gamma_{ij}) = (\det M)(M^t)^{-1}.$$

Denotando por $\bar{A}$ a matriz de mudança da base $\{\bar{X}_i\}$, $i=1,2,3$, para a base $\{\bar{Y}_i\}$ $i=1,2,3$, temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \{X_i\} & \xleftarrow{M^{-1}} & \{\bar{X}_i\} \\ A\downarrow & & \downarrow\bar{A} \\ \{Y_i\} & \xrightarrow{N} & \{\bar{Y}_i\} \end{array},$$

(2) onde $\bar{A} = NAM^{-1} = (\det M)\,(M^t)^{-1}A.M^{-1}.$

Dizemos que duas matrizes A e B são multiplicativamente cogradientes, se $B = \rho P^tAP$, onde P é uma matriz não singular e ρ é um elemento não nulo do corpo K(no noso caso $\mathbb{R}$).

Então $\sigma = \rho \det P \neq 0$ e temos $B = \rho\, \sigma^2 \sigma^{-2}\, P^t A P =$
$= \rho\sigma^2 (\sigma^{-1}\, P^t) A\, (\sigma^{-1} P) = \rho\sigma^2 (\sigma^{-1}\, P)^t . A . (\sigma^{-1}\, P)$. Fazendo $Q = \sigma P^{-1}$, isto é, $Q^{-1} = \sigma^{-1} P$, temos

$$B = \rho\sigma^2 (Q^{-1})^t . A . Q^{-1} = \rho\sigma^2 (Q^t)^{-1} . A . Q^{-1}.$$

Como as matrizes são de ordem 3x3, $\det(\sigma P^{-1}) = \sigma^3 \det(P^{-1})$, portanto $\rho\sigma^2 = \sigma^3 (\sigma\rho^{-1})^{-1} = \sigma^3 (\det P)^{-1} = \sigma^3 \det(P^{-1}) = \det(\sigma P^{-1}) =$
$= \det Q$. Assim, temos $B = (\det Q)(Q^t)^{-1} . A . Q^{-1}$ e por conseguinte a condição (2); o que nos permite concluir que as matrizes iniciais A e $\bar{A}$ são multiplicativamente cogradientes.

Desta forma, a cada álgebra de Lie descrita neste caso, associamos uma única classe de matrizes simétricas não singulares multiplicativamente cogradientes e teremos tantos tipos distintos de álgebras de Lie quantas forem as classes de tais matrizes. Como A é uma matriz simétrica, seus autovalores são reais e A pode ser diagonalizada por uma transformação $D = \mathcal{U}^t A \mathcal{U}$, onde $\mathcal{U}$ é uma matriz ortogonal, cujas colunas são formadas por vetores próprios ortogonais de A, portanto, cada classe de matrizes multiplicativamente cogradientes contém uma matriz diagonal da forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$, onde $abc \neq 0$ (pois A é inversível), que por sua vez é equivalente à matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, com $\alpha\beta \neq 0$.

Com isso obtemos $Y_1 = \alpha X_1$, $Y_2 = \beta X_2$ e $Y_3 = X_3$, o que significa que podemos escolher uma base $\{ X_1, X_2, X_3 \}$ tal que

$$[X_1, X_3] = X_3$$
$$[X_2, X_3] = \alpha X_1$$
$$[X_3, X_1] = \beta X_2.$$

Como as matrizes são reais, basta considerarmos os casos:

d_1) $\alpha = \beta = 1$

d_2) $\alpha = -\beta = 1$.

Descreveremos então, uma álgebra de Lie de cada tipo.

V-) Consideremos o subespaço vetorial

$su(2) = \{ A \in M(2,\mathbb{C});\ A + \bar{A}^t = 0 \text{ e } trA = 0 \}$ de $M(2,\mathbb{C})$, onde $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})$ e $trA = a_{11} + a_{22}$, se A é a matriz (a_{ij}). Se A e B são dois elementos quaisquer de $su(2)$, temos

$$[A, B] + \overline{[A, B]}^t = AB - BA + \overline{(AB - BA)}^t =$$
$$= AB - BA + (\bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A})^t = AB - BA + \bar{B}^t\bar{A}^t - \bar{A}^t\bar{B}^t =$$
$$= AB - BA + BA - AB = 0 \quad \text{e}$$

$tr[A,B] = 0$, pois $tr(AB) = tr(BA)$; portanto $[A,B] \in su(2)$, isto é, $su(2)$ é uma subálgebra de Lie de $M(2,\mathbb{C})$.

Por outro lado, se $A = \begin{pmatrix} a_1+a_2 i & b_1+b_2 i \\ c_1 + c_2 i & d_1+d_2 i \end{pmatrix} \in su(2)$, temos

$$\begin{pmatrix} a_1+a_2i & b_1+b_2i \\ c_1+c_2i & d_1+d_2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1-a_2i & c_1-c_2i \\ b_1-b_2i & d_1-d_2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } trA=0,$$

o que nos dá

$$a_1 = d_1 = 0$$
$$c_1 = -b_1$$
$$c_2 = b_2$$
$$d_2 = -a_2 ,$$

ou seja $\quad A = \begin{pmatrix} a_2i & b_1+b_2i \\ -b_1+b_2i & -a_2i \end{pmatrix}$, com a_2, b_1, b_2 reais.

Podemos então, tomar uma base $\{ X, Y, Z \}$ para su(2),sendo

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} , \; Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} ,$$

com a qual temos a seguinte tabela de multiplicação

$$[X,Y] = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = Z$$

$$[X,Z] = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = Y$$

$$[Y,Z] = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = X.$$

Com a notação anterior, isto corresponde a

$Y_1 = [\,X_2, X_3\,] = X_1$

$Y_2 = [\,X_3, X_1\,] = X_2$

$Y_3 = [\,X_1, X_2\,] = X_3$, isto é, temos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, descrita no ítem (d_1).

Observe que esta álgebra de Lie caracteriza todas as álgebras de Lie com a tabela multiplicativa acima. Isto demonstra (6).

VI) Consideremos finalmente o conjunto $sl(2,\mathbb{R})$ das matrizes reais 2x2, com traço nulo, isto é,

$sl(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} ;\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$. É fácil verificar que

$sl(2,\mathbb{R})$ é subespaço vetorial de $M(2,\mathbb{R})$ e que se A e B são elementos de $sl(2,\mathbb{R})$ então $tr([A,B]) = tr(AB - BA) = 0$, portanto $[\,A,B\,] \in sl(2,\mathbb{R})$, isto é, $sl(2,\mathbb{R})$ é uma subálgebra de Lie de $M(2,\mathbb{R})$.

