



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



O Índice Homotópico de Conley para Aplicações Contínuas

por

Rogério Casagrande[†]

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientadora: Prof^a Dr^a Ketty A. de Rezende

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

O Índice Homotópico de Conley para Aplicações Contínuas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Rogério Casagrande** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 29 de abril de 2002.

Ketty Abaroa de Rezende
Prof^a Dr^a Ketty A. de Rezende

Banca examinadora:

Prof^a Dr^a Ketty A. de Rezende.

Prof^a Dr^a Maria do Carmo Carbinatto.

Prof^a Dr^a Claudina Izepe Rodrigues

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

77865: 2002

UNIDADE 30
Nº CHAMADA T/UNICAMP
C2612
V _____ EX _____
TOMBO BCI 49302
PROC 16.837/02
C _____ D X _____
PREÇO R\$ 14,00
DATA 29/05/02
Nº CPD _____

CM00167952-8

BIB ID 242105

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Casagrande, Rogério

~~C2612~~ O índice homotópico de Conley para aplicações contínuas /
C2612 Rogério Casagrande -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientadora : Ketty Abaroa de Rezende

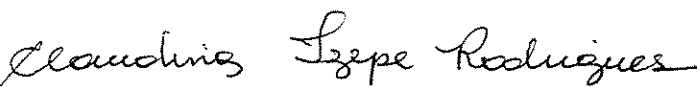
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Caos. 3. Topologia algébrica. I.
Rezende, Ketty Abaroa. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III.
Título.

**Dissertação de Mestrado defendida em 26 de março de 2002 e aprovada pela Banca
Examinadora composta pelos Profs. Drs.**


Prof (a). Dr (a). KETTY ABAROA DE REZENDE


Prof (a). Dr (a). MARIA DO CARMO CARBINATTO


Prof (a). Dr (a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Agradecimentos

Agradeço:

A Deus, pela presença em todos os momentos de minha vida.

Aos meus pais Attílio e Ivanilda, irmãos e familiares pelo apoio e força dados para a realização deste trabalho.

À Dr^a Ketty A. de Rezende pelo excelente trabalho de orientação com suas valiosas sugestões e críticas.

Aos colegas da república, Maurício, Gilberlandio, Gastão, Clécio e Cristiano pelo companheirismo.

Aos amigos do predinho.

Aos professores do departamento de Matemática da UFV, pelo incentivo.

À Cidinha, Tânea e Ednaldo, pela ajuda com a parte burocrática.

Ao Fernando dos Santos e à Maria Alice pelas importantes dicas sobre o Latex.

À banca examinadora pelas sugestões que ajudaram a valorizar o trabalho.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Ao IMECC-UNICAMP e seus professores.

Abstract

The topic we develop in this monograph pertains to the general area of discrete dynamical systems and our goal is to study the discrete Conley index, a homotopic invariant of the dynamics. This index has been developed mainly within the past 15 years, inspired on the continuous case. Our approach is to develop the index as in Franks and Richeson [FrRi].

We introduce the concepts of maximal invariant sets, isolated invariant sets S of a continuous function, filtration pairs for S , among others.

In order to define the index we use the relation of shift equivalence, an important equivalence relation. We show that the shift equivalence class of the pointed space map is an invariant of the choice of a filtration pair.

We present some examples for real valued functions, including ones with chaotic behaviour as the one-dimensional horseshoe.

We present a short summary of prior developments of the index using category theory due to Szymczak [Sz] and a cohomological version due to Mrozek [Mr] in order to contrast with the theory of the discrete Conley index presented by Franks and Richeson. We show that the definitions of the index due to Franks-Richeson and Szymczak are equivalent.

Resumo

Este trabalho inserido na área de sistemas dinâmicos discretos, objetiva o estudo de um invariante homotópico, o índice de Conley discreto. Este índice tem sido desenvolvido primordialmente nos últimos quinze anos, inspirado no índice para o caso contínuo. Nosso enfoque é tratá-lo via a abordagem de Franks e Richeson.

Com este propósito, introduzimos os conceitos de conjunto invariante maximal, conjunto invariante isolado S de uma aplicação contínua e par filtração para S , entre outros.

Na definição do índice, utilizamos uma importante relação de equivalência, chamada shift equivalência. Mostramos que a classe de shift equivalência das aplicações espaço pontuado é um invariante de S , pois independe da escolha do par filtração.

Apresentamos alguns exemplos para funções reais, inclusive com comportamento caótico como a ferradura de Smale unidimensional.

A fim de contrastar a teoria do índice de Conley no caso discreto desenvolvida por Franks e Richeson, apresentamos de forma sucinta outras duas abordagens: a que utiliza a teoria de categoria de Szymczak e a versão cohomologica, devido a Mrozek. Mostramos então que as definições do índice de Franks-Richeson e Szymczak são equivalentes.

Índice

Lista de figuras	vii
Introdução	viii
1 Preliminares	1
1.1 Definições e Propriedades	1
1.2 Tipos de Conjuntos Invariantes	2
2 Conjuntos Invariantes	10
2.1 Conjunto Invariante Isolado	10
2.2 Par Filtração e Par Índice	14
3 Índice Homotópico de Conley	27
3.1 Shift Equivalência	27
3.2 Matrizes Inteiras	32
3.3 O Índice via Franks-Richerson	35
4 Outras Abordagens para a Definição do Índice	49
4.1 Índice Homotópico via Szymczak	49
4.2 Índice Cohomológico de Mrozek	54
Bibliografia	61

Lista de Figuras

1.1	Construção da Ferradura de Smale	3
1.2	$f(V) \cap Q$ consiste de dois retângulos verticais.	4
1.3	Construção da solenóide	8
1.4	Corte transversal de D	9
2.1	N é vizinhança isolante, mas não é bloco isolante.	13
2.2	(II) é par índice.	15
2.3	$x_0 \in L$ com $f(x_0) \in \partial L$	15
2.4	(II) é par filtração	16
2.5	N_1 é bloco isolante.	21
2.6	N é bloco isolante.	23
2.7	f_P cobre duas vezes N_L	25
2.8	$f_{P'}$ cobre duas vezes N'_L	26
3.1	$s \circ r$ cobre duas vezes N_L	37
3.2	Conjunto N''	37
3.3	$r \circ s = f_{P''}^2$ e $s \circ r = f_P^2$	38
3.4	Espaço Pontuado N_L	47
3.5	Espaço Pontuado N_L para ferradura.	48
4.1	Par Filtração $P' = (N', L)$	52
4.2	Par índice para a ferradura de Smale	60

Introdução

A teoria do índice de Conley teve início com o trabalho de Conley e Easton [CoEa], que almejavam encontrar soluções de problemas de equações diferenciais, particularmente daquelas advindas da mecânica celeste, buscando identificar blocos isolantes e conjuntos isolados invariantes. Primeiramente a teoria foi formulada para fluxos, embora vários passos do caso contínuo possam ser estendidos para o caso discreto sem maiores dificuldades. Porém, a falta de homotopia ao longo das trajetórias no caso discreto inviabiliza uma generalização direta.

No final da década de oitenta, Robbin e Salamon apresentaram através da *shape* teoria, o *shape* índice como definição do índice de Conley no caso discreto. Este índice é o *shape* da compactificação a um ponto da variedade instável do conjunto invariante isolado. Essa construção é interessante, pois relaciona o índice de Conley com a topologia da variedade instável de um conjunto invariante isolado. Mas por outro lado, o *shape* índice não é visto como uma ferramenta conveniente para aplicações devido ao fato de utilizar limites inversos na construção do índice. Neste trabalho não apresentaremos esta abordagem, porém para maiores detalhes ver [RoSa].

No início da década de noventa, Mrozek considerou não somente o par índice, mas também uma aplicação índice associada e o funtor de Leray, da categoria dos módulos graduados equipados com um endomorfismo de grau zero, para obter uma versão cohomológica (homológica) do índice.

Szymczak em [Sz] generaliza tanto o *shape* índice definido por Robbin e Salamon [RoSa] como o índice cohomológico definido em [Mr], utilizando a teoria de categorias para definir de forma funtorial o índice homotópico de Conley.

Não resta dúvida que, com esta abordagem de Szymczak [Sz] a teoria se imbuíu de um algebrismo que Franks e Richeson [FrRi] mostraram ser substituível por conceitos matemáticos mais intuitivos e elementares. O enfoque principal do presente trabalho é apresentar a teoria desenvolvida por eles.

O trabalho se divide em quatro capítulos. Apresentamos no capítulo 1 algumas definições básicas como também exemplos de comportamento caótico, a ferradura de Smale e a solenóide. No capítulo 2, definimos conjunto invariante isolado S para uma aplicação contínua em um espaço métrico localmente compacto, e pares filtração para S , objeto canônico para o estudo da teoria do índice de Conley. Mostramos que dado um conjunto invariante isolado S existe um par filtração para S e associamos ao par $P = (N, L)$, uma aplicação $f_P : N_L \rightarrow N_L$, onde N_L é o espaço pontuado N/L . No capítulo 3, definimos uma importante relação de equivalência para sistemas dinâmicos contínuos, relacionada a conjugação topológica e denominada *shift* equivalência. Mostramos que a classe de *shift* equivalência das aplicações espaço pontuado independe da escolha do par filtração. De posse desse invariante, definimos o índice homotópico de Conley. No último capítulo apresentamos de forma sucinta as abordagens acima citadas de Mrozek e Szymczak mostrando a equivalência entre as definições do índice homotópico de Conley dada por Franks e Richeson e a dada por Szymczak.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definições e Propriedades

Sejam M uma variedade compacta diferenciável e $f : M \longrightarrow M$ um difeomorfismo. Queremos estudar a estrutura dinâmica das órbitas de f , onde uma *órbita* de um ponto x é o conjunto $\{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$. As órbitas que inicialmente serão de interesse, são aquelas que possuem um comportamento recorrente. O comportamento assintótico de f descreve as órbitas dos elementos de M . Logo podemos ter pontos cujo comportamento é simples, como as órbitas periódicas e outras com comportamento mais complexo.

Lembramos que, $x \in M$ é um *ponto fixo* de f se $f(x) = x$ e, é *periódico* se é um ponto fixo para alguma iterada de f , isto é, existe um inteiro estritamente positivo n tal que $f^n(x) = x$. Se n é o menor inteiro positivo tal que $f^n(x) = x$, n é dito o período de x . Denotamos o conjunto dos pontos periódicos de f por $Per(f)$. A órbita de um ponto periódico possui um comportamento recorrente mais simples que as demais. Porém existem pontos que não são periódicos, mas suas órbitas retornam próximas ao ponto inicial. Tais órbitas também tem comportamento recorrente.

Definição 1.1.1. Seja X munido de uma métrica d . Dados $f : X \longrightarrow X$ e um número real $\epsilon > 0$, a seqüência $\gamma = \{x_i \mid p < i < q, \text{ onde } -\infty \leq p \leq q-2 \leq \infty\}$ é uma ϵ -pseudo-órbita para f se $d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$ para $p < i < q-1$.

Uma ϵ -pseudo-órbita γ é ϵ -pseudo periódica se existe n , $0 < n < q-p-2$, tal que $x_i = x_{i+n}$ para todo i , com x_i e x_{i+n} em γ .

Dizemos que um ponto $x \in X$ é ϵ -pseudo periódico se ele é o primeiro termo de uma ϵ -pseudo-órbita pseudo periódica finita.

Definição 1.1.2. Sejam X um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$. Um ponto $x \in X$ é *recorrente por cadeia* se é ϵ -pseudo periódico para todo $\epsilon > 0$.

Denotamos por $\mathcal{R}(f)$ ou simplesmente $\mathcal{R}$ o conjunto dos pontos recorrentes por cadeia.

Dizemos que $B \subset M$ é um *conjunto positivamente invariante* se B é não vazio, fechado e $f(B) \subset B$. Se $f(B) = B$, então B é dito *invariante*. Daremos agora alguns exemplos de conjuntos invariantes.

1.2 Tipos de Conjuntos Invariantes

Definição 1.2.1. Sejam X um espaço topológico e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Um ponto x é dito *errante* se possui uma vizinhança U tal que $f^k(U) \cap U = \emptyset$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Se para toda vizinhança V de x , existe um positivo k tal que $f^k(V) \cap V \neq \emptyset$, então x é dito *não errante*.

Denotamos por $\Omega(f)$ o conjunto dos pontos não errantes. (Por simplicidade Ω .)

O conjunto Ω é fechado e $f(\Omega) \subseteq \Omega$. Logo, se f for um homeomorfismo temos $f(\Omega) = \Omega$ e um ponto é não errante para f se, e somente se, é não errante para f^{-1} .

Como cada ponto periódico de f é não errante, temos $Per(f) \subset \Omega(f)$. Daí, $\overline{Per(f)} \subset \overline{\Omega(f)} = \Omega(f)$.

Definição 1.2.2. Sejam $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua e $x \in X$. O conjunto ω -limite de x , $\omega_f(x)$, é definido por:

$$\omega_f(x) = \{y \in X : \exists \text{ uma seqüência } n_i \rightarrow +\infty \text{ tal que } f^{n_i}(x) \rightarrow y\}.$$

Se f for um homeomorfismo, definimos o conjunto α -limite de x por:

$$\alpha_f(x) = \{y \in X : \exists \text{ uma seqüência } n_i \rightarrow -\infty \text{ tal que } f^{n_i}(x) \rightarrow y\}.$$

Definimos ainda:

$$L_+(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega_f(x)}, \quad L_-(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \alpha_f(x)} \quad \text{e} \quad L(f) = L_+(f) \cup L_-(f).$$

Observação 1.2.3. $L(f)$ está contido em $\Omega(f)$.

O conjunto $\mathcal{R}(f)$ é também um tipo de conjunto invariante. Se X for um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua, temos que $\Omega(f)$ está contido em $\mathcal{R}(f)$. Portanto, $\text{Per}(f) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$.

O exemplo a seguir é um dos primeiros exemplos de dinâmica não trivial, dado por Smale na década de sessenta.

Exemplo 1.2.4. Ferradura de Smale

Seja a região D , formada por um quadrado Q de lado um e dois semi círculos de raio unitário D_1, D_2 , dispostos em lados opostos de Q . Vamos agora construir a função ferradura F . Definamos $F : D \rightarrow D$ tal que, F contrai Q horizontalmente por um fator $\delta < \frac{1}{2}$ e expande Q verticalmente por um fator $\frac{1}{\delta} = \mu$, levando Q dentro de D , de maneira que $F(Q)$ se assemelhe a uma ferradura. Os dois semi círculos são contraídos e aplicados dentro de D_1 . Ver figura (1.1).

