UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Sistemas Fuzzy e Aproximação Universal

Autor: Fernando Mucio Bando

Orientador: Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros

25 de abril de 2002

Sistemas Fuzzy e Aproximação Universal

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Fernando Mucio Bando** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de abril de 2002.

Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros

Banca examinadora:

Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros.

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin.

Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bando, Fernando Mucio

B223s Sistemas fuzzy e aproximação universal / Fernando Mucio Bando -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Laécio Carvalho de Barros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas fuzzy. 2. Teoria da aproximação. 3. Teoria dos conjuntos. I. Barros, Laécio Carvalho. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 12 de abril de 2002 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). LAÉCIO CARVALHO DE BARROS

Prof (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof (a). Dr (a). PEDRO ALADAR TONELLI

Aos meus pais, Cidão e dona Cida, que muito me ensinaram e apoiaram.

À minha esposa Dani e nosso filho João Victor, por todo amor que me inspiram.

Às minhas irmãs, Fran e Fabi, pela confiança depositada.

Agradecimentos

No meu modo de ver, nunca realizamos um trabalho solitário pois sempre somos auxiliados, seja com idéias, com compreensão, com conselhos sinceros ou com o silêncio caridoso. Na realização desse trabalho tive muitos colaboradores e recebi apoios diversos, e é com alegria que agradeço:

Ao Prof. Laécio Carvalho de Barros pelo competente trabalho de orientação e por ter confiado em mim e respeitando integralmente o meu modo de pensar.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À minha família pelo estímulo constante. Principalmente ao tio Arlindo e a tia Sueli por me ajudarem a conciliar meus estudos(Campinas) com meu lar(Maringá). E também por terem me acolhido sempre que precisei.

Aos companheiros de república Andrés, Silvia, Cleusiane, Miguel, Marcelo, Fabíola, Rosemberg, Élcio, Gilmar, Nilde, Mi, Nilda, Carla e Rogério que foram minha família em Campinas.

À Lilian pelos proveitosos conselhos.

Aos colegas do prédinho Gilmar, Primo, Maurício, Edson, Humbertão, Gilberlândio, Cabeção, Augustão, Feinho, Julio (Malandrão), Casagrande, Gilmarzão, Luciana, Luciano (Lampâda), Marcão (Vaquinha), Elder, Sofia, Marcão (Mgá), Gastão, Vanessa, Gauchinha, Vevê, Mércio, Clécio, Roger, Cleu, Fernando Alagoas, Alcindo, Emerson, Marina, Rosana, Yurilev, Daniel, Marcela, os turcos, Daniela, Lilian, Heleno, Márcio, Picanso, Nelson, Amauri, Zé, Cristiane e Léo que fizeram deste tempo longe de casa uma acolhedora e divertida convivência.

Ao pessoal do "escritório" e do futebol pelos inúmeros momentos de descontração.

Aos funcionários do IMECC/UNICAMP em especial a Cidinha, Edinaldo e Tânia.

Ao meu sogro Dui e minha sogra Maria pela atenção e carinho dado ao meu pequeno nos momentos em que estive ausente.

E principalmente à Deus por estar sempre presente em minha vida e por ter me proporcionado a oportunidade de completar mais uma fase da vida.

Conteúdo

Resumo

Sistemas fuzzy têm-se mostrado de grande aplicabilidade e capacidade de modelar problemas do mundo real. Mesmo fenômenos que admitem funções para sua modelagem matemática podemos recorrer a sistemas fuzzy lingüísticas com certas propriedades. Os sistemas fuzzy de interesse neste trabalho são aquelas que, em certo sentido, aproximam funções definidas em espaços métricos.

Abstract

Fuzzy system has shown a great applicability and capacity of modeling problems of real world. The same phenomenon that allows function for its model mathematics can appeal the fuzzy system linguistics with right property. The fuzzy system of interest in this work are the ones which, in the right meaning, bring closer function defined in space metric.

Introdução

Conceitos subjetivos sempre foram utilizados em nosso cotidiano. Apesar de suas incertezas, eles são transmitidos e perfeitamente compreendidos lingüisticamente entre interlocutores. É natural, por exemplo, a utilização dos termos *João é alto*, *Pedro é velho* e etc. Apesar destes termos serem muito utilizados, têm permanecido fora da formalidade matemática tradicional.

Nos fixando apenas no exemplo das pessoas *altas*; uma proposta para formalizar matematicamente tal conjunto poderia ter pelo menos duas abordagens. A primeira, mais clássica, distinguindo a partir de que valor (altura) um indivíduo é considerado *alto*, por exemplo, ser alto é ter mais de $1,80m$, observemos então que uma pessoa com $1,79m$ não é considerada alta. Neste caso, o conjunto está bem definido. A segunda, menos convencional, é dada de maneira que todos os indivíduos são considerados altos com mais ou menos intensidade, ou seja, existem elementos que pertenceriam mais à classe dos altos que outros. Isto significa que quanto menor for a altura do indivíduo, menor será seu grau de pertinência à esta classe. Podemos dizer então que todos os indivíduos pertencem à classe das pessoas altas, com mais ou menos intensidade. É a segunda abordagem que utilizaremos neste texto.

Foram através de desafios como este, onde a propriedade que define o conjunto é subjetiva, que surgiu a *Teoria Fuzzy*, que tem crescido consideravelmente em nossos dias, tanto do ponto de vista teórico como nas aplicações em diversas áreas de estudo, sobretudo em tecnologia.

O marco inicial da teoria fuzzy foi o artigo *Fuzzy Sets* publicado em 1965, pelo matemático de origem iraniana Lotfi Asker Zadeh, professor no departamento de engenharia elétrica e ciências da computação da universidade da Califórnia, em Berkeley [19], com a principal intenção de dar um tratamento matemático a certos termos lingüísticos subjetivos. Esse seria um primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas, a exemplo do que faz o ser humano.

Quando queremos explicar ou entender certos problemas reais, na maioria das vezes não utilizamos uma matemática formal, e sim regras lingüísticas, e quase sempre essas regras são da forma "*Se...então...*". Por exemplo, sabemos que podemos comparar a cor do tomate com o quanto ele está maduro, podemos explicar isto usando o termo "*Se o tomate está vermelho, então ele está maduro*", e não precisamos necessariamente de uma tabela numerando as tonalidades de vermelho para explicar o quanto um tomate está maduro. Tendo em mãos a teoria de conjuntos fuzzy, é possível fazermos uma modelagem matemática dessas regras, construindo assim um sistema fuzzy baseado em regras lingüísticas.

Em nosso trabalho, o objetivo fundamental é estudar as propriedades de sistemas fuzzy, baseados em regra lingüísticas, aproximarem funções. Sendo assim, se a modelagem ideal de um problema real for dada por uma função a qual não conseguimos obter uma expressão para ela, podemos recorrer a um sistema fuzzy lingüístico com certas propriedades, de maneira que estes sistemas se aproximem da função teórica, conseguindo desta forma uma modelagem mais próxima da realidade.

O primeiro capítulo de nosso trabalho é dedicado justamente a um estudo detalhado das principais ferramentas de análise da teoria fuzzy, tais como conjuntos fuzzy, extensão de Zadeh, números fuzzy e outros. Além disso, tratamos de alguns conceitos mais propriamente ditos da lógica fuzzy, como t-normas e t-conormas, assuntos estes usados na modelagem de termos lingüísticos.

O capítulo 2, tem embasamento teórico, principalmente nos livros de Kosko [10] e Nguyen [13] onde são dados, respectivamente, tratamentos teóricos aos sistemas fuzzy baseados em regras lingüísticas de uma forma natural. E um tratamento matemático de sistemas fuzzy, dando uma modelagem matemática para estes sistemas de uma forma geral, utilizando como ferramentas a teoria vista no primeiro capítulo.

No capítulo 3, fazemos um estudo da propriedade de um sistema, baseado em regras lingüísticas aproximar de uma função real. Este estudo foi baseado na teoria clássica de aproximação, mais especificamente, utilizando como suporte o teorema de Stone-Weierstrass.

No último capítulo, nos preocupamos em apresentar mais alguns resultados ligados a teoria de aproximação envolvendo teoria fuzzy, que são apresentadas em duas seções:

- a seção 4.1 é baseada no artigo de Hüllermeier [8], onde apresentamos um resultado que nos permite, através de sistemas fuzzy, com certa propriedades específicas, aproximar funções fuzzy.

- na seção 4.2 fazemos um estudo de dois métodos de aproximação universal de conjunto fuzzy, utilizando o princípio de extensão de Zadeh, obtidos respectivamente do artigo de Buckley *&* Feuring [4], e do artigo de Román-Flores, Barros *&* Bassanezi [3]. Apesar desses métodos não utilizarem sistemas fuzzy baseados em regras lingüística para aproximação, são métodos muito utilizados quando temos em mãos as funções que modelam os fenômenos em estudo.

Capítulo 1

Conceitos Fuzzy

A noção de conjunto fuzzy, dada por Zadeh [19] em 1965, estende aquela de conjunto clássico no sentido que a relação de pertinência de um elemento a um conjunto deixa de ser uma relação *dicotômica*, isto é, para um subconjunto A de um conjunto universo X e um elemento $x \in X$, temos apenas as possibilidades de $x \in A$ ou $x \notin A$. Por exemplo, sabemos que o número 3 pertence ao conjunto dos números ímpares e que o número 4 não pertence a este mesmo conjunto. No entanto, podemos discordar quanto ao fato de o número 10 pertence ou não ao conjunto dos números naturais "pequenos". Neste caso a resposta não é objetiva. Pertencer ou não poderá depender do tipo de problema em mãos. Este exemplo é apenas uma das inúmeras situações em que o significado de pertinência não está definido e, nestes casos, não sabemos dizer se o elemento pertence ou não a um dado conjunto.

A idéia de Zadeh foi flexibilizar a pertinência de elementos aos conjuntos criando a noção de *grau de pertinência*. Um elemento poderia pertencer parcialmente a um dado conjunto. Voltando ao caso do conjunto dos números naturais "pequenos", podemos dizer que o número 1 teria um grau de pertinência maior que o grau de pertinência do número 10 em relação a este conjunto. Para modelar matematicamente este "conjunto", Zadeh propôs o conceito de conjunto fuzzy.

1.1 Conjuntos Fuzzy

Para obter a formalização matemática de um conjunto fuzzy, nos baseamos no fato de que todo subconjunto clássico A de um conjunto universo $X \neq \phi$ pode ser caracterizado por uma função denominada **função característica** do conjunto A, definida por

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A; \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Podemos notar que o objetivo da função característica de um subconjunto $A \subset X$ é indicar se um elemento $x \in X$ pertence ou não a A, dependendo de sua imagem em $\{0, 1\}$. Assim, a função característica descreve completamente o conjunto A, já que indica quais elementos do conjunto X são elementos de A.

Baseando-se em uma "generalização" da função característica de um conjunto, definimos um conjunto fuzzy.

Desta forma, cada subconjunto A de X tem sua função característica. Mais ainda, prova-se que a cada função $\mathcal{X} : X \to \{0, 1\}$ existe um único conjunto $A \subset X$ tal que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_A$.

Definição 1.1.1 *Um* **subconjunto fuzzy** *A do conjunto universo X é caracterizado por uma função $\mu_A : X \to [0, 1]$, chamada função de pertinência do conjunto fuzzy A.*

O valor $\mu_A(x) \in [0, 1]$ indica o grau com que o elemento x de X pertence ao conjunto fuzzy A, com $\mu_A(x) = 0$ e $\mu_A(x) = 1$ indicando, respectivamente, a não pertinência e a pertinência completa de x ao conjunto fuzzy A. Observamos que a definição de conjunto fuzzy foi obtida simplesmente ampliando-se o contra-domínio da função característica, isto é, do conjunto $\{0, 1\}$, para o intervalo $[0, 1]$. Assim podemos notar que todo conjunto clássico é um caso particular de conjunto fuzzy, onde a função pertinência que o caracteriza é sua função característica.

Observações:

1. Com o intuito de simplificar o texto, iremos referir a subconjunto fuzzy apenas por **conjunto fuzzy**.

2. Quando quisermos nos referir a um conjunto clássico A, iremos apenas dizer conjunto A, sem usar a palavra "clássico". Porém se A for um conjunto fuzzy, usaremos a palavra fuzzy para diferenciá-lo do conjunto clássico.

3. Vimos que fixado o conjunto X, a função μ_A caracteriza completamente o conjunto fuzzy A. Por esse motivo, muitas vezes iremos nos referir ao conjunto fuzzy A

citando apenas a função que o caracteriza μ_A. Omitiremos também em alguns casos o índice A na notação μ_A, isto é, μ_A será denotada apenas por μ.

Exemplo 1.1.1 *Consideremos o subconjunto fuzzy P dos números naturais "pequenos":*

$$P = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é pequeno}\}$$

O número 1 pertence a esse conjunto? E o número 99? Dentro do espírito da teoria fuzzy, poderíamos dizer que ambos pertencem a P porém com diferentes graus de pertinência, de acordo com a propriedade que o caracteriza. Ou seja, a função de pertinência de P deve ser "construída" de forma coerente com o termo "pequeno" que caracteriza seus elementos no conjunto universo dos números naturais. Uma possibilidade para a função pertinência de P é

$$\mu_P(n) = \frac{1}{n+1}.$$

Neste caso podemos dizer que o número 1 pertence a P com grau de pertinência $\mu_P(1) = 0,5$, enquanto 99 pertence a P com grau de pertinência $\mu_P(99) = 0,01$.

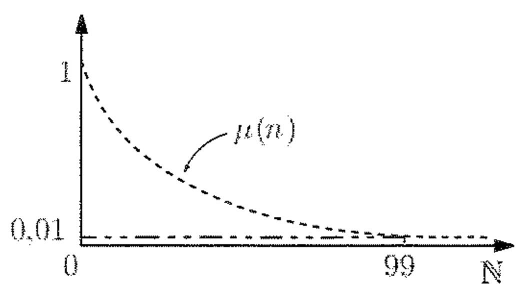

Figura 1.1: Conjunto fuzzy dos números naturais "pequenos".

Notemos que a escolha da função μ_P neste caso foi escolhida de maneira totalmente arbitrária, levando em conta apenas o significado da palavra "pequeno". Portanto existe infinitas maneiras de modelar matematicamente o conceito de "número natural pequeno". Uma outra maneira possível é

$$\mu_P(n) = e^{-n}.$$

Claro que a escolha de qual das funções deve ser adotada para representar o conjunto fuzzy em questão depende de fatores que estão relacionados com o contexto do problema a ser estudado. Do ponto de vista apenas da teoria fuzzy, qualquer uma das duas funções de pertinência acima podem ser representantes do nosso conjunto fuzzy P. Porém, o que deve ser notado é que cada uma destas funções produzem conjuntos fuzzy distintos. Finalmente, está implícito que dois conjuntos fuzzy A e B são iguais quando $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, para todo $x \in X$.

Exemplo 1.1.2 *Um conjunto fuzzy A é dito em forma de sino ou Gaussiana se sua função de pertinência é da forma*

$$\mu_A(x) = e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}$$

para qualquer a e b reais.

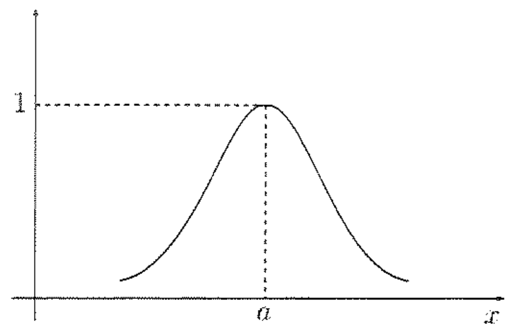

Figura 1.2: Conjunto fuzzy em forma de Sino ou Gaussiana

1.2 Operações entre Conjuntos Fuzzy

Sejam A e B subconjuntos clássicos de X representados pelas funções características $\mathcal{X}_A$ e $\mathcal{X}_B$, respectivamente. Os conjuntos

$$A \cup B = \{x;\ x \in A \ ou\ x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x;\ x \in A \ e\ x \in B\},$$

$$A' = \{x \in U;\ x \notin A\}$$

têm respectivamente as funções características,

$$\mathcal{X}_{A\cup B}(x) = \max\{\mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B\},$$

$$\mathcal{X}_{A\cap B}(x) = \min\{\mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B\},$$

$$\mathcal{X}_{A'}(x) = 1 - \mathcal{X}_A.$$

Pensando novamente em conjuntos fuzzy como sendo uma extensão de funções características, podemos definir união, intersecção e complementar de conjuntos fuzzy.

Observação: Seja $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. No decorrer desse texto $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ e $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ denotarão $max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, respectivamente.

Definição 1.2.1 *Sejam A e B conjuntos fuzzy. As funções pertinências que representam os conjuntos fuzzy união, intersecção e complementar de conjuntos fuzzy são dadas por,*

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x),$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x),$$

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x),$$

respectivamente.

Existem conjuntos fuzzy com propriedades especiais que serão de muito uso no decorrer do texto, assim denotaremos estes conjuntos com nomes especiais, como por exemplo, conjunto fuzzy normal e semi-contínuo superior.

Definição 1.2.2 *Um conjunto fuzzy A é* **normal** *se $\mu_A(x) = 1$ para algum $x \in X$.*

Definição 1.2.3 *Um conjunto fuzzy A é* **semi-contínuo superiormente** *se sua função pertinência μ_A é uma função semi-continua superior.*

1.3 Níveis de um Conjunto Fuzzy

O conceito de nível de um conjunto fuzzy é de fundamental importância na teoria de conjuntos fuzzy.

Definição 1.3.1 *Sejam A um conjunto fuzzy e $\alpha \in [0,1]$. Definimos como* α**-nível** *de A o conjunto*

$$[A]^\alpha = \{x \in X; \mu_A(x) \geq \alpha\} \ (\alpha > 0)$$

e

$$[A]^0 = \overline{\{x \in X; \mu_A(x) > 0\}} \ \ \textbf{(suporte de } A\textbf{)}$$

No decorrer do texto, denotaremos por $\mathcal{F}(X)$ o conjunto de todos conjuntos fuzzy de X.

Temos ainda que se A é um conjunto fuzzy então $[A] : [0,1] \to \mathcal{P}(X)$, dada por $[A](\alpha) = [A]^\alpha$ é uma multifunção, isto é, uma função que associa elemento a conjunto. Este é um fato que colaborou muito para o desenvolvimento da teoria fuzzy, pois muitos resultados existentes hoje nessa teoria, foram retirados da teoria de multifunções.

Uma forma equivalente de representar o conjunto suporte de um conjunto fuzzy é dada pela seguinte proposição.

