FGM e suas generalizações sob um ponto de vista bayesiano

José Adolfo de Almeida Schultz

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica
da
Universidade Estadual de Campinas
para
obtenção do título
de
Mestre em Estatística

Orientadora: Profa. Dra. Verónica Andrea González-López

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

Campinas, 29 de abril de 2011

FGM e suas generalizações sob um ponto de vista bayesiano

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente
corrigida e defendida por
José Adolfo de Almeida Schultz
e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 29 de abril de 2011

Profa. Dra. Verónica Andrea González-López

Banca Examinadora:
1. Profa. Dra. Verónica Andrea González-López
2. Prof. Dr. Julio Michael Stern
3. Prof. Dr. Luis Gustavo Esteves

Dissertação apresentada ao Instituto
de Matemática, Estatística e Computação
Científica, UNICAMP, como requisito
parcial obtenção do Título de
MESTRE em Estatística.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8/6162

Schultz, José Adolfo de Almeida
Sch82f FMG e suas generalizações sob um ponto de vista bayesiano / José Adolfo de Almeida Schultz -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador: Verónica Andrea González-López.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Cópulas (Estatísticas matemática). 2.Inferência bayesiana. 3.Métodos MCMC. I. González-López, Verónica Andrea, 1970-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: A bayesian approach for FGM and its generalizations

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Copulas (Mathematical statistics). 2. Bayesian inference. 3. MCMC Methods.

Área de concentração: Inferência Bayesiana

Titulação: Mestre em Estatística

Banca examinadora: Profa. Dra. Verónica Andrea González-López (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Julio Michael Stern (IME – USP)
Prof. Dr. Luis Gustavo Esteves (IME - USP)

Data da defesa: 29/04/2011

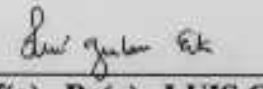
Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Estatística

Dissertação de Mestrado defendida em 29 de abril de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). VERÓNICA ANDREA GONZÁLEZ-LÓPEZ

Prof(a). Dr(a). JULIO MICHAEL STERN



Prof(a). Dr(a). LUIS GUSTAVO ESTEVES

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Silvia e Luiz Henrique, e a meu irmão, Ciro, pelo incentivo e apoio e críticas a todas as decisões que tomei .

À minha orientadora, Verónica, pela prova de paciência que a expus (garanto que não foram poucas suas irritações).

Agradeço em especial, aqueles com quem morei, pois não foram poucos os estresses que passei e, de certa maneira, eles me ajudaram. Além de eles, os amigos Guilherme Ludwig e Rafael Tovar que deram valorosas sugestões para essa dissertação e Heglyn Pimenta por sugestões na escrita e paciência na leitura.

À Capes pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta dissertação, foi apresentado uma metodologia para inferência em cópulas da família FGM e para a generalização proposta por Rodríguez-Lallena e Úbeda-Flores (2004).

Nos dois primeiros capítulos, introduzimos o conceito de cópulas, apresentamos algumas medidas de dependência, e apresentamos a família FGM, suas generalizações e propriedades interessantes dessa família.

Nos capítulos subsequentes, mostramos a metodologia bayesiana, alguns métodos computacionais utilizados e, finalmente, analisamos dois bancos. O primeiro, contém a proporção de pessoas abaixo da linha de pobreza e a proporção de pessoas que consumem em álcool excesso nos estados do Estados Unidos no ano de 2007. O segundo, contém, além dessas duas variáveis, a taxa de pessoas com gonorreia nos estados dos Estados Unidos no ano de 2007. Fizemos testes de hipóteses usando o Full Bayesian Significance Test para testar a independência das variáveis e, além disso, foram feitas preditivas para as variáveis estudadas.

Finalmente, uma breve discussão sobre os resultados apresentados.

Palavras-chave: Cópulas (estatística matemática), inferência bayesiana, métodos MCMC.

Abstract

In this thesis, it was presented a methodology to make inferences in the family FGM and its generalization proposed by Rodríguez-Lallena e Úbeda-Flores (2004).

The first two chapters, we introduced the copula concept, we presented somo dependence measures and we presented the FGM family and its generalizations and some proprieties.

In next chapters, we show the bayesian methodology, some computational methods and, finally, we analysed two databases. The first one contains the proportion of people below the poverty line and the proportion of hard-drinking people in the states of the United States in 2007. The second one contains, in addiction of two variables that was said, the rate of people with gonorrhea in the states of United States in 2007. We make also hypothesis tests using the Full Bayesian Significance Test in order to test the variable independence and they were made predectives for the studied variables.

Finally, a brief discussion about the presented results.

Keywords: Copula (mathematical statistics), bayesian inference, MCMC methods.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Introdução à Teoria de Cópulas **3**
2.1 Teorema de Sklar . . . 3
2.2 Medidas de Depêndencia . . . 10
2.2.1 Tau de Kendall . . . 10
2.3 Rô de Spearman . . . 11
2.4 Medidas de Depedência Caudal . . . 12
2.5 Simetria . . . 12

3 Cópula Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) e suas generalizações **15**
3.1 Cópulas descritas por Seções . . . 15
3.2 Generalizações da Cópula FGM . . . 17
3.2.1 Generalização proposta por Rodríguez-Lallena e Úbeda-Flores (2004) . . 17
3.2.2 Generalização Multivariada da proposta de Rodríguez-Lallena & Úbeda-Flores (2004) 22
3.2.3 Generalização proposta por Amblard e Girard (2009) . . . 23

4 Métodos Inferenciais **27**
4.1 Inferência Bayesiana . . . 27
4.1.1 Teste de Hipóteses Precisas . . . 27
4.1.2 Intervalos de Credibilidade . . . 29
4.1.3 Predições . . . 29
4.2 Métodos Computacionais . . . 30
4.2.1 Geração de Valores da FGM e GFGM . . . 30
4.2.2 Método Metropolis-Hastings . . . 32

5 Análise Inferencial **33**
5.1 Função de Verossimilhança . . . 33
5.2 Elicitação de prioris . . . 34
5.3 Inferência para GFGM de Rodríguez-Lallena (2004) . . . 35
5.4 Dados de Pobreza e Consumo excessivo de álcool . . . 36
5.5 Dados de Pobreza, Consumo excessivo de álcool e Gonorreia . . . 47

6 Conclusão **56**

7 Algoritmos **58**
7.1 Geração da GFGM 58
7.2 Priori para a GFGM 58
7.3 Geração de valores da *a posteriori* 59
7.4 Geração da densidade da GFGM multivariada 61
7.5 *A prioris* para inferência multivariada 61
7.6 Geração para a *a posteriori* 62
7.7 Preditiva para a GFGM Multivariada 64
7.8 FBST para a GFGM Multivariada 65

8 Bibliografia **67**

A Provas Importantes **69**

Capítulo 1

Introdução

No campo da estatística, quando falamos em modelagem de dependência, é indispensável levarmos em consideração a teoria de cópulas, recentemente difundida por Joe (1997) e Nelsen (2006) em seus trabalhos, entre outros autores.

A palavra cópula vem do latim *copulae* ("aquilo que conecta duas coisas diferentes"), pode ser interpretada de diferentes maneiras, segundo o ponto de vista adotado por cada ciência. Em linguística e lógica, ela é empregada para descrever "a parte de uma proposição que conecta o sujeito e o predicado"; em matemática e estatística, por sua vez, ela foi introduzida por Sklar (1959), descrevendo uma função que une funções de distribuição univariadas para construir uma função de distribuição multivariada.

Entre os anos 1958 e 1976, muitos trabalhos foram publicados nessa área, como por exemplo o trabalho inaugural escrito por Sklar(1959). O estudo de cópulas foi desenvolvido inicialmente para espaços métricos probabilísticos que são definidos a partir de uma função $F_{pq}(x)$, a qual mede a probabilidade da distância dos pontos p e q para algum valor real x. Após um período sem publicações sobre esse assunto, o estudo de cópulas foi retomado no início da década de 1990 com os trabalhos de Genest, Joe, Nelsen, entre outros autores.

Nessa dissertação, apresentaremos uma das principais cópulas estudadas, a Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM). Seu uso frequente é explicado pela simplicidade de sua forma e pelas boas propriedades, que verifica entre elas a simetria. Além disso, esta cópula é usada em ciências como hidrologia e ciências biológicas. Entretanto, essa cópula apresenta uma restrição no alcance das medidas de dependência τ de Kendall e ρ de Spearman, sendo a condição de baixa correlação necessária para sua utilização. Para tentar corrigir essa limitação, Rodríguez-Lallena & Úbeda-Flores (2004) propuseram uma generalização dessa cópula, na qual aumenta-se o espectro de variação do ρ de Spearman e do τ de Kendall fazendo com que a modelagem fique mais rica sem perda das propriedades interessantes que caracterizam esta cópula e explorando, além disso, propriedades de assimétria não possíveis para a FGM.

A cópula FGM apresenta medida de dependência caudal nula. Na proposta de general-

izazção da cópula FGM apresentada por Amblard e Girard (2009) consegue-se obter a medida de dependência caudal superior não necessariamente nula mantendo a simplicidade da cópula. Essa modificação propõe o uso da inversa de uma função de sobrevivência no lugar do parâmetro, isto é, troca-se o parâmetro da cópula por uma função seguindo algumas suposições.

No capítulo 4, apresentaremos, na primeira parte, as técnicas computacionais utilizadas nessa dissertação como métodos de geração de uma generalização da cópula Farlie-Gumbel-Morgenstern e método Metropolis-Hasting via passeio aleatório utilizado para a geração da distribuição *a posteriori* das correlações. Na segunda parte, mostraremos a metodologia bayesiana, introduzida por Huard, Évin & Favre (2006), e o *Full Bayesian Significance Test* um teste genuinamente bayesiano feito por Pereira & Stern (1999) para hipóteses precisas, sendo ele utilizado nesta dissertação para testar a hipótese de independência. .

Finalmente, no capítulo 5, mostraremos os métodos e as aplicações para um banco de dados bivariado contendo a proporção de pessoas abaixo da linha de pobreza e a proporção de pessoas que beberam em excesso para o ano de 2007 nos estados dos Estados Unidos. Para o caso trivariado, adicionamos a este banco a taxa de pessoas com gonorreia nos estados do Estados Unidos no ano de 2007.

Capítulo 2

Introdução à Teoria de Cópulas

Na introdução geral foi mencionado que cópulas são funções que unem funções de distribuição univariadas a fim de criar funções de distribuição multivariadas.

Considere um par de variáveis aleatórias X e Y, com distribuições F e G, respectivamente, e função distribuição conjunta $H(x, y)$. Para cada vetor (x, y), podemos associar a ele um vetor $(F(x), G(y))$, e conectamos esse par ao correspondente de $H(x, y)$. Mostraremos que essa correspondência é dada por uma função, a qual chamaremos cópula.

$$C(u_1, \ldots, u_d) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \ldots, U_d \leq u_d), (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbf{I}^d (= [0, 1]^d)$$

isso, combinado ao fato de que pode-se transformar qualquer variável aleatória contínua por sua acumulada numa variável aleatória com distribuição $U(0, 1)$, as cópulas criam estruturas de dependência multivariada sem a influência das distribuições marginais.

Neste capítulo explicitaremos o conceito de cópulas, sua relação com o teorema de Sklar e apresentaremos a família de cópulas Fairlie-Gumbel-Morgenstern.

2.1 Teorema de Sklar

Mostraremos o desenvolvimento para duas dimensões. Faremos dessa forma para facilitar a apresentação que pode ser facilmente generalizada para cópulas de dimensões maiores.

Definição 2.1.1 *Sejam S_1 e S_2 subconjuntos não vazios de $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, H:$S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ uma função e seja o retângulo $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$,$(x_i, y_i) \in Dom(H)$. Definimos o H-volume de B como*

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) - H(x_2, y_1) + H(x_1, y_1) \tag{2.1}$$

Definição 2.1.2 *Uma função H real bivariada é dita bicrescente se $V_H(B) \geq 0$ $\forall B$, com $V_H(B) \subset \mathbb{R}^2$ dado pela equação 2.1.*

Notemos que a afirmação "H é bicrescente" não é uma condição necessária, tampouco suficiente, para a afirmação "H é não-decrescente em cada argumento" como mostraremos nos exemplos abaixo.

Exemplo 2.1.1 Seja H a função definida em $\mathbf{I}^2$ por $H(x,y) = \max(x,y)$. Então H é uma função não-decrescente de x e de y. Entretanto, $V_H(\mathbf{I}^2) = -1$, então H não é bicrescente.

Exemplo 2.1.2 Seja H uma função definida em $\mathbf{I}^2$ por $H(x,y) = (2x-1)(2y-1)$. Então H é bicrescente. Contudo, ela é uma função decrescente de x para todo y em $(0,1/2)$ e é uma função decrescente de y para todo x em $(0,1/2)$.

Definição 2.1.3 *Uma função $H : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ é dita aplanada se $\forall (x,y) \in S_1 \times S_2$, $H(x,a_2) = H(a_1,y) = 0$ onde $a_i = \min\{z : z \in S_i\}$, $i = 1,2$.*

Exemplo 2.1.3 *Seja H a função com domínio em $[-1,1] \times [0,\infty]$ dada por:*

$$H(x,y) = \frac{(x+1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1}$$

Então H será aplanada, pois $H(x,0) = 0$ e $H(-1,y) = 0$ e H tem como marginais $F(x)$ e $G(y)$ dadas por:

$$F(x) = H(x,\infty) = (x+1)/2 \text{ e } G(y) = H(1,y) = 1 - e^{-y}.$$

Definição 2.1.4 *Uma subcópula bidimensional é uma função C^s com as propriedades:*

1. *Dom(C^s) $= S_1 \times S_2$, onde S_1 e S_2 são subconjuntos de $\mathbf{I} = [0,1]$ contendo 0 e 1;*
2. *C^s é aplanada e bicrescente;*
3. *C^s é marginalmente uniforme, i.e., para todo $u \in S_1$ e $v \in S_2$,*

$$C^s(u,1) = u \text{ e } C^s(1,v) = v.$$

Notemos que para todo $(u,v) \in \mathrm{Dom}(C^s)$, $0 \leq C^s(u,v) \leq 1$, então $\mathrm{Dom}(C^s)$ sempre é um subconjunto de $\mathbf{I}^2$.

Definição 2.1.5 *Uma cópula bidimensional (ou, simplesmente, cópula) é uma subcópula bidimensional C cujo domínio é $\mathbf{I}^2$. Equivalentemente, uma cópula é uma função C de $\mathbf{I}^2$ para $\mathbf{I}$ com as seguintes propriedades:*

1. *Para todo u, v em $\mathbf{I}$,*

$$C(u,0) = 0 = C(0,v) \tag{2.2}$$

e

$$C(u,1) = u \text{ e } C(1,v) = v; \tag{2.3}$$

2. Para todo u_1, u_2, v_1, v_2 em $\mathbf{I}$ tais que $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \tag{2.4}$$

Enunciaremos um Teorema que coloca limites na variação das subcópulas.

Teorema 2.1.1 *Seja C^s uma subcópula. Então para todo (u, v) no Dom(C^s).*

$$max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq min(u, v). \tag{2.5}$$

Prova. Seja (u, v) um ponto arbitrário em Dom(C^s). Observemos que $C^s(u, v) \leq C^s(u, 1) = u$ e $C^s(u, v) \leq C^s(1, v) = v$ fornece-nos $C^s(u, v) \leq min(u, v)$. Ademais, $V_{C^s}([u, 1] \times [v, 1]) \geq 0$ implica que $C^s(u, v) \geq u + v - 1$ e, combinando a restrição $C^s(u, v) \geq 0$, temos $C^s(u, v) \geq max(u + v - 1, 0)$.

■

Como toda cópula é uma subcópula, temos que as desigualdades acima também funcionam para cópulas. Essas desigualdades são denotadas normalmente por $M(u, v) = \min(u, v)$ e $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$. Portanto, para toda cópula C e toda (u, v) em $\mathbf{I}^2$ segue

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v). \tag{2.6}$$

Chamamos de W e M, os *limitantes inferior e superior de Fréchet-Hoeffding*, respectivamente.

Teorema 2.1.2 *Os limitantes de Fréchet-Hoeffding, $W(u, v) = \max(u+v-1, 0)$ e $M(u, v) = \min(u, v)$, são cópulas.*

Prova. Prova no Apêndice.

Portanto, $W(u, v) = \max(u+v-1, 0)$ e $M(u, v) = \min(u, v)$ são cópulas e a extensão para dimensões maiores é simples, observando que $W(u, v)$ não é cópula para dimensões maiores que dois. Há também uma importante cópula que mencionaremos nos próximos capítulos, a cópula de independência denotada por $\Pi(u, v) = uv$.

Teorema 2.1.3 *Seja C^s uma subcópula. Então para todo (u_1, u_2), (v_1, v_2) em Dom(C^s).*

$$|C^s(u_2, v_2) - C^s(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \tag{2.7}$$

O Teorema 2.1.3 mostra que as cópulas são contínuas pela condição de Lipschitz.

A ligação entre as funções de distribuição multivariadas e suas marginais univariadas é feita pelo *Teorema de Sklar* apresentado a seguir.

Teorema 2.1.4 *Seja H uma distribuição conjunta com marginais F e G. Então existe uma cópula C tal que para todo x, y em $\bar{\mathbb{R}}$*

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)). \tag{2.8}$$

Se F e G são contínuas, então C é única; caso contrário, C será determinada exclusivamente em $Img(F) \times Img(G)$. Por outro lado, se C é uma cópula, F e G são funções de distribuição, então a função H definida na Equação (2.8) é uma função de distribuição conjunta com marginais F e G.

A prova do teorema acima segue a partir dos lemas abaixo.

Lema 2.1.1 *Seja H uma função de distribuição acumulada com marginais F e G. Então, existe uma única subcópula C^s tal que:*

1. *$Dom(C^s) = Img(F) \times Img(G)$;*
2. *$\forall x, y \in \bar{\mathbb{R}}, H(x,y) = C^s(F(x), G(y))$.*

Prova. Prova do Lema no Apêndice.

Lema 2.1.2 *Seja C^s uma subcópula. Então, existe uma cópula C tal que $C(u,v) = C^s(u,v)$, $\forall (u,v) \in Dom(C^s)$; isto é, qualquer subcópula pode ser estendida para uma cópula. A extensão em geral não é única.*

Prova. Da equação 2.7 e usando o item 2 do Lema anterior, concluímos que C^s é uniformemente contínua em seu domínio $Img(F) \times Img(G)$, i.e.,

$$|C^s(u_2, v_2) - C^s(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$$

Denotemos, agora, $Img(F)$ por S_1 e $Img(G)$ por S_2.

Da continuidade de C^s, podemos estender C^s a uma função C^{ss}, ainda subcópula, com domínio em $\bar{S_1} \times \bar{S_2}$, onde $\bar{S_1}$ é o fecho de S_1 e $\bar{S_2}$ é o fecho de S_2. O próximo passo é estender a subcópula C^{ss} a uma função C com domínio em $\mathbf{I}^2$. Para tanto, seja $(a,b) \in \mathbf{I}^2$, e sejam a_1 e a_2, respectivamente, o menor e o maior elemento de $\bar{S_1}$ que satisfaçam $a_1 \leq a \leq a_2$; e sejam, b_1 e b_2, respectivamente, o menor e o maior elemento de $\bar{S_2}$ que satisfaçam $b_1 \leq b \leq b_2$. Se $a \in \bar{S_1}$, então $a_1 = a = a_2$; e se $b \in \bar{S_2}$, então $b_1 = b = b_2$. Desta maneira, sejam

$$\lambda_1 = \begin{cases} \frac{a - a_1}{a_2 - a_1}, \text{ se } a_1 < b_2 \\ 1, \text{ se } a_1 = a_2; \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} \frac{b - b_1}{b_2 - b_1}, \text{ se } b_1 < b_2 \\ 1, \text{ se } b_1 = b_2 \end{cases}$$

e define-se

$$C(a,b) = (1-\lambda_1)(1-\mu_1)C^{ss}(a_1,b_1) + (1-\lambda_1)\mu_1 C^{ss}(a_1,b_2) + \lambda_1(1-\mu_1)C^{ss}(a_2,b_1) + \mu_1\lambda_1 C^{ss}(a_2,b_2). \quad (2.9)$$

Observe que a interpolação definida em 2.9 é linear em todos os pontos, pois λ_1 e μ_1 são lineares tanto em a quanto em b, respectivamente.

É fácil ver que $Dom(C) = \mathbf{I}^2$, que $C(a,b) = C^{ss}(a,b), \forall (a,b) \in Dom(C^{ss})$ e que C é marginalmente uniforme. Precisamos mostrar que C satisfaz a condição 2.4. Seja (c,d) outro ponto em $\mathbf{I}^2$ tal que $c \geq a$ e $d \geq b$, e sejam $c_1, d_1, c_2, d_2, \lambda_2, \mu_2$, relacionados a c e d, e $a_1, b_1, a_2, b_2, \lambda_1, \mu_1$, relacionados a a e b. Vamos provar que $V_C(B) > 0$, onde B é o retângulo $[a,c] \times [b,d]$. Vários casos podem ser considerado para essa prova, dependendo se há um ponto em $\bar{S}_1$ estritamente entre a e c, e se há um ponto em $\bar{S}_2$ estritamente entre b e d. No caso mais simples, supõe-se que não há pontos em $\bar{S}_1$ estritamente entre a e c, e, também, supõe-se que não há pontos em $\bar{S}_2$ estritamente entre b e d; logo, $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2$, $b_1 = d_1$ e $b_2 = d_2$. Substituindo (2.9) pelos correspondentes termos para $C(a,d)$, $C(c,b)$ e $C(c,d)$ na expressão dada em (A.2) para $V_C(B)$, temos

$$V_C(B) = V([a,c] \times [b,d]) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)V_C([a_1,a_2] \times [b_1,b_2]),$$

do qual segue que $V_C(B) \geq 0$ neste caso, pois $c \geq a$ e $d \geq b$ implica $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $\mu_2 \leq \mu_1$.

