Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Tese de Doutorado

# Soluções Multidimensionais das Equações de Einstein

*Autor:* Jairo Alonso Ayala Molina
*Orientador:* Prof. Dr. Patricio Anibal Letelier Sotomayor

# Título: Soluções Multidimensionais das Equações de Einstein.

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Jairo Alonso Ayala Molina** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 27 de junho de 2011

p/ Albert

**Prof. Dr. Patricio Anibal Letelier Sotomayor**
**Orientador**

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa
2. Prof. Dr. Ricardo Antonio Mosna
3. Prof. Dr. Rafael de Freitas Leão
4. Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin
5. Prof. Dr. Maximiliano Ujevic Tonino

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Ayala Molina, Jairo Alonso
Ay14s Soluções multidimensionais das equações de Einstein/Jairo Alonso Ayala Molina-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : Patricio Anibal Letelier Sotomayor.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Einstein, Equações de - Soluções analíticas. 2.Dimensões extras. 3.Método de espalhamento inverso. I. Sotomayor, Patricio Anibal Letelier, 1943-2011. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Multidimensional solutions of the Einstein equations

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Einstein equations – Analytical solutions. 2.Extra dimensions. 3.Inverse scattering method.

Área de concentração: Física-Matemática

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Ricardo Antonio Mosna (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Rafael de Freitas Leão (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin (UFABC)
Prof. Dr. Maximiliano Ujevic Tonino (UFABC)

Data da defesa: 15/06/2011

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

**Tese de Doutorado defendida em 15 de junho de 2011 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). ALBERTO VAZQUEZ SAA**

**Prof(a). Dr(a). RICARDO ANTONIO MOSNA**

**Prof(a). Dr(a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO**

**Prof(a). Dr(a). VILSON TONIN ZANCHIN**

**Prof(a). Dr(a). MAXIMILIANO UJEVIC TONINO**

“If we knew what it was we were doing, it would not be called research, would it?.” (Einstein)

Dedico esta tese à minha esposa Angela,
ao meu filho Juan Sebastián e
aos meus pais.

# Agradecimentos

*"If you can't explain it simply, you don't understand it well enough."* (Einstein)

Agradeço, inicialmente, ao Prof. Patricio A. Letelier pela excelente orientação, pela oportunidade de começar o meu caminho no fascinante mundo da física matemática, pela amizade e por seus valiosos conselhos que visavam meu crescimento cientifico e pessoal. Foi uma grande honra ter a orientação deste eminente cientista ea amizade dessa pessoa excelente.

Agradeço à minha esposa Angela e ao meu filho Juan Sebastián pelo seu amor, seu apoio e sua companhia.

Agradeço aos professores Alfonso Jiménez e Públio Suárez da UPTC na Colômbia, que sempre acreditaram em mim e cujo apoio tem sido fundamental para o meu crescimento profissional.

Gostaria de agradecer a todos os funcionários da Facultad de Ciencias Exactas y Naturales da Universidad Nacional de Colombia (Sede Manizales) e do IMECC/Unicamp, em particular aos da Diretoria, da BIMECC e da Secretaria de Pós-graduação, pela amizade e grande apoio.

Aos professores do IMECC, e especialmente, aos professores Aurélio Ribeiro, Ricardo Mosna, Caio Negreiros e Jayme Vaz Jr pela grande ajuda e pelos conselhos, antes e durante o doutorado. Agradeço também a ajuda dos professores Marcus Aloizio Martinez de Aguiar e Carlos Ourivio Escobar, do IFGW. Um agradecimento muito especial ao professor Alberto Saa por sua grande ajuda para a conclusão desta tese.

Agradeço o enorme apoio dos meus caros amigos e colegas colombianos e brasileiros. Um agradecimento especial a Aleixo Carvalho, Miguel Tadayuki Koga e à família Hamada.

Agradeço aos meus pais Pedro e Mélida, que me ensinaram a não desistir, e meus irmãos (Eduard e Diego), que me ajudaram a prosseguir.

Finalmente, agradeço muito o apoio financeiro da CAPES.

# Resumo


Na atualidade, o estudo de objetos como lentes gravitacionais ou buracos negros em dimensões superiores, bem como a formulação de cosmologias de Kaluza-Klein, têm recebido cada vez maior atenção. Na tentativa de compreender melhor estes e outros temas semelhantes, o estudo das soluções exatas, assim como de algoritmos para sua geração, desempenha um papel muito importante.

Neste trabalho, apresentamos as equações de Einstein no vácuo para uma classe especial de espaço-tempo $D$-dimensional que admite $D-2$ campos vetoriais de Killing, assim como sua formulação matricial. Apresentamos também a extensão de dois algoritmos apresentados no artigo do professor Patricio Letelier, *On the Inverse-Scattering Method Generation of Gravitational Waves and other New Solution-Generating Algorithms*, Nuovo Cimento **97 B**, 1 (1987), para depois aplicá-los na obtenção de soluções não diagonais. Igualmente estudamos a aplicação do método de Belinski-Zakharov para a obtenção de soluções solitônicas multidimensionais a partir de nossa métrica, que admite representação diagonal por blocos.

Finalmente, aplicamos os algoritmos de geração apresentados às métricas de Kaluza-Klein para obter novas soluções das correspondentes teorias efetivas em quatro dimensões, assim como seus tensores de energia-momento. Exemplos de possíveis interpretações destes tensores na teoria clássica de campos (ClFT) e na mecânica de fluidos, são apresentados também.

# Abstract

Nowadays, the study of objects such as black holes or gravitational lenses in higher dimensions, as well as the formulation of Kaluza-Klein cosmologies, have received increasing attention. In an attempt to better understand these and other similar topics, the study of exact solutions and the algorithms for their generation, plays a very important role.

In the present work we present the Einstein equations in vacuum for a special class of $D$-dimensional space-time which admits $D - 2$ Killing vector fields, as well as its matrix formulation. We also present the extension of two algorithms studied in the Patricio Letelier's paper *On the Inverse-Scattering Method Generation of Gravitational Waves and other New Solution-Generating Algorithms*, Nuovo Cimento **97 B**, 1 (1987), to later apply them in obtaining non-diagonal solutions. We also studied the method of Belinski-Zakharov to obtain multi-dimensional soliton solutions from our metric, which admits representation diagonal by blocks.

Finally, we apply the presented generation algorithms to Kaluza-Klein metrics to obtain new solutions of the corresponding effective theories in four dimensions, as well as its energy-momentum tensors. Examples of possible interpretations of these tensors in classical field theory (ClFT) and fluid mechanics, are also presented.

# Sumário

# 1 Introdução

Durante o último século, a maior parte do trabalho feito em relatividade geral foi limitado a quatro dimensões. No entanto, a ideia da existência de dimensões adicionais e a possibilidade de considerar a relatividade como uma teoria multidimensional não são novas. Os primeiros trabalhos nesta área, feitos por Nordström (1914) e Kaluza (1921), tiveram a finalidade de unificar a gravidade com o eletromagnetismo, as únicas interações conhecidas nessa época [1]. Kaluza assumiu que o nosso mundo tem cinco dimensões. Considerando o potencial eletromagnético como componentes do tensor métrico ao longo da quinta dimensão, as equações de Einstein-Maxwell se obtêm a partir das equações de Einstein no vácuo em cinco dimensões [2, 3].

A solução dada por Kaluza ao problema evidente de não conseguir detectar a dimensão adicional foi considerar que todas as derivadas em relação a essa dimensão sejam canceladas. Esta condição é chamada de *Condição de cilindro de Kaluza*. Klein mostrou em 1926 que essa condição surgiria naturalmente se a quinta dimensão for compactificada, ou seja, se esta tem topologia circular e uma pequena escala (da ordem do comprimento de Planck)[4]. Foram posteriormente consideradas as seis dimensões para permitir a incorporação de fermiones na teoria, ver por exemplo [5].

Alguns anos mais tarde, a teoria de Kaluza-Klein foi estendida para mais dimensões para estudar a possibilidade de unificar a gravidade com as teorias das interações forte e fraca, assim como com outras interações gauge [6]. Neste campo, diferentes soluções com diferentes simetrias, dimensões e modelos têm sido encontrados [7]. Por exemplo, soluções às equações de campo no vácuo em 5 dimensões com simetria esférica $3d$ foram consideradas. Estas têm sido relacionadas a monopolos magnéticos, buracos negros e sólitons [8]. A teoria de Kaluza-Klein pode ser considerada como a origem das modernas teorias de campo unificadas, que são formuladas consistentemente apenas em um espaço-tempo de mais de quatro dimensões, tais como a teoria de supercordas 10-dimensional e a supergravidade com 11 dimensões [9].

Dentre as principais desvantagens da teoria de Kaluza-Klein, podemos mencionar que esta formulação não é covariante em relação às transformações da coordenada dimensional adicional, e que como os momentos de todos os estados da partícula na direção associada com essa coordenada são então empurrados para as energias de Planck, eles estão muito além do alcance dos experimentos no presente e no futuro próximo.

Em anos recentes, o trabalho em buracos negros $n$-dimensionais (BN), cosmologias inflacionárias de Kaluza-Klein e BN sobre branas, entre outras, têm recebido uma crescente atenção [10, 11, 12]. Existem várias motivações para esta linha de pesquisa: por exemplo, nós sabemos que os buracos negros em quatro dimensões têm características notáveis, tais como unicidade, topologia esférica e estabilidade dinâmica. No estudo da estrutura de objetos negros em gravidade em dimensões superiores, é interesante determinar quais destas propriedades são universais e quais mostram dependência da dimensão [13, 14].

Outra das ideias que tem impulsionado o interese em teorias em dimensões superiores nas últimas duas décadas é que o nosso universo físico em quatro dimensões pode estar mergulhado em um espaço-tempo de dimensão superior. Apesar de que ideias semelhantes foram propostas nos anos 80, estas só foram consideradas de interese após o surgimento da teoria de cordas [4] e da teoria de branas [15].

O objetivo deste trabalho é a procura de soluções das equações de Einstein no vácuo em $D$ dimensões cujas métricas são não-diagonais e têm $D-2$ campos vetoriais de Killing. Em particular, consideraremos métricas que admitem representação diagonal por blocos. Estaremos especialmente interessados no caso em que estes blocos são representados por matrizes não-diagonais de tamanho $2 \times 2$. Esta métrica é uma extensão natural da métrica 4-dimensional de Lewis-Papapetrou [16, 17] e é suficientemente geral para incluir a muitos dos espaço-tempos já estudados e uma grande quantidade de alguns novos.

No Capítulo 2, nós apresentamos as equações de Einstein no vácuo para uma classe especial de espaço-tempos $D$-dimensionais com $D - 2$ vetores de Killing. Estudamos também uma versão estendida das formulações matriciais para as equações de Einstein apresentadas em [18] e a extensão de dois novos algoritmos simples de generação de soluções estudados neste mesmo paper. No final do capítulo, utilizaremos estes algoritmos para gerar novas soluções não-diagonais a partir de soluções tanto diagonais como não-diagonais.

O método de espalhamento inverso (ou ISM, pelas suas iniciais em inglês), foi desenvolvido na década dos 60 com a finalidade de resolver de forma sistemática a equação de Korteweg de Vries (KdV), a equação de Schrödinger não linear e a equação de Sine-Gordon [19]. Em dois famosos artigos publicados em 1978 e 1979, Belinski e Zakharov adaptaram o ISM para resolver as equações de Einstein no vácuo quando o espaço-tempo admite dois campos vetoriais comutativos de Killing. Eles generalizaram uma transformada desenvolvida por Zakharov e Mikhailov, para o qual precisaram substituir os pólos estacionários, utilizados nesta, por trajetórias de pólos [19]. No Capítulo 3 apresentamos um breve resumo das principais ideias do método de Belinski-Zakharov, dadas em [20].

No Capítulo 4, utilizamos o método de Belinski-Zakharov para obter soluções 1-sóliton e 2-sóliton a partir de soluções semente da forma dada no capítulo 2, ou seja, para métricas $D$-dimensionais que admitem representação diagonal por blocos de tamanho $2 \times 2$. Consideraremos dois tipos básicos de eles, o bloco Einstein-Rosen-Weyl (ERW) e o bloco van Stockum (vS). Estudaremos inicialmente espaço-tempos 6 dimensionais, os quais por definição têm dois blocos. Estes dois podem ser tipo ERW (semente ERW) ou tipo vS (semente vS), ou bem podemos utilizar un bloco ERW e outro vS (semente ERS). Na seção final, apresentamos uma generalização para o caso $D = 2N + 2$, onde $N$ é o número de blocos.

No Capítulo 5 aplicamos os resultados dos Capítulos 2 e 4 para obter soluções solitônicas e não solitônicas a partir do ansatz de Kaluza-Klein, e as correspondentes soluções da teoria efetiva de baixa energia em quatro dimensões. Achamos também expressões específicas para os campos escalares resultantes dessa teoria quando partimos da métrica ERW en $2N + 2$ dimensões, bem como exemplos de possíveis interpretações destes resultados na teoria clássica de campos (ClFT) e na mecânica de fluidos. Finalmente, no Capítulo 6 apresentaremos as conclusões.

# 2

# Soluções não Solitônicas

## 2.1 Equações de Einstein $D$-dimensionais

As equações de Einstein descrevem como a curvatura de um espaço-tempo, descrito pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$, é afetada pela distribuição de matéria, descrita pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ determina um elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{2.1}$$

onde $dx^\mu$ representa um deslocamento infinitesimal com relação a coordenada $x^\mu$. Utilizamos a convenção de soma de Einstein para índices repetidos e consideramos que $\mu, \nu = 1, \ldots, D$, em que $D \geq 4$ é a dimensão do espaço-tempo. No sistema de unidades geométricas, a velocidade da luz e a constante universal da gravitação de Newton são iguais à unidade, ou seja, $c = G = 1$. Utilizando este sistema, podemos escrever as equações de Einstein na forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

em que $G_{\mu\nu}$ é o *tensor de Einstein*

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \tag{2.3}$$

O *tensor de Ricci* $R_{\mu\nu}$ e o *escalar de Ricci* $R$ são dados por

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \\
R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

O *tensor de Riemann* $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ é dado por

$$
R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}, \tag{2.5}
$$

em que $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ são os *símbolos de Christoffel*

$$
\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}), \tag{2.6}
$$

e $\partial_\mu$ denota derivação parcial em relação a $x^\mu$. Quando $T_{\mu\nu} = 0$, obtemos as chamadas equações de Einstein no vácuo. Estas equações podem ser escritas na forma

$$
R_{\mu\nu} = 0. \tag{2.7}
$$

Consideremos a métrica

$$
ds^2 = e^{\Sigma}(d\rho^2 - \epsilon d\tau^2) + h \sum_{i=1}^{N} \Big[ \eta_i f_i (d\varphi_i + w_i d\xi_i)^2 + \frac{1}{f_i} d\xi_i^2 \Big], \tag{2.8}
$$

onde as funções $\Sigma$, $h$ $f_i$,$w_i$ dependem das coordenadas $\tau$ e $\rho$ só; $\varphi_i$, $\xi_i$ são coordenadas, $\epsilon = \pm 1$, $\eta_i = \pm 1$ e $i = 1, \cdots, N$, salvo disposição em contrário. Esta métrica tem dimensão $D = 2N + 2$ e é uma generalização $D$-dimensional da métrica de Lewis-Papapetrou [16, 17]. A métrica (2.8) tem pelo menos $D - 2$ vetores de Killing, $\partial_{\varphi_i}$ e $\partial_{\xi_i}$ e em quatro dimensões contém, como casos especiais, todas as métricas com simetria axial, bem como as ondas gravitacionais cilíndricas com dois graus de polarização [21].

A partir das equações de Einstein no vácuo para a métrica (2.8), achamos que as funções $f_i, w_i$ e $h$ satisfazem as equações diferenciais,

$$
\Big[ u \Big( \frac{f_{i,\tau}}{f_i} - \eta_i f_i^2 w_i w_{i,\tau} \Big) \Big]_{,\tau} - \epsilon \Big[ u \Big( \frac{f_{i,\tau}}{f_i} - \eta_i f_i^2 w_i w_{i,\rho} \Big) \Big]_{,\rho} = 0, \tag{2.9}
$$

$$
(u f_i^2 w_{i,\tau})_{,\tau} - \epsilon (u f_i^2 w_{i,\rho})_{,\rho} = 0, \tag{2.10}
$$

$$u_{,\tau\tau} - \epsilon u_{,\rho\rho} = 0, \tag{2.11}$$

em que

$$u = h^N. \tag{2.12}$$

Também achamos que a função $\Sigma$ pode ser escrita como

$$\Sigma = \ln\Phi + \frac{1-2N}{2N}\ln u + \int \frac{u^2}{2\Phi}\Big\{\big[(\ln u)_{,\tau}d\tau - (\ln u)_{,\rho}d\rho\big]\Lambda + 2\big[(\ln u)_{,\tau}d\rho - \epsilon(\ln u)_{,\rho}d\tau\big]\Upsilon\Big\}, \tag{2.13}$$

em que

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{N}\big[f_i^{-2}(f_{i,\tau}^2 + \epsilon f_{i,\rho}^2) + \eta_i f_i^2(w_{i,\tau}^2 + \epsilon w_{i,\rho}^2)\big], \tag{2.14}$$

$$\Upsilon = \sum_{i=1}^{N}\big(f_i^{-2}f_{i,\tau}f_{i,\rho} + \eta_i f_i^2 w_{i,\tau}w_{i,\rho}\big), \tag{2.15}$$

e

$$\Phi = u_{,\tau}^2 - \epsilon u_{,\rho}^2. \tag{2.16}$$

As equações (2.9) ,(2.10), (2.11) são as condições de integrabilidade para a existência de $\Sigma$.

As equações (2.9) e (2.10) podem ser expressas na forma mais atraente,

$$(u\gamma_{,\tau}\gamma^{-1})_{,\tau} - \epsilon(u\gamma_{,\rho}\gamma^{-1})_{,\rho} = 0 \tag{2.17}$$

onde $\gamma$ é a $2N \times 2N$ matriz diagonal por blocos,

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_N \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

com

$$\gamma_i = \eta_i h \begin{pmatrix} f_i & f_i w_i \\ f_i w_i & f_i w_i^2 + \eta_i f_i^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Duas propriedades importantes da matriz $\gamma$ são

$$\gamma = \gamma^T, \qquad \det\gamma = u^2\prod_{i=1}^{N}\eta_i. \tag{2.20}$$

A equação (2.13) pode ser escrita em termos da matriz $\gamma$ como,

$$\begin{aligned}\Sigma[\gamma] = \ln\frac{\Phi}{u} + \frac{1}{4}\int\frac{1}{\Phi}\Big\{&\Big[(\ln u)_{,\tau}d\tau - (\ln u)_{,\rho}d\rho\Big]\,\mathrm{tr}\big[U^2(\gamma) + \epsilon V^2(\gamma)\big] \\ &+ 2\Big[\epsilon(\ln u)_{,\tau}d\rho - (\ln u)_{,\rho}d\tau\Big]\,\mathrm{tr}\big[U(\gamma)V(\gamma)\big]\Big\},\end{aligned} \tag{2.21}$$

em que

$$U(\gamma) = u\gamma_{,\tau}\gamma^{-1}, \qquad V(\gamma) = \epsilon u\gamma_{,\rho}\gamma^{-1}. \tag{2.22}$$

Como a equação (2.17) em termos de $U$ e $V$ é

$$U(\gamma)_{,\tau} - V(\gamma)_{,\rho} = 0. \tag{2.23}$$

podemos considerar uma matriz potencial, ou seja, uma função matricial $\Omega(\gamma)$ tal que

$$\Omega(\gamma)_{,\rho} = U(\gamma), \qquad \Omega(\gamma)_{,\tau} = V(\gamma). \tag{2.24}$$

A condição de existência para $\Omega(\gamma)$ é a equação

$$\Omega_{,\tau\tau} + \frac{1}{u}[\Omega_{,\tau},\Omega_{,\rho}] - \epsilon\Omega_{,\rho\rho} - \frac{u_{,\tau}}{u}\Omega_{,\tau} + \epsilon\frac{u_{,\rho}}{u}\Omega_{,\rho} = 0. \tag{2.25}$$

Esta equação surge da condição de integrabilidade $\gamma_{,\tau\rho} = \gamma_{,\rho\tau}$, fazendo uso das equações (2.22), (2.23) e (2.24). Em princípio, se resolvemos (2.25) e integramos (2.24), então podemos obter $\gamma$, a solução das equações de Einstein.

Os potenciais "twist" sugeridos pelas equações (2.10) são dados por

$$\beta_i = \int \eta_i u f_i^2(w_{i,\rho}d\tau + \epsilon w_{i,\tau}d\rho). \tag{2.26}$$

Estes potenciais são os análogos aos introduzidos na formulação de Ernst das equações de Einstein com simetria axial [18, 22]. As funções métricas $w_i$, podem ser escritas em termos dos potenciais $\beta_i$ como,

$$w_i = \int\frac{\eta_i}{uf_i^2}(\epsilon\beta_{i,\rho}d\tau + \beta_{i,\tau}d\rho). \tag{2.27}$$

As equações (2.9),(2.10) e (2.13) agora assumem a forma

$$\left(u\frac{f_{i,\tau}}{f_i} + \eta_i\epsilon\frac{\beta\beta_{i,\tau}}{uf_i^2}\right)_{,\tau} - \epsilon\left(u\frac{f_{i,\rho}}{f_i} + \eta_i\epsilon\frac{\beta\beta_{i,\rho}}{uf_i^2}\right)_{,\rho} = 0, \tag{2.28}$$

$$\left(\frac{\beta_{i,\tau}}{uf_i^2}\right)_{,\tau} - \epsilon\left(\frac{\beta_{i,\rho}}{uf_i^2}\right)_{,\rho} = 0, \tag{2.29}$$

$$\Sigma[\gamma] = \ln\Phi + \frac{1-2N}{2N}\ln u + \int \frac{u^2}{2\Phi}\left\{\left[\frac{u_{,\tau}}{u}d\tau - \frac{u_{,\rho}}{u}d\rho\right]\Lambda_\beta + 2\left[\frac{u_{,\tau}}{u}d\rho - \epsilon\frac{u_{,\rho}}{u}d\tau\right]\Upsilon_\beta\right\}, \tag{2.30}$$

em que

$$\Lambda_\beta = \sum_{i=1}^{N}\left[f_i^{-2}(f_{i,\tau}^2 + \epsilon f_{i,\rho}^2) + \frac{\eta_i}{u^2 f_i^2}(\beta_{i,\rho}^2 + \epsilon\beta_{i,\tau}^2)\right] \tag{2.31}$$

e

$$\Upsilon_\beta = \sum_{i=1}^{N}\left(f_i^{-2}f_{i,\tau}f_{i,\rho} + \frac{\epsilon\eta_i}{u^2 f_i^2}\beta_{i,\tau}\beta_{i,\rho}\right). \tag{2.32}$$

Também é possível escrever as equações (2.28) e (2.29) em forma matricial,

$$(u\sigma_{,\tau}\sigma^{-1})_{,\tau} - \epsilon(u\sigma_{,\rho}\sigma^{-1})_{,\rho} = 0, \tag{2.33}$$

onde $\sigma$ é a matriz diagonal por blocos

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_N \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

com

$$\sigma_i = \frac{\eta_i}{f_i}\begin{pmatrix} 1 & \beta_i \\ \beta_i & \beta_i^2 + \epsilon\eta_i u^2 f_i^2 \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Os termos $\Sigma[\gamma]$ e $\Sigma[\sigma]$ estão dados pela equação,

$$\Sigma[\gamma] = \ln\left[u^{(\frac{1}{2N}-N)}\prod_{i=1}^{N}(\sigma_i)_{11}\right] + \Sigma[\sigma], \tag{2.36}$$

onde $\Sigma[\sigma]$ é obtida a partir de (2.21) fazendo $\gamma \to \sigma$.