Proposição 1.3.1 *Seja $A \in \mathcal{F}(X)$, então*

$$[A]^0 = \overline{\bigcup_{0<\alpha\leq 1} [A]^\alpha}$$

Demonstração: Dado $x \in [A]^0$ existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{x \in X; \mu_A(x) > 0\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Como $\mu_A(x_n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{0<\alpha\leq 1} [A]^\alpha,$$

então

$$x \in \overline{\bigcup_{0<\alpha\leq 1} [A]^\alpha}.$$

Por outro lado, se

$$x \in \overline{\bigcup_{0<\alpha\leq 1} [A]^\alpha}$$

então existe

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{0<\alpha\leq 1} [A]^\alpha,$$

tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Assim para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $\mu_A(x_n) > 0$, que implica em x pertencer a $[A]^0$. $\square$

Proposição 1.3.2 *Sejam A e $B \in \mathcal{F}(X)$, então:*

1. *$A = B$ se, e somente se, $[A]^\alpha = [B]^\alpha$, $\forall \alpha \in [0,1]$.*

2. *$[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha \subseteq [A]^0$ para todo $0 \leq \alpha \leq \beta$.*

3. *$[A]^\alpha \neq \phi$ para todo $\alpha \in [0,1]$ se, e somente se, A é um conjunto fuzzy normal.*

4. *A relação*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X \Leftrightarrow [A]^\alpha \subseteq [B]^\alpha, \forall \alpha \in [0,1]$$

é uma ordem parcial sobre $\mathcal{F}(X)$

Demonstração:
(1) Suponha que $A = B$, então para todo $x \in X$ temos que $\mu_A(x) = \mu_B(x)$. Assim, se $x \in [A]^\alpha$ temos que $\mu_B(x) = \mu_A(x) \geq \alpha$, logo $x \in [B]^\alpha$. E se $x \in [B]^\alpha$ analogamente temos que $x \in [A]^\alpha$.

Por outro lado, dado $x \in X$ temos que $\mu_A(x) \in [0,1]$ então $x \in [A]^{\mu_A(x)}$, o que implica pela hipótese da proposição que $x \in [B]^{\mu_A(x)}$, logo $\mu_B(x) \geq \mu_A(x)$. Suponha que $\mu_B(x) \neq \mu_A(x)$ temos então que $\mu_B(x) > \mu_A(x)$, ou seja, existe $\delta > 0$ tal que $\mu_B(x) = \mu_A(x) + \delta$, assim $x \in [B]^{\mu_A(x)+\delta}$ implicando em $x \in [A]^{\mu_A(x)+\delta}$, então $\mu_A(x) \geq \mu_A(x) + \delta > \mu_A(x)$ o que é um absurdo. Portanto $\mu_B(x) = \mu_A(x)$, ou seja, $A = B$.

(2) Se $x \in [A]^\beta$ temos que $\mu_A(x) \geq \beta \geq \alpha$, logo $x \in [A]^\alpha$ satisfazendo a primeira inclusão. Para $\alpha = 0$ a segunda inclusão é imediata. Suponha então que $\alpha > 0$, assim se $x \in [A]^\alpha$ ocorre que $\mu_A(x) \geq \alpha > 0$, portanto $x \in [A]^0$, concluindo a demonstração.

(3) Suponha que $[A]^\alpha \neq \phi$, para todo $\alpha \in [0,1]$, logo existe $x \in [A]^1$, ou seja, $\mu_A(x) = 1$. Portanto A é um conjunto fuzzy normal.

Por outro lado se A é um conjunto fuzzy normal, existe $x \in X$ tal que $\mu_A(x) = 1$, logo $\mu_A(x) \geq \alpha$, para todo $\alpha \in [0,1]$. Conseqüentemente $[A]^\alpha \neq \phi$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

(4) Seja $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, para todo $x \in X$. Dado $x \in [A]^\alpha$,para algum $\alpha \in [0,1]$ temos que $\mu_B(x) \geq \mu_A(x) \geq \alpha$, então $x \in [B]^\alpha$.

Seja $[A]^\alpha \subseteq [B]^\alpha, \forall \alpha \in [0,1]$. Suponha que existe $x \in X$ tal que $\mu_A(x) > \mu_B(x)$, desse modo $x \in [A]^{\mu_A(x)}$, mas $x \notin [B]^{\mu_A(x)}$, o que é um absurdo. Portanto $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ $\forall x \in X$. □

Uma pergunta interessante é: "Dada uma família $\{N_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ de subconjuntos não vazios de X, existe um conjunto fuzzy $A : X \to [0,1]$ tal que $[A]^\alpha = N_\alpha$, para todo α?"

A resposta a essa pergunta é o **Teorema de Representação** de Negoita/Ralescu, cuja versão geral é a seguinte:

Teorema 1.3.3 (*Negoita & Ralescu* [**11**]) *Sejam X um conjunto e $\{N_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ uma família de subconjuntos de X tais que:*

1. $N_0 = X$
2. $\alpha \leq \beta \Rightarrow N_\beta \subseteq N_\alpha$
3. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots, \ \lim_{p \to \infty} \alpha_p = \alpha \Rightarrow N_\alpha = \bigcap_{p=1}^{\infty} N_{\alpha_p}$

Então o conjunto fuzzy $A : X \to [0,1]$ definido por

$$\mu_A(x) = \sup\{\alpha \in [0,1]; x \in N_\alpha\}$$

tem a propriedade que $[A]^\alpha = N_\alpha$, para todo $\alpha \in [0,1]$.

Definiremos a seguir tipos especiais de conjuntos fuzzy que serão de grande importância para nossas conclusões.

Definição 1.3.2 *Um conjunto fuzzy A é dito* **fuzzy-convexo** *se o conjunto $[A]^\alpha$ é convexo para todo $\alpha \in [0,1]$.*

Definição 1.3.3 *Um conjunto fuzzy A é dito* **suporte compacto** *se o conjunto $[A]^0$ é um conjunto compacto.*

1.4 Princípio de Extensão de Zadeh

Nessa seção estudaremos um princípio que permite associar conjuntos fuzzy de um domínio em conjuntos fuzzy de outro domínio a partir de uma função clássica. Este princípio surge da necessidade de aplicarmos uma função clássica a argumentos imprecisos. Isto é se tomarmos uma função $f : X \to Y$ e precisamos aplicar esta função a argumentos fuzzy. Para isso precisamos recorrer a uma extensão de f que tem a forma

$$\hat{f} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y),$$

e será denotada como sendo a *extensão de Zadeh* da função f.

Para introduzir este princípio, discutiremos um caso especial muito utilizado na teoria clássica. Dada a função $f : X \to Y$ e o subconjunto clássico A de X, temos que $f(A) = \{y; f^{-1}(y) \cap A \neq \phi\}$ é um subconjunto de Y. Representando este conjunto através de sua função característica

$$\mathcal{X}_{f(A)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in f(A) \\ 0 & \text{se } y \notin f(A), \end{cases}$$

vemos que

$$\mathcal{X}_{f(A)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{\tau \in f^{-1}(y)} \mathcal{X}_A(\tau) & \text{se } f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & \text{se } f^{-1}(y) = \phi, \end{cases}$$

para cada $y \in Y$.

De fato, dado $y \in Y$, suponhamos primeiro que $f^{-1}(y) \neq \phi$, então temos dois casos a considerar:

(i) Se $f^{-1}(y) \cap A \neq \phi$ então $y \in f(A)$ e assim $\mathcal{X}_{f(A)}(y) = 1$ e neste caso existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, logo $\sup\limits_{\tau \in f^{-1}(y)} \mathcal{X}_A(\tau) = 1$. Portanto

$$\sup_{\tau \in f^{-1}(y)} \mathcal{X}_A(\tau) = \mathcal{X}_{f(A)}(y).$$

(ii) Se $f^{-1}(y) \cap A = \phi$ então $\mathcal{X}_{f(A)}(y) = 0$. Temos ainda que $f(x) \neq y$ para todo $x \in A$ implicando $\sup\limits_{\tau \in f^{-1}(y)} \mathcal{X}_A(\tau) = 0$. Assim

$$\sup_{\tau \in f^{-1}(y)} \mathcal{X}_A(\tau) = \mathcal{X}_{f(A)}(y).$$

Suponhamos agora que $f^{-1}(y) = \phi$, então $y \notin f(A)$ implicando $\mathcal{X}_{f(A)}(y) = 0$.

Podemos generalizar esta técnica para conjuntos fuzzy, tornando assim o caso acima um caso particular, portanto definiremos o princípio de extensão de Zadeh.

Definição 1.4.1 *A* **extensão de Zadeh** *da função $f : X \to Y$ aplicada em um conjunto fuzzy A é a função $\hat{f}$, cuja função de pertinência de $\hat{f}(\mu_A)$ é*

$$(\hat{f}(\mu_A))(y) = \begin{cases} \sup\limits_{\tau \in f^{-1}(y)} \mu_A(\tau) & se\ f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & se\ f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

para cada $y \in Y$.

Exemplo 1.4.1 *Segue imediatamente da definição que se $f(x) = c$, constante real, então $\hat{f}(\mu) = \mathcal{X}_{\{c\}}$, para todo conjunto fuzzy $\mu : \mathbb{R} \to [0,1]$ normal.*

Proposição 1.4.2 *Sejam $f : X \to Y$ e $\hat{f}$ sua extensão de Zadeh. Então*

$$\hat{f}(\mathcal{X}_{\{x\}}) = \mathcal{X}_{\{f(x)\}}$$

para todo $x \in X$.

Demonstração: Pela definição 1.4.1

$$\begin{aligned} (\hat{f}(\mathcal{X}_{\{x\}}))(y) &= \begin{cases} \sup\limits_{\tau \in f^{-1}(y)} \mathcal{X}_{\{x\}}(\tau) & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in f^{-1}(y), \\ 0 & \text{se } x \notin f^{-1}(y). \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } y = f(x), \\ 0 & \text{se } y \neq f(x). \end{cases} \\ &= \mathcal{X}_{\{f(x)\}}(y) \end{aligned}$$

$\square$

Se f é bijetora, então $(\hat{f}(\mu))(y) = \mu(f^{-1}(y))$ e assim podemos construir o gráfico do conjunto fuzzy $\hat{f}(\mu)$ (figura 1.3).

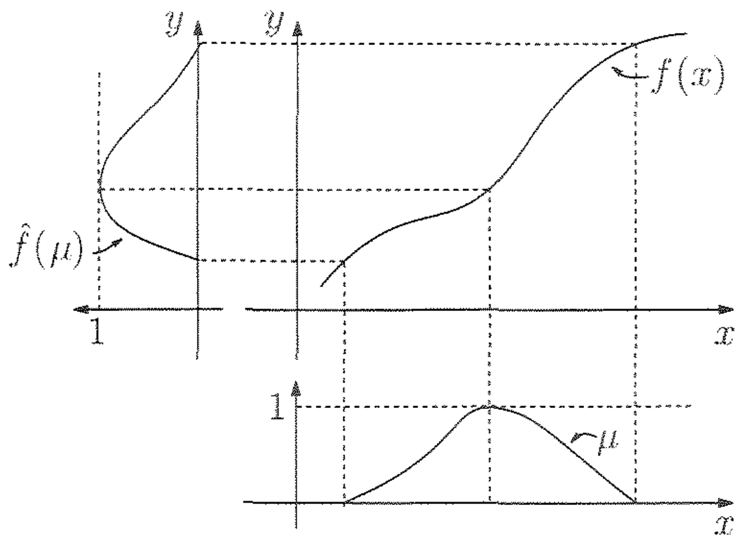

Figura 1.3: Gráfico de $\hat{f}(\mu)$

A seguir veremos alguns resultados de extensão de Zadeh que nos ajudarão a concluir resultados futuros.

Teorema 1.4.3 *Sejam X e Y conjuntos não vazios e $f : X \to Y$ uma função sobrejetora. Então μ atinge seu máximo em $f^{-1}(y)$ para todo $y \in Y$ se, e somente se, $[\hat{f}(\mu)]^\alpha = f([\mu]^\alpha)$ para todo $\mu : X \to [0,1]$ e $\alpha \in [0,1]$.*

Demonstração: Se $y \in [\hat{f}(\mu)]^\alpha$, então

$$(\hat{f}(\mu))(y) \geq \alpha, \text{ ou seja, } \sup_{\tau \in f^{-1}(y)} \mu(\tau) \geq \alpha.$$

Como, por hipótese, existe $x \in f^{-1}(y)$ tal que $\mu(x) = \sup_{\tau \in f^{-1}(x)} \mu(\tau) \geq \alpha$, segue que $y \in f([\mu]^\alpha)$.

Agora, se $y \in f([\mu]^\alpha)$, existe $y = f(x)$. Daí

$$(\hat{f}(\mu))(y) = \sup_{\tau \in f^{-1}(y)} \mu(\tau) \geq \mu(x) \geq \alpha,$$

isto é $y \in [\hat{f}(\mu)]^\alpha$.

Por outro lado, dado $y \in Y$, suponha que $\sup\limits_{\tau \in f^{-1}(y)} \mu(\tau) = s$, ou seja, $(\hat{f}(\mu))(x) = s$, daí

$$s \in [\hat{f}(\mu)]^s = f([\mu]^s).$$

Isto é, existe x com $\mu(x) \geq s$ tal que $f(x) = y$. Mas, pela definição de s, tem-se $\mu(x) = s$.
$\square$

Observação: Pela demonstração acima fica claro que a inclusão, $f([\mu]^\alpha) \subset [\hat{f}(\mu)]^\alpha$, sempre ocorrerá.

O teorema seguinte foi inicialmente demonstrado por Nguyen [12] para o caso em que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e por Cabrelli e al. [5] para o caso de um sistema de conjunto fuzzy interados, no estudo de construção de imagens. Mais recentemente por Barros [1] no estudo de sistemas dinâmicos discretos.

Com a finalidade de se obter novas propriedades nas famílias dos conjuntos fuzzy, denotaremos o seguinte conjunto:

$$\mathcal{F}_K(X) = \{\mu : X \to [0,1]; [\mu]^\alpha \textit{ é compacto e não vazio para todo } \alpha \in [0,1]\}.$$

Teorema 1.4.4 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua, então a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}_K(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}_K(\mathbb{R}^n)$ está bem definida e,*

$$[\hat{f}(\mu)]^\alpha = f([\mu]^\alpha)$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

Observação: Lembremos que para se provar que $\hat{f}(\mu) \in \mathcal{F}_K(\mathbb{R}^n)$, basta verificar que os conjuntos $[\hat{f}(\mu)]^\alpha$ são não vazios e compactos para todo $0 \leq \alpha \leq 1$. Assim, provaremos apenas que $[\hat{f}(\mu)]^\alpha = f([\mu]^\alpha)$, já que $f([\mu]^\alpha)$ é não vazio e compacto pela continuidade de f, uma vez que $\mu \in \mathcal{F}_K(\mathbb{R}^n)$.

Observemos também que sendo f contínua, $f^{-1}(y)$ é fechado e tem-se $[\mu]^0 \cap f^{-1}(y)$ compacto por ser um conjunto fechado dentro do compacto $[\mu]^0$.

Demonstração: Dividiremos a demonstração em dois casos $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$.

i. Para $\alpha > 0$.

Seja $y \in [\hat{f}(\mu)]^\alpha$, então $(\hat{f}(\mu))(y) \geq \alpha$ e assim, $f^{-1}(y) \neq \phi$, bem com $[\mu]^0 \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Assim,

$$(\hat{f}(\mu))(y) = \sup_{\tau \in f^{-1}(y)} \mu(\tau) = \sup_{\tau \in [\mu]^0 \cap f^{-1}(y)} \mu(\tau) = \mu(x) \geq \alpha$$

para algum $x \in [\mu]^0 \cap f^{-1}(y)$, uma vez que μ é semicontínua superiormente e $[\mu]^0 \cap f^{-1}(y)$ é compacto (Ver Rudin [17] pág. 195). Logo $f(x) = y$ e $\mu(x) \geq \alpha$, isto é, $x \in f([\mu]^\alpha)$. Por outro lado já vimos $f([\mu]^\alpha) \subset [\hat{f}(\mu)]^\alpha$, sempre ocorrerá.

ii. Para $\alpha = 0$, tem-se

$$A = \{y; (\hat{f}(\mu))(y) > 0\} = f\{y; \mu(y) > 0\} = f(B).$$

Se $y \in A$, então

$$\sup_{\tau \in f^{-1}(y)} \mu(\tau) > 0,$$

daí existe x com $f(x) = y$ e $\mu(x) > 0$, isto é, $y \in f(B)$.

Se $y \in f(B)$, então existe $x \in B$ com $y = f(x)$, logo

$$\sup_{\tau \in f^{-1}(y)} \mu(\tau) \geq \mu(x) > 0$$

isto é, $y \in A$.

Agora,

$$\overline{A} = \overline{f(B)} \supset f(\overline{B})$$

por f ser contínua, e

$$\overline{A} = \overline{f(B)} \subset \overline{f(\overline{B})} = f(\overline{B})$$

pela compacidade de $\overline{B}$ e a continuidade de f.

Portanto

$$[\hat{f}(\mu)]^0 = f([\mu]^0).$$

□

Note que a família $\{f([\mu]^\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1\}$ define um único conjunto fuzzy, já que há uma correspondência biunívoca entre um conjunto fuzzy e a família $\{[\mu]^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1\}$. Uma conseqüência imediata do teorema acima é o seguinte:

Corolário 1.4.5 *Se f é contínua, então $\hat{f}$ é monótona no seguinte sentido*

$$\hat{f}(\mu) \leq \hat{f}(\nu) \quad se \quad \mu \leq \nu,$$

onde $\mu \leq \nu$ significa $\mu(x) \leq \nu(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Basta provar que $[\hat{f}(\mu)]^\alpha \subset f([\mu]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Mas, como

$$[\mu]^\alpha \subset [\nu]^\alpha \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

e

$$[\hat{f}(\mu)]^\alpha = f([\mu]^\alpha)$$

tem-se o resultado desejado. □

1.5 Números Fuzzy

Assim como no caso clássico, aqui também temos o objetivo de fazermos "contas". A diferença é que aqui pretendemos calcular quantidades imprecisas. Por exemplo, todos nós somos unânimes em dizer que o dobro de uma quantidade "em torno de 5" resulta em outra "em torno de 10". Para isto, "criaremos" objetos que generalizam os números reais. Tais objetos serão chamados de *números fuzzy*.