O caso mais simples ocorre quando há ao menos um ponto de $\bar{S}_1$ estritamente entre a e c, e ao menos um ponto de $\bar{S}_2$ estritamente entre b e d, então $a < a_2 \leq c_1 < c$ e $b < b_2 \leq d_1 < d$. Neste caso, substituindo a equação 2.9 pelos correspondentes termos para $C(a,d)$, $C(c,b)$ e $C(c,d)$ na expressão 2.4, temos:

$$\begin{aligned} V_C(B) \quad &= (1-\lambda_1)\mu_2 V_C([a_1,a_2] \times [d_1,d_2]) + \mu_2 V_C([a_2,c_1] \times [d_1,d_2]) \\ &+\lambda_2\mu_2 V_C([c_1,c_2] \times [d_1,d_2]) + (1-\lambda_1)V_C([a_1,a_2] \times [d_1,d_2]) \\ &+V_C([a_2,c_1] \times [b_2,d_1]) + \lambda_2 V_C([c_1,c_2] \times [b_2,d_1]) \\ &+(1-\lambda_1)(1-\mu_1)V_C([a_1,a_2] \times [b_1,b_2]) \\ &+(1-\mu_1)V_C([a_2,c_1] \times [b_1,b_2]) + \lambda_2(1-\mu_1)V_C([c_1,c_2] \times [b_1,b_2]). \end{aligned}$$

O lado direito da igualdade da expressão acima é uma combinação de nove parcelas não negativas com coeficientes não negativos e, portanto, é não negativa. Os casos remanescentes são similares e não serão demonstrados nessa dissertação.

■

Definição 2.1.6 *Seja F uma função de distribuição. Então a quase-inversa de F é qualquer função $F^{(-1)}$ com domínio $\mathbf{I}$ tal que*

1. *se $t \in Img(F)$, então $F^{-1}(t)$ é qualquer número x em $\bar{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = t$, i.e., para todo t em $Img(F)$,*

$$F(F^{(-1)}(t)) = t;$$

2. *se t não está em $Img(F)$, então*

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x|F(x) \geq t\} = \sup\{x|F(x) \leq t\}$$

Se F é estritamente crescente, então F tem uma única quase-inversa, que é comumente denotada por F^{-1}

Exemplo 2.1.4 Para todo número a em $\mathbb{R}$, o *passo unitário em a* é a função distribuição ε_a dado por:

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0, \, x \in (-\infty, a), \\ 1, \, x \in [a, \infty); \end{cases}$$

e sua quase-inversa é dada por:

$$\varepsilon_a^{(-1)}(t) = \begin{cases} a_0, & t = 0, \\ a, & t \in (0, 1), \\ a_1, & t = 1, \end{cases}$$

onde a_0 e a_1 são valores em $\bar{\mathbb{R}}$ tais que $a_0 \leq a \leq a_1$

Corolário 2.1.1 *Sejam H, F, G e C^s funções como no Lema (2.1.1), e sejam $F^{(-1)}$ e $G^{(-1)}$ as quase-inversas de F e G, respectivamente. Então para todo (u, v) em $Dom(C^s)$,*

$$C^s(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) \tag{2.10}$$

Quando F e G são contínuas, a equação 2.10 fornece-nos um método para construção de cópulas a partir de funções de distribuição.

Apresentaremos exemplos que ilustrarão o Corolário (2.1.1).

Exemplo 2.1.5 Seja H uma função com suporte em $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1}, & (x, y) \in [-1, 1] \times [0, \infty], \\ 1 - e^{-y}, & (x, y) \in (1, \infty] \times [0, \infty], \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

com marginais F e G dadas por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ (x+1)/2, & x \in [-1, 1], \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-y}, & y \geq 0, \end{cases}$$

As quase-inversas de F e G são $F^{(-1)} = 2u - 1$ e $G^{(-1)}(v) = -\log(1-v)$ para u, v em $\mathbf{I}$. Como $Img(F) = Img(G) = \mathbf{I}$, (2.10) é dada pela cópula C dada por

$$C(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv} \tag{2.11}$$

Exemplo 2.1.6 Seja $X \sim exp(2)$ e $Y \sim exp(1)$, X e Y independentes, então:

$$H(x, y) = F(x)G(y),$$

onde as quase-inversas de X e Y são:

$$F^{(-1)}(u) = \begin{cases} \dfrac{-\log(1-u)}{2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$G^{(-1)}(v) = \begin{cases} -\log(1-v), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

Logo, a cópula associada a H é dada por:

$$\begin{aligned} C(u, v) &= H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) \\ &= F\{F^{(-1)}(u)\}G\{G^{(-1)}(v)\} \\ &= [1 - e^{2(\log(1-u))/2}][1 - e^{\log(1-v)}] \\ &= uv \end{aligned}$$

Apresentaremos algumas medidas de dependência que posteriormente serão objetos de estudo.

2.2 Medidas de Depêndencia

Uma medida descritiva comumente usada são as correlações que são empregadas a fim de verificar relações entre duas variáveis.

Informalmente, um par de variáveis são concordantes se valores "grandes" ("pequenos") de uma tendem a estar associados a valores "grandes" ("pequenos") da outra. Formalmente, sejam (x_i, y_i) e (x_j, y_j) duas observações do vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas. Dizemos que essas observações, (x_i, y_i) e (x_j, y_j), são concordantes se $x_i < x_j$ então $y_i < y_j$, ou se $x_i > x_j$ então $y_i > y_j$. Similarmente, dizemos que (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são discordantes se $x_i < x_j$ então $y_i > y_j$, ou se $x_i > x_j$ então $y_i < y_j$. Uma formulação alternativa é: (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são concordantes se $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ e são discordates se $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.

2.2.1 Tau de Kendall

Denotemos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ uma amostra aleatória de tamanho n vinda de um vetor aleatório contínuo (X, Y). Há $\binom{n}{2}$ pares distintos de observações (x_i, y_i) e (x_j, y_j) na amostra, cada par pode ser discordante ou concordante. Denotemos c o número de pares concordantes e, por d o número de pares discordantes, o que faz o coeficiente de associação tau de Kendall amostral seja definido como:

$$t = \frac{c - d}{c + d} = (c - d) / \binom{n}{2} \tag{2.12}$$

Equivaletemente, t é a probabilidade de concordância menos a probablidade de discordância quando para o par de observações (x_i, y_i) e (x_j, y_j) é escolhido aleatoriamente de uma amostra. Sejam (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos, cada um com função distribuição H. A versão populacional do tau de Kendall para um vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas com distribuição conjunta H é definido como a probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância:

$$\tau = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \tag{2.13}$$

Para demonstrar o papel que as cópulas têm nas medidas de concordância e associação tais como o tau de Kendall, primeiro definiremos a Q "função de concordância" denotado por Q. Mostramos que essa função depende somente das distribuições por meio de cópulas.

Teorema 2.2.1 *Sejam (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) vetores independentes de variáveis aleatórias contínuas com funções de distribuição conjuntas H_1 e H_2, respectivamente, com marginais comuns F (de X_1 e X_2) e G (de Y_1 e Y_2). Denotemos C_1 e C_2 as cópulas de (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) respectivamente, então $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y)))$ e $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$. Denotemos Q*

a diferença entre as probabilidades de concordância e discordância de (X_1, Y_1) *e* (X_2, Y_2)*, i.e.,*

$$Q = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \tag{2.14}$$

Então,

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \tag{2.15}$$

Prova. Prova do Teorema no Apêndice.

Teorema 2.2.2 *Sejam* X *e* Y *variáveis aleatórias contínuas onde* C *é a cópula associada a elas. Então a medida tau de Kendall para* X *e* Y *(aqui denotadas por* τ*) é dada por*

$$\tau = Q(C, C) = 4 \iint_{\mathbf{I}^2} C(u, v) dC(u, v) - 1. \tag{2.16}$$

Equivalentemente:

$$\tau = 4E[C(U, V)] - 1 \tag{2.17}$$

Exemplo 2.2.1 Seja C_θ um membro da família de cópulas Fairlie-Gumble-Morgenstern (FGM) dada por:

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v) \tag{2.18}$$

onde $\theta \in [-1, 1]$.

Por C_θ ser absolutamente contínua, temos

$$\frac{\partial^2 C_\theta(u, v)}{\partial u \partial v} = [1 + \theta(1 - 2u)(1 - 2v)],$$

como consequência:

$$\tau = Q(C_\theta, C_\theta) = 4 \iint_{\mathbf{I}^2} C_\theta(u, v) dC_\theta(u, v) - 1 = \frac{2\theta}{9}$$

Logo, $\tau \in [-2/9, 2/9]$ e, como já foi mencionado, a dependência em termos da medida de associação τ é limitada por limitantes com valores baixos.

2.3 Rô de Spearman

Assim como a medida de τ de Kendall, a medida ρ de Spearman se baseia na probabilidade de discordâncias e concordâncias.

Sejam (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) e (X_3, Y_3) vetores aleatórios independentes, com função de distribuição conjunta H (e com marginais associadas F e G) e cópula C. A versão populacional do ρ é definida para ser proporcional à probabilidade de concordância menos a probabilidade

de discordância de dois vetores aleatórios (X_1, Y_1) e (X_2, Y_3). Onde a função distribução conjunta de (X_1, Y_1) é $H(x, y)$, a distribuição conjunta de (X_2, Y_3) é $F(x)G(y)$, pois assumimos indenpedência entre X_2 e Y_3:

$$\rho = 3\big(\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]\big) \tag{2.19}$$

Teorema 2.3.1 *Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com cópula associada C. Então a versão populacional do ρ de Spearman para X e Y é dada por:*

$$\begin{aligned} \rho &= 3Q(C, \Pi), \\ &= 12 \iint_{\mathbf{I}^2} uvdC(u, v) - 3, \\ &= 12 \iint_{\mathbf{I}^2} C(u, v)dudv - 3. \end{aligned} \tag{2.20}$$

O coeficiente "3" da equação 2.20 permite que essa medida assuma valores entre -1 e 1, tal qual para o tau de Kendall.

Exemplo 2.3.1 Seja C_θ um membro da família FGM. Então,

$$\rho = 3Q(C_\theta, \Pi) = 12 \iint_{\mathbf{I}^2} C_\theta(u, v)dudv - 3 = 12\tfrac{1}{4} + 12\tfrac{\theta}{36} - 3 = \tfrac{\theta}{3}$$

2.4 Medidas de Depedência Caudal

A definição de dependência caudal foi derivada no Apêndice, pois no caso da família FGM, a dependência caudal é nula o que torna irrelevante para nossa abordagem bayesiana. A dependência caudal mede a dependência das variáveis no quadrante superior direito e no quadrante inferior esquerdo de $\mathbf{I}^2$

Exemplo 2.4.1 Seja C uma cópula da família FGM dada pela equação (2.18). Então, as depedências caudais são dadas por:

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \to 1^-} \frac{1 - t^2 - \theta t^2(1 - t)^2}{1 - t} = 2 - \lim_{t \to 1^-} 1 + t - \theta t^2(1 - t) = 0$$
$$\lambda_L = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^2 - \theta t^2(1 - t)^2}{t} = \lim_{t \to 0^+} t + \theta t(1 - t)^2 = 0$$

Portanto, não há dependência caudal nas cópulas da família FGM.

2.5 Simetria

Dizemos que uma variável aleatória X é simétrica ao redor de um número real a se as variáveis aleatórias $X - a$ e $a - X$ têm a mesma função distribuição, isto é,

$$F(a + x) = 1 - F(a - x), \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.21}$$

Exemplo 2.5.1 Seja $X \sim N(0, \sigma^2)$. A variável aleatória X é simétrica ao redor de 0. A prova é direta, pois a $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X > x)$.

Introduziremos esse conceito para o caso bivariado.

Definição 2.5.1 *Seja (X, Y) vetor aleatório e seja (a, b) um ponto em $\mathbb{R}^2$.*

1. *(X, Y) é radialmente simétrico em (a, b) se a função de distribuição conjunta de $(X - a, Y - b)$ é a mesma de $(a - X, b - Y)$.*

2. *(X, Y) é conjuntamente simétrico em (a, b) se os pares $(X - a, Y - b)$, $(a - X, b - Y)$, $(X - a, b - Y)$ e $(a - X, Y - b)$ têm a mesma função de distribuição .*

Apresentaremos o conceito de cópula de sobrevivência, que será usado posteriormente, observando que cópula de sobrevivência é um conceito diferente de sobrevivência da cópula (Nelsen, 2006, página 33).

Sejam X e Y variáveis com distribuição conjunta dada por $H(x, y)$, com $F(x)$ e $G(y)$ marginais de X e Y respectivamente, e seja $\bar{H}(x, y) = \mathbb{P}(X > x, Y > y)$ a função de sobrevivência associada a essas duas variáveis aleatórias. Sejam $\bar{F}$ e $\bar{G}$ as funções de sobrevivência univariadas de X e Y, respectivamente. Logo, temos:

$$\bar{H}(x, y) = 1 - F(x) - G(y) + H(x, y)$$

Usando o Teorema de Sklar e usando as funções de sobrevivência univariadas, temos:

$$\bar{H}(x, y) = \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) = \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y))$$

e definimos a função $\hat{C}$ de $\mathbf{I}^2$ para $\mathbf{I}$ como:

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) \tag{2.22}$$

Teorema 2.5.1 *Seja C uma cópula e seja $\hat{C}$, definida na equação 2.22, a cópula de sobrevivência associada a C. Então $\hat{C}$ também será cópula.*

Prova. Temos que verificar as condições da Definição (2.1.5):

1. Para todo u,v em $\mathbf{I}$,

$$\hat{C}(0, v) = 0 + v - 1 + C(1, 1 - v) = v - 1 + 1 - v = 0,$$
$$\hat{C}(u, 0) = u + 0 - 1 + C(1 - u, 1) = u - 1 + 1 - u = 0,$$

e

$$\hat{C}(1, v) = 1 + v - 1 + 0 = v \text{ e } \hat{C}(u, 1) = u + 1 - 1 + 0 = u;$$

2. Para todo u_1, u_2, v_1 e v_2 em $\mathbf{I}$ tais que $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$,

   $\hat{C}(u_2, v_2) - \hat{C}(u_2, v_1) - \hat{C}(u_1, v_2) + \hat{C}(u_1, v_1) =$
   $u_2 + v_2 - 1 + C(1 - u_2, 1 - v_2) - u_2 - v_1 + 1 - C(1 - u_2, 1 - v_1) - u_1 - v_2 + 1 - C(1 - u_1, v_2) + u_1 + v_1 - 1 + C(1 - u_1, 1 - v_1)$
   $C(1 - u_2, 1 - v_2) - C(1 - u_2, 1 - v_1) - C(1 - u_1, 1 - v_2) + C(1 - u_1, 1 - v_1) \geq 0.$

   E, portanto, $\hat{C}$ é cópula.

■

Mostraremos uma condição para simetria radial a partir do conceito de cópula de sobrevivência.

Teorema 2.5.2 *Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com distribuição conjunta H com marginais F e G de X e Y, respectivamente. Além disso, suponha que X e Y verificam a equação 2.21 para os pontos a e b, respectivamente. Portanto, (X,Y) é radialmente simétrica em (a, b) se e somente se:*

$$H(a + x, b + y) = \bar{H}(a - x, b - y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.23}$$

Prova. Prova no Apêndice.

Exemplo 2.5.2 Dada a família FGM dada pela equação (2.18) e aplicamos o Teorema (2.5.2):

$$\begin{aligned} C(u, v) &= u + v - 1 + (1 - u)(1 - v) + \theta uv(1 - u)(1 - v) \\ &= u + v - 1 + 1 - u - v + uv + \theta uv(1 - u)(1 - v) \\ &= uv + \theta uv(1 - u)(1 - v) \end{aligned}$$

Portanto, a FGM é radialmente simétrica.

Capítulo 3

Cópula Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) e suas generalizações

A cópula FGM dada pela equação (2.18) pode ser vista como uma perturbação da cópula de indepedência. Por conta dessa simplicidade na interpretação, essa cópula é muito utilizada em hidrologia, em modelagem de chuvas e, mais recentemente, na área médica.

Os primeiros a discutirem essa cópula foram Morgenstern (1956), Gumbel (1958) e Farlie (1960).

A primeira seção deste capítulo discutirá a origem dessa cópula e a segunda mostrará suas generalizações.

3.1 Cópulas descritas por Seções

Começaremos essa seção com uma questão: qual é a maneira mais simples de se descrever uma cópula? Por exemplo, a cópula de independência $\Pi(u, v) = uv$ é linear tanto em u quanto em v. A próxima pergunta seria se há cópulas descritas por polinômios em u e v. Essas questões nos levam ao estudo de seções de cópulas.

Definição 3.1.1 Seja C uma cópula, e seja a algum valor em $\mathbf{I}$. A seção horizontal de C em a será a função de $\mathbf{I}$ em $\mathbf{I}$ dada por $t \mapsto C(t, a)$; a seção vertical de C em a será a função de $\mathbf{I}$ em $\mathbf{I}$ dada por $t \mapsto C(a, t)$; e a seção diagonal de C será a função de $\mathbf{I}$ em $\mathbf{I}$ dada por $t \mapsto C(t, t)$.

Essas seções têm várias propriedade estatísticas interessantes como a dada a seguir. Sejam U, V variáveis aleatórias, uniformemente distribuídas em $(0, 1)$ com distribuição conjunta C. As seções são proporcionais à distribuição condicional. Por exemplo, para u_0 em $(0, 1)$ na família FGM, encontramos:

$$\mathbb{P}(V \leq v|U \leq u_0) = \mathbb{P}(U \leq u_0, V \leq v)/\mathbb{P}(U \leq u_0) = C(u_0, v)/u_0 = v+\theta v(1-u_0)(1-v), \quad (3.1)$$

O que nos dá uma ótima interpretação geométrica e de simples manipulação analítica, pois $C(u_0, v)$ é função de u_0.

Cópulas a seguir serão construídas a partir de seções quadráticas, dadas por $C(u, v) = a(v)u^2 + b(v)u + c(v)$. Se tomarmos $a(v) = -\Psi(v)$, $b(v) = v - a(v) = v + \Psi(v)$ e $c(v) = C(0, v) = 0$, teremos:

$$C(u, v) = uv + \Psi(v)u(1 - u) \quad (3.2)$$

onde Ψ é uma função tal que C é bicrescente e $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$ (então $C(u, 0) = 0$ e $C(u, 1) = u$)

A questão a ser levantada é se a função dada por 3.2 é realmente uma cópula. Para isso, usaremos os resultados demostrados por Quesada-Molina e Rodríguez-Lallena (1995):

Teorema 3.1.1 *Seja Ψ uma função com domínio em $\mathbf{I}$, e seja C dada por (3.2) onde $u, v \in \mathbf{I}$. Então C será uma cópula se, e somente se:*

1. $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$;
2. *Ψ satisfaz a condição de Lipschitz:*

   $|\Psi(v_2) - \Psi(v_1)| \leq |v_2 - v_1|$

para todo v_1, v_2 em $\mathbf{I}$. Além disso, C é absolutamente contínua.

Prova. Prova no Apêndice.

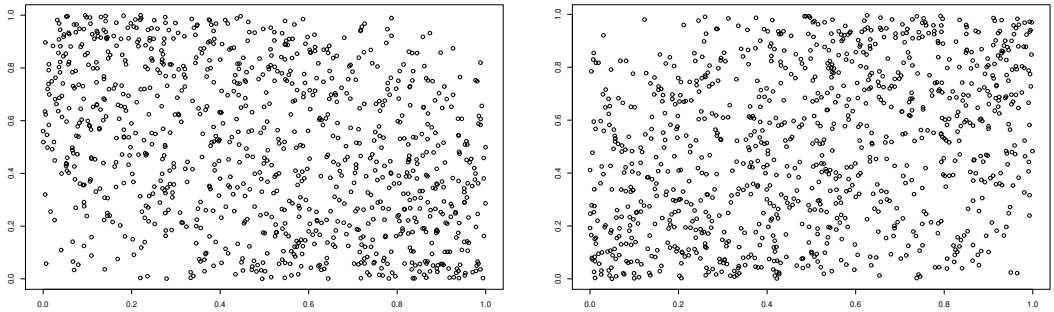
A prova acima pode ser feita de forma análoga para seções em v.

Corolário 3.1.1 *A função C definida por 3.2 é uma cópula se, e somente se Ψ satisfaz as 3 propriedades a seguir:*

1. *Ψ é absolutamente contínua em $\mathbf{I}$;*
2. *$|\Psi'| \leq 1$ quase certamente em $\mathbf{I}$;*
3. *$|\Psi| \leq \min(v, 1 - v), \forall v \in \mathbf{I}$. Além disso, C é absolutamente contínua.*

Prova. Do teorema anterior, já segue diretamente que os itens 1 e 2 são válidos, basta apenas provar o item 3.

Figura 3.1: *Gráficos de dispersão para FGM com $\theta = -1$ (esquerda) e $\theta = 1$ (direita)*



Exemplo 3.1.1 Quando na equação 3.2, temos $\Psi(v) = \theta v(1-v)$ resulta na cópula FGM. Assim Ψ satisfaz as três propriedades do Corolário 3.1.1, i.e., ela é absolutamente contínua, suas derivadas nunca excedem 1 e ela segue, também, a propriedade 3.

Contudo, a FGM consegue detectar apenas dependências fracas, correlação entre -1/3 e 1/3. Na Figura 3.1, temos dois gráficos de 1000 observações simuladas considerando os valores extremos do parâmetro ($\theta = 1$ e $\theta = -1$), esses gráficos revelam a dependência fraca como resultado desse modelo.

Exemplo 3.1.2 Para $\Psi(v) = \min\{c_1 v, c_2(1-v)\}$ (ou $\Psi(v) = -\min\{c_1 v, c_2(1-v)\}$), para $c_1, c_2 \in \mathbf{I}$, vemos que essa cópula proposta satisfaz as condições do Corolário 3.1.1.

Exemplo 3.1.3 Para $\Psi(v) = (\theta/\pi)\sin(\pi v)$, para $\theta \in [-1, 1]$, temos que as condições são facilmente verificadas, pois a função seno é contínua. Sabemos, também, que a função cosseno está entre [-1,1] o que satisfaz (2), pois ela é limitada. Para o item 3, tomaremos o caso onde $v < 1/2$, temos que $\sin(\pi v) \leq \pi v$ e, por simetria da função seno vamos usar apenas $v < 1/2$. Temos o seguinte fato $\sin(\pi v) < \pi v$ então $\sin(\pi v)/\pi < v$. Portanto, quando usamos $\Psi(v) = (\theta/\pi)\sin(\pi v)$ na equação 3.2, $C(u, v)$ também é cópula.

3.2 Generalizações da Cópula FGM

Apresentaremos algumas generalizações para a Cópula FGM em busca de aumentar o alcance da correlação.

3.2.1 Generalização proposta por Rodríguez-Lallena e Úbeda-Flores (2004)

Será apresentada uma generalização não necessariamente simétrica.

Definição 3.2.1 *Sejam f e g duas funções reais definadas em* $\mathbf{I}$ *e considere a função C definida por:*

$$C(u,v) = uv + f(u)g(v) \tag{3.3}$$

para todo u, v em $\mathbf{I}$.