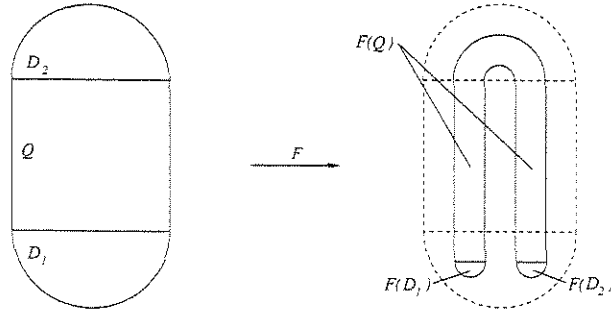


Figura 1.1: Construção da Ferradura de Smale

Como $F|_{D_1}$ é uma contração, temos que existe único ponto fixo $p \in D_1$ tal que para todo $x \in D_1$ temos $F^n(x) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$. Já que $F(D_2) \subset D_1$, segue também que $F^n(x) \rightarrow p$, para todo $x \in D_2$. Agora, se $x \in Q$ mas $F^n(x) \notin Q$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $F^n(x) \in (D_1 \cup D_2)$ e daí $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p$.

Observe que $F(D) \subset D$ e que F é injetora, mas não é sobrejetora. Logo F^{-1} não está globalmente definida. No entanto, F leva dois retângulos horizontais H_0 e H_1 em Q , linearmente em dois retângulos verticais V_0 e V_1 respectivamente.

Nosso objetivo agora é encontrar o conjunto dos pontos tais que suas órbitas permane-

cem em Q , isto é,

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F^n(Q).$$

Vamos construir este conjunto indutivamente. Faremos tal construção em duas etapas, uma correspondente as positivas iterações de F e a outra correspondente as iterações negativas, obtendo dois conjuntos cuja intersecção é Λ . Vamos considerar $S = \{0, 1\}$ um conjunto de índices e s_i um dos elementos de S , isto é, $s_i \in S, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Observação 1.2.5. Se V é um retângulo vertical, então $f(V) \cap Q$ consiste de exatamente dois retângulos verticais, um em V_0 e outro em V_1 , com sua largura sendo igual a δ vezes a largura de V . Analogamente suponha H um retângulo horizontal, então $F^{-1}(V) \cap Q$ consiste de exatamente dois retângulos horizontais, um em H_0 e outro em H_1 com largura igual a $\frac{1}{\mu}$ vezes a largura de H .

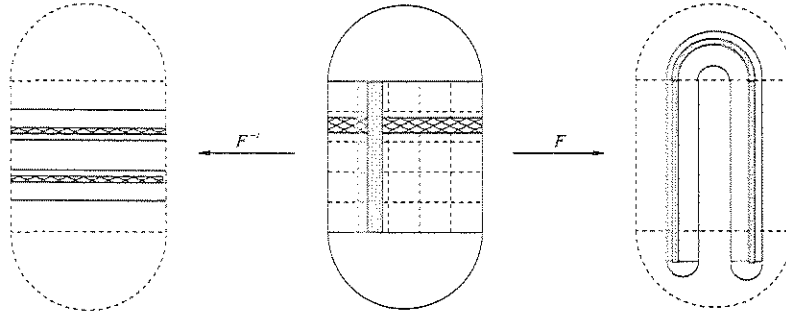


Figura 1.2: $f(V) \cap Q$ consiste de dois retângulos verticais.

Pela definição de F temos que $Q \cap F(Q)$ consiste de dois retângulos verticais V_0 e V_1 , que denotamos por

$$Q \cap F(Q) = \bigcup_{s_{-1} \in S} V_{s_{-1}} = \{p \in V_{s_{-1}}, s_{-1} \in S\}, \quad (1.1)$$

onde $V_{s_{-1}}$ é um retângulo de largura δ .

Analisemos agora $Q \cap F(Q) \cap F^2(Q)$.

Temos $Q \cap F(Q) \cap F^2(Q) = Q \cap F(Q \cap F(Q))$. Como $Q \cap F(Q)$ consiste de dois retângulos verticais que interceptam H_0 e H_1 e suas respectivas fronteiras, temos pela observação (1.2.5)

que $Q \cap F(Q) \cap F^2(Q)$ corresponde a quatro retângulos verticais, dois em V_0 e dois em V_1 , cada com largura δ^2 . Escrevemos então,

$$\begin{aligned} Q \cap F(Q) \cap F^2(Q) &= Q \cap F(Q \cap F(Q)) = Q \cap F\left(\bigcup_{s_{-2} \in S} V_{s_{-2}}\right) \\ &= \bigcup_{s_{-2} \in S} (Q \cap F(V_{s_{-2}})), \end{aligned}$$

onde utilizamos a equação (1.1) fazendo uma troca de índices.

Como $F(V_{s_{-2}} \cap Q) \subset (V_0 \cup V_1)$, temos

$$\bigcup_{s_{-2} \in S} (Q \cap F(V_{s_{-2}})) = \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,2}} (V_{s_{-1}} \cap F(V_{s_{-2}})) \equiv \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,2}} V_{s_{-1}s_{-2}}.$$

Logo,

$$Q \cap F(Q) \cap F^2(Q) = \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,2}} V_{s_{-1}s_{-2}} = \{p \in Q : p \in V_{s_{-1}}, F^{-1}(p) \in V_{s_{-2}}, s_{-i} \in S\}.$$

Para o k -ésimo passo temos $Q \cap F(Q) \cap \dots \cap F^k(Q)$

$$\begin{aligned} &= \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1, \dots, k}} (V_{s_{-1}} \cap F(V_{s_{-2} \dots s_{-k}})) \equiv \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1, \dots, k}} V_{s_{-1} \dots s_{-k}} \\ &= \{p \in Q : F^{-i+1}(p) \in V_{s_{-i}}, s_{-i} \in S, i = 1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

e consistindo de 2^k retângulos verticais, cada de comprimento δ^k .

Cada retângulo vertical, podemos rotular por uma seqüência de $0'_s$ e $1'_s$ de comprimento k . Existem 2^k possibilidades distintas de seqüências de $0'_s$ e $1'_s$ tendo comprimento k , possíveis de ser realizada em nosso processo. Logo este rótulo é único a cada passo.

Fazendo $k \rightarrow \infty$, obtemos então um conjunto que consiste de um número infinito de retângulos verticais, onde cada um desses retângulos tem largura zero, já que $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta^k = 0$. Assim

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(Q) &= \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,2,\dots}} (F(V_{s_{-2} \dots s_{-k} \dots}) \cap V_{s_{-1}}) \equiv \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,2,\dots}} V_{s_{-1} \dots s_{-k} \dots} \\ &= \{p \in Q : F^{-i+1}(p) \in V_{s_{-i}}, s_{-i} \in S, i = 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

consiste de um número infinito de linhas verticais e cada linha pode ser rotulada por uma única seqüência infinita de $0'_s$ e $1'_s$.

Com argumentos análogos, mostra-se que $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F^n(Q)$ é um conjunto infinito de linhas horizontais, onde cada linha é rotulada por uma única seqüência infinita de $0'_s$ e $1'_s$, como segue

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F^n(Q) &= \bigcup_{\substack{s_i \in S \\ i=0,1,\dots}} (F^{-1}(H_{s_1\dots s_k\dots}) \cap H_{s_0}) \equiv \bigcup_{\substack{s_i \in S \\ i=0,1,\dots}} H_{s_0\dots s_k\dots} \\ &= \{p \in Q : F^i(p) \in H_{s_i}, s_i \in S, i = 0, 1, \dots\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F^n(Q) = \left(\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F^n(Q)\right) \cap \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(Q)\right)$$

consiste de um conjunto de pontos, já que cada linha vertical em $\bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(Q)$ intercepta cada linha horizontal em $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F^n(D)$ em apenas um ponto. Portanto cada ponto $p \in \Lambda$ pode ser identificado unicamente por uma seqüência bi-infinita de $0'_s$ e $1'_s$, que é obtida pelas seqüências associadas às respectivas linhas verticais e horizontais que definem p .

Como

$$\begin{aligned} V_{s_{-1}\dots s_{-k}\dots} &= \{p \in Q : F^{-i+1}(p) \in V_{s_{-i}}, i = 1, 2, \dots\} \\ &= \{p \in Q : F^{-i}(p) \in H_{s_{-i}}, i = 1, 2, \dots\}, \end{aligned}$$

pois $F(H_{s_i}) = V_{s_i}$ e $H_{s_0\dots s_k\dots} = \{p \in Q : F^i(p) \in H_{s_i}, i = 1, \dots\}$, temos

$$V_{s_{-1}\dots s_{-k}\dots} \cap H_{s_0\dots s_k\dots} = \{p \in D : F^i(p) \in H_{s_i}, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Conseqüentemente a seqüência única de $0'_s$ e $1'_s$, associada a p contém informações do comportamento assintótico de F . Em particular, o s_k -ésimo elemento da seqüência associada a p indica que $F^k(p) \in H_{s_k}$.

Definamos então $\phi : \Lambda \longrightarrow \Sigma_2$ tal que

$$\phi(p) = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots),$$

onde Σ_2 denota o conjunto das seqüências bi-infinitas de zeros e uns, isto é:

$$\Sigma_2 = \{(s) = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots) | s_j = 0 \text{ ou } 1\}.$$

Agora munimos Σ_2 com a métrica

$$d[(s), (t)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^{|i|}}.$$

Definamos então a aplicação $\sigma : \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_2$ por

$$\sigma(\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots) = (\dots s_{-2}s_{-1}s_0.s_1s_2\dots).$$

A função σ é chamada aplicação *shift*.

Em Σ_2 , com a métrica d , a função σ é contínua e existe uma inversa σ^{-1} dada por

$$\sigma^{-1}(\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots) = (\dots s_{-2}.s_{-1}s_0s_1s_2\dots),$$

que também é contínua. Portanto um homeomorfismo.

Tomando $p \in \Lambda$ temos que $\phi(p) = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots)$. Logo

$$\phi(F(p)) = (\dots s_{-2}s_{-1}s_0.s_1s_2\dots) = \sigma(\phi(p)).$$

Ou seja, $\phi \circ F = \sigma \circ \phi$. Portanto F e σ são topologicamente conjugadas*, tendo então a mesma dinâmica. Pode se ver em [Fr], que σ tem as seguintes propriedades:

1. σ possui apenas dois pontos fixos, a saber $(\dots 00.00\dots)$ e $(\dots 11.11\dots)$.
2. O conjunto dos pontos periódicos de σ são densos em Σ_2 .
3. Existe uma órbita não periódica densa em Σ_2 .

Logo pela conjugação topológica, essas mesmas propriedades são também válidas para F restrita a Λ .

Exemplo 1.2.6. Solenóide.

*Seja X um espaço métrico. Duas aplicações $f, g : X \longrightarrow X$ são ditas *topologicamente conjugadas* se existe um homeomorfismo $h : M \longrightarrow M$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

A solenóide é um exemplo de um atrator[†] que está contido em um toro sólido $D = S^1 \times B^2 \subset \mathbb{R}^3$, onde S^1 é o círculo unitário e B^2 é o disco unitário no plano, ou seja,

$$B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

O conjunto D possui como fronteira o toro $S^1 \times S^1$.

Definimos a solenóide considerando a aplicação f que leva D em seu interior pela fórmula,

$$f(\theta, p) = (2\theta, \frac{1}{10}p + \frac{1}{2}e^{2\pi i\theta})$$

onde, $p \in B^2$ e $e^{2\pi i\theta} = (\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)) \in S^1$.

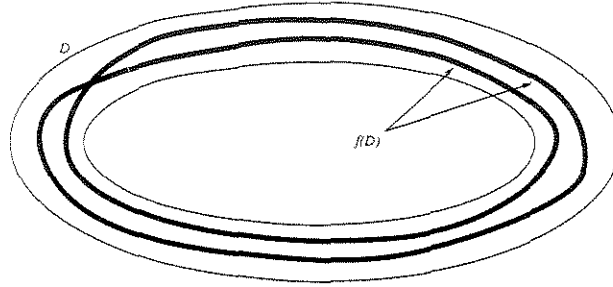


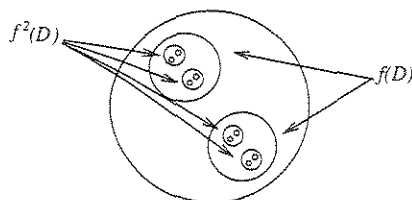
Figura 1.3: Construção da solenóide

Globalmente, f pode ser interpretada como a aplicação dupla $f(\theta) = 2\theta$ na primeira coordenada e uma forte contração na segunda, com imagem um disco cujo centro depende de θ . A imagem deste disco é um décimo do tamanho do disco original. Logo f estica na direção $-S^1$ e contrai na direção $-B^2$.

Temos então que a imagem de D é outro toro sólido dentro de D , que dá duas voltas ao redor de D . Aplicando f a $f(D)$, temos que $f^2(D)$ é um toro de raio $1/100$ na direção $-B^2$ que dá quatro voltas ao redor de D e está propriamente contido em $f(D)$. Indutivamente, $f^n(D)$ é um toro de raio $1/10^n$ que dá 2^n voltas no interior de D e está contido em $f^{n-1}(D)$.

Logo em cada corte transversal de D , temos $f^n(D)$ é uma coleção encaixante de 2^n discos. Como no exemplo (1.2.4), temos que a coleção de conjuntos $f^n(D)$ constitui um conjunto de Cantor em cada corte transversal.

[†]Um conjunto compacto A contido em um espaço métrico X é dito um atrator para um difeomorfismo f se existe uma vizinhança V de A e $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(V) \subset V$ e $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(V)$.

Figura 1.4: Corte transversal de D .

O conjunto $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(D)$, será denotado por solenóide. Voltaremos a falar desse exemplo no capítulo 3.

Há muitas formas de se descrever estes conjuntos invariantes.

Queremos nos próximos capítulos apresentar um índice associado a conjuntos invariantes.

Capítulo 2

Conjuntos Invariantes

2.1 Conjunto Invariante Isolado

Daremos neste capítulo entre outros resultados, as definições de conjunto invariante isolado, par filtração e par índice, fundamentais para a teoria do índice de Conley discreto. Apresentaremos em paralelo as abordagens de Mrozek e Mischaikow para contrastar com a de Franks e Richeson.

Definição 2.1.1. Sejam U um subconjunto aberto de um espaço métrico localmente compacto X e $f : U \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Para cada conjunto $N \subset U$ definimos o *conjunto invariante de comprimento m* , $Inv^m N = \{x \in N; \exists \text{ um segmento de órbita } \{x_n\}_{-m}^m \subset N, \text{ com } x_0 = x \text{ e } f(x_n) = x_{n+1} \text{ para } n = -m, \dots, m-1\}$. Analogamente definimos o *conjunto maximal invariante*, $Inv N = \{x \in N; \exists \text{ uma órbita completa } \{x_n\}_{-\infty}^{\infty} \subset N, \text{ com } x_0 = x \text{ e } f(x_n) = x_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}$, que é sempre um subconjunto de $Inv^m N$ para todo m .