O conceito de número fuzzy vem do fato de muitos fenômenos não poderem ser caracterizados por números precisos. de um modo geral podemos dizer que, em um problema concreto, muitos números que lá aparecem são idealizações de informações imprecisas envolvendo valores numéricos. Por exemplo, quando medimos a altura de um indivíduo, o que obtemos é um valor numérico carregado de imprecisões. Tais imprecisões podem ter sido causadas pelos instrumentos de medidas, pelos indivíduos que estão medindo, pelo indivíduo que está sendo medido e etc. Finalmente optamos por um valor preciso (um número real) a para indicarmos a altura. No entanto, seria mais prudente dizermos que a altura é "em torno de a". Neste caso, matematicamente, indicamos a expressão "em torno de a" por um conjunto fuzzy A cujo domínio é o conjunto dos números reais. Também é razoável esperar que $\mu_A(a) = 1$. A escolha dos números reais como domínio é porque, teoricamente, os possíveis valores para a *altura* são números reais.

Definição 1.5.1 *Um conjunto fuzzy N é chamado* **número fuzzy** *quando o conjunto universo, onde N está definido, é o conjunto dos números reais ($\mu_N(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$) e satisfaz às condições:*

1. $[N]^\alpha \neq \emptyset$, $\forall \alpha \in [0,1]$.
2. *$[N]^\alpha$ é um intervalo fechado, $\forall \alpha \in [0,1]$.*
3. *O suporte de N, $supp(N) = [N]^0$, é limitado.*

Denotaremos por $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ o conjunto dos números fuzzy.

Observemos que, com a definição 1.5.1, todo número real r é um caso particular de número fuzzy cuja função de pertinência é sua função característica:

$$\mathcal{X}_{\{r\}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = r \\ 0 & \text{se } x \neq r. \end{cases}$$

Denotaremos aqui $\mathcal{X}_{\{r\}}(x)$ por $\tilde{r}$.

Proposição 1.5.1 $\mathcal{N}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}_K(\mathbb{R})$.

Demonstração: Se N é um número fuzzy, então para todo $\alpha \in [0,1]$ temos que $[N]^\alpha \neq \phi$ e $[N]^\alpha$ é um subconjunto fechado do conjunto compacto $[N]^0$ (Prop. 1.3.2 - Item 2). Portanto $N \in \mathcal{F}_K(\mathbb{R})$.

$\square$

Os números fuzzy mais comuns são os *triangulares* e os *trapezoidais*. A seguir daremos as definições desses números fuzzy.

Exemplo 1.5.2 *Um número fuzzy A é dito triangular se sua função de pertinência é da forma*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & se\ a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c} & se\ b \leq x \leq c \\ 0 & se\ x > c \end{cases}$$

para $a < b < c$.

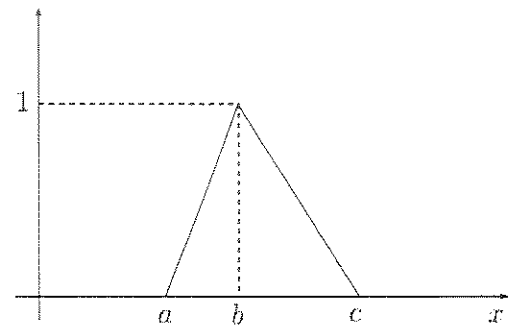

Figura 1.4: Número fuzzy Triangular

O gráfico de um número fuzzy triangular tem a forma de um triângulo, tendo como base o intervalo $[a, b]$ e, como único vértice fora desta base, o ponto $(b, 1)$. Deste modo, os números reais a, b e c definem o número fuzzy triangular A, que será denotado pela terna ordenada $(a; b; c)$.

Notemos que o conjunto fuzzy acima não é necessariamente simétrico já que $c - b$ pode ser diferente de $b - a$. Porém, $\mu_A(b) = 1$, podemos dizer que o conjunto fuzzy A é um modelo matemático razoável para a expressão lingüística "*perto de b*". O mesmo não podemos dizer da expressão "em torno de b", onde esperamos uma simetria.

Exemplo 1.5.3 *Um número fuzzy A é dito trapezoidal se sua função de pertinência é da forma*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & se\ a \leq x \leq b \\ 1 & se\ b \leq x \leq c \\ \frac{x-d}{c-d} & se\ c \leq x \leq d \\ 0 & se\ x > d \end{cases}$$

para $a < b < c < d$.

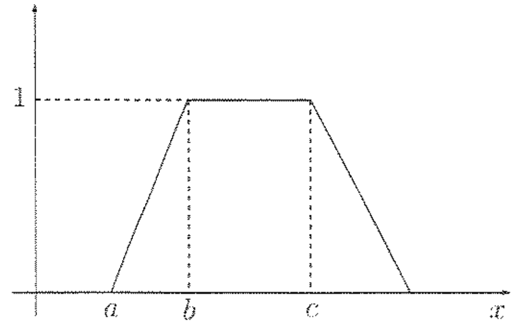

Figura 1.5: Número fuzzy Trapezoidal

1.5.1 Operações Aritméticas com Números Fuzzy

Aqui definiremos apenas as operações de adição entre números fuzzy e multiplicação de número real por números fuzzy. É claro que se M, N são números fuzzy ($M, N \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$), não podemos esperar que as operações aritméticas usuais entre funções sejam adequadas sobre as funções pertinências μ_M e μ_N. Por exemplo, se somarmos ponto a ponto como é usual entre funções, pode ocorrer que

$$(\mu_M + \mu_N)(x) = \mu_M(x) + \mu_N(x) \notin [0, 1],$$

assim o conjunto $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ não seria fechado em relação a esta operação.

A solução desse problema foi encontrada via *extensão de Zadeh* (ver seção 1.5). Afim de obter uma operação entre números fuzzy, consideremos a função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, assim sua extensão de Zadeh induzirá uma adição do seguinte modo:

$$(\hat{f}(\mu_M, \mu_N))(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x_1 + x_2 = y} \mu_M(x_1) \wedge \mu_N(x_2) & \text{se } f^{-1}(y) \neq \phi, \\ 0 & \text{se } f^{-1}(y) = \phi. \end{cases}$$

Analogamente, para definir uma multiplicação de escalar por um número fuzzy, consideremos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $g(x) = \lambda x$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como g é bijetora temos pelas propriedades da extensão de Zadeh que $(\hat{g}(\mu_N))(y) = \mu_N(g^{-1}(y))$, logo se $\lambda \neq 0$ temos que $(\hat{g}(\mu_N))(y) = \mu_N(y/\lambda)$. Agora, se $\lambda = 0$ temos $g(x) = 0$ para todo $x \in X$, então pelo exemplo 1.4.1 obtemos $(\hat{g}(\mu_N))(y) = \mathcal{X}_{\{0\}} = \tilde{0}$.

Portanto a partir do que foi visto acima podemos definir as operações de adição e multiplicação por escalar sobre o conjunto $\mathcal{N}(\mathbb{R})$.

Definição 1.5.2 *Sejam M e N dois números fuzzy, e λ um número real.*

1. *A soma dos números fuzzy M e N é o número fuzzy, $M+N$, cuja função de pertinência é*
$$\mu_{M+N}(x) = \sup_{y+z=x} \{\mu_M(y) \wedge \mu_N(z)\}$$

2. *A multiplicação de λ pelo número fuzzy N é número fuzzy, λN, cuja função de pertinência é*
$$\mu_{\lambda N}(x) = \begin{cases} \mu_N(x\lambda^{-1}) & se\ \lambda \neq 0 \\ \tilde{0} & se\ \lambda = 0. \end{cases}$$

Uma maneira alternativa, e mais pratica, de ser fazer estas operações é por meio dos α-níveis dos conjuntos fuzzy envolvidos.

Teorema 1.5.4 *Se M e N são dois números fuzzy e λ um número real, então para todo $\alpha \in [0,1]$ tem-se*
$$[M+N]^\alpha = [M]^\alpha + [M]^\alpha = \{a+b; a \in [M]^\alpha \text{ e } b \in [N]^\alpha\}$$
e
$$[\lambda N]^\alpha = \lambda [N]^\alpha = \{\lambda a; a \in [N]^\alpha\}$$

Demonstração: Temos que $\mathcal{N}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}_K(\mathbb{R})$ (Proposição 1.5.1), e que as funções
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2) & \mapsto & x_1+x_2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda x \end{array}$$
são contínuas, assim pelo teorema 1.4.4 e utilizando o resultado demonstrado por Nguyen, provando inicialmente o teorema 1.4.4 para o caso em que $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, temos que
$$[\hat{f}(\mu_N,\mu_M)]^\alpha = f([\mu_N]^\alpha, [\mu_M]^\alpha) \text{ e } [\hat{g}(\mu_N)]^\alpha = g([\mu_N]^\alpha)$$
logo,
$$\begin{aligned} [M+N]^\alpha &= [\mu_{M+N}]^\alpha \\ &= [\hat{f}(\mu_N,\mu_M)]^\alpha \\ &= f([\mu_N]^\alpha,[\mu_M]^\alpha) \\ &= [\mu_N]^\alpha + [\mu_M]^\alpha \\ &= [N]^\alpha + [M]^\alpha \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}[\lambda N]^\alpha &= [\mu_{\lambda N}]^\alpha \\ &= [\hat{g}(\mu_N g)]^\alpha \\ &= g([\mu_N]^\alpha) \\ &= \lambda[\mu_N]^\alpha \\ &= \lambda[N]^\alpha\end{aligned}$$

□

Por exemplo, da definição 1.5.2, $2(\tilde{4}) = \tilde{8}$, e do teorema 1.5.4, $[2(\tilde{4})]^\alpha = \{8\}$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

Apresentaremos agora, alguns resultados que serão de grande importância para a conclusão de resultados futuros desta dissertação.

Proposição 1.5.5 *Sejam N um número fuzzy e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, então $\hat{f}(\mu_N)$, onde $\hat{f}$ é a extensão de Zadeh da função f, é um número fuzzy. Temos ainda que $[N]^\alpha$ é o intervalo fechado $[n_1, n_2]$, onde*

$$n_1 = \min\{f(x); x \in [N]^\alpha\}$$

e

$$n_2 = \max\{f(x); x \in [N]^\alpha\},$$

para cada $\alpha \in [0,1]$.

Demonstração: Pelo teorema 1.4.4 temos que

$$[\hat{f}(\mu_N)]^\alpha = f([\mu_N]^\alpha).$$

Logo, pela definição de número fuzzy e pela continuidade de f temos que

1. $[\hat{f}(\mu_N)]^\alpha \neq \emptyset$, $\forall \alpha \in [0,1]$.

2. $[\hat{f}(\mu_N)]^\alpha$ é um intervalo fechado $[n_1, n_2]$, $\forall \alpha \in [0,1]$.

3. O suporte de $(\hat{f}(\mu_N))$, $supp(\hat{f}(\mu_N)) = [\hat{f}(\mu_N)]^0$, é limitado.

Portanto temos que a extensão de Zadeh $\hat{f}(\mu_N)$ é um número fuzzy. Logo para concluirmos a demonstração temos que provar que $n_1 = \min\{f(x); x \in [N]^\alpha\}$ e $n_2 = \max\{f(x); x \in [N]^\alpha\}$ para cada $\alpha \in [0,1]$. Como as demonstrações são análogas, faremos apenas o caso n_1.

Como $n_1 \in f([\mu_N]^\alpha)$ temos que existe $x_1 \in [\mu_N]^\alpha$ tal que $f(x_1) = n_1$, suponhamos que existe $x_2 \in [\mu_N]^\alpha$ tal que $x_2 \neq x_1$ e que $f(x_2) = \min\{f(x); x \in [\mu_N]^\alpha\}$, então $n_1 = f(x_1) > f(x_2) \in [n_1, n_2]$. Absurdo, pois $n_1 = \min\{a \in [n_1, n_2]\}$. $\square$

A seção seguinte está mais voltada para a lógica fuzzy propriamente dita. Esta é uma parte que tem tido grande aplicações na indústria [15].

1.6 Conectivos Lógicos

Consideremos a seguinte informação, "Se um tomate é vermelho, então ele está maduro", como neste caso "vermelho" e "maduro" são termos subjetivos, uma possível modelagem para esta informação é utilizando conjuntos fuzzy. O que ocorre em nosso dia-a-dia é que iremos nos deparar com informações mais completas, por exemplo, depararemos com informações da forma "Se x é A e y é B, então z é C ou z é D". Para traduzirmos estas sentenças para uma linguagem matemática, precisamos modelar os conectivos "e" e "ou" como também a condição "se...então". Estes conectivos são de domínio dependentes - eles variam de área para área. Portanto, existem várias maneiras de modelarmos estes conectivos. Nesta seção investigaremos maneiras para modelar estes conectivos usando combinações conhecidas que já estão na forma de conjuntos fuzzy. Desse modo estes modelos podem ser vistos como uma extensão dos conectivos lógicos usados na teoria clássica.

1.6.1 t-norma

Primeiramente consideremos o conectivo "*e*". Sob o ponto de vista da teoria clássica, dizemos que "um número natural n é par *e* maior que cinco" se ele pertencer ao conjunto dos números naturais pares e ao conjunto dos números maiores que cinco, ou melhor, se n pertencer a intersecção destes conjuntos. Sendo assim uma maneira de modelar o conectivo "*e*" na teoria clássica é utilizando intersecção de conjuntos. Vimos na seção 1.3, que a extensão de intersecção de conjuntos para intersecção de conjuntos fuzzy é por meio da aplicação $\wedge : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ onde $x \wedge y = \min\{x, y\}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

- $1 \wedge x = x, \forall x \in [0,1]$;
- $x \wedge y = y \wedge x$;
- $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
- se $v \leq w$ e $x \leq y$ então $v \wedge x \leq w \wedge y$.

Assim, uma operação binária

$$\triangle\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

satisfazendo as propriedades acima é um candidato à modelar o conectivo "*e*" no caso fuzzy. Observemos que $x \wedge x = x$ também ocorre, mas que não exigimos isto para modelar este conectivo. Denotaremos por "norma triangular" ou simplesmente "t-norma" como sendo a família das possíveis operações que modelam o conectivo "*e*". Adotaremos como notação genérica para uma t-norma o símbolo $\triangle$, e escreveremos $x \triangle y$.

Definição 1.6.1 *A operação binária* $\triangle\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *é uma* **t-norma** *se satisfazer o seguinte:*

1. $1 \triangle x = x$ *(fronteira);*
2. $x \triangle y = y \triangle x$ *(comutativa);*
3. $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$ *(associativa);*
4. *se* $v \leq w$ *e* $x \leq y$ *então* $v \triangle x \leq w \triangle y$ *(monotonicidade).*

Observemos que por (1) e (4), $0 \triangle x \leq 0 \triangle 1 = 0$,então $0 \triangle x = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

Exemplo 1.6.1 (Exemplos de t-normas)

- $x \triangle_0 y = \begin{cases} x \wedge y & \text{se } x \vee y = 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$
- $x \triangle_1 y = 0 \vee (x + y - 1)$

- $x \triangle_2 y = \dfrac{xy}{2-(x+y-xy)}$
- $x \triangle_3 y = xy$
- $x \triangle_4 y = \dfrac{xy}{x+y-xy}$
- $x \triangle_5 y = x \wedge y$

Observemos que apenas a t-norma $\triangle_0$, deste exemplo, não é contínua.

1.6.2 t-conorma

Analogamente a construção de t-normas, uma modelagem para o termo "ou" na teoria clássica é através de união de conjuntos, por exemplo, um número natural n é maior que 10 ou menor que 5, se ele pertencer ao conjunto dos números naturais maiores que 10 ou ao conjunto dos números naturais menores que 5, ou seja, n pertence a união desses conjuntos. Novamente da seção 1.3, temos que a extensão de união de conjuntos para união de conjuntos fuzzy é obtida pela aplicação da forma $\vee : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ onde $x \vee y = \max\{x, y\}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

- $0 \vee x = x$;
- $x \vee y = y \vee x$;
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
- se $v \leq w$ e $x \leq y$ então $v \vee x \leq w \vee y$.

Assim, uma operação binária

$$\nabla : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

satisfazendo as propriedades acima é um candidato à modelar o conectivo "*ou*" nos casos fuzzy. Denotaremos por "conorma triangular" ou simplesmente "t-conorma" como sendo a família destas operações. Adotaremos como notação genérica para uma t-conorma o símbolo ∇, e escreveremos $x \nabla y$.

Definição 1.6.2 *A operação binária* $\nabla : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *é uma* **t-conorma** *se satisfazer o seguinte:*

1. $0 \nabla x = x$ *(fronteira);*

2. $x \nabla y = y \nabla x$ *(comutativa);*

3. $x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$ *(associativa);*

4. *se* $v \leq w$ *e* $x \leq y$ *então* $v \nabla x \leq w \nabla y$ *(monotonicidade).*

Observemos que por (1) e (4), $1 = 1\nabla 0 \leq 1 \nabla x$, então $1 \nabla x = 1$ para todo $x \in [0,1]$.

Exemplo 1.6.2 (Exemplos de t-conormas)

- $x \nabla_0 y = \begin{cases} x \vee y & se\ x \wedge y = 0 \\ 1 & caso\ contrario \end{cases}$
- $x \nabla_1 y = 1 \wedge (x + y)$
- $x \nabla_2 y = \dfrac{x+y}{1+xy}$
- $x \nabla_3 y = x + y - xy$
- $x \nabla_4 y = \dfrac{x+y-2xy}{1-xy}$
- $x \nabla_5 y = x \vee y$

A modelagem fuzzy para o termo "*Se...então*" será discutida no capítulo 2.

1.7 Relações Fuzzy

Estudos de associações, relações ou interações, entre os elementos de diversas classes, é de grande interesse na análise e compreensão de muitos fenômenos do mundo real. Matematicamente, o conceito de relação é formalizado a partir da teoria de conjuntos. Uma relação clássica descreve a interrelação entre dois ou mais objetos e, sendo um conjunto, é representada por sua função característica. Uma relação de amizade entre duas pessoas, por exemplo, designada como *amigos* considera que, nas relações humanas ou alguém é seu amigo ou não é, o que é uma simplificação da realidade. Por outro lado, uma relação de *amizade* fuzzy entre duas pessoas pode considerar o grau de amizade entre elas. Sendo assim, dois ou mais indivíduos podem se relacionar com diferentes graus de amizade.

Podemos dizer então que a relação será fuzzy quando optarmos pela teoria dos conjuntos fuzzy, e será clássica quando optarmos pela teoria de conjuntos clássicos para conceituar a relação em estudo. Qual dos modelos adotar, dentre estes dois, depende muito do fenômeno estudado. Lembremos que a teoria fuzzy tem maior robustez no sentido que ela inclui a teoria clássica de conjuntos.