Mostraremos dois lemas antes de provar o teorema principal que estabelece condições para que a proposta de Rodrguez-Lallena e Úbeda-Flores (2004) dada pela equação 3.3 seja cópula.

Lema 3.2.1 Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $K_1(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq K_2(y-x)$ para todo $x, y \in [a,b]$ tais que $x < y$;
2. f é absolutamente contínua em $[a,b]$ e $K_1 \leq f'(x) \leq K_2$ para todo $x \in [a,b]$

Prova. $K_1(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq K_2(y-x) \Leftrightarrow K_1 \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq K_2$

Quando $x \to y$, temos que $K_1 \leq f'(x) \leq K_2$.

■

O seguinte lema é consequência do Lema 3.2.1.

Lema 3.2.2 Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolutamente contínua e seja $A = \{x \in [a,b] : f'(x)\ existe\}$. Então:

1. $\inf\{(f(y)-f(x))/(y-x) : x, y \in [a,b], x < y\} = \inf\{f'(x) : x \in A\}$;
2. $\sup\{(f(y)-f(x))/(y-x) : x, y \in [a,b], x < y\} = \sup\{f'(x) : x \in A\}$.

Agora, será apresentado o teorema que mostra quando a equação dada em 3.3 é cópula.

Teorema 3.2.1 *Sejam f e g duas funções reais definidas em* $\mathbf{I}$. *Seja $C : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ a função definida em 3.3. Então C é uma cópula, se e somente se:*

1. $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$;
2. *f e g são absolutamente contínuas e*
3. $\min\{\alpha\delta, \beta\gamma\} \geq -1$, *onde* $\alpha = \inf\{f'(u) : u \in A\} < 0$, $\beta = \sup\{f'(u) : u \in A\} > 0$, $\gamma = \inf\{g'(u) : u \in B\} < 0$ *e* $\delta = \sup\{g'(u) : u \in B\} > 0$, *com* $A = \{x \in [a,b] : f'(x)$ *existe*$\}$ *e* $B = \{x \in [a,b] : g'(x)$ *existe*$\}$. *Além disso, C é absolutamente contínua.*

Prova. Prova no Apêndice.

O próximo resultado alternativo fornece-nos condições suficientes sobre as funções f e g para que a função C definida em 3.3 seja cópula. Esse resultado checa a condição de Lipschitz sobre f e g e isso nos oferece uma gama mais rica de funções f e g, que não serão exploradas nesta dissertação.

Teorema 3.2.2 *Sejam f e g duas funções reais não-nulas definidas em $\mathbf{I}$ tal que $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$ e satisfazendo as condições de Lipschitz:*

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq M|u_1 - u_2| \text{ e } |g(v_1) - g(v_2)| \leq \frac{|v_1 - v_2|}{M} \tag{3.4}$$

Então, a função dada pela equação 3.3 é cópula.

Prova. Sejam F, G e T como na prova do Teorema (3.2.1). Sejam (u_1, u_2) e (v_1, v_2) em T. Das condições de Lipschitz em 3.4. Decorre que C é bicrescente.

Mostraremos alguns exemplos de cópulas dessa família dada pela equação 3.3.

O primeiro exemplo mostra uma família onde a condição de Lipschitz não é satisfeita e portanto a função dada não é cópula.

Exemplo 3.2.1 Sejam m e n dois números reais tais que $mn > 0$ com $mn \neq 1$, e sejam f e g funções definidas da seguinte forma:

$$f(u) = \begin{cases} mu & \text{se } 0 \leq u \leq 1/(mn+1), \\ (1-u)/n & \text{se } 1/(mn+1) \leq u \leq 1, \end{cases}$$

e

$$g(v) = \begin{cases} nv & ,0 \leq v \leq 1/(mn+1), \\ (1-v)/n & ,1/(mn+1) \leq v \leq 1, \end{cases}$$

Ambas f e g são contínuas e côncavas, logo f e g são absolutamente contínuas. Nesse caso, os valores de α, β, γ e δ definidos no Teorema (3.2.1) são: $\alpha = \min\{m, -1/n\}$, $\beta = \max\{m, -1/n\}$, $\gamma = \min\{n, -1/m\}$ e $\delta = \max\{n, -1/m\}$; portanto, $\min\{\alpha\delta, \beta\gamma\} = -1$. Então:

$$C(u,v) = \begin{cases} uv(mn+1), & 0 \leq v \leq 1/(mn+1), \\ uv + (1-u)(1-v)/(mn), & 1/(mn+1) \leq v \leq 1, \\ \min(u,v), & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Se tomarmos $mn > 1$ e, u_1, u_2 em $\mathbf{I}$ tais que $u_1 \neq u_2$ e $\max(u_1, u_2) < 1/(mn+1)$, então temos $|f(u_1) - f(u_2)||g(u_1) - g(u_2)| = |mu_1 - mu_2||nu_1 - nu_2| = mn|u_1 - u_2|^2 \geq |u_1 - u_2|^2$, o que contradiz a condição de Lipshitz. Da mesma forma, assumindo $mn < 1$ e tomando u_1, u_2

em $\mathbf{I}$ tais que $u_1 \neq u_2$ e $\min(u_1, u_2) \geq 1/(mn+1)$, então temos $|f(u_1)-f(u_2)||g(u_1)-g(u_2)| = |u_1 - u_2|^2/mn > |u_1 - u_2|^2$ o que também contradiz a condição de Lipshitz.

Como consequência do Teorema (3.2.2), temos:

Corolário 3.2.1 *Seja $M > 0$, e sejam f e g duas funções reais não-nulas definidas em $\mathbf{I}$ tais que*

1. *f e g são absolutamente contínuas;*
2. *$|f'(u)| \leq M$ e $|g'(u)| \leq 1/M$;*
3. *$|f(u)| \leq M \min\{u, 1-u\}$ e $|g'(u)| \leq (1/M)\min\{u, 1-u\}, \forall u \in \mathbf{I}$.*

Então a função C definida em 3.3 é uma cópula absolutamente contínua.

O seguinte corolário oferece-nos muitas novas famílias paramétricas e sua prova é direta:

Corolário 3.2.2 *Sejam f e g duas funções absolutamente contínuas definidas em $\mathbf{I}$ tais que $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$. Seja C_θ a função definida em $\mathbf{I}^2$ por $C_\theta(u, v) = uv + \theta f(u)g(v)$ com $\theta \in \mathbb{R}$. Então, C_θ será uma cópula se e somente se $-1/\max\{\alpha\gamma, \beta\delta\} \leq \theta \leq -1/\min\{\alpha\delta, \beta\gamma\}$, onde $\alpha = \inf\{f'(u) : u \in A\} < 0$, $\beta = \sup\{f'(u) : u \in A\} > 0$, $\gamma = \inf\{g'(u) : u \in B\} < 0$ e $\delta = \sup\{g'(u) : u \in B\} > 0$, com $A = \{x \in [a, b] : f'(x)$ existe$\}$ e $B = \{x \in [a, b] : g'(x)$ existe$\}$.*

Com o resultado dado pelo corolário, podemos calcular a forma analítica do coeficiente de correlação de Spearman em função do parâmetro da cópula:

$$\rho = 12\theta \int_0^1 f(t)dt \int_0^1 g(t)dt \tag{3.6}$$

Exemplo 3.2.2 Entre a família de cópulas dada pela equação 3.3, podemos citar a sugerida por Huang-Kotz (Mari e Kotz, 2001) que é dada a partir de $f(u) = u(1-u^p)$ e $g(v) = v(1-v^p)$. Assim, temos:

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u^p)(1-v^p) \text{ onde } u \text{ e } v \text{ estão em } \mathbf{I} \text{ e } p > 0.$$

Usando a equação 3.6 encontramos:

$$\rho = \frac{3\theta p^2}{(p+2)^2}.$$

A partir de alguns cálculos, encontramos que:

$$\theta \in \left[-(\max\{1, p\})^{-2}, p^{-1}\right],$$
$$\rho \in \left[\frac{-3\min\{1, p^2\}}{(p+2)^2}, \frac{3p}{(p+2)^2}\right]$$

Essa proposta aumenta o máximo limitante da correlação para $3/8$ quando $p = 2$ e limitante inferior para esse valor de p é de $-3/16$.

No próximo exemplo, apresentaremos uma generalização adicionando um parâmetro.

Exemplo 3.2.3 Na generalização proposta por Bairamov-Kotz (Mari e Kotz, 2001) usa-se $f(u) = u(1-u^p)^q$ e $g(v) = v(1-v^p)^q$. Com isso temos:

$$C_\theta(u,v) = uv + \theta uv(1-u^p)^q(1-v^p)^q.$$

Usando a equação 3.6, temos que:

$$\rho = 12\theta\left[\tfrac{q}{pq+2}\tfrac{\Gamma(p/2)\Gamma(q)}{\Gamma(q+\frac{2}{p})}\right]^2.$$

$$\theta \in \left[-\min\left(1, \left[\tfrac{1}{p^q}\left(\tfrac{p+q}{q-1}\right)^2\right]\right), \left(\tfrac{p+1}{p-1}\right)^{p-1}\right],$$

$$\rho \in \left[-12\left(\frac{q}{pq+2}\frac{\Gamma(p/2)\Gamma(q)}{\Gamma(q+\frac{2}{p})}\right)^2 \min\left(1, \left[\frac{1}{p^q}\left(\frac{p+q}{q-1}\right)^2\right)\right), 12\left(\frac{q}{pq+2}\frac{\Gamma(p/2)\Gamma(q)}{\Gamma(q+\frac{2}{p})}\right)^2\left(\tfrac{p+1}{p-1}\right)^{p-1}\right]$$

O limitante superior para ρ é 0,5015 quando $p = 2,8968$ e $q = 1,4908$. Além disso, encontramos como limitante inferior é $-0,48$ para $p = 2$ e $q = 1,5$.

Apresentaremos, no próximo exemplo, a cópula apresentada por Rodríguez-Lallena e Úbeda-Flores (2004).

Exemplo 3.2.4 Seja a cópula dada por

$$C_\theta(u,v) = uv + \theta u^p(1-u)^q v^r(1-v)^s \tag{3.7}$$

para todo $(u,v) \in \mathbf{I}^2$, com $p,q,r,s > 1$. Pelo corolário 3.2.1, podemos dizer que C_θ será cópula se e somente se $-1/\max\{\alpha\gamma, \beta\delta\} \leq \theta \leq -1/\min\{\alpha\delta, \beta\gamma\}$, onde $\beta = -\alpha = 1$, se $p = r = 1$; $\delta = -\gamma = 1$, se $q = s = 1$ e

$$\begin{aligned}\alpha = \; & -\left(\frac{p}{p+q}\right)^{p-1}\left(1+\sqrt{\frac{q}{p(p+q-1)}}\right)^{p-1}\left(\frac{q}{p+q}\right)^{q-1} \\ & \times\left(1-\sqrt{\frac{p}{p(p+q-1)}}\right)^{q-1}\sqrt{\frac{pq}{p+q-1}}\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\beta = \; & \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p-1}\left(1-\sqrt{\frac{q}{p(p+q-1)}}\right)^{p-1}\left(\frac{q}{p+q}\right)^{q-1} \\ & \times\left(1+\sqrt{\frac{p}{p(p+q-1)}}\right)^{q-1}\sqrt{\frac{pq}{p+q-1}}\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\gamma = & -\left(\frac{r}{r+s}\right)^{r-1}\left(1+\sqrt{\frac{s}{r(r+s-1)}}\right)^{r-1}\left(\frac{s}{r+s}\right)^{s-1} \\ & \times\left(1-\sqrt{\frac{r}{r(r+s-1)}}\right)^{s-1}\sqrt{\frac{rs}{r+s-1}}\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\delta = & \left(\frac{r}{r+s}\right)^{r-1}\left(1-\sqrt{\frac{s}{r(r+s-1)}}\right)^{r-1}\left(\frac{s}{r+s}\right)^{s-1} \\ & \times\left(1+\sqrt{\frac{r}{r(r+s-1)}}\right)^{s-1}\sqrt{\frac{rs}{r+s-1}}\end{aligned} \tag{3.11}$$

Podemos calcular facilmente

$$\rho = 12\theta beta(p+1,q+1)beta(r+1,s+1) \tag{3.12}$$

onde ρ pertence ao intervalo

$$\left[\frac{-12beta(p+1,q+1)beta(r+1,s+1))}{\max(\alpha\gamma,\beta\delta)}, \frac{-12beta(p+1,q+1)beta(r+1,s+1))}{\min(\alpha\delta,\beta\gamma)}\right]$$

O caso $p = q = r = s = 1$, que produz a FGM tradicional, nos dá o menor suporte para θ, o intervalo $[-1, 1]$. Em geral, valores grandes de p, q, r e s nos dão alcances grandes para θ (por exemplo, para $p = q = r = s = 2$, θ está no intervalo $[-27, 27]$). Podemos notar, ainda, que (U, V) será permutável se e somente se $p = r$ e $q = s$. Ademais, se o par (U, V) é marginalmente simétrico sobre algum ponto em $\mathbb{R}^2$, então (U, V) é radialmente simétrico se e somente se $p = r$ e $q = s$; contudo, (U, V) só será conjuntamente simétrico para o caso $\theta = 0$.

Valores de p, q, r e s no intervalo $(1; 2, 1]$ nos fornecem valores para ρ superiores à da FGM tradicional.

Huang e Kotz (1999) apresentaram um caso particular dessa família de cópulas onde $p = r = 1$ e observaram que para ρ o limitante superior é $0,3912$ quando $q = s = 1,877$ e o limitante inferior é $-1/3$ quando $q = s = 1$.

Lai e Xie (2000) apresentaram um caso particular dessa cópula onde $p = r$ e $q = s$.

3.2.2 Generalização Multivariada da proposta de Rodríguez-Lallena & Úbeda-Flores (2004)

Apresentaremos a versão multivariada da cópula apresentada anteriormente.

Mostraremos o caso para 3 dimensões, o qual pode ser facilmente generalizado para dimensões maiores.

Introduziremos a notação.

Definição 3.2.2 *Sejam f, g e h três funções reais definidas em $\mathbf{I}$ e considere a função C definida por:*

$$C(u,v,w) = uvw + \theta_1 f(u)g(v)w + \theta_2 f(u)vh(w) + \theta_3 ug(v)h(w) + \theta_4 f(u)g(v)h(w)$$

para todo u, v *e* w *em* $\mathbf{I}$.

Outros resultados importantes vêm do fato das marginais bivariadas das cópulas trivariadas serem também cópulas:

Seja f, g, h funções reais absolutamente contínuas tais que $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = h(0) = h(1) = 0$ e C a função da Definição (3.2.2). Então:

$$C_1(u,v,1) = uv + \theta_1 f(u)g(v) \tag{3.13}$$

$$C_2(u,1,w) = uw + \theta_2 f(u)h(w) \tag{3.14}$$

$$C_3(1,v,w) = vw + \theta_3 g(v)h(w) \tag{3.15}$$

onde, C_1, C_2, C_3 são cópulas.

A partir do resultado acima, podemos encontrar os limitantes de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ usando o Corolário (3.2.2).

Exemplo 3.2.5 Seja a cópula da família FGM com 4 parâmetros, com $u, v, w \in \mathbf{I}$, dada por:

$$\begin{aligned} C(u,v,w) &= uvw + \theta_1 u(1-u)v(1-v)w \\ &+\theta_2 u(1-u)vw(1-w) \\ &+\theta_3 uv(1-v)w(1-w) \\ &+\theta_4 u(1-u)v(1-v)w(1-w) \end{aligned}$$

ou seja, a cópula dada pela Definição (3.2.2) com $f(u) = g(u) = h(u) = u(1-u)$.

Temos, pelas 3.13 a 3.15, que θ_1, θ_2 e θ_3 pertencem ao intervalo $[-1, 1]$ e que θ_4, por Dolati e Úbeda-Flores (2006), pertence ao intervalo:

$$\theta_4 \in [-1 - w_1\theta_1 - w_2\theta_2 - w_3\theta_3, 1 + w_1\theta_1 + w_2\theta_2 + w_3\theta_3]$$

onde $w_i = \{-1, 1\}$, $w_1 w_2 w_3 = 1$

3.2.3 Generalização proposta por Amblard e Girard (2009)

Amblard e Girard (2009) propuseram uma generalização na qual uma das subfamílias apresenta dependência caudal. Esta proposta é feita para cópulas simétricas, pois as funções f e g serão iguais:

$$C_\theta(u,v) = uv + \theta(\max(u,v))f(u)f(v) \tag{3.16}$$

onde θ e f são funções de $\mathbf{I}$ em $\mathbb{R}$, continuamente diferenciáveis.

Teorema 3.2.3 *C_θ é uma cópula se e somente se f e θ satisfazem as seguintes condições:*

(a) $f(0) = 0$;

(b) $f(1)\theta(1) = 0$;

(c) $f'(u)(\theta f)'(v) \geq -1$;

(d) $\theta'(u) \leq u$, $\forall u \in \mathbf{I}$.

A prova pode ser encontrada em Amblard & Girard (2009).

Introduziremos a seguir as medidas de associação para a cópula dada acima:

ρ de Spearman

Apresentaremos aqui o ρ de Spearman para a generalização proposta por Amblard e Girard. Seja (X, Y) um par de vetores aleatórios com cópula $C_{\theta,\phi}$. O rô de Spearman é dado por

$$\rho = 12\left[F^2(1)\theta(1) - \int_0^1 F^2(t)\theta'(t)dt\right], \tag{3.17}$$

onde $F(t) = \int_0^t f(x)dx$.

O interessante dessa generalização é que, ao contrário da FGM tradicional, ela apresenta depedência caudal diferente de zero e, por conta disso, esta generalização acaba nos fornecendo informações que a FGM tradicional e a GFGM dada por Rodríguez-Lallena & Úbeda-Flores não nos dariam. A seção abaixo nos mostra justamente isso.

Dependência Caudal

A dependência caudal superior pode ser quantificada por meio da seguinte forma: $\lambda = -f^2(1)\theta'(1)$.

Agora, provaremos o resultado acima:

$$\begin{aligned}
\lambda_U &= 2 - \lim_{u\to 1^-} \frac{1 - C(u,u)}{1-u} \\
&= 2 - \lim_{u\to 1^-} \frac{1 - u^2 - \theta(u)f(u)^2}{1-u} \\
&= 2 - 1 - 1 - \lim_{u\to 1^-} \frac{\theta(u)f(u)^2}{1-u} \\
&= -\lim_{u\to 1^-} \frac{f^2(1)\theta(1) - f^2(u)\theta(u)}{1-u} \\
&= -(f^2\theta)'(1) \\
&= -f^2(1)\theta'(1)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

A dependência caudal inferior é igual a 0.

Subfamílias da cópula proposta de Amblard e Girard

Nesta proposta, exploraremos o item (2) do Teorema (3.2.4):

(b1) Caso $\theta(1) = 0$,

Primeiro, notemos que (b1,d) implica que θ é não-negativa em $\mathbf{I}$. O ρ de Spearman neste caso será:

$$\rho = -12 \int_0^1 F^2(t)\theta'(t)dt, \tag{3.19}$$

e, somando-se a (d), essa subfamília, $\rho \geq 0$, pois $F^2 > 0$ e $\theta > 0$

Mostraremos as cópulas geradas por função de distribuição univariada definida por

$$C(u, v) = uv[1 + \bar{K}^{-1}(\max(u, v))] \tag{3.20}$$

onde K é uma função de distribução em $\mathbb{R}^+$, $\bar{K}$ é a função de sobrevivência, $\bar{K}^{(-1)}$ é sua inversa generalizada definida como $\bar{K}^{(-1)} = K^{(-1)}(1-x) = \inf\{t \geq 0, K(t) \geq 1-x\}$ e $f = \mathbb{I}_d$ é a função identidade. Assumiremos que K é estritamente crescente e diferenciável em $(K^{(-1)}(0), K^{(-1)}(1))$, a inversa generalizada e a inversa clássica coincidem nesse intervalo. A função densidade de K será chamada de k. O seguinte corolário nos dá uma condição necessária e suficiente para que C dada pela equação 3.16 seja uma cópula. Isso será mostrado por meio da função taxa de falha $k/\bar{K}$.

Corolário 3.2.3 *C é dada pela equação 3.20, será uma cópula se e somente se, para todo $t \geq 0$ tal que $0 < K(t) < 1$,*

$$\frac{k(t)}{\bar{K}(t)} \geq \frac{1}{1+t}. \tag{3.21}$$

A prova é dada em Amblard & Girard (2009).

(b2) $f(1) = 0$

Observemos que $(b2)$ implica medida de dependência caudal superior sempre nula nessa subfamília pela 3.18.

A partir de 3.17, temos que o ρ de Spearman verifica:

$$\rho \geq 12F^2(1)\theta(1),$$

onde F é dada por 3.16

Nesse caso onde θ é uma constante, encontramos exatamente o ρ de Spearman da GFGM de Rodríguez-Lallena & Úbeda-Flores (2004), ou seja, a segunda parcela da equação 3.17 é nula.

Capítulo 4

Métodos Inferenciais

Neste capítulo, em sua primeira parte, apresentaremos a metodologia para se realizar inferências, como teste de hipóteses, intervalos de credibilidade e predições.

Na segunda parte, apresentaremos os métodos computacionais que serão usados nessa dissertação. Primeiramente, mostraremos como foram simuladas observações da Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) e, depois, introduziremos a geração de observações para as cópulas 3.7 e dada pela Definição 3.2.2. E, finalmente, mostraremos o método de Metropolis-Hastings, que foi utilizado para a geração dos valores da função densidade a posteriori.

4.1 Inferência Bayesiana

Com o objetivo de testar independência entre as variáveis, apresentaremos uma metodologia bayesiana para testes de hipóteses precisas.

4.1.1 Teste de Hipóteses Precisas

Em estatística, uma das fases importantes na análise de dados é o teste de hipóteses. Essas hipóteses normalmente são feitas a fim de diminuir a dimensão do espaço paramétrico.

Definimos χ e Θ como sendo o espaço amostral e paramétrico, respectivamente. Tomemos $x \in \chi \subset \mathbb{R}^n$ e $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$.

Formalmente, uma hipótese precisa é definida como:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$
$$H_1 : \theta \in \Theta_1$$

onde $dim(\Theta_0) < dim(\Theta)$ e Θ_0, Θ_1 são partições de Θ, i.e., $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$. No caso uniparamétrico, temos como exemplo de hipótese precisa $H_0 : \theta = \theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

Tabela 4.1: *Função de Perda para o FBST*

	$\theta \in T$	$\theta \in T^c$
a_0	$a + c$	a
a_1	0	b

A partir disso, é necessário calcular probabilidades de espaços com dimensão menor do que espaço original, pois esses espaços menores tem probabilidade zero. Para resolver esse tipo de problema usaremos o teste *Full Bayesian Significance Test*.