## 2.2 Algoritmos simples de geração de novas soluções

Nesta seção apresentamos uma extensão, para o caso $2N+2$-dimensional, de dois algoritmos de generação de soluções estudados por Letelier em [18].

Seja $\gamma = \text{diag}[\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ uma solução da equação (2.17). Se considerarmos a matriz diagonal por blocos $A = \text{diag}[A_1, \ldots, A_n]$, onde

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

com $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ e $a_i d_i - b_i c_i = 1$, nós temos que a matriz $\widehat{\gamma}$ dada por

$$\widehat{\gamma} = A \cdot \gamma \cdot A^T, \tag{2.38}$$

é uma nova solução de (2.17).

A métrica (2.8) pode ser escrita em termos de $\gamma$ como

$$ds^2 = e^{\Sigma}(d\rho^2 - \epsilon d\tau^2) + d\mathbf{x}^T \cdot \gamma \cdot d\mathbf{x}, \tag{2.39}$$

onde

$$\mathbf{x}^T = [\varphi_1, \xi_1, \ldots, \varphi_N, \xi_N]. \tag{2.40}$$

Além disso, com a transformação

$$d\mathbf{x} \to d\widehat{\mathbf{x}}^T = (A^T)^{-1} \cdot d\mathbf{x} \tag{2.41}$$

obtemos

$$ds^2 = (\exp\left[\Sigma(\tau, \rho)\right])(d\rho^2 - \epsilon d\tau^2) + d\widehat{\mathbf{x}}^T \cdot \widehat{\gamma} \cdot d\widehat{\mathbf{x}}. \tag{2.42}$$

Um cálculo direto mostra que

$$\Sigma[\gamma] = \Sigma[\widehat{\gamma}]. \tag{2.43}$$

Uma vez que $A$ é uma matriz constante, temos

$$\widehat{\mathbf{x}}^T = (A^T)^{-1} \cdot \mathbf{x}. \tag{2.44}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_i \\ \widehat{\xi}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_i \varphi_i - c_i \xi_i \\ -b_i \varphi_i + a_i \xi_i \end{pmatrix}. \tag{2.45}$$

Para garantir que realmente temos novas soluções, precisamos fazer algumas restrições no rango de nossas coordenadas $\widehat{\varphi}_i$, $\widehat{\xi}_i$, $\varphi_i$ e $\xi_i$. Por exemplo, se interpretamos as coordenadas $\widehat{\varphi}_i$ e $\varphi_i$ como ângulos, podemos considerar que $\widehat{\varphi}_i, \varphi_i \in [0, 2\pi]$. Esto deve ser feito pelo menos para um dos blocos. Esta consideração é importante já que se $\widehat{\varphi}_i, \varphi_i \in [-\infty, \infty]$ e $\widehat{\xi}_i, \xi_i \in [-\infty, \infty]$ em todos os blocos, simplesmente temos uma mudança de variaveis.

A possibilidade de gerar novas soluções utilizando a transformação (2.38) tem sido interpretada como a análoga gravitacional do efeito Bohm-Aharonov [18, 23]. Essa transformação altera as propriedades globais da solução original (solução semente). Casos especiais de elementos de linha que contêm termos cruzados como $d\xi_i d\varphi_i$ podem ser interpretados como a representação de um deslocamento cósmico quando $\xi_i$ é uma variável espacial, e como a representação de um defeito topológico de linha giratório quando $\xi_i$ é uma variável de tempo [24] ou de torsão, como defeitos topológicos [25]. Além disso a transformação $\hat{\varphi} \to d_i\varphi$ introduz singularidades cônicas que podem ser interpretadas como cordas cósmicas, ver por exemplo [26].

Novas soluções podem ser geradas usando o mesmo tipo de transformação (2.38), mas agora aplicada à matriz $\sigma$, ou seja,

$$\widehat{\sigma} = A \cdot \sigma \cdot A^T, \tag{2.46}$$

Note que esta nova matriz é também uma solução da equação (2.33). A função $\Sigma$ para a nova solução é obtida a partir das equações (2.36) e (2.46), nós encontramos

$$\Sigma[\gamma] = \ln\left\{ u^{(\frac{1}{2N} - N)} \prod_{i=1}^{N} [a_i^2(\sigma_i)_{11} + 2a_i b_i(\sigma_i)_{12} + b_i^2(\sigma_i)_{22}] \right\} + \Sigma[\sigma]. \tag{2.47}$$

Nas próximas seções, vamos estudar exemplos de novas soluções geradas a partir de soluções semente diagonais, assim como novas soluções obtidas de sementes não-diagonais.

## 2.3 Soluções geradas a partir de soluções semente diagonais

Como exemplo de uma nova solução obtida pela transformação (2.38), consideramos a métrica dada por

$$ds^2 = e^{\Sigma}(d\rho^2 - \epsilon d\tau^2) + h(\tau,\rho)\sum_{i=1}^{N}\{\eta_i e^{\psi_i} d\varphi_i^2 + e^{-\psi_i} d\xi_i^2\}, \tag{2.48}$$

onde $\psi_i = \psi_i(\tau,\rho)$, que é uma extensão natural das métricas de Einstein-Rosen [27] e Weyl [28] para $2N+2$ dimensões. Em particular, temos o caso Einstein-Rosen se escolhermos $\epsilon = 1$, $\rho = r$, $\tau = t$, $\varphi_i = \theta_i$ e $\xi_i = z_i$ , e o caso Weyl se fizermos a escolha $\epsilon = -1$, $\rho = z$, $\tau = r$, $\varphi_i = t_i$ e $\xi_i = \theta_i$.

Os blocos na diagonal de $\gamma$ associados a esta métrica têm a forma

$$\gamma_i = h\begin{pmatrix} \eta_i \exp(\psi_i) & 0 \\ 0 & \exp(-\psi_i) \end{pmatrix}. \tag{2.49}$$

As equações de Einstein são reduzidas ao sistema de equações dado por (2.9)–(2.11),

$$(u\psi_{i,\tau})_{,\tau} - \epsilon(u\psi_{i,\rho})_{,\rho} = 0, \tag{2.50}$$

e

$$\begin{aligned}\Sigma = \ln\Phi + \frac{1-2N}{2N}\ln u + \int \frac{u^2}{2\Phi}\Bigg\{&\Big[(\ln u)_{,\tau}d\tau - (\ln u)_{,\rho}d\rho\Big]\sum_{i=1}^{N}(\psi_{i,\tau}^2 + \epsilon\psi_{i,\rho}^2) \\ &+ 2\Big[(\ln u)_{,\tau}d\rho - \epsilon(\ln u)_{,\rho}d\tau\Big]\sum_{i=1}^{N}\psi_{i,\tau}\psi_{i,\rho}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Neste caso, de (2.38) e (2.37), obtemos a nova solução $\widehat{\gamma}$ com blocos

$$\widehat{\gamma}_i = h\eta_i e^{\psi_i}\begin{pmatrix} a_i^2 & a_i c_i \\ a_i c_i & c_i^2 \end{pmatrix} + h e^{-\psi_i}\begin{pmatrix} b_i^2 & b_i d_i \\ b_i d_i & d_i^2 \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

A matriz $\sigma$ associada à matriz $\gamma$, que é definida pelas equações (2.18) e (2.49), é dada por (2.34), onde

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \eta_i \exp(-\psi_i) & 0 \\ 0 & \epsilon u^2 \exp(\psi_i) \end{pmatrix}. \tag{2.53}$$

Fazendo a transformação (2.46) e considerando as equações (2.26) e (2.47), achamos a nova solução

$$f_i^{-1} = a_i^2 e^{-\psi_i} + \epsilon\eta_i b_i^2 u^2 e^{\psi_i}, \tag{2.54}$$

$$w_i = 2a_i b_i \int u\Big[(\ln u + \psi_i)_{,\rho} d\tau + \epsilon(\ln u + \psi_i)_{,\tau} d\rho\Big] \tag{2.55}$$

e

$$\Sigma[\gamma] = \ln\Bigg\{u^{(\frac{1}{2N}-N)}\prod_{i=1}^{N}[\eta_i a_i^2 e^{-\psi_i} + \epsilon b_i^2 u^2 e^{\psi_i}]\Bigg\} + \Sigma[\sigma]. \tag{2.56}$$

A condição de integrabilidade de (2.55) é dada por (2.11) e (2.50). Esta métrica é uma extensão $D$-dimensional da métrica de Papapetrou [29] e sua versão hiperbólica [18]. Em particular, se levarmos em consideração as funções $u = \tau$ e $\psi_i = \psi_i(\tau) = \ln\tau$, que são soluções de (2.11) e (2.50), temos para $\epsilon = 1$ (respectivamente para $\epsilon = -1$) uma solução semente tipo Kasner (respectivamente tipo Levi-Civita). Neste caso, a equação (2.51) se reduz a

$$\Sigma = \frac{(1-N)^2}{2N}\ln\tau. \tag{2.57}$$

A partir de (2.38) obtemos a nova solução,

$$\widehat{\gamma}_i = \tau^{1/N}\left[\eta_i\tau\begin{pmatrix} a_i^2 & a_i c_i \\ a_i c_i & c_i^2\end{pmatrix} + \tau^{-1}\begin{pmatrix} b_i^2 & b_i d_i \\ b_i d_i & d_i^2\end{pmatrix}\right]. \tag{2.58}$$

A nova solução (2.46) neste caso é,

$$f_i^{-1} = a_i^2\tau^{-1} + \epsilon\eta_i b_i^2\tau^3, \tag{2.59}$$

$$w_i = 4\epsilon a_i b_i\rho, \tag{2.60}$$

e

$$\Sigma[\gamma] = \ln\Bigg\{\tau^{(\frac{1}{2N}-N)}\prod_{i=1}^{N}[\eta_i a_i^2\tau^{-1} + \epsilon b_i^2\tau^3]\Bigg\} + \frac{5N-2}{2}\ln\tau. \tag{2.61}$$

Esta generalização $D$-dimensional especial da solução de Papapetrou [29] tem como caso particular um modelo cosmológico homogêneo no vácuo de Bianchi tipo-II em quatro dimensões [18]. A escolha especial $u = \tau$, solução da equação (2.11), em princípio não particulariza a métrica, este ponto é discutido em detalhe em [30] para as soluções tipo Weyl e em [31] para as de tipo Einstein-Rosen. Às vezes, é conveniente tomar uma solução particular diferente como, por exemplo, a solução $u = \sin(\tau)\sin(\rho)$, que tem sido utilizada em [32] em um contexto cosmológico.

## 2.4 Exemplos de novas soluções para métricas não diagonais

Aplicaremos o algoritmo de geração de novas soluções a extensões naturais das métricas de van Stockum e Stachel para espaços $2N+2$-dimensionais.

### Novas soluções geradas a partir de extensões da solução de van Stockum.

Em (2.8) consideramos $\epsilon = -1$ e $\eta_i = -1$, $f_i = -\lambda_i$ e $w_i = \lambda_i^{-1}$, onde as funções $\lambda_i$ satisfazem

$$(u\lambda_{i,\tau})_{,\tau} + (u\lambda_{i,\rho})_{,\rho} = 0. \tag{2.62}$$

Assim, temos uma métrica tipo van Stockum em $2N+2$ dimensões [33],

$$ds^2 = e^{\Sigma}(d\rho^2 + d\tau^2) + h(\tau,\rho)\sum_{i=1}^{N}(\lambda_i d\varphi_i^2 + 2d\varphi_i d\xi_i). \tag{2.63}$$

A métrica van Stockum habitual é o caso particular $N = 1$ e $u = r$. Os blocos da representação matricial de (2.63) são,

$$\gamma_i = h\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.64}$$

As equações de Einstein para a métrica (2.63) reduzem para (2.11) e

$$(u\lambda_{i,\tau})_{,\tau} + (u\lambda_{i,\rho})_{,\rho} = 0, \tag{2.65}$$

e

$$\Sigma = \ln(u_{,\tau}^2 + u_{,\rho}^2) + \frac{1-2N}{2N}\ln u, \tag{2.66}$$

onde $u = h^N$ como antes. A partir de (2.37) e (2.38) obtemos a nova solução,

$$\widehat{\gamma}_i = h\lambda_i\begin{pmatrix} a_i^2 & a_i c_i \\ a_i c_i & c_i^2 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 2a_i b_i & a_i d_i + b_i c_i \\ a_i d_i + b_i c_i & 2c_i d_i \end{pmatrix}. \tag{2.67}$$

A matriz $\sigma$ associada à matriz $\gamma$ tem blocos $\sigma_i$ da forma

$$\sigma_i = \frac{1}{\lambda_i}\begin{pmatrix} 1 & \widetilde{\beta}_i \\ \widetilde{\beta}_i & \widetilde{\beta}_i^2 + u^2\lambda_i^2 \end{pmatrix}, \tag{2.68}$$

onde

$$\widetilde{\beta}_i = \int u(\lambda_{i,\rho}d\tau - \lambda_{i,\tau}d\rho). \tag{2.69}$$

A partir disso a nova solução obtida usando (2.46) tem funções métricas dadas por

$$f_i^{-1} = -\frac{1}{\lambda_i}\left[(a_i + b_i\widetilde{\beta}_i)^2 + b_i^2u^2\lambda_i^2\right], \tag{2.70}$$

e

$$w_i = \int \frac{1}{u\lambda_i^2}\left[(a_i + b_i\widetilde{\beta}_i)^2 + b_i^2u^2\lambda_i^2\right]^2(\beta_{i,\rho}d\tau - \beta_{i,\tau}d\rho), \tag{2.71}$$

em que

$$\beta_i = \frac{(a_i + b_i\widetilde{\beta}_i)(c_i + d_i\widetilde{\beta}_i) + b_id_iu^2\lambda_i^2}{(a_i + b_i\widetilde{\beta}_i)^2 + b_i^2u^2\lambda_i^2}. \tag{2.72}$$

O coeficiente $\Sigma$ pode ser determinado usando as equações (2.13),(2.14),(2.15), (2.70) e (2.71).

## Nova solução generada a partir de extensões da solução de Stachel.

Ao considerar em (2.8) $\epsilon = +1$,

$$f_i = \frac{\exp(\psi_i(\tau,\rho))}{h} \tag{2.73}$$

e, para $p \leq N$,

$$w_i = \begin{cases} K_i(\tau + \rho), & \text{se } i = 1,\ldots,p, \\ K_i(\tau - \rho), & \text{se } i = p+1,\ldots,N, \end{cases} \tag{2.74}$$

temos que

$$ds^2 = e^{\Sigma}(d\rho^2 - d\tau^2) + \sum_{i=1}^{N}\eta_i e^{\psi_i}\left[(d\varphi_i + K_id\xi_i)^2 + \eta_i h^2 e^{-2\psi_i}d\xi_i^2\right]. \tag{2.75}$$

Os blocos da forma matricial de esta métrica são,

$$\gamma_i = \eta_i e^{\psi_i}\begin{pmatrix} 1 & K_i \\ K_i & K_i^2 + \eta_i h^2 e^{-2\psi_i} \end{pmatrix}, \tag{2.76}$$

As equações de Einstein no vácuo nos dão,

$$\begin{cases} \left\{[u(\frac{e^{\psi_i}}{h})^2]_{,\tau} - [u(\frac{e^{\psi_i}}{h})^2]_{,\rho}\right\}K_i' = 0, & \text{se } i = 1, \ldots, p, \\ \left\{[u(\frac{e^{\psi_i}}{h})^2]_{,\tau} + [u(\frac{e^{\psi_i}}{h})^2]_{,\rho}\right\}K_i' = 0, & \text{se } i = p+1, \ldots, N, \end{cases} \tag{2.77}$$

onde $K'$ denota a derivada de $K$ com relação a seu argumento, e

$$(u\psi_{i,\tau})_{,\tau} - (u\psi_{i,\rho})_{,\rho} = 0. \tag{2.78}$$

Uma possibilidade para considerar funções não-triviais $K_i$, é fazer a restrição

$$\psi_i = \frac{2-N}{2N}\ln u, \tag{2.79}$$

para obter

$$u\left(\frac{e^{\psi_i}}{h}\right)^2 = 1, \tag{2.80}$$

e assim simplificar as equações (2.77). A função métrica $\Sigma$ é dada pelas equações (2.13)–(2.16). Neste caso temos

$$\Lambda = \frac{N\Phi}{4u^2} + \frac{2}{u}\sum_{i=1}^{N}\eta_i(K_i')^2, \tag{2.81}$$

e

$$\Upsilon = \frac{N}{4u^2}u_{,\tau}u_{,\rho} + \frac{1}{u}\left[\sum_{i=1}^{p}\eta_i(K_i')^2 - \sum_{i=p+1}^{N}\eta_i(K_i')^2\right] \tag{2.82}$$

A solução de Stachel usual em quatro dimensões [34] é a métrica (2.75) para $N = 1$.

A partir de (2.38), obtemos a nova solução

$$\gamma_i' = \frac{\eta_i h}{\sqrt{u}}\begin{pmatrix} (a_i + b_iK_i)^2 & (a_i + b_iK_i)(c_i + d_iK_i) \\ (a_i + b_iK_i)(c_i + d_iK_i) & (c_i + d_iK_i)^2 \end{pmatrix} + h\sqrt{u}\begin{pmatrix} b_i^2 & b_id_i \\ b_id_i & d_i^2 \end{pmatrix}. \tag{2.83}$$

A matriz $\sigma$ associada à matriz $\gamma$ tem blocos $\sigma_i$ da forma

$$\begin{cases} \sigma_i = \eta_i\sqrt{u}\begin{pmatrix} 1 & \eta_iK_i \\ \eta_iK_i & K_i^2 + \eta_iu \end{pmatrix}, & \text{se } i = 1, \ldots, p, \\ \sigma_i = \eta_i\sqrt{u}\begin{pmatrix} 1 & -\eta_iK_i \\ -\eta_iK_i & K_i^2 + \eta_iu \end{pmatrix}, & \text{se } i = p+1, \ldots, N. \end{cases} \tag{2.84}$$

De (2.46) e (2.84), obtemos a nova solução,

$$f_i^{-1} = \sqrt{u}\big[(a_i \pm \eta_i b_i K_i)^2 + \eta_i b_i^2 u\big], \tag{2.85}$$

e

$$w_i = \int \eta_i \big[(a_i \pm \eta_i b_i K_i)^2 + \eta_i b_i^2 u\big]^2 (\beta_{i,\rho} d\tau + \beta_{i,\tau} d\rho), \tag{2.86}$$

onde

$$\beta_i = \frac{(a_i \pm \eta_i b_i K_i)(c_i \pm \eta_i d_i K_i) + \eta_i b_i d_i u}{(a_i \pm \eta_i b_i K_i)^2 + \eta_i b_i^2 u}. \tag{2.87}$$

Em (2.85),(2.86) e (2.87) usamos o sinal "+", se $i = 1, \ldots, p$ e o sinal "$-$", se $i = p+1, \ldots, N$. O coeficiente $\Sigma$ pode ser determinado utilizando as equações (2.13),(2.14),(2.15), (2.85) e (2.86). O caso quatro-dimensional desta métrica pode ser encontrado em [18].

# 3

# Método de Belinski-Zakharov

No final da década dos anos 70, Belinski e Zakharov usaram a técnica conhecida como método de espalhamento inverso, ou ISM, pelas iniciais em inglês de Inverse Scattering Method, para solucionar um tipo especial de equações de Einstein no vácuo, a saber, quando o espaço-tempo admite dois campos vetoriais comutativos de Killing. A técnica ficou conhecida como Método de Belinski-Zakharov ou transformação solitônica, e as soluções obtidas por esse meio são chamadas de soluções solitônicas [19]. Neste capítulo apresentamos brevemente as principais ideias do método nas quatro dimensões usuais, assim como algumas considerações adicionais para sua implementação em dimensões superiores. Seguiremos [20],[19],[35] e [36].

Para nossa análise, consideramos a seguinte métrica

$$ds^2 = f(dz^2 - dt^2) + g_{ab}dx^a dx^b, \tag{3.1}$$

onde as funções $f$ e $g_{ab}$ dependem apenas da coordenada tipo tempo $t$ e da coordenada tipo espaço $z$. Ao utilizar uma coordenada tipo tempo e uma coordenada tipo espaço, estamos considerando soluções tipo onda e cosmológicas das equações gravitacionais [35]. O análogo estacionário desta métrica tem a forma

$$ds^2 = f(dr^2 + dz^2) + g_{ab}dx^a dx^b, \tag{3.2}$$

e as funções $f$ e $g_{ab}$ dependem somente das coordenadas tipo espaço $r$ e $z$.

A métrica (3.1) e seu análogo estacionário são muito importantes, já que várias das soluções mais relevantes são deste tipo como, por exemplo, as soluções de Schwarzschild e Kerr, a solução com simetria axial de Weyl e a soluções para ondas cilíndricas de Einstein-Rosen, entre outras [35].

As equações de Einstein para esta métrica podem ser estudadas em forma mais conveniente se fizermos uso das coordenadas nulas $(\zeta, \xi)$ dadas por

$$\zeta = \frac{1}{2}(z+t), \qquad \xi = \frac{1}{2}(z-t). \tag{3.3}$$

Para o determinante da matriz $g = (g_{ab})$ adotamos a restrição

$$\det g = \alpha^2, \tag{3.4}$$

onde consideramos que $\alpha$ é não negativo. O sistema das equações de Einstein se descompõe em dois grupos de equações. O primeiro pode ser escrito na forma matricial

$$(\alpha g_{,\zeta} g^{-1})_{,\xi} + (\alpha g_{,\xi} g^{-1})_{,\zeta} = 0. \tag{3.5}$$

O segundo grupo expressa o coeficiente $f$ em termos da matriz $g$ através das relações:

$$\begin{aligned} (\ln f)_{,\zeta}(\ln\alpha)_{,\zeta} &= (\ln\alpha)_{,\zeta\zeta} + \frac{1}{4\alpha^2}\operatorname{tr} A^2, \\ (\ln f)_{,\xi}(\ln\alpha)_{,\xi} &= (\ln\alpha)_{,\xi\xi} + \frac{1}{4\alpha^2}\operatorname{tr} B^2, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde as matrizes $A$ e $B$ sao definidas por

$$A = -\alpha g_{,\zeta} g^{-1}, \qquad B = \alpha g_{,\xi} g^{-1}. \tag{3.7}$$

A condição de integrabilidade para (3.6) com relação a $f$ é satisfeita se $g$ satisfaz (3.5). É possível demostrar que esta última equação é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{gathered} A_{,\xi} - B_{,\zeta} = 0, \\ A_{,\xi} + B_{,\zeta} + \alpha^{-1}[A, B] - \alpha_{,\xi}\alpha^{-1}A - \alpha_{,\zeta}\alpha^{-1}B = 0, \end{gathered} \tag{3.8}$$

onde os colchetes denotam o comutador [20].

## 3.1 O esquema de integração

A ideia chave do método de Belinski-Zakharov consiste em achar um sistema matricial de equações relacionado com um problema autovalor-autovetor para certos operadores diferenciais lineares. Este sistema deve ter como condições de integrabilidade as equações (3.8). Se conseguimos resolver este problema linear, podemos achar, seguindo certo algoritmo, a solução do sistema não-linear [19].