O conceito matemático de uma relação é formalizado utilizando-se do produto cartesiano clássico entre conjuntos que será dado a seguir

Definição 1.7.1 *Uma relação (clássica) R, sobre $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, é qualquer subconjunto(clássico) do produto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos, $X_1 \times X_2$, a relação é chamada binária sobre $X_1 \times X_2$.*

Como a relação R é um subconjunto do produto cartesiano, então ela pode ser representada por sua função característica $\mathcal{X}_R$. Assim,

$$\mathcal{X}_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin R. \end{cases}$$

Definição 1.7.2 *Uma relação fuzzy R, sobre $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, é qualquer subconjunto fuzzy do produto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos, $X_1 \times X_2$, a relação é chamada de fuzzy binária sobre $X_1 \times X_2$.*

Se a função de pertinência da relação fuzzy R for também indicada por R, então o número $R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0, 1]$ indica o grau com que os elementos x_i que compõem a n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ estão relacionados segundo a relação R.

A principal vantagem na opção pela relação fuzzy, é que uma relação clássica indica apenas se há ou não relação entre dois objetos, enquanto uma relação fuzzy além de indicar se existe ou não relação, indica também o grau desta relação.

Uma relação fuzzy sobre $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ que será muito importante para a conclusão dessa dissertação, é o produto cartesiano entre conjuntos fuzzy. Da teoria de conjuntos clássicos, temos que dados os conjuntos A e B, definimos produto cartesiano entre estes conjuntos como sendo o conjunto

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \text{ e } b \in B\},$$

assim, a função característica que representa o produto cartesiano entre os conjuntos A e B é dada por

$$\mathcal{X}_{A\times B}(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in A \text{ e } b \in B \\ 0 & \text{se } a \notin A \text{ ou } b \notin B, \end{cases}$$

ou simplesmente

$$\mathcal{X}_{A\times B}(a,b) = \mathcal{X}_A(a) \wedge \mathcal{X}_B(b).$$

Tratando novamente conjuntos fuzzy como sendo uma extensão de conjuntos clássicos a partir da ampliação do contra-domínio da função característica, poderíamos definir produto cartesiano entre os conjuntos fuzzy A e B como sendo o conjunto representado pela função pertinência

$$\mu_{A\times B}(a,b) = \mu_A(a) \wedge \mu_B(b).$$

Posto dessa maneira temos que o produto cartesiano clássico é um caso particular de produto cartesiano fuzzy, devido a função mínimo ter a propriedade $0 \wedge x = 0$ e $1 \wedge x = x$, para todo $x \in [0,1]$. Sendo assim, podemos generalizar está definição utilizando t-norma. Logo a definição genérica de produto cartesiano fuzzy ficará da seguinte maneira.

Definição 1.7.3 *O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, respectivamente, é a relação fuzzy $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ representada pela função pertinência*

$$\mu_{A_1\times A_2\times\ldots\times A_n}(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \mu_{A_1}(a_1) \vartriangle \mu_{A_2}(a_2) \vartriangle \ldots \vartriangle \mu_{A_n}(a_n).$$

para todo $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X_1, X_2, \ldots, X_n$.

A noção e utilização de produto cartesiano fuzzy ficará mais clara no próximo capítulo, onde introduziremos o conceito de sistemas fuzzy, que são sistemas compostos de regras da forma "Se...Então". E veremos que essas regras são produtos cartesianos de conjuntos fuzzy. Sendo assim, uma produtos cartesianos fuzzy será uma possível forma de modelar o termo "Se...então".

Capítulo 2

Sistemas Fuzzy

Como fazer uma maquina inteligente? Esta foi á pergunta que mais colaborou para o desenvolvimento da Teoria Fuzzy. Através da teoria fuzzy, mais precisamente, com a teoria de sistemas fuzzy baseados em regras foi possível obter uma resposta mais concreta a esta pergunta (Kosko [10]).

A idéia é que sistemas fuzzy tem uma "geometria" simples: "Cobre" uma curva teórica com "grânulos" (figura 2.1). No decorrer deste capítulo exploraremos a idéia de sistemas fuzzy e daremos um tratamento matemático formal. Para termos uma simples noção, podemos pensar nisto do seguinte modo. Cada pedaço de conhecimento humano, é uma regra da forma SE...ENTÃO, que define um "grânulo". Um sistema fuzzy é uma coleção de regras fuzzy SE...ENTÃO, ou seja, é um grupo de "grânulos". Todas as regras definem "grânulos" que tentam cobrir alguma curva que representa a informação correta, precisa. Os "grânulos" que cobrem melhor a curva, são as melhores regras do sistemas. Mais informações significa mais regras. Mais regras significa mais "grânulos" e assim uma cobertura melhor. Quanto mais incertas as regras, maior serão os "grânulos" e pior será a cobertura. Quanto mais precisas as regras, menores serão os "grânulos" e assim melhor será a cobertura. Mas se as regras são totalmente precisas elas não são fuzzy e sim certas.

Começaremos este capítulo com uma única regra e em seguida trabalharemos com muitas regras juntas formando assim a base de regras de um sistema fuzzy.

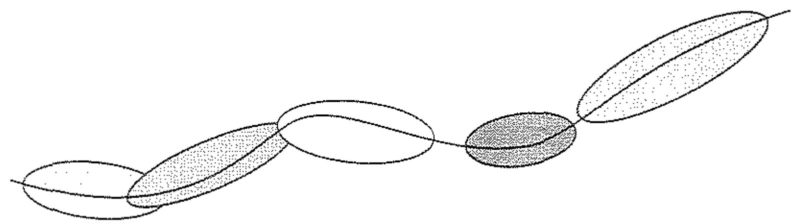

Figura 2.1:

2.1 Conhecimento como Regras

Como argumentaremos? Queremos jogar futebol no sábado ou domingo e não queremos ser molhados quando jogarmos. As notícias dizem que há uma boa chance de chover no sábado mas só uma leve chance de chover no domingo. Então podemos inferir que deveríamos jogar futebol no domingo. Tomamos esta decisão a partir de um conjunto de idéias e regras que associam idéias.

Em linguagens de computador é natural que as regras tenham a forma de declarações Se-Então. Se chover, então nos molhamos. Se nos molhamos, não podemos jogar futebol. No sábado a chance de chover é maior, assim não devemos jogar futebol no sábado. Se não podemos jogar futebol no sábado e a chance de chover no domingo é menor, então poderemos jogar futebol no domingo. Assim jogaremos futebol no domingo.

Conhecimento como regras foi introduzida por Aristóteles. Leibnitz sonhou com uma lógica simbólica em que poderíamos colocar todas nossas regras em símbolos e através de computadores alcançaríamos verdades matemáticas de fatos diários. Hoje com este mesmo intuito cientistas de computador construíram o campo da "inteligência artificial" ou AI (artificial intelligence), na convicção que conhecimento é regras e que podemos escrever regras no idioma negro-e-branco de computadores e lógica simbólica. Os "sistemas especiais AI" usam de 100 a 1.000 regras bivalentes. Os peritos AI dizem que não veremos inteligência "real" em sistemas AI até que eles usem 100.000 regras.

Queremos dizer "muito" com a regra "Se chover, seremos molhados". Se chover um pouco, seremos pouco molhados. Se chover muito, seremos muito molhados. O substantivo chuva pode ser representado por conjuntos fuzzy. Quando nos referimos à chuva podemos estar nos referindo a chuvisco, chuva média ou chuva forte. Ainda, *pouco* e *forte* representam subconjuntos fuzzy de chuva. Toda a chuva cai pouco ou muito. Esse é um assunto de grau. Isto é o que os cientistas AI não utilizaram.

O que é uma regra fuzzy? Regra fuzzy é como relacionamos os conjuntos fuzzy. SE X é A, ENTÃO Y é B, onde A e B são conjuntos fuzzy. Se a chuva é forte, então nos molharemos muito. Se o semáforo indicando vermelho estiver muito próximo, então acionamos fortemente o pedal do freio. Se uma ovelha é muito jovem, então ela é muito mais preza para os lobos. Essas regras são obtidas através de um especialista do problema em mãos ou simplesmente de nosso bom senso.

Quando Lofti Zadeh introduziu o conceito de conjunto fuzzy em 1965, a visão fuzzy era só bom senso, e isso não persuade os cientistas. Um bom modo para fazer com que se interessem pelo assunto é geometria, ou seja, mostrando regras fuzzy como sendo "grânulos".

2.2 Regras como Grânulos

Uma regra fuzzy define o que chamaremos de um "grânulo" fuzzy. "Grânulos", ou nuvens cinzas ou também ponto fuzzy são idéias chaves para modelar conhecimento na teoria fuzzy. Eles amarram o bom senso a geometria simples e ajudam à transpor o conhecimento de nossas cabeças para o papel ou em computadores. Um processo fuzzy é dividido em quatro passos, assim descritos:

- **Fuzzificação**: É o processo no qual os valores de entrada do sistema são convertidos para conjuntos fuzzy, com as respectivas faixas de valores onde estão definidos.
- **Base de Regras**: "Fornece" as relações que, guardarão os conhecimentos disponíveis das variáveis de entrada para compor a variável de saída.
- **Inferência Fuzzy**: É responsável pela valoração das regras fuzzy e da forma como elas são combinadas para produzir a saída.
- **Defuzzificação**: É o processo de conversão de um conjunto fuzzy de saída em um número real que melhor o represente.

A seguir vamos construir um sistema fuzzy para ilustrar cada um destes passos.

Primeiro, escolhemos os substantivos ou "variáveis". Chamemos estes de X e Y. X é a entrada do sistema e Y é a saída, (Causa, efeito. Incentivo, ação. Questão, resposta).

Digamos, por exemplo, que queremos controlar um condicionador de ar. Nesse caso X deve ser a temperatura em graus e Y a mudança na velocidade (acelerador) do motor do condicionador de ar. Nosso intuito é controlar a temperatura ambiente por meio de um dispositivo (acelerador) em um aparelho de ar condicionado.

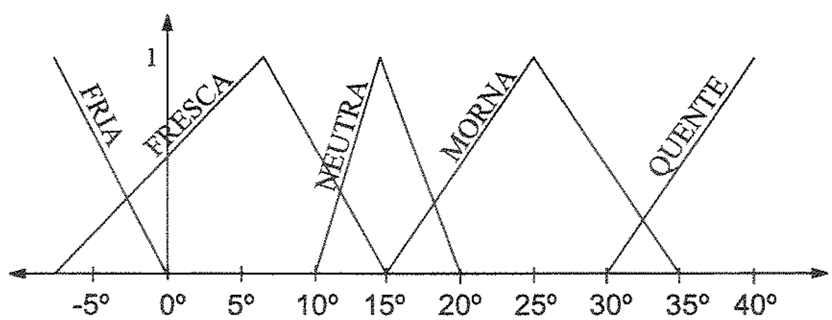

Figura 2.2: Temperatura

Segundo, escolha dos conjuntos fuzzy. Nós definimos os conjuntos fuzzy dos "substantivos" (ou variáveis lingüística) X e Y. Utilizaremos cinco conjuntos fuzzy para temperatura X: FRIA, FRESCA, NEUTRA, MORNA e QUENTE. Usaremos estes conjuntos fuzzy como sendo números fuzzy triangulares (ver exemplo 1.5.2 e figura 2.2). Poderíamos usar outros tipos de conjuntos fuzzy, no lugar de triângulos, como números fuzzy da forma trapezoidais ou gaussianas. Também usaremos alguns conjuntos mais largos que outros, e para os conjuntos FRIA e QUENTE usaremos "meios" triângulos. Isto tudo é uma questão de bom senso (ou experiência de especialistas). Os conjuntos mais largos são de menor importância, eles dão controles mais rústicos. Para um controle ser mais preciso, precisamos de conjuntos fuzzy mais finos. Observemos que utilizando conjuntos fuzzy, temos a vantagem da temperatura poder estar em dois conjuntos distintos ao mesmo tempo, desta maneira suavizamos a mudança de temperatura, algo que não acontece em condicionadores de ar que trabalham com sistemas de controles binários, onde a mudança de temperatura é brusca.

Para a saída Y utilizaremos cinco conjuntos fuzzy: PARADA, LENTA, MÉDIA, RÁPIDA e MUITO RÁPIDA, indicando a velocidade do motor (figura 2.3). Trabalharemos com a velocidade de motor em números de 0 a 100. Estes números podem representar a corrente elétrica do motor ou a rotação do motor.

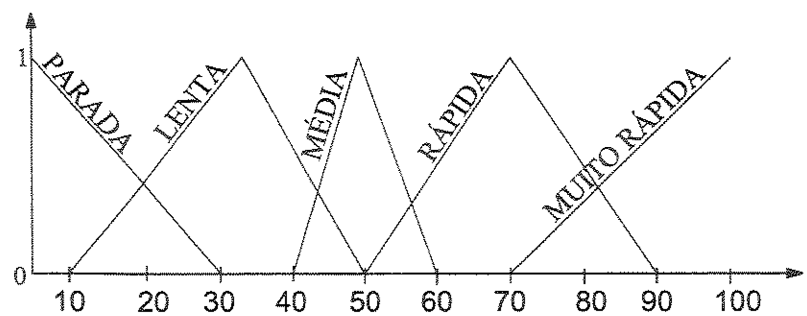

Figura 2.3: Velocidade do Motor

Terceiro, escolha das regras fuzzy. Este passo associa valores da velocidade do motor com valores lingüísticos da temperatura. Temos que aplicar uma velocidade de motor fixada a cada valor da temperatura. Comecemos com FRIA. Se a temperatura do condicionador indica FRIA, significa que o ambiente não precisa do condicionador para resfria-lo. Sendo assim queremos que a velocidade do motor seja PARADA. Assim temos nossa primeira regra: Se X é FRIA, ENTÃO Y é PARADA. O motor deveria acelerar um pouco quando o condicionador de ar se põe em FRESCA: SE X está FRESCA, ENTÃO Y está LENTA. Agindo do mesmo modo obtemos cinco regras:

Regra 1: Se a temperatura está FRIA, a velocidade do motor é PARADA.
Regra 2: Se a temperatura está FRESCA, a velocidade de motor é LENTA.
Regra 3: Se a temperatura é NEUTRA, a velocidade de motor é MÉDIA.
Regra 4: Se a temperatura está MORNA, a velocidade de motor é RÁPIDA.
Regra 5: Se a temperatura está QUENTE, a velocidade de motor é MUITO RÁPIDA.

Observemos que essas regras foram obtidas a partir de nosso bom senso. Elas são regras fuzzy porque as condições "FRIA" e/ou "RÁPIDA" são questões de grau e assim podem ser representados por conjuntos fuzzy. Nós modelamos conjuntos fuzzy por meio de números. Isto amarra palavras à matemática. E onde há matemática há geometria.

Isso nos leva a dizer que regras fuzzy assemelham-se a "grânulos". Se os conjuntos são MORNA e RÁPIDA, a regra 4 diz: Se a temperatura está MORNA, a velocidade de motor é RÁPIDA. Geometricamente essa regra pode ser vista como um "grânulo" (veja figura 2.4). Em matemática chamamos este "grânulo" de produto cartesiano de dois conjuntos fuzzy. O que é o produto cartesiano de dois segmentos de reta? Uma área ou retângulo, neste caso os conjuntos são clássicos e podem ser representados pelas suas funções características. No caso de conjuntos fuzzy utilizaremos produtos cartesianos fuzzy (ver seção 1.7) para modelar as regras fuzzy, ou seja, toda regra fuzzy da forma: "Se X é A, então Y é B", onde A e B são conjuntos fuzzy, é um conjunto fuzzy representado pela função pertinência dada pelo produto cartesiano fuzzy $A \times B$. Para representar um produto cartesiano fuzzy utilizaremos "grânulos" de regras como sendo retângulos. No exemplo citado o primeiro segmento de reta é a base do triângulo MORNA e o segundo segmento de reta é a base do triângulo RÁPIDA. Isso é tudo que usaremos. No caso das regras bivalentes utilizadas por cientistas AI, definem pontos, ou seja, definem "grânulos" que se reduziram a pontos.

Outra maneira muito usada para representar geometricamente uma regra fuzzy é através do que chamaremos de *nuvens*. Uma nuvem é uma figura no plano em que os pontos que tem maior grau de pertinência são mais escuros que os pontos com menor grau de pertinência.

Escrevemos o produto cartesiano de RÁPIDA e MORNA como RÁPIDO × MORNA, da mesma maneira que escrevemos o produto cartesiano de dois conjuntos. O mesmo para as outras quatro regras. Então temos a REGRA 1 como sendo PARADA × FRIA, REGRA 2 como LENTA × FRESCA, REGRA 3 como MÉDIA × NEUTRA, REGRA 5 como MUITO RÁPIDA × QUENTE.

Observe que começamos com palavras ou idéias e terminamos com geometria. Isso significa, que nós podemos usar ou podemos ver o sistema fuzzy inteiro como sendo cinco "grânulos" que se sobrepõem (figura 10.5). Queremos ressaltar ainda que quanto menos incertas forem as palavras que formam as regras, menores serão as bases dos triângulos que as representam como conjuntos fuzzy e conseqüentemente, menores serão

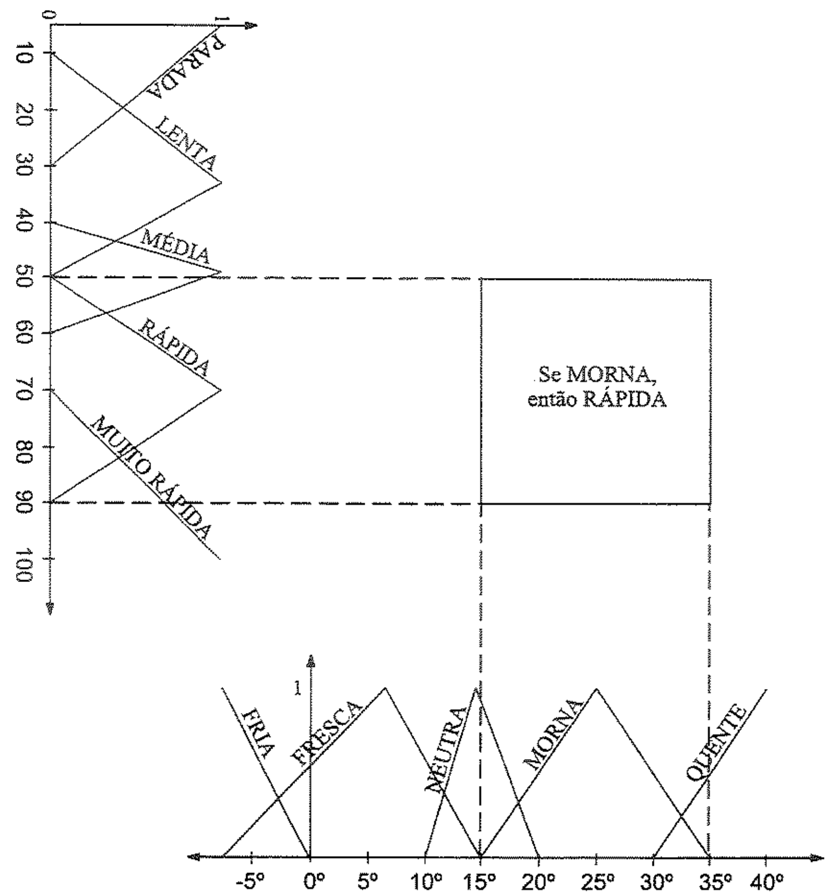

Figura 2.4: "Grânulo Fuzzy"

os "grânulos" que representam cada regra, ou seja, há intuitivamente uma idéia de que as regras se aproximam de funções numa interação ideal de informações. Este é nosso principal assunto neste trabalho de teoria de Aproximação.