Full Bayesian Significance Test - FBST

Para a solução do problema de hipóteses precisas, Pereira & Stern sugerem uma medida de evidência em favor de H_0 utilizando um conjunto tangente ao conjunto Θ_0 chamado T, e tomando os pontos mais "prováveis" do que Θ_0. Denotemos $\pi(\theta|\mathbf{x})$ a função densidade a posteriori e θ dada a amostra $\mathbf{x}$, ou seja,

$$T = \{\theta \in \Theta : \pi(\theta|\mathbf{x}) > t\}, \text{ onde } t = \sup_{\Theta_0}\{\pi(\theta|\mathbf{x})\}$$

A partir disso, definimos a medida de evidência ou $e - valor$ em favor de Θ_0 da seguinte forma:

$$e - valor_{\Theta_0} = \mathbb{P}(\theta \in T^c|\mathbf{x}) = 1 - \mathbb{P}(\theta \in T|\mathbf{x}) = 1 - \int_T \pi(\theta|\mathbf{x})d\theta.$$

Em outras palavras, se a probabilidade do conjunto tangente T for alta então teremos pouca evidência em favor do conjunto Θ_0. Por outro lado, se tivermos baixa probabilidade para o conjunto T então teremos forte evidência em favor de H_0.

Apresentaremos uma regra de decisão para a rejeição ou aceitação da hipótese nula a partir do FBST. Definimos $\mathcal{D} = \{a_0, a_1\}$ o espaço das decisões, onde $a_0 =$ Não Rejeitar H_0 e $a_1 =$ Rejeitar H_0. Também definimos $l : \mathcal{D} \times \Theta \to \mathbb{R}$ uma função de perda apresentada da seguinte forma por Madruga et al. (2001):

$$l(a_1, \theta) = b(1 - \mathbb{I}_T(\theta)),\ l(a_0, \theta) = a + c\mathbb{I}_T(\theta)$$

Podemos colocar a função de perda acima em forma da Tabela 4.1: onde $a, b, c \geq 0$ e $\mathbb{I}$ a função indicadora. A perda esperada para a decisão a_0 é:

$$\begin{aligned} E[l(a_0, \theta)|\mathbf{x}] &= \int_\Theta l(a_0, \theta)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta \\ &= \int_\Theta (a + c\mathbb{I}_T)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta \\ &= a + c\int_T \pi(\theta|\mathbf{x})d\theta \\ &= a + c(1 - \text{e-valor}) \end{aligned}$$

Agora, acharemos a perda para a decisão a_1:

$$\begin{aligned} E[l(a_1,\theta)|\mathbf{x}] &= \int_\Theta l(a_1,\theta)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta \\ &= \int_\Theta (b\mathbb{I}_{T^c})\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta \\ &= b\int_{T^c}\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta \\ &= b(\text{e-valor}) \end{aligned}$$

Para rejeitarmos H_0, temos:

$$\begin{aligned} E[l(a_1,\theta)|\mathbf{x}] &< E[l(a_0,\theta)|\mathbf{x}] \\ b(\text{e-valor}) &< a + c(1 - \text{e-valor}) \\ (b+c)\text{e-valor} &< a + c \\ \text{e-valor} &< \frac{a+c}{b+c} \end{aligned}$$

Portanto, rejeitaremos $H_0 \Leftrightarrow e - valor < \dfrac{a+c}{b+c}$.

Os valores a, b e c são postulados de uma maneira subjetiva e representam o quanto se perde em tomar as decisões a_0 e a_1 quando o verdadeiro valor de θ está em T ou T^c.

Quando $b < a$, sempre rejeitaremos a hipótese nula, pois o e-valor é sempre um valor dentro do intervalo $(0, 1)$. Por outro lado, quando $b >> a$ e c "pequeno", então não rejeitaremos H_0 para valores bem pequenos do e-valor. Um exemplo, seria $a, b, c > 0$, satisfazendo $9a - 10b = c$ $(19a - 20b = c)$, então decidiremos por H_0 quando e-valor $= 0,9$ $(0,95)$.

4.1.2 Intervalos de Credibilidade

Em inferência, sob o ponto de vista frequentista, existem os intervalos de confiança. O similar para a estatística bayesiana são os intervalos de credibilidade, que têm uma interpretação muito mais intuitiva dada pela probabilidade do intervalo dado.

Depois de determinada a função a posteriori $\pi(\theta|\mathbf{x})$, calculamos as seguintes probabilidades a posteriori:

Definição 4.1.1 *$R(x)$ é um intervalo de credibilidade γ de θ se e somente,*

$$\mathbb{P}(\theta \in R(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = \int_{R(\mathbf{x})}\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta \geq \gamma.$$

Existem infinitos intervalos de credibilidade com mesmo grau de credibilidade, o que nos interessa é selecionar aquele com tamanho mínimo, o *High Posterior Density* (HPD).

4.1.3 Predições

Além de estimações e teste de hipóteses, muitas vezes, desejamos fazer predições de observações futuras. Para tanto, precisamos utilizar os dados atuais, $\mathbf{x}$, a fim de conseguir predizer a

observação aleatória Y determinando, assim, a curva preditiva $p(Y|\mathbf{x})$. Como esta observação, também, nos dá informação sobre a entidade desconhecida θ, é natural que expressemos nossa incerteza a partir da densidade $f(y|\mathbf{x},\theta)$ e, além disso, usarmos nosso conhecimento sobre θ, quantificado por meio da distribuição *a posteriori* $\pi(\theta|\mathbf{x})$, de modo a obter a densidade preditiva da forma abaixo:

$$p(y|\mathbf{x}) = \int_{\Theta} f(y|\mathbf{x},\theta)h(\theta|\mathbf{x})d\theta$$

Observemos que a distribuição de Y não necessariamente precisa ser a mesma distribuição do vetor $\mathbf{x}$, basta que eles estejam associados ao mesmo θ subjacente, sendo esse, o veículo que leva a informação do $\mathbf{x}$ para o y.

4.2 Métodos Computacionais

4.2.1 Geração de Valores da FGM e GFGM

Para se gerar valores (U,V) da FGM dada pela equação 2.18, temos, primeiramente, que gerar U como uma variável Uniforme(0,1). O próximo passo é calcular a função distribuição condicional de V dado $U = u$ cuja forma analítica é dada por:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x 1 + \theta(1-2u)(1-2v)dv \\ &= [1+\theta(1-2u)]x - \theta(1-2u)x^2, \end{aligned}$$

onde F é quadrática em x. Para $0 < t < 1$, a equação $F(x) = t$ tem uma única raiz x no intervalo $(0,1)$.

Algoritmo 4.2.1 Algoritmo para geração de FGM (Nelsen, 2004)

1. Gere u e t uniformes independentes no intervalo $(0,1)$;
2. $a = 1+\theta(1-2u)$; $b = \sqrt{a^2 - 4(a-1)t}$;
3. $v = 2t/(b+a)$;
4. Retorna-se (u,v).

Para gerarmos valores da GFGM dada pela equação 3.7, propomos o uso do algoritmo de aceitação-rejeição dado em Robert & Casella (2004).

Como função auxiliar escolhemos a FGM com parâmetro igual a 1 para valores de $\theta \geq 0$ e -1 para valores de $\theta < 0$. O Algoritmo 4.2.2 mostra os detalhes.

Definimos f_{FGM} pela densidade dada pela equação 2.18 e f_{GFGM} pela função densidade dada pela equação 3.7.

Fixados p, q, r, s

Algoritmo 4.2.2 Algoritmo para geração de GFGM

1. Encontre $M = \sup_{u,v}(f_{GFGM}(\theta,(u,v))/f_{FGM}(1,(u,v)))$ se $\theta \geq 0$ ou $M = \sup_{u,v}(f_{GFGM}(\theta,(u,v))/f_{FGM}(-1,u,v))$ se $\theta < 0$;
2. Gere (u_1, u_2) de FGM de parâmetro 1 se $\theta \geq 0$ ou de parâmetro -1 se $\theta < 0$;
3. Gere u de Uniforme(0,1);
4. Se u < $f_{GFGM}(\theta,(u_1,u_2))/f_{FGM}(1,(u_1,u_2))M$ se $\theta \geq 0$ ou $f_{GFGM}(\theta,(u_1,u_2))/f_{FGM}(-1,(u_1,u_2))M$ se $\theta < 0$ então aceite (u_1, u_2);
5. Caso contrário, volte a 2.

Para gerarmos valores da GFGM multivariada, também, é necessário usarmos o Algoritmo de Aceitação-Rejeição.

Apresentaremos uma proposta de geração da GFGM multivariada dada pela Definição (3.2.2) com $\theta_4 = 0$, propomos como função auxiliar, nesse caso, uma mistura de uma função Uniforme e de três betas tendo como parâmetros os expoentes que desejamos simular e usando os parâmetros θ_1, θ_2 e θ_3 como pesos.

Definimos $\psi(\theta_1, \theta_2, \theta_3, (u, v, w))$ como a função densidade da GFGM multivariada e $Beta(o, p)$ como a função densidade da distribuição Beta de parâmetros o, p.

O Algoritmo é dado abaixo:

Dados o, p, q, r, s, t.

Algoritmo 4.2.3 Algoritmo para geração de GFGM Multivariada

1. Encontre $M = \sup_{u,v,w}\{\psi(\theta_1,\theta_2,\theta_3,(u,v,w))/(1 + \theta_1 Beta(o,p) + + \theta_2 Beta(q,r) + \theta_3 Beta(s,t)))\}$;
2. Gere u_1 de $Beta(o,p)$, u_2 de $Beta(q,r)$, u_3 de $Beta(s,t)$;
3. Gere u de Uniforme(0,1);
4. Se $u < \psi(\theta_1,\theta_2,\theta_3,(u_1,u_2,u_3))/(1 + \theta_1 Beta(o,p) + + \theta_2 Beta(q,r) + \theta_3 Beta(s,t)))M$ aceito (u_1, u_2, u_3);
5. Caso contrário, volte a 2.

4.2.2 Método Metropolis-Hastings

Para funções *a posteriori* complicadas, é necessário utilizarmos a ferramenta do MCMC para conseguirmos fazer inferência sobre o parâmetro θ.

Um dos métodos MCMC mais conhecidos e utilizados na literatura é o método de Metropolis-Hastings. Feito inicialmente por Metropolis (1953) e redescoberto e aprimorado por Hastings (1970).

O algoritmo Metropolis-Hastings começa com a função objetivo (*alvo*) κ. Depois disso, precisamos escolher uma $\lambda(y|x)$, que será a função mudança de estado. O Metropolis-Hastings pode ser implementado na prática quando a função $\lambda(.|x)$ é fácil de simular. Além disso, essa função λ ou é explicita (i.e., uma função independente de x) ou simétrica ($\lambda(y|x) = \lambda(x|y)$). A densidade alvo κ pode ser vista como uma extensão da razão:

$$\kappa(y)/\lambda(y|x)$$

que nos dá uma constante em x.

Algoritmo 4.2.4 Algoritmo geral de Metropolis-Hastings

1. `Inicializar` $x^{(0)}$
2. `Gerar` $y_t \sim \lambda(y|x)$
3. `Tome` $x^{(t+1)} = \begin{cases} y_t & \texttt{com probabilidade } \nu(x^{(t)}, y_t) \\ x^{(t)} & \texttt{com probabilidade } 1 - \nu(x^{(t)}, y_t) \end{cases}$

   onde

$$\nu(x, y) = \min\left(\frac{\kappa(y)}{\kappa(x)}\frac{\lambda(x|y)}{\lambda(y|x)}, 1\right).$$

ν é a probabilidade de aceitação do Metropolis-Hastings.

As observações geradas pelo Metropolis-Hastings não são iid, e é preciso escolhermos observações de forma espaçada para abrandar a autocorrelação das cadeias.

Nesta dissertação, usaremos o Metropolis-Hastings com função de transição da cadeia de Markov passeio aleatório.

Passeio Aleatório

O passeio aleatório é definido abaixo:

$$y_t = x^{(t)} + \epsilon_t,$$

onde ϵ_t é uma perturbação aleatória com distribuição simétrica κ, independente de $X^{(t)}$. Podemos substituir, nesse caso, a função $\lambda(y|x)$ pela forma $\kappa(|y - x|)$.

Capítulo 5

Análise Inferencial

Nos capítulos anteriores, montamos os pilares para o que será apresentado no presente capítulo, cujo objetivo é fazer inferência bayesiana em algumas das generalizações da FGM. Nesta dissertação, o foco é a generalização proposta por Rodríguez-Lallena & Úbeda-Flores (2004).

Primeiramente, especificaremos a função de verossimilhança, assim como, as funções de densidade *a priori* escolhidas. Em seguida, mostraremos algumas aplicações. A primeira aplicação corresponde a um banco de dados reais bivariado contendo a proporção de pessoas abaixo da linha de pobreza e a proporção de pessoas que bebem em exagero nos estados dos Estados Unidos para o ano de 2007; a segunda aplicação corresponde a um banco de dados reais trivariado contendo as duas variáveis já citadas e a taxa de pessoas com gonorréia nos estados dos Estados Unidos para o ano de 2007.

5.1 Função de Verossimilhança

Considere a equação de cópula 3.12, a densidade da cópula correspondente é

$$c(u,v) = 1 + \theta f'(u)g'(v) \tag{5.1}$$

Assumindo $f(u) = u^p(1-u)^q$ e $g(v) = v^r(1-v)^s$, teremos:

$$c(u,v) = 1 + \theta[pu^{(p-1)}(1-u)^q - qu^p(1-u)^{(q-1)}][rv^{(r-1)}(1-v)^s - sv^r(1-v)^{(s-1)}] \tag{5.2}$$

Todavia, o parâmetro θ não tem uma interpretação direta e, para realizarmos inferências, vamos utilizar o ρ de Spearman que mede a dependência, o que nos dará a seguinte função de

verossimilhança:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u},\mathbf{v}|\rho,p,q,r,s) &= \prod_{i=1}^{n}\{1+\frac{\rho}{12beta(p+1,q+1)beta(r+1,s+1)} \\ &\times[pu_i^{(p-1)}(1-u_i)^q - qu_i^p(1-u_i)^{(q-1)}] \\ &\times[rv_i^{(r-1)}(1-v_i)^s - sv_i^r(1-v_i)^{(s-1)}]\} \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_n)$ e $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_n)$.

5.2 Elicitação de prioris

Escolhemos como priori para ρ dado pela equação 5.8 uma adaptação da sugerida por Huard, Évin e Favre (2006). Eles propõem a seguinte distribuição a priori para $\theta \in [-1,1]$

$$\pi(\theta) \propto \Big(1+\theta\Big)^{a-1}\Big(1-\theta\Big)^{b-1} \tag{5.4}$$

onde $a,b>0$

Sabemos, pelo Exemplo 2.3.1, que o ρ de Spearman da cópula FGM é igual a $\theta/3$ e o ρ pertence ao intervalo $(-1/3,1/3)$ e, além disso, ρ é mais fácil de ser interpretado do que θ. Então uma priori para ρ seria dada por uma beta escalada adequadamente:

$$\pi(\rho) \propto \Big(1/3+\rho\Big)^{a-1}\Big(1/3-\rho\Big)^{b-1} \tag{5.5}$$

Sugerimos uma modificação da priori dada acima para a GFGM proposta por Rodríguez-Lallena & Úbeda-Flores (2004) na equação 3.7 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \pi(\rho|p,q,r,s) &\propto \left(\frac{12beta(p+1,q+1)beta(r+1,s+1))}{\max(\alpha\gamma,\beta\delta)}+\rho\right)^{a_{rho}-1} \\ &\times\left(\frac{-12beta(p+1,q+1)beta(r+1,s+1))}{\min(\alpha\delta,\beta\gamma)}-\rho\right)^{b_{rho}-1} \end{aligned}$$

onde $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ são dados pelas equações 3.8 a 3.11. Observe que $f(u)$ e $g(v)$ da equação 3.3 são dadas por:

$$\begin{aligned} f(u) &= \sqrt{\frac{\rho}{12beta(p+1,q+1)beta(r+1,s+1)}}u^p(1-u)^q, \\ g(v) &= \sqrt{\frac{\rho}{12beta(p+1,q+1)beta(r+1,s+1)}}v^r(1-v)^s; \end{aligned}$$

ρ e θ se relacionam por meio da equação 3.12; os valores p,q,r,s com prioris dadas por distribuições Betas reescalonadas no intervalo (1,3).

5.3 Inferência para GFGM de Rodríguez-Lallena (2004)

Mostraremos como foi feito para realizar inferências para ρ e os expoentes p, q, r e s. Primeiro, temos que achar a função *a posteriori* que é dada por $\pi(\rho, p, q, r, s|\mathbf{u}, \mathbf{v})$ onde:

$$\begin{aligned}
\pi(\rho, p, q, r, s|\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad &\propto \left(\frac{12beta(p+1, q+1)beta(r+1, s+1)}{\max(\alpha\gamma, \beta\delta)} + \rho\right)^{a_\rho - 1} \\
&\times \left(\frac{-12beta(p+1, q+1)beta(r+1, s+1)}{\min(\alpha\delta, \beta\gamma)} - \rho\right)^{b_\rho - 1} \\
&\times (-1+p)^{a_p-1}(3-p)^{b_p-1} \\
&\times (-1+q)^{a_q-1}(3-q)^{b_q-1} \\
&\times (-1+r)^{a_r-1}(3-r)^{b_r-1} \\
&\times (-1+s)^{a_s-1}(3-s)^{b_s-1} \\
&\times \prod_{i=1}^{n}\{1+\rho[pu_i^{p-1}(1-u_i)^q - qu_i^p(1-u_i)^{q-1}][rv_i^{r-1}(1-v_i)^s - sv_i^r(1-v_i)^{s-1}]\}
\end{aligned}$$

Para o cálculo da densidade *a posteriori*, supomos que p, q, r e s são independentes.

Não tendo sido encontrada uma forma fechada para a posteriori acima, é necessário, tanto para encontrar os estimadores e intervalos de credibilidade quanto para fazer o teste FBST, recorrer aos métodos MCMC. O Algoritmo Metropolis-Hastings via passeio aleatório é dado abaixo:

1. Inicializar com $\rho^{(0)}$;
2. Gerar $\epsilon_\rho \sim N(0, 0.1)$ dentro do suporte de ρ;
3. $u \sim Unifome(0, 1)$;
4. Achar $R_\rho = \dfrac{\pi(\rho^{(i)} + \epsilon|\mathbf{u}, \mathbf{v}, p, q, r, s)}{\pi(\rho^{(i)}|\mathbf{u}, \mathbf{v}, p, q, r, s)}$
5. se $R\rho > u$ então $\rho^{(i+1)} = \rho^{(i)} + \epsilon$ e retorne a 2; caso contrário $\rho^{(i+1)} = \rho^{(i)}$ e retorne a 2;
6. Gerar $\epsilon_p \sim N(0, 2/3)$ dentro do intervalo $[1, 3]$;
7. Achar $R_p = \dfrac{\pi(p^{(i)} + \epsilon|\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\pi(p^{(i)}|\mathbf{u}, \mathbf{v})}$

Tabela 5.1: *Medidas Resumo para a porcentagem de pessoas pobres e para a porcentagem de consumidores de álcool em excesso nos estados do Estados Unidos (2007)*

Doença	Mínimo	1 Quartil	Mediana	3 Quartil	Máximo	Média	Variância
pobreza	7,10	10,60	12,10	14,30	20,60	12,67	9,71
consumo de álcool	33,40	38,20	40,59	44,35	49,45	41,13	15,90

8. se $R_p > Uniforme(0,1)$ então $p^{(i+1)} = p^{(i)} + \epsilon$ e retorne a 6; caso contrário $p^{(i+1)} = p^{(i)}$ e retorne a 6;

- Repetir esse procedimento N vezes.

os procedimentos 6, 7 e 8 são análogos para q, r, s.

Com as simulações da distribuição *a posteriori*, conseguimos calcular as estimativas aproximadas da mediana, média e moda *a posteriori*. Além disso, podemos a partir dos quantis dessa distribuição achar os intervalos de credibilidade.

A biblioteca coda do software R foi usada para achar o valor adequado para o "burn-in" que garante a convergência do algoritmo. Além disso, esta biblioteca possibilita a estimação da taxa de rejeição do algoritmo e o controle da autocorrelação.

5.4 Dados de Pobreza e Consumo excessivo de álcool

Nesta seção, ajustaremos um modelo onde serão relacionadas a porcentagem de pessoas abaixo da linha de pobreza com a porcentagem de pessoas que consumiram álcool excessivamente no ano de 2007 nos 51 estados dos Estados Unidos. Nesse modelo dado pela equação 3.7, u serão os postos da porcentagem de pessoas abaixo da linha de pobreza e v serão os postos da porcentagem de pessoa que consumiram álcool excessivamente.

Na Tabela 5.1, temos algumas medidas descritivas dos dados de porcentagens. Em seguida, obteremos resumos das posterioris.

Achamos o coeficiente de correlação de Spearman amostral igual a 0,443 entre as variáveis porcentagem de pessoas abaixo da linha de pobreza e porcentagem de pessoas que beberam excessivamente nos estados dos Estados Unidos. Vemos que a FGM tradicional não detectaria tal correlação, pois ela só capta correlações no intervalo $[-1/3, 1/3]$ então surge como opção o uso da generalização da FGM.

Vemos pela equação 3.7 que ρ está no intervalo

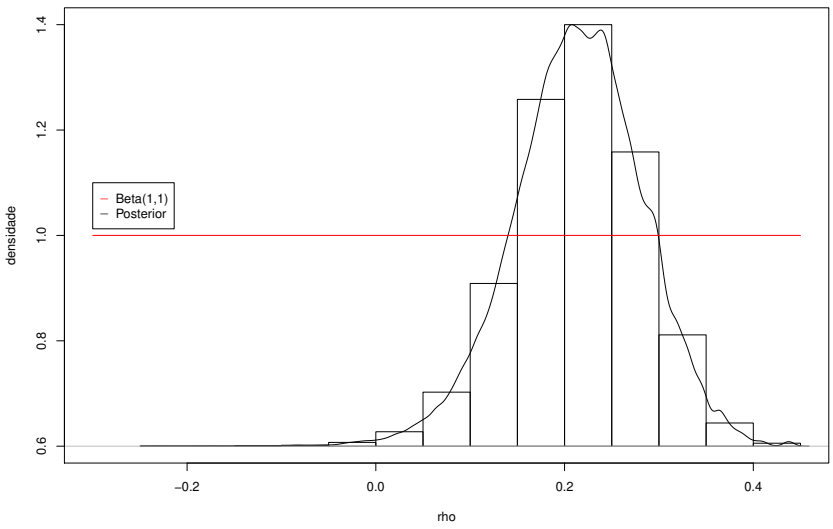
$$[-12beta(p+1,q+1)beta(r+1,s+1)/\max\{\alpha\gamma,\beta\delta\}, -12beta(p+1,q+1)beta(r+1,s+1)/\min\{\alpha\delta,\beta\gamma\}] \tag{5.6}$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dados pelas equações 3.8 a 3.11.