Tomando a base $\{\,X,Y,Z\,\}$ para essa álgebra, onde

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

temos

$$[X,Y] = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = Z$$

$$[X,Z] = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -Y$$

$$[Y,Z] = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -X.$$

Portanto,

$$Y_1 = [X_2, X_3] = [Y,Z] = -X = -X_1$$

$$Y_2 = [X_3, X_1] = [Z,X] = Y = X_2$$

$Y_3 = [X_1, X_2] = [X,Z] = Z = X_3$, que nos fornece a matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ descrita no ítem (d_2).

Qualquer álgebra de Lie com essa tabela de multiplicação é isomorfa a $sl(2,\mathbb{R})$. Temos então demonstrado o teorema. $\square$

CAPÍTULO - IV

OS GRUPOS DE LIE REAIS CONEXOS DE DIMENSÃO 1,2 e 3.

Utilizando a classificação de álgebras de Lie do capítulo anterior e os resultados anteriores, descreveremos a menos de isomorfismo, todos os grupos de Lie reais conexos de dimensão ≤ 3.

Com a aplicação exponencial, descreveremos um grupo de Lie G associado a uma álgebra de Lie g. Se G for simplesmente conexo, então todo grupo de Lie conexo, com mesma álgebra de Lie g, a menos de isomorfismo, é da forma G/N, com N subgrupo discreto do centro de G. Sendo assim, basta classificar todos os subgrupos discretos N de G.

4.1 - OS GRUPOS DE LIE REAIS CONEXOS DE DIMENSÃO ≤ 2.

Neste parágrafo descreveremos os grupos de Lie de dimensão 1 e dimensão 2.

4.1.1 - Teorema: Todo grupo de Lie real conexo, de dimensão 1 é isomorfo ou a $\mathbb{R}$ ou a S^1.

Demonstração: Com a álgebra de Lie descrita no teorema (3.1) e usando a aplicação exponencial, obtemos o grupo multiplicativo dos números reais positivos, que por sua vez é isomorfo ao grupo aditivo dos números reais. Este grupo é simplesmente conexo, abeliano e seus subgrupos discretos são da forma $\lambda\mathbb{Z}$, com λ fixo. Se $\lambda = 0$, temos o subgrupo trivial. Se $\lambda \neq 0$, a aplicação $\phi(m) = \frac{m}{\lambda}$ estabelece um isomorfismo entre $\mathbb{Z}$ e $\lambda\mathbb{Z}$; portanto a me nos de isomorfismo, temos $\mathbb{Z}$ como o único subgrupo discreto não trivial de $\mathbb{R}$.

Logo, os grupos de Lie reais conexos de dimensão 1, a menos de isomorfismo são $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, isto é, $\mathbb{R}$ ou S^1. $\square$

<u>4.1.2 - Teorema</u>: Todo grupo de Lie real conexo de dimensão 2 é isomorfo a um dos seguintes:

(1) $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R} \times S^1$ ou $S^1 \times S^1$ ou

(2) $A(1) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ a > 0 \}$, também denotado por $ax + b$.

<u>Demonstração</u>: Com raciocínio semelhante ao usado no teorema anterior, associamos à álgebra de Lie $\mathbb{R}^2$ descrita no teorema (3.2) o grupo de Lie $\mathbb{R}^2$ com a operação adição. Este grupo é abeliano e tem, a menos de isomorfismo, $\{0\} \times \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como os únicos subgrupos discretos não triviais. Assim, os únicos grupos de Lie abelianos conexos, de dimensão 2, a menos de isomorfismo, são

$$\mathbb{R}^2, \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

ou seja, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times S^1$ e $S^1 \times S^1$, o que mostra (1).

Seja agora, a álgebra de Lie $a(1)$. Para $t \in \mathbb{R}$ e $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in a(1)$, temos

$$\exp(tX) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + ta + \dfrac{t^2a^2}{2!} + \dots & bt + \dfrac{bt^2a}{2!} + \dfrac{bt^3a^2}{3!} + \dots \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para $a = 0$, tem-se $\exp(tX) = \begin{pmatrix} 1 & bt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e para $a \neq 0$,

$\exp(tX) = \begin{pmatrix} e^{ta} & \frac{b}{a}(e^{ta}-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obtemos assim, o seguinte grupo de Lie linear não abeliano.

$$A(1) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a > 0 \}, \text{ que será denotado por } ax + b.$$

Vemos que $A(1)$ é homeomorfo a $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2; a > 0\}$, que por sua vez é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$; portanto $A(1)$ é simplesmente conexo. Além disso, o centro de $A(1)$ é

$$Z(A(1)) = \{ \begin{pmatrix} a_o & b_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A(1); \begin{pmatrix} a_o & b_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_o & b_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \},$$

para todo $a,b \in \mathbb{R}$. Temos então

$$\begin{pmatrix} a_o a & a_o b + b_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a a_o & a b_o + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $a=b=1$, tem-se $a_o + b_o = b_o + 1$ ou seja $a_o = 1$. Agora com $a=2$, temos $b + b_o = 2b_o + b$ e daí $b_o = 0$.

Logo $Z(A(1)) = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$, o que nos permite concluir que $A(1)$ é o grupo de Lie real conexo mais geral, associado à álgebra de Lie $a(1)$, o que demonstra (2). $\square$

4.2 - <u>OS GRUPOS DE LIE REAIS CONEXOS DE DIMENSÃO 3</u>

Finalmente, descreveremos os grupos de Lie G associados às álgebras de Lie g, descritas no teorema (3.3). Para facilitar, dividiremos o estudo, nos casos em que a álgebra derivada g' tem dimensão 0 ou 1, 2 e 3.

<u>4.2.1 - Teorema</u>: Todo grupo de Lie real conexo G, de dimensão 3, associado à álgebra de Lie g, tal que g' tem dimensão

0 ou 1 é isomorfo a precisamente um dos seguintes:

(1) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times S^1$ ou $\mathbb{R}\times S^1\times S^1$ ou $S^1\times S^1\times S^1$,

(2) $\{ < A,\ell > \in A(2);\ A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ ou

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \Big/ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ n \in \mathbb{Z} \right\},$$

(3_o) $(ax+b)\times\mathbb{R}$ ou $(ax + b)\times S^1$.