2.3 Regras como Linguagem Matemática

Nessa seção daremos forma matemáticas às regras que compõem um sistema fuzzy, utilizando os conceitos dados no capítulo 1.

Consideremos um sistema fuzzy onde uma entrada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ produz uma saída $y \in Y$. Suponhamos que a relação $y = f(x)$ não é conhecida, mas o que associa uma entrada à sua saída pode ser representada por uma coleção de regras fuzzy, ou melhor, por regras lingüísticas da forma

$$
\begin{aligned}
&R_1\text{: “Se } x_1 \text{ é } A_{11} \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } A_{n1} \text{ então } y \text{ é } B_1\text{”}\\
&R_2\text{: “Se } x_1 \text{ é } A_{12} \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } A_{n2} \text{ então } y \text{ é } B_2\text{”}\\
&\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&R_r\text{: “Se } x_1 \text{ é } A_{1k} \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } A_{nr} \text{ então } y \text{ é } B_r\text{”}
\end{aligned}
$$

onde os $A's$ e $B's$ são subconjuntos fuzzy de X e Y, respectivamente. Estas regras formam o que chamamos de **base de regras fuzzy**.

Analisaremos a regra fuzzy:

$$R_i\text{: “Se } x_1 \text{ é } A_{1i} \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } A_{ni} \text{ então } y \text{ é } B_i\text{”.}$$

separadamente.

Observemos que o termo "x_k é A_{ki}" significa o quanto x_k pertence ao conjunto fuzzy A_{ki}, que é dado por $\mu_{A_{ki}}(x_k)$. Agora modelando o termo "e" com t-norma temos que "x_1 é A_{1i} e ... e x_n é A_{ni}" é traduzido matematicamente por $\mu_{A_{1i}}(x_1) \vartriangle \ldots \vartriangle \mu_{A_{ni}}(x_n)$. Assim pela definição 1.7.3 podemos dizer que a frase "x_1 é A_{1i} e ... e x_n é A_{ni}" é modelada pelo produto cartesiano dos conjuntos fuzzy $A_{1i}, \ldots, A_{ni}$, que denotamos por $A_i = A_{1i} \times \ldots \times A_{ni}$, aplicado no elemento $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Então a regra R_i pode ser escrita da seguinte forma:

$$R_i\text{: “Se } x \text{ é } A_i\text{, então } y \text{ é } B_i\text{”}$$

que pela seção anterior, significa o produto cartesiano fuzzy $(A_i \times B_i)$, ou seja, um "grânulo". Portanto, como a entrada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ é dada, cada regra fuzzy da base de regras pode ser escrita como um conjunto fuzzy com função de pertinência

$$\mu_{R_i}(y) = \mu_{A_{1i}}(x_1) \vartriangle \ldots \vartriangle \mu_{A_{ni}}(x_n) \vartriangle \mu_{B_i}(y) \tag{2.1}$$

aplicada em $y \in Y$.

Analisaremos agora o sistema fuzzy como um todo. Dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ temos que x satisfaz à regra R_1 ou à regra R_2 ou à regra R_3, assim por diante, ou não satisfaz nenhuma regra. Para mostrar que a afirmação "x não satisfaz nenhuma regra" nada acrescenta na modelagem matemática de um sistema fuzzy, analisaremos um caso mais simples.

Suponhamos que a regra "Se x é A então y é B" significa realmente "Se x é A então y é B, ou, se x não é A então y é indefinido". Usando t-conorma para escrever o termo "ou", esta regra pode ser representada pela relação fuzzy

$$(A \times B) \triangledown (A' \times \phi)$$

onde ϕ denota "indefinido", isto é, $\mu_\phi(y) = 0$ para todo $y \in Y$. Portanto a função pertinência que representa esta relação fuzzy é

$$\begin{aligned}(\mu_A(x) \vartriangle \mu_B(y)) \triangledown ((1 - \mu_A(x)) \vartriangle \mu_\phi(y)) &= (\mu_A(x) \vartriangle \mu_B(y)) \triangledown ((1 - \mu_A(x)) \vartriangle 0) \\ &= (\mu_A(x) \vartriangle \mu_B(y)) \triangledown 0 \\ &= (\mu_A(x) \vartriangle \mu_B(y)),\end{aligned}$$

que é a mesma função pertinência que representa o conjunto fuzzy da regra "Se x é A então y é B". Voltando ao caso do sistema fuzzy temos que considerar apenas os casos em que x satisfaz as regras R_i, portanto um sistema fuzzy com k regras é o conjunto fuzzy S representado pela função pertinência

$$\mu_S(y) = \mu_{R_1}(y) \triangledown \mu_{R_2}(y) \triangledown \ldots \triangledown \mu_{R_r}(y),$$

para cada $y \in Y$. De 2.1 usaremos aqui a seguinte definição formal de sistema fuzzy.

Definição 2.3.1 *Um* **sistema fuzzy** *com r regras é o conjunto fuzzy S de Y representado pela função pertinência*

$$\mu_S(y) = \triangledown_{1 \le j \le r} [\mu_{A_{1j}}(x_1) \vartriangle \ldots \vartriangle \mu_{A_{nj}}(x_n) \vartriangle \mu_{B_j}(y)], \tag{2.2}$$

para cada $y \in Y$.

Sendo assim, a função 2.2 indica com que grau cada $y \in Y$ pertence ao sistema fuzzy S, dependendo da entrada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$.

Exemplo 2.3.1 *Dada a entrada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ e sejam $a \vartriangle b = a \wedge b$ e $a \triangledown b = a \vee b$, então*

$$\mu_S(y) = \vee_{1 \le i \le r} [\mu_{A_{1i}}(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{A_{ni}}(x_n) \wedge \mu_{B_i}(y)].$$

A escolha de $\vartriangle$ e $\triangledown$ pode depender do problema em mãos, ou pode ser justificado por algum critério de análise.

Vimos acima que cada entrada $x \in X^n$ gera um conjunto fuzzy $\mu_S \in \mathcal{F}(Y)$ que representa o sistema fuzzy S. Assim, denotaremos como **função fuzzy** a função $G : X \to \mathcal{F}(Y)$.

As regras R_i acima são resultados de modelos lingüísticos representados por conjuntos fuzzy. Isto é feito para escolhermos funções pertinência que melhor refletem as semânticas lingüísticas representadas. Ajustes dos parâmetros destas funções pertinência pode ser necessário para obter uma fiel representação das regras lingüísticas.

Para melhorar o ponto de vista teórico, analisaremos o problema em que uma entrada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ produz uma única saída, e assumiremos neste caso, um conjunto de regras com específicas funções pertinência e conectivos lógicos.

Exemplo 2.3.2 *Suponha que as regras acima são mais precisas no sentido que os conjuntos fuzzy B_i's são clássicos unitários, isto é,*

$$R_i: \quad \text{“}Se\ x_1\ é\ A_{1i}, \ldots, x_n\ é\ A_{ni}\ então\ y = y_i\text{”},\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Neste caso, $B_i = \{y_i\}$, e

$$\mu_{B_i}(y) = \begin{cases} 1 & se\ y = y_i \\ 0 & se\ y \neq y_i. \end{cases}$$

Conseqüentemente, se $y \neq y_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$\begin{aligned} \mu_{R_i}(y) &= \mu_{A_{1i}}(x_1) \triangle \ldots \triangle \mu_{A_{ni}}(x_n) \triangle \mu_{B_i}(y) \\ &= \mu_{A_{1i}}(x_1) \triangle \ldots \triangle \mu_{A_{ni}}(x_n) \triangle 0 \\ &\leq 1 \triangle \ldots \triangle 1 \triangle 0 = 0 \end{aligned}$$

e disso

$$\mu_S(y) = 0 \triangle \ldots \triangle 0 = 0.$$

Se $y = y_j$, para algum $j = \{1, 2, \ldots, k\}$,

$$\mu_{A_{1j}}(x_1) \triangle \ldots \triangle \mu_{A_{nj}}(x_n) \triangle 1 = \mu_{A_{1j}}(x_1) \triangle \ldots \triangle \mu_{A_{ni}}(x_n),$$

então,

$$\begin{aligned} \mu_S(y) &= \mu_S(y_j) \\ &= 0\nabla \ldots \nabla 0 \nabla (\mu_{A_{1j}}(x_1) \triangle \ldots \triangle \mu_{A_{ni}}(x_n)) \nabla 0 \nabla \ldots \nabla 0 \\ &= \mu_{A_{1j}}(x_1) \triangle \ldots \triangle \mu_{A_{ni}}(x_n). \end{aligned}$$

Observemos no exemplo acima que para y_j o sistema é representado por um conjunto fuzzy. O que ocorre é que estamos procurando um número para ser a saída do sistema, pois dessa forma, seria mais fácil de conseguirmos resultados reais através de máquinas.

Podemos interpretar $\mu_S(y_j)$ como sendo o "peso" de y_j no sistema, então um número aceitável para ser a saída desse sistema é a média ponderada

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^{r} \mu_S(y_i) y_i}{\sum_{i=1}^{r} \mu_S(y_i)}.$$

Este é um dos métodos de defuzzificação de um conjunto fuzzy. Na próxima seção veremos alguns desses métodos.

2.4 Métodos de Defuzzificação

A defuzzificação é um procedimento que nos permite interpretar a saída de um modelo lingüístico fuzzy de forma quantitativa, ou seja, ele nos fornece um valor numérico representativo que captura o significado essencial de um conjunto fuzzy. Existem muitas técnicas de defuzzificação e entre as mais usadas estão:

- Média dos Máximos;
- Centro de Área.

2.4.1 Média dos Máximos

O método de defuzzificação da Média dos Máximos (MM) fornece a média de todos os valores de saída que tenham os maiores graus de pertinência. Suponhamos que "y é A" é uma conclusão fuzzy que deve ser defuzzificada. O método de defuzzificação MM pode ser expresso da seguinte forma

$$y^* = \frac{\sum_{x \in P} x}{m(P)}$$

onde P é o conjunto de todos os valores de saída com máximos grau de pertinência em A, ou seja,

$$P = \{x; \mu_A(x) = \sup_y \mu_A(y)\}$$

e $m(P)$ é uma medida do conjunto P. Note que, se P é um intervalo, então, a técnica MM de defuzzificação fornece o ponto médio desse intervalo.

A principal limitação do método de defuzzificação MM é que não considera a forma do conjunto fuzzy. Sendo assim, dois conjuntos fuzzy que apresentam diferentes formas, porém o mesmo conjunto de valores com grau de pertinência máximo, quando defuzzificados com está técnica, fornecerá o mesmo valor clássico, o que é contra-intuitivo.

2.4.2 Centro de Área

O método do Centro de Área (CA) é a técnica de defuzzificação mais comumente usada. Ele também é citado na literatura como método do Centro de Gravidade ou Centróide. Diferentemente do MM, a técnica do Centro de Área para calcular o valor numérico representativo considera todo o conjunto fuzzy de saída do sistema. O procedimento é similar ao usado para calcular o centro de gravidade em física, se consideramos a função pertinência $\mu_A(x)$ como a densidade de massa de x. Por outro lado, o método do Centro de Área pode ser compreendido com uma média ponderada, onde $\mu_A(x)$ funciona como o peso do valor x, este foi o método usado para defuzzificar o sistema do exemplo 2.3.2. Se x é discreto, então a defuzzificação do conjunto fuzzy A é dada por:

$$y^* = \frac{\sum_x \mu_A(x)x}{\sum_x \mu_A(x)}.$$

Da mesma forma, se x é contínuo, então,

$$y^* = \frac{\int \mu_A(x)xdx}{\int \mu_A(x)dx}.$$

A principal desvantagem desse método é seu custo computacional, principalmente no caso em que x é contínuo.

Portanto, vimos neste capítulo que para uma entrada $x \in \mathbb{R}^m$ um sistema fuzzy dado pelos quatro passos: fuzzificação, base de regras, inferência fuzzy e defuzzificação; irá produzir uma saída $y \in \mathbb{R}^n$. Desta forma o sistema fuzzy define uma função que a cada $x \in \mathbb{R}^m$ associa um $y \in \mathbb{R}^n$.

Nos capítulos seguintes estudaremos as propriedades de que tais sistemas fuzzy têm de aproximarem funções.

Capítulo 3

Aproximação Universal

Para modelarmos fenômenos da natureza, o ideal é que tenhamos uma função que o represente bem. Porém, na maioria das vezes não encontramos uma função ideal que o modele ou esta função na maioria das vezes é de grande complexidade, dificultando a obtenção de informações. Por outro lado, sistemas fuzzy baseados em regras podem modelar bem fenômenos a partir de regras lingüisticas, tornando o modelo mais próximo da realidade.

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados nos baseando no fato de que sistema fuzzy baseado em conjunto de regras lingüistica "cobrem"a curva que será candidata a ser a função que modela o problema em mãos. Assim sistemas fuzzy serão vistos como aproximadores de funções, ou seja, sistemas fuzzy podem aproximar funções. Para isso nos basearemos na teoria clássica de aproximação.

Como vimos no capítulo anterior, um sistema fuzzy define uma aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ construída de algum modo especial, a partir de um conjunto de regras da forma "Se $x_i \in A_{ij}$ então $y \in B_j$, $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, r$", onde as variáveis x_i e y são valores em $\mathbb{R}$ e os A_{ij} e B_i são conjuntos fuzzy. Sendo assim, daremos ênfase neste capítulo a estes sistemas fuzzy e na investigações de seu poder de aproximar funções.

3.1 Teorema de Stone-Weierstrass

Dado X um espaço métrico, no decorrer dessa seção $C(X)$ denotará o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$ contínuas.

Teorema 3.1.1 (Weierstrass) *Se $f \in C([a,b])$, então existe uma seqüência de polinômios p_n convergindo uniformemente para f em $[a,b]$.*

Esta é a forma em que o teorema foi originariamente apresentado por Weierstrass. A demonstração pode ser encontrada em [18].

Na demonstração do teorema 3.1.5 não necessitamos do teorema 3.1.1 em sua plenitude, mas apenas do seguinte caso especial, que enunciamos como um corolário.

Corolário 3.1.2 *Para cada intervalo $[-a,a]$, existe uma seqüência de polinômios reais p_n tais que*

$$p_n(0) = 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} p_n(x) = |x|$$

sendo a convergência uniforme em $[-a.a]$.

Demonstração: Pelo teorema 3.1.1, existe uma seqüência $\{p_n^*\}$ de polinômios reais que converge para $|x|$ uniformemente em $[-a,a]$. Em particular, $p_n^*(0) \to 0$, uniformemente, quando $n \to \infty$. Portanto se tomarmos os polinômios

$$p_n(x) = p_n^*(x) - p_n^*(0)$$

temos a convergência uniforme como desejado. □

Vamos a seguir destacar as propriedades dos polinômios das quais decorre o teorema de Stone-Weierstrass.

Definição 3.1.1 *Seja $H \subseteq C(X)$. Dizemos que*

1. *H é uma subalgebra de $C(X)$ se para $a \in \mathbb{R}$ e $f, g \in H$ temos $af, f+g$ e $fg \in H$.*

2. *H não se anula em nenhum ponto de X se para cada $x \in X$ existir $h \in H$ tal que $h(x) \neq 0$.*

3. *H separa pontos em X se a cada par de pontos distintos x_1 e $x_2 \in X$ existir uma $h \in H$ tal que $h(x_1) \neq h(x_2)$.*

Quando é valida a propriedade "se $f_n \in H$ $(n = 1, 2, \dots)$ e $f_n \to f$ uniformemente em X, então $f \in H$" dizemos que H é **uniformemente fechado**. Se $\overline{H}$ é o conjunto de todas as funções que são limites de seqüências uniformemente convergentes de H, então $\overline{H}$ é chamado **aderência uniforme** ou **fecho** de H. Se $\overline{H} = C(X)$ dizemos que H é **denso** em $C(X)$.

Por exemplo, o conjunto de todos os polinômios é uma subalgebra de $C(X)$, e o teorema de Stone-Weierstrass pode ser enunciado dizendo-se que o conjunto dos polinômios em $[a, b]$ é denso no conjunto das funções contínuas em $[a, b]$.

Teorema 3.1.3 *Seja $\overline{H}$ a aderência uniforme de uma subalgebra H de funções limitadas. Então $\overline{H}$ é uma subalgebra uniformemente fechada.*

Demonstração: Se $f \in \overline{H}$ e $g \in \overline{H}$, existem seqüências uniformemente convergentes $\{f_n\}$ e $\{g_n\} \in C(K)$ tais que $f_n \to f$, $g_n \to g$ com f_n e $g_n \in \overline{H}$. Como se trata de funções limitadas, é fácil mostrar que

$$f_n + g_n \to f + g, \qquad f_n g_n \to fg, \qquad cf_n \to cf,$$

em que c é qualquer constante, sendo a convergência uniforme em cada caso.

Logo $f + g \in \overline{H}$, $fg \in \overline{H}$, $cf \in \overline{H}$, de modo que $\overline{H}$ é uma subalgebra.

Seja $\{f_n\}$ uma seqüência uniformemente convergente de elementos de $\overline{H}$. Existem funções $\{g_n\} \in H$ tais que

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

Se $f_n \to f$ uniformemente é claro que temos também $g_n \to f$ uniformemente, de modo que $f \in \overline{H}$ e $\overline{H}$ é uniformemente fechada. □

Teorema 3.1.4 *Suponhamos H uma álgebra de funções em um conjunto X que separa pontos em X e que não se anula em nenhum ponto de X. Sejam x_1, x_2 pontos distintos de X e c_1, c_2 constantes reais. Então, H contém uma função f tal que*

$$f(x_1) = c_1, \qquad f(x_2) = c_2.$$

Demonstração: Pela hipótese temos que H contém funções g e h tais que $g(x_1) \neq g(x_2)$ e $h(x_1) \neq 0$. Seja

$$u = g + \lambda h,$$

em que λ é uma constante escolhida do seguinte modo: Se $g(x_1) \neq 0$, $\lambda = 0$; se $g(x_1) = 0$ e $\lambda \neq 0$ tal que

$$\lambda[h(x_1) - h(x_2)] \neq g(x_2).$$

Logo $u \in H$ e nossa escolha de λ mostra que $u(x_1) \neq u(x_2),\ u(x_1) \neq 0$. Se

$$\alpha = u^2(x_1) - u(x_1)u(x_2),$$

segue-se que $\alpha \neq 0$; e se

$$f_1 = \alpha^{-1}[u^2 - u(x_2)u],$$

então $f_1 \in H,\ f_1(x_1) = 1,\ f_1(x_2) = 0$.