Tabela 5.2: *Medidas Resumo a posteriori para os parâmetros*

Parâmetro	1 Quartil	Média	Mediana	3 Quartil	Variância
ρ	0,170	0,212	0,214	0,260	0,004
p	2,355	2,550	2,602	2,802	0,100
q	1,233	1,453	1,418	1,630	0,079
r	1,508	1,813	1,787	2,105	0,179
s	1,584	1,923	1,883	2,335	0,195

Figura 5.1: *Posteriori para ρ de Spearman entre as variáveis proporção de pessoas abaixo da linha de pobreza e proporção de pessoas que consumiram álcool em excesso, e priori uniforme*



Como densidades *a priori*, escolhemos para o ρ de Spearman uma Uniforme no intervalo dado na equação 5.6 e para os expoentes p, q, r e s, usaremos uma Uniforme no intervalo $[1, 3]$. Valores maiores do que 3 implicam em correlações muito baixas, o que não é coerente pela proposta da generalização da FGM, justificando, então, a escolha do intervalo $[1, 3]$.

Para a construção dos valores das funções *a posteriori*, usamos o método de Metropolis-Hastings com um "burn-in" de tamanho 100 e para eliminar a dependência entre as observações tomamos valores de 20 em 20.

Figura 5.2: *Posteriori para p e priori uniforme*

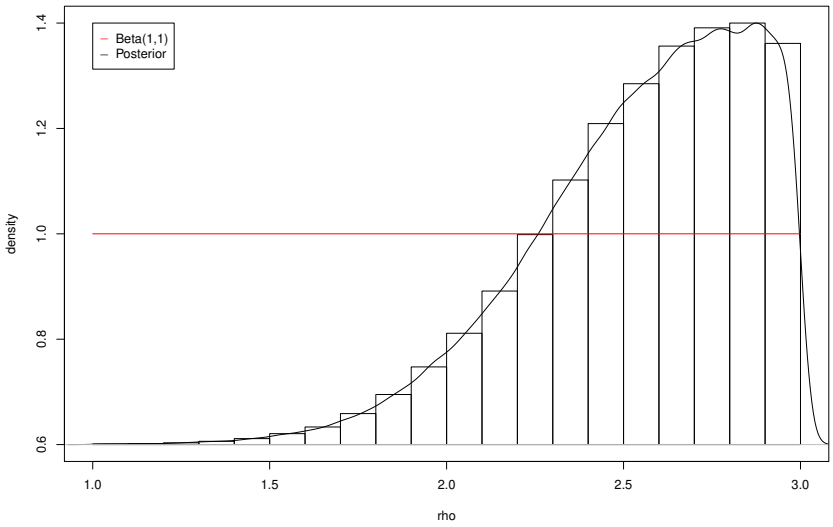


Figura 5.3: *Posteriori para q e priori uniforme*

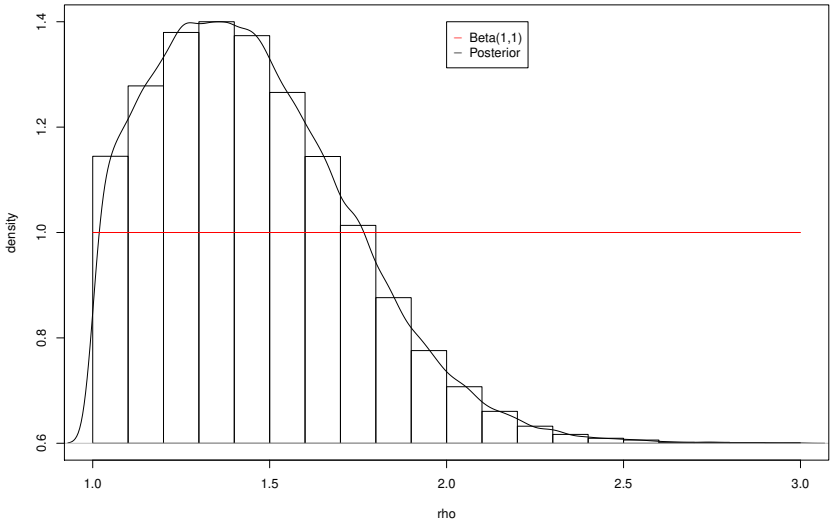


Figura 5.4: *Posteriori para r e priori uniforme*

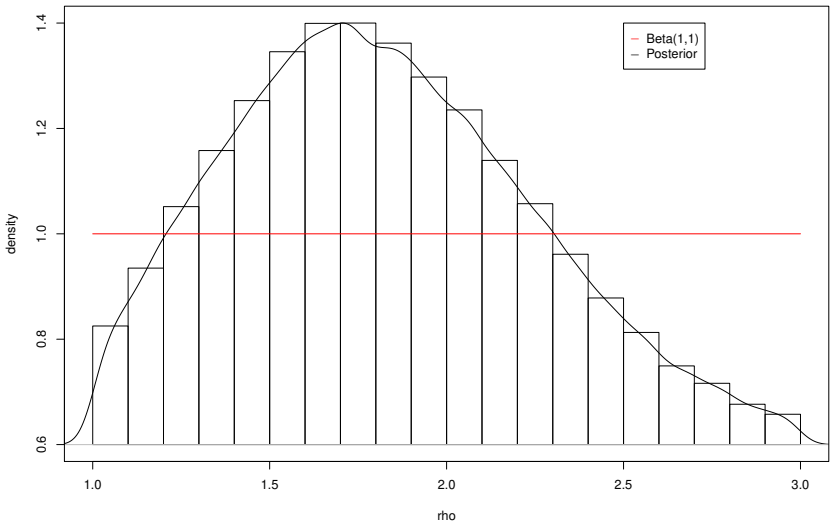


Figura 5.5: *Posteriori para s e priori uniforme*

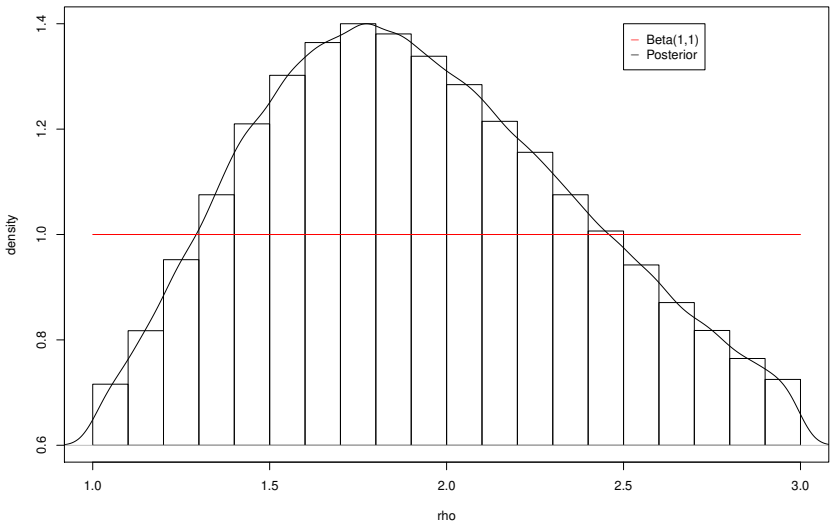


Tabela 5.3: *Testes para independência*

Teste	Evidência
FBST	0,004
Pearson	0,001
Spearman	0,001
Kendall	0,001
Hoeffding	0,001
Genest	0,001

Tabela 5.4: *Predições da distribuição a posteriori de* $U, V|\mathbf{u}, \mathbf{v}$

		Valores Observados	
Observação	Predição Bayesiana	Estimativas bayesianas	Supondo independência
Kentucky	0,538	0,506	0,506
Arkansas	0,523	0,498	0,498
New Mexico	0,942	0,942	0,942
Lousiana	0,793	0,788	0,788

Na Tabela 5.2, temos medidas descritivas para a posteriori, e as Figuras de 5.1 a 5.5 mostram os formatos da função *a posteriori* e a função *a priori* para as entidades dadas.

Um dos objetivos é testar a independência das variáveis e, para tal, utilizamos o FBST para as hipóteses:

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$

Na Tabela 5.3, calculamos o FBST para testar a independência e para efeito de comparação apresentamos alguns testes frequentistas para testar a mesma hipótese.

Fizemos, também, medidas preditivas para a cópula:

$$C(u', v'|\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Phi} C(u', v'|\theta)\pi(\phi|\mathbf{u}, \mathbf{v})d\phi \tag{5.7}$$

onde u' e v' são os valores a serem preditos, $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ os dados e o vetor $\phi = (\theta, p, q, r, s)$.

Como foi dito nos capítulos anteriores, a FGM e a GFGM tem formas simples que ajudam na obtenção dessas distribuições condicionais.

Vemos pela Tabela 5.3 que os testes frenquentistas rejeitam a hipótese de independência para níveis usuais de significância. O FBST também nos dá forte evidências contra a hipótese nula.

No caso da análise das preditivas, sejam u' e v' postos de interesse para as variáveis proporção de pessoas abaixo da linha de pobreza e proporção de pessoas que beberam em excesso nos estados dos Estados Unidos no ano de 2007, respectivamente. Desejamos estimar

Tabela 5.5: *Medidas Resumo a posteriori da amostra simulada para os expoentes*

Parâmetro	1 Quartil	Média	Mediana	3 Quartil	Variância
rho	0,170	0,212	0,214	0,260	0,004
p	2,355	2,550	2,602	2,802	0,100
q	1,233	1,453	1,418	1,630	0,079
r	1,508	1,813	1,787	2,105	0,179
s	1,584	1,923	1,883	2,335	0,195

$\mathbb{P}(U \leq u', V \leq v' | \mathbf{u}, \mathbf{v})$ onde U é o posto da primeira e V é o posto da segunda.

Foi desenvolvido o ajuste para 46 estados dos Estados Unidos e posteriormente são feitas predições para os estados Kentucky, Arkansas, New Mexico e Lousiana . A Tabela 5.4, nos dá as preditivas bayesianas usando a equação 5.7 (coluna 2), e os valores observados supondo independência entre as duas variáveis (coluna 4). Vemos que as preditivas bayesianas estão próximas dos valores esperados, isso aconteceu porque tivemos muita influência da densidade *a priori* o que deixa a cópula predita mais próxima da cópula de independência. Notamos, também, que os valores observados utilizando as medianas *a posteriori* (coluna 3) estão mais próximos da cópula de independência do que a predição o que nos leva a crer, que mesmo havendo esta influência, a predição bayesiana consegue agregar mais informação.

Calculamos o intevalo de credibilidade para ρ, que com probabilidade de 95%, está no intervalo $[0,073; 0,343]$.

Para verificar a sensibilidade, fizemos uma análise com densidades a priori informativas para ρ, p, q, r, s. A partir de uma análise gráfica, notamos que a variância dos expoentes p, q, r e s é grande e para diminuirmos esse efeito contruímos densidades *a priori* usando as densidades *a posteriori* encontradas a partir de uma simulação de 1000 observações de uma GFGM geradas com valores de p, q, r e s iguais às estimativas das médias a posteriori dadas na Tabela 5.2. Isto é, foi feito primeiro fizemos uma análise; a partir dessa análise, geramos uma amostra de tamanho 1000, fizemos uma nova análise e, usando as densidades *a posteriori* desta última, usamos suas médias para construirmos uma nova densidade *a priori*. Estas densidades são dadas pela Tabela

Os valores das posterioris da amostra simulada de tamanho 1000 são dadas na Tabela 5.5.

As prioris informativas usadas foram as seguintes:

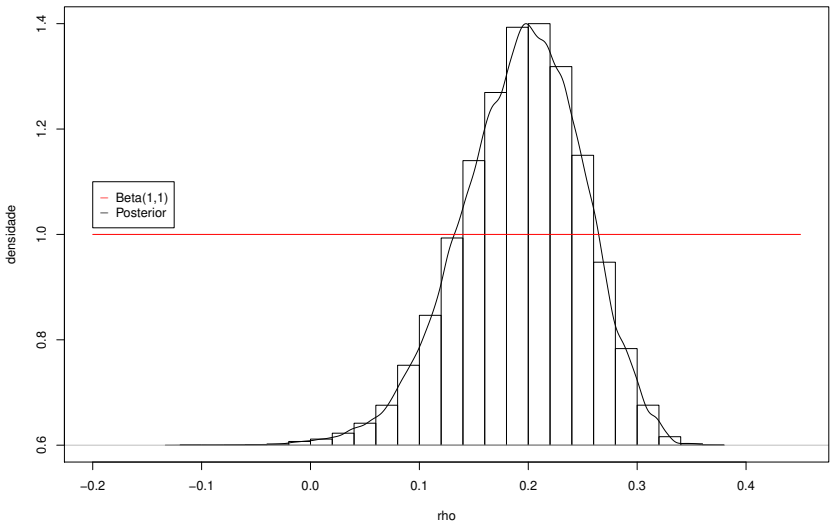
$$\pi(p) \propto (-1+p)^{15}(3-p)^3$$
$$\pi(q) \propto (-1+q)^{0}(3-q)^3$$
$$\pi(r) \propto (-1+r)^{7}(3-r)^{11}$$
$$\pi(s) \propto (-1+s)^{8}(3-r)^{10}$$

A partir das prioris dadas acima, fizemos uma nova análise e obtivemos como medidas resumo da densidade *a posteriori* os valores dados pela Tabela 5.5. Escolhemos uma densidade

Tabela 5.6: *Medidas Resumo a posteriori para densidades a priori informativas*

Parâmetro	1 Quartil	Média	Mediana	3 Quartil	Variância
ρ	0,157	0,193	0,196	0,233	0,003
p	2,517	2,618	2,634	2,739	0,026
q	1,163	1,368	1,324	1,524	0,067
r	1,676	1,817	1,813	1,955	0,041
s	1,759	1,905	1,903	2,046	0,043

Figura 5.6: *Posteriori para* ρ *e priori* $Beta(1,1)$



a priori para ρ uniforme.

Note pelas Figuras 5.7 a 5.10 que as densidades *a posteriori* são bem próximas às densidades *a priori*, como era esperado e, além disso, conseguimos uma redução da variância como esperávamos.

Fazendo, agora, um novo cenário propondo, além das quatro densidades *a priori* mostradas para os expoente, uma densidade *a priori* para ρ que está desfavorável aos dados:

$$\pi(\rho|p,q,r,s) \propto \left(\frac{12beta(p+1,q+1)beta(r+1,s+1)}{\max(\alpha\gamma,\beta\delta)} + \rho\right)^{1-1} \times \left(\frac{-12beta(p+1,q+1)beta(r+1,s+1)}{\min(\alpha\delta,\beta\gamma)} - \rho\right)^{19-1}$$

Pela Tabela 5.7 e pelas Figuras de 5.11 a 5.15, vemos que a distribuição *a posteriori* de ρ foi bastante sensível com relação *a priori* escolhida. Além disso, as densidades *a posteriori* de p, q, r e s também sofreram forte influência desta *a priori*.

A proposta dada aqui é mais rica que as propostas não-paramétricas, pois agrega-se a

Figura 5.7: *Posteriori para p e Priori Informativa*

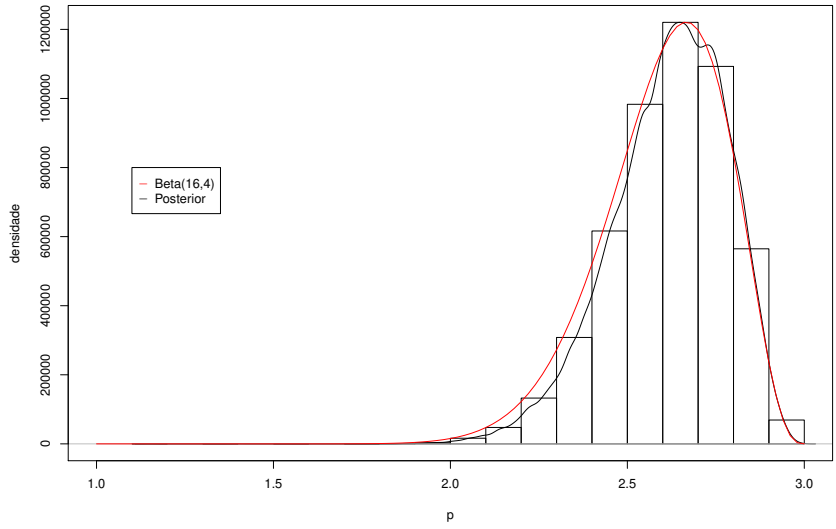


Figura 5.8: *Posteriori para q e Priori Informativa*

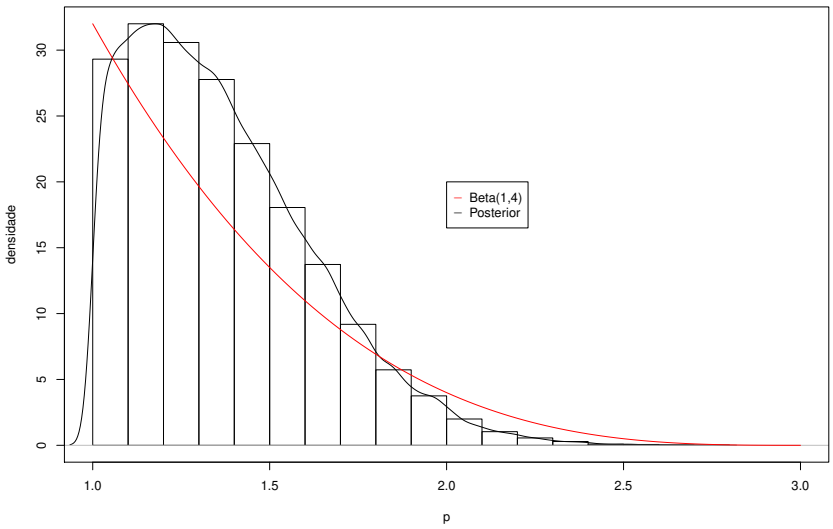


Tabela 5.7: *Medidas Resumo a posteriori para densidades a priori informativas*

Parâmetro	1 Quartil	Média	Mediana	3 Quartil	Variância
ρ	-0,149	-0,115	-0,117	-0,083	0,002
p	2,029	2,207	2,208	2,386	0,062
q	1,028	1,094	1,067	1,131	0,009
r	1,346	1,448	1,465	1,568	0,027
s	1,436	1,576	1,557	1,694	0,036