Vamos considerar os seguintes operadores diferenciais

$$D_\zeta = \partial_\zeta - \frac{2\alpha_{,\zeta}\lambda}{\lambda - \alpha}\partial_\lambda, \qquad D_\xi = \partial_\xi + \frac{2\alpha_{,\xi}\lambda}{\lambda + \alpha}\partial_\lambda, \tag{3.9}$$

onde $\lambda$ é um parâmetro complexo independente das coordenadas $\zeta$ e $\xi$. É possível provar que

$$[D_\zeta, D_\xi] = 0, \tag{3.10}$$

sempre que $\alpha$ satisfaça a equação de onda

$$\alpha_{,\zeta\xi} = 0. \tag{3.11}$$

O sistema que nós associamos às equações (3.8) é dado por

$$D_\zeta\psi = \frac{A}{\lambda - \alpha}\psi, \qquad D_\xi\psi = \frac{B}{\lambda + \alpha}\psi, \tag{3.12}$$

onde as matrizes $A$ e $B$ não dependem do parâmetro espectral $\lambda$. A matriz $\psi = \psi(\lambda, \zeta, \xi)$ é usualmente chamada de *matriz geradora*. A matriz $g = g(\zeta, \xi)$ é exatamente a matriz geradora avaliada em $\lambda = 0$, ou seja,

$$g(\zeta, \xi) = \psi(0, \zeta, \xi). \tag{3.13}$$

De fato, quando fazemos $\lambda = 0$ nas equações (3.9) e (3.12), obtemos (3.7).

Suponha que conheçamos uma solução particular $g_0(\zeta, \xi)$ das equações (3.4) e (3.5), então utilizando (3.7) e (3.12) podemos obter a correspondente função geradora $\psi_0(\lambda, \zeta, \xi)$. Podemos construir uma nova solução $\psi$ se assumimos que tem a forma

$$\psi = \chi\psi_0. \tag{3.14}$$

A matriz $\chi$ é usualmente conhecida como *matriz de dispersão*. Substituindo (3.14) em (3.12), temos as equações

$$D_\zeta \chi = \frac{1}{\lambda - \alpha}(A\chi - \chi A_0), \qquad D_\xi \chi = \frac{1}{\lambda + \alpha}(B\chi - \chi B_0) \tag{3.15}$$

A matriz $g(\zeta, \xi)$ que procuramos deve ser real e simétrica. Para assegurar que isso aconteça, devemos impor duas condições adicionais sobre a matriz de dispersão. A primeira é que $\chi$ deve ser real sobre o eixo real do plano $\lambda$. Isto implica que

$$\overline{\chi}(\overline{\lambda}) = \chi(\lambda), \qquad \overline{\psi}(\overline{\lambda}) = \psi(\lambda), \tag{3.16}$$

onde a barra indica conjugação complexa. A segunda está relacionada com a seguinte propriedade de invariância das soluções do sistema (3.15). Se $\chi(\lambda)$ é solução de (3.15), então a matriz

$$\chi'(\lambda) = g\widetilde{\chi}^{-1}(\alpha^2/\lambda)g_0^{-1}, \tag{3.17}$$

onde o símbolo $\widetilde{\ }$ indica transposição, é também solução de (3.15) sempre que a matriz $g$ seja simétrica. Podemos reescrever essa equação na forma

$$g = \chi'(\lambda)g_0\widetilde{\chi}(\alpha^2/\lambda), \tag{3.18}$$

portanto,

$$\widetilde{g} = \chi(\alpha^2/\lambda)g_0\widetilde{\chi}'(\lambda). \tag{3.19}$$

Se fizermos a mudança $\lambda \to \alpha^2/\lambda$ em (3.18), obtemos

$$g = \chi'(\alpha^2/\lambda)g_0\widetilde{\chi}(\lambda). \tag{3.20}$$

Assim, se assumimos que $\chi'(\lambda) = \chi(\lambda)$, podemos garantir a simetria da matriz $g$. A condição (3.18) então toma a forma

$$g = \chi(\lambda)g_0\widetilde{\chi}(\alpha^2/\lambda). \tag{3.21}$$

Vamos exigir também que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \chi(\lambda) = I, \tag{3.22}$$

onde $I$ denota a matriz identidade. Com esta condição, temos de (3.21) que

$$g = \chi(0)g_0. \tag{3.23}$$

Nosso problema agora é achar uma solução $\chi$ para o sistema (3.15) que verifique as condições (3.16) e (3.22).

## 3.2 Construção das soluções solitônicas

Vamos considerar que a matriz de dispersão tenha a seguinte forma

$$\chi = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{\lambda - \mu_k}, \tag{3.24}$$

onde as matrizes $R_k$ e as funções $\mu_k$ não dependem de $\lambda$. Esta escolha se justifica no fato de que para obter soluções solitônicas puras, a matriz $\chi$ deve pode ser representada como uma função racional do parâmetro $\lambda$ com um número finito $n$ de pólos simples. O ansatz (3.24) satisfaz também a condição (3.22). A equação (3.23) então se pode escrever como

$$g(\zeta, \xi) = (I - \sum_{k=1}^{n} \mu_k^{-1} R_k)g_0. \tag{3.25}$$

Se utilizamos (3.24) nas equações (3.15), obtemos expressões que mostram as posições dos pólos como funções de $\zeta$ e $\xi$. Por esta razão, vamos usar a expressão *trajetórias de pólos*, invés de falar simplesmente de pólos. Sendo mais específicos, como os lados direitos das equações (3.15) nos pontos $\lambda = \mu_k$ têm pólos de primeiro ordem só, enquanto que os lados esquerdos têm pólos de segunda ordem, temos que os coeficientes dos termos $(\lambda - \mu_k)^{-2}$ são zero. Utilizando essa condição, obtemos as seguintes equações para as trajetórias dos pólos $\mu_k(\zeta, \xi)$:

$$\mu_{k,\zeta} = \frac{2\alpha_{,\zeta}\mu_k}{\alpha - \mu_k}, \qquad \mu_{k,\xi} = \frac{2\alpha_{,\xi}\mu_k}{\alpha + \mu_k}. \tag{3.26}$$

As soluções deste sistema são as raízes da equação quadrática

$$\mu_k^2 + 2(\beta - w_k)\mu_k + \alpha^2 = 0, \tag{3.27}$$

onde as $w_k$ são constantes complexas arbitrárias, ou seja

$$\mu_k = (w_k - \beta) \pm \left[(w_k - \beta)^2 - \alpha^2\right]. \tag{3.28}$$

Neste trabalho consideramos somente raízes com o signal positivo. Essas raízes são chamadas de *sólitons*.

As equações (3.15) podem ser reescritas na forma

$$
\begin{aligned}
\frac{A}{\lambda-\alpha} &= (D_\zeta\chi)\chi^{-1} + \chi\frac{A_0}{\lambda-\alpha}\chi^{-1}, \\
\frac{B}{\lambda+\alpha} &= (D_\xi\chi)\chi^{-1} + \chi\frac{B_0}{\lambda+\alpha}\chi^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

Comparando em cada equação os resíduos nos pólos $\lambda = \mu_k$, obtemos a seguinte condição para as matrizes $R_k$ definidas em (3.24)

$$
\begin{aligned}
R_{k,\zeta}\chi^{-1}(\mu_k) + R_k\frac{A_0}{\mu_k-\alpha}\chi^{-1}(\mu_k) &= 0, \\
R_{k,\xi}\chi^{-1}(\mu_k) + R_k\frac{B_0}{\mu_k+\alpha}\chi^{-1}(\mu_k) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

onde utilizamos a expressão

$$
R_k\chi^{-1}(\mu_k) = 0, \tag{3.31}
$$

a qual é obtida da identidade $\chi\chi^{-1} = I$, nos pólos $\lambda = \mu_k$, já que

$$
I = \chi\chi^{-1} = \left(I + \sum_{k=1}^{n}\frac{R_k}{\lambda-\mu_k}\right)\chi^{-1} = \chi^{-1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{R_k\chi^{-1}}{\lambda-\mu_k}, \tag{3.32}
$$

que só podemos garantir se a relação (3.31) se verifica. Precisamente, esta última diz que as matrizes $R_k$ e $\chi^{-1}$ são degeneradas e podemos supor assim que têm a forma

$$
(R_k)_{ab} = n_a^{(k)}m_b^{(k)}, \qquad [\chi^{-1}(\mu_k)]_{ab} = q_a^{(k)}p_b^{(k)}, \tag{3.33}
$$

o que implica que

$$
m_a^{(k)}q_a^{(k)} = 0. \tag{3.34}
$$

Estamos assumindo que a soma é feita sobre os índices $a, b, c, d$. Substituindo as equações (3.33) em (3.30) e considerando (3.34), obtemos

$$
\begin{aligned}
n_a^{(k)}\left[m_{c,\zeta}^{(k)} + m_b^{(k)}\frac{(A_0)_{bc}}{\mu_k-\alpha}\right]q_c^{(k)}p_d^{(k)} &= 0, \\
n_a^{(k)}\left[m_{c,\xi}^{(k)} + m_b^{(k)}\frac{(B_0)_{bc}}{\mu_k+\alpha}\right]q_c^{(k)}p_d^{(k)} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

Para que estas equações sejam válidas para todo $n_a^{(k)}$ e para todo $p_d^{(k)}$, devemos ter que

$$\begin{aligned} \Big[ m_{a,\zeta}^{(k)} + m_b^{(k)} \frac{(A_0)_{ba}}{\mu_k - \alpha} \Big] q_a^{(k)} = 0, \\ \Big[ m_{a,\xi}^{(k)} + m_b^{(k)} \frac{(B_0)_{ba}}{\mu_k + \alpha} \Big] q_a^{(k)} = 0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Estas equações determinam a evolução dos vetores $m_a^{(k)}$. Uma solução de (3.36) para estos vetores é dada por

$$m_a^{(k)} = m_{0b}^{(k)} (M_k)_{ba}, \tag{3.37}$$

onde

$$M_k = (\psi_0^{-1})_{\lambda=\mu_k} = \psi_0^{-1}(\mu_k, \zeta, \xi). \tag{3.38}$$

Os $m_{0b}^{(k)}$ são vetores constantes complexos arbitrários, e são as vezes chamados de *vetores de Belinski-Zakharov*, ou simplesmente de BZ-vetores.

Avaliamos a relação obtida ao substituir (3.24) em (3.21), nos pontos $\lambda = \alpha^2/\mu_k$, para obter o seguinte sistema de $n$ equações matriciais algébricas, satisfeito pelas matrizes $R_k$

$$R_k g_0 \Big[ I + \sum_{l=1}^{n} (\alpha^2 - \mu_k \mu_l)^{-1} \mu_k \widetilde{R}_l \Big] = 0, \tag{3.39}$$

onde $k = 1, \ldots, n$. Fazendo uso desta equação e da relação para $R_k$ dada por (3.33), obtemos o sistema linear para os vetores $n_a^{(k)}$

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{kl} n_a^{(l)} = \mu_k^{-1} m_c^{(k)} (g_0)_{ca}, \tag{3.40}$$

onde os elementos da matriz simétrica $\Gamma_{kl}$ são

$$\Gamma_{kl} = -m_c^{(k)} m_b^{(l)} (g_0)_{cb} (\alpha^2 - \mu_k \mu_l)^{-1}. \tag{3.41}$$

Se $\Pi_{kl}$ denota a inversa da matriz $\Gamma_{kl}$, obtemos de (3.40) que

$$n_a^{(k)} = \sum_{l=1}^{n} \mu_l^{-1} \Pi_{kl} N_a^{(l)}, \tag{3.42}$$

onde

$$N_a^{(l)} = m_a^{(l)} (g_0)_{ca}. \tag{3.43}$$

Portanto, as componentes métricas $g_{ab}$ são:

$$g_{ab} = (g_0)_{ab} - \sum_{k,l=1}^{n} \mu_k^{-1}\mu_l^{-1}\Pi_{kl} N_a^{(k)} N_b^{(l)}. \tag{3.44}$$

Das equações (3.29), obtemos que

$$\begin{aligned} A &= 2\alpha\alpha_\zeta \left[\sum_{k=1}^{n}(\alpha-\mu_k)^{-2}R_k\right]\chi^{-1}(\alpha) + \chi(\alpha)A_0\chi^{-1}(\alpha), \\ B &= 2\alpha\alpha_\xi \left[\sum_{k=1}^{n}(\alpha+\mu_k)^{-2}R_k\right]\chi^{-1}(-\alpha) + \chi(\alpha)B_0\chi^{-1}(-\alpha). \end{aligned} \tag{3.45}$$

substituindo estas expressões em (3.6), podemos achar a componente $f$ por integração direta. O resultado obtido utilizando indução para a componente $f_n$ da solução n-solitônica é

$$f = C_n f_0 \alpha^n \left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k^2\right)\left[\prod_{k=1}^{n}(\mu_k^2-\alpha^2)\right]^{-1} \det\Gamma_{kl}, \tag{3.46}$$

onde $C_n$ é uma constante arbitrária, $f_0$ é a solução inicial para $f$ correspondente a $g_0$ e $k, l = 1, \ldots, n$.

A nossa tarefa ainda não está completa já que, geralmente, o determinante da matriz $g_{ab}$ dada por (3.44) não é exatamente igual a $\alpha^2$, tal como é exigido por (3.4). Para resolver este problema, primeiro devemos obter o determinante da matriz $g$. Este pode ser calculado usando indução, e seu resultado é

$$\det g = \alpha^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k^{-2}\right)\det g_0 = \alpha^{2n+2}\prod_{k=1}^{n}\mu_k^{-2}. \tag{3.47}$$

O determinante para a matriz $g^{(ph)}$ dada por

$$g^{(ph)} = \alpha(\det g)^{-1/2} g \tag{3.48}$$

é precisamente $\alpha^2$. Então, substituindo (3.47) nesta equação, obtemos a solução que estamos procurando, à qual chamaremos de *matriz g física*, e é dada por

$$g^{(ph)} = \alpha\left(\alpha^{2n+2}\prod_{k=1}^{n}\mu_k^{-2}\right)^{-1/2} g = \alpha^{-n}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right) g. \tag{3.49}$$

Para calcular a componente física $f^{(ph)}$, substituimos nas equações (3.6) as matrizes $A^{(ph)}$ e $B^{(ph)}$ dadas por

$$\begin{aligned} A^{(ph)} &= A - \alpha\big\{\ln[\alpha(\det g)^{-1/2}]\big\}_{,\zeta} I, \\ B^{(ph)} &= B + \alpha\big\{\ln[\alpha(\det g)^{-1/2}]\big\}_{,\xi} I, \end{aligned} \tag{3.50}$$

onde $A$ e $B$ são definidos por (3.7), com $g$ dada por (3.44). Obtemos que

$$f^{(ph)} = f\alpha^{1/2}F, \tag{3.51}$$

onde $f$ é dado por (3.46) e $F$ é definido pelas equações

$$(\ln F)_{,\zeta} = -\frac{\alpha}{8\alpha_{,\zeta}}\big[(\ln\det g)_{,\zeta}\big]^2, \qquad (\ln F)_{,\xi} = -\frac{\alpha}{8\alpha_{,\xi}}\big[(\ln\det g)_{,\xi}\big]^2. \tag{3.52}$$

Substituindo (3.47) nestas equações e integrando, obtemos

$$F = C_F\alpha^{-(n^2+2n+1)/2}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{n-1}\left[\prod_{k=1}^{n}(\mu_k^2-\alpha^2)\right]\left[\prod_{k>l=1}^{n}(\mu_k-\mu_l)^{-2}\right], \tag{3.53}$$

onde $C_F$ é uma constante arbitrária. Portanto,

$$f^{(ph)} = C_f f_0\alpha^{-n^2/2}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{n+1}\left[\prod_{k>l=1}^{n}(\mu_k-\mu_l)^{-2}\right]\det\Gamma_{kl}, \tag{3.54}$$

onde $C_f$ é uma constante arbitrária e o produto

$$\prod_{k>l=1}^{n}(\mu_k-\mu_l)^{-2} \tag{3.55}$$

é igual a 1 para $n = 1$. A solução n-solitônica tem então a forma

$$ds^2 = f^{(ph)}(dz^2 - dt^2) + g_{ab}^{(ph)}dx^a dx^b, \tag{3.56}$$

onde $f^{(ph)}$ e $g_{ab}^{(ph)}$ estão dados por (3.49) e (3.44), respectivamente.

O método apresentado neste capítulo pode ser estendido para dimensões $D \geq 4$, mas com a significativa restrição de que os espaço-tempos a serem estudados devem depender somente de duas variáveis. Vamos considerar então que o nosso espaço-tempo (3.1) possui $D-2$ campos vetoriais comutativos de Killing, ou seja, os índices $a$ e $b$ tomam os valores $1, 2, ..., D-2$. Claramente isto significa que $g_{ab}(t, z)$ é uma matriz $(D-2) \times (D-2)$. O determinante de $g$ continua tendo o mesmo valor $\alpha^2$. As equações de Einstein são equivalentes ao sistema dado por (3.5), (3.6) e (3.7), com a diferença de que as matrizes $A$ e $B$ são agora de tamanho $(D-2) \times (D-2)$. A função $\alpha(t, z)$ deve satisfazer a equação de onda (3.11). As fórmulas obtidas para a construção das soluções solitônicas continuam sendo as mesmas, com exceção de (3.50) e das expressões (3.49) e (3.54) que fornecem a solução física. Como $\det g$ é dado ainda por (3.47), temos que

$$g^{(ph)} = \alpha^{-2n/(D-2)} \left( \prod_{k=1}^{n} \mu_k \right)^{2/(D-2)} g. \tag{3.57}$$

A expressão para $f^{(ph)}$ achada por Verdaguer [19], é

$$\begin{aligned} f^{(ph)} =& C_f f_0 \alpha^{-n(n+4-D)/(D-2)} \det(\Gamma_{kl}) \prod_{k=1}^{n} \left[ \mu_k^{2(n-3+D)/(D-2)} (\mu_k^2 - \alpha^2)^{(4-D)/(D-2)} \right] \\ & \times \prod_{k,l=1;k>l}^{n} (\mu_k - \mu_l)^{4/(2-D)}, \end{aligned} \tag{3.58}$$

onde a constante $C_f$ é introduzida para corrigir o valor físico de $f^{(ph)}$ se necessário.

# 4

# Soluções Solitônicas

## 4.1 Equações de Einstein D-dimensionais

Neste capítulo, vamos considerar métricas da forma

$$ds^2 = e^{\Sigma}(d\rho^2 + \epsilon d\tau^2) + h\sum_{i=1}^{N}\Big[\eta_i f_i(d\varphi_i + w_i d\xi_i)^2 + \frac{1}{f_i}d\xi_i^2\Big], \tag{4.1}$$

onde as funções $\Sigma$, $h$ $f_i$,$w_i$ dependem de $\tau$ e $\rho$ só, $\epsilon = \pm 1$, $\eta_i = \pm 1$ e $i = 1, \cdots, N$. Esta métrica é ligeiramente diferente da considerada no Capítulo 2, para ter compatibilidade de sinais com as transformações (4.17) e (4.18) que utilizaremos na seguinte seção. Também, como neste capítulo vamos aplicar o método de Belinski-Zakharov a extensões das métricas de Einstein-Rosen, Weyl e van Stockum, então vamos supor que

$$u = h^N = \tau. \tag{4.2}$$

A partir das equações de Einstein no vácuo para a métrica (4.1), verificamos que as funções $f_i, w_i$ e $h$ satisfazem as equações diferenciais,

$$\Big[\tau\Big(\frac{f_{i,\tau}}{f_i} - \eta_i f_i^2 w_i w_{i,\tau}\Big)\Big]_{,\tau} + \epsilon\Big[\tau\Big(\frac{f_{i,\tau}}{f_i} - \eta_i f_i^2 w_i w_{i,\rho}\Big)\Big]_{,\rho} = 0, \tag{4.3}$$

$$(\tau f_i^2 w_{i,\tau})_{,\tau} + \epsilon(\tau f_i^2 w_{i,\rho})_{,\rho} = 0. \tag{4.4}$$

Uma conta direta mostra que a escolha $u = \tau$ satisfaz

$$u_{,\tau\tau} + \epsilon u_{,\rho\rho} = 0, \tag{4.5}$$

e faz que

$$\Phi = u_{,\tau}^2 + \epsilon u_{,\rho}^2 = 1. \tag{4.6}$$

Assim, achamos que a função $\Sigma$ pode ser escrita como

$$\Sigma = \frac{1-2N}{2N}\ln u + \frac{1}{2}\int \tau[\Theta d\tau + 2\Upsilon d\rho], \tag{4.7}$$

onde

$$\Theta = \sum_{i=1}^{N}\left[f_i^{-2}(f_{i,\tau}^2 - \epsilon f_{i,\rho}^2) + \eta_i f_i^2(w_{i,\tau}^2 - \epsilon w_{i,\rho}^2)\right], \tag{4.8}$$

$$\Upsilon = \sum_{i=1}^{N}(f_i^{-2}f_{i,\tau}f_{i,\rho} + \eta_i f_i^2 w_{i,\tau}w_{i,\rho}), \tag{4.9}$$

As equações (4.3) and (4.4) podem ser escritas na forma mais compacta

$$(\tau\gamma_{,\tau}\gamma^{-1})_{,\tau} + \epsilon(\tau\gamma_{,\rho}\gamma^{-1})_{,\rho} = 0 \tag{4.10}$$

onde $\gamma$ é a matriz $2N \times 2N$-dimensional diagonal por blocos,

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_N \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

com

$$\gamma_i = \eta_i h \begin{pmatrix} f_i & f_i w_i \\ f_i w_i & f_i w_i^2 + \eta_i f_i^{-1} \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

A matriz $\gamma$ é simétrica e seu determinante é

$$\det\gamma = \tau^2 \prod_{i=1}^{N}\eta_i. \tag{4.13}$$

Assumimos também, por razões de compatibilidade de sinais com a condição (3.4), que os $\eta_i$ são escolhidos de tal forma que

$$\prod_{i=1}^{N}\eta_i = -\epsilon. \tag{4.14}$$

A equação (4.7) pode ser escrita em termos da matriz $\gamma$ como,

$$\Sigma[\gamma] = \ln\frac{1}{u} + \frac{1}{4}\int\frac{1}{\tau}\Big\{\mathrm{tr}\big[U^2(\gamma) + \epsilon V^2(\gamma)\big]d\tau + 2\,\mathrm{tr}\big[U(\gamma)V(\gamma)\big]d\rho\Big\}, \tag{4.15}$$

onde

$$U(\gamma) = \tau\gamma_{,\tau}\gamma^{-1}, \qquad V(\gamma) = \tau\gamma_{,\rho}\gamma^{-1}. \tag{4.16}$$

## 4.2 Semente Einstein-Rosen-Weyl (ERW)

Nesta seção, estudaremos as soluções 1-sóliton e 2-sóliton para a semente Einstein-Rosen-Weyl no caso 6-dimensional. Lembremos que as soluções $n$-sóliton em dimensão $D$ tem a forma (3.56), onde $f^{(ph)}$ é dado por (3.58) e $g_{ab}^{(ph)}$ está dada por (3.44) e (3.57). Na notação deste capítulo estamos considerando que $g = \gamma$. Inicialmente, para trabalhar em coordenadas mais apropriadas ao nosso problema atual, vamos introduzir as seguintes transformações:

$$\zeta = (\rho + i\sqrt{\epsilon}\tau)/2, \qquad \xi = (\rho - i\sqrt{\epsilon}\tau)/2, \tag{4.17}$$

$$A = -U - iV, \qquad B = -U + iV. \tag{4.18}$$

Utilizamos também que

$$\alpha = \sqrt{-\epsilon}\tau, \qquad \beta = \rho. \tag{4.19}$$

As matrizes $A$ e $B$ são definidas em (3.7). A equação (3.4) toma a forma

$$\det\gamma = \alpha^2 = -\epsilon\tau^2. \tag{4.20}$$

Utilizando estas transformações, o sistema (3.12) pode ser escrito como

$$D_\tau\psi = \frac{\tau U + \lambda V}{\tau^2 + \epsilon\lambda^2}\psi, \qquad D_\rho\psi = \frac{\tau V - \epsilon\lambda U}{\tau^2 + \epsilon\lambda^2}\psi, \tag{4.21}$$

em que

$$D_\tau \equiv \partial_\tau + \frac{2\lambda\tau}{\tau^2 + \epsilon\lambda^2}\partial_\lambda, \qquad D_\rho \equiv \partial_\rho - \frac{2\epsilon\lambda^2}{\tau^2 + \epsilon\lambda^2}\partial_\lambda. \tag{4.22}$$