Analogamente, existe $f_2 \in H$ com $f_2(x_1) = 0,\ f_2(x_2) = 1$. A função $f = c_1 f_1 + c_2 f_2$ tem as propriedades desejadas. □

Temos, agora, todos os elementos necessários para a generalização de Stone do teorema de Weierstrass:

Teorema 3.1.5 (Stone-Weierstrass) *Sejam K um subconjunto compacto de X e H uma subalgebra de $C(X)$. Se H separa pontos em X e não se anula em nenhum ponto de K, então $\overline{H} = C(K)$.*

Dividiremos a demonstração em quatro etapas.

Etapa 1. Se $f \in \overline{H}$, então $|f| \in \overline{H}$.

Demonstração: Seja

$$a = \sup_{x \in K} |f(x)| \tag{3.1}$$

Dado $\varepsilon > 0$, pelo corolário 3.1.2 existem números reais $c_1, \ldots, c_n$ tais que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i y^i - |y| \right| < \varepsilon \qquad (-a \leq y \leq a). \tag{3.2}$$

Como $\overline{H}$ é uma subalgebra, a função

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i f^i$$

pertence a $\overline{H}$. Por 3.1 e 3.2, temos

$$|\ g(x) - |f(x)|\ | < \varepsilon \qquad (x \in K).$$

Sendo $\overline{H}$ uniformemente fechada, segue-se que $|f| \in \overline{H}$.

Etapa 2. Se $f \in \overline{H}$ e $g \in \overline{H}$, então $max(f,g) \in \overline{H}$ e $min(f,g) \in \overline{H}$.

Por $max(f,g)$, designamos a função h definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq g(x), \\ g(x) & \text{se } f(x) < g(x), \end{cases}$$

e a função $min(f,g)$ é definida analogamente.

Demonstração: A etapa 2 resulta da etapa 1 e das identidades

$$\max(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2},$$

$$\min(f,g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

Este resultado pode, evidentemente, ser estendido a qualquer conjunto de funções: Se $f_1, \ldots, f_n \in \overline{H}$, então $max(f_1, \ldots, f_n) \in \overline{H}$ e $min(f_1, \ldots, f_n) \in \overline{H}$.

Etapa 3. Dados uma função real f, contínua em K, um ponto $x \in K$ e $\varepsilon > 0$, existe, uma função tal que $g_x(x) = f(x)$ e

$$g_x(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (t \in K). \tag{3.3}$$

Demonstração: Como $H \subset \overline{H}$ e H satisfaz as hipóteses do teorema 3.1.4, também $\overline{H}$ as satisfaz. Portanto, para todo $y \in K$, podemos determinar uma função $h_y \in \overline{H}$ tal que

$$h_y(x) = f(x), \qquad h_x(y) = f(y). \tag{3.4}$$

Pela continuidade de h_y, existe um conjunto aberto J_y, contendo y, tal que

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (t \in J_y). \tag{3.5}$$

Como K é compacto, existe um conjunto finito de pontos $y_1, \ldots, y_n$ tais que

$$K \subset J_{y_1} \cap \ldots \cap J_{y_n}. \tag{3.6}$$

Pela etapa 2, $g_x \in \overline{H}$ e as relações 3.4 a 3.6 mostram que g_x tem as demais propriedades desejadas.

Etapa 4. Dados uma função real f, contínua em K, e $\varepsilon > 0$, existe uma função $h \in \overline{H}$ tal que

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in K). \tag{3.7}$$

Como $\overline{H}$ é uniformemente fechada, esta afirmação é equivalente à conclusão do teorema.

Demonstração: Consideremos, para cada $x \in K$, as funções g_x introduzidas na etapa 3. Pela continuidade de g_x, existem conjuntos abertos V_x, contendo x, tais que

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon \qquad (t \in K). \tag{3.8}$$

Como K é compacto, existe um conjunto finito de pontos $x_1, \ldots, x_m$ tais que

$$K \subset V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_m}. \tag{3.9}$$

Seja

$$h = min(g_{x_1}, \ldots, g_{x_m}).$$

Pela etapa 2, $h \in \overline{H}$ e de 3.3 resulta

$$h(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (t \in K), \tag{3.10}$$

enquanto de 3.8 e 3.9 resulta

$$h(t) > f(t) + \varepsilon \qquad (t \in K). \tag{3.11}$$

Finalmente, 3.7 decorre de 3.10 e 3.11. □

3.2 Capacidade de Aproximação

Nesta seção apresentaremos resultados que permitem estudar a aproximações de funções reais contínuas por sistemas fuzzy, utilizando como ferramenta base o teorema de Stone-Weierstrass.

Vimos anteriormente que um sistema fuzzy define uma aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Para rever isto, considere a base de regras:

$$R_1: \text{“Se } x_1 \text{ é } A_{11} \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } A_{n1} \text{ então } y \text{ é } B_1\text{”}$$
$$R_2: \text{“Se } x_1 \text{ é } A_{12} \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } A_{n2} \text{ então } y \text{ é } B_2\text{”}$$
$$\vdots$$
$$R_r: \text{“Se } x_1 \text{ é } A_{1r} \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \text{ é } A_{nr} \text{ então } y \text{ é } B_r\text{”},$$

onde as variáveis x_i e y são valores em $\mathbb{R}$ e os A_{ij} e B_j são conjuntos fuzzy escolhidos de forma especial. Assim escolhendo uma t-norma $\triangle$ para o conectivo lógico "e" e uma t-conorma ∇ para "ou", obtermos a função pertinência

$$\mu_S(y) = \nabla_{1\leq j\leq r}[\mu_{A_{1j}}(x_1)\nabla \ldots \nabla\mu_{A_{nj}}(x_n)\nabla\mu_{B_j}(y)]$$

que representa a saída fuzzy do sistema, e para obtermos uma saída precisamos escolher um processo de defuzzificação coerente, por exemplo, para este sistema podemos utilizar a método do Centro de Área (CA)

$$y^* = f^*(x) = \frac{(\int_{\mathbb{R}} y\mu_S(y)dy)}{(\int_{\mathbb{R}} \mu_S(y)dy)}.$$

Portanto a aplicação $x \to y^* = f^*(x)$ depende

- dos conjuntos fuzzy A_{ij} e B_j,
- da t-norma $\triangle$ e da t-conorma ∇ e
- do "processo de defuzzificação" $\mu_S \to y^*$.

Sendo assim denotaremos por $\mathcal{M}$ uma classe das funções pertinência, por $\mathcal{L}$ uma classe de conectivos lógicos fuzzy, e por $\mathcal{D}$ um processo de defuzzificação. A terna $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$ refere-se a uma **metodologia** que especifica a aplicação entrada-saída $y^* = f^*(x)$. A função f^* também depende do número de regras r, e esta dependência será indicada pela notação f_r^*.

Baseando-nos no teorema de Stone-Weierstrass e em condições adequadas para $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$, mostraremos que a classe de funções $\{f_r^*, r \geq 1\}$, com a norma do sup, é densa no espaço das funções contínuas $C(K)$, onde K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

Seja $\mathbb{F}$ a classe das funções $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ da forma

$$f^*(x) = \frac{\sum_{j=1}^r y_j \triangle (\mu_{A_{1j}}(x_1) \triangle \ldots \triangle \mu_{A_{nj}}(x_n))}{\sum_{j=1}^r (\mu_{A_{1j}}(x_1) \triangle \ldots \triangle \mu_{A_{nj}}(x_n))}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y_j \in \mathbb{R}$, $\triangle$ é uma t-norma contínua e A_{ij} são conjuntos fuzzy tipo Gaussiana. Isto é,

$$\mu_{A_{ij}}(z) = \alpha_{ij}\; e^{(\frac{-(z-\alpha_{ij})^2}{k_{ij}})}. \tag{3.12}$$

Denotaremos por $\mathbb{F}|_K$ os elementos de $\mathbb{F}$ restritos a K.

Lema 3.2.1 *Sejam $\{a_i\}_{i=1}^m$ e $\{b_i\}_{i=1}^n$ conjuntos de números reais positivos finitos. Então*

$$(\wedge_i\{a_i\})(\wedge_j\{b_j\}) = (\wedge_i(\wedge_j\{a_i b_j\})).$$

Demonstração: Dado $i \in \{1, \ldots, m\}$ fixo temos que $\wedge_j\{a_i b_j\} = a_i b_{k_1}$, logo $a_i b_{k_1} \leq a_i b_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Suponha que $b_{k_1} \neq b_{k_2}$ onde $b_{k_2} = \wedge_j\{b_j\}$, daí $b_{k_1} > b_{k_2}$ e $a_i b_{k_1} > a_i b_{k_2}$ o que é um absurdo.

Seja $(\wedge_i(\wedge_j\{a_i b_j\})) = \wedge_i\{a_i b_{k_1}\} = a_{q_1} b_{k_1}$. Suponha agora que $a_{q_1} \neq a_{q_2}$ onde $a_{q_2} = \wedge_i\{a_i\}$, então $a_{q_1} > a_{q_2}$ e $a_{q_1} b_{k_1} > a_{q_2} b_{k_1}$ o que é um absurdo. Portanto, $a_{q_1} b_{k_1} = (\wedge_i\{a_i\})(\wedge_j\{b_j\})$. □

Teorema 3.2.2 *Seja $a \triangle b = ab$ ou $a \triangle b = a \wedge b$. Para qualquer subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{F}|_K$ é denso em $C(K)$ na norma do sup.*

Demonstração: Demonstraremos o teorema para o caso $a \wedge b$. É suficiente verificar as hipóteses do teorema de Stone-Weierstrass. Primeiro, mostraremos que $\mathbb{F}|_K$ é uma subalgebra, isto é, se $f^*, g^* \in \mathbb{F}|_K$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $f^* + g^*, f^* g^*$ e αf^* estão em $\mathbb{F}|_K$. Isto segue-se usando o lema 3.2.1, e que produto de Gaussianas é Gaussiana.

Para mostrar que $\mathbb{F}|_K$ não se anula em nenhum ponto, basta escolhermos $y_j > 0$ para todo j. Como $\mu_{ij}(x_i) > 0$ para todo i e j, temos assim que $f^*(x) > 0$.

Agora mostraremos que $\mathbb{F}|_K$ separa pontos em K. Sejam $u, v \in K$ com $u \neq v$, então para f^* definido por

$$f^*(x) = \frac{\wedge_i\{e^{-\frac{1}{2}(x_i-u_i)^2}\}}{\wedge_i\{e^{-\frac{1}{2}(x_i-u_i)^2}\} + \wedge_i\{e^{-\frac{1}{2}(x_i-v_i)^2}\}}$$

$f^*(u) \neq f^*(v)$. Estes três passos, garantem que $\mathbb{F}|_K$ é denso em $C(K)$. Assim se $g \in C(K)$ e $\varepsilon > 0$, então existe $f^* \in \mathbb{F}|_K$ tal que $\| f^* - g \| < \varepsilon$, onde $\| g \| = \vee_{x \in K}|g(x)|$. □

Logo para $\triangle, \nabla \in \mathcal{L}$,

$$\mu_S(y) = \nabla_{1\leq j\leq r}[\mu_{A_{1j}}(x_i) \triangle \mu_{A_{2j}}(x_i) \triangle \ldots \triangle \mu_{A_{nj}}(x_i) \triangle \mu_{B_j}(y)]$$

Provaremos que $g(x) = \mathcal{D}(\mu_S)$ aproxima f com a precisão desejada. Para isso basta provar as propriedades de $\mathcal{D}$, ou seja, que μ_S não é identicamente nula e que $\mu_S(y) = 0$ quando $y \notin (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Para $x \in K$, existe z^j tal que

$$\vee\{|x_i - z_i^{(j)}|; i = 1, 2, \ldots, n\} \leq \delta(\varepsilon)$$

Assim

$$\mu_{A_{ij}}(x_i) = \hat{\mu_0}(\frac{x_i - z_i^{(j)}}{\delta}) > 0$$

pois para todo i temos que

$$\frac{x_i - z_i^{(j)}}{\delta} \in (-1, 1)$$

Tomando $y = f(z^{(j)})$, temos que $\mu_{B_j}(y) = \hat{\mu_0}(0) > 0$. Pelas propriedades de t-normas e t-conormas, segue-se que $\mu_S(y) > 0$.

Ainda, seja $y \notin (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Pelas propriedades de t-normas, mostrar que $\mu_S(y) = 0$ é suficiente mostrar que para $j = 1, 2, \ldots, r$,

$$p_j = [\mu_{A_{1j}}(x_i) \triangle \mu_{A_{2j}}(x_i) \triangle \ldots \triangle \mu_{A_{nj}}(x_i) \triangle \mu_{B_j}(y)] = 0.$$

Sendo $\triangle$ uma t-norma, $p_j = 0$ se algum dos números $\mu_{A_{ij}}(x_i), \mu_{B_j}(y)$ é 0. Se todos são positivos, então $|f(x) - f(z^{(j)})| \leq \varepsilon/2$ pela uniformidade contínua de f em K. Por outro lado, pela hipótese, $|y - f(x)| \geq \varepsilon$, e

$$\frac{y - f(z^{(j)})}{\varepsilon/2} \notin (-1, 1)$$

Conseqüentemente

$$\mu_{B_j}(t) = \hat{\mu_0}(\frac{t - f(z^{(j)})}{\varepsilon/2}) = 0$$

□

Vimos acima que existem várias classes de sistemas fuzzy que podem aproximar funções contínuas definidas em subconjuntos compactos de espaços euclidianos de dimensão finita. Sistemas fuzzy propriamente são de dimensão finita no sentido que o número de variáveis entradas é finito. Contudo, eles podem ser usados para aproximar funções contínuas em espaços de dimensão infinita.

Pelo resultado anterior temos que toda função contínua definida em K pode ser aproximada por funções de $\mathbb{F}_K$, funções estas que são conjuntos fuzzy que representam sistemas fuzzy com propriedades específicas, por exemplo, os conjuntos fuzzy têm que ter forma Gaussiana (3.12).

Discutimos anteriormente que a classe $\mathbb{F}$ de funções contínuas depende da metodologia $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$ escolhida. Consideremos agora a classe $\mathbb{F}(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$, onde $\mathcal{M}$ consiste das μ tais que $\mu = \mu_0(ax + b)$ para algum $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $\mu_0(x)$ contínua, positiva em algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e nula para $x \notin I$, $\mathcal{L}$ consiste das t-normas e t-conormas contínuas e $\mathcal{D}$ é um processo de defuzzificação que transforma cada conjunto fuzzy de saída μ em um número real de maneira que se $\mu(x) = 0$ para $x \notin (\alpha, \beta)$, então $\mathcal{D}(\mu) \in [\alpha, \beta]$. Por exemplo,

$$\mathcal{D}(\mu) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x\mu(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} \mu(x)dx}$$

que é um processo de defuzzificação.

Denotaremos por $\mathbb{F}(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})|_K$ os elementos de $\mathbb{F}(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$ restritos a K.

Teorema 3.2.3 *Para uma metodologia $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$ satisfazendo as condições acima, em qualquer compacto K de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{F}(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{D})|_K$ é denso em $C(K)$ com a norma do sup.*

Demonstração: Dados $f \in C(K)$ e $\varepsilon > 0$ temos que f é uniformemente contínua no compacto K, então existe $\delta(\varepsilon)$ tal que quando

$$\vee\{|x_i - y_i|; i = 1, 2, \ldots, n\} \leq \delta(\varepsilon)$$

temos que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$. Como K é compacto, existe uma cobertura de r bolas abertas de raio $\delta(\varepsilon)/2$ com a j-ésima centralizada em $z^{(j)}$. Consideremos a coleção de r regras da forma "Se x_1 é A_{1j} e x_2 é A_{2j} e ... e x_n é A_{nj} então y é B_j", onde as funções pertinência são escolhidas como a seguir. Seja μ_0 uma função contínua e positiva no intervalo (α, β) e 0 fora deste intervalo. Então a função

$$\hat{\mu_0}(t) = \mu_0(\frac{\beta - \alpha}{2}t + \frac{\beta + \alpha}{2})$$

pertence a $\mathcal{M}$, é positiva em $(-1, 1)$ e nula em $t \notin (-1, 1)$. Tomemos

$$\mu_{A_{ij}}(t) = \hat{\mu_0}(\frac{t - z_i^{(j)}}{\delta})$$

$$\mu_{B_j}(t) = \hat{\mu_0}(\frac{t - f(z^{(j)})}{\varepsilon/2})$$

Teorema 3.2.4 *Seja F um subconjunto compacto de $C(U)$, onde U é um espaço métrico compacto. Seja $J : F \to \mathbb{R}$ contínua. Então para cada $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua π de F para o espaço euclidiano de dimensão finita $\mathbb{R}^q$, para todo q, e uma função contínua J_ε definida no subconjunto compacto $\pi(F)$ tal que para cada $f \in F$,*

$$|J(f) - J_\varepsilon(\pi(f))| \leq \varepsilon.$$

Antes da demonstração é importante observarmos que o problema de aproximar J por um sistema fuzzy é reduzido ao de aproximar J_ε por um sistema fuzzy, onde J_ε é uma função contínua com um número finito de variáveis. Se um sistema fuzzy G aproxima J_ε para um $\varepsilon > 0$ dado, então G também aproxima J.

De fato,

$$\begin{aligned} |J(f) - g(\pi(f))| &\leq |J_\varepsilon(\pi(f)) - g(\pi(f))| + |J(f) - J_\varepsilon(\pi(f))| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Demonstração: Como F é compacto, J é uniformemente contínua em F, então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\|f - g\| \leq \delta(\varepsilon)$ então $\|J(f) - J(g)\| \leq \varepsilon$. Seja G um conjunto finito de pontos de F tal que para todo $f \in F$ existe um $g \in G$ com $\|f - g\| \leq \delta(\varepsilon)/3$. Sendo F um subconjunto compacto de $C(U)$, F forma uma família de funções equicontínuas, então existe $\beta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\|u - v\| \leq \beta(\varepsilon)$ temos que $\|f(u) - f(v)\| \leq \delta(\varepsilon)/4$ para cada $f \in F$. Escolhemos um conjunto finito $\{v_1, v_2, \dots, v_q\} = V \subset U$ tal que para cada $u \in U$, existe $v \in V$ onde $\|u - v\| \leq \beta(\varepsilon)$.