Figura 5.9: *Posteriori para r e Priori Informativa*

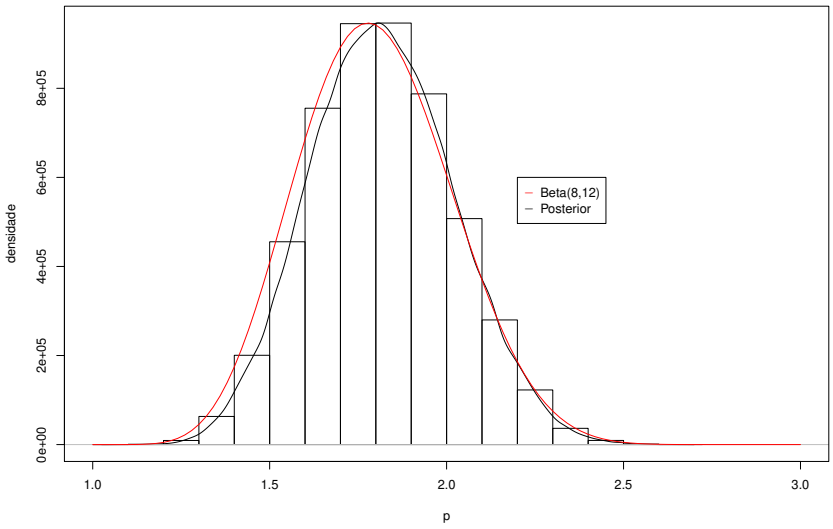


Figura 5.10: *Posteriori para s e Priori Informativa*

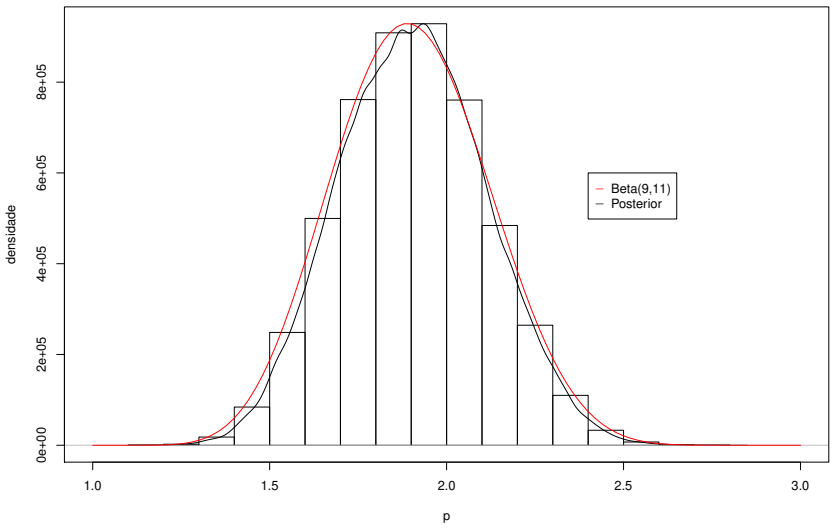


Figura 5.11: *Posteriori para ρ e priori uniforme*

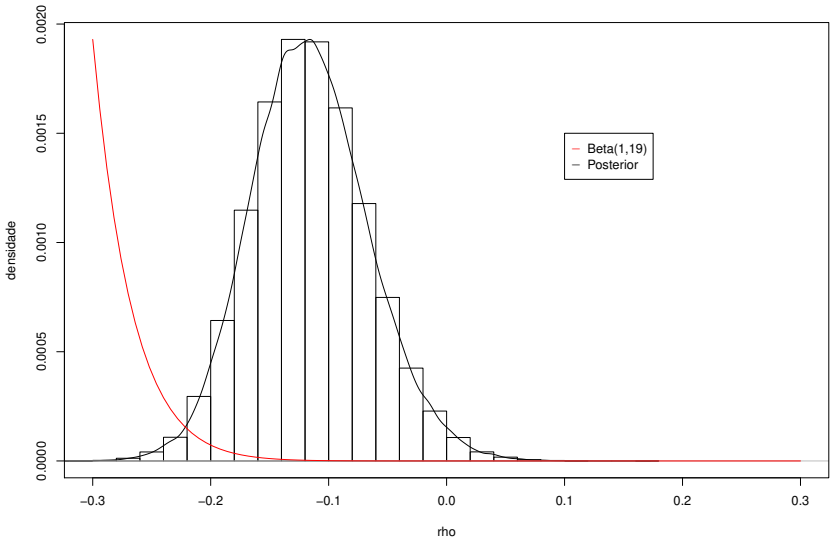


Figura 5.12: *Posteriori para p e Priori Informativa*

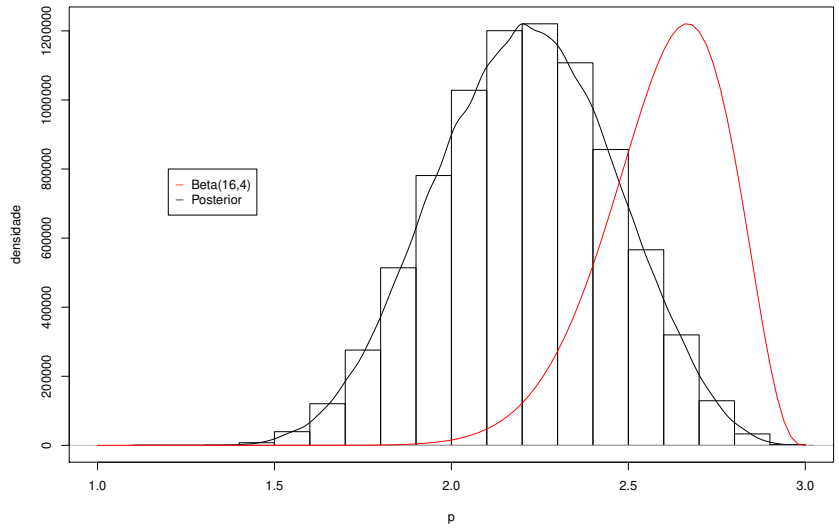


Figura 5.13: *Posteriori para q e Priori Informativa*

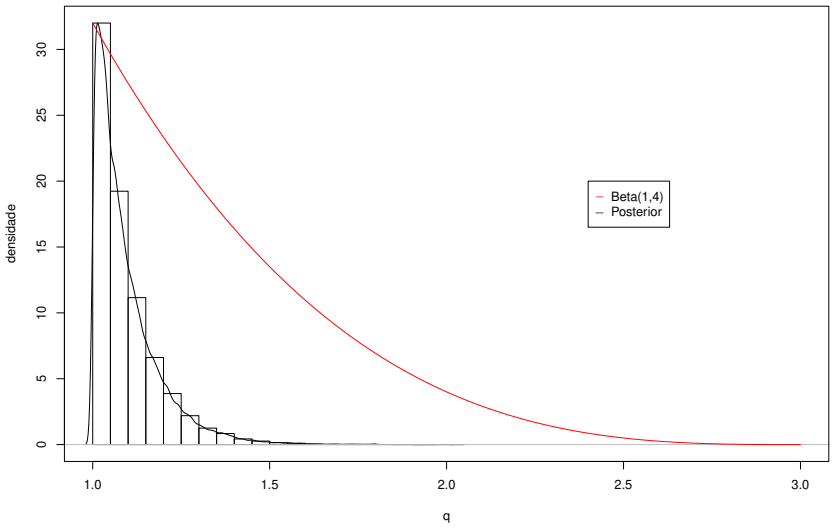


Figura 5.14: *Posteriori para r e Priori Informativa*

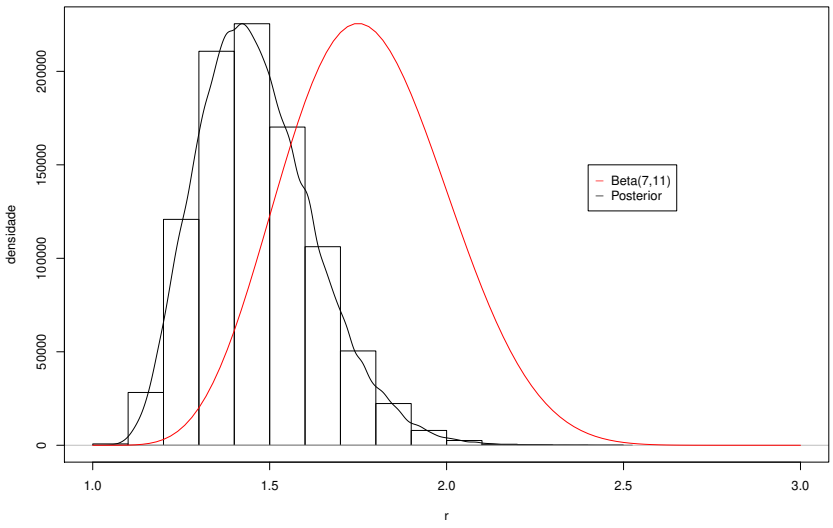


Figura 5.15: *Posteriori para s e Priori Informativa*

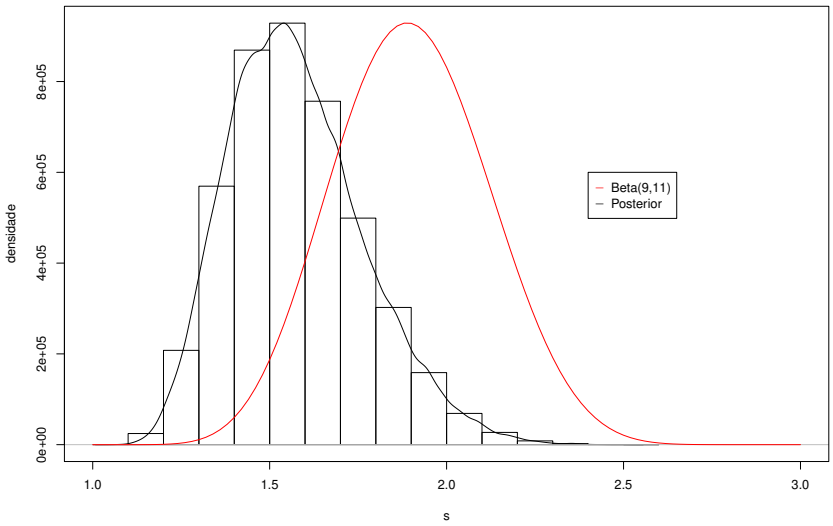


Tabela 5.8: *Medidas Resumo para o banco de dados para descrever todas as variáveis*

Doença	Mínimo	1 Quartil	Mediana	3 Quartil	Máximo	Média	Variância
gonorréia	156,20	283,30	341,60	412,90	1024,80	364,40	23404,71
pobreza	7,10	10,60	12,10	14,30	20,60	12,67	9,71
consumo de álcool	33,40	38,20	40,59	44,35	49,45	41,13	15,90

opinião do pesquisador. Além disso, podemos fazer predições o que não é possível na abordagem não-paramétrica mostradas nesta dissertação. Ademais, a abordagem frequentista, proposta por Jung et al. (2008), necessita fixar os expoentes e torna necessária a utilização de critérios de seleção de modelos como AIC e BIC o que exige um volume grande de dados, o que não ocorre na abordagem proposta aqui.

5.5 Dados de Pobreza, Consumo excessivo de álcool e Gonorreia

Adicionaremos ao banco de dados a taxa de pessoas com gonorreia; esta variável também apresenta correlação superior à 1/3 com relação às outras duas.

O coeficiente de correlação de Spearman entre porcentagem de pessoas abaixo da linha de pobreza e a taxa de pessoas com gonorréia é 0,395 e entre porcentagem de pessoas que fazem uso abusivo de álcool e taxa de gonorréia é 0,454.

Usaremos para esses dados a cópula dada pela Definição (3.2.2) com três parâmetros e assumiremos que as três variáveis verificam $\theta_4 = 0$.

Definimos ρ_1, ρ_2, ρ_3 como sendo as correlações entre gonorréia e pobreza, gonorréia e con-

sumo de álcool e pobreza e consumo de álcool, respectivamente.

Observe que $f(u), g(v)$ e $h(w)$ são dadas da forma abaixo:

$$f(u) = \sqrt{\frac{\rho_1}{12beta(o+1,p+1)beta(q+1,r+1)}}\sqrt{\frac{\rho_2}{12beta(o+1,p+1)beta(s+1,t+1)}}u^o(1-u)^p,$$

$$g(v) = \sqrt{\frac{\rho_1}{12beta(o+1,p+1)beta(q+1,r+1)}}\sqrt{\frac{\rho_3}{12beta(q+1,r+1)beta(s+1,t+1)}}v^q(1-v)^r,$$

$$h(w) = \sqrt{\frac{\rho_2}{12beta(o+1,p+1)beta(s+1,t+1)}}\sqrt{\frac{\rho_3}{12beta(q+1,r+1)beta(s+1,t+1)}}w^s(1-w)^t;$$

Por meio das equações 3.13 a 3.15, temos que os intervalos de ρ_1, ρ_2, ρ_3 são:

$\rho_1 \in$
$[-12beta(o+1,p+1)beta(q+1,r+1)/\max\{\alpha\delta,\beta\nu\}, -12beta(o+1,p+1)beta(q+1,r+1)/\min\{\alpha\nu,\beta\delta\}]$,
$\rho_2 \in$
$[-12beta(o+1,p+1)beta(s+1,t+1)/\max\{\beta\nu,\gamma\psi\}, -12beta(o,p)beta(s+1,t+1)/\min\{\beta\psi,\gamma\nu\}]$,
$\rho_3 \in$
$[-12beta(q+1,r+1)beta(s+1,t+1)/\max\{\alpha\delta,\gamma\psi\}, -12beta(q,r)beta(s+1,t+1)/\min\{\alpha\psi,\gamma\delta\}]$,

onde:

$$\begin{aligned}\alpha = & -\left(\frac{o}{o+p}\right)^{o-1}\left(1+\sqrt{\frac{p}{o(o+p-1)}}\right)^{o-1}\left(\frac{p}{o+p}\right)^{p-1} \\ & \times\left(1-\sqrt{\frac{o}{o(o+p-1)}}\right)^{p-1}\sqrt{\frac{op}{o+p-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta = & -\left(\frac{q}{q+r}\right)^{q-1}\left(1+\sqrt{\frac{r}{q(q+r-1)}}\right)^{q-1}\left(\frac{r}{q+r}\right)^{r-1} \\ & \times\left(1-\sqrt{\frac{q}{q(q+r-1)}}\right)^{r-1}\sqrt{\frac{qr}{q+r-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma = & -\left(\frac{s}{s+t}\right)^{s-1}\left(1+\sqrt{\frac{t}{s(s+t-1)}}\right)^{s-1}\left(\frac{t}{s+t}\right)^{t-1} \\ & \times\left(1-\sqrt{\frac{s}{s(s+t-1)}}\right)^{t-1}\sqrt{\frac{st}{s+t-1}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta = & \left(\frac{o}{o+p}\right)^{o-1}\left(1-\sqrt{\frac{p}{o(o+p-1)}}\right)^{o-1}\left(\frac{p}{o+p}\right)^{o-1} \\
& \times\left(1+\sqrt{\frac{o}{o(o+p-1)}}\right)^{p-1}\sqrt{\frac{op}{o+p-1}} \\
\nu = & \left(\frac{q}{q+r}\right)^{q-1}\left(1-\sqrt{\frac{r}{q(q+r-1)}}\right)^{q-1}\left(\frac{r}{q+r}\right)^{r-1} \\
& \times\left(1+\sqrt{\frac{q}{q(q+r-1)}}\right)^{r-1}\sqrt{\frac{qr}{q+r-1}} \\
\psi = & \left(\frac{s}{s+t}\right)^{s-1}\left(1-\sqrt{\frac{t}{s(s+t-1)}}\right)^{s-1}\left(\frac{t}{s+t}\right)^{s-1} \\
& \times\left(1+\sqrt{\frac{s}{s(s+t-1)}}\right)^{t-1}\sqrt{\frac{st}{s+t-1}}
\end{aligned}
$$

Assim, temos como função de veromissimilhança:

$$
\begin{aligned}
c(\mathbf{u},\mathbf{v}|\xi) & = \prod_{i=1}^{n}\{1+\frac{\rho_1}{12beta(o+1,p+1)beta(q+1,r+1)} \\
& \times[ou_i^{(o-1)}(1-u_i)^p - pu_i^o(1-u_i)^{(p-1)}] \\
& \times[qv_i^{(q-1)}(1-v_i)^r - rv_i^q(1-v_i)^{(r-1)}] \\
& \times\frac{\rho_2}{12beta(o+1,p+1)beta(s+1,t+1)} \\
& \times[ou_i^{(o-1)}(1-u_i)^p - pu_i^o(1-u_i)^{(p-1)}] \\
& \times[sw_i^{(s-1)}(1-w_i)^t - tw_i^s(1-w_i)^{(t-1)}] \\
& \times\frac{\rho_3}{12beta(q+1,r+1)beta(s+1,t+1)} \\
& \times[qv_i^{(q-1)}(1-v_i)^r - rv_i^q(1-v_i)^{(r-1)}] \\
& \times[sw_i^{(s-1)}(1-w_i)^t - tw_i^s(1-w_i)^{(t-1)}]\}
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

onde $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_n),\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_n)$, $\mathbf{w}=(w_1,\ldots,w_n)$ e $\xi=(\rho_1,\rho_2,\rho_3,o,p,q,r,s,t)$.

Usaremos densidades *a priori* Uniforme para os coeficientes de correlação e para os expoentes.

Usando a biblioteca coda do software R, conseguimos encontrar um "burn-in" de tamanho 100 e escolheremos observações de 30 em 30 a fim de deixar os dados não correlacionados.

A partir disso, encontramos como medidas das densidades *a posteriori* os valores dados pela Tabela 5.9.

Para esse modelo também não houve a necessidade de fixarmos os expoentes para se conseguir estimar as densidades de ρ_1,ρ_2 e ρ_3.

Vemos que as densidades *a posteriori* de todos os parâmetros foram fortemente influenciadas pela densidade *a priori*.

Realizamos um ajuste com 46 estados e faremos uma predição *a posteriori* para o Kentucky,

Tabela 5.9: *Medidas Resumo a posteriori para os parâmetros*

Parâmetro	1 Quartil	Média	Mediana	3 Quartil	Variância
ρ_1	0,056	0,113	0,115	0,178	0,009
ρ_2	0,103	0,158	0,167	0,226	0,010
ρ_3	0,138	0,194	0,200	0,257	0,090
o	1,835	2,182	2,218	2,276	0,232
p	1,590	1,958	1,927	2,313	0,231
q	1,700	2,101	2,133	2,535	0,275
r	1,239	1,562	1,476	1,782	0,170
s	1,392	1,751	1,693	2,054	0,210
t	1,571	2,013	2,021	2,456	0,290

Figura 5.16: *Posteriori para ρ_1, a correlação entre a taxa de pessoas com gonorréia e a porcentagem de pessoas abaixo da linha de pobreza, e priori uniforme*

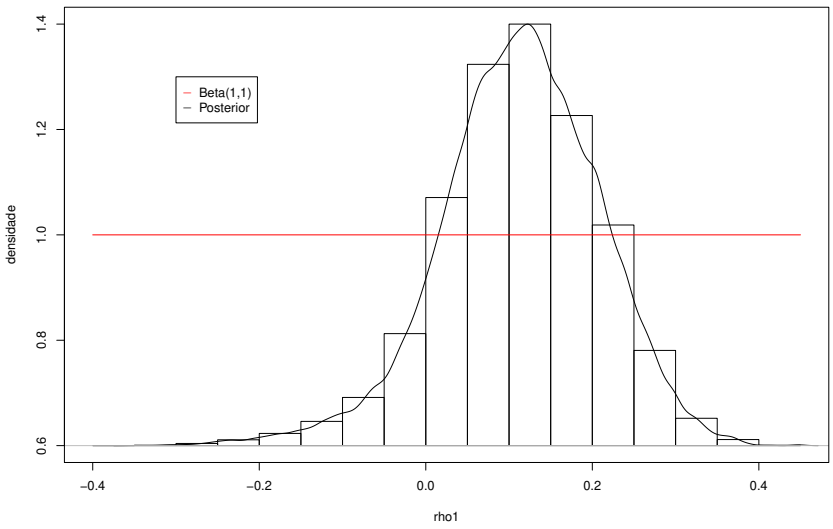


Figura 5.17: *Posteriori para ρ_2, a correlação entre a taxa de pessoas com gonorréia e a porcentagem de pessoas que usam álcool excessivamente, e priori uniforme*

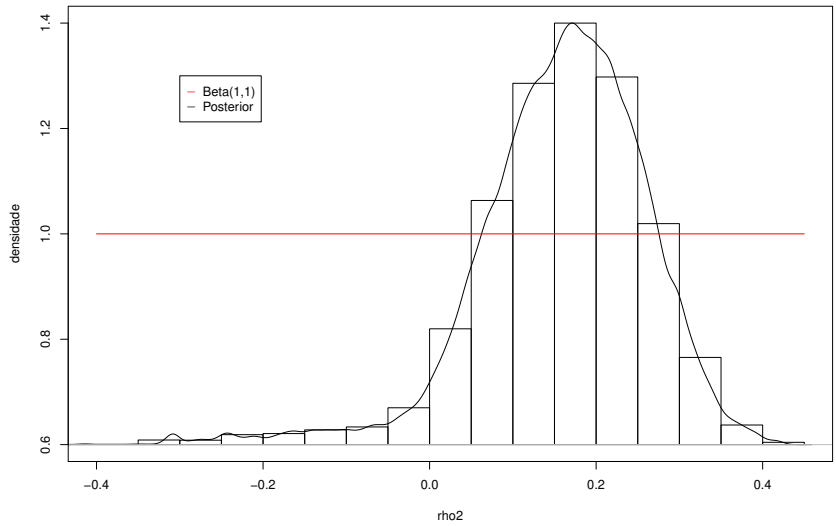


Figura 5.18: *Posteriori para ρ_3, a correlação entre a porcentagem de pessoas abaixo da linha de pobreza e a porcentagem de pessoas que usam álcool excessivamente, e priori uniforme*