Uma conta direta mostra que

$$[D_\tau, D_\rho] = 0. \tag{4.23}$$

Como a matriz $\gamma$ é diagonal por blocos podemos assumir que a matriz $\psi$, solução do sistema (4.21), é também diagonal por blocos. Assim,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \psi_N \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

onde cada bloco $\psi_i$ verifica o sistema

$$D_\tau \psi_i = \frac{\tau U_i + \lambda V_i}{\tau^2 + \epsilon\lambda^2}\psi_i, \qquad D_\rho \psi_i = \frac{\tau V_i - \epsilon\lambda U_i}{\tau^2 + \epsilon\lambda^2}\psi_i, \tag{4.25}$$

com $U_i$ e $V_i$ dadas pelas equações (4.16). Fazendo as seguintes mudanças de função:

$$\Lambda_i = (\tau^2 - 2\epsilon\lambda\rho - \epsilon\lambda^2)^{-1/2N}\psi_i, \tag{4.26}$$

para $i = 1, \ldots, N$, nossos sistemas (4.25) tomam a forma

$$D_\tau \Lambda_i = \frac{\tau(U_i - \frac{1}{N}I_2) + \lambda V_i}{\tau^2 + \epsilon\lambda^2}\Lambda_i, \qquad D_\rho \Lambda_i = \frac{\tau V_i - \epsilon\lambda(U_i - \frac{1}{N}I_2)}{\tau^2 + \epsilon\lambda^2}\Lambda_i, \tag{4.27}$$

onde $I_2$ é a matriz identidade de ordem 2. Assim, se $\Lambda$ é a matriz diagonal por blocos

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_N \end{pmatrix}, \tag{4.28}$$

temos que $\Lambda$ é a solução do sistema

$$D_\tau \Lambda = \frac{\tau(U - \frac{1}{N}I_{2N}) + \lambda V}{\tau^2 + \epsilon\lambda^2}\Lambda, \qquad D_\rho \Lambda = \frac{\tau V - \epsilon\lambda(U - \frac{1}{N}I_{2N})}{\tau^2 + \epsilon\lambda^2}\Lambda. \tag{4.29}$$

Esta matriz deve verificar a condição inicial

$$\Lambda \mid_{\lambda=0} = \frac{\gamma}{\mathrm{h}}. \tag{4.30}$$

## Solução 1-sóliton para a semente ERW

Inicialmente, vamos estudar a solução 1-sóliton para a semente Einstein-Rosen-Weyl (ERW) 6-dimensional dada por

$$ds^2 = e^{\Sigma_0}(d\rho^2 + \epsilon d\tau^2) + \sqrt{\tau}\sum_{i=1}^{2}\Big[\eta_i \exp(\phi_i) d\varphi_i^2 + \exp(-\phi_i) d\xi_i^2\Big], \tag{4.31}$$

onde $\phi_1$ e $\phi_2$ são funções das coordenadas $(\rho, \tau)$ e o termo $\Sigma_0$ é dado por

$$\Sigma_0 = -\frac{3}{4}\ln(\tau) + \frac{1}{2}\int \tau \left[\sum_{i=1}^{2}(\phi_{i,\tau}^2 - \epsilon\phi_{i,\rho}^2)d\tau + 2\sum_{i=1}^{2}(\phi_{i,\tau}\phi_{i,\rho})d\rho\right]. \tag{4.32}$$

Podemos reescrever esta métrica na forma matricial

$$ds^2 = e^{\Sigma_0}(d\rho^2 + \epsilon d\tau^2) + (\gamma_0)_{ab}dx^a dx^b, \tag{4.33}$$

em que

$$\gamma_0 = h \begin{pmatrix} \eta_1 \exp(\phi_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-\phi_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_2 \exp(\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-\phi_2) \end{pmatrix}, \tag{4.34}$$

com $h = \sqrt{\tau}$.

Nossa mudança de função (4.26) neste caso é

$$\Lambda = s\psi, \tag{4.35}$$

onde

$$s = (\tau^2 - 2\epsilon\lambda\rho - \epsilon\lambda^2)^{-1/4} \tag{4.36}$$

Para cada submatriz $\Lambda_i$ temos o sistema

$$D_\tau \Lambda_i = \frac{\tau^2\phi_{i,\tau} + \lambda\tau\phi_{i,\rho}}{\tau^2 + \epsilon\lambda^2}\overline{I}_2\Lambda_i, \qquad D_\rho \Lambda_i = \frac{\tau^2\phi_{i,\rho} - \epsilon\lambda\tau\phi_{i,\tau}}{\tau^2 + \epsilon\lambda^2}\overline{I}_2\Lambda_i, \tag{4.37}$$

com

$$\overline{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar que para $i$ a matriz $\Lambda_i$ tem a forma

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \eta_i \exp(F_i) & 0 \\ 0 & \exp(-F_i)) \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

para certa função $F_i$. É fácil verificar que $\Lambda_i$ é solução de (4.37) se $F_i$ é solução do seguinte sistema

$$\begin{aligned} D_\tau F_i &= \frac{\tau^2\phi_{i,\tau} + \lambda\tau\phi_{i,\rho}}{\tau^2+\epsilon\lambda^2}, \\ D_\rho F_i &= \frac{\tau^2\phi_{i,\rho} - \epsilon\lambda\tau\phi_{i,\tau}}{\tau^2+\epsilon\lambda^2}, \\ F_i \mid_{\lambda=0} &= \phi_i. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Para encontrar as soluções sóliton, precisamos somente

$$F_{(i)k} = F_i \mid_{\lambda=\mu_k} . \tag{4.41}$$

Considerando (3.26), achamos que as equações (4.40) ao longo dos pólos são reduzidas a

$$\begin{aligned} \partial_\tau F_{(i)k} &= \frac{\tau}{2\mu_k}(\mu_{k,\tau}\phi_{i,\tau} - \epsilon\mu_{k,\rho}\phi_{i,\rho}), \\ \partial_\rho F_{(i)k} &= \frac{\tau}{2\mu_k}(\mu_{k,\tau}\phi_{i,\rho} + \mu_{k,\rho}\phi_{i,\tau}). \end{aligned} \tag{4.42}$$

Portanto,

$$F_{(i)k} = \int \frac{\tau}{2\mu_k}\big[(\mu_{k,\tau}\phi_{i,\tau} - \epsilon\mu_{k,\rho}\phi_{i,\rho})d\tau + (\mu_{k,\tau}\phi_{i,\rho} + \mu_{k,\rho}\phi_{i,\tau})d\rho\big]. \tag{4.43}$$

A partir de (4.26),(4.36) e (4.39), obtemos os blocos

$$M_i^{(k)} = \psi_i^{-1} \mid_{\lambda=\mu_k} = s_k \begin{pmatrix} \eta_i \exp(-F_{(i)k}) & 0 \\ 0 & \exp(F_{(i)k}) \end{pmatrix}, \tag{4.44}$$

da matriz

$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} M_1^{(k)} & 0 \\ 0 & M_2^{(k)} \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

O termo $s_k$ em (4.44) é simplesmente

$$s_k = s \mid_{\lambda=\mu_k} \tag{4.46}$$

Seguindo o procedimento descrito no capítulo anterior, obtemos

$$\begin{aligned} m_1^{(k)} &= s_k p_{(1)k} \exp(-F_{(1)k}), \\ m_2^{(k)} &= s_k q_{(1)k} \exp(F_{(1)k}), \\ m_3^{(k)} &= s_k p_{(2)k} \exp(-F_{(2)k}), \\ m_4^{(k)} &= s_k q_{(2)k} \exp(F_{(2)k}). \end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned} N_1^{(k)} &= hs_k\eta_1 p_{(1)k}\exp(\phi_1 - F_{(1)k}),\\ N_2^{(k)} &= hs_k q_{(1)k}\exp(F_{(1)k} - \phi_1),\\ N_3^{(k)} &= hs_k\eta_2 p_{(2)k}\exp(\phi_2 - F_{(2)k}),\\ N_4^{(k)} &= hs_k q_{(2)k}\exp(F_{(2)k} - \phi_2). \end{aligned} \tag{4.48}$$

onde usamos a notação

$$\begin{aligned} m_{01}^{(k)} &= \eta_1 p_{(1)k},\\ m_{02}^{(k)} &= q_{(1)k},\\ m_{03}^{(k)} &= \eta_2 p_{(2)k},\\ m_{04}^{(k)} &= q_{(2)k}. \end{aligned} \tag{4.49}$$

No caso 1-sóliton, precisamos achar $\Gamma_{11}$ só. Para a atual semente, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} = \frac{hs_1^2}{\mu_1^2+\epsilon\tau^2}\big[&\eta_1 p_{(1)1}^2\exp(\phi_1 - 2F_{(1)1}) + q_{(1)1}^2\exp(2F_{(1)1}-\phi_1)+\\ &+\eta_2 p_{(2)1}^2\exp(\phi_2 - 2F_{(2)1}) + q_{(2)1}^2\exp(2F_{(2)1}-\phi_2)\big] \end{aligned} \tag{4.50}$$

É conveniente usar a notação

$$\begin{aligned} \Delta_{11} =&\eta_1 p_{(1)1}^2\exp(\phi_1 - 2F_{(1)1}) + q_{(1)1}^2\exp(2F_{(1)1}-\phi_1)+\\ &+\eta_2 p_{(2)1}^2\exp(\phi_2 - 2F_{(2)1}) + q_{(2)1}^2\exp(2F_{(2)1}-\phi_2) \end{aligned} \tag{4.51}$$

para obter

$$\Gamma_{11} = \frac{hs_1^2}{\mu_1^2+\epsilon\tau^2}\Delta_{11}. \tag{4.52}$$

As componentes de nossa matriz $\gamma_1$ são dadas por

$$(\gamma_1)_{ab} = (\gamma_0)_{ab} - \frac{N_a^{(1)}N_b^{(1)}}{\mu_1^2\Gamma_{11}} \tag{4.53}$$

onde $a,b=1,2,3,4$; e o determinante de $\gamma_1$ é

$$\det(\gamma_1) = -\epsilon\frac{\tau^2}{\mu_1^2}\det(\gamma_0) = \frac{\tau^4}{\mu_1^2}, \tag{4.54}$$

já que $\det(\gamma_0) = -\epsilon\tau^2$. Portanto, para garantir que $\det(\gamma_1)$ e $\det(\gamma_0)$ têm o mismo sinal, vamos exigir que $\epsilon=-1$. Assim, a matriz $\gamma_1^{(ph)}$ é dada por

$$\gamma_1^{(ph)} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\tau}}\gamma_1. \tag{4.55}$$

Portanto, usando (4.2), as componentes da matriz $\gamma_1^{(ph)}$ são,

$$
\begin{aligned}
(\gamma_1^{(ph)})_{11} &= \sqrt{\mu_1}\left[\eta_1\exp(\phi_1) - \frac{p_{(1)1}^2(\mu_1^2-\tau^2)\exp(2\phi_1-2F_{(1)1})}{\mu_1^2\Delta_{11}}\right],\\
(\gamma_1^{(ph)})_{12} &= \sqrt{\mu_1}\left[-\frac{\eta_1 p_{(1)1}q_{(1)1}(\mu_1^2-\tau^2)}{\mu_1^2\Delta_{11}}\right],\\
(\gamma_1^{(ph)})_{13} &= \sqrt{\mu_1}\left[-\frac{\eta_1 p_{(1)1}\eta_2 p_{(2)1}(\mu_1^2-\tau^2)\exp(\phi_1-F_{(1)1}+\phi_2-F_{(2)1})}{\mu_1^2\Delta_{11}}\right],\\
(\gamma_1^{(ph)})_{14} &= \sqrt{\mu_1}\left[-\frac{\eta_1 p_{(1)1}q_{(2)1}(\mu_1^2-\tau^2)\exp(F_{(1)1}-\phi_1+F_{(2)1}-\phi_2)}{\mu_1^2\Delta_{11}}\right],\\
(\gamma_1^{(ph)})_{22} &= \sqrt{\mu_1}\left[\exp(-\phi_1) - \frac{q_{(1)1}^2(\mu_1^2-\tau^2)\exp(2F_{(1)1}-2\phi_1)}{\mu_1^2\Delta_{11}}\right],
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_1^{(ph)})_{23} &= \sqrt{\mu_1}\left[-\frac{\eta_2 p_{(2)1}q_{(1)1}(\mu_1^2-\tau^2)\exp(F_{(1)1}-\phi_1+\phi_2-F_{(2)1})}{\mu_1^2\Delta_{11}}\right],\\
(\gamma_1^{(ph)})_{24} &= \sqrt{\mu_1}\left[-\frac{q_{(1)1}q_{(2)1}(\mu_1^2-\tau^2)\exp(F_{(1)1}-\phi_1+F_{(2)1}-\phi_2)}{\mu_1^2\Delta_{11}}\right],\\
(\gamma_1^{(ph)})_{33} &= \sqrt{\mu_1}\left[\eta_2\exp(\phi_2) - \frac{p_{(2)1}^2(\mu_1^2-\tau^2)\exp(2\phi_2-2F_{(2)1})}{\mu_1^2\Delta_{11}}\right],\\
(\gamma_1^{(ph)})_{34} &= \sqrt{\mu_1}\left[-\frac{\eta_2 p_{(2)1}q_{(2)1}(\mu_1^2-\tau^2)}{\mu_1^2\Delta_{11}}\right],\\
(\gamma_1^{(ph)})_{44} &= \sqrt{\mu_1}\left[\exp(-\phi_2) - \frac{q_{(2)1}^2(\mu_1^2-\tau^2)\exp(2F_{(2)1}-2\phi_2)}{\mu_1^2\Delta_{11}}\right].
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

Para calcular o termo $\Sigma_n^{(ph)}$, utilizamos a equação (3.54) e a transformação (4.19). Em nosso caso particular, obtemos

$$
\Sigma_1^{(ph)} = \Sigma_0 + \ln\left\{\mu_1^2\sqrt{\frac{\tau}{\mu_1^2-\tau^2}}\Gamma_{11}\right\}. \tag{4.58}
$$

No caso que $\epsilon = 1$, obtemos uma métrica com signatura incorreta. No entanto, ainda é possível obter soluções 1-sóliton se tomamos uma semente que satisfaz a condição $\det(\gamma_0) = -\tau^2$. Os primeiros exemplos de soluções deste tipo foram obtidos por Verdaguer [20].

Para finalizar esta seção, apresentaremos um caso particular para a solução 1-sóliton com semente ERW no caso 6-dimensional. Neste exemplo, com a escolha $\phi_2 = \ln\tau$, o bloco 2 será da forma Kasner.

**1-sóliton ERW 6-dim com $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = \ln\tau$, $\epsilon = -1$**

Temos que $F_{(1)1} = 0$ e $F_{(2)1} = \ln\sqrt{\mu_1}$ e

$$\Delta_{11} = \eta_1 p_{(1)1}^2 + \eta_2 p_{(2)1}^2\left(\frac{\tau}{\mu_1}\right) + q_{(1)1}^2 + q_{(2)1}^2\left(\frac{\mu_1}{\tau}\right). \tag{4.59}$$

Introduzimos a seguinte notação, que será utilizada no resto do capítulo:

$$\widetilde{\Delta}_{lk} = \frac{\Delta_{lk}}{\mu_l\mu_k + \epsilon\tau^2}. \tag{4.60}$$

As componentes de $\gamma_1$ são,

$$\begin{aligned}
(\gamma_1^{(ph)})_{11} &= \sqrt{\mu_1}\left[\eta_1 - \frac{p_{(1)1}^2}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\right],\\
(\gamma_1^{(ph)})_{12} &= \sqrt{\mu_1}\left[-\frac{\eta_1 p_{(1)1} q_{(1)1}}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\right],\\
(\gamma_1^{(ph)})_{13} &= -\frac{\eta_1 p_{(1)1}\eta_2 p_{(2)1}\tau}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{14} &= -\frac{\eta_1 p_{(1)1} q_{(2)1}}{\tau\mu_1\widetilde{\Delta}_{11}},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{22} &= \sqrt{\mu_1}\left[1 - \frac{q_{(1)1}^2}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\right],
\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma_1^{(ph)})_{23} &= -\frac{\eta_2 p_{(2)1} q_{(1)1}\tau}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{24} &= -\frac{q_{(1)1} q_{(2)1}}{\tau\mu_1\widetilde{\Delta}_{11}},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{33} &= \sqrt{\mu_1}\left[\eta_2\tau - \frac{p_{(2)1}^2\tau^2}{\mu_1^3\widetilde{\Delta}_{11}}\right],\\
(\gamma_1^{(ph)})_{34} &= \sqrt{\mu_1}\left[-\frac{\eta_2 p_{(2)1} q_{(2)1}}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\right],\\
(\gamma_1^{(ph)})_{44} &= \sqrt{\mu_1}\left[\frac{1}{\tau} - \frac{q_{(2)1}^2}{\tau^2\mu_1\widetilde{\Delta}_{11}}\right].
\end{aligned} \tag{4.62}$$

O termo $\Sigma_1^{(ph)}$ é

$$\Sigma_1^{(ph)} = -\frac{1}{4}\ln\tau + \ln\left\{\mu_1^2\sqrt{\frac{\tau}{\mu_1^2 - \tau^2}}\Gamma_{11}\right\}. \tag{4.63}$$

## Solução 2-sóliton para a semente ERW

Como no caso 1-sóliton, vamos considerar inicialmente a solução semente dada por (4.34) e (4.32). O procedimento é basicamente o mesmo utilizado no caso 1-sóliton, somente necessitamos calcular alguns termos adicionais.

Seja $\Gamma$ a matriz

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

onde $\Gamma_{lk}$ e dada por (3.41). Para nossa atual semente, temos que

$$\Gamma_{11} = hs_1^2\widetilde{\Delta}_{11} = \frac{hs_1^2}{\mu_1^2+\epsilon\tau^2}\Big[\eta_1 p_{(1)1}^2 \exp(\phi_1 - 2F_{(1)1}) + q_{(1)1}^2 \exp(2F_{(1)1} - \phi_1) + \\ + \eta_2 p_{(2)1}^2 \exp(\phi_2 - 2F_{(2)1}) + q_{(2)1}^2 \exp(2F_{(2)1} - \phi_2)\Big],$$

$$\Gamma_{22} = hs_2^2\widetilde{\Delta}_{22} = \frac{hs_2^2}{\mu_2^2+\epsilon\tau^2}\Big[\eta_1 p_{(1)2}^2 \exp(\phi_1 - 2F_{(1)2}) + q_{(1)2}^2 \exp(2F_{(1)2} - \phi_1) + \\ + \eta_2 p_{(2)2}^2 \exp(\phi_2 - 2F_{(2)2}) + q_{(2)2}^2 \exp(2F_{(2)2} - \phi_2)\Big],$$

$$\Gamma_{12} = hs_1s_2\widetilde{\Delta}_{12} = \frac{hs_1s_2}{\mu_1\mu_2+\epsilon\tau^2}\Big[\eta_1 p_{(1)1}p_{(1)2} \exp(\phi_1 - F_{(1)1} - F_{(1)2}) \\ + q_{(1)1}q_{(1)2}\exp(F_{(1)1}+F_{(1)2}-\phi_1) \\ + \eta_2 p_{(2)1}p_{(2)2}\exp(\phi_2 - F_{(2)1} - F_{(2)2}) \\ + q_{(2)1}q_{(2)2}\exp(F_{(2)1}+F_{(2)2}-\phi_2)\Big].$$

As componentes de nossa matriz $\gamma_2$ são dadas por

$$(\gamma_2)_{ab} = (\gamma_0)_{ab} - \frac{N_a^{(1)}N_b^{(1)}\Gamma_{22}}{\mu_1^2\det(\Gamma)} - \frac{N_a^{(2)}N_b^{(2)}\Gamma_{11}}{\mu_2^2\det(\Gamma)} + \frac{\Gamma_{12}}{\mu_1\mu_2\det(\Gamma)}[N_a^{(1)}N_b^{(2)} + N_a^{(2)}N_b^{(1)}]. \tag{4.65}$$

onde $a, b = 1, 2, 3, 4$; e o determinante de $\gamma_2$ é

$$\det(\gamma_2) = \frac{\tau^4}{\mu_1^2\mu_2^2}\det(\gamma_0). \tag{4.66}$$

Então, a matriz física $\gamma_2^{(ph)}$ é

$$\gamma_2^{(ph)} = \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\frac{1}{h}\gamma_2. \tag{4.67}$$

Portanto, as componentes da matriz $\gamma_2^{(ph)}$ são

$$
\begin{aligned}
(\gamma_2^{(ph)})_{11} &= \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{\eta_1\exp(\phi_1) - \frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}[\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{p}^2_{(1)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{p}^2_{(1)2} - 2\widetilde{\Delta}_{12}\widetilde{p}_{(1)1}\widetilde{p}_{(1)2}]\Big\},\\
(\gamma_2^{(ph)})_{12} &= -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{p}_{(1)1}\widetilde{q}_{(1)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{p}_{(1)2}\widetilde{q}_{(1)2} - \widetilde{\Delta}_{12}[\widetilde{p}_{(1)1}\widetilde{q}_{(1)2} + \widetilde{p}_{(1)2}\widetilde{q}_{(1)1}]\Big\},\\
(\gamma_2^{(ph)})_{13} &= -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{p}_{(1)1}\widetilde{p}_{(2)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{p}_{(1)2}\widetilde{p}_{(2)2} - \widetilde{\Delta}_{12}[\widetilde{p}_{(1)1}\widetilde{p}_{(2)2} + \widetilde{p}_{(1)2}\widetilde{p}_{(2)1}]\Big\}, \quad (4.68)\\
(\gamma_2^{(ph)})_{14} &= -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{p}_{(1)1}\widetilde{q}_{(2)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{p}_{(1)2}\widetilde{q}_{(2)2} - \widetilde{\Delta}_{12}[\widetilde{p}_{(1)1}\widetilde{q}_{(2)2} + \widetilde{p}_{(1)2}\widetilde{q}_{(2)1}]\Big\},\\
(\gamma_2^{(ph)})_{22} &= \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{\exp(-\phi_1) - \frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}[\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{q}^2_{(1)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{q}^2_{(1)2} - 2\widetilde{\Delta}_{12}\widetilde{q}_{(1)1}\widetilde{q}_{(1)2}]\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_2^{(ph)})_{23} &= -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{p}_{(2)1}\widetilde{q}_{(1)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{p}_{(2)2}\widetilde{q}_{(1)2} - \widetilde{\Delta}_{12}[\widetilde{p}_{(2)2}\widetilde{q}_{(1)1} + \widetilde{p}_{(2)1}\widetilde{q}_{(1)2}]\Big\},\\
(\gamma_2^{(ph)})_{24} &= -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{q}_{(1)1}\widetilde{q}_{(2)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{q}_{(1)2}\widetilde{q}_{(2)2} - \widetilde{\Delta}_{12}[\widetilde{q}_{(1)1}\widetilde{q}_{(2)2} + \widetilde{q}_{(1)2}\widetilde{q}_{(2)1}]\Big\},\\
(\gamma_2^{(ph)})_{33} &= \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{\eta_2\exp(\phi_2) - \frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}[\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{p}^2_{(2)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{p}^2_{(2)2} - 2\widetilde{\Delta}_{12}\widetilde{p}_{(2)1}\widetilde{p}_{(2)2}]\Big\}, \quad (4.69)\\
(\gamma_2^{(ph)})_{34} &= -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{p}_{(2)1}\widetilde{q}_{(2)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{p}_{(2)2}\widetilde{q}_{(2)2} - \widetilde{\Delta}_{12}[\widetilde{p}_{(2)1}\widetilde{q}_{(2)2} + \widetilde{p}_{(2)2}\widetilde{q}_{(2)1}]\Big\},\\
(\gamma_2^{(ph)})_{44} &= \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{\exp(-\phi_2) - \frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}[\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{q}^2_{(2)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{q}^2_{(2)2} - 2\widetilde{\Delta}_{12}\widetilde{q}_{(2)1}\widetilde{q}_{(2)2}]\Big\},
\end{aligned}
$$

onde utilizamos a notação,

$$\widetilde{p}_{(j)k} = \frac{\eta_j p_{(j)k}}{\mu_k}\exp(\phi_j - F_{(j)k}), \tag{4.70}$$

$$\widetilde{q}_{(j)k} = \frac{q_{(j)k}}{\mu_k}\exp(F_{(j)k} - \phi_j), \tag{4.71}$$

para $j, k = 1, 2$, e

$$\det(\widetilde{\Delta}) = \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{\Delta}_{22} - \widetilde{\Delta}^2_{12}. \tag{4.72}$$