Demonstração: Do ítem (1) do teorema (3.3) temos a álgebra de Lie abeliana $\mathbb{R}^3$, que nos dá em correspondência os grupos de Lie

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times S^1 \text{ ou } \mathbb{R}\times S^1\times S^1 \text{ ou } S^1\times S^1\times S^1,$$

como os únicos (a menos de isomorfismos) grupos de Lie reais conexos abelianos, de dimensão 3.

Dado um elemento qualquer H da álgebra de Lie g, descrita em (2) do teorema (3.3), para todo número real t temos

$$\exp(tH) = \exp(t < \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > =$$

$$= < \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} > + t < \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > + \frac{t^2}{2!} < \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} \lambda b \\ 0 \end{pmatrix} > +$$

$$+ \frac{t^3}{3!} < \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} > + \ldots =$$

$$= < \begin{pmatrix} 1 & t\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} ta + \frac{t^2\lambda b}{2!} \\ tb \end{pmatrix} >.$$

Obtemos assim, o grupo de Lie

$$G = \{ < \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > ; t, a, b \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ \begin{pmatrix} 1 & t & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad t, a, b \in \mathbb{R} \}$$, que é simplesmente conexo, pois é homeomorfo a $\mathbb{R}^3$. Se $< \begin{pmatrix} 1 & t_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \end{pmatrix} >$ é um elemento do centro de G, então devemos ter

$$< \begin{pmatrix} 1 & t + t_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} a + bt_o + a_o \\ b + b_o \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} 1 & t_o+t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} a_o+tb_o+a \\ b_o+b \end{pmatrix} >,$$

para todo $t, a, b \in \mathbb{R}$. Em particular, para $b = 1$ e $t = 0$ temos $t_o = 0$; com $t = 1$ temos $b_o = 0$.

Assim, $Z(G) = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_o \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad a_o \in \mathbb{R} \}$, cujos subgrupos são da forma $\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \}$.

Se $\lambda = 0$, temos o subgrupo trivial; se $\lambda \neq 0$, a aplicação $\phi : G \longrightarrow G$ definida por

$$\phi \left(\begin{pmatrix} 1 & t & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & t/\sqrt{|\lambda|} & a/|\lambda| \\ 0 & 1 & b/\sqrt{|\lambda|} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, é tal que

$$\phi\left(\begin{pmatrix}1 & t & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & t_1 & a_1\\ 0 & 1 & b_1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix}1 & t_1+t & a_1+tb_1+a\\ 0 & 1 & b_1+b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & \dfrac{t_1+t}{\sqrt{|\lambda|}} & \dfrac{a_1+tb_1+a}{|\lambda|}\\ 0 & 1 & \dfrac{b_1+b}{\sqrt{|\lambda|}}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \dfrac{t}{\sqrt{|\lambda|}} & \dfrac{a}{|\lambda|}\\ 0 & 1 & \dfrac{b}{\sqrt{|\lambda|}}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \dfrac{t_1}{\sqrt{|\lambda|}} & \dfrac{a_1}{|\lambda|}\\ 0 & 1 & \dfrac{b_1}{\sqrt{|\lambda|}}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \phi\left(\begin{pmatrix}1 & t & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot\phi\left(\begin{pmatrix}1 & t_1 & a_1\\ 0 & 1 & b_1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$, isto é, ϕ é um homomorfismo entre grupos. É imediato que ϕ é bijeção, portanto é um isomorfismo entre grupos, que leva tais subgrupos em

$$\left\{ \begin{pmatrix}1 & 0 & n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} ;\ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Concluimos portanto, que o grupo de Lie conexo mais geral, a menos de isomorfismo é

$$\left\{ \begin{pmatrix}1 & t & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} ;\ t, a, b \in \mathbb{R} \right\} \Big/ \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0 & n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} ;\ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Isto demonstra (2).

A próxima álgebra é $a(1)\times\mathbb{R}$ que tem como grupo $(ax+b)\times\mathbb{R}$. Como os subgrupos discretos normais de $(ax+b)\times\mathbb{R}$ são os mesmos de $\mathbb{R}$, temos que os demais grupos são isomorfos a $(ax+b)\times S^1$. Temos assim, (3_o). $\square$

4.2.2 - Teorema: Todo grupo de Lie real conexo G, de dimensão 3, com álgebra de Lie g, tal que g' tem dimensão 2 é isomorfo a um dos seguintes:

(3_α) $\{ < A,\ell > \in A(2);\ \ A = \begin{pmatrix} e^t & o \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} \}$, para α fixo, $0 < |\alpha| \leq 1$,

(4) $\{ < A,\ell > \in A(2);\ A = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \}$,

(5_o) $\tilde{E}(2)/_{K\mathbb{Z}}$, onde K é um inteiro fixo, K = 0,1,2,... e $\tilde{E}(2)$ é o grupo recobrimento universal de E(2),

5_α) $\{ < A,\ell > \in A(2);\ A = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \}$, para α fixo $\alpha > 0$.

Demonstração: Dado um elemento qualquer H = $= < \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} >$ da álgebra de Lie descrita em (3_α), do teorema (3.3), temos que se $t \in \mathbb{R}$, então

$$\exp(tH) = < \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} > + t < \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > +$$

$$+ \frac{t_2}{2!} < \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \Big| \lambda \begin{pmatrix} a \\ b\alpha \end{pmatrix} > + \ldots =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1+t\lambda+\frac{t^2\lambda^2}{2!}+\dots & 0 \\ 0 & 1+t\lambda\alpha+\frac{t^2\lambda^2\alpha^2}{2!}+\dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ta+\frac{1}{2!}t^2\lambda a+\frac{1}{3!}t^3\lambda^2 a+\dots \\ tb+\frac{1}{2!}t^2\lambda b\alpha+\frac{1}{3!}t^3\lambda^2 b\alpha^2+\dots \end{pmatrix} \right\rangle$$

Se $\lambda = 0$, $\exp(tH) = < \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ta \\ tb \end{pmatrix} >$; se $\lambda \neq 0$,

$\exp(tH) = < \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t\lambda} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{a}{\lambda}(\varepsilon^{\lambda t}-1) \\ \frac{b}{\lambda\alpha}(e^{t\lambda\alpha}-1) \end{pmatrix} >$. Desta forma, obtemos o grupo de Lie

$G_\alpha = \{< A,\ell > \in A(2);\ A = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} \}$; que topologicamente é o mesmo que

$\{ (e^t, e^{\alpha t}) \in \mathbb{R}^2 \} = \{ (x, x^\alpha), x > 0 \}$, que por sua vez é o gráfico da função contínua $\phi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = x^\alpha$. Portanto, G_α é simplesmente conexo. Se $< A_o, \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \end{pmatrix} >$ é um elemento do centro de G_α, devemos ter

$$< A_oB, A_o \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \end{pmatrix} > = < BA_o, B \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} >,$$

para todo $< B, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > \in G_\alpha$, isto é,

$$ae^{t_o} + a_o = a_oe^t + a \quad \text{e}$$

$$be^{\alpha t_o} + b_o = b_oe^{\alpha t} + b, \ \forall\ a, b, t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $t = 0$ e $a = 1$, temos $t_o = 0$. Com $t=1$ temos $a_o = b_o = 0$, pois $\alpha \neq 0$, portanto $Z(G_\alpha) = \{< I, 0 >\}$, que nos permite concluir que o grupo de Lie real conexo mais geral, associado à álgebra de Lie g é G. Isto demonstra (3_α).