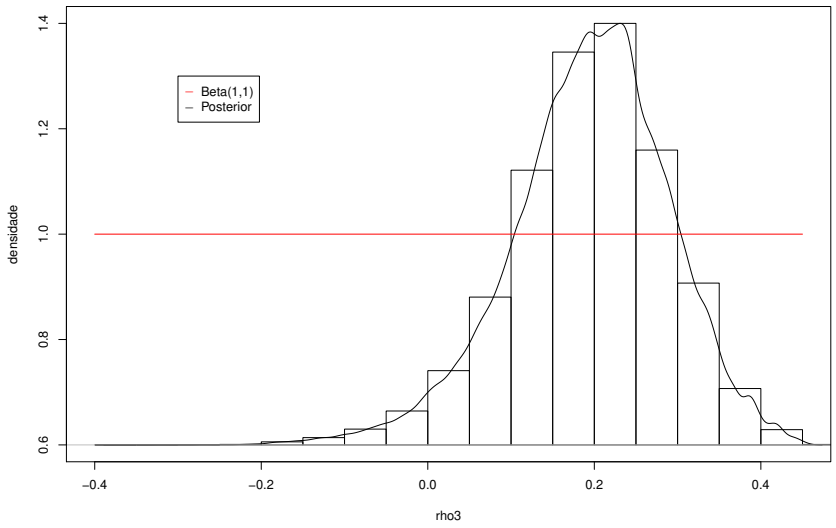


Figura 5.19: *Posteriori para o e priori uniforme*

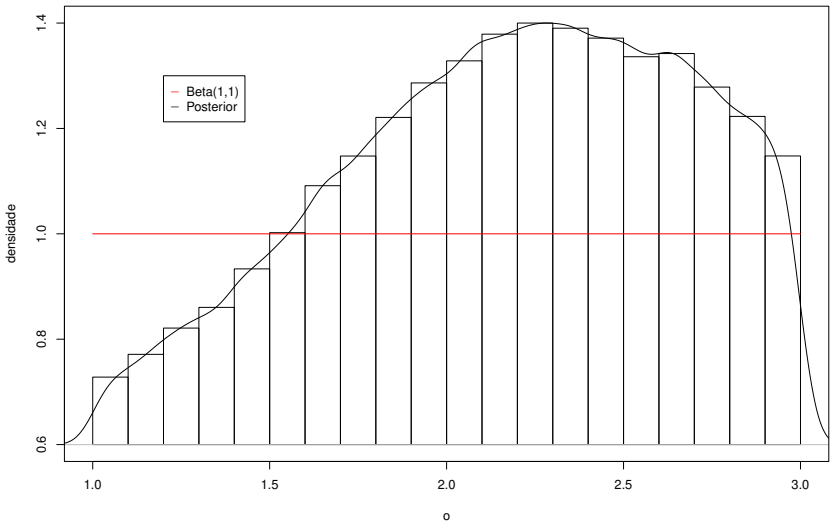


Figura 5.20: *Posteriori para p e priori uniforme*

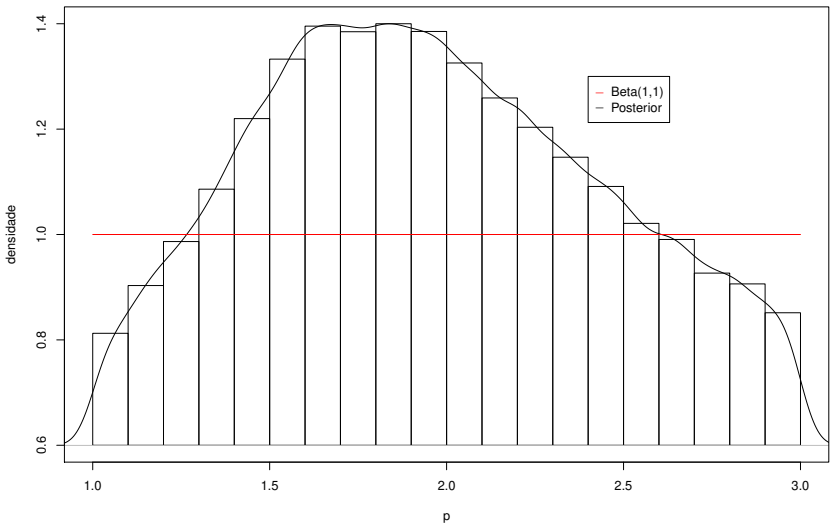


Figura 5.21: *Posteriori para q e priori uniforme*

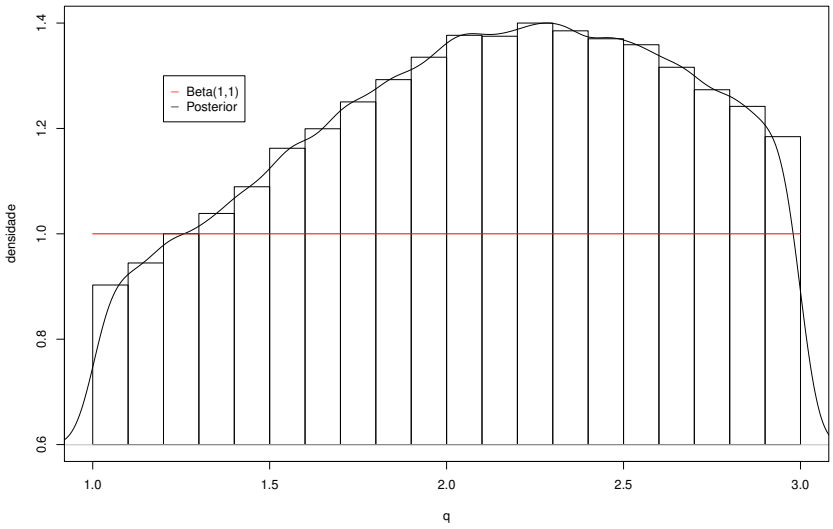


Figura 5.22: *Posteriori para r e priori uniforme*

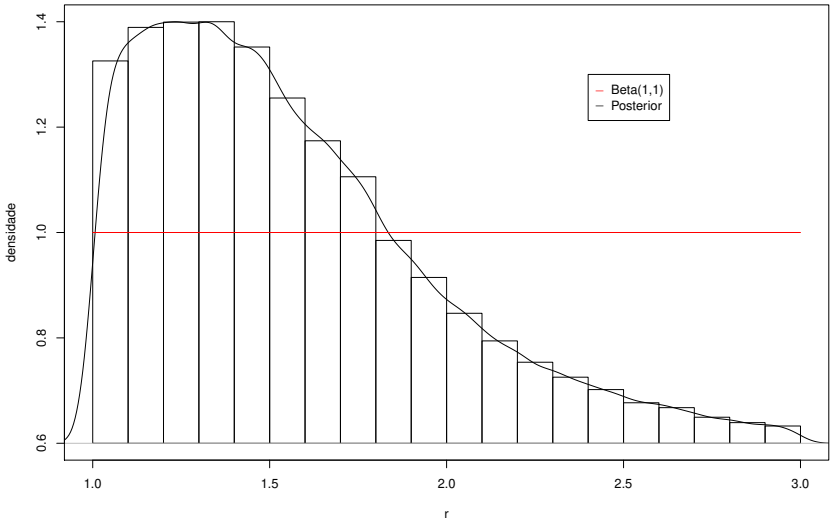


Figura 5.23: *Posteriori para s e priori uniforme*

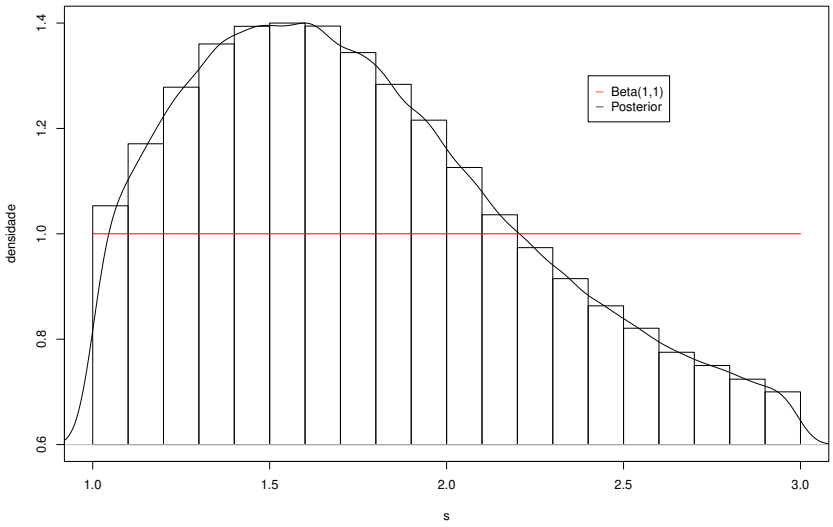


Figura 5.24: *Posteriori para t e priori uniforme*

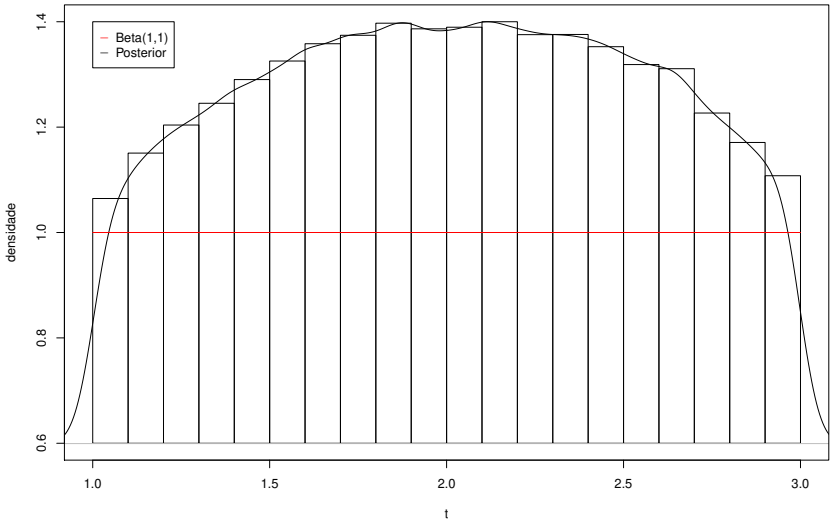


Tabela 5.10: *Predições da distribuição a posteriori de* $U, V|\mathbf{u}, \mathbf{v}$

		Valores Observados	
Observação	Predição Bayesiana	Estimativas bayesianas	Supondo independência
Kentucky	0,077	0,050	0,049
Arkansas	0,273	0.285	0,283
New Mexico	0,852	0,850	0,849
Lousiana	0,693	0,695	0,695

Tabela 5.11: *Testes para independência*

Teste	Evidência
FBST	0,048
Genest	0,001

Arkansas, New Mexico e Lousiana estados e comparamos com os valores observados colocando a mediana *a posteriori* de $\rho_1, \rho_2, \rho_3, o, p, q, r, s, t$ como estimativa para os parâmetros da cópula e supondo independência.

Notamos, pela Tabela 5.10, que os valores observados da cópula a partir do uso da mediana como estimativa bayesiana tem valores quase idênticos aos da cópula de independência, enquanto a predição bayesiana se modifica dependendo do valor a ser predito. Isso se deve, como na cópula bivariada, ao fato da grande influência da densidade *a priori* Uniforme sobre os dados.

Para detectar a independência das variáveis, fizemos novamente o teste de Genest e o FBST. Entretanto, os testes de Spearman, Kendall, Pearson e Hoeffding não podem ser feitos para 3 ou mais variáveis conjuntamente, apenas duas a duas.

Pela Tabela 5.11, temos que o teste de Genest rejeita a hipótese de independência das variáveis, enquanto o FBST, dependendo da função da perda associada a ele, não rejeitará H_0. No entanto, temos que ressaltar que o teste de Genest é assintótico e nossa amostra é apenas de tamanho 51, o que pode também ter influenciado nessa diferença, e além disso, o FBST foi fortemente influenciado pelas prioris.

Embora a predição bayesiana seja mais sensível à distribuição *a priori* do que o teste FBST, e isso pode ser visto por meio da proximidade entre a preditiva e o valor observado da cópula de independência, notamos que o valor observado da cópula utilizando as estimativas bayesianas se mostram mais próximos dos valores observados do que a predição *a posteriori*, ou seja, a predição bayesiana consegue agregar mais informação do que as outras metodogias apresentadas, em concordância com a rejeição do FBST.

Capítulo 6

Conclusão

Nessa dissertação, quisemos dar um ênfoque bayesiano para a FGM e a generalização proposta por Rodríguez-Lallena e Úbeda-Flores (2004). Para tanto, estudamos a teoria de cópulas e, além da generalização citada, estudamos algumas outras generalizações como as propostas por Huard e Kotz (1999) e a de Amblard e Girard (2009). Sendo que esta última, nos oferece uma medida de dependência caudal superior o que a FGM tradicional não consegue detectar.

Além disso, propomos métodos para simulação para a GFGM tanto bivariada como trivariada por meio do método de aceitação-rejeição, utilizando como função auxiliar a FGM para o caso bivariado e uma misturada de Betas para o caso trivariado.

Finalmente, para o caso bivariado, aplicamos a inferência bayesiana para um banco de dados que contém as proporções de pessoas abaixo da linha de pobreza e de pessoas que beberam em excesso para o ano de 2007 nos estados dos Estados Unidos e notamos, a partir dos resultados, que os testes de Kendall, Spearman, Pearson, Hoeffding e Genest rejeitam a hipótese assim como o teste FBST. Vimos que as decisões dos testes coincidem o que nos mostra que o FBST é uma ótima opção para testar independência. Ademais, notamos que a abordagem clássica, com os testes de Pearson e Genest tem limitações por só considerar o tipo de dados analisados. Já a abordagem bayesiana leva em consideração a opinião do pesquisador por meio das densidades *a priori*, além da possibilidade de se fazer predições para as variáveis como foi visto nesta dissertação.

Para dimensões maiores, utilizamos além das duas variáveis, citadas anteriormente, e a taxa de pessoas com gonorreia no ano de 2007 nos estados do Estados Unidos. Observamos que os testes de Kendall, Spearman, Pearson e Hoeffding para este banco de dados apenas realizam testes de independência com variáveis duas a duas e, somente, o teste de Genest faz o teste com as variáveis conjuntamente, entretanto, é um teste assintótico. Sob o ponto de vista bayesiano, fizemos o teste FBST que, além de realizar testes com as variáveis conjuntamente, não tem a limitação com relação ao tamanho amostral. Além disso, conseguimos fazer predições para as

cópulas estudadas o que também não é possível pelas outras metodologias apresentadas.

Capítulo 7

Algoritmos

7.1 Geração da GFGM

```
rgfgm <- function(o,p,q,r,theta1, M){
    library(copula)
    u <- runif(1)
    if(theta1 < 0){
     y <- rcopula(fgmCopula(-1),1)
     if(u < (gfgmdens(y[1], y[2],o,p,q,r,theta1)/(M*dcopula(fgmCopula(-1),y)))){x
     else x <- rgfgm(o,p,q,r,theta1,M)
    }
    if(theta1 >= 0){
  y <- rcopula(fgmCopula(1),1)
  if(u < (gfgmdens(y[1], y[2],o,p,q,r,theta1)/(M*dcopula(fgmCopula(1),y)))){x <-
     else x <- rgfgm(o,p,q,r,theta1,M)
    }
    x
}
```

7.2 Priori para a GFGM

```
priori <- function(rho, a1, b1,alfa,Beta, gama, delta, p,q,r,s){
  (((-(12*beta(p+1,q+1)*beta(r+1,s+1))/(-max(alfa*gama,Beta*delta))+rho)/2)^(a1-1
}

priori_exp <- function(p, a){
```

```
((-1+p[1])^(a[1]-1))*((3-p[1])^(a[2]-1))*((-1+p[2])^(a[3]-1))*((3-p[2])^(a[4]-1))
}
```

7.3 Geração de valores da *a posteriori*

```
m <- function(theta, alfa, Beta, gama, delta,p,q, r, s){
  y <- rnorm(1,0,.1)
  while(theta + y > (12*beta(p+1,q+1)*beta(r+1,s+1))/(-min(alfa*delta,Beta*gama))
      y <- rnorm(1,0,.1)
  }
  y
}

n <- function(a){
  y <- rnorm(1,0,2/3)
  if(a+y1 < 1 || a+y1 > 3){
    y <- n(a)
  }
  y
}
```

```
postexp <- function(N,x,a1, b1){
  rho <- matrix(0, ncol = 3, nrow = N)
  p <- matrix(1.15, ncol = 3, nrow = N)
  q <- matrix(1.15, ncol = 3, nrow = N)
  r <- matrix(1.15, ncol = 3, nrow = N)
  s <- matrix(1.15, ncol = 3, nrow = N)

  for(j in 1:3){
    for(i in 2:N){
      alfa <- -((p[i-1,j]/(p[i-1,j]+q[i-1,j]))^(p[i-1,j]-1))*((1+sqrt(q[i-1,j]/(p
      Beta <- ((p[i-1,j]/(p[i-1,j]+q[i-1,j]))^(p[i-1,j]-1))*((1-sqrt(q[i-1,j]/(p
      gama <- -((r[i-1,j]/(r[i-1,j]+s[i-1,j]))^(r[i-1,j]-1))*((1+sqrt(s[i-1,j]/(r
```

```
      delta <- ((r[i-1,j]/(r[i-1,j]+s[i-1,j]))^(r[i-1,j]-1))*((1-sqrt(s[i-1,j]/(r
      y1 <- m(rho[i-1,j],alfa, Beta, gama, delta,p[i-1,j],q[i-1,j],r[i-1,j],s[i-1
      e1 <- n(p[i-1,j])
      e2 <- n(q[i-1,j])
      e3 <- n(r[i-1,j])
      e4 <- n(s[i-1,j])

      R <- prod(gfgmdens(x[,1],x[,2],p[i-1,j],q[i-1,j],r[i-1,j],s[i-1,j],(rho[i-1
      if(runif(1) < R){
        rho[i,j] <- rho[i-1,j] + y1
      }
else rho[i,j] <- rho[i-1,j]

      R <- prod(gfgmdens(x[,1],x[,2],p[i-1,j]+e1,q[i-1,j],r[i-1,j],s[i-1,j],(rho
      if(runif(1) < R){
        p[i,j] <- p[i-1,j] + e1
      }
      else p[i,j] <- p[i-1,j]
      R <- prod(gfgmdens(x[,1],x[,2],p[i,j],q[i-1,j]+e2,r[i-1,j],s[i-1,j],(rho[i,
      if(runif(1) < R){
      q[i,j] <- q[i-1,j] + e2
      }
      else q[i,j] <- q[i-1,j]

      R <- prod(gfgmdens(x[,1],x[,2],p[i,j],q[i,j],r[i-1,j]+e3,s[i-1,j],(rho[i,j]
      if(runif(1) < R){
        r[i,j] <- r[i-1,j] + e3
      }
      else r[i,j] <- r[i-1,j]


      R <- prod(gfgmdens(x[,1],x[,2],p[i,j],q[i,j],r[i,j],s[i-1,j]+e4,(rho[i,j])/
      if(runif(1) < R){
        s[i,j] <- s[i-1,j]+e4
      }
      else s[i,j] <- s[i-1,j]
```

```
    }
  }
}
```

7.4 Geração da densidade da GFGM multivariada

```
gfgmdensmult <- function(u,v,w,o,p, q, r, s,t, theta1, theta2,theta3,theta4){
  1+theta1*eval(D(expression((x^o)*(1-x)^p), "x"),list(x=u))*eval(D(expression((x
}

M_fun <- function(u,a,theta){
gfgmdensmult(u[1],u[2],u[3],a[1],a[2],a[3],a[4],a[5],a[6],theta[1],theta[2],theta
}

M <- optim(c(.1,.1,.1),M_fun, a, theta, control = c(fnscale = -1),method = c("L-B


rgfgmmult <- function(o,p,q,r,s,t,theta1,theta2,theta3,theta4, M){
    y <- matrix(ncol = 3, nrow= 1)
    u <- runif(1)
    y[1] <- rbeta(1,o,p)
    y[3] <- rbeta(1,q,r)
    y[2] <- rbeta(1,s,t)
    if(u < gfgmdensmult(y[1], y[2],y[3],o,p,q,r,s,t ,theta1,theta2,theta3,theta4)
    else x <- rgfgmmult(o,p,q,r,s,t,theta1,theta2,theta3,theta4,M)
    x
}
```

7.5 *A prioris* para inferência multivariada

```
priori_rho <- function(rho,a,b,m,M){
(((-m+rho)/2)^(a-1))*(((M-rho)/2)^(b-1))
}

priori_exp <- function(p, a){
((-1+p[1])^(a[1]-1))*((3-p[1])^(a[2]-1))*((-1+p[2])^(a[3]-1))*((3-p[2])^(a[4]-1))
}
```

7.6 Geração para a *a posteriori*

```
m <- function(theta, c,C,p,q,r,s){
  y <- rnorm(1,0,.1)
  while(theta + y > (12*beta(p+1,q+1)*beta(r+1,s+1))*C || theta + y < (12*beta(p-
        y <- rnorm(1,0,.1)
  }
  y
}

n <- function(a){
  y <- rnorm(1,0,2/3)
  while(a+y < 1 || a+y > 5){
    y <- rnorm(1,0,2/3)
  }
  y
}


postmult <- function(N,x,a1,b1,a2,b2,a3,b3){
rho1 <- matrix(0.1, ncol = 3, nrow = N)
rho2 <- matrix(.1, ncol = 3, nrow = N)
rho3 <- matrix(.1, ncol = 3, nrow = N)
o <- matrix(1.15, ncol = 3, nrow = N)
p <- matrix(1.15, ncol = 3, nrow = N)
q <- matrix(1.15, ncol = 3, nrow = N)
r <- matrix(1.15, ncol = 3, nrow = N)
s <- matrix(1.15, ncol = 3, nrow = N)
t <- matrix(1.15, ncol = 3, nrow = N)
for(j in 1:3){
    for(i in 2:N){
          alfa <- -((o[i-1,j]/(o[i-1,j]+p[i-1,j]))^(o[i-1,j]-1))*((1+sqrt(p[i-1,
  Beta <- -((q[i-1,j]/(q[i-1,j]+r[i-1,j]))^(q[i-1,j]-1))*((1+sqrt(r[i-1,j]/(q[i-
  gama <- -((s[i-1,j]/(s[i-1,j]+t[i-1,j]))^(s[i-1,j]-1))*((1+sqrt(t[i-1,j]/(s[i-
  delta <- ((o[i-1,j]/(o[i-1,j]+p[i-1,j]))^(o[i-1,j]-1))*((1-sqrt(p[i-1,j]/(o[i-
  eta <- ((q[i-1,j]/(q[i-1,j]+r[i-1,j]))^(q[i-1,j]-1))*((1-sqrt(r[i-1,j]/(q[i-1,
  psi <- ((s[i-1,j]/(s[i-1,j]+t[i-1,j]))^(s[i-1,j]-1))*((1-sqrt(t[i-1,j]/(s[i-1,
          m1 <- -(max(alfa*Beta,delta*eta))^(-1)
```

```
  M1 <- -(min(alfa*delta,Beta*eta))^(-1)
  m2 <- -(max(alfa*gama,delta*psi))^(-1)
  M2 <- -(min(alfa*psi,delta*gama))^(-1)
  m3 <- -(max(Beta*gama,psi*eta))^(-1)
  M3 <- -(min(Beta*psi,eta*gama))^(-1)
  y1 <- m(rho1[i-1,j],m1,M1,o[i-1,j],p[i-1,j],q[i-1,j],r[i-1,j])
  y2 <- m(rho2[i-1,j],m2,M2,o[i-1,j],p[i-1,j],s[i-1,j],t[i-1,j])
  y3 <- m(rho3[i-1,j],m3,M3,q[i-1,j],r[i-1,j],s[i-1,j],t[i-1,j])
          e1 <- n(o[i-1,j])
          e2 <- n(p[i-1,j])
          e3 <- n(q[i-1,j])
          e4 <- n(r[i-1,j])
  e5 <- n(s[i-1,j])
          e6 <- n(t[i-1,j])

  R1 <- prod(gfgmdensmult(x[,1],x[,2],x[,3],o[i-1,j],p[i-1,j],q[i-1,j],r[i-1,j],s
  if(runif(1) < R1){
    rho1[i,j] <- rho1[i-1,j] + y1
  }
  else rho1[i,j] <- rho1[i-1,j]
  R2 <- prod(gfgmdensmult(x[,1],x[,2],x[,3],o[i-1,j],p[i-1,j],q[i-1,j],r[i-1,j],s
  if(runif(1) < R2){
    rho2[i,j] <- rho2[i-1,j] + y2
  }
  else rho2[i,j] <- rho2[i-1,j]
  R3 <- prod(gfgmdensmult(x[,1],x[,2],x[,3],o[i-1,j],p[i-1,j],q[i-1,j],r[i-1,j],s
  if(runif(1) < R3){
    rho3[i,j] <- rho3[i-1,j] + y3
  }
  else rho3[i,j] <- rho3[i-1,j]



R <- prod(gfgmdensmult(x[,1],x[,2],x[,3],o[i-1,j]+e1,p[i-1,j],q[i-1,j],r[i-1,j],s
      if(runif(1) < R){
        o[i,j] <- o[i-1,j] + e1
      }
      else o[i,j] <- o[i-1,j]
```

```
      R <- prod(gfgmdensmult(x[,1],x[,2],x[,3],o[i,j],p[i-1,j]+e2,q[i-1,j],r[i-1,
      if(runif(1) < R){
        p[i,j] <- p[i-1,j] + e2
      }
      else p[i,j] <- p[i-1,j]
      R <- prod(gfgmdensmult(x[,1],x[,2],x[,3],o[i,j],p[i,j],q[i-1,j]+e3,r[i-1,j]
      if(runif(1) < R){
      q[i,j] <- q[i-1,j] + e3
      }
      else q[i,j] <- q[i-1,j]

      R <- prod(gfgmdensmult(x[,1],x[,2],x[,3],o[i,j],p[i,j],q[i,j],r[i-1,j]+e4,s
      if(runif(1) < R){
r[i,j] <- r[i-1,j] + e4
      }
      else r[i,j] <- r[i-1,j]


      R <- prod(gfgmdensmult(x[,1],x[,2],x[,3],o[i,j],p[i,j],q[i,j],r[i,j],s[i-1,
      if(runif(1) < R){
s[i,j] <- s[i-1,j]+e5
      }
      else s[i,j] <- s[i-1,j]
      R <- prod(gfgmdensmult(x[,1],x[,2],x[,3],o[i,j],p[i,j],q[i,j],r[i,j],s[i,j]
      if(runif(1) < R){
t[i,j] <- t[i-1,j]+e6
      }
      else t[i,j] <- t[i-1,j]
   }
}
cbind(rho1,rho2,rho3,o,p,q,r,s,t)

}
```