Definimos $\pi : F \to \mathbb{R}^q$ por $\pi(f) = (f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_q))$. Obviamente

$$\begin{aligned} \|\pi(f) - \pi(g)\| &= \bigvee_{1 \leq i \leq q} \{|f(v_i) - g(v_i)|\} \\ &\leq \|f - g\|. \end{aligned}$$

assim π é contínua e conseqüentemente $\pi(F)$ é compacto.

Definimos $J_\varepsilon : \pi(F) \to \mathbb{R}$ por

$$J_\varepsilon(\pi(f)) = \frac{\sum_G \alpha_g(f) J(g)}{\sum_G \alpha_g(f)}$$

onde para cada $g \in G$,

$$\alpha_g(f) = \bigvee \{0, \frac{\delta(\varepsilon)}{2} - \|\pi(f) - \pi(g)\|\}$$

é uma função contínua de $\pi(f)$. Para cada $f \in F$, existe $g \in G$ tal que

$$\|\pi(f) - \pi(g)\| \leq \|f - g\| \leq \delta(\varepsilon)/3 < \delta(\varepsilon)/2$$

Logo $\sum_G \alpha_g(f) > 0$. Desta maneira J_ε está bem definida e é contínua em $\pi(F)$.

Agora,

$$|J(f) - J_\varepsilon(\pi(f))| \leq \bigvee_{g \in H} |J(f) - J(g)|$$

Onde, $H = \{g \in G; \| \pi(f) - \pi(g) \| \leq \delta(\varepsilon)/2\}$. Como para cada $u \in U$, existe $v \in V$ tal que $\| u - v \| \leq \beta(\varepsilon)$, assim

$$\begin{aligned} |f(u) - g(u)| &\leq |f(u) - f(v)| + |f(v) - g(v)| + |g(v) - g(u)| \\ &\leq \delta(\varepsilon)/4 + |f(v) - g(v)| + \delta(\varepsilon)/4 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \| f - g \| &= \bigvee_G \{|f(u) - g(u)|\} \\ &\leq \delta(\varepsilon)/2 + \| \pi(f) - \pi(g) \| \end{aligned}$$

Então, quando $\| \pi(f) - \pi(g) \| \leq \delta(\varepsilon)/2$, temos $\| f - g \| \leq \delta(\varepsilon)$. Portanto $|J(f) - J(g)| \leq \varepsilon$, implica que para cada $f \in F$, temos

$$|J(f) - J_\varepsilon(\pi(f))| \leq \varepsilon$$

$\square$

É importante ressaltar, que os resultados de aproximação de sistemas fuzzy desta seção, demonstram que uma função contínua f, pode ser aproximada por funções, modeladas por conjuntos fuzzy, que representam um sistema de regras lingüísticas. Desta forma, podemos aproximar um modelo matemático de um fenômeno de uma forma mais real.

Capítulo 4

Aproximação Universal de Funções Fuzzy

Neste Capítulo veremos dois resultados de aproximação universal para funções fuzzy, que diferem do capítulo anterior no sentido que aqui teremos uma aproximação de função fuzzy a partir de sistemas fuzzy. Casos vistos anteriormente, utilizamos sistemas fuzzy para aproximar uma função real. Dividiremos este capítulo em duas seções, onde na primeira trabalharemos com aproximação de funções fuzzy, nos baseando ainda em sistemas fuzzy que satisfazem uma propriedade específica. Na segunda seção trataremos de aproximação de funções fuzzy utilizando o princípio de extensão de Zadeh (ver seção 1.4), e neste caso não estamos interessados em base de regras, ou seja, em sistemas fuzzy.

4.1 Aproximação de Funções Fuzzy por Sistemas Fuzzy

Vimos anteriormente que inferência fuzzy é usada para transformar um conjunto de regras em uma função matemática μ_S que serve como uma aproximação da função ideal mas desconhecida f, que modela um determinado fenômeno. No capítulo 2 vimos sistemas fuzzy podem ser usados para gerar funções reais $f : X \to Y$ de um espaço entrada $X \subset \mathbb{R}^m$ para um espaço saída $Y \subset \mathbb{R}^n$ satisfazendo quatro passos: (1) Fuzzificação dos valores de entrada, (2) construção da Base de Regras, (3) inferência fuzzy e (4) defuzzificação dos valores de saída.

Aqui abriremos mão do processo de defuzzificação para gerar funções $G : X \to \mathcal{F}(Y)$. Estamos interessados apenas no seguinte mecanismo: Primeiro, o sistema fuzzy gera uma função fuzzy $G : X \to \mathcal{F}(Y)$, de maneira que cada $x \in X$ dado, $G(x) = \mu_S$ é uma função de pertinência definida em Y é a saída fuzzy do sistema fuzzy. em seguida, através de funções fuzzy G aproximaremos uma função fuzzy F que modela o fenômeno estudado. Observemos que F associa valores crisp a um conjunto fuzzy, e não é uma função real. Portanto se queremos um número real como saída, precisamos defuzzificar o conjunto fuzzy, imagem de F, por algum processo de defuzzificação adequado.

Consideremos um sistema fuzzy S com r regras da forma

$$\begin{aligned} &R_1\text{: “Se } x \text{ é } A_1 \text{ então } y \text{ é } B_1\text{”}\\ &R_2\text{: “Se } x \text{ é } A_2 \text{ então } y \text{ é } B_2\text{”}\\ &\qquad\vdots\\ &R_r\text{: “Se } x \text{ é } A_r \text{ então } y \text{ é } B_r\text{”}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde A_i e B_i, para $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, são conjuntos fuzzy de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente.

Admitiremos agora algumas propriedades e notações que serão específicas para esta seção.

Notação: ε^n é a família dos conjuntos fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ que são normais, semi-contínuos superiormente (scs), fuzzy-convexos e suportes compactos (ver Capítulo 1).

Admitiremos ainda que:

$$B_i \in \varepsilon^n, \forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$$

e

$$\forall x \in X \subset \mathbb{R}^m, \exists j \in \{1, 2, \ldots, r\} \text{ tal que } \mu_{A_j}(x) > 0. \tag{4.2}$$

Definição 4.1.1 (Conjunto Fuzzy Básico (CFB)) *Dado um sistema fuzzy S, como em 4.1, as r funções básicas fuzzy $b_j (j = 1, \ldots, r)$ são definidas por $b_j : X \to [0, 1]$, onde*

$$b_j(x) = \frac{\mu_{A_j}(x)}{\sum_{i=1}^{r} \mu_{A_i}(x)}.$$

Por 4.2 temos que $\sum_{i=1}^{r}\mu_{A_i}(x) > 0$ tornando os CFB´s bem definidos. Evidentemente, $\sum_{i=1}^{r} b_i(x) = 1$, para todo $x \in X$.

Definiremos a saída $\mu_S = G(x)$, do sistema fuzzy $S(4.1)$, por $G : X \to \mathcal{F}(Y)$, onde a função de pertinência em x é

$$G(x)(y) = \mu_S(y) = \sum_{i=1}^{r} b_i(x)\mu_{B_i}(y).$$

Observemos que para cada entrada $x \in X$ temos uma função pertinência μ_S em Y. Com o intuito de simplificar o texto e incluir a dependência da variável x em μ_S denotaremos esta função pertinência por $\mu_{S(x)}$. Temos dessa maneira que $\mu_{S(x)}$ é um conjunto fuzzy em Y, tal que

$$\mu_{S(x)}(y) = \sum_{i=1}^{r} b_i(x)\mu_{B_i}(y),$$

para cada $y \in Y$.

A propriedade abaixo é de grande importância para os resultados neste capítulo.

4.1.1 Propriedade $p(\varepsilon, \delta)$ de Aproximação Universal

Definição 4.1.2 (propriedade $p(\varepsilon,\delta)$) *Sejam $\varepsilon, \delta > 0$ e $d(.,.)$ uma métrica em X. Um sistema fuzzy S com as descrições 4.1 possui a propriedade $p(\varepsilon, \delta)$ se satisfizer o seguinte:*

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} \exists z_i \in [A_i]^0; b_i(x) \le \varepsilon, \text{ qdo } d(x, z_i) \ge \delta. \tag{4.3}$$

Para $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, definimos $I_1(x, \varepsilon) = \{i \in \{1, \dots, r\}; b_i(x) > \varepsilon\}$ e $I_2(x, \varepsilon) = \{1, \dots, r\} \setminus I_1(x, \varepsilon)$.

A grosso modo, a propriedade acima impõe que a influência de cada regra no sistema fuzzy S venha a ser pequena no exterior de uma certa região.

Observemos que $I_1(x, \varepsilon) \neq \phi$, para $\varepsilon < 1/r$.

De fato, para cada $x \in X$ seja

$$\mu_{A_c}(x) = \max_{0 \le i \le r}(\mu_{A_i}(x)),$$

onde $c \in \{1, \dots, r\}$, logo,

$$r\mu_{A_c}(x) \ge \sum_{i=1}^{r} \mu_{A_i}(x) > 0$$

então,

$$\frac{\mu_{A_c}(x)}{\sum_{i=1}^{r}\mu_{A_i}(x)} \geq \frac{1}{r} > \varepsilon.$$

Daí,

$$c \in I_1(x, \varepsilon).$$

A definição da propriedade $p(\varepsilon, \delta)$ é baseada nas CFB´s b_i. Na proposição a seguir veremos para quais condições das funções pertinência μ_{A_i}, a propriedade $p(\varepsilon, \delta)$ é satisfeita.

Proposição 4.1.1 *Seja S um sistema fuzzy com a seguinte propriedade:*

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\} \exists z_i \in [A_i]^0; \mu_{A_i}(x) \leq \lambda\varepsilon, \ qdo \ d(x, z_i) \geq \delta,$$

onde

$$\lambda = \inf_{x \in X}(\max_{0 \leq i \leq r} \mu_{A_i}(x)). \tag{4.4}$$

Então S satisfaz a propriedade $p(\varepsilon, \delta)$.

Demonstração: Pela hipótese temos,

$$b_i(x) = \frac{\mu_{A_i}(x)}{\sum_{k=1}^{r}\mu_{A_k}(x)} \leq \frac{\lambda\varepsilon}{\sum_{k=1}^{r}\mu_{A_k}(x)},$$

para todo x tal que $d(x, z_i) \geq \delta$. Por definição

$$\lambda \leq \max_{0 \leq i \leq r}(\mu_{A_i}(x)) = \mu_{A_c}(x)$$

para algum $c \in \{1, \ldots .r\}$, logo

$$\frac{\lambda\varepsilon}{\sum_{k=1}^{r}\mu_{A_k}(x)} \leq \frac{\mu_{A_c}(x)\varepsilon}{\sum_{k=1}^{r}\mu_{A_k}(x)} \leq \varepsilon.$$

Portanto, $b_i(x) \leq \varepsilon$ □

Agora denotaremos S_r como sendo uma seqüência de sistemas fuzzy com r regras. E seja e_r a função definida por

$$\begin{array}{rccl} e_r: & \mathbb{R}_+ & \to & [0,1] \\ & \delta & \mapsto & \max_{i \in \{1, \ldots, r\}}\{\sup_{d(x,z_i) \geq \delta} b_i(x)\} \end{array}$$

onde $z_i \in [A_i]^0$.

Na prova do teorema 4.1.4 abaixo, nos defrontaremos com o seguinte problema: Para $\varepsilon, \delta > 0$ podemos encontrar um sistema fuzzy S satisfazendo a propriedade $p(\varepsilon/r, \delta)$, com r o número de regras em S? Esta questão é equivalente a alegar que existe uma seqüência de sistemas S_r em um compacto $X \subset \mathbb{R}^m$ com $\lim_{r\to\infty} re_r(\delta) = 0$, para $\delta > 0$ fixo. Equivalência que será mostrada na proposição seguinte.

Proposição 4.1.2 *Se $\lim_{r\to\infty} re_r(\delta) = 0$, para $\delta > 0$ fixo, então dado $\varepsilon > 0$, o sistema fuzzy S_r satisfaz a propriedade $p(\varepsilon/r, \delta)$.*

Demonstração: Pela hipótese temos que, dado $\varepsilon > 0$ existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $re_r(\delta) \leq \varepsilon$, para todo $r \geq r_0$. Logo

$$e_r(\delta) \leq \varepsilon/r, \quad \forall r \geq r_0,$$

conseqüentemente,

$$e_r(\delta) = \max_{i\in\{1,\dots,r\}} \{ \sup_{d(x,z_i)\geq\delta} b_i(x)\} \leq \varepsilon/r,$$

onde $z_i \in [A_i]^0$ e $r \geq r_0$. Então, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$ temos que $b_i(x) \leq e_r(\delta) \leq \varepsilon/r$, para $d(x, z_i) \geq \delta$ e $r \geq r_0$. Portanto S_r satisfaz a propriedade $p(\varepsilon/r, \delta)$.

□

Observação: Denotaremos $\lceil\ \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ como sendo a função maior inteiro, ou seja, dado $x \in \mathbb{R}$ temos que $\lceil x\rceil = \min\{y \in \mathbb{Z}; y \geq x\}$

Lema 4.1.3 *Sejam $\delta > 0, X \subset \mathbb{R}^m$ com $X \subset [x_{10}, x_{11}] \times \dots \times [x_{m0}, x_{m1}]$. Existe uma seqüência de sistemas fuzzy S_r com domínio X tais que $\lim_{r\to\infty} re_r(\delta) = 0$, sendo r o número de regras em S_r.*

Demonstração: Queremos demonstrar este lema construindo uma seqüência de sistemas fuzzy S_r com a propriedade desejada. Seja $\delta > 0$ fixo. Para $\Delta > 0$ definimos

$$h_k = \lceil\frac{(x_{k1} - x_{k0})}{\Delta}\rceil \quad e \quad d_k = \frac{(x_{k1} - x_{k0})}{h_k} \leq \Delta,$$

para $k \in \{1, \dots, m\}$.

Seja $\mathcal{J} = \{j = (j_1, \dots, j_m); 0 \leq j_1 \leq h_1, \dots, 0 \leq j_m \leq h_m\}$ e $z_j = (x_{10} + j_1 d_1, \dots, x_{m0} + j_m d_m)$ para $1 \leq k \leq m, 0 \leq j_k \leq h_k$. Considere os conjuntos fuzzy A_i definidos por

$$\mu_{A_i}(x) = \exp(\frac{-4\ln(2)|x - z_i|^2}{m\Delta^2}). \tag{4.5}$$

Agora, tomemos Δ de maneira que dependa do número de regras r de S_r, ou seja, Δ é um número real positivo tal que $r = h_1.h_2 \dots h_m$. Para a construção do sistema, usaremos o fato que para cada $x \in X$ podemos encontrar $j \in \mathcal{J}$ tal que $|x - z_j|^2 \leq \frac{\sqrt{m}\Delta}{2}$.

Tomando $\lambda \geq 1/2$ temos,

$$e_r(\delta) \leq 2\exp(\frac{-4\ln(2)\delta^2}{m\Delta^2}) = 2\exp(-c_1(1/\Delta)^2), \tag{4.6}$$

onde $c_1 = \dfrac{4\ln(2)\delta^2}{m}$.

De fato, pois

$$\sup_{|x-z_i|\geq\delta} b_i(x) = \sup_{|x-z_i|\geq\delta} \frac{\mu_{A_i}(x)}{\sum_{j=1}^{m} \mu_{A_j}(x)} = \frac{\sup_{|x-z_i|\geq\delta} \mu_{A_i}(x)}{\inf_{|x-z_i|\geq\delta} \sum_{j=1}^{m} \mu_{A_j}(x)}, \tag{4.7}$$

temos por 4.4 que $\lambda \leq \max_{0\leq i\leq r} \mu_{A_i}(x) \leq \sum_{j=1}^{m} \mu_{A_j}(x)$, logo

$$2 \geq \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{\inf_{|x-z_i|\geq\delta} \sum_{j=1}^{m} \mu_{A_j}(x)}, \tag{4.8}$$

então, por 4.7 e por 4.8 temos que

$$\sup_{|x-z_i|\geq\delta} b_i(x) \leq 2 \sup_{|x-z_i|\geq\delta} \mu_{A_i}(x),$$

sendo assim,

$$e_r(\delta) \leq 2 \sup_{|x-z_i|\geq\delta} \mu_{A_i}(x). \tag{4.9}$$

Como, $\sup_{|x-z_i|\geq\delta} \mu_{A_i}(x)$ ocorre quando $|x - z_i| = \delta$ temos,

$$\sup_{|x-z_i|\geq\delta} \mu_{A_i}(x) = 2\exp(\frac{-4\ln(2)\delta^2}{m\Delta^2}). \tag{4.10}$$

Portanto de 4.9 e 4.10 concluímos a inequação 4.6.

Ainda,

$$r = r(\Delta) \leq \frac{(x_{11} - x_{10})\dots(x_{m1} - x_{m0})}{\Delta^m} = c_2(1/\Delta)^m, \tag{4.11}$$

onde $c_2 = (x_{11} - x_{10}) \dots (x_{m1} - x_{m0})$.

Por 4.6 e 4.11 temos que

$$0 \leq re_r(\delta) \leq \frac{c_2(1/\Delta)^m}{2\exp(c_1(1/\Delta)^2)}.$$

Usando o fato que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^a}{\exp(x^b)} = 0$ para qualquer $a, b \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $\lim\limits_{r\to\infty} re_r(\delta) = 0$. □

É importante observarmos na demonstração do lema acima que as funções de pertinência que representam os conjuntos fuzzy A_i que compõem o sistema fuzzy S_r são da forma Gaussiana 4.5.

No resultado principal dessa seção utilizaremos como distância, entre conjuntos fuzzy, a métrica

$$D(A, B) = \sup_{\alpha} h([A]^\alpha [B]^\alpha), \tag{4.12}$$

definida em $\mathcal{F}(X)$, onde h é a métrica de Hausdorff que é dada por

$$h(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\},$$

sendo $\rho(A, B) = \sup\limits_{a\in A}[\inf\limits_{b\in B} \| a - b \|]$ e $\| \cdot \|$ é a norma em X.