Se H é um elemento da álgebra descrita em (4) e se t é um número real, temos

$$\exp(tH) = < I, 0 > + t < \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > +$$

$$+ \frac{t^2}{2!} < \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| \lambda \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix} > + \ldots =$$

$$= < I, 0 > + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\langle \lambda^n \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} a+(n-1)b \\ b \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & t\lambda e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} ta + \frac{t^2}{2!}\lambda(a+b) + \frac{t^3}{3!}\lambda^2(a+2b) + \ldots \\ tb + \frac{t^2}{2!}\lambda b + \frac{t^3}{3!}\lambda^2 b + \ldots \end{pmatrix} \right\rangle$$

Temos então, o grupo de Lie

$G = \{ < A, \ell > \in A(2);\ A = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \}$, que topologicamente é o mesmo que $\{ (e^t, te^t, e^t);\ t \in \mathbb{R} \}$; este é simplesmente conexo, pois é o gráfico da função contínua $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\phi(x) = (x \log x, x)$. O elemento $< A_o, \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \end{pmatrix} >$ está no centro de G se $< A_o, \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \end{pmatrix} > . < A, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > =$

$$= < A, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > . < A_o, \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \end{pmatrix} >; \forall < A, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > \in G.$$

Como $A_oA = AA_o$, basta que

$$\begin{pmatrix} e^{t_o} & t_o e^{t_o} \\ 0 & e^{t_o} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} & t e^{t} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} ,$$

$\forall$ a, b, t $\varepsilon \mathbb{R}$. Fazendo $t = b = 0$ e $a = 1$, temos $t_o = 0$; com $t=1$ obtemos $b_o = a_o = 0$. Logo $Z(G) = \{ < I,0 > \}$, portanto todo grupo de Lie real conexo, com álgebra de Lie g é isomorfo a G. Com isto temos (4).

Para (5_o), tomando um elemento genérico

$H = < \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} >$ de g e $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\exp(tH) = < I, 0 > + t < \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > +$$

$$+ \frac{t^2}{2!} < \lambda^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Bigg| \lambda \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} > + \frac{t^3}{3!} < \lambda^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \lambda^2 \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} > + \ldots =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2\lambda^2}{2!} + \frac{t^4\lambda^4}{4!} - \ldots & -t\lambda + \frac{t^3\lambda^3}{3!} - \frac{t^5\lambda^5}{5!} + \ldots \\ t\lambda - \frac{t^3\lambda^3}{3!} + \frac{t^5\lambda^5}{5!} - \ldots & 1 - \frac{t^2\lambda^2}{2!} + \frac{t^4\lambda^4}{4!} - \ldots \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right\rangle$$

onde $A = ta - \frac{t^2\lambda b}{2!} - \frac{t^3\lambda^2 a}{3!} + \frac{t^4}{4!}\lambda^3 b + \frac{t^5\lambda^4 a}{5!} - \ldots =$

$= \frac{a}{\lambda}$ sen$t\lambda$ $+ \frac{b}{\lambda}(\cos t\lambda - 1)$, para $\lambda \neq 0$ e

$B = tb + \frac{t^2\lambda a}{2!} - \frac{t^3}{3!}\lambda^2 b - \frac{t^4}{4!}\lambda^3 a + \frac{t^5\lambda^4 b}{5!} - \ldots =$

$= \frac{b}{\lambda}$ sentλ $- \frac{a}{\lambda}$ (costλ -1), para $\lambda \neq 0$.

Assim, $\exp(tH) = < \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ta \\ tb \end{pmatrix} >$, para $\lambda = 0$ e

$$\exp(tH) = \left\langle \begin{pmatrix} \cos t\lambda & -\operatorname{sen} t\lambda \\ \operatorname{sen} t\lambda & \cos t\lambda \end{pmatrix}, \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} a \operatorname{sen} t\lambda + b \cos t\lambda - b \\ b \operatorname{sen} t\lambda - a \cos t\lambda + 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

para $\lambda \neq 0$. Logo, $\exp(tH) \in E(2) = \{ \left\langle \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle \}$.

Reciprocamente, se $A \in E(2)$, então a curva $\phi(t) = A(t)$ é tal que $\phi(0) = I$ e $X = \phi'(0) \in g$. Portanto, associamos à álgebra de Lie g, o grupo de Lie conexo $E(2)$, que é o mesmo que

$$\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t & a \\ \operatorname{sen} t & \cos t & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ t, a, b \in \mathbb{R} \}.$$

Como $\begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$ pode ser identificado com o número complexo e^{it}, então $E(2)$ é topologicamente o mesmo que $S^1 x \mathbb{R}^2$. Usando propriedades de grupo fundamental, temos

$$\pi_1(E(2)) \simeq \pi_1(S^1 x \mathbb{R}^2) \simeq \pi_1(S^1) x \ \pi_1(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{Z} \times 0 \simeq \mathbb{Z},$$ ou seja, $E(2)$ não é simplesmente conexo.

Por outro lado, o centro de $E(2)$ é

$$Z(E(2)) = \{ < A_o, \ell_o > \in E(2); < A_o, \ell_o >.< A, \ell > = < A, \ell >.< A_o, \ell_o > \},$$

para todo $< A, \ell > \in E(2)$. Como $AA_o = A_oA$, devemos ter

$$\begin{pmatrix} \cos t_o & -\operatorname{sen} t_o \\ \operatorname{sen} t_o & \cos t_o \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$\forall a, b, t \in \mathbb{R}$. Com $t = b = 0$ e $a = 1$, temos $\cos t_o = 1$; para $t = \pi$, $a = 0$ e $b = 1$, encontramos $a_o = b_o = 0$. Portanto $E(2)$ tem centro trivial.