Exemplo 2.1.2. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^3$, que tem $x = 1$ e $x = -1$ pontos periódicos repulsores*, com período 2, e $x = 0$ ponto fixo atrator. Para o intervalo fechado $N = [-1, 1]$, temos que $Inv N = [-1, 1]$. De fato, por definição temos $Inv N \subset N$. Por outro lado, se $x \in [-1, 1]$ temos que, para $n \geq 0$, $f^n(x) = (-1)^n x^{3^n} \in N$, pois $f^n(x) \rightarrow 0$ se $x \in (-1, 1)$ e $f^n(x) \in \{-1, 1\}$ se $x = 1$ ou $x = -1$. Como $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}$,

*Seja p um ponto hiperbólico periódico de período n , isto é, $|(f^n)'(p)| \neq 1$. Dizemos que p é um ponto periódico atrator se $|(f^n)'(p)| < 1$. Caso $|(f^n)'(p)| > 1$, p é dito repulsor.

temos que $f^{-n}(x) = (-1)^n \sqrt[n]{x}$, logo $f^{-n}(x) \rightarrow 1$ ou -1 para $x \in [-1, 1]$, $x \neq 0$. Caso $x = 0$, $f^{-n}(x) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Daí $x \in \text{Inv } N$. Portanto $\text{Inv } N = [-1, 1]$. Nem sempre $\text{Inv } N = N$, neste mesmo exemplo se tomarmos $N = \{-1, 1, 0, \frac{1}{2}\}$, temos $\text{Inv } N = \{-1, 1, 0\}$ que está contido propriamente em N . Ou ainda, tomando $N = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ obtemos $\text{Inv } N = \{0\}$.

Temos direto da definição que $f(\text{Inv } N) = \text{Inv } N$. No entanto, podemos ter $f^{-1}(\text{Inv } N) \neq \text{Inv } N$. Para ver isto, considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ e tome $N = [0, 1]$. Logo $\text{Inv } N = [0, 1]$, porém $f^{-1}(\text{Inv } N) = [-1, 1] \neq \text{Inv } N$.

Proposição 2.1.3. *Se U é um subconjunto aberto de um espaço métrico localmente compacto X , $f : U \rightarrow X$ é contínua e N é um subconjunto compacto de U , então*

$$\text{Inv } N = \bigcap_{m=0}^{\infty} \text{Inv}^m N.$$

Demonstração:

$$\text{i) } \text{Inv } N \subseteq \bigcap_{m=0}^{\infty} \text{Inv}^m N$$

De fato, se $x \in \text{Inv } N$ temos que para todo $m \in \mathbb{N}$ o segmento de órbita $\{x_n\}_{-m}^m \subset N$ com $x_0 = x$ e $x_{n+1} = f(x_n)$ para $n = -m, \dots, m-1$. Daí segue que $x \in \text{Inv}^m N$ para todo $m \in \mathbb{N}$, ou seja $x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} \text{Inv}^m N$.

$$\text{ii) } \text{Inv } N \supseteq \bigcap_{m=0}^{\infty} \text{Inv}^m N.$$

Seja $x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} \text{Inv}^m N$, logo para todo $m \in \mathbb{N}$ o segmento de órbita $\{x_n\}_{-m}^m \subset N$ com $x_0 = x$ e $x_{n+1} = f(x_n)$ para $n = -m, \dots, m-1$. Definamos então,

$X_1 = f^{-1}(x) \cap N$, e recursivamente para $k > 1$, $X_k = f^{-1}(X_{k-1}) \cap N$. Assim temos,

$$X_k = f^{-k}(x) \cap f^{-k+1}(N) \cap \dots \cap f^{-1}(N) \cap N,$$

ou seja, $X_k = \{z \in N; f(z) \in N, f^2(z) \in N, \dots, f^{k-1}(z) \in N \text{ e } f^k(z) = x\}$.

Temos ainda que

$1-X_k$ é não vazio, $k > 0$. Pois, $x \in \text{Inv}^k(N)$ e daí temos que $x_{-k} \in N$ é tal que $f^k(x_{-k}) = x$. Logo $x_{-k} \in X_k$, $k > 0$.

2- X_k é compacto. De fato, como X é métrico cada ponto é um conjunto fechado em X . Logo $f^{-1}(x)$ é também fechado, já que f é contínua. Como interseção de um conjunto compacto com um fechado é compacto, temos então que $X_1 = f^{-1}(x) \cap N$ é compacto. Por indução, segue que X_k , $k > 0$ é compacto.

3- $f(X_k) \subset X_{k-1}$. Pois, $f(X_k) = f(f^{-1}(X_{k-1}) \cap N) \subset (f(f^{-1}(X_{k-1})) \cap f(N)) \subset (X_{k-1} \cap f(N)) \subset X_{k-1}$.

Definamos então $Y_k = \bigcap_{n \geq 1} f^n(X_{n+k})$.

Temos que f é contínua e X_{n+k} é compacto, logo $f(X_{n+k})$ é também compacto. Utilizando esses mesmos argumentos obtemos que $f^n(X_{n+k})$ é também compacto. Já que X_{n+k} é não vazio, segue que $f^n(X_{n+k})$ é não vazio. Note ainda que

$$f^{n+1}(X_{n+1+k}) = f^n(f(X_{n+1+k})) \subset f^n(X_{n+k}),$$

pois $f(X_k) \subset X_{k-1}$.

Assim, $\{f^n(X_{n+k})\}$ é uma seqüência encaixante de subconjuntos compactos não vazios de X_k . Logo Y_k é um subconjunto não vazio, compacto de X_k . Observe que $f(Y_1) = \{x\}$, pois, $Y_1 \subset X_1 = f^{-1}(x) \cap N$. E para $k > 1$

$$f(Y_k) = \bigcap_{n \geq 1} f^{n+1}(X_{n+k}) = \bigcap_{n \geq 2} f^n(X_{n+k-1}) = Y_{k-1}.$$

Deste modo, todo ponto de Y_{k-1} tem pré imagem em Y_k . Defina então x_{-1} como um ponto de Y_1 , logo $f(x_{-1}) = x$ e para $k > 1$, defina x_{-k} como um ponto em Y_k tal que $f(x_{-k}) = x_{-k+1}$. Para $k \geq 0$ definimos $x_k = f^k(x)$. Então $\{x_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ é uma órbita completa com $x_0 = x$ e $f(x_k) = x_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Portanto $x \in \text{Inv}N$, ou seja, $\bigcap_{m=0}^{\infty} \text{Inv}^m N \subseteq \text{Inv}N$. $\square$

Definição 2.1.4. Dizemos que um conjunto compacto N é *vizinhança isolante* se, $\text{Inv}N \subset \text{int}(N)$. O conjunto N será chamado de *bloco isolante* se $f(N) \cap N \cap f^{-1}(N) \subset \text{int}(N)$. Um conjunto S é dito *conjunto invariante isolado* se existe uma vizinhança isolante N com $S = \text{Inv}N$.

Exemplo 2.1.5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2y, x)$. Tomando $N = [-1, 1] \times [-2, 2]$ temos que $\text{Inv } N = \{(0, 0)\} \subset \text{int}(N)$. Logo N é vizinhança isolante para $S = \{(0, 0)\}$. Portanto temos que S é um conjunto invariante isolado.

Observe que no exemplo (2.1.2) o conjunto $\text{Inv } N$ não está contido no interior de N , logo N não é vizinhança isolante.

Exemplo 2.1.6. Uma órbita periódica γ dentro da ferradura é um exemplo de um conjunto invariante que não é isolado. Pois como vimos anteriormente, existe uma órbita densa dentro de Λ , a qual pode-se aproximar de γ quanto se queira. Logo γ não pode ser isolada.

Todo bloco isolante N é uma vizinhança isolante para o conjunto $S = \text{Inv } N$. De fato, por definição $\text{Inv } N \subset N$, daí $\text{Inv } N = f(\text{Inv } N) \subset f(N)$. Também $\text{Inv } N \subset f^{-1}(\text{Inv } N) \subset f^{-1}(N)$ já que $\text{Inv } N = f(\text{Inv } N)$. Logo $\text{Inv } N \subset (f(N) \cap N \cap f^{-1}(N)) \subset \text{int}(N)$. A recíproca é falsa[†]. Para ver isto, tome f e N como no exemplo (2.1.5). Como $f^{-1}(r, s) = (s, \frac{r}{2})$ é a inversa de f , temos que o ponto $(1, 0)$ pertence tanto a fronteira de N como a $(f(N) \cap N \cap f^{-1}(N))$. Daí $(f(N) \cap N \cap f^{-1}(N)) \not\subset \text{int}(N)$, ou seja, N não é bloco isolante.

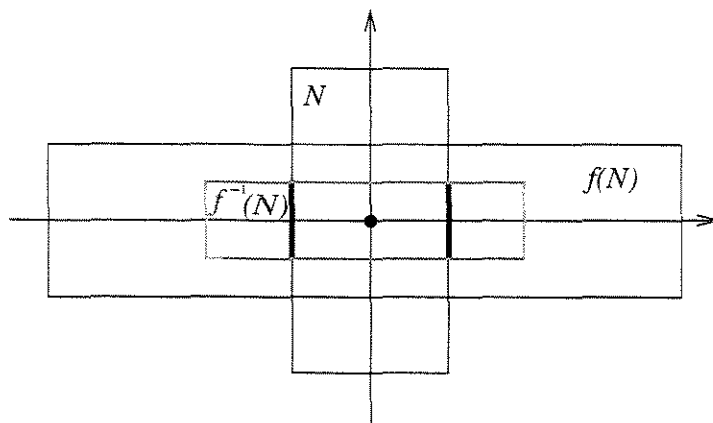


Figura 2.1: N é vizinhança isolante, mas não é bloco isolante.

Definição 2.1.7. Definimos o *conjunto saída* de N por $N^- = \{x \in N : f(x) \text{ não pertence ao } \text{int}(N)\}$. Isto é, N^- é o conjunto dos pontos em N cujas imagens estão no complementar do interior de N .

[†]Este contra exemplo foi adaptado do exemplo 1.17 em [Ri].

2.2 Par Filtração e Par Índice

Daremos agora a definição de filtração, que motivará a definição de par filtração dada por [FrRi], que tem a vantagem de ser um par topológico que tem propriedades de uma filtração e se comporta como um par índice.

Definição 2.2.1. Dado um homeomorfismo f de M , a filtração F ajustada à f é a seqüência encaixante

$$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$$

de subvariedades com bordo, compactas, diferenciáveis e codimensão zero tais que $f(M_i) \subset \text{int}(M_i)$. Denotamos por F^{-1} a filtração

$$\emptyset = \overline{M - M_k} \subset \overline{M - M_{k-1}} \subset \dots \subset \overline{M - M_0} = M$$

que é ajustada à f^{-1} .

Mostraremos também que a definição de par índice [Mr] é mais geral que a de par filtração [FrRi] e apresentaremos alguns exemplos. No entanto, dado um conjunto invariante isolado S , é sempre possível construir um par filtração para S . Veremos também que ao contrário de par índice, pares filtrações são estáveis sob uma pequena perturbação de f .

Definição 2.2.2. Um par (N, L) de subconjuntos compactos de X é chamado *par índice* para um conjunto invariante isolado S , se $L \subset N$ e

1. $(\overline{N \setminus L})$ é uma vizinhança isolante de S ,
2. $f(L) \cap N \subset L$ (L é positivamente invariante),
3. $f(N \setminus L) \subset N$ (é necessário passar por L para sair de N).

Veja a figura (2.2), para uma idéia geométrica da definição.

No par (I) da figura (2.2), temos que a não é possível pelo item 2 da definição (2.2.2) e pelo item 3, b não é possível.

Gostaríamos porém, de obter um par de espaços (N, L) que fosse parte de uma filtração, ou seja, ter $L \subset N$ compactos, $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$, $f(L) \subset \text{int}(L)$ e $f(N) \subset \text{int}(N)$.

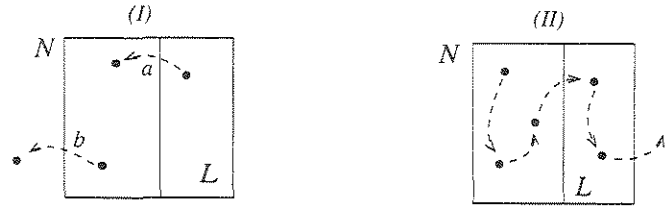
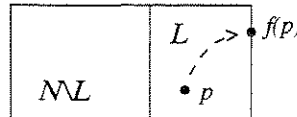


Figura 2.2: (II) é par índice.

Aqui, vale observar que se L é vizinhança de N^- em N e $f(L) \subset \text{int}(L)$ então $N^- = \emptyset$. De fato, suponha por absurdo que exista $x \in N^-$, logo temos que $f(x) \notin \text{int}(N)$. Como $L \subset N$ segue que $\text{int}(L) \subset \text{int}(N)$. Assim temos, $x \in L$ com $f(x) \notin \text{int}(N)$, daí $f(x) \notin \text{int}(L)$. Absurdo, pois $f(L) \subset \text{int}(L)$. Analogamente se $f(N) \subset \text{int}(N)$, temos também $N^- = \emptyset$. Mas essas propriedades são muito fortes.

Considere um par de conjuntos compactos (N, L) com as propriedades de uma filtração, isto é, $f(N) \subset N$ e $f(L) \subset L$. Observe que a condição $f(L) \subset \text{int}(L)$ implica que $f(L) \cap (\overline{N \setminus L}) = \emptyset$, sendo a recíproca válida se acrescentarmos $f(N) \subset \text{int}(N)$ à hipótese $f(L) \cap (\overline{N \setminus L}) = \emptyset$, pois podemos ter $f(L) \cap (\overline{N \setminus L}) = \emptyset$, mas $f(x_0) \in \partial L$ com $x_0 \in L$.

Figura 2.3: $x_0 \in L$ com $f(x_0) \in \partial L$.

Note também que a condição $f(N) \subset \text{int}(N)$ implica $f(\overline{N \setminus L}) \subset \text{int}(N)$ que por sua vez equivalente a pedir que L seja uma vizinhança de N^- em N . Caso tenhamos $f(\overline{N \setminus L}) \subset \text{int}(N)$ junto com $f(L) \subset \text{int}(L)$ então $f(N) \subset \text{int}(N)$. É também válido que se $N^- = \emptyset$ e $f(L) \cap (\overline{N \setminus L}) = \emptyset$, então $f(L) \subset \text{int}(L)$.

Motivados pelo exposto acima definimos.

Definição 2.2.3. Seja S um conjunto invariante isolado e suponha $L \subset N$ um par de compactos no interior do domínio de f , sendo N e L os fechos de seus respectivos interiores. O par (N, L) é chamado *par filtração* para S , se

1. $(\overline{N \setminus L})$ é uma vizinhança isolante de S ,

2. L é uma vizinhança de N^- em N ,
3. $f(L) \cap (\overline{N \setminus L}) = \emptyset$ (podemos notar então que uma vez em L não se volta para $\overline{N \setminus L}$ por f , mas pode-se voltar por alguma iterada da aplicação contínua f , ou seja, por f^k , $k > 1$).

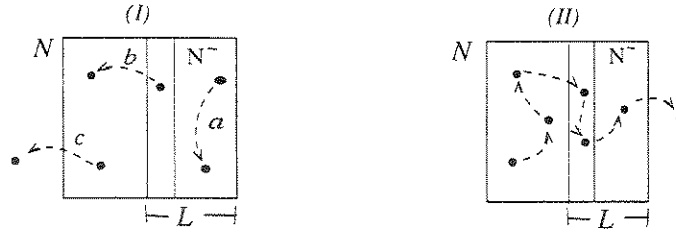


Figura 2.4: (II) é par filtração

Geometricamente temos na figura (2.4) que (a) e (c) não podem ocorrer, pois N^- é conjunto de saída e (b) não pode ocorrer pela condição 3 da definição (2.2.3).