Definiremos agora para cada $A \in \varepsilon^n$ a função,

$$\begin{array}{rccl} S_{\mu_A}: & [0,1] \times S^n & \to & \mathbb{R} \\ & (\alpha, y) & \mapsto & \max\{\langle y, x\rangle; x \in [A]^\alpha\}, \end{array}$$

onde $\langle .,. \rangle$ é o produto interno e $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. É demonstrado em [6] que a aplicação $\pi(A) = S_{\mu_A}$ é um homeomorfismo linear de ε^m no espaço de Banach

$$\mathcal{H} = L_\infty(S^n, BV([0,1])) \cap L_\infty([0,1], C(S^n)),$$

com a norma

$$|S_{\mu_A}| = \sup_{y\in S^n} V(S_{\mu_A}(., y)) + \sup_{\alpha\in[0,1]} \sup_{y\in S^n} |S_{\mu_A}(\alpha, y)|,$$

onde $V(.)$ é a variação total e $BV([0,1])$ é o espaço das funções limitadas em $[0,1]$, e $L_\infty(U, V)$ é o espaço das funções limitadas do espaço compacto U no espaço normado V com a norma $|f| = \sup_{u\in U} |f(x)|_V$.

Usaremos no teorema seguinte o fato de que continuidade de $G(x) = \mu_{S(x)}$ é equivalente a continuidade de $S_{G(x)}$ [7].

Antes de enunciar o principal resultado desta seção, vamos lembrar que a cada sistema S_r, com r regras, existe uma aplicação G_r, de modo que $G_r(x)$ é a saída fuzzy do sistema S_r para a entrada x, sem defuzzificação.

Teorema 4.1.4 *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ compacto e $F : X \to \varepsilon^n$ uma função fuzzy contínua. Então, existe uma seqüência de sistemas fuzzy S_n, associados as funções fuzzy G_n que satisfazem*

$$\lim_{n\to\infty} G_n = F$$

uniformemente em X. Isto é, $D(G_n(x), F(x)) \to 0$ uniformemente em X quando $n \to \infty$.

Demonstração: Consideremos o conjunto dos valores $z_1, \ldots, z_r$ e seja $\mu_{B_i} = F(z_i)(i = 1, \ldots, r)$ em um sistema fuzzy S. Para a correspondente função fuzzy G, temos em [1] que

$$S_{G(x)} = \sum_{i=1}^{r} b_i(x) S_{\mu_{B_i}}.$$

Provar este teorema é provar que existe uma seqüência de sistema fuzzy S_n com funções associadas G_n tais que $S_{G_n(x)} \to S_{F(x)}$ uniformemente em X.

Como $\sum_{i=1}^{r} b_i(x) = 1$ e $(\alpha + \beta)\mu_A = \alpha\mu_A + \beta\mu_A$ para todo $A \in \varepsilon^n$, segue-se que

$$F(x) = \sum_{i=1}^{r} b_i(x) F(x)$$

Sendo S_F contínua no compacto X temos que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ } tal \text{ } que \text{ } |x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |S_{F(x_1)} - S_{F(x_2)}| \leq \varepsilon \tag{4.13}$$

e existe $M > 0$ tal que $|S_{F(x)}| \leq M$ para todo $x \in X$.

Consideremos agora a função fuzzy G associada a um sistema fuzzy S com r regras, que satisfaz a propriedade $p(\varepsilon_1, \delta)$, onde $\varepsilon_1 = \varepsilon/(4rM)$. A existência do sistema acima é garantida pelo lema 4.1.3.

Assim,

$$
\begin{aligned}
|S_{G(x)} - S_{F(x)}| &= |\sum_{i=1}^{r} b_i(x) S_{\mu_{B_i}(x)} - S_{F(x)}| \\
&= |\sum_{i=1}^{r} b_i(x) S_{F(z_i)} - \sum_{i=1}^{r} b_i(x) S_{F(x)}| \\
&= \sum_{i=1}^{r} b_i(x) |S_{F(z_i)} - S_{F(x)}| \\
&= \sum_{i \in I_1(x,\varepsilon_1)} b_i(x) |S_{F(z_i)} - S_{F(x)}| + \sum_{i \in I_2(x,\varepsilon_1)} b_i(x) |S_{F(z_i)} - S_{F(x)}| \\
&\leq \varepsilon/2 + 2rM\varepsilon_1 = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Assim, F é contínua no compacto X, então F é uniformemente contínua em X, logo $S_{G(x)} \to S_{F(x)}$ uniformemente em X.

□

A grosso modo, o resultado acima concretiza o que foi visto no capítulo 2, ou seja, concretiza matematicamente a idéia de que aproximação de sistemas fuzzy baseados em regras lingüísticas é a tentativa de cobrir uma curva, da melhor forma possível, utilizando "grânulos". Assim, quanto mais grânulos tivermos e menores eles forem, melhor será a cobertura. E é isto que diz o resultado acima, quanto menor for a base dos conjuntos fuzzy de forma Gaussiana que modelam o fenômeno estudado e mais regras tivermos para explicar este fenômeno, mais precisa será a aproximação.

4.2 Aproximação Universal de Funções Fuzzy via Extensão de Zadeh

Nesta seção discutiremos um método de aproximação universal de funções fuzzy utilizando o princípio de extensão de Zadeh. É importante ressaltar que neste caso não utilizaremos sistemas fuzzy como aproximadores, pois a função f que modela o fenômeno já é dada.

4.2.1 Aproximação Universal de Funções Fuzzy via Extensão de Zadeh em Conjuntos Densos

Sejam $C[a,b]$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $H[a,b]$ um subconjunto denso de $C[a,b]$. Vimos anteriormente (seção 3.1) que $H[a,b]$ é um aproximador universal de $C[a,b]$: Dado $f \in C[a,b]$ e $\varepsilon > 0$, então existe $g \in H[a,b]$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in [a,b]$.

Seja $\mathcal{A}_e[a,b]$ o conjunto de todas aplicações $\hat{f}$ de números fuzzy de $[a,b]$ em números fuzzy, onde $\hat{f}$ é a extensão de Zadeh de $f \in C[a,b]$, e seja $\widehat{H}[a,b]$ o conjunto das extensões de Zadeh de todas as funções $g \in H[a,b]$. Mostraremos nessa seção que $\widehat{H}[a,b]$ é um aproximador universal de $\mathcal{A}_e[a,b]$, ou seja, $\widehat{H}[a,b]$ é denso em $\mathcal{A}_e[a,b]$. Assim, se existir um número de subconjuntos denso de $C[a,b]$, teremos um número de aproximadores universais de funções contínuas fuzzy (todas em $\mathcal{A}_e[a,b]$).

utilizaremos a métrica dada em 4.12.

Como os níveis dos números fuzzy M e N sempre são intervalos fechados e utilizando a métrica dada em 4.12, temos que

$$D(M,N) = \sup_{\alpha} \max\{|m_1(\alpha) - n_1(\alpha)|, |m_2(\alpha) - n_2(\alpha)|\}, \tag{4.14}$$

onde $[M]^\alpha = [m_1(\alpha), m_2(\alpha)]$ e $[N]^\alpha = [n_1(\alpha), n_2(\alpha)]$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

Para encontra um aproximador universal de $\mathcal{A}[a,b]$, devemos encontrar um conjunto $\mathcal{I}$ de funções $g : \mathcal{F}[a,b] \to \mathcal{F}$ (não necessariamente contínua) tal que se $h \in \mathcal{A}[a,b]$ e $\varepsilon > 0$ então existe $g \in \mathcal{I}$ onde

$$D(h(A), g(A)) \leq \varepsilon,$$

para todo $A \in \mathcal{F}[a,b]$.

Agora, enunciaremos o resultado principal desta seção.

Teorema 4.2.1 *$\widehat{H}[a,b]$ é um aproximador universal de $\mathcal{A}_e[a,b]$.*

Demonstração: Antes, vamos observar que se $f \in C[a,b]$ e $\hat{f}$ é sua extensão de Zadeh ($\hat{f} \in \mathcal{A}_e[a,b]$), dado $A \in \mathcal{F}[a,b]$ definimos $\hat{f}(A) = \mu_B$, pela proposição 1.5.5, temos que $[B]^\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$, onde

$$b_1(\alpha) = \min\{f(x); x \in [A]^\alpha\}$$

e

$$b_2(\alpha) = \max\{f(x); x \in [A]^\alpha\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in H[a,b]$ tal que

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon, \tag{4.15}$$

para todo $x \in [a,b]$. Denotaremos por $\hat{g} \in \widehat{H}[a,b]$ a extensão de Zadeh de g. Se $\hat{g}(A) = \mu_C$, então novamente pela proposição 1.5.5, temos que $[C]^\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)]$, onde

$$c_1(\alpha) = \min\{g(x); x \in [A]^\alpha\}$$

e

$$c_2(\alpha) = \max\{g(x); x \in [A]^\alpha\}.$$

Queremos mostrar que $|c_1(\alpha) - b_1(\alpha)| < \varepsilon$ e $|c_2(\alpha) - b_2(\alpha)| < \varepsilon$, para todo α, pois pela equação 4.14 teremos o resultado desejado. Como as argumentos usados nas provas são similares, provaremos apenas que $|c_1(\alpha) - b_1(\alpha)| < \varepsilon$, para todo α.

Sejam $A \in \mathcal{F}[a,b]$ e $\alpha \in [0,1]$. Sejam $\beta, \gamma \in [A]^\alpha$ tais que $b_1(\alpha) = f(\beta)$ e $c_1(\alpha) = g(\gamma)$. Suponha que $c_1(\alpha) \leq b_1(\alpha) - \varepsilon$, então (por 4.15)

$$f(\gamma) < g(\gamma) + \varepsilon = c_1(\alpha) + \varepsilon \leq b_1(\alpha) = f(\beta).$$

Absurdo, pois $f(\beta) = min\{f(x); x \in [A]^\alpha\}$. Portanto,

$$c_1(\alpha) > b_1(\alpha) - \varepsilon. \tag{4.16}$$

Por outro lado, suponha que $c_1(\alpha) \geq b_1(\alpha) + \varepsilon$, então (por 4.15)

$$g(\beta) < f(\beta) + \varepsilon = b_1(\alpha) + \varepsilon \leq c_1(\alpha) = g(\gamma).$$

Absurdo novamente, pois $g(\gamma) = min\{g(x); x \in [A]^\alpha\}$. Portanto,

$$c_1(\alpha) < b_1(\alpha) + \varepsilon. \tag{4.17}$$

Conseqüentemente, de 4.16 e 4.17 temos que $|c_1(\alpha) - b_1(\alpha)| < \varepsilon$, para todo α. □

Corolário 4.2.2 *O conjunto das extensões de Zadeh $\hat{P}_n[a,b]$ das funções polinomiais*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

definidas em $[a,b]$ é um aproximador universal de $\mathcal{A}_e[a,b]$.

4.2.2 Aproximação Universal de Funções Fuzzy via Extensão de Zadeh em uma Vizinhança Compacta

Nesta seção discutiremos mais um método de aproximação universal de funções fuzzy utilizando o princípio de extensão de Zadeh. É importante ressaltar novamente que este método não envolve sistemas fuzzy baseados em regras lingüísticas, pois neste caso assumiremos que temos em mãos a função que modela o fenômeno em estudo.

Este método foi baseando no resultado de teoria de aproximação clássica de funções, em que uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, pode ser aproximada em uma vizinhança por uma função $g(x) = ax + b$ onde $a, b \in \mathbb{R}$. Assim, podemos obter resultados próximo do desejado manuseando uma função teoricamente mais simples. Desta forma, Román-Flores, Barros *&* Bassanezi [3] demonstraram um resultado no mesmo sentido envolvendo o princípio da extensão de Zadeh. Portanto, antes de estendermos uma função e depois a aproximar, podemos a aproximar e então estendermos via Extensão de Zadeh.

Agora, apresentaremos resultados e notações que serão muito importantes para demonstrar o resultado principal desta seção.

Denotaremos por $K(\mathbb{R}^n)$ a família dos subconjuntos não-vazios compactos de $\mathbb{R}^n$. O próximo lema é um resultado de análise bem conhecido [3].

Lema 4.2.3 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua e $X \in K(\mathbb{R}^n)$. Então a aplicação*

$$\bar{f} : K(X) \to K(\mathbb{R}^n),$$

onde $\bar{f}(A) = f(A) = \{f(a); a \in A\}$, é uniformemente contínua na métrica de Hausdorff.

Teorema 4.2.4 *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com f contínua, e g verificando a equação $[\hat{g}(\mu)]^\alpha = g([\mu]^\alpha)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, e suponha que $\| f - g \|_\infty < \varepsilon$(métrica uniforme) em algum compacto X, com $x_0 \in Int(X)$.*

Então, existe uma vizinhança compacta $V = V(x_0) \subseteq X$ tal que $D_\infty(\hat{f}, \hat{g}) < 3\varepsilon$ em $\mathcal{F}_K(V) = \{\mu \in \mathcal{F}_K(\mathbb{R}^n); [\mu]^0 \subseteq V\}$, onde

$$D_\infty(\hat{f}, \hat{g}) = \sup_{\mu \in \mathcal{F}_K(V)} D(\hat{f}(\mu), \hat{g}(\mu)).$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Se f é contínua então $[\hat{f}(\mu)]^\alpha = f([\mu]^\alpha)$(teorema 1.4.4) e $\bar{f}$ é uniformemente contínua em $K(X)$(lema 4.2.3). Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$h(f(A), f(B)) < \varepsilon \tag{4.18}$$

para $A, B \in K(X)$, quando $h(A, B) < \delta$.

Seja r um número real positivo tal que $r < \delta/2$ e $x_0 \in B(x_0, r) \subset X$.

Se $V = \overline{B(x_0, r)}$ e $\mu \in \mathcal{F}_K(V)$ então

$$\begin{aligned} D(\hat{f}(\mu), \hat{g}(\mu)) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} h([\hat{f}(\mu)]^\alpha, [\hat{g}(\mu)]^\alpha) \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} h(f([\mu]^\alpha), g([\mu]^\alpha)) \\ &\leq \sup_{\alpha \in [0,1]} h(f([\mu]^\alpha), f([\mu]^0)) + \sup_{\alpha \in [0,1]} h(f([\mu]^0), g([\mu]^\alpha)) \\ &\leq \varepsilon + \sup_{\alpha \in [0,1]} h(f([\mu]^0), g([\mu]^\alpha)). \end{aligned}$$

Agora, seja $\alpha \in [0, 1]$ e suponha que $h(f([\mu]^0), g([\mu]^\alpha)) > 2\varepsilon$.

Então, sem perda de generalidade, podemos afirmar que existe $z \in f([\mu]^0)$ e $w \in g([\mu]^\alpha)$ tal que $\|z - w\| \geq 2\varepsilon$.

Porém, $z = f(a)$ para algum $a \in [\mu]^0 \subseteq V$, e $w = g(b)$ para algum $b \in [\mu]^\alpha \subseteq [\mu]^0 \subset V$.

Assim, $a, b \in V = \overline{B(x_0, r)} \subseteq X$, então $\|a - b\| = h(\{a\}, \{b\}) < \delta$, e por 4.18 temos que $\|f(a) - f(b)\| = h(f\{a\}, f\{b\}) < \varepsilon$.

Por outro lado, temos pela hipótese que $\|f(b) - g(b)\| \leq \|f - g\|_\infty < \varepsilon$ em X.

Conseqüentemente,

$$2\varepsilon \leq \|f(a) - f(b)\| + \|f(b) - g(b)\| < 2\varepsilon.$$

O que é um absurdo. Portanto, $h(f([\mu]^0), g([\mu]^\alpha)) \leq 2\varepsilon$, ou seja, $D_\infty(\hat{f}, \hat{g}) < 3\varepsilon$. $\square$

Bibliografia

[1] Barros, L. C. - *"Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy - Teoria e Aplicações"*; Tese de Doutorado, IMECC, UNICAMP (1997).

[2] Barros, L. C. *&* Bassanezi, R. C. - *"Minicurso: Introdução à Teoria Fuzzy e Aplicações em Biomatemática"*; Congresso Latino Americano de Biomatemática, UNICAMP (2001).

[3] Román-Flores, H; Barros, L. C. *&* Bassanezi, R. C. - *"A note on Zadeh´s estensions"*; Fuzzy sets and systems **117**, 327-331 (2001).

[4] Buckley, J. J. *&* Feuring, T. - *"Universal Approximators for Fuzzy Functions"*; Fuzzy Sets and Systems **113**, 411-415 (2000).

[5] Cabrelli, C. A.; Forte, B.; molter, U. M. *&* Vrscay, E. R. - *"A New Approach to the Inverse Problem for Fractals and Other Sets"*; Jour. of Math. Analysis and Applications **171**, 79-100 (1992).

[6] Diamond, P. *&* Kloeden, P. - *"Characterization of compact subsets of fuzzy sets"*; Fuzzy Sets and Systems **29**, 341-348 (1989).

[7] Diamond, P. *&* Ramer, A. - *"Approximation of Knowledge and Fuzzy Sets"*; Cybernet Systems **24**, 407-417 (1993).

[8] Hüllermeier, E. - *"Approximation of Incertain Functional Relationships"*; Fuzzy Sets and Systems **101**, 227-240 (2001).

[9] Klir, G. *&* Yuan, B. - *"Fuzzy Sets and Fuzzy Logic - Theory and Applications"*; Prentice Hall (1995).

[10] Kosko, B. - "*Fuzzy Thinking - The New Science of Fuzzy Logic*"; Hyperion, N.Y. (1993).

[11] Negoita, C. V. *&* Ralescu, D. A. - "*Applications of Fuzzy sets to Systems Analysis*"; Willey, N.Y. (1975).

[12] Nguyen, T. N. - "*A note on the extension principle for fuzzy sets*"; Jour. Math. Analysis and Applications **64**, 369-380 (1978).

[13] Nguyen, T. N. *&* Walker, E. A. - "*A first course in Fuzzy Logic*"; CRC Press (1997).

[14] Ortega, N. R. S. - "*Aplicação da Teoria de Lógica Fuzzy a Problemas da Biomatemática*"; Tese de Doutorado, Instituto de Física, USP (2001).

[15] Pedrycz, W. *&* Gomide, F. - "*An Introduction to Fuzzy Sets - Analysis and Design*"; Masachusets Institute of Technology (1998).

[16] Ribacionka, F. - "*Sistemas Computacionais baseados em Lógica Fuzzy*"; Tese de Mestrado, Universidade Presbiteriana Mackenzie (1999).

[17] Rudin, W. - "*Real and Complex Analysis*"; Addison Wesley, N.Y. (1976).

[18] Rudin, W. - "*Princípios de Análise Matemática*"; Livro Técnico S.A. e Editôra Universidade de Brasília, Rio de Janeiro (1971).

[19] Zadeh, L. A. - "*Fuzzy Sets*"; Inform. and Control **8**, 338-353 (1965).

Índice