Como $Z(G/N) = Z(G)/N$ e usando os teoremas (1.6.5) e (1.6.6) obtemos

$$\{id\} = Z(E(2)) \cong Z(\tilde{E}(2)/N) = Z(\tilde{E}(2))/N =$$

$$= Z(\tilde{E}(2)/_{\pi_1}(E(2)) \cong Z(\tilde{E}(2))/\mathbb{Z}$$, isto é, $Z(\tilde{E}(2)) \cong \mathbb{Z}$, cujos subgrupos discretos são $K\mathbb{Z}$ para $K = 0, 1, 2, \ldots$

Sendo $Z(\tilde{E}(2)/_{K\mathbb{Z}}) = Z(\tilde{E}(2))/_{K\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/_{K\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_K$, temos então para K's diferentes, grupos de Lie não isomorfos, o que demonstra (5_o).

Para demonstrar (5_α), observemos inicialmente que se $t \in \mathbb{R}$ e α é um número real positivo, então

$$\exp(t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2b} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{t^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \ldots = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$ e $\exp(t\alpha I) = e^{t\alpha} I$.

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ comutam, tem-se $\exp t\lambda \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} =$

$$\exp t\lambda \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \exp(t\lambda\alpha I) . \exp t\lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{t\lambda\alpha} \begin{pmatrix} \cos t\lambda & -\operatorname{sen} t\lambda \\ \operatorname{sen} t\lambda & \cos t\lambda \end{pmatrix}.$$

Desta forma, se $H = <\lambda \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > \varepsilon\, g$ e $t \varepsilon \mathbb{R}$,

temos

$$\exp(tH) = \exp t < \lambda \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > =$$

$$= < e^{t\lambda\alpha} \begin{pmatrix} \cos t\lambda & -\operatorname{sen} t\lambda \\ \operatorname{sen} t\lambda & \cos t\lambda \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!} B^2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \ldots > ,$$

onde $B = \lambda \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$; portanto $\exp(tH) \varepsilon G_\alpha$ =

$$= \{ < A,\ell > \varepsilon A(2);\ A = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}, \alpha > 0 \} =$$

$$= \{ \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos t & -e^{\alpha t} \operatorname{sen} t & a \\ e^{\alpha t} \operatorname{sen} t & e^{\alpha t} \cos t & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ a,b,t \varepsilon \mathbb{R},\ \alpha > 0 \}.$$

Reciprocamente, se B se G_α, então a curva $\phi(t) = B(t)$ é tal que $\phi(0) = I$ e $X = \phi'(0) \varepsilon g_\alpha$.

O grupo de Lie G_α assim obtido, topologicamente é o mesmo que

$$\{(e^{\alpha t}\cos t,\ e^{\alpha t} \operatorname{sen} t)\} \times \mathbb{R}^2.$$

Consideremos a aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(t) = e^{\alpha t}(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Temos que

i) f é contínua e diferenciável.

ii) Se $f(t_1) = f(t_2)$ então $\|f(t_1)\| = \|f(t_2)\|$, portanto $e^{\alpha t_1} = e^{\alpha t_2}$ ou seja $t_1 = t_2$; portanto f é injetora.

iii) O jacobiano de f é

$$J(f(t)) = e^{\alpha t} \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t + \alpha \cos t \\ \cos t + \alpha \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$, que nos dá

$\|J\, f(t)\|^2 = (e^{\alpha t})^2\,(1+\alpha^2)$ e por conseguinte, $Jf(t) \neq 0$, $\forall t \varepsilon \mathbb{R}$.

Portanto f é um homeomorfismo sobre a imagem, consequentemente o espaço $\{(e^{\alpha t}\cos t,\ e^{\alpha t}\operatorname{sen} t)\}$ é simplesmente conexo. Logo G_α também o é.

Se $< e^{\alpha t_o}\begin{pmatrix}\cos t_o & -\operatorname{sen} t_o\\ \operatorname{sen} t_o & \cos t_o\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a_o\\ b_o\end{pmatrix} > \varepsilon\ Z(G_\alpha)$

devemos ter

$$e^{\alpha t_o}\begin{pmatrix}\cos t_o & -\operatorname{sen} t_o\\ \operatorname{sen} t_o & \cos t_o\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_o\\ b_o\end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos t & -\operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_o\\ b_o\end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},\quad \forall\ a, b, t \ \varepsilon\ \mathbb{R}.$$

Fazendo $t = b = 0$ e $a = 1$, temos $\operatorname{sen} t_o = 0$ e $e^{\alpha t_o} = 1$, que nos dá $t_o = 0$, pois $\alpha \neq 0$. Agora com $t = \pi$, encontramos $a_o = b_o = 0$.

Logo, $Z(G_\alpha) = \{ < I, 0 > \}$, portanto G_α é o grupo de Lie real conexo, mais geral, associado à álgebra de Lie g. Isto conclui o teorema. $\square$

<u>4.2.3 - Teorema</u>: Todo grupo de Lie real conexo G, de dimensão 3, com álgebra de Lie g, tal que g' tem dimensão 3 é isomorfo a precisamente um dos seguintes:

(6) SU(2) ou SO(3),

(7) $\widetilde{SL}(2, \mathbb{C})_{/K\mathbb{Z}}$, onde K é um inteiro fixo, K=0,1,2,...e

$\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ é o grupo recobrimento universal de $SL(2,\mathbb{R})$

<u>Demonstração</u>: Se g = su(2) é a álgebra de Lie descrita em (6) do teorema (3.3) e A ε su(2) e s ε $\mathbb{R}$, temos

$$(\exp \overline{sA})^t = I + s\,\bar{A}^t + \frac{1}{2!}\, s^2(\bar{A}^t)^2 + \ldots =$$

$$= \exp(s\,\bar{A}^t) = \exp(-s\,A), \text{ pois } \bar{A}^t + A = 0.$$

Como $\exp(s\,A).\exp(-sA) = I$, temos

(I) $\exp(sA).(\exp \overline{sA})^t = I$.