O termo $\Sigma_2^{(ph)}$ é dado por,

$$\Sigma_2^{(ph)} = \Sigma_0 + \ln\Big\{(\mu_1\mu_2)^{5/2}(\mu_1^2 + \epsilon\tau^2)^{-1/2}(\mu_2^2 + \epsilon\tau^2)^{-1/2}(\mu_2 - \mu_1)^{-1}\det\Gamma\Big\} \tag{4.73}$$

**2-sóliton ERW 6-dim com $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = \ln\tau$, $\epsilon = -1$**

Neste caso, $F_{(1)1} = F_{(1)2} = 0$, $F_{(2)1} = \ln\sqrt{\mu_1}$ e $F_{(2)2} = \ln\sqrt{\mu_2}$. Então, de (4.70) temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}_{(1)1} &= \frac{\eta_1 p_{(1)1}}{\mu_1}\exp(\phi_1 - F_{(1)1}) = \frac{\eta_1 p_{(1)1}}{\mu_1},\\
\widetilde{p}_{(1)2} &= \frac{\eta_1 p_{(1)2}}{\mu_2}\exp(\phi_1 - F_{(1)2}) = \frac{\eta_1 p_{(1)2}}{\mu_2},\\
\widetilde{p}_{(2)1} &= \frac{\eta_2 p_{(2)1}}{\mu_1}\exp(\phi_2 - F_{(2)1}) = \frac{\eta_2 p_{(2)1}}{\mu_1}\Big(\frac{\tau}{\sqrt{\mu_1}}\Big),\\
\widetilde{p}_{(2)2} &= \frac{\eta_2 p_{(2)2}}{\mu_2}\exp(\phi_2 - F_{(2)2}) = \frac{\eta_2 p_{(2)2}}{\mu_2}\Big(\frac{\tau}{\sqrt{\mu_2}}\Big),
\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{q}_{(1)1} &= \frac{q_{(1)1}}{\mu_1}\exp(F_{(1)1} - \phi_1) = \frac{q_{(1)1}}{\mu_1},\\
\widetilde{q}_{(1)2} &= \frac{q_{(1)2}}{\mu_2}\exp(F_{(1)2} - \phi_1) = \frac{q_{(1)2}}{\mu_2},\\
\widetilde{q}_{(2)1} &= \frac{q_{(2)1}}{\mu_1}\exp(F_{(2)1} - \phi_2) = \frac{q_{(2)1}}{\mu_1}\Big(\frac{\sqrt{\mu_1}}{\tau}\Big),\\
\widetilde{q}_{(2)2} &= \frac{q_{(2)2}}{\mu_2}\exp(F_{(2)2} - \phi_2) = \frac{q_{(2)2}}{\mu_2}\Big(\frac{\sqrt{\mu_2}}{\tau}\Big),
\end{aligned} \tag{4.75}$$

e as componentes $\widetilde{\Delta}_{lk}$ são

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}_{11} &= \frac{1}{\mu_1^2 - \tau^2}\Bigg[\eta_1 p_{(1)1}^2 + q_{(1)1}^2 + \eta_2 p_{(2)1}^2\Big(\frac{\tau}{\mu_1}\Big) + q_{(2)1}^2\Big(\frac{\mu_1}{\tau}\Big)\Bigg],\\
\widetilde{\Delta}_{22} &= \frac{1}{\mu_2^2 - \tau^2}\Bigg[\eta_1 p_{(1)2}^2 + q_{(1)2}^2 + \eta_2 p_{(2)2}^2\Big(\frac{\tau}{\mu_2}\Big) + q_{(2)2}^2\Big(\frac{\mu_2}{\tau}\Big)\Bigg],\\
\widetilde{\Delta}_{12} &= \frac{1}{\mu_1\mu_2 - \tau^2}\Bigg[\eta_1 p_{(1)1}p_{(1)2} + q_{(1)1}q_{(1)2} + \eta_2 p_{(2)1}p_{(2)2}\Big(\frac{\tau}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\Big) + q_{(2)1}q_{(2)2}\Big(\frac{\sqrt{\mu_1\mu_2}}{\tau}\Big)\Bigg].
\end{aligned} \tag{4.76}$$

precisamos somente substituir essas expressões nas equações (4.68) para obter as componentes de $\gamma_2^{(ph)}$. O termo $\Sigma_2^{(ph)}$ é dado por,

$$\Sigma_2^{(ph)} = -\frac{1}{4}\ln\tau + \ln\Big\{(\mu_1\mu_2)^{5/2}(\mu_1^2 - \tau^2)^{-1/2}(\mu_2^2 - \tau^2)^{-1/2}(\mu_2 - \mu_1)^{-1}\det\Gamma\Big\} \tag{4.77}$$

## 4.3 Semente van Stockum (vS)

Vamos considerar a semente van Stockum (vS) em dimensão 6 dada por

$$ds^2 = e^{\Sigma_0}(d\rho^2 + \epsilon d\tau^2) + \sqrt{\tau}\sum_{i=1}^{2}\Big[\phi_i d\varphi_i^2 + 2d\varphi_i d\xi_i\Big], \tag{4.78}$$

onde $\phi_1$ e $\phi_2$ são funções das coordenadas $(\rho, \tau)$ e o termo $\Sigma_0$ é dado por

$$\Sigma_0 = -\frac{3}{4} \ln \tau. \tag{4.79}$$

As funções $\phi_i$ devem satisfazer a seguinte condição:

$$\phi_{i,\tau\tau} + \frac{1}{\tau}\phi_{i,\tau} + \epsilon\phi_{i,\rho\rho} = 0. \tag{4.80}$$

Podemos reescrever esta métrica na forma matricial

$$ds^2 = e^{\Sigma_0}(d\rho^2 + \epsilon d\tau^2) + (\gamma_0)_{ab} dx^a dx^b, \tag{4.81}$$

onde

$$\gamma_0 = h \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.82}$$

com $h = \sqrt{\tau}$.

Fazendo a mudança de variável (4.26), com $N = 2$, para cada submatriz $\Lambda_i$ obtemos o sistema

$$D_\tau \Lambda_i = \frac{\tau^2 \phi_{i,\tau} + \lambda\tau\phi_{i,\rho}}{\tau^2 + \epsilon\lambda^2} C\Lambda_i, \qquad D_\rho \Lambda_i = \frac{\tau^2 \phi_{i,\rho} - \epsilon\lambda\tau\phi_{i,\tau}}{\tau^2 + \epsilon\lambda^2} C\Lambda_i, \tag{4.83}$$

onde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.84}$$

Se considerarmos que para cada $i$ a matriz $\Lambda_i$ tem a forma

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} F_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.85}$$

para certa função $F_i$. Então temos que, como no caso ERW, $\Lambda_i$ é solução de (4.83) sempre que $F_i$ seja solução do sistema (4.40). Para obter soluções sóliton, de novo precisarmos da condição

(4.41), achando a expressão dada por (4.43). Nossa matriz $\Lambda$ tem então a forma,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} F_{(1)k} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{(2)k} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.86}$$

onde estão as $F_{(i)k}$ dadas por (4.41). A matriz $M^{(k)}$ neste caso é

$$M^{(k)} = \psi^{-1} = s_k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -F_{(1)k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -F_{(2)k} \end{pmatrix}, \tag{4.87}$$

onde $s_k$ é dado por (4.46).

Seguindo o nosso algoritmo, obtemos

$$\begin{aligned} m_1^{(k)} &= s_k q_{(1)k}, \\ m_2^{(k)} &= s_k (p_{(1)k} - q_{(1)k} F_{(1)k}), \\ m_3^{(k)} &= s_k q_{(2)k}, \\ m_4^{(k)} &= s_k (p_{(2)k} - q_{(2)k} F_{(2)k}). \end{aligned} \tag{4.88}$$

$$\begin{aligned} N_1^{(k)} &= h s_k \big[p_{(1)k} - q_{(1)k}(\phi_1 - F_{(1)k})\big], \\ N_2^{(k)} &= h s_k q_{(1)k}, \\ N_3^{(k)} &= h s_k \big[p_{(2)k} - q_{(2)k}(\phi_2 - F_{(2)k})\big], \\ N_4^{(k)} &= h s_k q_{(2)k}, \end{aligned} \tag{4.89}$$

onde utilizamos a notação (4.49).

Também temos que $\Gamma_{11} = h s_1 \widetilde{\Delta}_{11}$, com

$$\widetilde{\Delta}_{11} = \frac{1}{\mu_1^2 + \epsilon\tau^2}\big\{q_{(1)1}^2\phi_1 + 2(p_{(1)1}q_{(1)1} - q_{(1)1}^2 F_{(1)1}) + q_{(2)1}^2\phi_2 + 2(p_{(2)1}q_{(2)1} - q_{(2)1}^2 F_{(2)1})\big\}. \tag{4.90}$$

Tendo em conta que o determinante da matriz $\gamma_1$, cujas componentes são dadas por (4.53), para a semente vS é o mesmo que o obtido para o caso ERW, ou seja

$$\det(\gamma_1) = -\epsilon \frac{\tau^2}{\mu_1^2} \det(\gamma_0), \tag{4.91}$$

e considerando $\epsilon = -1$, então temos que as componentes da matriz física $\gamma_1^{(ph)}$, neste caso, são

$$\begin{aligned}
(\gamma_1^{(ph)})_{11} &= \sqrt{\mu_1}\left\{\phi_1 - \frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\left[p_{(1)1} + q_{(1)1}(\phi_1 - F_{(1)1})\right]^2\right\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{12} &= \sqrt{\mu_1}\left\{1 - \frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\left[p_{(1)1} + q_{(1)1}(\phi_1 - F_{(1)1})\right]q_{(1)1}\right\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{13} &= \sqrt{\mu_1}\left\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\left[p_{(1)1} + q_{(1)1}(\phi_1 - F_{(1)1})\right]\left[p_{(2)1} + q_{(2)1}(\phi_2 - F_{(2)1})\right]\right\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{14} &= \sqrt{\mu_1}\left\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\left[p_{(1)1} + q_{(1)1}(\phi_1 - F_{(1)1})\right]q_{(2)1}\right\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{22} &= \sqrt{\mu_1}\left\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(1)1}^2\right\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{23} &= \sqrt{\mu_1}\left\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(1)1}\left[p_{(2)1} + q_{(2)1}(\phi_2 - F_{(2)1})\right]\right\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{24} &= \sqrt{\mu_1}\left\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(1)1}q_{(2)1}\right\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{33} &= \sqrt{\mu_1}\left\{\phi_2 - \frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\left[p_{(2)1} + q_{(2)1}(\phi_2 - F_{(2)1})\right]^2\right\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{34} &= \sqrt{\mu_1}\left\{1 - \frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\left[p_{(2)1} + q_{(2)1}(\phi_2 - F_{(2)1})\right]q_{(2)1}\right\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{44} &= \sqrt{\mu_1}\left\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(2)1}^2\right\}.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

O termo $\Sigma_1^{(ph)}$ é dado por

$$\Sigma_1^{(ph)} = -\frac{3}{4}\ln\tau + \ln\left\{\mu_1^2\sqrt{\frac{\tau}{\mu_1^2 - \tau^2}}\Gamma_{11}\right\}. \tag{4.93}$$

**1-sóliton vS 6-dim para $\epsilon = -1$, $\phi_1 = \phi_2 = 0$**

Para esta escolha de funções $\phi_i$, a mais simples possível, temos que $F_{(1)1} = F_{(2)1} = 0$, então

$$\widetilde{\Delta}_{11} = \frac{2}{\mu_1^2 - \tau^2}[p_{(1)1}q_{(1)1} + p_{(2)1}q_{(2)1}], \tag{4.94}$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_1^{(ph)})_{11} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}p_{(1)1}^2\Big\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{12} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{1-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}p_{(1)1}q_{(1)1}\Big\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{13} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}p_{(1)1}p_{(2)1}\Big\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{14} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}p_{(1)1}q_{(2)1}\Big\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{22} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(1)1}^2\Big\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{23} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(1)1}p_{(2)1}\Big\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{24} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(1)1}q_{(2)1}\Big\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{33} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}p_{(2)1}^2\Big\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{34} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{1-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}p_{(2)1}q_{(2)1}\Big\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{44} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(2)1}^2\Big\},
\end{aligned}
\tag{4.95}
$$

e o coeficiente $\Sigma_1^{(ph)}$ é

$$
\Sigma_1^{(ph)} = -\frac{3}{4}\ln\tau + \ln\Big\{\mu_1^2\sqrt{\frac{\tau}{\mu_1^2-\tau^2}}\Gamma_{11}\Big\}. \tag{4.96}
$$

## Solução 2-sóliton para a semente vS

Para esta semente, temos que

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11} = hs_1^2\widetilde{\Delta}_{11} = \frac{hs_1^2}{\mu_1^2+\epsilon\tau^2}\big[&q_{(1)1}^2\phi_1 + 2q_{(1)1}(p_{(1)1}-q_{(1)1}F_{(1)1})+\\
&+q_{(2)1}^2\phi_2 + 2q_{(2)1}(p_{(2)1}-q_{(2)1}F_{(2)1})\big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{22} = hs_2^2\widetilde{\Delta}_{22} = \frac{hs_2^2}{\mu_2^2+\epsilon\tau^2}\big[&q_{(1)2}^2\phi_1 + 2q_{(1)2}(p_{(1)2}-q_{(1)2}F_{(1)2})+\\
&+q_{(2)2}^2\phi_2 + 2q_{(2)2}(p_{(2)2}-q_{(2)2}F_{(2)2})\big],
\end{aligned}
$$

$$\Gamma_{11} = hs_1s_2\widetilde{\Delta}_{11} = \frac{hs_1s_2}{\mu_1\mu_2+\epsilon\tau^2}\big[q_{(1)1}q_{(1)2}\phi_1 + q_{(1)1}(p_{(1)2}-q_{(1)2}F_{(1)2}) + q_{(1)2}(p_{(1)1}-q_{(1)1}F_{(1)1})$$
$$+ q_{(2)1}q_{(2)2}\phi_2 + q_{(2)1}(p_{(2)2}-q_{(2)2}F_{(2)2}) + q_{(2)2}(p_{(2)1}-q_{(2)1}F_{(2)1})\big],$$

As componentes de nossa matriz $\gamma_2$ são dadas por

$$(\gamma_2)_{ab} = (\gamma_0)_{ab} - \frac{N_a^{(1)}N_b^{(1)}\Gamma_{22}}{\mu_1^2\det(\Gamma)} - \frac{N_a^{(2)}N_b^{(2)}\Gamma_{11}}{\mu_2^2\det(\Gamma)} + \frac{\Gamma_{12}}{\mu_1\mu_2\det(\Gamma)}[N_a^{(1)}N_b^{(2)} + N_a^{(2)}N_b^{(1)}]. \tag{4.97}$$

onde $a,b = 1,2,3,4$; e o determinante de $\gamma_2$ é

$$\det(\gamma_2) = \frac{\tau^4}{\mu_1^2\mu_2^2}\det(\gamma_0). \tag{4.98}$$

Portanto, as componentes da matriz $\gamma_2^{(ph)}$ são

$$\begin{aligned}
(\gamma_2^{(ph)})_{11} &= \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\left\{\phi_1 - \frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}[\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{p}^2_{(1)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{p}^2_{(1)2} - 2\widetilde{\Delta}_{12}\widetilde{p}_{(1)1}\widetilde{p}_{(1)2}]\right\},\\
(\gamma_2^{(ph)})_{12} &= \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\left\{1 - \frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}[\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{p}_{(1)1}\widetilde{q}_{(1)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{p}_{(1)2}\widetilde{q}_{(1)2} - \widetilde{\Delta}_{12}(\widetilde{p}_{(1)1}\widetilde{q}_{(1)2} + \widetilde{p}_{(1)2}\widetilde{q}_{(1)1})]\right\},\\
(\gamma_2^{(ph)})_{13} &= -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\big\{\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{p}_{(1)1}\widetilde{p}_{(2)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{p}_{(1)2}\widetilde{p}_{(2)2} - \widetilde{\Delta}_{12}[\widetilde{p}_{(1)1}\widetilde{p}_{(2)2} + \widetilde{p}_{(1)2}\widetilde{p}_{(2)1}]\big\},\\
(\gamma_2^{(ph)})_{14} &= -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\big\{\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{p}_{(1)1}\widetilde{q}_{(2)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{p}_{(1)2}\widetilde{q}_{(2)2} - \widetilde{\Delta}_{12}[\widetilde{p}_{(1)1}\widetilde{q}_{(2)2} + \widetilde{p}_{(1)2}\widetilde{q}_{(2)1}]\big\},\\
(\gamma_2^{(ph)})_{22} &= -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\big\{\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{q}^2_{(1)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{q}^2_{(1)2} - 2\widetilde{\Delta}_{12}\widetilde{q}_{(1)1}\widetilde{q}_{(1)2}\big\},
\end{aligned} \tag{4.99}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma_2^{(ph)})_{23} &= -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\big\{\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{p}_{(2)1}\widetilde{q}_{(1)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{p}_{(2)2}\widetilde{q}_{(1)2} - \widetilde{\Delta}_{12}[\widetilde{p}_{(2)2}\widetilde{q}_{(1)1} + \widetilde{p}_{(2)1}\widetilde{q}_{(1)2}]\big\},\\
(\gamma_2^{(ph)})_{24} &= -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\big\{\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{q}_{(1)1}\widetilde{q}_{(2)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{q}_{(1)2}\widetilde{q}_{(2)2} - \widetilde{\Delta}_{12}[\widetilde{q}_{(1)1}\widetilde{q}_{(2)2} + \widetilde{q}_{(1)2}\widetilde{q}_{(2)1}]\big\},\\
(\gamma_2^{(ph)})_{33} &= \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\left\{\phi_2 - \frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}[\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{p}^2_{(2)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{p}^2_{(2)2} - 2\widetilde{\Delta}_{12}\widetilde{p}_{(2)1}\widetilde{p}_{(2)2}]\right\},\\
(\gamma_2^{(ph)})_{34} &= \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\left\{1 - \frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}[\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{p}_{(2)1}\widetilde{q}_{(2)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{p}_{(2)2}\widetilde{q}_{(2)2} - \widetilde{\Delta}_{12}(\widetilde{p}_{(2)1}\widetilde{q}_{(2)2} + \widetilde{p}_{(2)2}\widetilde{q}_{(2)1})]\right\},\\
(\gamma_2^{(ph)})_{44} &= -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\big\{\widetilde{\Delta}_{22}\widetilde{q}^2_{(2)1} + \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{q}^2_{(2)2} - 2\widetilde{\Delta}_{12}\widetilde{q}_{(2)1}\widetilde{q}_{(2)2}\big\},
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Onde utilizamos a notação,

$$\widetilde{p}_{(j)k} = \frac{1}{\mu_k}\big[p_{(j)k} + q_{(j)k}(\phi_j - F_{(j)k})\big], \tag{4.101}$$

$$\widetilde{q}_{(j)k} = \frac{q_{(j)k}}{\mu_k}, \tag{4.102}$$

para $j, k = 1, 2$, e

$$\det(\widetilde{\Delta}) = \widetilde{\Delta}_{11}\widetilde{\Delta}_{22} - \widetilde{\Delta}_{12}^2. \tag{4.103}$$

O termo $\Sigma_2^{(ph)}$ é dado por,

$$\Sigma_2^{(ph)} = -\frac{3}{4}\ln\tau + \ln\big\{(\mu_1\mu_2)^{5/2}(\mu_1^2 + \epsilon\tau^2)^{-1/2}(\mu_2^2 + \epsilon\tau^2)^{-1/2}(\mu_2 - \mu_1)^{-1}\det\Gamma\big\} \tag{4.104}$$

Como exemplo, considerarmos a solução 2-sóliton para uma métrica que tem um bloco tipo Kasner.