Veremos a seguir um exemplo em que o par (N, L) forma um par índice, mas não um par filtração.

Exemplo 2.2.4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x+1$. Tomando então $N = [0, \frac{1}{2}] \cup [1, \frac{3}{2}]$ e $L = [1, \frac{3}{2}]$ temos que o par (N, L) é um par índice para $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$.

De fato, $\text{Inv}(\overline{N \setminus L}) = \emptyset \subset \text{int}(\overline{N \setminus L})$. Como $f(L) = [2, \frac{5}{2}]$ temos que $f(L) \cap N = \emptyset$. Ainda $f(N \setminus L) = f([0, \frac{1}{2}]) = [1, \frac{3}{2}] = L \subset N$.

Logo as condições 1, 2 e 3 da definição (2.2.2) são satisfeitas, e portanto temos um par índice. Agora, como

$$f(\overline{N \setminus L}) = f([0, \frac{1}{2}]) = [1, \frac{3}{2}] \text{ e } f(L) = [2, \frac{5}{2}]$$

segue que

$$N^- = \{x \in N; f(x) \notin \text{int}(N) = ((0, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2}))\} = \{0, \frac{1}{2}, [1, \frac{3}{2}]\}.$$

Logo L é subconjunto próprio de N^- , não podendo então ser vizinhança do mesmo em N , ou seja, não satisfaz a condição 2 da definição (2.2.3). Portanto não é par filtração para S . Mas se tomarmos, $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e o conjunto $L_\epsilon = ([0, \epsilon] \cup [\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2}] \cup [1, \frac{3}{2}])$, temos que (N, L_ϵ) é um par filtração para $S = \emptyset$. De fato, nesse caso $N^- \subset W =$

$([0, \epsilon) \cup (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2}] \cup [1, \frac{3}{2}]) \subset L_\epsilon$, onde W é aberto em N , pois W pode ser escrito como $W = ((-\epsilon, \epsilon) \cup (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon) \cup (1 - \epsilon, \frac{3}{2} + \epsilon)) \cap ([0, \frac{1}{2}] \cup [1, \frac{3}{2}])$. Logo L_ϵ é vizinhança de N^- em N . Claramente os outros dois itens são satisfeitos.

O próximo resultado mostrará que todo par filtração é um par índice.

Proposição 2.2.5. *Sejam N e L conjuntos compactos contidos no interior do domínio de f , com $L \subset N$. Se (N, L) é um par filtração então é também par índice.*

Demonstração: Temos que o item 1 é o mesmo para ambos. Pelo item 3 de (2.2.3) temos que $f(L) \cap (\overline{N \setminus L}) = \emptyset$, logo se existir $x \in (f(L) \cap N)$ necessariamente tem que estar em L . Assim $f(L) \cap N \subset L$, satisfazendo ao item 2 de (2.2.2). Como L é vizinhança de N^- em N , segue que $N^- \subset L$. Seja então $x \in N \setminus L$, logo $x \notin L \supset N^-$. Daí $x \notin N^-$ implicando que $f(x) \in \text{int}(N) \subset N$ para todo $x \in N \setminus L$ e daí temos $f(N \setminus L) \subset N$, satisfazendo o item 3 de (2.2.2).

Observação 2.2.6. Para um par filtração (N, L) temos que se $N^- = \emptyset$, então $f(L) \subset \text{int}(L)$. De fato, suponha $N^- = \emptyset$ e que exista $x \in L$ tal que $f(x) \notin \text{int}(L)$. Já que $N^- = \emptyset$, temos $f(x) \in \text{int}(N)$. Daí $f(x) \in \text{int}(N) \setminus \text{int}(L)$. Absurdo, pois $f(L) \cap (\overline{N \setminus L}) = \emptyset$.

A observação que daremos agora será utilizada no próximo capítulo. Recordamos que dada uma aplicação continua $f : X \longrightarrow X$, definimos o conjunto ω -limite de $x \in X$ por

$$\omega_f(x) = \{y \in X : \exists \text{ uma sequência } n_i \longrightarrow +\infty \text{ tal que } f^{n_i}(x) \longrightarrow y\}.$$

Observação 2.2.7. Se $P = (N, L)$ é um par filtração para o conjunto isolado S e $x \in N$ satisfaz $f^n(x) \in N \setminus L$ para todo $n > 0$. Então $\omega_f(x) \subset S$.

Buscaremos agora provar a existência de blocos isolantes, mostrando também que dado um bloco isolante para um conjunto isolado S , podemos construir um par filtração, logo estaremos provando a existência de pares filtrações dentro de cada vizinhança de S . A seguir daremos alguns exemplos onde utilizaremos estas idéias.

Definição 2.2.8. Para cada vizinhança N de um conjunto invariante isolado S e cada $\epsilon > 0$, definimos a ϵ -cadeia de vizinhanças de S relativo a N , como

$$C_\epsilon(N, S) = \{x \in N; \exists \text{ uma } \epsilon\text{-cadeia } \{x_n\}_{-k}^k \subset N \text{ com } x_0 = x \text{ e } x_k, x_{-k} \in S\},$$

onde recordamos que uma ϵ -cadeia é uma sequência $\{x_n\}_q^p$ tal que $d(f(x_n), x_{n+1}) < \epsilon$ para todo $n = q, \dots, p-1$.

Observação 2.2.9. Para cada $n \in \{-k, \dots, k\}$ temos $x_n \in C_\epsilon(N, S)$.

De fato, definindo $y_j = x_{t+j}$ observamos que

$$y_0 = x_n, \quad y_{-(n+k)} = x_{n-(n+k)} = x_{-k} \in S \quad \text{e} \quad y_{n+k} = x_{2n+k}.$$

Como $x_k \in S$, existe $\{z_m\}_{-\infty}^{+\infty} \subset N$ tal que $z_0 = x_k$, e também $z_{m+1} = f(z_m)$. Tomando então $x_{k+i} = z_i$, $i = \{0, \dots, 2n\}$ temos $y_{n+k} \in S$ e

$$d(f(y_j), y_{j+1}) < \epsilon \quad \text{para} \quad j \in \{-(n+k), \dots, (n+k)-1\},$$

pois, para $j \in \{-(n+k), \dots, k-n-1\}$ tem-se

$$d(f(y_j), y_{j+1}) = d(f(x_{n+j}), x_{n+j+1}) < \epsilon$$

e para $j \in \{k-n, \dots, (n+k)-1\}$ tem-se

$$d(f(y_j), y_{j+1}) = d(f(x_{n+j}), x_{n+j+1}) = d(f(z_i), y_{i+1}) = 0 < \epsilon,$$

$i \in \{0, \dots, 2n-1\}$.

De posse desta definição, podemos agora mostrar que para ϵ 's adequados, temos que $C_\epsilon(N, S)$ formam uma base de vizinhanças para S .

Proposição 2.2.10. *Seja S um conjunto invariante isolado com vizinhança isolante N . Para cada vizinhança V de S em N , existe um $\epsilon > 0$ com $C_\epsilon(N, S) \subset V$.*

Demonstração: Podemos supor V aberto. Pela proposição (2.1.3) existe $m > 0$ tal que $Inv^m N \subset V$. Logo é suficiente mostrar que para algum $\epsilon > 0$, $C_\epsilon(N, S) \subset Inv^m N$.

Suponha por absurdo que isso não acontece, daí para todo $\epsilon > 0$, existe $x(\epsilon) \in (C_\epsilon(N, S) \setminus V)$, isto é, existe uma ϵ -cadeia $\{x_n(\epsilon)\}_{-k_\epsilon}^{k_\epsilon} \subset N$ com $x(\epsilon) = x_0(\epsilon)$ e $x_{-k_\epsilon}, x_{k_\epsilon} \in S$. Truncando essa ϵ -cadeia quando $k_\epsilon > m$, ou a estendendo para um segmento de órbita se $k_\epsilon < m$, lembrando que $x_{k_\epsilon} \in S$ e daí em diante $d(f(x_{k_\epsilon}), x_{k_\epsilon+1}) = 0$, obtemos para cada $\epsilon > 0$ uma ϵ -cadeia $\{x_n(\epsilon)\}_{-m}^m \subset N$, com $x_0(\epsilon) \notin V$.

Fazendo $\epsilon_i \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$, podemos assumir que cada uma das seqüências $\{x_j(\epsilon_i)\}$,

$-m \leq j \leq m$, tem um limite em N , digamos x_j . Pois para cada $j = -m, \dots, m$ e para cada $i \in \mathbb{N}$, temos $\{x_j(\epsilon_i)\} \in N$ e N é compacto. Pela definição de ϵ -cadeia, $d(f(x_j(\epsilon_i)), x_{j+1}(\epsilon_i)) < \epsilon_i$, logo $f(x_j(\epsilon_i)) \rightarrow x_{j+1}$ quando $\epsilon_i \rightarrow 0$. Temos também que $f(x_j(\epsilon_i)) \rightarrow f(x_j)$ já que f é contínua. Daí pela unicidade do limite, $f(x_j) = x_{j+1}$ para $-m \leq j \leq m$.

Ou seja, $x_0(\epsilon) \in \text{Inv}^m N \subset V$. Absurdo, pois $x_0(\epsilon) \in (N \setminus V)$. Portanto, para algum $\epsilon > 0$, $C_\epsilon(N, S) \subset \text{Inv}^m N$. $\square$

Teorema 2.2.11. *(Teorema da existência de blocos isolantes) Toda vizinhança de um conjunto invariante isolado S contém um bloco isolante. Em particular, se N é uma vizinhança isolante para S , então para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\overline{C_\epsilon(N, S)}$ é um bloco isolante.*

Demonstração:

Seja $B = \overline{C_\epsilon(N, S)}$. Suponha que B não seja um bloco isolante de S , isto é, $f^{-1}(B) \cap B \cap f(B) \not\subseteq \text{int}(B)$. Logo existe um ponto x tal que $x, f(x)$ e $f^2(x)$ estão em B , mas $f(x) \notin \text{int}(B)$. Como f é contínua, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$ então $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Já que x pertence ao fecho de $C_\epsilon(N, S)$, temos que existe $b \in C_\epsilon(N, S)$ tal que $d(x, b) < \delta$. Daí existe uma seqüência $\{b_n\}_{-k}^k \subset N$ tal que $b_0 = b, b_{-k}, b_k \in S$ e $d(f(b_n), b_{n+1}) < \epsilon$ para $n = -k, \dots, k-1$. Analogamente para $f^2(x) \in B$, existe $d \in C_\epsilon(N, S)$ tal que $d(f^2(x), d) < \epsilon$ e $\{d_n\}_{-r}^r \subset N$, com $d_0 = d, d_{-r}, d_r \in S$ e $d(f(d_n), d_{n+1}) < \epsilon$ para $n = -r, \dots, r-1$. Tomando então $s = \max\{k, r\}$ temos que a seqüência

$$b_{-s}, \dots, b_0, f(x), d_0, \dots, d_s$$

é uma ϵ -cadeia de S , contendo $f(x)$. Assim temos $f(x) \in C_\epsilon(N, S) = \text{int}(B)$. Absurdo! $\square$

O próximo teorema, nos garante a existência de par filtração para o conjunto invariante isolado $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$, onde N é um bloco isolante.

Teorema 2.2.12. *Sejam N um bloco isolante e L qualquer vizinhança compacta suficientemente pequena de N^- em N . Então o par (N, L) é um par filtração para $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$. Temos ainda que o conjunto $\text{Inv}(\overline{N \setminus L}, f)$ é estável sob perturbações C^0 de f . Ou seja, existe uma vizinhança de f na topologia C^0 tal que, para cada $\tilde{f}$ nesta vizinhança, $\tilde{S} = \text{Inv}(\overline{N \setminus L}, \tilde{f})$ é um conjunto invariante isolado e (N, L) é um par filtração para $\tilde{S}$.*

Demonstração: Para verificar a condição 1 da definição (2.2.3), é suficiente mostrar que $S \subset (N \setminus L)$. Como N é bloco isolante, é também vizinhança isolante, logo $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L}) \subset \text{int}(N)$. Agora, por definição $f(N^-)$ está no complementar do interior de N , daí $S \cap f(N^-) = \emptyset$. Sendo L uma vizinhança suficientemente pequena de N^- , temos $S \cap f(L) = \emptyset$. Suponha que exista x em $S \cap L$, logo $f(x) \in f(L)$ e $f(x) \in f(S) = S$ daí $f(x) \in (f(L) \cap S)$. Como $S \cap f(L) = \emptyset$, segue que $S \cap L = \emptyset$, e portanto $S \subset (N \setminus L)$.

A propriedade 2 é satisfeita pela hipótese do teorema.

Para verificar a condição 3, isto é, $(f(L) \cap \overline{(N \setminus L)}) = \emptyset$, note primeiro que

$$N \setminus N^- \subset (N \cap f^{-1}(\text{int}(N))) \subset (N \cap f^{-1}(N)),$$

pois $f^{-1}(\text{int}(N)) \subset f^{-1}(N)$. Daí $\overline{(N \setminus N^-)} \subset (N \cap f^{-1}(N))$. Note também que $f(N^-) \subset (f(N) \cap (\text{int}(N))^c)$ já que $N^- \subset N$ e $f(N^-) \subset (\text{int}(N))^c$. Assim temos

$$f(N^-) \cap \overline{(N \setminus N^-)} \subset (f(N) \cap (\text{int}(N))^c) \cap N \cap f^{-1}(N) = \emptyset,$$

pois N é bloco isolante. Portanto $f(N^-)$ e $\overline{(N \setminus N^-)}$ são disjuntos. Então para uma vizinhança suficientemente pequena L de N^- em N , temos $f(L)$ e $\overline{(N \setminus L)}$ disjuntos, ou seja, a condição 3 é satisfeita.

Verificaremos agora que (N, L) é um par filtração para aplicações C^0 próximas de f . Para isto, note que N é um bloco isolante para aplicações próximas de f . De fato, caso contrário existiria uma seqüência $\{f_n\}$ convergindo à f , e uma seqüência $\{x_n\}$ tal que $x_n \in (f_n^{-1}(N) \cap N \cap f_n(N) \cap (\text{int}(N))^c)$. Escolhendo uma subseqüência $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$, temos que $x_{n_k} \rightarrow z$, com $z \in (f^{-1}(N) \cap N \cap f(N) \cap (\text{int}(N))^c)$, que contradiz o fato de N ser bloco isolante para f .