Por outro lado, a matriz A é do tipo $\begin{pmatrix} ai & b+ci \\ -b+ci & -ai \end{pmatrix}$, onde a, b e c são números reais e tem como autovalores, as raízes de

$$\begin{vmatrix} ai-\lambda & b+ci \\ -b+ci & -ai-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ isto é, } \lambda^2 = -(a^2+b^2+c^2).$$

Fazendo $K = a^2+b^2+c^2 \geq 0$, temos

i) Se $K = 0$, então $a = b = c = 0$ e daí $A = 0$. Portanto $\exp(sA) = I$, que tem determinante igual a 1.

ii) Se $K > 0$, existe uma matriz M inversível tal que $A = MBM^{-1}$, onde B é do tipo $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix}$.

Então $\exp(sA) = M.\exp(sB).M^{-1}$ e $\det(\exp sA) =$

$$= \det(\exp sB) = \det \begin{pmatrix} e^{s\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{-s\lambda_1} \end{pmatrix} = 1.$$

Portanto, para qualquer $A \in su(2)$ e todo t real, temos

(II) $\det(\exp(tA)) = 1$

De (I) e (II), concluimos que $\exp(tA)$ é um elemento do grupo de Lie

$$SU(2) = \{ A \in G\ell(2, \mathbb{C});\ \det A = 1 \text{ e } \bar{A}^t = A^{-1} \}.$$

Reciprocamente, se $A = (a_{ij}) \in SU(2)$, definimos um caminho diferenciável $\phi(t) = (a_{ij}(t))$, tal que $\phi(0) = I$.

Como $(\overline{\phi(t)})^t \cdot \phi(t) = I$, temos $\overline{\dfrac{d\phi(t)}{dt}}^{\,t} . \phi(t) + (\overline{\phi(t)})^t . \dfrac{d\phi(t)}{dt} = 0.$

Chamando $H = \phi'(0)$, obtemos

(III) $\bar{H}^t + H = 0$.

Ainda mais, sabendo que

$\det(a_{ij}(t)) = a_{11}(t).a_{22}(t) - a_{21}(t).a_{12}(t) = 1, \ \forall\, t \in \mathbb{R}$,

temos

$$a_{11}(t). \frac{d(a_{22}(t))}{dt} + \frac{d(a_{11}(t))}{dt} a_{22}(t) - a_{21}(t) \frac{d(a_{12}(t))}{dt} -$$

$$- \frac{d(a_{21}(t)}{dt} . a_{12}(t) = 0,$$ que para $t = 0$ nos dá

$$\left.\frac{d(a_{22}(t))}{dt}\right|_{t=0} + \left.\frac{d(a_{11}(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0,$$ isto é,

(IV) $t_r\, H = 0$.

Com (III) e (IV), concluimos que $su(2)$ é a álgebra de Lie correspondente ao grupo de Lie $SU(2)$.

Por outro lado, todo elemento $A \in SU(2)$ é do tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, com $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$. Fazendo $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, e $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, segue-se que $a_1{}^2 + a_2{}^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2 = 1$, o que nos permite concluir que $SU(2)$ é o mesmo que

$\{ (a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4;\ a_1{}^2 + a_2{}^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2 = 1 \}$, isto é, a esfera S^3, portanto simplesmente conexo.

Se $A_o = \begin{pmatrix} a_o & b_o \\ -\bar{b}_o & \bar{a}_o \end{pmatrix}$ é um elemento do centro de $SU(2)$, deve comutar com $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, com o que temos $b_o = 0$. Tomando $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, temos que $a_o = \bar{a}_o$, portanto real. Como $\|a_o\|^2 + \|b_o\|^2 = 1$, encontramos $a_o = \pm 1$.

Logo $Z(SU(2)) = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \}$, consequentemente o grupo de Lie conexo real mais geral, a menos de isomorfismo, associado à álgebra de Lie $su(2)$ ou é $SU(2)$ ou é $SU(2)/_{\{\pm I\}}$, sendo este isomorfo ao grupo $SO(3)$ das transformações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ que preservam norma e orientação (Vide apêndice). Temos assim (6).

Finalmente, determinemos o grupo de Lie mais geral, associado à álgebra de Lie $g = s\ell(2,\mathbb{R})$. Inicialmente, façamos para a álgebra de Lie $s\ell(2,\mathbb{C})$ sobre o corpo dos números complexos, isto é,

$$s\ell(2,\mathbb{C}) = \{ X \in M(2, \mathbb{C});\ \mathrm{tr}\, X = 0 \} =$$

$$= \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} ;\ a,b,c \in \mathbb{C} \}.$$

i) Se X tem autovalores λ_1 e λ_2 distintos, então existe M inversível tal que $X = M^{-1} A\, M$, onde $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}A = \mathrm{tr}\, X = 0$. Assim, para $t \in \mathbb{C}$, temos

$$\det \exp(t\, X) = \det \exp(t\, A) = \det \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} = 1.$$

ii) Se X tem autovalores iguais, então X pode ser descrito na forma $X = N^{-1}B\,N$, com N inversível e $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$. Como $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} X = 0$, temos que $\lambda_1 = 0$. Portanto, para $t \in \mathbb{C}$, temos

$$\det(\exp t\,X) = \det(\exp t\,B) = \det \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Com (i) e (ii), concluimos que se $X \in s\ell(2,\mathbb{C})$ e $t \in \mathbb{C}$, então $\det(\exp t\,X) = 1$. Em particular, vale para $X \in s\ell(2,\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$; portanto $\exp(t\,X) \in SL(2,\mathbb{R}) = \{ H \in M(2,\mathbb{R});\ \det H = 1 \}$.

Reciprocamente, dado $A \in SL(2,\mathbb{R})$, a curva $\phi(t) = A(t)$, com $\phi(0)=I$ nos dá

$$a_{11}(t).\,\frac{d}{dt}(a_{22}(t)) + \frac{d}{dt}(a_{11}(t)).\,a_{22}(t) - a_{21}(t).\frac{d}{dt}(a_{12}(t)) -$$

$$- \frac{d}{dt}(a_{21}(t)).a_{12}(t) = 0$$,que com $t = 0$, temos

$$\frac{d}{dt}(a_{22}(t)) + \frac{d}{dt}(a_{11}(t)) = 0.$$

Logo, $X = \phi'(0)$ tem traço nulo, portanto $X \in s\ell(2,\mathbb{R})$. Assim, à álgebra de Lie $s\ell(2,\mathbb{R})$ associamos o grupo de Lie $SL(2,\mathbb{R})$.