**2-sóliton vS 6-dim com $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = \ln\tau$, $\epsilon = -1$**

Neste caso, $F_{(1)1} = F_{(1)2} = 0$, $F_{(2)}1 = \ln\sqrt{\mu_1}$ e $F_{(2)2} = \ln\sqrt{\mu_2}$. Então, de (4.70) temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}_{(1)1} &= \frac{1}{\mu_1}\big[p_{(1)1} + q_{(1)1}(\phi_1 - F_{(1)1})\big] = \frac{p_{(1)1}}{\mu_1},\\
\widetilde{p}_{(1)2} &= \frac{1}{\mu_2}\big[p_{(1)2} + q_{(1)2}(\phi_1 - F_{(1)2})\big] = \frac{p_{(1)2}}{\mu_2},\\
\widetilde{p}_{(2)1} &= \frac{1}{\mu_1}\big[p_{(2)1} + q_{(2)1}(\phi_2 - F_{(2)1})\big] = \frac{1}{\mu_1}\left[p_{(2)1} + q_{(2)1}\ln\Big(\frac{\tau}{\sqrt{\mu_1}}\Big)\right],\\
\widetilde{p}_{(2)2} &= \frac{1}{\mu_2}\big[p_{(2)2} + q_{(2)2}(\phi_2 - F_{(2)2})\big] = \frac{1}{\mu_2}\left[p_{(2)2} + q_{(2)2}\ln\Big(\frac{\tau}{\sqrt{\mu_2}}\Big)\right],
\end{aligned} \tag{4.105}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{q}_{(1)1} &= \frac{q_{(1)1}}{\mu_1},\\
\widetilde{q}_{(1)2} &= \frac{q_{(1)2}}{\mu_2},\\
\widetilde{q}_{(2)1} &= \frac{q_{(2)1}}{\mu_1},\\
\widetilde{q}_{(2)2} &= \frac{q_{(2)2}}{\mu_2},
\end{aligned} \tag{4.106}$$

e as componentes $\widetilde{\Delta}_{lk}$ são

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}_{11} &= \frac{1}{\mu_1^2-\tau^2}\left[\eta_1 p_{(1)1}^2 + q_{(1)1}^2 + \eta_2 p_{(2)1}^2\left(\frac{\tau}{\mu_1}\right) + q_{(2)1}^2\left(\frac{\mu_1}{\tau}\right)\right],\\
\widetilde{\Delta}_{22} &= \frac{1}{\mu_2^2-\tau^2}\left[\eta_1 p_{(1)2}^2 + q_{(1)2}^2 + \eta_2 p_{(2)2}^2\left(\frac{\tau}{\mu_2}\right) + q_{(2)2}^2\left(\frac{\mu_2}{\tau}\right)\right],\\
\widetilde{\Delta}_{12} &= \frac{1}{\mu_1\mu_2-\tau^2}\left[\eta_1 p_{(1)1}p_{(1)2} + q_{(1)1}q_{(1)2} + \eta_2 p_{(2)1}p_{(2)2}\left(\frac{\tau}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\right) + q_{(2)1}q_{(2)2}\left(\frac{\sqrt{\mu_1\mu_2}}{\tau}\right)\right].
\end{aligned} \tag{4.107}$$

precisamos só fazer a substituição dessas expressões nas equações anteriores para obter as componentes de $\gamma_2^{(ph)}$. O termo $\Sigma_2^{(ph)}$ é dado por

$$\Sigma_2^{(ph)} = -\frac{3}{4}\ln\tau + \ln\left\{(\mu_1\mu_2)^{5/2}(\mu_1^2-\tau^2)^{-1/2}(\mu_2^2-\tau^2)^{-1/2}(\mu_2-\mu_1)^{-1}\det\Gamma\right\}. \tag{4.108}$$

## 4.4 Semente Einstein-Rosen-van Stockum (ERS)

Nesta seção, vamos estudar as soluções 1- e 2-solitônicas para uma semente que mistura os dois casos anteriores. Esta semente, à qual nos referimos como ERS, em dimensão 6, tem a forma

$$ds^2 = e^{\Sigma_0}(d\rho^2+\epsilon d\tau^2) + \sqrt{\tau}\left[\eta\exp(\phi)d\varphi_1^2 + \exp(-\phi)d\xi_1^2 + \varphi d\varphi_2^2 + 2d\varphi_2 d\xi_2\right], \tag{4.109}$$

onde $\phi$ e $\varphi$ são funções das coordenadas $(\rho,\tau)$ e o termo $\Sigma_0$ é dado por

$$\Sigma_0 = -\frac{3}{4}\ln(\tau) + \frac{1}{2}\int \tau[(\phi_{,\tau}^2 - \epsilon\phi_{,\rho}^2)d\tau + 2(\phi_{,\tau}\phi_{,\rho})d\rho]. \tag{4.110}$$

De novo, podemos reescrever esta métrica na forma matricial

$$ds^2 = e^{\Sigma_0}(d\rho^2+\epsilon d\tau^2) + (\gamma_0)_{ab}dx^a dx^b, \tag{4.111}$$

em que

$$\gamma_0 = h\begin{pmatrix} \eta\exp(\phi) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \exp(-\phi) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varphi & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{4.112}$$

com $h=\sqrt{\tau}$. Esta matriz é formada por un bloco ERW e un bloco vS. Notaremos por $\gamma_{0(1)}$ o bloco ERW e por $\gamma_{0(2)}$ o bloco vS, assim

$$\gamma_{0(1)} = h\begin{pmatrix} \eta\exp(\phi) & 0 \\ 0 & \exp(-\phi)\end{pmatrix}, \qquad \gamma_{0(2)} = h\begin{pmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{4.113}$$

Fazendo as mudanças de função dadas por (4.26), com $N=2$, obtemos os sistemas dados por (4.37),(4.38),(4.83) e (4.84). Podemos considerar como soluções destes sistemas as matrizes dadas por (4.39) e (4.85). Se levamos em consideração (4.41) e (4.43), então achamos que podemos fazer uso da seguinte matriz $\Lambda$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \Lambda_{(2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(F_{(1)k}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-F_{(1)k}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{(2)k} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{4.114}$$

para construir as nossas soluções solitônicas. Na verdade, temos que

$$M^{(k)} = \psi^{-1}\mid_{\lambda=\mu_k} = s_k\begin{pmatrix} \exp(-F_{(1)k}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(F_{(1)k}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -F_{(2)k}\end{pmatrix}, \tag{4.115}$$

onde utilizamos (4.46) com $N=2$. Portanto,

$$\begin{aligned} m_1^{(k)} &= s_k p_{(1)k}\exp(-F_{(1)k}), \\ m_2^{(k)} &= s_k q_{(1)k}\exp(F_{(1)k}), \\ m_3^{(k)} &= s_k q_{(2)k}, \\ m_4^{(k)} &= s_k\big[p_{(2)k} - q_{(2)k}F_{(2)k}\big], \end{aligned} \tag{4.116}$$

$$\begin{aligned} N_1^{(k)} &= hs_k\eta p_{(1)k}\exp(\phi - F_{(1)k}), \\ N_2^{(k)} &= hs_k q_{(1)k}\exp(F_{(1)k} - \phi), \\ N_3^{(k)} &= hs_k\big[p_{(2)k} + q_{(2)k}(\varphi - F_{(2)k})\big], \\ N_4^{(k)} &= hs_k q_{(2)k}, \end{aligned} \tag{4.117}$$

$$\widetilde{\Delta}_{11} = \frac{1}{\mu_1^2 + \epsilon\tau^2}\Big\{\eta p_{(1)1}^2 \exp(\phi - 2F_{(1)1}) + q_{(1)1}^2 \exp(2F_{(1)1} - \phi) + q_{(2)1}\big[2p_{(2)1} + q_{(2)1}(\varphi - 2F_{(2)1})\big]\Big\},$$
$$\widetilde{\Delta}_{22} = \frac{1}{\mu_2^2 + \epsilon\tau^2}\Big\{\eta p_{(1)2}^2 \exp(\phi - 2F_{(1)2}) + q_{(1)2}^2 \exp(2F_{(1)2} - \phi) + q_{(2)2}\big[2p_{(2)2} + q_{(2)2}(\varphi - 2F_{(2)2})\big]\Big\}, \tag{4.118}$$

$$\widetilde{\Delta}_{12} = \frac{1}{\mu_1\mu_2 + \epsilon\tau^2}\Big\{\eta p_{(1)1}p_{(1)2} \exp(\phi - F_{(1)1} - F_{(1)2}) + q_{(1)1}q_{(1)2} \exp(F_{(1)1} - F_{(1)2} - \phi)$$
$$+ q_{(2)1}\big[p_{(2)2} - q_{(2)2}(\varphi - F_{(2)2})\big] + q_{(2)2}\big[p_{(2)1} - q_{(2)1}(\varphi - F_{(2)1})\big] + q_{(2)1}q_{(2)2}\varphi\Big\}, \tag{4.119}$$

### Soluções 1-sóliton para a semente ERS

O cálculo do determinante de $\gamma_1$ leva de novo a

$$\det(\gamma_1) = (-\epsilon)\frac{\tau^2}{\mu_1^2}\det(\gamma_0), \tag{4.120}$$

portanto, considerando $\epsilon = -1$ para obter a signatura correta, temos que a matriz física é dada por

$$\gamma_1^{(ph)} = \frac{\sqrt{\mu_1}}{h}\gamma_1. \tag{4.121}$$

Especificamente, as componentes de $\gamma_1^{(ph)}$ são

$$(\gamma_1^{(ph)})_{11} = \sqrt{\mu_1}\Big\{\eta \exp(\phi) - \frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}p_{(1)1}^2 \exp(2\phi - 2F_{(1)1})\Big\},$$
$$(\gamma_1^{(ph)})_{11} = \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\eta p_{(1)1}q_{(1)1}\Big\},$$
$$(\gamma_1^{(ph)})_{13} = \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\eta p_{(1)1}\big[p_{(2)1} + q_{(2)1}(\varphi - F_{(2)1})\big] \exp(\phi - F_{(1)1})\Big\}, \tag{4.122}$$
$$(\gamma_1^{(ph)})_{14} = \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\eta p_{(1)1}q_{(2)1} \exp(\phi - F_{(1)1})\Big\},$$
$$(\gamma_1^{(ph)})_{22} = \sqrt{\mu_1}\Big\{\exp(-\phi) - \frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(1)1}^2 \exp(2F_{(1)1} - 2\phi)\Big\},$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_1^{(ph)})_{23} &= \sqrt{\mu_1}\bigg\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(1)1}\big[p_{(2)1}+q_{(2)1}(\varphi-F_{(2)1})\big]\exp(F_{(1)1}-\phi)\bigg\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{24} &= \sqrt{\mu_1}\bigg\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(1)1}q_{(2)1}\exp(F_{(1)1}-\phi)\bigg\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{33} &= \sqrt{\mu_1}\bigg\{\varphi-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\big[p_{(2)1}+q_{(2)1}(\varphi-F_{(2)1})\big]^2\bigg\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{34} &= \sqrt{\mu_1}\bigg\{1-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(2)1}\big[p_{(2)1}+q_{(2)1}(\varphi-F_{(2)1})\big]\bigg\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{44} &= \sqrt{\mu_1}\bigg\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(2)1}^2\bigg\},
\end{aligned}
\tag{4.123}
$$

e o termo $\Sigma_1^{(ph)}$ é

$$
\Sigma_1^{(ph)} = -\frac{3}{4}\ln\tau+\frac{1}{2}\int\tau\big[(\phi_{,\tau}^2+\phi_{,\rho}^2)d\tau+2(\phi_{,\tau}\phi_{,\rho})d\rho\big]+\ln\bigg\{\mu_1^2\sqrt{\frac{\tau}{\mu_1^2-\tau^2}}\Gamma_{11}\bigg\}. \tag{4.124}
$$

**1-sóliton ERS 6-dim para $\phi=\varphi=0$ e $\epsilon=-1$**

Neste caso, talvez o exemplo mais simples, a semente é

$$
ds^2 = e^{\Sigma_0}(d\rho^2-d\tau^2)+\sqrt{\tau}\Big[\eta d\varphi_1^2+d\xi_1^2+2d\varphi_2 d\xi_2\Big], \tag{4.125}
$$

e as componentes da matriz $\gamma_1^{(ph)}$ são

$$
\begin{aligned}
(\gamma_1^{(ph)})_{11} &= \sqrt{\mu_1}\bigg\{\eta-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}p_{(1)1}^2\bigg\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{11} &= \sqrt{\mu_1}\bigg\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\eta p_{(1)1}q_{(1)1}\bigg\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{13} &= \sqrt{\mu_1}\bigg\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\eta p_{(1)1}p_{(2)1}\bigg\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{14} &= \sqrt{\mu_1}\bigg\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\eta p_{(1)1}q_{(2)1}\bigg\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{22} &= \sqrt{\mu_1}\bigg\{1-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(1)1}^2\bigg\},
\end{aligned}
\tag{4.126}
$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_1^{(ph)})_{23} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(1)1}p_{(2)1}\Big\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{24} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(1)1}q_{(2)1}\Big\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{33} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}p_{(2)1}^2\Big\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{34} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{1-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(2)1}p_{(2)1}\Big\},\\
(\gamma_1^{(ph)})_{44} &= \sqrt{\mu_1}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}q_{(2)1}^2\Big\},
\end{aligned}
\tag{4.127}
$$

onde

$$
\widetilde{\Delta}_{11} = \frac{1}{\mu_1^2-\tau^2}\{\eta p_{(1)1}^2 + q_{(1)1}^2 + 2q_{(2)1}p_{(2)1}\},
\tag{4.128}
$$

e o termo $\Sigma_1^{(ph)}$ é

$$
\Sigma_1^{(ph)} = -\frac{3}{4}\ln\tau + \ln\Big\{\mu_1^2\sqrt{\frac{\tau}{\mu_1^2-\tau^2}}\Gamma_{11}\Big\}.
\tag{4.129}
$$

### Soluções 2-sóliton para a semente ERS

O cálculo do determinante de $\gamma_1$ da

$$
\det(\gamma_2) = \frac{\tau^4}{\mu_1^2\mu_2^2}\det(\gamma_0),
\tag{4.130}
$$

portanto, a matriz física é dada por

$$
\gamma_2^{(ph)} = \frac{\sqrt{\mu_1\mu_2}}{h\sqrt{\tau}}\gamma_2.
\tag{4.131}
$$

As componentes de $\gamma_2^{(ph)}$ são,

$$
\begin{aligned}
(\gamma_2^{(ph)})_{11} = \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{\eta\exp(\phi) - \frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\Big[&\frac{\widetilde{\Delta}_{22}}{\mu_1^2}p_{(1)1}^2\exp(2\phi-2F_{(1)1}) + \frac{\widetilde{\Delta}_{11}}{\mu_2^2}p_{(1)2}^2\exp(2\phi-2F_{(1)2})\\
&- 2\frac{\widetilde{\Delta}_{12}}{\mu_1\mu_2}p_{(1)1}p_{(1)2}\exp(2\phi-F_{(1)1}-F_{(1)2})\Big]\Big\},
\end{aligned}
\tag{4.132}
$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_2^{(ph)})_{12} = -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{&\frac{\widetilde{\Delta}_{22}}{\mu_1^2}\eta p_{(1)1}q_{(1)1} + \frac{\widetilde{\Delta}_{11}}{\mu_2^2}\eta p_{(1)2}q_{(1)2}\\
&- \frac{\widetilde{\Delta}_{12}}{\mu_1\mu_2}\big[\eta p_{(1)1}q_{(1)2}\exp(F_{(1)2}-F_{(1)1}) + \eta p_{(1)2}q_{(1)1}\exp(F_{(1)1}-F_{(1)2})\big]\Big\},
\end{aligned}
\tag{4.133}
$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_2^{(ph)})_{13} = -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\bigg\{ & \frac{\widetilde{\Delta}_{22}}{\mu_1^2}\eta p_{(1)1}\big[p_{(2)1} + q_{(2)1}(\varphi - F_{(2)1})\big]\exp(\phi - F_{(1)1}) \\
& + \frac{\widetilde{\Delta}_{11}}{\mu_2^2}\eta p_{(1)2}\big[p_{(2)2} + q_{(2)2}(\varphi - F_{(2)2})\big]\exp(\phi - F_{(1)2}) \\
& - \frac{\widetilde{\Delta}_{12}}{\mu_1\mu_2}\Big\{\eta p_{(1)1}\big[p_{(2)2} + q_{(2)2}(\varphi - F_{(2)2})\big]\exp(\phi - F_{(1)1}) \\
& + \eta p_{(1)2}\big[p_{(2)1} + q_{(2)1}(\varphi - F_{(2)1})\big]\exp(\phi - F_{(1)2})\Big\}\bigg\},
\end{aligned} \tag{4.134}
$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_2^{(ph)})_{14} = -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\bigg\{ & \frac{\widetilde{\Delta}_{22}}{\mu_1^2}\eta p_{(1)1}q_{(2)1}\exp(\phi - F_{(1)1}) + \frac{\widetilde{\Delta}_{11}}{\mu_2^2}\eta p_{(1)2}q_{(2)2}\exp(\phi - F_{(1)2}) \\
& - \frac{\widetilde{\Delta}_{12}}{\mu_1\mu_2}\big[\eta p_{(1)1}q_{(2)2}\exp(\phi - F_{(1)1}) + \eta p_{(1)2}q_{(2)1}\exp(\phi - F_{(1)2})\big]\bigg\},
\end{aligned} \tag{4.135}
$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_2^{(ph)})_{22} = \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\bigg\{\exp(-\phi) - \frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\Big[ & \frac{\widetilde{\Delta}_{22}}{\mu_1^2}q_{(1)1}^2\exp(2F_{(1)1} - 2\phi) + \frac{\widetilde{\Delta}_{11}}{\mu_2^2}q_{(1)2}^2\exp(2F_{(1)2} - 2\phi) \\
& - 2\frac{\widetilde{\Delta}_{12}}{\mu_1\mu_2}q_{(1)1}q_{(1)2}\exp(F_{(1)1} + F_{(1)2} - 2\phi)\Big]\bigg\},
\end{aligned} \tag{4.136}
$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_2^{(ph)})_{23} = -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\bigg\{ & \frac{\widetilde{\Delta}_{22}}{\mu_1^2}q_{(1)1}\big[p_{(2)1} + q_{(2)1}(\varphi - F_{(2)1})\big]\exp(F_{(1)1} - \phi) \\
& + \frac{\widetilde{\Delta}_{11}}{\mu_2^2}q_{(1)2}\big[p_{(2)2} + q_{(2)2}(\varphi - F_{(2)2})\big]\exp(F_{(1)2} - \phi) \\
& - \frac{\widetilde{\Delta}_{12}}{\mu_1\mu_2}\Big\{q_{(1)1}\big[p_{(2)2} + q_{(2)2}(\varphi - F_{(2)2})\big]\exp(F_{(1)1} - \phi) \\
& + q_{(1)2}\big[p_{(2)1} + q_{(2)1}(\varphi - F_{(2)1})\big]\exp(F_{(1)2} - \phi)\Big\}\bigg\},
\end{aligned} \tag{4.137}
$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_2^{(ph)})_{24} = -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\bigg\{ & \frac{\widetilde{\Delta}_{22}}{\mu_1^2}q_{(1)1}q_{(2)1}\exp(F_{(1)1} - \phi) + \frac{\widetilde{\Delta}_{11}}{\mu_2^2}q_{(1)2}q_{(2)2}\exp(F_{(1)2} - \phi) \\
& - \frac{\widetilde{\Delta}_{12}}{\mu_1\mu_2}\big[q_{(1)1}q_{(2)2}\exp(F_{(1)1} - \phi) + q_{(1)2}q_{(2)1}\exp(F_{(1)2} - \phi)\big]\bigg\},
\end{aligned} \tag{4.138}
$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_2^{(ph)})_{33} = \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{\varphi - \frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\Big[&\frac{\widetilde{\Delta}_{22}}{\mu_1^2}\big[p_{(2)1} + q_{(2)1}(\varphi - F_{(2)1})\big]^2 \\
&+ \frac{\widetilde{\Delta}_{11}}{\mu_2^2}\big[p_{(2)2} + q_{(2)2}(\varphi - F_{(2)2})\big]^2 \\
&- 2\frac{\widetilde{\Delta}_{12}}{\mu_1\mu_2}q_{(1)1}\big[p_{(2)1} + q_{(2)1}(\varphi - F_{(2)1})\big]\big[p_{(2)2} + q_{(2)2}(\varphi - F_{(2)2})\big]\Big]\Big\},
\end{aligned}
\tag{4.139}
$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_2^{(ph)})_{34} = \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{1 - \frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\Big[&\frac{\widetilde{\Delta}_{22}}{\mu_1^2}q_{(2)1}[p_{(2)1} + q_{(2)1}(\varphi - F_{(2)1})] \\
&+ \frac{\widetilde{\Delta}_{11}}{\mu_2^2}q_{(2)2}[p_{(2)2} + q_{(2)2}(\varphi - F_{(2)2})] \\
&- \frac{\widetilde{\Delta}_{12}}{\mu_1\mu_2}\big\{q_{(2)2}[p_{(2)1} + q_{(2)1}(\varphi - F_{(2)1})] \\
&+ q_{(2)1}[p_{(2)2} + q_{(2)2}(\varphi - F_{(2)2})]\big\}\Big]\Big\},
\end{aligned}
\tag{4.140}
$$

$$
(\gamma_2^{(ph)})_{44} = -\frac{1}{\det(\widetilde{\Delta})}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\tau}}\Big\{\frac{\widetilde{\Delta}_{22}}{\mu_1^2}q_{(2)1}^2 + \frac{\widetilde{\Delta}_{11}}{\mu_2^2}q_{(2)2}^2 - 2\frac{\widetilde{\Delta}_{12}}{\mu_1\mu_2}q_{(2)1}q_{(2)2}\Big\}, \tag{4.141}
$$

e o coeficiente $\Sigma_2$ é

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1^{(ph)} = -\frac{3}{4}\ln\tau + \frac{1}{2}\int\tau\big[(\phi_{,\tau}^2 - \epsilon\phi_{,\rho}^2)d\tau + 2(\phi_{,\tau}\phi_{,\rho})d\rho\big] \\
+ \ln\Big\{(\mu_1\mu_2)^{5/2}(\mu_1^2 - \tau^2)^{-1/2}(\mu_2^2 - \tau^2)^{-1/2}(\mu_2 - \mu_1)^{-1}\det\Gamma\Big\}.
\end{aligned}
\tag{4.142}
$$

## 4.5 Generalização ao caso (2N+2)-dimensional

Nesta seção vamos generalizar os resultados obtidos para a semente ERS no caso $2N+2$-dimensional. As sementes ERW (todos os blocos tipo ERW) e vS (todos os blocos tipo vS) são casos particulares de esta generalização.

Consideramos a semente

$$
ds^2 = e^{\Sigma_0}(d\rho^2 + \epsilon d\tau^2) + (\gamma_0)_{ab}dx^a dx^b, \tag{4.143}
$$

em que a matriz 2N-dimensional $\gamma_0$ é da forma

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \gamma_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{(N)} \end{pmatrix}, \tag{4.144}$$

onde os primeiros $p$ blocos $\gamma_{(j)}$ tem a forma ERW, ou seja

$$\gamma_{(j)} = h \begin{pmatrix} \eta_j \exp(\phi_j) & 0 \\ 0 & \exp(-\phi_j) \end{pmatrix}, \tag{4.145}$$

e os restantes $q = N - p$ blocos tem a forma vS

$$\gamma_{(j)} = h \begin{pmatrix} \phi_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.146}$$

Vamos considerar que $p$ e $q$ podem ser 0, para poder incluir as extensões diretas das sementes ERW e vS. O termo $\Sigma_0$ é

$$\Sigma_0 = \frac{1-2N}{2N}\ln(\tau) + \frac{1}{2}\int \tau\Big[\sum_{i=1}^{p}(\phi_{i,\tau}^2 - \epsilon\phi_{i,\rho}^2)d\tau + 2\sum_{i=1}^{p}(\phi_{i,\tau}\phi_{i,\rho})d\rho\Big], \tag{4.147}$$

para $p \geq 1$ e

$$\Sigma_0 = \frac{1-2N}{2N}\ln(\tau), \tag{4.148}$$

para $p = 0$. Usaremos a seguinte notação para o vetor BZ

$$m_{0(2j-1)}^{(k)} = \begin{cases} \eta_j p_{(j)k}, & \text{se } 1 \leq j \leq p, \\ p_{(j)k}, & \text{se } p+1 \leq j \leq N, \end{cases} \tag{4.149}$$

$$m_{0(2j)}^{(k)} = q_{(j)k}, \qquad \text{se } 1 \leq j \leq N. \tag{4.150}$$

Os termos $\widetilde{p}_{(j)k}$ e $\widetilde{q}_{(j)k}$ usados nas seções anteriores podem ser generalizados na seguinte forma

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_{(j)k} &= \frac{1}{\mu_k}\Big(\frac{N_{2j-1}^{(k)}}{hs_k}\Big), \\ \widetilde{q}_{(j)k} &= \frac{1}{\mu_k}\Big(\frac{N_{2j}^{(k)}}{hs_k}\Big), \end{aligned} \tag{4.151}$$

onde $j = 1, \ldots, N$. Em particular, se $j \leq p$, então

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_{(j)k} &= \frac{1}{\mu_k}\eta_j p_{(j)k} \exp(\phi_j - F_{(j)k}), \\ \widetilde{q}_{(j)k} &= \frac{1}{\mu_k} q_{(j)k} \exp(F_{(j)k} - \phi_j), \end{aligned} \tag{4.152}$$

e se $p + 1 \leq j \leq N$, então temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_{(j)k} &= \frac{1}{\mu_k}\big[p_{(j)k} + q_{(j)k}(\phi_j - F_{(j)k})\big], \\ \widetilde{q}_{(j)k} &= \frac{1}{\mu_k} q_{(j)k}. \end{aligned} \tag{4.153}$$

## Soluções 1-sóliton

Lembremos que as componentes da matriz $\gamma_1$ são dadas por

$$(\gamma_1)_{ab} = (\gamma_0)_{ab} - \frac{1}{\mu_1^2 \Gamma_{11}} N_a^{(1)} N_b^{(1)}, \tag{4.154}$$

e seu determinante é

$$\det \gamma_1 = -\epsilon \frac{\tau^2}{\mu_1^2} \det \gamma_0. \tag{4.155}$$

Portanto, considerando $\epsilon = -1$ para obter a signatura correcta, temos que a matriz $\gamma_1^{(ph)}$ é

$$\gamma_1^{(ph)} = \frac{\mu_1^{1/N}}{h}\gamma_1. \tag{4.156}$$

As componentes de $\gamma_1^{(ph)}$ estão dadas por

$$\begin{aligned} (\gamma_1^{(ph)})_{(2i-1)(2j-1)} &= \mu_1^{1/N}\left\{\frac{1}{h}(\gamma_0)_{(2i-1)(2j-1)} - \frac{1}{\widetilde{\Delta}_{11}}\widetilde{p}_{(i)1}\widetilde{p}_{(j)1}\right\}, \\ (\gamma_1^{(ph)})_{(2i-1)(2j)} &= \mu_1^{1/N}\left\{\frac{1}{h}(\gamma_0)_{(2i-1)(2j)} - \frac{1}{\widetilde{\Delta}_{11}}\widetilde{p}_{(i)1}\widetilde{q}_{(j)1}\right\}, \\ (\gamma_1^{(ph)})_{(2i)(2j-1)} &= \mu_1^{1/N}\left\{\frac{1}{h}(\gamma_0)_{(2i)(2j-1)} - \frac{1}{\widetilde{\Delta}_{11}}\widetilde{q}_{(i)1}\widetilde{p}_{(j)1}\right\}, \\ (\gamma_1^{(ph)})_{(2i)(2j)} &= \mu_1^{1/N}\left\{\frac{1}{h}(\gamma_0)_{(2i)(2j)} - \frac{1}{\widetilde{\Delta}_{11}}\widetilde{q}_{(i)1}\widetilde{q}_{(j)1}\right\}, \end{aligned} \tag{4.157}$$

onde $i, j = 1, \ldots, N$, com $i \leq j$.