Analogamente suponha $x_n \in (N_n^- \cap (\text{int}(L))^c)$, onde $N_n^- = \{x \in N; f_n(x) \notin \text{int}(N)\}$, então uma subseqüência de $\{x_n\}$ pode convergir para um ponto $z \in (N^- \cap (\text{int}(L))^c)$, contrariando a hipótese de L ser vizinhança de N^- em N . Portanto (N, L) é um par filtração para cada aplicação suficientemente C^0 próxima de f . $\square$

Observação 2.2.13. Sejam S um conjunto invariante isolado e N uma vizinhança isolante, pelo teorema (2.2.11) existe um bloco isolante $B \subset N$, onde $B = \overline{C_{\epsilon_0}(N, S)}$, ϵ_0 suficientemente pequeno. Temos $\text{Inv } B \subset \text{Inv } N = S$ e como $S \subset \overline{C_{\epsilon_0}(N, S)} = B$ segue que $S = \text{Inv } S \subset \text{Inv } B$. Portanto $\text{Inv } B = S$. Agora pelo teorema (2.2.12), se L é

uma vizinhança compacta suficientemente pequena de B^- , temos que o par (B, L) é um par filtração para S , pois $Inv(\overline{B \setminus L}) = Inv B = S$. De fato, como $\overline{B \setminus L} \subset B$, temos $Inv(\overline{B \setminus L}) \subset Inv B = S$. Por outro lado, $S \subset \overline{(B \setminus L)}$ daí, $S \subset Inv(\overline{B \setminus L})$. Assim $Inv(\overline{B \setminus L}) = S$.

Logo por esta observação resulta que, dado um conjunto isolado S , podemos construir um par filtração.

Exemplo 2.2.14. Tomemos novamente a função do exemplo (2.1.2), $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^3$. Consideremos então a vizinhança compacta $N_1 = ([-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2])$ de $Per(f) = \{-1, 1\}$. Obtemos que

$$N_1^- = ([-2, -\sqrt[3]{2}] \cup [-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}] \cup [\sqrt[3]{2}, 2]),$$

onde cada ponto desse conjunto tem a propriedade de na primeira iterada de f não pertencer ao interior de N_1 . Para melhor compreensão veja figura (2.5).

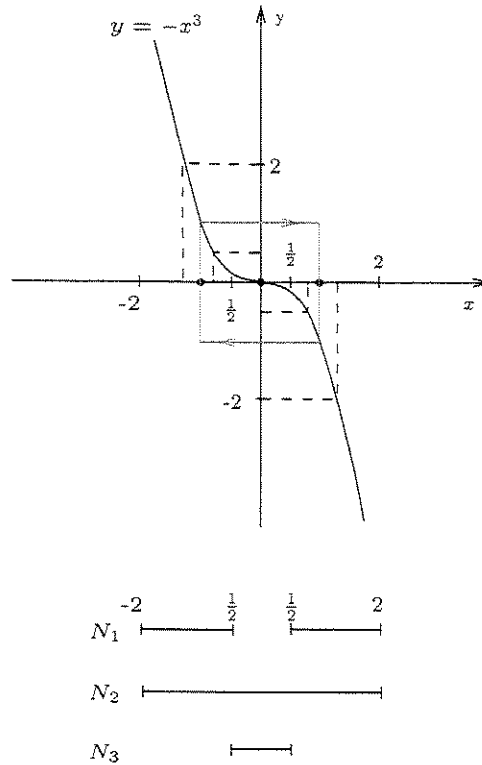


Figura 2.5: N_1 é bloco isolante.

Como

$$(f(N_1) \cap N_1 \cap f^{-1}(N_1)) = ([-\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}] \cup [\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{2}]) \subset \text{int}(N_1),$$

temos que N_1 é bloco isolante. Pelo teorema (2.2.12) (N_1, L_1) , onde L_1 é vizinhança de N_1^- em N_1 , é par filtração para $S = \text{Inv}(\overline{N_1 \setminus L_1}) = \{-1, 1\}$.

Agora, se tomarmos $N_2 = [-2, 2]$, temos que N_2 contem tanto $\text{Per}(f)$ como o ponto fixo atrator $x = 0$, possuindo como conjunto de saída, $N_2^- = ([-2, -\sqrt[3]{2}] \cup [\sqrt[3]{2}, 2])$. Assim como N_1 , temos que N_2 é bloco isolante. Então para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno o par (N_2, L_2) onde $L_2 = ([-2, -\sqrt[3]{2} + \epsilon] \cup [\sqrt[3]{2} - \epsilon, 2])$, é um par filtração para $S = \text{Inv}(\overline{N_2 \setminus L_2}) = [-1, 1]$.

Já para o bloco isolante $N_3 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ que é vizinhança de zero, temos $N_3^- = \emptyset$. Logo tomando $L_3 = \emptyset$, temos (N_3, L_3) par filtração para $S = \text{Inv}(\overline{N_3 \setminus L_3}) = \{0\}$.

Exemplo 2.2.15. Consideraremos agora uma função que possui um comportamento assintótico mais complexo, que é o caso unidimensional do exemplo (1.2.4). Seja $f : X \rightarrow X$ tal que $f(x) = 5x(1 - x)$, onde $X = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. O ponto $x_0 = \frac{1}{2}$ é ponto de máximo global com $f(x_0) = \frac{5}{4}$. Já os pontos $-\infty, 0$ e $p = \frac{4}{5}$ são fixos por f . Como $f'(0) = 5$ e $f'(p) = -3$, temos 0 e p pontos fixos repulsores. Se $x \notin [0, 1]$, então $\omega(x) = \{-\infty\}$. Logo $-\infty$ é um ponto atrator. Denotamos por Λ o conjunto dos pontos tais que, $f^n(x) \in [0, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Já que $f^n(x) \rightarrow -\infty$ se $x \notin [0, 1]$, temos que $\Lambda \subset [0, 1]$.

Considere agora $N = [-\frac{1}{10}, \frac{11}{10}]$ que é uma vizinhança compacta de Λ . O conjunto de saída de N é então

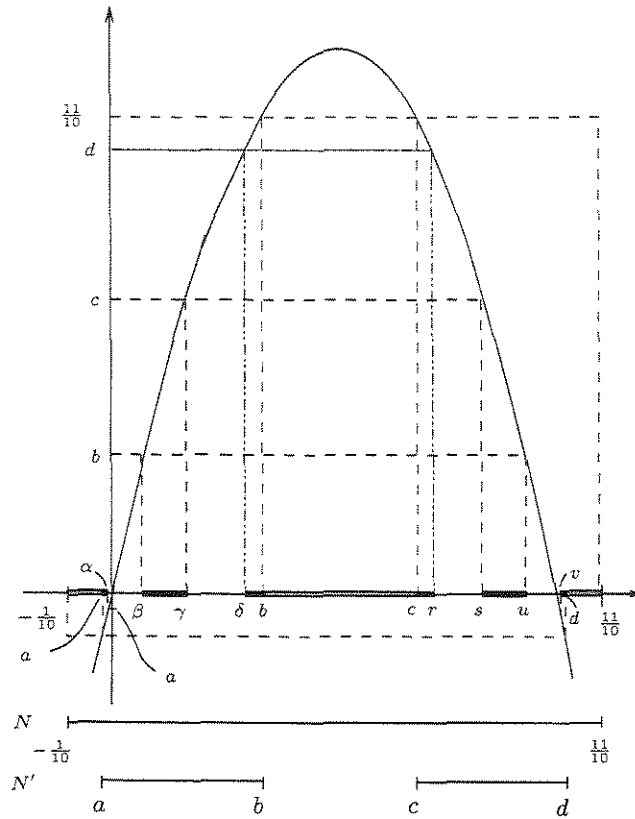
$$N^- = ([-\frac{1}{10}, a] \cup [b, c] \cup [d, \frac{11}{10}]),$$

onde $f(a) = f(d) = -\frac{1}{10}$ e $f(b) = f(c) = \frac{11}{10}$, daí $a = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1.08})$, $b = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{0.12})$, $c = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{0.12})$ e $d = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1.08})$. Como

$$f(N) \cap N \cap f^{-1}(N) \subset [-\frac{11}{20}, \frac{5}{4}] \cap [-\frac{1}{10}, \frac{11}{10}] \cap ([a, b] \cup [c, d])$$

e $([a, b] \cup [c, d]) \subset (-\frac{1}{10}, \frac{11}{10}) = \text{int}(N)$, temos que N é bloco isolante. Veja figura (2.6).

Logo o par (N, L_0) , onde $L_0 = N^-$, é um par índice para $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L_0}) = \Lambda$. Porém não é um par filtração, já que L_0 não é uma vizinhança de N^- em N . No entanto, se tomarmos $L = ([-\frac{1}{10}, \tilde{a}] \cup [\tilde{b}, \tilde{c}] \cup [\tilde{d}, \frac{11}{10}])$, onde $\tilde{a} = a + \epsilon$, $\tilde{b} = b - \epsilon$, $\tilde{c} = c + \epsilon$ e $\tilde{d} = d - \epsilon$, que é vizinhança de N^- em N , temos pela proposição (2.2.12) que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o par (N, L) é um par filtração para $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L}) = \Lambda$.

Figura 2.6: N é bloco isolante.

Considere agora $N' = ([a, b] \cup [c, d])$. Temos então,

$$f^{-1}(N') = [\alpha, \beta] \cup [\gamma, \delta] \cup [r, s] \cup [u, v] \subset \text{int}(N')$$

onde $f(\alpha) = f(v) = a$, $f(\beta) = f(u) = b$, $f(\gamma) = f(s) = c$ e $f(\delta) = f(r) = d$. Logo como no caso anterior, N' é bloco isolante para o conjunto isolado $S = \Lambda$. Assim se $L' = ([a, \tilde{\alpha}] \cup [\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}] \cup [\tilde{\delta}, b] \cup [c, \tilde{r}] \cup [\tilde{s}, \tilde{u}] \cup [\tilde{v}, d])$ onde $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{v}) = \tilde{a}$, $f(\tilde{\beta}) = f(\tilde{u}) = \tilde{b}$, $f(\tilde{\gamma}) = f(\tilde{s}) = \tilde{c}$ e $f(\tilde{\delta}) = f(\tilde{r}) = \tilde{d}$, é vizinhança de $(N')^- = ([a, \alpha] \cup [\beta, \gamma] \cup [\delta, b] \cup [c, r] \cup [s, u] \cup [v, d])$ em N e então o par $P' = (N', L')$ é também um par filtração para $S = \Lambda$.

Definição 2.2.16. Seja $P = (N, L)$ um par filtração para $f : U \rightarrow X$. Denotamos por N_L o espaço quociente N/L onde o conjunto colapsado L é denotado por $[L]$ e é tomado como ponto base. Ou seja $[L]$ denota a classe de equivalência dos pontos em L segundo a relação de equivalência: $x \sim y$ se, e somente se, $x = y$ ou $x, y \in L$.

No caso em que L é vazio, temos que N/L é definido como a união disjunta de N e o

espaço de um só ponto $[L] = \emptyset$.

Note que no exemplo (2.2.15) o espaço pontuado N_L é homotópico à dois círculos que se interceptam em um único ponto, enquanto o espaço N'_L é homotópico à quatro círculos com um ponto de intercessão. Como o conjunto invariante isolado S é o mesmo para ambos os casos, notamos então que o tipo de homotopia do espaço pontuado depende da escolha do par filtração e portanto não é um invariante de S . Isto também é válido se ao invés de par filtração tivermos par índice. Pode-se observar isso, no seguinte exemplo retirado de [MiMr].

Exemplo 2.2.17. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x + 1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tome $L_n = [n, n + \frac{1}{2}]$ e $N_n = \bigcup \{L_i : i = 1, 2, \dots, n\}$. Temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, o par $P_n = (N_n, L_n)$ é um par índice para $S = \text{inv}(\overline{N_n} \setminus L_n) = \emptyset$. Porém o espaço pontuado $N_n \setminus L_n$ é homotópico à n pontos, portanto dependente da escolha do par índice.

Observação 2.2.18. Vale ressaltar aqui, que no caso contínuo, o tipo de homotopia do espaço quociente é um invariante homotópico, isto é, dados (N, L) e (N', L') pares índice para um conjunto isolado invariante S , então N_L e N'_L tem o mesmo tipo de homotopia. O índice homotópico de Conley para o caso contínuo é então definido como o tipo de homotopia de N_L . Porém para o caso discreto devemos ainda buscar um invariante.

Com o intuito de solucionar este problema, vamos primeiramente associar a um par filtração $P = (N, L)$ uma aplicação $f_P : N_L \rightarrow N_L$, tal que

$$f_P([x]) = \begin{cases} [L] & \text{se } x \in L \\ [f(x)] & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e com a propriedade $[L] \subset \text{int}(f_P^{-1}([L]))$.

Assim como para par filtração, associamos a um par índice (N, L) , uma aplicação $f_{N,L} : N_L \rightarrow N_L$ dada por

$$f_{N,L}([x]) = \begin{cases} [f(x)] & \text{se } f(x) \in N \\ [L] & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Teorema 2.2.19. *As aplicações definidas acima são contínuas.*

Pelo exposto acima, vimos que o tipo de homotopia do espaço pontuado N_L depende da escolha do par filtração, logo a aplicação espaço pontuado também depende desta. Vamos agora calcular a aplicação espaço pontuado para dois diferentes pares filtração do mesmo conjunto invariante isolado S .

Exemplo 2.2.20. Considere a aplicação do exemplo (2.2.15). Vimos que $P = (N, L)$ é par filtração para $S = \Lambda$, cujo espaço pontuado é um bouquet de dois círculos, que denotamos por $N_L = \widehat{ab} \vee \widehat{cd}$, onde $\widehat{ab} = \{[x] : x \text{ perence ao intervalo } [\tilde{a}, \tilde{b}]\}$ e $\widehat{cd} = \{[y] : y \text{ perence ao intervalo } [\tilde{c}, \tilde{d}]\}$. Para o cálculo da aplicação f_P , observamos primeiro que $f([a, b]) = f([c, d]) = N$ e $f_P([x]) = [(f(x))]$ para $x \in (N \setminus L)$. Logo, dado $[y] \in N_L \setminus \{[L]\}$ existem $x_1 \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$ e $x_2 \in [\tilde{c}, \tilde{d}]$ tais que $f_P([x_1]) = f_P([x_2]) = [y]$. Melhor dizendo, para um ponto x em $([a, \tilde{a}] \cup [\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}] \cup [\tilde{\delta}, b])$, temos $f(x) \in L$. Ou seja, $f_P([x]) = [L]$. Mas para $x \in (\tilde{a}, \tilde{\beta})$ temos $f(x) \in (\tilde{a}, \tilde{b})$. Daí, $f_P([x])$ é um ponto diferente do ponto base em $\widehat{ab}$. Agora para completar o intervalo $[a, b]$, considere $x \in (\tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$. Então $f(x) \in (\tilde{c}, \tilde{d})$ e assim $f_P([x])$ é um ponto diferente de $[L]$ em $\widehat{cd}$. Portanto, $f_P(\widehat{ab}) = N_L$. Analogamente temos também que $f_P(\widehat{cd})$ é N_L . Caso adotemos uma orientação, devido ao comportamento da f , a orientação de $f_P(\widehat{ab})$ será contrária a de $f_P(\widehat{cd})$. Geometricamente observamos que f_P cobre duas vezes o espaço N_L .