O centro de $SL(2,\mathbb{R})$ é

$$Z(SL(2,\mathbb{R})) = \{ A_o = \begin{pmatrix} a_o & b_o \\ c_o & d_o \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R});\ A_oA = AA_o,\ \forall A \in SL(2,\mathbb{R})\}.$$

Tomando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, temos $c_o = -b_o$ e $d_o = a_o$. Agora com $A =$ $= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, encontramos $b_o = 0$, portanto $a_o = \pm 1$, pois $\det A_o = 1$. Logo, $Z(SL(2,\mathbb{R})) = \{\pm I\}$.

Por outro lado, usando ortonormalização de Gram - Schmidt, temos a aplicação $r : SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow SO(2)$, que com a inclusão $i : SO(2) \longrightarrow SL(2,\mathbb{R})$, nos dá

(V) $r_o i = id_{SO(2)}$.

As aplicações r e i induzem nos grupos fundamentais correspondentes, os homomorfismos r^* e i^*, valendo $r^* o i^* = I_d$; portanto i^* é injetora. Como $SO(2)$ é o mesmo que S^1, temos $\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$, consequentemente, a imagem de $\pi_1(SO(2))$ é um subgrupo não trivial de $\pi_1(SL(2,\mathbb{R}))$, que nos permite concluir que $SL(2,\mathbb{R})$ é não simplesmente conexo.

Utilizando espaço projetivo, temos

$$Z(PSL(2,\mathbb{R})) = Z\left(SL(2,\mathbb{R})/_{\{\pm I\}}\right) = Z(SL(2,\mathbb{R}))/_{\{\pm I\}} = \{id\},$$

portanto,

$$\{id\} = Z(PSL(2,\mathbb{R})) = Z\left(\tilde{PSL}(2,\mathbb{R})/_N\right) = Z(\tilde{PSL}(2,\mathbb{R}))/_N$$

$$= Z(\tilde{PSL}(2,\mathbb{R}))/_{\pi_1(PSL(2,\mathbb{R}))} = Z(\tilde{PSL}(2,\mathbb{R}))/_{\mathbb{Z}} .$$

Logo $Z(\tilde{PSL}(2,\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$ e daí $Z(SL(2,\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$, cujos subgrupos discretos são $K\mathbb{Z}$, para $K = 0,1,2, \ldots$

Então $Z(\tilde{SL}(2,\mathbb{R})/_{K\mathbb{Z}}) = Z(\tilde{SL}(2,\mathbb{R}))/_{K\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/_{K\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_K$, portanto K's diferentes geram grupos de Lie não isomorfos. Temos assim (7), que conclui a demonstração do teorema $\square$

———— o ————

APÊNDICE

A finalidade deste, é mostrar um isomorfismo entre os grupos $SU(2)/_{\{\pm I\}}$ e $SO(3)$, descritos no teorema (4.2.3).

Seja M, o espaço vetorial das matrizes 2x2 complexas, hermitianas, com traço nulo, isto é,

$M = \{ X \in M(2, \mathbb{C}); X^* = X$ e $tr\, X = 0 \}$, onde $X^* = \bar{X}^t$. Assim, um elemento de M é da forma $\begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & -a \end{pmatrix}$, com a, b e c reais.

A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M$, definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais (e também entre grupos aditivos).

Para cada $A \in SU(2)$, consideremos a aplicação T_A, definida por $T_AX = AXA^* = AXA^{-1}$, com $X \in M$. Temos então

(I) $(T_AX)^* = (AXA^*)^* = AX^*A^* = AX\,A^* = T_AX$ e

(II) $tr(T_AX) = tr(AXA^{-1}) = trX$.

De (I) e (II) temos que $T_AX \in M$, isto é, T_A é uma aplicação de M em M. É fácil verificar que T_A é um isomorfismo entre espaços vetoriais e que $T_{AB} = T_A . T_B$ e $T_{A^{-1}} = (T_A)^{-1}$, para todo A e B em $SU(2)$.

A composta $f_A = f^{-1}.T_A.f$ é uma aplicação linear bijetora de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Mostremos que f_A preserva a norma e orientação.

Dado um elemento $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$, temos $\|x\|^2 = -$ $-\det f(x)$, portanto $\|f_A(x)\|^2 = \|(f^{-1}.T_A.f)(x)\|^2 =$ $-\det f((f^{-1}.T_A.f)(x)) = -\det(T_A.f(x)) = -\det(A\, f(x)A^{-1}) =$ $-\det f(x) = \|x\|^2$, ou seja, $\|f_A(x)\| = \|x\|$, isto é, f_A preserva a norma. Falta mostrar que f_A preserva a orientação. Veremos antes, algumas propriedades de determinante de aplicação linear.

<u>Proprosição 1</u>: Seja V o espaço vetorial das matrizes nxn sobre um corpo K e seja $A = (a_{ij})$ uma matriz fixa de V. Con consideremos os operadores lineares L_A e R_A em V, definidos por $L_AX = AX$ e $R_AX = XA$, respectivamente. Então $\det L_A = \det R_A =$ $= (\det A)^n$.

<u>Demonstração</u>: Tomemos a base canônica $B = \{X_{ij}\}$ $1 \leq i, j \leq n$ de V, ordenada da seguinte maneira

$$X_{ij} < X_{k\ell} \text{ se } j < \ell \text{ ou } i < K \text{ quando } j = \ell$$

Assim,

$$L_AX_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \dots 0 \\ a_{21} & 0 \dots 0 \\ \vdots & \\ a_{n1} & 0 \dots 0 \end{pmatrix},$$

$$L_AX_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \dots 0 \\ a_{22} & 0 \dots 0 \\ \vdots & \\ a_{n2} & 0 \dots 0 \end{pmatrix},$$

...

$$L_A X_{n1} = \begin{pmatrix} a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{nn} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando $X_{12}, \dots, X_{n2}$, obtemos os mesmos elementos que antes, porém na 2ª coluna, e assim por diante, verificamos que a matriz de L_A é uma matriz $n^2 x n^2$, do tipo

$$\begin{pmatrix} A & & & 0 \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A \end{pmatrix} \text{, com } n \text{ blocos de matrizes } A.$$

Logo, $\det L_A = (\det A)^n$. Para o operador R_A, ordenamos a base canônica segundo as linhas e de modo análogo, obtemos

$$\det R_A = (\det A)^n. \qquad \square$$

<u>Proposição 2</u>: Seja V o espaço vetorial das matrizes complexas nxn e seja A uma matriz fixa de V. Se M_A é o operador linear em V, dado por $M_A X = AXA^*$, onde $A^* = \bar{A}^t$, então $\det M_A = \|\det A\|^{2n}$.