7.7 Preditiva para a GFGM Multivariada

```
preditmult <- function(ulin,vlin,wlin,u,v,w,o,p,q,r,s,t,rho1,rho2,rho3){
```

```
z <- matrix(0, nrow = 50000,ncol = 3)
for(j in 1:3){
for(i in 1:50000){
alfa <- -((o[i-1,j]/(o[i-1,j]+p[i-1,j]))^(o[i-1,j]-1))*((1+sqrt(p[i-1,j]/(o[i-1,
Beta <- -((q[i-1,j]/(q[i-1,j]+r[i-1,j]))^(q[i-1,j]-1))*((1+sqrt(r[i-1,j]/(q[i-1,
gama <- -((s[i-1,j]/(s[i-1,j]+t[i-1,j]))^(s[i-1,j]-1))*((1+sqrt(t[i-1,j]/(s[i-1,
delta <- ((o[i-1,j]/(o[i-1,j]+p[i-1,j]))^(o[i-1,j]-1))*((1-sqrt(p[i-1,j]/(o[i-1,
eta <- ((q[i-1,j]/(q[i-1,j]+r[i-1,j]))^(q[i-1,j]-1))*((1-sqrt(r[i-1,j]/(q[i-1,j]*
psi <- ((s[i-1,j]/(s[i-1,j]+t[i-1,j]))^(s[i-1,j]-1))*((1-sqrt(t[i-1,j]/(s[i-1,j]*
z[i,j] <- (gfgmdistmult(c(ulin,vlin,wlin),c(o[i,j],p[i,j],q[i,j],r[i,j],s[i,j],t
prod(gfgmdensmult(u,v,w,o[i,j],p[i,j],q[i,j],r[i,j],s[i,j],t[i,j],rho1[i,j]/(12*b
beta(p[i,j]+1,o[i,j]+1)*beta(r[i,j]+1,q[i,j]+1)*beta(p[i,j]+1,o[i,j]+1)*beta(t[i,
}
}
sum(z)/150000
}
```

7.8 FBST para a GFGM Multivariada

```
fbst_mult <- function(rho1,rho2,rho3, x,a,b,o,p,q,r,s,t){

        N <- length(rho1[,1])
aux <- matrix(0,ncol = 3, nrow = N)
for(i in 1:N){
  for(j in 1:3){
alfa <- -((o[i-1,j]/(o[i-1,j]+p[i-1,j]))^(o[i-1,j]-1))*((1+sqrt(p[i-1,j]/(o[i-1,
   Beta <- -((q[i-1,j]/(q[i-1,j]+r[i-1,j]))^(q[i-1,j]-1))*((1+sqrt(r[i-1,j]/(q[i-
   gama <- -((s[i-1,j]/(s[i-1,j]+t[i-1,j]))^(s[i-1,j]-1))*((1+sqrt(t[i-1,j]/(s[i-
   delta <- ((o[i-1,j]/(o[i-1,j]+p[i-1,j]))^(o[i-1,j]-1))*((1-sqrt(p[i-1,j]/(o[i-
   eta <- ((q[i-1,j]/(q[i-1,j]+r[i-1,j]))^(q[i-1,j]-1))*((1-sqrt(r[i-1,j]/(q[i-1,
   psi <- ((s[i-1,j]/(s[i-1,j]+t[i-1,j]))^(s[i-1,j]-1))*((1-sqrt(t[i-1,j]/(s[i-1,
  m1 <- -(max(alfa*Beta,delta*eta))^(-1)
   M1 <- -(min(alfa*delta,Beta*eta))^(-1)
   m2 <- -(max(alfa*gama,delta*psi))^(-1)
   M2 <- -(min(alfa*psi,delta*gama))^(-1)
   m3 <- -(max(Beta*gama,psi*eta))^(-1)
   M3 <- -(min(Beta*psi,eta*gama))^(-1)
  if(posteriori_mult(rho1[i,j],rho2[i,j],rho3[i,j], u = x[,1],v=x[,2],x[,3],a,b,
```

```
,m1,M1,m2,M2,m3,M3) <= posteriori_mult(0,0,0, u = x[,1],v=x[,2],x[,3],a,b,o=o[i,
,m1,M1,m2,M2,m3,M3)){aux[i,j] <- 1}
  else{aux[i,j] <- 0}
}
}
1 - sum(aux)/(3*N)
}
```

Capítulo 8

Bibliografia

Referências Bibliográficas

[1] Amblard, C., Girard, S., 2009. **A new extension of bivariate FGM copulas**, *Metrika*,70, 1-17.

[2] Dolati, A., Úbeda-Flores, M., 2006. **Some New Parametric Families of Multivariate Copulas**, *International Mathematical Forum*,1, 17-25.

[3] Huard, D., Évin, G., Favre, A.C., 2006. **Bayesian Copula Selection**, *International Mathematical Forum*,1, 17-25.

[4] Huard, D., Kotz, S., 1999. **Modifications of the Fairlie-Gumbel-Morgenstern. Distributions. A tough hill climb**, *Metrika*,49, 135-145.

[5] Mari, D.D., Kotz, S., 2001. **Correlation and Dependence**, 1 edição,Imperial College Press, London.

[6] Jung, Y.S., Kim, Y.M., Kim, J., 2008. **New Approach of Directional Dependence in Exchange Markets Using Generalized FGM Copula Function**, *Communications in Statistical - Simulation and Computation*,37, Vol. 4, 772-788.

[7] Madruga, M.R., Esteves, L.G., Wechsler, S., 2001. **On the bayesianity of Pereira-Stern tests**, *Test (Madrid)*, Espanha, Vol. 10, n.2, 291-299.

[8] Nelsen, R., 2006. **A Introduction to Copula**, 2 edição, Springer, New York.

[9] Paulino, C.D., Turkman, M.A.A., Murteira, B., 2003. **Estatística Bayesiana**, 1 edição,Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

[10] Pereira, C.A.B., Stern, J.M., 1999. **Evidence Credibility: Full Bayesian Significance Test**, *Entropy*,1, 69-80.

[11] Robert, C., Casella, G., 2004. **Monte Carlo Statistical Methods**, 2 edição, Springer, London.

[12] Rodríguez-Lallen, J., Úbeda-Flores, M., 2006. **A new class of bivariate copula**, *Statistics and Probability Letters*,66, 315-325.

Apêndice A

Provas Importantes

Prova do Teorema (2.1.2) Seja (u, v) em $\mathbf{I}^2$, temos que ver se as funções W e M seguem as propriedade de (3.1.4).

1. $W(u, 0) = max(u + 0 - 1, 0) = 0 = max(0 + v - 1, 0) = W(0, v)$
   $M(u, 0) = min(u, 0) = 0 = min(0, v) = M(0, v)$

   e

   $W(u, 1) = max(u + 1 - 1, 0) = u$ e $W(1, v) = max(1 + v - 1, 0) = v$
   $M(u, 1) = min(u, 1) = u$ e $M(1, v) = min(1, v) = v$

2. Para todo u_1, u_2, v_1, v_2 em $\mathbf{I}$ tais que $u_1 \leq u_2$, $v_1 \leq v_2$, supondo $0,5 < u_1 < v_1 < u_2 < v_2$, $W(u_2, v_2) - W(u_1, v_2) - W(u_2, v_1) + W(u_1, v_1) = max(u_2 + v_2 - 1, 0) - max(u_1 + v_2 - 1, 0) - max(u_2 + v_1 - 1, 0) + max(u_1 + v_1 - 1, 0) = 0$

   Se supormos que $u_1 < v_1 < u_2 < v_2 < 0,5$ $W(u_2, v_2) - W(u_1, v_2) - W(u_2, v_1) + W(u_1, v_1) = max(u_2 + v_2 - 1, 0) - max(u_1 + v_2 - 1, 0) - max(u_2 + v_1 - 1, 0) + max(u_1 + v_1 - 1, 0) = 0$

   Se supormos que $u_1 < v_1 < 0,5$e $0,5 < u_2 < v_2$. $W(u_2, v_2) - W(u_1, v_2) - W(u_2, v_1) + W(u_1, v_1) = max(u_2 + v_2 - 1, 0) - max(u_1 + v_2 - 1, 0) - max(u_2 + v_1 - 1, 0) + max(u_1 + v_1 - 1, 0) = u_2 + v_2 - 1 - u_1 - v_2 + 1 - u_2 - v_1 + 1 = = 1 - u_1 - v_1 > 0$

   Para a cópula $M(u, v)$) o item (2) sai diretamente.

■

Prova do Lema 2.1.1 Sejam (x_1, y_1) e $(x_2, y_2) \in Dom(H)$. Usando a Desigualdade Triangular, temos

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |H(x_2, y_2) + H(x_1, y_2)| - |H(x_2, y_1) + H(x_1, y_1)|$$

Considere $x_1 \leq x_2$. Como H é uma função de distribuição conjunta, então

$$0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq F(x_2) - F(x_1).$$

A desigualdade acima é explicada pelos fatos de H ser marginalmente crescente, aflonada, $H(x, \infty) = F(x)$ e $H(\infty, y) = G(y)$. Analogamente, podemos encontrar uma desigualdade para $x_2 \leq x_1$. Portanto, segue que para qualquer valor de $x_1, x_2 \in S_1$, $|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| \leq |F(x_2) - F(x_1)|$. Similarmente, para qualquer
$y_1, y_2 \in S_2$, $|H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |G(y_2) - G(y_1)|$. Logo,

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)| \tag{A.1}$$

Desta forma, se $F(x_2) = F(x_1)$ e $G(y_2) = G(y_1)$, então $H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$ e, consequentemente, o conjunto de pares $\{(F(x), G(y)), H(x, y)\}$ permite definir uma função

$$(F(x), G(y)) \rightarrow^{C'} H(x, y)$$

sendo C' única com domínio $Alc(F) \times Alc(G)$. A prova que a função C' é uma subcópula segue diretamente das propriedades da distribuição conjunta H. Para cada $u \in Alc(F)$, existe um $x \in \bar{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = u$, então

$$C'(u, 1) = C'(F(x), G(\infty)) = H(x, \infty) = F(x) = u$$
$$C'(u, 0) = C'(F(x), G(-\infty)) = H(x, -\infty) = 0$$

Como H é bicrescente por definição, logo C' é bicrescente.

■

Prova do Teorema 2.1.5 Tomemos F_1, G_1, F_2 e G_2 funções de distribuição de $X, Y, \alpha(X)$ e $\beta(Y)$, respectivamente. Por α e β serem estritamente crescentes, temos que $F_2(x) = \mathbb{P}(\alpha(X) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x)) = F_1(\alpha^{-1}(x))$. Da mesma forma, $G_2(y) = G_1(\beta^{-1}(y))$. Então, para todo $x, y \in \bar{R}$,

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= \mathbb{P}[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\ &= \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\ &= C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\ &= C_{XY}(F_2(x), G_2(y)). \end{aligned}$$

Como X e Y são contínuas e $Img(F) = Img(G) = \mathbf{I}$, segue que $C_{\alpha(x)\beta(Y)} = C_{XY}$ em $\mathbf{I}^2$

■

Prova do Teorema 2.1.6 Sejam F_1, G_1, F_2 e G_2 as distribuições de X, Y,$\alpha(X)$ e $\beta(Y)$, respectivamente. Tomemos $u \in Alc(F)$ e $v \in Alc(G)$ tais que $u = F_2(x)$ e $v = G_2(y)$.

1.

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) &= C_{\alpha(X)\beta(Y)(F_2(x),G_2(y))} \\ &= \mathbb{P}(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x), Y > \beta^{-1}(y)) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x)) - \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)) \\ &= F_1(\alpha^{-1}(x)) + C(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\ &= F_2(x) - C(F_2(x), 1 - G_2(y)) \\ &= u - C(u, 1-v) \end{aligned}$$

2. A prova é similar a prova do item 1.

3.

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) &= C_{\alpha(X)\beta(Y)(F_2(x),G_2(y))} \\ &= \mathbb{P}(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X > \alpha^{-1}(x), Y > \beta^{-1}(y)) \\ &= \mathbb{P}(Y > \beta^{-1}(y) | X > \alpha^{-1}(x)) \mathbb{P}(X > \alpha^{-1}(x)) \\ &= (1 - \mathbb{P}(Y \leq \beta^{-1}(y) | X > \alpha^{-1}(x))) \mathbb{P}(X > \alpha^{-1}(x)) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x)) - \mathbb{P}(X > \alpha^{-1}(x) | Y \leq \beta^{-1}(y)) \mathbb{P}(Y \leq \beta^{-1}(y)) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x)) - (1 - \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x) | Y \leq \beta^{-1}(y))) \mathbb{P}(Y \leq \beta^{-1}(y)) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x)) - \mathbb{P}(Y \leq \beta^{-1}(y)) + \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y))) \\ &= 1 - F_1(\alpha^{-1}(x)) - G_1(\beta^{-1}(y)) + C(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\ &= 1 - 1 + F_2(x) - 1 + G_2(y) + C(1 - F_2(x), 1 - G_2(y)) \\ &= u + v - 1 + C(1-u, 1-v) \end{aligned}$$

■

Prova Teorema 2.2.1 Em decorrência das variáveis aleatórias serem contínuas, $\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] = 1 - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]$ e logo

$$Q = 2\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1. \tag{A.2}$$

Mas $\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = \mathbb{P}[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] + \mathbb{P}[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2]$, e essas probabilidades podem ser calculadas integrando sobre a distribuição de um dos vetores (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2). Primeiro, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] &= \mathbb{P}[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}[X_2 \leq x, Y_2 \leq y] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)) \end{aligned}$$

Então empregando a transformação $u = F(x)$ e $v = G(y)$ fornece-nos

$$\mathbb{P}[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] = \iint_{\mathbb{R}^2} C_2(u,v)dC_1(u,v)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2]dC_1(F(x),G(y)) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x),G(y))]dC_1(F(x),G(y)) \\ &= \iint_{\mathbf{I}^2} [1 - u - v + C_2(u,v)]dC_1(u,v).\end{aligned}$$

Mas por C_1 ser a função de distribuição dum par (U,V) de variáveis aletórias Uniforme(0,1), $E(U) = E(V) = 1/2$, e portanto

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u,v)dC_1(u,v), \\ &= \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u,v)dC_1(F(x),G(y)),\end{aligned}$$

e terminamos a prova substituindo o resultado acima em (A.2).

■

Prova do Teorema (2.5.2) Usando o Teorema (2.5.1) e o conceito de cópula de sobrevivência. Temos que

$H(a+x, b+y) = \bar{H}(a-x, b-y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow C(F(a+x), G(y+b)) = \hat{C}(\bar{F}(a-x), \bar{G}(b-y)), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow C(F(a+x), G(y+b)) = \hat{C}(\bar{F}(a+x), \bar{G}(b+y)), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow C(u,v) = \hat{C}(u,v), \forall (x,y) \in \mathbf{I}^2$

■

Definição A.0.1 *Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com funções de distribuição F e G, respectivamente. A parâmetro de dependência caudal superior λ_U é limite (se este existe) da probabilidade condicional de que Y seja maior do que 100t-ésimo percentil de G dado que X é maior o 100t-ésimo percentil de F vai para 1, i.e.,*

$$\lambda_U = \lim_{t \to 1^-} \mathbb{P}\big[Y > G^{(-1)}(t) | X > F^{(-1)}(t)\big]. \tag{A.3}$$

Da mesma forma, a parâmetro de dependência caudal inferior λ_L é o limite (se este existe) da probabilidade condicional de G dado que X é menor ou igual do que o 100t-ésimo percentil de G dado que X é menor ou igual que o 100t-ésimo percentil de F quando t vai para 0, i.e.

$$\lambda_L = \lim_{t \to 0^+} \mathbb{P}\big[Y \leq G^{(-1)}(t) | X \leq F^{(-1)}(t)\big]. \tag{A.4}$$

Esses parâmetros são não-paramétricos e dependem somente da cópula de X e Y.

Teorema A.0.1 *Sejam X, Y, F, G, λ_U, λ_L como definidos em (A.0.1) e seja C a cópula de X e Y, com seção diagontal δ_C. Se os limites em (A.3) e (A.4) existem, então*

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t\to 1^-} \frac{1-C(t,t)}{1-t} = 2 - \delta_C'(1^-) \tag{A.5}$$

e

$$\lambda_L = \lim_{t\to 0^+} \frac{C(t,t)}{t} = \delta_C'(0^+) \tag{A.6}$$

Prova. Faremos a prova para (A.5), a prova para (A.6) é análoga.

$$\begin{aligned}
\lambda_U &= \lim_{t\to 1^-} \mathbb{P}\big[Y > G^{(-1)}(t) | X > F^{(-1)}(t)\big] \\
&= \lim_{t\to 1^-} \mathbb{P}\big[G(Y) > t | F(X) > t\big] \\
&= \lim_{t\to 1^-} \frac{\bar{C}(t,t)}{1-t} = \lim_{t\to 1^-} \frac{1-2t-C(t,t)}{1-t} \\
&= 2 - \lim_{t\to 1^-} \frac{1-C(t,t)}{1-t} = 2 - \delta_C'(1^-)
\end{aligned}$$

■

Se λ_U está em $(0,1]$, dizemos há dependência caudal superior; se $\lambda_U = 0$, dizemos que não há dependência caudal superior.

Prova do Teorema (3.1.1) Sabemos que as condições de contorno $C(u,0) = 0$ e $C(u,1) = u$ são equivalentes à equação 2.9 do Teorema dado. Ademais, C é 2-crescente se, e somente se

$$V_C([u_1,u_2]\times[v_1,v_2]) = (u_2-u_1)\{(v_2-v_1) + [\Psi(v_2)-\Psi(v_1)](1-u_1-u_2)\} \geq 0$$

Se $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$, ou se $u_1 + u_2 = 1$, então temos $V_C([u_1,u_2]\times[v_1,v_2]) = 0$. Considere o caso $u_1 < u_2$ e $v_1 < v_2$, temos

Com isso, temos que basta provar que,

$$\begin{aligned}
&(v_2-v_1) + [\Psi(v_2)-\Psi(v_1)](1-u_1-u_2) \geq 0 \\
&\frac{\Psi(v_2)-\Psi(v_1)}{v_2-v_1} \leq \frac{1}{u_2+u_1-1}, \text{ se } u_1+u_2 > 1 \\
&\text{e} \\
&\frac{\Psi(v_2)-\Psi(v_1)}{v_2-v_1} \geq \frac{1}{u_2+u_1-1}, \text{ se } u_1+u_2 < 1
\end{aligned}$$

Com isso, a cota superior é $\inf\{1/(u_1+u_2-1) | 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1, u_1+u_2 > 1\} = 1$ e a cota inferior é $\sup\{1/(u_1+u_2-1) | 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1, u_1+u_2 > 1\} = -1$, e logo C é 2-crescente se, e somente se

$-1 \leq \dfrac{\Psi(v_2) - \Psi(v_1)}{v_2 - v_1} \leq 1$ para todo v_1, v_2 em $\mathbf{I}$ tal que $v_1 < v_2$, o que é equivalente a (2.14). Por último, a condição de continuidade absoluta é satisfeita a partir da continuidade absoluta de Ψ.

■

Prova do Teorema (3.2.1) É imediato que a função dada por (3.3) satisfaz as condições de contorno dadas no item (1) do Teorema para as cópulas se e somente se $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$. Provaremos que C será bicrescente se e somente se ambos as condições (2) e (3) são verdadeiras. Denotemos F e G as funções definidas no conjunto $T = \{(x, y) \in \mathbf{I}^2 : x < y\}$ por $F(x, y) = (f(y) - f(x))/(y - x)$ e $G(x, y) = (g(y) - g(x))/(y - x)$. Sejam (x_1, x_2), (y_1, y_2) em T. Então, C satisfaz a condição (2), se e somente se:

$$-1 \leq F(u_1, u_2)G(v_1, v_2) \tag{A.7}$$

Logo, C é bicrescente se e somente se as duas equações seguintes valem:

$$-1 \leq \sup\{F(u_1, u_2) : u_1 < u_2, f(u_1) < f(u_2)\} \inf\{G(v_1, v_2) : v_1 < v_2, g(v_1) > g(v_2)\} \tag{A.8}$$

$$-1 \leq \inf\{F(u_1, u_2) : u_1 < u_2, f(u_1) > f(u_2)\} \sup\{G(v_1, v_2) : v_1 < v_2, g(v_1) < g(v_2)\} \tag{A.9}$$

Os conjuntos em (A.8) e (A.9) são não-nulas já que $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$ e f e g são não-nulas. Por outro lado, se (A.7) for satisfeita para todo (v_1, v_2) em T, temos:

$$\begin{aligned} \sup\{-1/G(v_1, v_2) : v_1 < v_2, g(v_1) < g(v_2)\} &\leq F(u_1, u_2) \\ &\leq \inf\{-1/G(v_1, v_2) : v_1 < v_2, g(v_1) > g(v_2)\} \end{aligned}$$

para todo (u_1, u_2) em T. Limitantes similares podem ser obtidos para $G(v_1, v_2)$. Portanto, o supremo e o ínfimo em dados acima são finitos. Além disso, pelo Lema (3.2.1), temos que f e g são absolutamente contínuas, e pelo Lema (3.2.2), temos:

$$\begin{aligned} \sup\{F(u_1, u_2) : u_1 < u_2, f(u_1) < f(u_2)\} &= \sup\{F(u_1, u_2) : u_1 < u_2\} \\ &= \sup\{f'(u) : u \in A\} = \beta > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \inf\{G(v_1, v_2) : v_1 < v_2, g(v_1) > f(v_2)\} &= \inf\{G(v_1, v_2) : v_1 > v_2\} \\ &= \inf\{g'(v) : v \in A\} = \delta < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup\{F(u_1, u_2) : u_1 < u_2, f(u_1) < f(u_2)\} &= \sup\{F(u_1, u_2) : u_1 < u_2\} \\ &= \sup\{f'(u) : u \in A\} = \gamma > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup\{G(u_1,u_2) : v_1 < v_2, g(v_1) < g(v_2)\} &= \sup\{G(v_1,v_2) : v_1 < v_2\} \\ &= \sup\{g'(v) : v \in A\} = \beta > 0\end{aligned}$$

/

Por conseguinte, obtemos que, se C é cópula, então f e g são absolutamente contínuas e $\min\{\alpha\delta, \beta\gamma\} \geq -1$. Da mesma forma, podemos provar a volta, e, com isso, completamos a prova.

■