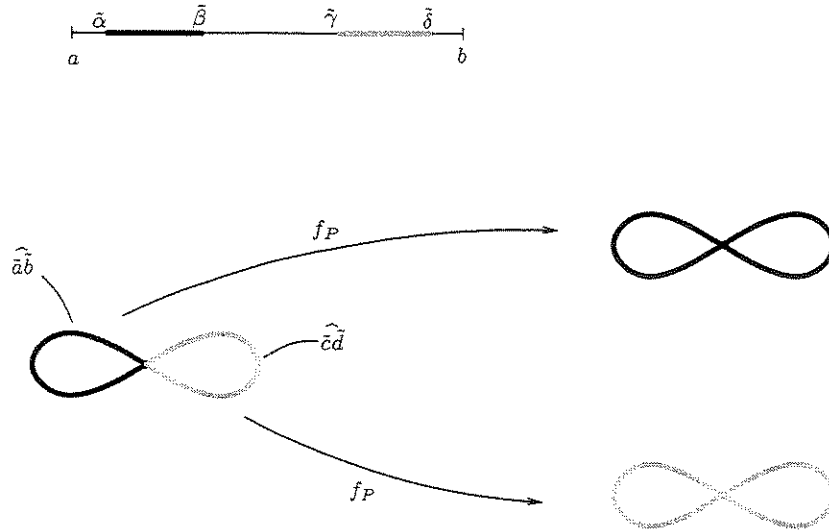


Figura 2.7: f_P cobre duas vezes N_L .

Vimos também em (2.2.15) que $P' = (N', L')$ é outro par filtração para S . Utilizando um

mesmo raciocínio, vamos agora analisar $f_{P'}$. Como $f([\alpha, \beta]) = f([u, v]) = [a, b]$ e $f([\gamma, \delta]) = f([r, s]) = [c, d]$ temos também que dado um ponto $[y]' \in N'_{L'} \setminus \{[L']'\}$ ele é imagem de dois pontos em $N'_{L'}$ cujos representantes estão um em $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ e outro em $[\tilde{u}, \tilde{v}]$ ou um em $[\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}]$ e outro em $[\tilde{r}, \tilde{s}]$. Logo $f_{P'}$ tem um comportamento similar ao de f_P , ou seja, $f_{P'}$ cobre duas vezes o espaço pontuado $N'_{L'}$.

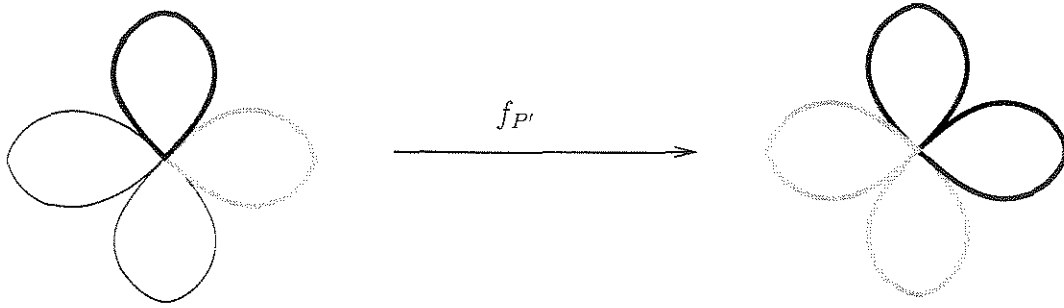


Figura 2.8: $f_{P'}$ cobre duas vezes $N'_{L'}$.

Com esses exemplos encerramos este capítulo, motivados a buscar um invariante onde qualquer escolha de par de filtração dê equivalentes aplicações espaço pontuado associadas.

Capítulo 3

Índice Homotópico de Conley

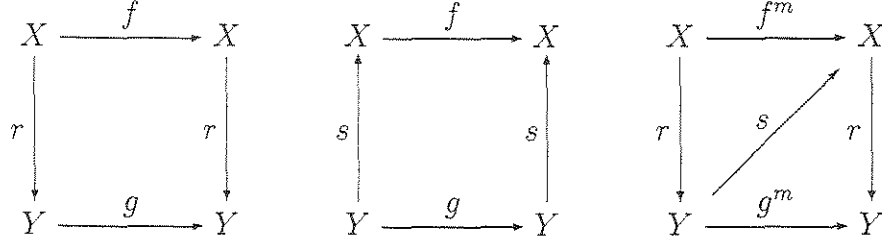
Vimos no final do capítulo anterior que diferentes pares filtração para um conjunto isolado S podem gerar espaços pontuados com tipo de homotopia diferentes. Neste capítulo definiremos uma importante relação de equivalência denominada *shift equivalência* que será utilizada mais adiante para obtermos classes de aplicações em espaços pontuados que independam da escolha do par filtração. Veremos também a relação entre *shift equivalência* e conjugação topológica. Daremos também alguns exemplos com matrizes, onde apresentaremos a definição de fortemente *shift equivalente*. Na sessão final do capítulo definiremos o índice homotópico de Conley via [FrRi], listando algumas de suas propriedades.

3.1 Shift Equivalência

Para uma categoria K , sejam X, Y objetos de K e $f : X \longrightarrow X, g : Y \longrightarrow Y$ endomorfismos. Dizemos que (X, f) e (Y, g) são *shift equivalentes*^{*} se existem, $m \in \mathbb{Z}^+$ e morfismos $r : X \longrightarrow Y$ e $s : Y \longrightarrow X$ tais que os diagramas abaixo comutam, $r \circ s = g^m$ e $s \circ r = f^m$. O inteiro

^{*}Chamamos a atenção do leitor ao fato de que a definição clássica de [Wil] não exige que f e g sejam endomorfismos, apenas que f e g sejam contínuas.

m é chamado *lag*.



Notação: $f \sim_s g$

Shift equivalência é uma relação de equivalência natural e importante para aplicações.

Mostraremos aqui a transitividade. Sejam X, Y, Z elementos de K e $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$, $h : Z \rightarrow Z$ tais que $f \sim_s g$ e $g \sim_s h$. Então existem $r_1 : X \rightarrow Y$, $s_1 : Y \rightarrow X$ tais que

$$r_1 \circ f = g \circ r_1, \quad s_1 \circ g = f \circ s_1, \quad r_1 \circ s_1 = g^m \quad \text{e} \quad s_1 \circ r_1 = f^m.$$

Também, $r_2 : Y \rightarrow Z$, $s_2 : Z \rightarrow Y$ tais que

$$r_2 \circ g = h \circ r_2, \quad s_2 \circ h = g \circ s_2, \quad r_2 \circ s_2 = h^n \quad \text{e} \quad s_2 \circ r_2 = g^n.$$

Definindo então $r = r_2 \circ r_1$ e $s = s_1 \circ s_2$, temos

$$\begin{aligned} r \circ f &= r_2 \circ \underbrace{r_1 \circ f}_{= g \circ r_1} = r_2 \circ g \circ r_1 = h \circ \underbrace{r_2 \circ r_1}_{= g^m} = h \circ r \\ s \circ h &= s_1 \circ \underbrace{s_2 \circ h}_{= g \circ s_2} = s_1 \circ g \circ s_2 = f \circ \underbrace{s_1 \circ s_2}_{= f^n} = f \circ s \\ r \circ s &= r_2 \circ \underbrace{r_1 \circ s_1}_{= g^m} \circ s_2 = r_2 \circ g^m \circ s_2 = h^m \circ \underbrace{r_2 \circ s_2}_{= h^n} = h^m \circ h^n = h^{m+n}, \\ s \circ r &= s_1 \circ \underbrace{s_2 \circ r_2}_{= g^n} \circ r_1 = s_1 \circ g^n \circ r_1 = \underbrace{s_1 \circ r_1}_{= f^m} \circ f^n = f^m \circ f^n = f^{m+n}. \end{aligned}$$

Portanto $f \sim_s h$.

Exemplo 3.1.1. Vamos agora considerar a solenóide do exemplo (1.2.6). Temos que $\text{Inv}D = \Lambda \subset \text{int}(D)$. Ou seja, D é vizinhança isolante para Λ . Como $f(D) \subset \text{int}(D)$, o conjunto de saída de D é vazio. Tomando então $L = \emptyset$, o par $P = (D, L)$ é um par filtração para Λ , sendo o espaço pontuado D/L igual a $D \cup [*]$. A aplicação induzida $f_P : D_L \rightarrow D_L$ leva então ponto base em ponto base e D em $f(D) = D_2$.

Analogamente temos D_2 também vizinhança isolante para Λ , tendo $\emptyset$ como conjunto de saída. Então $P' = (D_2, L)$ é outro par filtração para Λ cuja aplicação induzida $f_{P'} :$

$D_2/L \longrightarrow D_2/L$ é tal que $f_{P'}([*]) = [*]$ e $f_{P'}(D_2) = f(D_2) = D_4$. Vamos mostrar que essas duas aplicações são shift equivalentes. Definindo $r : D/L \longrightarrow D/L$ tal que

$$r([*]) = [*], \quad r(D \setminus D_2) = D_2 \setminus D_4 \quad \text{e} \quad r(D_2) = D_4,$$

obtemos

$$\begin{aligned} r \circ f_P([*]) &= [*] = f_{P'} \circ r([*]) \\ r \circ f_P(D) &= r(D_2) = D_4 = f_{P'}(D_2) = f_{P'} \circ r(D). \end{aligned}$$

Tomamos $s : D_2 \setminus L \longrightarrow D \setminus L$ como sendo a inclusão, logo temos

$$\begin{aligned} s \circ f_{P'}([*]) &= [*] = f_P \circ s([*]) \\ s \circ f_{P'}(D_2) &= s(D_4) = D_4 = f_P(D_2) = f_P \circ s(D_2). \end{aligned}$$

E ainda, $r \circ s([*]) = f_{P'}([*])$, $s \circ r([*]) = f_P([*])$, e

$$\begin{aligned} r \circ s(D_2) &= r(D_2) = D_4 = f_{P'}(D_2) \\ s \circ r(D) &= s(D_2) = D_2 = f_P(D). \end{aligned}$$

Temos então os seguintes diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} D/L & \xrightarrow{f_P} & D/L \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ D_2/L & \xrightarrow{f_{P'}} & D_2/L \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D/L & \xrightarrow{f_P} & D/L \\ \uparrow s & & \uparrow s \\ D_2/L & \xrightarrow{f_{P'}} & D_2/L \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D/L & \xrightarrow{f_P^1} & D/L \\ \downarrow r & \nearrow s & \downarrow r \\ D_2/L & \xrightarrow{f_{P'}^1} & D_2/L \end{array}$$

ou seja, $f_P \sim_s f_{P'}$.

Vejamos agora um exemplo para homeomorfismos reais.

Exemplo 3.1.2. Considere as funções

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x) = 2x \quad \text{e}$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad g(x) = 8x.$$

Temos que $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $h(x) = x^3$ é uma conjugação topológica para f e g . Mostremos que f e g são shift equivalentes. Seja

$$r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } r = h \circ f, \text{ ou seja } r(x) = 8x^3.$$

Como r é composição de funções contínuas, também é contínua. Considere agora

$$s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } s(x) = \sqrt[3]{x} = h^{-1}(x).$$

Assim temos

$$g \circ r(x) = 8(2x)^3 = r(2x) = r \circ f(x), \text{ e } f \circ s(x) = 2\sqrt[3]{x} = s \circ g(x).$$

$$r \circ s(x) = 8(\sqrt[3]{x})^3 = 8x = g(x) \text{ e } s \circ r(x) = \sqrt[3]{8x^3} = 2x = f(x).$$

Portanto as condições para shift equivalência são satisfeitas. Nesse exemplo temos $lag = 1$.

Este exemplo sugere a seguinte proposição.

Proposição 3.1.3. *Suponha que $f : X \longrightarrow X$ e $g : Y \longrightarrow Y$ sejam homeomorfismos, onde X, Y são espaços métricos. Então f e g são shift equivalentes se, e somente se, são topologicamente conjugados.*

Demonstração:

Suponha que $f \sim_s g$, existem então $m \in \mathbb{Z}^+$, $r : X \longrightarrow Y$ e $s : Y \longrightarrow X$ tais que

$$r \circ f = g \circ r, \quad s \circ g = f \circ s, \quad r \circ s = g^m \text{ e } s \circ r = f^m.$$

Considere então

$$h : X \longrightarrow Y \text{ tal que } h = r \circ f^{-m} = g^{-m} \circ r.$$

Como h é composta de funções contínuas, logo contínua também. Da definição de shift equivalência, temos que $h^{-1} = s$, ou seja, h é um homeomorfismo. Ainda, $h \circ f = r \circ f^{-m} \circ f = r \circ f \circ f^{-m} = g \circ r \circ f^{-m} = g \circ h$. Portanto h é uma conjugação topológica entre f e g .

Reciprocamente, suponha f e g topologicamente conjugados e seja h a conjugação topológica. Considere, $r : X \longrightarrow Y$ tal que $r = h \circ f = g \circ h$ e $s : Y \longrightarrow X$ tal que $s = h^{-1}$. Logo

$$g \circ r = g \circ (h \circ f) = (g \circ h) \circ f = r \circ f$$

$$f \circ s = f \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g = s \circ g$$

ainda, $r \circ s = (g \circ h) \circ h^{-1} = g^1$ e $s \circ r = h^{-1} \circ (h \circ f) = f^1$.

Portanto $f \sim_s g$, com $lag = 1$.

Agora veremos um exemplo com matrizes.

Exemplo 3.1.4. Considere as matrizes reais,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Agora se tomarmos $R = \begin{pmatrix} a & a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ b & -b\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ e $S = \begin{pmatrix} x & y \\ x\sqrt{2} & -y\sqrt{2} \end{pmatrix}$ temos que

$$RA = \begin{pmatrix} a\sqrt{2} & a \\ -b\sqrt{2} & b \end{pmatrix} = BR \quad \text{e} \quad AS = \begin{pmatrix} x\sqrt{2} & -y\sqrt{2} \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = SB,$$

e ainda

$$SR = \begin{pmatrix} ax + by & ax\frac{\sqrt{2}}{2} - by\frac{\sqrt{2}}{2} \\ ax\sqrt{2} & ax + by \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad RS = \begin{pmatrix} 2ax & 0 \\ 0 & 2by \end{pmatrix}.$$

Como

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix} & \text{se } n \text{ for par} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} \\ 2^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} & \text{se } n \text{ for impar} \end{cases}$$

e

$$B^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix} & \text{se } n \text{ for par} \\ \begin{pmatrix} 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{2} \end{pmatrix} & \text{se } n \text{ for impar} \end{cases}$$

temos que, dado $n \in \mathbb{Z}_+$ podemos escolher a, b, x, y adequados para termos A e B shift equivalentes, com lag n . Em particular, se tomarmos $a = b = x = y = 2$ temos

$$R = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

ainda

$$A^6 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = B^6.$$

Logo as transformações lineares $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (y, 2x)$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x, y) = (\sqrt{2}x, \sqrt{2}y)$, associadas a A e B respectivamente, são shift equivalentes com lag=6. Onde r e s são as transformações associadas a R e S .