<u>Demonstração</u>: Pela proposição (1), se $R_A{*}$ é o operador em V, dado por $R_A{*}X = XA^*$, então

$$\det R_A{*} = (\det A^*)^n = (\det \bar{A}^t)^n = (\det \bar{A})^n = (\overline{\det A})^n.$$

Como $M_A = R_A{*}.L_A$, onde $L_AX = AX$, temos

$\det M_A = (\det R_{A^*}).(\det L_A) = (\overline{\det A})^n.(\det A)^n = \|\det A\|^{2n}$. □

Proposição 3: Seja V o espaço vetorial das matrizes 2x2 complexas e seja H o subespaço vetorial de V, formado pelas matrizes hermitianas (X é hermitiana, se $X^*=X$). Então H é um espaço vetorial real e o operador linear M_A em H, dado por $M_A X = AXA^*$ é tal que $\det M_A = \|\det A\|^4$.

Demonstração: O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix} \right\}$

é uma base para o espaço vetorial V sobre $\mathbb{C}$ e também uma base para o espaço vetorial H sobre $\mathbb{R}$. Desta feita, considerando em H, temos $M_A X_i = \sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij} X_j$, para $i = 1,2,3,4$, onde α_{ij} são escalares reais. Como o operador M_A está bem definido, quando consideramos em V temos $M_A X_i = \sum_{j=1}^{4} \beta_{ij} X_j$, que devido a unicidade dos escalares nos dá $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$. Pela proposição (2), segue-se que $\det M_A = \|\det A\|^4$, como queríamos demonstrar. □

O espaço vetorial $M = \{ X \in M(2, \mathbb{C}); X^*=X \text{ e } \operatorname{tr} X = 0 \}$ é um subespaço vetorial do espaço H, das matrizes 2x2 complexas hermitianas. Tomando a base $B \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix} \right\}$ de M e adicionando-lhe a identidade, obtemos uma base para H. Assim, o operador M_A em H é representado por uma matriz do tipo

$$M_A = \begin{pmatrix} T_A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo $\det T_A = \det M_A = \|\det A\|^4 = 1$, por conseguinte temos

$\det f_A = \det(f^{-1}.\, T_A.\, f) = \det T_A = 1$, isto é, f_A preserva orientação.

Portanto $f_A \in SO(3)$. Seja agora, a aplicação $\phi: SU(2) \longrightarrow$ $\longrightarrow SO(3)$ definida por $\phi(A) = f_A$.

a) Se A e B são dois elementos de $SU(2)$, então $\phi(AB) =$ $= f_{AB} = f^{-1}.\, T_{AB}.\, f = f^{-1}.\, T_A.T_B.f = f^{-1}.T_A.f.f^{-1}.T_B.f = \phi(A).\phi(B)$, portanto ϕ é homomorfismo de grupo.

b) Baseado no cálculo diferencial, temos que ϕ é uma aplicação diferenciável de classe C^∞, pois suas coordenadas o são. Sendo ϕ homomorfismo entre grupos, seu posto é constante. Pelo teorema do posto (vide [7] - Elon Lima), como ϕ é localmente injetora, seu posto é máximo, isto é, igual a 3. Em particular, ϕ é uma aplicação aberta.

Com $SU(2)$ compacto (pois é o mesmo que a esfera S^3), $SO(3)$ conexo (e de Hansdorff) e ϕ aberta concluimos que ϕ é sobrejetora.

c) O núcleo de ϕ é

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\phi &= \{ B \in SU(2);\ \phi(B) = Id \} = \\ &= \{ B \in SU(2);\ f_B = Id \} = \\ &= \{ B \in SU(2);\ f^{-1}.T_B.f = Id \} = \\ &= \{ B \in SU(2);\ T_B = Id \}\end{aligned}$$

, pois f é isomorfismo.

Devemos ter, $T_B X = X$, ou seja, $BX = XB$, $\forall B \in M$. Fazendo $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ e tomando $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, temos $a = x$ real e $b = yi$, imaginário puro. Agora com $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, temos $y = 0$, portanto $x = \pm 1$, pois $\det B = 1$.

Logo $\operatorname{Ker} \phi = \{\pm I\}$. Pelo teorema de isomorfismo entre grupos temos

$$SU(2)/_{\operatorname{Ker} \phi} \cong SO(3),$$

ou seja,

$$SU(2)/_{\{\pm I\}} \cong SO(3).$$

——— o ———

BIBLIOGRAFIA

[1] CHEVALLEY, CLAUDE
"Theory of Lie Groups"
Princeton Univ. Press - Princeton, N.J. (1946).

[2] FREUDENTHAL et VRIES
"Linear Lie Groups"
Academic Press (1969).

[3] HAUSNER, MELVIN and SCHWARTZ, JACOB T.
"Lie Groups, Lie Algebras"
Gordon and Breach (1968).

[4] JACOBSON, N.
"Lie Algebras"
Wiley (Interscience) - N.Y. (1962).

[5] KIRILLOV, A.
"Elements de la Théorie des Representations"
Mir - Moscou (1974).

[6] KOCH, R. M & LOWENTHAL, FRANKLIN
"Uniform Finite Generation of Three - dimensional Linear Lie Groups"
Can. J. Math., Vol. 27, 2(1975), pp 396-417.

[7] LIMA, ELON L.
"Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$".
Ed. Universidade de Brasília (1970).

[8] LIMA, ELON L.
"Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento"
IMPA - 11º Colóquio Brasileiro de Matemática (1977).

[9] MONTGOMERY, DEANE and ZIPPIN, LEO
"Topological Transformations Groups" Interscience (1974).

[10] PONTRJAGIN, L.
"Topological Groups"
Princeton Univ. Press - Princeton, N.J. (1946)

[11] SAGLE, ARTHUR A. & WALDE, RALPH E.
"Introduction to Lie Groups and Lie Algebras"
Academic Press (1973).

[12] SERRE, J. P.
"Algèbres de Lie Semi-simples Complexes"
W.A. Benjamin, N.Y. (1966).

[13] SIMMS, D.J.
"Lie Groups and Quantum Mechanics"
Spring-Verlag, Vol.52 (1968).

[14] SPANIER, EDWIN H.
"Algebraic Topology"
MC Graw - Hill (1966).

[15] VILENKIN, N. Ja
"Fonctions Spéciales et Théorie de la Representations des Groups"
Dunod, Paris (1969)

[16] YAMABE, H.
"On an arcwise connected subgroup of a Lie Group"
Osaka J. Math., Vol.2 (1950), pp 13-14.

———0———