O coeficiente $\Sigma_1^{(ph)}$ é

$$\Sigma_1^{(ph)} = \Sigma_0 + \ln\big\{\tau^{(2N-3)/N}\mu_1^2(\mu_1^2 - \tau^2)^{(1-N)/N}\Gamma_{11}\big\}. \tag{4.158}$$

## Soluções 2-sóliton

As componentes da matriz $\gamma_2$ são dadas por

$$(\gamma_2)_{ab} = (\gamma_0)_{ab} - \frac{\Gamma_{22}}{\mu_1^2 \det \Gamma} N_a^{(1)} N_b^{(1)} - \frac{\Gamma_{11}}{\mu_2^2 \det \Gamma} N_a^{(2)} N_b^{(2)} + \frac{\Gamma_{12}}{\mu_1 \mu_2 \det \Gamma} [N_a^{(1)} N_b^{(2)} + N_a^{(2)} N_b^{(1)}], \quad (4.159)$$

e seu determinante é

$$\det \gamma_2 = \frac{\tau^4}{\mu_1 \mu_2} \det \gamma_0. \quad (4.160)$$

Portanto, a matriz $\gamma_2^{(ph)}$ é

$$\gamma_2^{(ph)} = \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\tau}\right)^{1/N} \frac{1}{h} \gamma_2. \quad (4.161)$$

As componentes de $\gamma_2^{(ph)}$ estão dadas por

$$(\gamma_2^{(ph)})_{(2i-1)(2j-1)} = \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\tau}\right)^{1/N} \left\{ \frac{1}{h} (\gamma_0)_{(2i-1)(2j-1)} - \frac{1}{\det \widetilde{\Delta}} \left[ \widetilde{\Delta}_{22} \widetilde{p}_{(i)1} \widetilde{p}_{(j)1} + \widetilde{\Delta}_{11} \widetilde{p}_{(i)2} \widetilde{p}_{(j)2} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \widetilde{\Delta}_{12} \{ \widetilde{p}_{(i)1} \widetilde{p}_{(j)2} + \widetilde{p}_{(i)2} \widetilde{p}_{(j)1} \} \right] \right\}, \quad (4.162)$$

$$(\gamma_2^{(ph)})_{(2i-1)(2j)} = \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\tau}\right)^{1/N} \left\{ \frac{1}{h} (\gamma_0)_{(2i-1)(2j)} - \frac{1}{\det \widetilde{\Delta}} \left[ \widetilde{\Delta}_{22} \widetilde{p}_{(i)1} \widetilde{q}_{(j)1} + \widetilde{\Delta}_{11} \widetilde{p}_{(i)2} \widetilde{q}_{(j)2} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \widetilde{\Delta}_{12} \{ \widetilde{p}_{(i)1} \widetilde{q}_{(j)2} + \widetilde{p}_{(i)2} \widetilde{q}_{(j)1} \} \right] \right\}, \quad (4.163)$$

$$(\gamma_2^{(ph)})_{(2i)(2j-1)} = \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\tau}\right)^{1/N} \left\{ \frac{1}{h} (\gamma_0)_{(2i)(2j-1)} - \frac{1}{\det \widetilde{\Delta}} \left[ \widetilde{\Delta}_{22} \widetilde{q}_{(i)1} \widetilde{p}_{(j)1} + \widetilde{\Delta}_{11} \widetilde{q}_{(i)2} \widetilde{p}_{(j)2} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \widetilde{\Delta}_{12} \{ \widetilde{q}_{(i)1} \widetilde{p}_{(j)2} + \widetilde{q}_{(i)2} \widetilde{p}_{(j)1} \} \right] \right\}, \quad (4.164)$$

$$(\gamma_2^{(ph)})_{(2i)(2j)} = \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\tau}\right)^{1/N} \left\{ \frac{1}{h} (\gamma_0)_{(2i)(2j)} - \frac{1}{\det \widetilde{\Delta}} \left[ \widetilde{\Delta}_{22} \widetilde{q}_{(i)1} \widetilde{q}_{(j)1} + \widetilde{\Delta}_{11} \widetilde{q}_{(i)2} \widetilde{q}_{(j)2} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \widetilde{\Delta}_{12} \{ \widetilde{q}_{(i)1} \widetilde{q}_{(j)2} + \widetilde{q}_{(i)2} \widetilde{q}_{(j)1} \} \right] \right\}, \quad (4.165)$$

onde $i, j = 1, \ldots, N$, com $i \leq j$.

O coeficiente $\Sigma_2^{(ph)}$ é

$$\Sigma_2^{(ph)} = \Sigma_0 + \ln \left\{ \tau^{(4N-8)/N} \prod_{k=1}^{2} [\mu_k^{(1+2N)/N} (\mu_k^2 + \epsilon \tau^2)^{(1-N)/N}] (\mu_2 - \mu_1)^{-2/N} \det \Gamma \right\}. \quad (4.166)$$

Neste caso, $\det \Gamma = \Gamma_{11} \Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2$.

# 5

# Aplicações à teoria efetiva de baixa energia de Kaluza-Klein em quatro dimensões

Neste capítulo, aplicamos os nossos resultados para ilustrar e estender o procedimento descrito em [19], [20], [37], utilizado para estudar o limite de baixa energia da teoria de Kaluza-Klein em seis dimensões e sua interpretação quatro dimensional.

Uma teoria D-dimensional de Kaluza-Klein caracteriza-se por uma métrica $\gamma_{AB}$ da forma

$$ds^2 = \gamma_{AB}dx^A dx^B = \gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + 2\gamma_{\mu b}dx^\mu dx^b + \gamma_{ab}dx^a dx^b, \tag{5.1}$$

onde $A, B = 1, \ldots, D$, $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ e $a, b = 5, \ldots, D$. As equações de campo de Einstein no vácuo são dadas por

$$R_{AB} = 0, \tag{5.2}$$

em que $R_{AB}$ denota o tensor de Ricci para a métrica $\gamma_{AB}$. Fazendo a extensão natural das ideias de Kaluza e Klein, assumiremos que o espaço extra é compacto e de um tamanho da ordem do comprimento de Planck. Se assumimos também que $\gamma_{AB}$ não depende das coordenadas extra obtemos o modo zero ou limite de baixa energia. Temos assim o ansatz de Kaluza-Klein.

Podemos escrever a teoria em termos da métrica efetiva 4-dimensional

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \gamma_{\mu\nu} - \gamma_{ab} A^a_\mu A^b_\nu, \\ A^a_\mu &= \gamma_{b\mu} \hat{\gamma}^{ba}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde

$$\hat{\gamma}^{ab} \gamma_{bc} = \delta^a_c. \tag{5.4}$$

Também é possível verificar que

$$g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}, \qquad \gamma^{a\mu} = -A^{a\mu}, \qquad \gamma^{ab} = \hat{\gamma}^{ab} + A^{a\mu} A^b_\mu.$$

Os coeficientes $A^a_\mu$ representam $D-4$ campos vetoriais sobre o espaço da métrica $g_{\mu\nu}$ e os coeficientes $\gamma_{ab}$ são $(D-4) \times (D-3)/2$ campos escalares. Relacionado com o volume do espaço extra temos o campo escalar $\sigma$ dado por

$$det(\gamma_{ab}) = \tilde{\epsilon} \sigma^2, \qquad \tilde{\epsilon} = \pm 1. \tag{5.5}$$

Para considerar apenas o setor escalar da teoria, assumiremos que

$$A^a_\mu = 0 \qquad (\gamma_{a\mu} = 0), \tag{5.6}$$

o qual é compatível com as equações de campo.

As equações (5.2) em termos da métrica 4-dimensional $g_{\mu\nu}$ podem ser escritas como

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \sigma^{-1} \sigma_{,\mu;\nu} - \sigma^{-2} \sigma_{,\mu} \sigma_{,\nu} - (1/4) \hat{\gamma}^{ab}_{,\mu} \gamma_{ab,\nu}, \tag{5.7}$$

$$(\sigma \gamma_{ab,\mu} \hat{\gamma}^{ac})^{;\mu} = 0, \tag{5.8}$$

$$\sigma_{,\mu}^{\ ;\mu} = 0, \tag{5.9}$$

onde $\bar{R}_{\mu\nu}$ denota o tensor de Ricci para a métrica $g_{\mu\nu}$ e todas as derivadas covariantes são tomadas em termos de tal métrica. Assim, se $\sigma$ é um campo escalar, temos que $\sigma^{;\mu} = g^{\mu\alpha} \sigma_{,\alpha}$.

Em [37] foram estudadas as equações de campo para $D = 6$, e nas dimensões extras foram introduzidos dois campos $\xi$ e $\psi$ tais que

$$\gamma_{ab} = \sigma \xi^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \psi \\ \psi & \psi^2 + \tilde{\epsilon} \xi^2 \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Com estas restrições, temos que

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \sigma^{-1}\sigma_{,\mu;\nu} - \sigma^{-2}\sigma_{,\mu}\sigma_{,\nu} + \frac{1}{2}\xi^{-2}(\xi_{,\mu}\xi_{,\nu} + \tilde{\epsilon}\psi_{,\mu}\psi_{,\nu}), \tag{5.11}$$

e assumindo que $8\pi G = c = 1$, o tensor energia-momento é

$$T_{\mu\nu} = \xi^{-2}\Big[\xi_{,\mu}\xi_{,\nu} + \tilde{\epsilon}\psi_{,\mu}\psi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\xi_{,\alpha}\xi^{,\alpha} + \tilde{\epsilon}\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha})\Big]. \tag{5.12}$$

Para obter este último, construímos o tensor de Einstein, a partir do tensor de Ricci (5.11), e depois consideramos somente a parte que contém os campos $\xi$ e $\psi$. Este tensor pode ser interpretado como o tensor energia-momento de um fluido anisotrópico, o qual pode ser formado por dois fluidos irrotacionais perfeitos com potenciais $\xi^{-1}$ e $\psi$. O fluido anisotrópico verifica também a equação de estado de fluido rígido ao longo da direção anisotrópica $\rho = \sigma$. O termo $\sigma$ pode ser interpretado como um campo escalar sem massa de Brans-Dicke [37].

## 5.1 Soluções solitônicas

Suponhamos que temos uma solução semente $g^0_{\mu\nu}$, $\sigma^0$, $\gamma^0_{ab}$, a qual depende no máximo de duas variáveis, por exemplo $(\rho, \tau)$. Esta solução está associada a uma métrica de Kaluza-Klein $\gamma^0_{AB}$ da forma (5.1), à qual podemos aplicar o método de Belinski-Zakharov para obter uma solução solitônica $\gamma^{(ph)}_{AB}$. A partir desta última e utilizando as eqs. (5.3) obtemos uma nova solução solitônica $g^{(ph)}_{\mu\nu}$, $\sigma^{(ph)}$, $\gamma^{(ph)}_{ab}$. Para ilustrar este procedimento, consideramos que

$$\gamma^0_{AB} = \begin{pmatrix} \gamma^0_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \gamma^0_{ab} \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

onde a submatriz $\gamma^0_{ab}$ tem a forma

$$\gamma^0_{ab} = \begin{pmatrix} \gamma^0_{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^0_{(N)} \end{pmatrix}, \tag{5.14}$$

com

$$\gamma^0_{(j)} = \phi_j \xi_j^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \psi_j \\ \psi_j & \psi_j^2 + \eta_j \xi_j^2 \end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

para $j = 2, \ldots, N$. Também, como a nossa métrica de Kaluza-Klein depende somente das variáveis $(\rho, \tau)$, podemos então decompor a matriz $\gamma^0_{\mu\nu}$ na forma diagonal por blocos

$$\gamma^0_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \gamma^0_{(1)} \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

onde

$$\Omega = f(\rho, \tau) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \tag{5.17}$$

e $\gamma^0_{(1)}$ tem a forma (5.15).

Neste caso, o campo escalar $\sigma$ é dado por

$$\sigma^2 = \eta\phi^2, \tag{5.18}$$

onde

$$\eta = \prod_{j=2}^{N} \eta_j, \qquad \phi = \prod_{j=2}^{N} \phi_j. \tag{5.19}$$

Sem perda de generalidade, temos assumido que $\tilde{\epsilon} = 1$. O tensor energia-momento associado com $g^0_{\mu\nu}$ é

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \sum_{j=2}^{N} \xi_j^{-2} \Big[ (\xi_{j,\mu}\xi_{j,\nu} + \eta_j \psi_{j,\mu}\psi_{j,\nu}) - \frac{1}{2} g^0_{\mu\nu} (\xi_{j,\alpha}\xi_j^{;\alpha} + \eta_j \psi_{j,\alpha}\psi_j^{;\alpha}) \Big]. \tag{5.20}$$

Quando aplicamos o método BZ à matriz (5.13), obtemos uma matriz da forma

$$\gamma^{(ph)}_{AB} = \begin{pmatrix} \Omega^{(ph)} & 0 \\ 0 & \gamma^{(ph)}_{\hat{a}\hat{b}} \end{pmatrix}, \tag{5.21}$$

onde $\hat{a}, \hat{b} = 3, \ldots, 2N+2$ e $\Omega^{(ph)}$ tem a forma (5.17), mas mudando de $f(\rho, \tau)$ para $f^{(ph)}(\rho, \tau)$. É importante notar que, em geral, a matriz $\gamma^{(ph)}_{\hat{a}\hat{b}}$ não será diagonal por blocos. Podemos resumir o procedimento acima no seguinte diagrama

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \xrightarrow[BZ]{} \begin{pmatrix} \circ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \circ & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \circ & \circ \\ 0 & \bullet & \circ & \circ \end{pmatrix}, \tag{5.22}$$

onde os símbolos $*, \circ, \bullet$, representam matrizes $2 \times 2$ não necessariamente nulas. Assim, temos que os termos $A_3^a$ e $A_4^a$ não são necessariamente iguais a zero.

Consideremos a métrica ERW em dimensão $D = 2N + 2$ com $\epsilon = -1$, estudada no capítulo anterior, que tem a forma

$$\gamma^0_{AB} = \mathrm{diag}\Big[\exp(\Sigma_0), -\exp(\Sigma_0), \eta_1 h \exp(\varphi_1), h\exp(-\varphi_1), \ldots, \eta_N h \exp(\varphi_N), h\exp(-\varphi_N)\Big], \tag{5.23}$$

por tanto, para $j = 2, \ldots, N$ temos que

$$\phi_j = h, \qquad \xi_j^{-1} = \eta_j \exp(\varphi_j), \qquad \psi_j = 0, \tag{5.24}$$

e o tensor (5.20) é

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \sum_{j=2}^{N} \Big[\varphi_{j,\mu}\varphi_{j,\nu} - \frac{1}{2} g^0_{\mu\nu}\varphi_{j,\alpha}\varphi_j^{;\alpha}\Big]. \tag{5.25}$$

As soluções 1-sóliton para a semente (5.23) estão dadas por (4.152),(4.157),(4.43),(4.158). A métrica associada $g^{(ph)}_{\mu\nu}$ em 4 dimensões está dada por

$$\begin{aligned}
g^{(ph)}_{11} &= -g^{(ph)}_{22} = \exp(\Sigma^{(ph)}),\\
g^{(ph)}_{33} &= \mu_1^{1/N}\Big\{\eta_1\exp(\varphi_1) - \frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}} p^2_{(1)1}\exp(2\varphi_1 - 2F_{(1)1})\Big\} - \gamma^{(ph)}_{ab}A_3^a A_3^b,\\
g^{(ph)}_{34} &= g^{(ph)}_{43} = \mu_1^{1/N}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}} p_{(1)1}q_{(1)1}\Big\} - \gamma^{(ph)}_{ab}A_3^a A_4^b,\\
g^{(ph)}_{44} &= \mu_1^{1/N}\Big\{\exp(-\varphi_1) - \frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}} q^2_{(1)1}\exp(2F_{(1)1} - 2\varphi_1)\Big\} - \gamma^{(ph)}_{ab}A_4^a A_4^b,
\end{aligned} \tag{5.26}$$

e o espaço extra $\gamma^{(ph)}_{ab}$ tem suas componentes dadas por

$$\gamma^{(ph)}_{(2i-1)(2j-1)} = \begin{cases} \mu_1^{1/N}\Big\{\eta_i\exp(\varphi_i) - \frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}} p^2_{(i)1}\exp(2\varphi_i - 2F_{(i)1})\Big\}, & \text{se } i = j,\\ \mu_1^{1/N}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\eta_i\eta_j p_{(i)1}p_{(j)1}\exp(\varphi_i + \varphi_j - F_{(i)1} - F_{(j)1})\Big\}, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \tag{5.27}$$

$$\gamma^{(ph)}_{(2i)(2j)} = \begin{cases} \mu_1^{1/N}\Big\{\exp(-\varphi_i) - \frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}} q^2_{(i)1}\exp(2F_{(i)1} - 2\varphi_i)\Big\}, & \text{se } i = j,\\ \mu_1^{1/N}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}} q_{(i)1}q_{(j)1}\exp(F_{(i)1} + F_{(j)1} - \varphi_i - \varphi_j)\Big\}, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \tag{5.28}$$

$$\gamma^{(ph)}_{(2i-1)(2j)} = \begin{cases} \mu_1^{1/N}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\eta_i p_{(i)1}q_{(i)1}\Big\}, & \text{se } i=j, \\ \mu_1^{1/N}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\eta_i p_{(i)1}q_{(j)1}\exp(\varphi_i - F_{(i)1} + F_{(j)1} - \varphi_j)\Big\}, & \text{se } i\neq j, \end{cases} \tag{5.29}$$

onde $i, j = 3, \ldots, N$. Os termos $A^a_3$ e $A^a_4$ em (5.26), estão dados por

$$A^a_3 = \gamma^{(ph)}_{3b}\hat{\gamma}^{(ph)ba}, \qquad A^a_4 = \gamma^{(ph)}_{4b}\hat{\gamma}^{(ph)ba}. \tag{5.30}$$

Aproveitando-se da simetria de $\gamma^{(ph)}_{ab}$, é possível decompor esta matriz em blocos $2\times 2$ da forma (5.15). No entanto, as expressões para os campos $\xi$, $\psi$ e $\sigma$ são em geral muito compridas e difíceis de manipular. Uma possível solução para esta dificuldade é escolher valores apropriados para as constantes $p_{(i)k}$ e $q_{(i)k}$, de tal forma que a matriz resultante seja de novo diagonal por blocos. Por exemplo, no nosso caso atual podemos utilizar

$$\begin{aligned} &p_{(2)1} = q_{(2)1} = 1, \\ &p_{(j)1} = q_{(j)1} = 0, \quad \text{se } j = 3, \ldots, N. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Com esta escolha, temos que

$$\begin{aligned} \gamma^{(ph)}_{55} &= \mu_1^{1/N}\Big\{\eta_2\exp(\varphi_2) - \frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\exp(2\varphi_2 - 2F_{(2)1})\Big\}, \\ \gamma^{(ph)}_{56} &= \mu_1^{1/N}\Big\{-\frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\eta_2\Big\}, \\ \gamma^{(ph)}_{66} &= \mu_1^{1/N}\Big\{\exp(-\varphi_2) - \frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}\exp(2F_{(2)1} - 2\varphi_2)\Big\}, \end{aligned} \tag{5.32}$$

para $j = 3, \ldots, N$

$$\begin{aligned} \gamma^{(ph)}_{(2i-1)(2i-1)} &= \mu_1^{1/N}\eta_i\exp(\varphi_i), \\ \gamma^{(ph)}_{(2i)(2i)} &= \mu_1^{1/N}\exp(-\varphi_i). \end{aligned} \tag{5.33}$$

Nos restantes casos, $\gamma^{(ph)}_{ab} = 0$. Assim, obtemos uma matriz da forma (5.14) com blocos (5.15) dados por

$$\begin{aligned} &\xi_2 = \frac{\phi_2}{\gamma^{(ph)}_{55}}, \qquad \psi_2 = \frac{\gamma^{(ph)}_{56}}{\gamma^{(ph)}_{55}}, \\ &(\phi_2)^2 = \eta_2\mu_1^{2/N}\bigg\{1 - \frac{1}{\mu_1^2\widetilde{\Delta}_{11}}[\exp(\varphi_2 - 2F_{(2)1}) + \exp(2F_{(2)1} - \varphi_2)]\bigg\}, \end{aligned} \tag{5.34}$$

onde

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}_{11} = \frac{1}{\mu_1^2 - \tau^2}\{&\eta_1 p_{(1)1}^2 \exp(\varphi_1 - 2F_{(1)1}) + q_{(1)1}^2 \exp(2F_{(1)1} - \varphi_1) \\ &+ \eta_2 \exp(\varphi_2 - 2F_{(2)1} + q_{(2)1}^2 \exp(2F_{(2)1} - \varphi_2))\}.\end{aligned} \tag{5.35}$$

Para $j = 3, \ldots, N$ temos que

$$\phi_j = \mu_1^{1/N}, \qquad \xi_j = \eta_j \exp(-\varphi_j), \qquad \psi_j = 0. \tag{5.36}$$

Se podemos encontrar, além disso, valores das constantes $p_{(i)k}$ e $q_{(i)k}$ que façam os termos $A_\mu^a$ iguais a zero, o tensor energia-momento será

$$\begin{aligned}\bar{T}_{\mu\nu} =& \xi_2^{-2}\Big[(\xi_{2,\mu}\xi_{2,\nu} + \eta_2\psi_{2,\mu}\psi_{2,\nu}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^{(ph)}(\xi_{2,\alpha}\xi^{2,\alpha} + \eta_2\psi_{2,\alpha}\psi^{2,\alpha})\Big] \\ &+ \sum_{j=3}^{N}\Big[\varphi_{j,\mu}\varphi_{j,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^{(ph)}\varphi_{j,\alpha}\varphi^{j,\alpha}\Big].\end{aligned} \tag{5.37}$$

## 5.2 Soluções não solitônicas

Seguindo as ideias do capítulo 2, vamos obter uma nova solução a partir da métrica (5.23), assim como a correspondente métrica para a teoria efetiva em quatro dimensões. Começamos por definir a matriz constante $M$ da forma

$$M = \begin{pmatrix} M_{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & M_{(N)} \end{pmatrix}, \tag{5.38}$$

onde

$$M_{(j)} = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}, \tag{5.39}$$

para $j = 0, \ldots, N$. Cada bloco $M_{(j)}$ tem determinante 1 e o bloco $M_{(0)}$ é a matriz identidade de ordem 2. É fácil ver que a matriz $\hat{\gamma}_{AB}$ dada por

$$\hat{\gamma}_{AB} = M \cdot \gamma_{AB}^0 \cdot M^T, \tag{5.40}$$

é também solução das equações de campo satisfeitas por (5.23).

A métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ tem componentes

$$\begin{aligned} \hat{g}_{11} &= \exp(\Sigma_0), \\ \hat{g}_{12} &= 0, \\ \hat{g}_{22} &= \epsilon \exp(\Sigma_0), \end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_{33} &= h\big[a_1^2\eta_1 \exp(\varphi_1) + \epsilon b_1^2 \exp(-\varphi_1)\big], \\ \hat{g}_{34} &= h\big[a_1 c_1 \eta_1 \exp(\varphi_1) + \epsilon b_1 d_1 \exp(-\varphi_1)\big], \\ \hat{g}_{44} &= h\big[c_1^2\eta_1 \exp(\varphi_1) + \epsilon d_1^2 \exp(-\varphi_1)\big]. \end{aligned} \tag{5.42}$$

A parte extra tem a forma (5.14),(5.15), onde

$$\begin{aligned} &\phi_j = h, \qquad \xi_j = \big[a_j^2\eta_j \exp(\varphi_j) + \epsilon b_j^2 \exp(-\varphi_j)\big]^{-1}, \\ &\psi_j = \frac{a_j c_j \eta_j \exp(\varphi_j) + \epsilon b_j d_j \exp(-\varphi_j)}{a_j^2 \eta_j \exp(\varphi_j) + \epsilon b_j^2 \exp(-\varphi_j)}. \end{aligned} \tag{5.43}$$

O tensor energia-momento é

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \sum_{j=2}^{N} \big[\varphi_{j,\mu}\varphi_{j,\nu} - \frac{1}{2}\hat{g}_{\mu\nu}\varphi_{j,\alpha}\varphi_j^{;\alpha}\big], \tag{5.44}$$

o mesmo obtido para (5.23).

Utilizamos (2.26),(2.34) e (2.35) para obter a formulação $\sigma$, definida no capítulo 2, da métrica (5.23). Obtemos especificamente que

$$\sigma^0_{AB} = \mathrm{diag}\Big[\exp(\Sigma_0), \epsilon\exp(\Sigma_0), \frac{\exp(-\varphi_1)}{h}, \epsilon\eta_1\tau^2 h \exp(\varphi_1), \ldots, \frac{\exp(-\varphi_N)}{h}, \epsilon\eta_N\tau^2 h \exp(\varphi_N)\Big], \tag{5.45}$$

onde a relação entre os termos $\Sigma_0$ das métricas (5.23) e (5.45) é dada por (2.36). Lembremos que

$$\sigma^0 = \mathrm{diag}\Big[\frac{\exp(-\varphi_1)}{h}, \epsilon\eta_1\tau^2 h \exp(\varphi_1), \ldots, \frac{\exp(-\varphi_N)}{h}, \epsilon\eta_N\tau^2 h \exp(\varphi_N)\Big], \tag{5.46}$$

verifica a equação (2.33), mas neste caso com $u = \tau$. Uma nova solução desta equação é obtida utilizando (5.38),(5.39) e (4.44), mas com $\sigma^0_{AB}$ no lugar de $\gamma^0_{AB}$. Uma conta direta conduz a que as componentes da métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ quatro dimensional associada são neste caso

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{11} &= \exp(\Sigma_0), \\
\hat{g}_{12} &= 0, \\
\hat{g}_{22} &= \epsilon \exp(\Sigma_0),
\end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{33} &= a_1^2 \frac{\exp(-\varphi_1)}{h} + \epsilon\tau^2 h\eta_1 b_1^2 \exp(\varphi_1), \\
\hat{g}_{34} &= a_1 c_1 \frac{\exp(-\varphi_1)}{h} + \epsilon\tau^2 h\eta_1 b_1 d_1 \exp(\varphi_1), \\
\hat{g}_{44} &= c_1^2 \frac{\exp(-\varphi_1)}{h} + \epsilon\tau^2 h\eta_1 d_1^2 \exp(\varphi_1).
\end{aligned} \tag{5.48}$$

A parte extra tem a forma (5.14),(5.15), onde

$$\begin{aligned}
\phi_j^2 &= \epsilon\eta_j\tau^2, \qquad \xi_j = \phi_j \left[ a_j^2 \frac{\exp(-\varphi_j)}{h} + \epsilon\tau^2 h\eta_j b_j^2 \exp(\varphi_j) \right]^{-1}, \\
\psi_j &= \frac{a_j c_j \frac{\exp(-\varphi_j)}{h} + \epsilon\tau^2 h\eta_j b_j d_j \exp(\varphi_j)}{a_j^2 \frac{\exp(-\varphi_j)}{h} + \epsilon\tau^2 h\eta_j b_j^2 \exp(\varphi_j)}.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

## 5.3 Interpretação do tensor $T_{\mu\nu}$ em ClFT e mecânica de fluidos

### Modelos sigma não lineares

Seja $M$ um espaço Riemanniano com curvatura não nula, coordenadas $\Phi^a$ e métrica

$$d\Sigma^2 = H_{ab}(\Phi) d\Phi^a d\Phi^b. \tag{5.50}$$

A ação de uma partícula em movimento neste espaço pode ser escrita na forma

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau H_{ab} \frac{d\Phi^a}{d\tau} \frac{d\Phi^b}{d\tau}. \tag{5.51}$$

As trajetórias desde o ponto de vista clássico são geodésicas. Esta ideia pode ser generalizada se consideramos que

$$\Phi^a : (E, g_{\mu\nu}) \to (M, H_{ab}), \tag{5.52}$$

onde $E$ é um espaço-tempo. O espaço $M$ é usualmente chamado de *espaço alvo*. A ação neste caso é

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}H_{ab}(\Phi)\partial_\mu\Phi^a\partial_\nu\Phi^b g^{\mu\nu}, \tag{5.53}$$

e as equações de movimento são

$$-\partial_\mu[H_{ab}\partial^\mu\Phi^b] + \frac{1}{2}\frac{\partial H_{bc}}{\partial\Phi^a}\partial_\mu\Phi^b\partial^\mu\Phi^c = 0. \tag{5.54}$$

As soluções destas equações são chamadas de aplicações harmônicas, e descrevem uma generalização da ideia de geodésica. As teorias de campo descritas pela ação (5.53) são chamadas de modelos sigma não lineares [38]. Em particular, o tensor $T_{\mu\nu}$ dado por (5.20) é obtido a partir da ação (5.53) onde $H_{ab}$ é a matriz diagonal por blocos

$$H = \begin{pmatrix} H_{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & H_{(N)} \end{pmatrix} \tag{5.55}$$

com

$$H_{(j)} = \xi_j^{-2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta_j \end{pmatrix}, \tag{5.56}$$

e os campos $\Phi^a$, os quais podem ser considerados como as componentes de um vetor $\Phi^T = (\Phi^1, \ldots, \Phi^{2N-2})$, são dados por

$$\Phi^{2j-3} = \xi_j, \qquad \Phi^{2j-2} = \psi_j, \tag{5.57}$$

para $j = 2, \ldots, N$. Temos assim um modelo sigma não linear associada à solução efetiva 4-dimensional, obtida a partir da nossa semente ERW em dimensão (2N+2).

## O modelo de multifluido

O tensor energia-momento das teorias efetivas quatro-dimensionais associadas à métrica ERW (5.23) em dimensão $D = 2N + 2$ e à solução não solitônica obtida a partir desta, fazendo uso de (4.44), é dado pela equação (5.25). Este tensor pode ser reescrito na forma

$$T^{\mu\nu} = \sum_{j=2}^{N}\Big[\varphi_j^{;\mu}\varphi_j^{;\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varphi_j^{;\alpha}\varphi_{j,\alpha}\Big]. \tag{5.58}$$

Consideremos o tensor (com o índice $j$ fixo)

$$t^{\mu\nu}_{(j)} = \varphi^{,\mu}_{(j)}\varphi^{,\nu}_{(j)} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varphi^{,\alpha}_{(j)}\varphi_{(j),\alpha}. \tag{5.59}$$

Se definimos

$$p_j = \rho_j = \frac{1}{2}\varphi^{,\alpha}_{(j)}\varphi_{(j),\alpha}, \tag{5.60}$$

o tensor (5.59) toma a forma

$$t^{\mu\nu}_{(j)} = (p_j + \rho_j)\frac{\varphi^{,\mu}_{(j)}\varphi^{,\nu}_{(j)}}{\varphi^{,\alpha}_{(j)}\varphi_{(j),\alpha}} - p_j g^{\mu\nu}. \tag{5.61}$$

Se

$$u^{\mu}_{(j)} := \frac{\varphi^{,\mu}_{(j)}}{\sqrt{\varphi^{,\alpha}_{(j)}\varphi_{(j),\alpha}}}, \tag{5.62}$$

então temos que

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu}_{(j)} &= (p_j + \rho_j)u^{\mu}_{(j)}u^{\nu}_{(j)} - p_j g^{\mu\nu}, \\ u^{\alpha}_{(j)}u_{(j)\alpha} &= 1. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Portanto $t^{\mu\nu}_{(j)}$ é o tensor energia-momento para um fluido perfeito onde $u^{\mu}_{(j)}$ representa sua quatro-velocidade, $p_j$ é sua pressão e $\rho_j$ é sua densidade de energia no repouso. Se todas as quatro-velocidades dos fluidos estão sobre um dois-plano, é possível escolher duas quatro-velocidades diferentes, por exemplo $u^{\mu}_{(2)}$ e $u^{\mu}_{(3)}$, para expressar as outras. Assim, para $j = 2, \ldots, N$ temos que

$$u^{\mu}_{(j)} = a_{(j)2}u^{\mu}_{(2)} + a_{(j)3}u^{\mu}_{(3)}, \tag{5.64}$$

onde

$$a_{(2)2} = a_{(3)3} = 1, \qquad a_{(2)3} = a_{(3)2} = 0. \tag{5.65}$$

De (5.64) temos que, para $j = 4, \ldots, N$

$$\begin{aligned} a_{(j)2} &= \frac{\epsilon_{2j}\epsilon_{33} - \epsilon_{3j}\epsilon_{23}}{\epsilon_{22}\epsilon_{33} - \epsilon_{23}^2}, \\ a_{(j)3} &= \frac{\epsilon_{3j}\epsilon_{22} - \epsilon_{2j}\epsilon_{23}}{\epsilon_{22}\epsilon_{33} - \epsilon_{23}^2}, \end{aligned} \tag{5.66}$$

onde

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} = u^{\mu}_{(j)} u_{(i)\mu}. \tag{5.67}$$

Em [39], é mostrado que o tensor

$$T^{\mu\nu} = \sum_{j=2}^{N} t^{\mu\nu}_{(j)} = \sum_{j=2}^{N} \big[(p_j + \rho_j) u^{\mu}_{(j)} u^{\nu}_{(j)} - p_j g^{\mu\nu}\big], \tag{5.68}$$

pode ser expressado na forma

$$T^{\mu\nu} = \alpha u^{\mu}_{(2)} u^{\nu}_{(2)} + 2\beta u^{(\,\mu}_{(2)} u^{\nu\,)}_{(3)} + \gamma u^{\mu}_{(3)} u^{\nu}_{(3)} - \pi g^{\mu\nu}, \tag{5.69}$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{j=2}^{N} (p_j + \rho_j)(a_{(j)2})^2, \\ \beta &= \sum_{j=2}^{N} (p_j + \rho_j) a_{(j)2} a_{(j)3}, \\ \gamma &= \sum_{j=2}^{N} (p_j + \rho_j)(a_{(j)3})^2, \\ \pi &= \sum_{j=2}^{N} p_j. \end{aligned} \tag{5.70}$$

Também em [39] se mostra que o tensor (5.69) é equivalente ao tensor energia-momento para um fluido anisotrôpico. A ideia é utilizar em (5.69), a transformação

$$\begin{aligned} u^{\mu}_{(2)} &\to \bar{u}^{\mu}_{(2)} \cos\phi - \frac{1}{M} \bar{u}^{\mu}_{(3)} \sin\phi, \\ u^{\mu}_{(3)} &\to M \bar{u}^{\mu}_{(2)} \sin\phi - \bar{u}^{\mu}_{(3)} \cos\phi, \end{aligned} \tag{5.71}$$

com

$$M = \left( \frac{\alpha\epsilon_{23} + \beta\epsilon_{33}}{\beta\epsilon_{22} + \gamma\epsilon_{23}} \right)^{1/2}, \tag{5.72}$$

para obter

$$T^{\mu\nu} = \bar{\alpha} \bar{u}^{\mu}_{(2)} \bar{u}^{\nu}_{(2)} + \bar{\gamma} \bar{u}^{\mu}_{(3)} \bar{u}^{\nu}_{(3)} - \pi g^{\mu\nu}, \tag{5.73}$$

onde

$$\begin{aligned}
\tan(2\phi) &= 2\frac{[(\alpha\epsilon_{23}+\beta\epsilon_{33})(\beta\epsilon_{22}+\gamma\epsilon_{23})]^{1/2}}{\alpha\epsilon_{22}-\gamma\epsilon_{33}}, \\
\bar{\alpha} &= \alpha\cos^2\phi + \beta M sin2\phi + \gamma M^2 sin^2\phi, \\
\bar{\gamma} &= \frac{1}{M^2}\alpha\sin^2\phi - \frac{1}{M}\beta sin2\phi + \gamma\cos^2\phi, \\
\bar{u}^{\mu}_{(2)} &= u^{\mu}_{(2)}\cos\phi + \frac{1}{M}u^{\mu}_{(3)}\sin\phi, \\
\bar{u}^{\mu}_{(3)} &= -Mu^{\mu}_{(2)}\sin\phi + u^{\mu}_{(3)}\cos\phi.
\end{aligned} \tag{5.74}$$

Um cálculo direto mostra que $\bar{u}^{\mu}_{(2)}\bar{u}_{(3)\mu} = 0$.

O ângulo $\phi$ toma valores no intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$. Quando $\phi \geq 0$, o vetor $\bar{u}^{\mu}_{(2)}$ é tipo tempo e o vetor $\bar{u}^{\mu}_{(3)}$ é tipo espaço. Definindo

$$\begin{aligned}
U^{\mu} &= \frac{\bar{u}^{\mu}_{(2)}}{(\bar{u}^{\mu}_{(2)}\bar{u}_{(2)\mu})^{1/2}}, \\
\chi^{\mu} &= \frac{\bar{u}^{\mu}_{(3)}}{(-\bar{u}^{\mu}_{(3)}\bar{u}_{(3)\mu})^{1/2}}, \\
\rho &= T^{\mu\nu}U_{\mu}U_{\nu} = \bar{\alpha}\bar{u}^{\mu}_{(2)}\bar{u}_{(2)\mu} - \pi, \\
\sigma &= T^{\mu\nu}\chi_{\mu}\chi_{\nu} = \pi - \bar{\gamma}\bar{u}^{\mu}_{(3)}\bar{u}_{(3)\mu},
\end{aligned} \tag{5.75}$$

e substituindo em (5.73), obtemos

$$T^{\mu\nu} = (\rho+\pi)U^{\mu}U^{\nu} + (\sigma-\pi)\chi^{\mu}\chi^{\nu} - \pi g^{\mu\nu}. \tag{5.76}$$

Assim, o tensor energia-momento (5.25) associado à semente ERW pode ser interpretado como o tensor energia-momento para um fluido anisotrópico.

# 6

# Conclusões

Na primeira parte deste trabalho, estudamos a geração de novas soluções utilizando dois algoritmos diferentes: o primero mantém sem modificações as propriedades locais da solução original, mas introduz alterações globais em sua estrutura, como singularidades cônicas (cordas cósmicas e deslocamentos cósmicos); o segundo algoritmo nos dá soluções completamente novas. Temos duas classes de novas soluções, a primeira é uma generalização da métrica 4-dimensional estacionária com simetria axial, e a segunda é uma generalização das métricas usadas para representar ondas gravitacionais com simetria cilíndrica com dois graus de polarização. Estas novas métricas têm uma estrutura por blocos, cada bloco é semelhante ao correspondente caso em 4 dimensões.

Na segunda parte, estudamos as soluções solitônicas associadas a uma métrica $D$-dimensional diagonal por blocos, com $D \geq 4$ . Os tipos de blocos considerados são importantes, já que várias das métricas mais estudadas podem ser consideradas como casos especiais desta métrica. Podemos citar, por exemplo, as métricas de Einstein-Rosen (ondas gravitacionais), Weyl, Schwarzschild e van Stockum. Em referências, tais como [20], se aponta a possibilidade de estender o método de Belinski-Zakharov (BZ) para dimensões maiores que 4; no entanto, mesmo que para esta dimensão seja, em geral, difícil achar soluções. A métrica proposta neste trabalho permite uma manipulação razoavelmente simples do método BZ já que, por exemplo, se conhecemos o procedimento (mudanças de variável,etc) para achar as soluções solitônicas para o caso 4-dimensional, então a extensão (repetindo o bloco) para dimensões superiores é imediata fazendo uso de superposições não lineares. Temos também a possibilidade de misturar blocos diagonais e não diagonais.

Na parte final do trabalho, fizemos aplicação dos algoritmos de generação de soluções, solitônicas e não solitônicas, apresentados nos capítulos 2 e 4 ao ansatz de Kaluza-Klein em dimensão $D = 2N + 2$, para obter soluções das correspondentes teorias efetivas em quatro dimensões. Ilustramos assim, com um caso especifico (a métrica ERW), o procedimento sugerido por Letelier e Verdaguer em [37]. Finalmente, apresentamos dois exemplos de possíveis interpretações dos tensores energia-momento associados com essas soluções, na teoria clássica de campos e na mecânica de fluidos.

# Referências Bibliográficas


[1] J. Overduin and P. Wesson. *Kaluza-Klein Gravity*, Phys. Rep. **283**, 303 (1997) [arXiv:gr-qc/9805018v1]

[2] J. Plebański and A. Krasiński. *An Introduction to General Relativity and Cosmology* (Cambridge University Press, 2006).

[3] A. Pérez-Lorenzana. *An Introduction to Extra Dimensions*, J. Phys.: Conf. Ser. **18**, 224 (2005).

[4] A. Pérez-Lorenzana. *Theories in More than Four Dimensions*, AIP Conf. Proc. **562**, 53 (2001) [arXiv:hep-ph/0008333v2].

[5] M.-A. Tonnelat, *Les Théories Unitarires de l' Électromagnétisme et la Gratitation* (Gauthier-Villars, Paris 1965).

[6] T. Appelquist and A. Chodos. *Quantum Dynamics of Kaluza-Klein Theories*, Phys. Rev. D **28**, 772 (1983).

[7] P.S. Letelier and E. Verdaguer. *Cosmic Strings in Extra Dimensions*, Phys. Rev. D **37**, 2333 (1988).

[8] H. Liu and P. Wesson. *A class of Kaluza-Klein Soliton Solutions*, Phys. Lett. B **381**, 420 (1996).

[9] J. Liko and P. Wesson. *Astrophysical Implications of Higher-Dimensional Gravity*, Sp. Sci. Rev. **110**, 337 (2004). [arXiv:gr-qc/0311054v3].

[10] A. Garcia, A. Garcia-Quiroz, M. Cataldo and S. Campo. *Correspondence between $n$- and $m$-Dimensional Inflationary Cosmologies*, Phys. Rev. D **69**, 1 (2004).

[11] A. Garcia and S. Carlip, *$n$-Dimensional Generalizations of the Friedmann-Robertson-Walker Cosmology*, Phys. Lett. B **645**, 101 (2007).

[12] G. Horowitz. *The Dark Side of the String Theory: Black Holes and Black Strings*, UCSBTH-92-32 (1992). [arXiv:hep-th/9210119].

[13] N. Obers. *Black Holes in Higher-Dimensional Gravity*, in *Physics of Black Holes*, E. Papantonopoulos (Ed.) (Springer-Verlag, Berlin 2009). [arXiv:hep-th/08020519v1].

[14] R. Emparan and H. Reall. *Generalized Weyl solutions*, (2001). [arXiv:hep-th/0110258v2].

[15] R. Maartens, *Brane-World Gravity, Living Rev. Relativity* **7**, 7 (2004). http://www.livingreviews.org/lrr-2004-7

[16] T. Lewis, *Some Special Solutions of the Equations of Axially Symmetric Gravitational Fields*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A 136**, 176 (1932)

[17] A. Papapetrou, *Champs Gravitationnels Stationnaires à Symmétrie axiale*, Ann. Inst. H. Poincaré **A 4**, 83 (1966).

[18] P.S. Letelier, *On the Inverse-Scattering Method Generation of Gravitational Waves and other New Solution-Generating Algorithms*, N. Cimento **97 B**, 1 (1987).

[19] E. Verdaguer, *Soliton solutions in spacetimes with two spacelike Killing fields*, Phys. Rep. 229, 1 (1993).

[20] V. Belinski e E. Verdaguer, *Gravitational Solitons*, Cambridge University Press, 2004.

[21] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers e E. Herlt, *Exact Solutions to Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, 2003).

[22] J. Griffiths e J. Podolský, *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity* (Cambridge University Press, 2009).

[23] J. Stachel, *Globally Stationary but Locally Static Space-Times: a Gravitational Analog of the Aharonov-Bohm Effect*, Phys. Rev. D **26**, 1281 (1982).

[24] D.V. Gal'tsov and P.S. Letelier, *Spinning Strings and Cosmic Dislocations*, Phys. Rev D **47**, 4273 (1993).

[25] P.S. Letelier, *Spinning Strings as Torsion Line Topological Defects*, Class. Quant. Grav. **12**, 471 (1995).

[26] P.S. Letelier, *Multiple Cosmic Strings*, Class. Quant. Grav. **4**, L75-L77 (1987).

[27] A. Einstein and N.J. Rosen, *On Gravitational Waves*, J. Franklin Inst. **223**, 43 (1937).

[28] R. Bach and H. Weyl, Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Math. Z. **13**, 134 (1922).

[29] A. Papapetrou, *Eine rotationssymmetrische Lösung in der Allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. Phys. (Leipzig) **12**, 309 (1953).

[30] J.L. Synge, *Relativity: The General Theory* (Nord-Holland, Amsterdam, 1960).

[31] P.S. Letelier, *Self-Gravitating Anisotropic Fluids*, N. Cimento **69 B**, 145 (1987).

[32] V.A. Belinsky, *One-Soliton Cosmological Waves* , Sov. Phys. JETP **50**, 623 (1979) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **77**, 1239 (1979)].

[33] W.J. van Stockum, *The Gravitational Field of a Distribution of Particles Rotating about an Axis of Symmetry*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **A 57**, 135 (1937).

[34] J. Stachel. *Cylindrical Gravitational News*, J. Math. Phys. **7** , 1321 (1966).

[35] V.A. Belinski and V.E. Zakharov, Sov. Phys. JETP 48, 985 (1978).

[36] V.A. Belinski and V.E. Zakharov, Sov. Phys. JETP 50, 1 (1979).

[37] P. Letelier e E. Verdaguer, *Particle and string fluid interpretation for the sector scalar of Kaluza-Klein theories*, Phys. Rev. D **36**, 2981 (1987).

[38] V.P. Nair, *Quantum Field Theory: A modern perpective* (Springer, 2005).

[39] P.S. Letelier e P. Alencar, *Anisotropic fluids with multifluid components*, Phys. Rev. D **34**, 343 (1986).

[40] P.S. Letelier, *Soliton Solutions to the Vacuum Einstein Equations Obtainned from a Nondiagonal Seed Solution*, J. Math. Phys. **27** , 564 (1986).

[41] P.S. Letelier, *Static and Stationary Multiple Soliton Solutions to the Einstein Equations*, J. Math. Phys. **26** , 467 (1985).