3.2 Matrizes Inteiras

Matrizes completamente diferentes podem dar origem a subshifts do tipo finito topologicamente conjugadas. Por exemplo as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A relação de equivalência em matrizes que correspondem a conjugação topológica dos subshifts foi descoberta por Williams [Wil] e denotada por *fortemente shift equivalência*. Williams também definiu outra relação de equivalência, chamada de *shift equivalência*. Ele introduziu este conceito com o objetivo de reduzir o estudo de fortemente shift equivalente a uma relação para a qual fosse possível fazer as contas. Temos que fortemente shift equivalente implica em shift equivalência. A recíproca é verdadeira em $\mathbb{Z}$. Williams em [Wi2] conjecturou que shift equivalência implica fortemente shift equivalência em $\mathbb{Z}_+$. Porém, Kim e Roush [KiRo] mostraram que a conjectura é falsa pelo menos para matrizes redutíveis.

Definição 3.2.1. Sejam duas matrizes quadradas A e B com entradas em $\mathbb{Z}^+$. Dizemos que A é *shift equivalente*[†] a B se existem duas matrizes retangulares R, S sob $\mathbb{Z}^+$ e um inteiro m tais que $RA = BR$, $SB = AS$, $SR = A^m$ e $RS = B^m$.

[†]Observe que não se exige que A, B tenham $\det \neq 0$

Definição 3.2.2. Duas matrizes quadradas A e B , com entradas em $\mathbb{Z}^+$ são ditas fortemente shift equivalentes se existe matrizes inteiras não negativas, não necessariamente quadradas, R_i e S_i , $1 \leq i \leq n$, tais que $A = R_1 S_1$, $B = S_n R_n$ e $R_{i+1} S_{i+1} = S_i R_i$ para $1 \leq i < n$.

Exemplo 3.2.3. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tomarmos $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ temos que $AR = RB$, $BS = SA$ e ainda $SR = B$ e $RS = A$. Logo A e B são fortemente shift equivalentes, onde a sequência de matrizes tem comprimento um.

Note também, que A e B são matrizes shift equivalentes segundo a definição de Williams [Wil], mas como $\det(B) = 0$ segue que a transformação associada a B não é um endomorfismo, logo não é um exemplo de shift equivalência se olharmos pela definição acima dada por [FrRi].

Daremos agora o contra exemplo apresentado por [KiRo] para a conjectura de [Wi2] citada anteriormente.

Exemplo 3.2.4. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} U & 0 \\ I & U \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} U & 0 \\ U^{20}(U - I) & U \end{pmatrix}.$$

Temos que B é não negativa e A e B são shift equivalentes, mas no entanto não são fortemente shift equivalentes, onde

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A prova desse fato se encontra em [KiRo].

A seguinte proposição mostra que a recíproca da conjectura é sempre verdadeira.

Proposição 3.2.5. *Duas matrizes fortemente shift equivalentes A e B são shift equivalentes (independente do anel dado).*

Demonstração:

Como A e B são fortemente shift equivalentes, temos que existem matrizes inteiras não negativas, não necessariamente quadradas, R_i e S_i , $1 \leq i \leq n$, tais que $A = R_1 S_1$, $B = S_n R_n$ e $R_{i+1} S_{i+1} = S_i R_i$ para $1 \leq i < n$. Observe que

$$\begin{aligned} A^2 &= R_1 \underbrace{S_1 R_1}_{S_1} S_1 = R_1 R_2 S_2 S_1 \\ A^3 &= R_1 \underbrace{S_1 R_1}_{S_1} \underbrace{S_1 R_1}_{S_1} S_1 = R_1 R_2 \underbrace{S_2 R_2}_{S_2} S_2 S_1 = R_1 R_2 R_3 S_3 S_2 S_1 \\ &\vdots \\ A^n &= R_1 S_1 R_1 \dots S_1 R_1 S_1 = R_1 R_2 S_2 R_2 \dots S_2 R_2 S_2 S_1 \\ &= R_1 R_2 R_3 S_3 \dots R_3 S_3 S_2 S_1 = \dots = R_1 \dots R_n S_n \dots S_1. \end{aligned}$$

Para as potências de B , temos

$$\begin{aligned} B^2 &= S_n \underbrace{R_n S_n}_{R_n} R_n = S_n S_{n-1} R_{n-1} R_n \\ B^3 &= S_n \underbrace{R_n S_n}_{R_n} \underbrace{R_n S_n}_{R_n} R_n = S_n S_{n-1} \underbrace{R_{n-1} S_{n-1}}_{R_{n-1}} R_{n-1} R_n \\ &= S_n S_{n-1} S_{n-2} R_{n-2} R_{n-1} R_n \\ &\vdots \\ B^n &= S_n R_n S_n \dots R_n S_n R_n = S_n S_{n-1} R_{n-1} S_{n-1} \dots R_{n-1} S_{n-1} R_{n-1} R_n \\ &= S_n S_{n-1} S_{n-2} R_{n-2} \dots S_{n-2} R_{n-2} R_{n-1} R_n = \dots = S_n \dots S_1 R_1 \dots R_n. \end{aligned}$$

Tomando então

$$R = R_1 R_2 \dots R_n \text{ e } S = S_n S_{n-1} \dots S_1$$

temos $RS = A^n$ e $SR = B^n$, e também

$$\begin{aligned} AR &= R_1 S_1 R_1 R_2 \dots R_n = R_1 R_2 S_2 R_2 \dots R_n \\ &= \dots = R_1 \dots R_{n-1} S_{n-1} R_{n-1} R_n = R_1 \dots R_n S_n R_n = RB, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SA &= S_n S_{n-1} \dots S_1 R_1 S_1 = S_n \dots R_2 S_2 S_1 \\ &= \dots = S_n S_{n-1} R_{n-1} \dots S_1 = S_n R_n S_n \dots S_1 = BS. \end{aligned}$$

Portanto A e B são shift equivalentes. □

Encerramos aqui esta sessão sobre matrizes inteiras. E agora tendo a definição de shift equivalência, o objetivo da próxima sessão é a definição do índice e algumas de suas propriedades.

3.3 O Índice via Franks-Richeson

A fim de definir o índice de Conley, precisamos mostrar que para quaisquer dois pares filtração de um conjunto invariante isolado S , as aplicações correspondentes nos espaços pontuados são shift equivalentes, isto será feito no teorema(3.3.4). Em outras palavras, a classe de shift equivalência das aplicações espaço pontuado é um invariante de S , pois independe da escolha do par filtração. Porém, essa invariância é ainda restritiva, já que shift equivalência não é um invariante homotópico. Para ver isto, consideremos

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ onde } f(x) = 2x,$$

que vimos no exemplo(3.1.2) ser shift equivalente a

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } g(x) = 8x.$$

Mas no entanto, temos que a aplicação

$$r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } r(x) = \frac{1}{2}x$$

é homotópica a f , mas não shift equivalente a g .

Vamos considerar então a classe de homotopia das aplicações preservando ponto base tendo f_P como representante e denotada $h_p(S)$. Daí consideraremos a relação de shift equivalência nessas classes $h_p(S)$ e assim obteremos um invariante homotópico, que definiremos em (3.3.5) como o *índice homotópico de Conley*.

Exemplo 3.3.1. Seja novamente a aplicação quadrática do exemplo (2.2.15), $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x(1 - x)$. Vimos que $P = (N, L)$ e $P' = (N', L')$ formam pares filtrações para o conjunto invariante $S = \Lambda$ e calculamos suas respectivas aplicações espaço pontuado no exemplo (2.2.20). Vamos agora mostrar que f_P e $f_{P'}$ são shift equivalentes. Para isso, primeiramente definimos, $r : N_L \rightarrow N'_{L'}$ tal que

$$r([L]) = [L']' \text{ e } r([x]) = \rho'(x) = [x]' \text{ caso contrário}$$

e $s : N'_{L'} \rightarrow N_L$ onde,

$$s([L']') = [L] \text{ e } s([x]') = \rho(f(x)) = [f(x)] \text{ caso contrário.}$$

Temos então,

$$\begin{aligned} (s \circ f_{P'})([L']') &= s([L']') = [L] = f_P([L]) = f_P(s([L']')) \\ &= (f_P \circ s)([L']'). \end{aligned}$$

Para x tal que $f(x) \notin L'$ temos,

$$\begin{aligned} (s \circ f_{P'})([x]') &= s([f(x)]') = [f^2(x)] = f_P([f(x)]) \\ &= (f_P \circ s)([x]'). \end{aligned}$$

Caso $f(x) \in L'$, basta observar que $f^2(x) \in L$.

$$(r \circ f_P)([L]) = r([L]) = [L']' = f_{P'}(r([L])) = (f_{P'} \circ r)([L]')$$

Se $[f(x)] \neq [L]$, temos

$$\begin{aligned} (r \circ f_P)([x]) &= r([f(x)]) = [f(x)]' = f_{P'}([x]') \\ &= (f_{P'} \circ r)([x]). \end{aligned}$$

Caso contrário, temos $x \in L'$ e conseqüentemente o resultado segue. Temos diretamente da definição de r e s que $s \circ r = f_P$ e $r \circ s = f_{P'}$. Ou seja, as aplicações r e s satisfazem as condições de shift equivalência, apresentando $\text{lag} = 1$. Geometricamente podemos observar que a composição $s \circ r$ cobre duas vezes N_L .

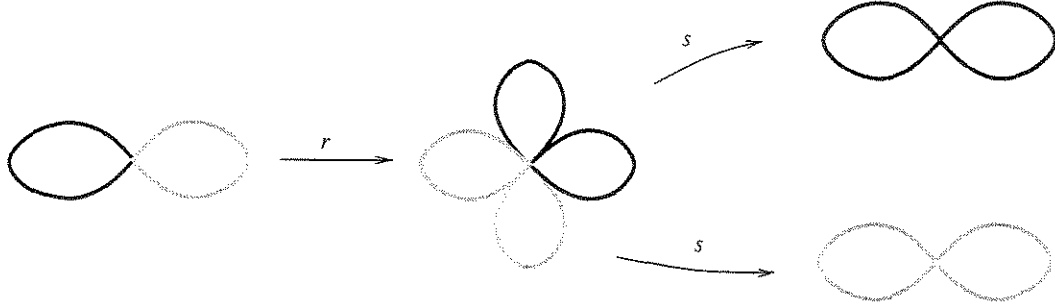


Figura 3.1: $s \circ r$ cobre duas vezes N_L .

Observamos aqui que $h_p(S)$ não é um invariante de S , pois depende do espaço pontuado. Não podemos ter f_P e $f_{P'}$ homotópicas, já que estão definidas em espaços diferentes, no entanto são shift equivalentes.

Consideramos agora $N'' = ([\alpha, \beta] \cup [\gamma, \delta] \cup [r, s] \cup [u, v])$, que também é bloco isolante e L'' vizinhança suficientemente pequena de $(N'')^-$ tal que $f(L'') = L'$, obtemos outro par filtração para $S = \Lambda$ que tem como espaço pontuado $N''_{L''}$ um bouquet de oito círculos.

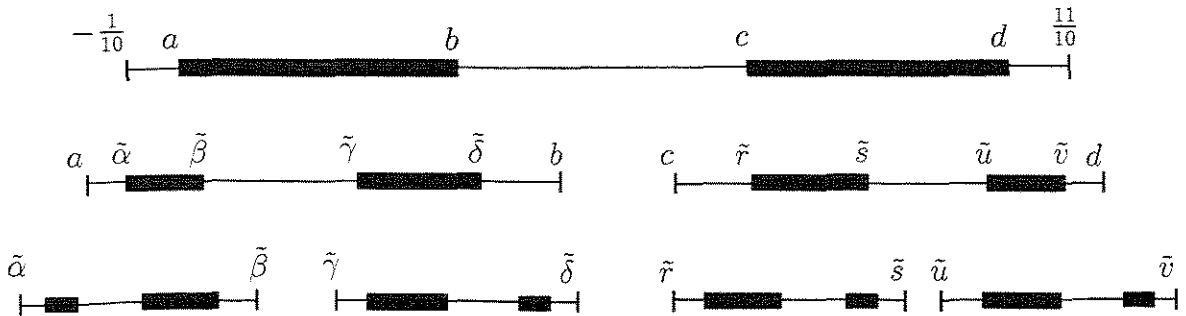


Figura 3.2: Conjunto N'' .

Também como nos casos anteriores, $f_{P''} : N''_{L''} \rightarrow N''_{L''}$ cobre duas vezes o espaço pontuado $N''_{L''}$. E mais, $f_{P''}$ é shift equivalente a f_P , com $\text{lag} 2$. Para ver isso, basta tomar

as aplicações, $r : N_L \longrightarrow N_{L''}''$ tal que

$$r([L]) = [L'']'' \quad \text{e} \quad r([x]) = \begin{cases} [L'']'' & \text{se } x \in ([a, \alpha] \cup [\beta, \gamma] \cup [\delta, b]), \\ [x]'' & \text{se } x \in ([\alpha, \beta] \cup [\gamma, \delta]), \\ [L'']'' & \text{se } x \in ([c, r] \cup [s, u] \cup [v, d]), \\ [x]'' & \text{se } x \in ([r, s] \cup [u, v]). \end{cases}$$

e $s : N_{L''}'' \longrightarrow N_L$ tal que

$$s([L''] = [L]) \quad \text{e} \quad s([x]'') = [f^2(x)] \text{ se } x \in N'' \setminus L''.$$

Seguindo o raciocínio utilizado nos casos anteriores obtemos então uma shift equivalência entre f_P e $f_{P'}$ com $\text{lag} = 2$. Geometricamente temos que tanto $r \circ s$ quanto $s \circ r$ cobrem quatro vezes seus respectivos espaços de definição.

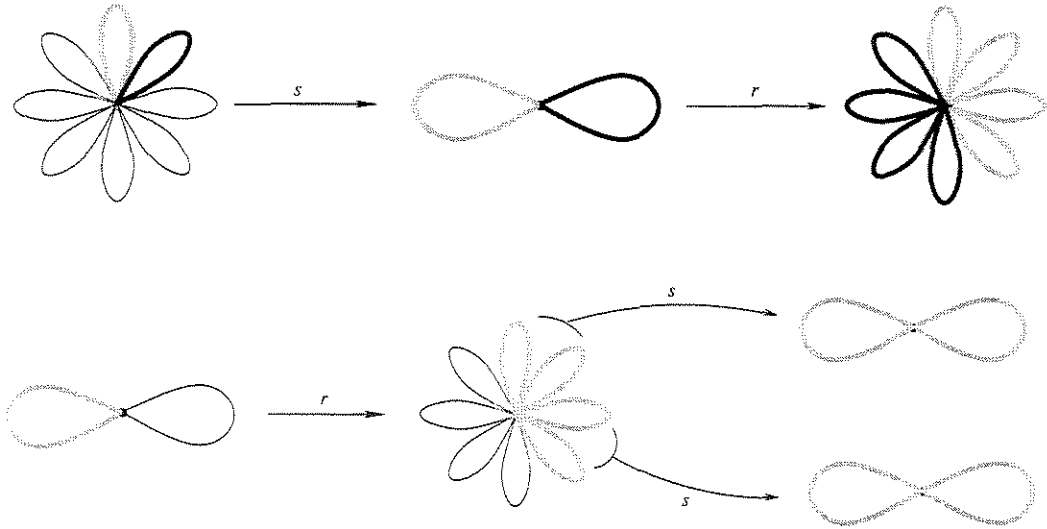


Figura 3.3: $r \circ s = f_{P''}^2$, e $s \circ r = f_P^2$

Daremos agora dois lemas, que são casos especiais de pares filtração para S , cuja função contínua f possui a propriedade $f(L) \subset \text{int}(L)$. Estes lemas serão utilizados na demonstração do teorema(3.3.4).

Lema 3.3.2. *Suponha $P_0 = (N, L_0)$ e $P = (N \cup L, L)$ pares de filtrações para $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$, e que $L_0 \subset L$ e $f(L) \subset \text{int}(L)$. Então as aplicações induzidas, f_{P_0} e f_P , nos correspondentes espaços pontuados são shift equivalentes.*

Demonstração:

Seja $Q = N \cup L$, logo $P = (Q, L)$. Sabemos que f induz as seguintes aplicações associadas aos pares P_0 e P ,

$$f_{P_0} : N_{L_0} \longrightarrow N_{L_0} \text{ tal que, } f_{P_0}([x]_0) = \begin{cases} [L_0]_0 & \text{se } x \in L_0 \\ [f(x)]_0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $[x]_0 = \rho_0(x)$ e $\rho_0 : N \longrightarrow N_{L_0}$ é a aplicação quociente,

$$f_P : Q_L \longrightarrow Q_L \text{ tal que, } f_P([x]) = \begin{cases} [L] & \text{se } x \in L \\ [f(x)] & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $[x] = \rho(x)$ e $\rho : Q \longrightarrow Q_L$ é a aplicação quociente.

Queremos provar que f_{P_0} e f_P são shift equivalentes, isto é, existem $r : N_{L_0} \longrightarrow Q_L$ e $s : Q_L \longrightarrow N_{L_0}$ tais que

$$r \circ f_{P_0} = f_P \circ r, \quad s \circ f_P = f_{P_0} \circ s, \quad s \circ r = f_{P_0}^n \quad \text{e} \quad r \circ s = f_P^n.$$

Defina então $r : N_{L_0} \longrightarrow Q_L$ dada por $r([L_0]_0) = [L]$ e $r([x]_0) = \rho(x) = [x]$ para todo ponto em $N_{L_0} \setminus \{[L_0]_0\}$, onde identificamos $N_{L_0} \setminus \{[L_0]_0\}$ com $N \setminus L_0$.

- r está bem definida.

De fato, sejam $[x]_0, [y]_0 \in N_{L_0}$ tais que $[x]_0 = [y]_0$. Logo $x, y \in L_0$ ou $x = y$.

Caso $x, y \in L_0 \subset L$, temos $r([x]_0) = r([y]_0) = [L]$.

Caso $x = y$, temos $\rho(x) = \rho(y)$ e daí $r([x]_0) = r([y]_0)$.

- r é contínua.

Para elementos em $N_{L_0} \setminus \{[L_0]_0\}$ temos que r é contínua, pois ρ é contínua. Agora, para verificar a continuidade em $[L_0]_0$, tomemos uma seqüência em $N_{L_0} \setminus \{[L_0]_0\}$ convergindo para $[L_0]_0$, então $\{\rho_0^{-1}([x_n]_0)\}$ está eventualmente em V , vizinhança de L_0 em L . Daí temos que para n maior que um certo $n_0 > 0$, $x_n \in V \subset L$. Portanto $\{\rho(x_n)\}$ é uma seqüência eventualmente constante igual a $[L]$.

- Temos também $r \circ f_{P_0} = f_P \circ r$.

De fato,

$$\begin{aligned}(f_P \circ r)([L_0]_0) &= f_P(r([L_0]_0)) = f_P([L]) = [L] = r([L_0]_0) \\ &= r(f_{P_0}([L_0]_0)) = (r \circ f_{P_0})([L_0]_0).\end{aligned}$$

Agora, se $x \in ((L \setminus L_0) \cap N)$ com $f(x) \in L_0$, então

$$\begin{aligned}(f_P \circ r)([x]_0) &= f_P([x]) = [L] = r([L_0]_0) \\ &= r([f(x)]_0) = (r \circ f_{P_0})([x]_0).\end{aligned}$$

Se $x \in ((L \setminus L_0) \cap N)$ mas, $f(x) \in L \setminus L_0$, então

$$\begin{aligned}(f_P \circ r)([x]_0) &= f_P([x]) = [L] = [f(x)] = r([f(x)]_0) \\ &= r(f_{P_0}([x]_0)) = (r \circ f_{P_0})([x]_0).\end{aligned}$$

Se $x \in (N \setminus L)$, como L_0 é vizinhança de N^- , temos $f(x) \in L_0$ ou $f(x) \in N \setminus L_0$.

Considerando $f(x) \in L_0$, temos,

$$\begin{aligned}(f_P \circ r)([x]_0) &= f_P([x]) = [f(x)] = [L] = r([L_0]_0) = r([f(x)]_0) \\ &= r(f_{P_0}([x]_0)) = (r \circ f_{P_0})([x]_0).\end{aligned}$$

Caso, $f(x) \in N \setminus L_0$, temos,

$$\begin{aligned}(f_P \circ r)([x]_0) &= f_P([x]) = [f(x)] = r([f(x)]_0) \\ &= r(f_{P_0}([x]_0)) = (r \circ f_{P_0})([x]_0).\end{aligned}$$

Portanto, r está bem definida.

Pela definição (2.2.3) temos que L_0 contém o conjunto de saída de N e $S \cap L = \emptyset$.

Assim se $x \in L \cap N$, então x não pertence ao conjunto

$$S = \text{Inv}(\overline{Q \setminus L}) = \text{Inv}(\overline{N \setminus L_0}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \text{Inv}^m(\overline{N \setminus L_0}).$$

Logo, existe $n_x \geq 0$ tal que $x \notin \text{Inv}^{n_x}(\overline{N \setminus L_0})$. Ou seja, não existe um segmento de órbita $\{x_t\}_{-n_x}^{+n_x} \subset \overline{(N \setminus L_0)}$, tal que, $x_0 = x$ e $x_{t+1} = f(x_t)$, $t = \{-n_x, \dots, n_x - 1\}$. Assim para

algum l , $f^l(x) \notin \overline{(N \setminus L_0)}$, implicando que, $f^l(x) \in L_0$ ou $f^l(x) \notin N$, mas L_0 é vizinhança de N^- em N , então temos que existe $k < l$ tal que $f^k(x) \in L_0$. Seja $n = \sup_{x \in (N \cap L)} n_x$. Para $x \in (N \cap L)$ temos $f^k(x) \in L_0$ para algum $k < n$. Defina então

$$s : Q_L \longrightarrow N_{L_0}, \text{ onde } s([L]) = [L_0]_0 \text{ e } s([x]) = f_{P_0}^n([x]_0) \text{ caso contrário.}$$

Seja $x \in L$, como $f(L) \subset \text{int}(L)$, temos $f(x) \in \text{int}(L)$. Logo existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(x), \epsilon) \subset \text{int}(L)$. Como f é contínua existe $\delta_x > 0$ tal que

$$f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), \epsilon) \subset \text{int}(L).$$

Seja então

$$K = \bigcap_{x \in L} B(x, \delta_x).$$

Logo $V = K \cap Q$ é uma vizinhança de L em Q , e ainda $f(V) \subset (f(K) \cap f(Q)) \subset \text{int}(L)$. Portanto existe uma vizinhança V de L em Q , tal que $f(V) \subset \text{int}(L)$.

- s é contínua.

Em $Q_L \setminus \{[L]\}$ temos que s é composta de funções contínuas, logo contínua também.

Para verificar a continuidade em $[L]$, seja V uma vizinhança de L em Q tal que $f(V) \subset \text{int}(L)$, logo cada ponto $z \in V$, temos $f^k(z) \in L_0$ para algum $k < n$. Assim para cada ponto $z \in N \cap V$, temos $f_{P_0}^n([z]_0) = [L_0]_0$, ou seja, $s(x)$ é constante e igual a $[L_0]_0$ em uma vizinhança de $[L]$ em Q_L . Portanto contínua em $[L]$.

- $s \circ f_P = f_{P_0} \circ s$

De fato,

$$\begin{aligned} (s \circ f_P)([L]) &= s([L]) = [L_0]_0 = f_{P_0}([L_0]_0) = f_{P_0}(s([L])) \\ &= (f_{P_0} \circ s)([L]). \end{aligned}$$

Agora consideremos $x \in N \setminus L$, com $f(x) \in L_0$,

$$\begin{aligned} (s \circ f_P)([x]) &= s([f(x)]) = [L_0]_0 = f_{P_0}^n([f(x)]_0) \\ &= f_{P_0}^n(f_{P_0}([x]_0)) = f_{P_0}(f_{P_0}^n([x]_0)) = (f_{P_0} \circ s)([x]). \end{aligned}$$

Caso $x \in N \setminus L$, mas $f(x) \in L \setminus L_0$, temos

$$\begin{aligned} (s \circ f_P)([x]) &= s([f(x)]) = [L_0]_0 = f_{P_0}([L_0]_0) \\ &= f_{P_0}(f_{P_0}^n([x]_0)) = f_{P_0}(f_{P_0}^n([x]_0)) = (f_{P_0} \circ s)([x]). \end{aligned}$$

Para finalizar, seja $x \in N \setminus L$ com $f(x) \in N \setminus L$, então

$$\begin{aligned} (s \circ f_P)([x]) &= s([f(x)]) = f_{P_0}^n([f(x)]_0) = f_{P_0}^n(f_{P_0}([x]_0)) = f_{P_0}^{n+1}([x]_0) \\ &= f_{P_0}(f_{P_0}^n([x]_0)) = f_{P_0}(s([x])) = (f_{P_0} \circ s)([x]). \end{aligned}$$

- $s \circ r = f_{P_0}^n$, e também $r \circ s = f_P^n$.

$$N_L \xrightarrow{r} Q_L \xrightarrow{s} N_{L_0} \xrightarrow{r} Q_L$$

De fato,

$$(s \circ r)([L_0]_0) = s([L]) = [L_0]_0 = f_{P_0}^n([L_0]_0).$$

Para $x \in N_{L_0} \setminus \{[L_0]\}$ temos

$$(s \circ r)([x]_0) = s([x]) = \begin{cases} [L_0]_0 = f_{P_0}^n([x]_0) & \text{se, } x \in L \setminus L_0 \\ f_{P_0}^n([x]_0) & \text{se, } x \in N \setminus L. \end{cases}$$

Temos que $[L_0]_0 = f_{P_0}^n([x]_0)$, pois existe $k < n$ tal que $f^k(x) \in L_0$, daí $f_{P_0}^{n-k}([f^k(x)]_0) = f_{P_0}^{n-k}([L_0]_0) = [L_0]_0$.

Assim $s \circ r = f_{P_0}^n$.

Para verificarmos que $r \circ s = f_P^n$, notemos primeiro que

$$(r \circ s)([L]) = r([L_0]_0) = [L] = f_P^n([L]).$$

Agora para $x \in N \setminus L$, temos

$$(r \circ s)([x]) = r(f_{P_0}^n[x]_0) = r([f^n(x)]_0) = \begin{cases} [L] = f_P^n([x]) & \text{se, } f^k(x) \in L_0, k \leq n \\ [f^n(x)] = f_P^n([x]) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja, para todo ponto de Q_L , temos $(r \circ s)([x]) = f_P^n([x])$.

Portanto, tendo provado todos os itens acima, temos $f_P \sim_s f_{P_0}$. $\square$

Lema 3.3.3. *Suponha $P' = (N', L)$ e $P = (N, L)$ pares de filtrações para S , e que $N \setminus L \subset N' \setminus L$ e $f(L) \subset \text{int}(L)$. Então as aplicações induzidas, $f_{P'}$ e f_P , nos correspondentes espaços pontuados são shift equivalentes.*

Demonstração: Considere a aplicação continua $r : N_L \longrightarrow N'_L$ dada por

$$r([L]) = [L] \quad \text{e} \quad r([x]) = \rho'(x) = [x]' \text{ caso contrário,}$$

onde $\rho' : N' \longrightarrow N'_L$ é a aplicação quociente e como antes identificamos $N_L \setminus \{[L]\}$ com $N \setminus L$. Temos $f_{P'} \circ r = r \circ f_P$.

De fato,

$$\begin{aligned} (f_{P'} \circ r)([L]) &= f_{P'}([L]') = [L]' = r([L]) = r(f_P([L])) \\ &= (r \circ f_P)([L]). \end{aligned}$$

Para $[x] \in N_L \setminus \{[L]\}$,

$$\begin{aligned} (f_{P'} \circ r)([x]) &= f_{P'}([x]') = [f(x)]' = r([f(x)]) \\ &= r(f_P([x])) = (r \circ f_P)([x]). \end{aligned}$$

Para a definir a aplicação s , vamos primeiro mostrar que existe $n > 0$ tal que $f^n(N') \subset \text{int}(N)$. De fato, como $f(L) \subset \text{int}(L)$ e $\text{int}(L) \subset \text{int}(N)$, temos $f(L) \subset \text{int}(N)$. Assim se $x \in (L \cap N')$, segue que $f^n(x) \in \text{int}(N)$ para todo $n > 0$. Suponhamos agora $x \in (N' \setminus L)$ tal que exista $k_x > 0$ com $f^{k_x}(x) \in L$, logo $f^n(x) \in \text{int}(N)$ para todo $n > k_x$. Caso $x \in (N' \setminus L)$ com $f^k(x) \in (N' \setminus L)$ para todo $k > 0$, temos por (2.2.7) que $\omega(x) \subset S$. Daí existe n_x tal que $f^{k_x}(x) \in \text{int}(N)$. Tomando $n = \sup_{x \in N'} k_x$, temos $f^n(N') \subset \text{int}(N)$.

Definimos então $s : N'_L \longrightarrow N_L$ por

$$s([L]') = [L] \quad \text{e} \quad s([x]') = \rho(f^n(x)) = [f^n(x)] \text{ caso contrário,}$$

onde $\rho : N \longrightarrow N_L$ é a aplicação quociente e identificamos $N'_L \setminus \{[L]'\}$ com $N' \setminus L$.

Temos s contínua em $N'_L \setminus \{[L]'\}$, já que é composta de funções contínuas aí. Verifiquemos agora a continuidade em $[L]'$. Suponha que $\{[x_n]'\}$ seja uma seqüência em N'_L convergindo para $[L]'$, temos então que $\{s([x_n]')\}$ é uma seqüência eventualmente constante e igual a $[L] \in N_L$. Mostremos agora que $s \circ f_{P'} = f_P \circ s$.

$$\begin{aligned} (s \circ f_{P'})([L]') &= s([L]') = [L_0] = f_P([L]) = f_P(s([L]')) \\ &= (f_P \circ s)([L]'). \end{aligned}$$

Agora para $x \in N \setminus L$, temos

$$\begin{aligned} (s \circ f_{P'})([x]') &= s([f(x)]') = [f^n(f(x))] \\ &= [f^{n+1}(x)]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(f_P \circ s)([x]') = f_P([f^n(x)]) = \begin{cases} f_P([L]) = [L] = [f^{n+1}([x])] & \text{se, } f^k(x) \in L, \ k \leq n \\ [f(f^n(x))] = [f^{n+1}(x)] & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Falta ainda mostrar que $s \circ r = f_P^n$ e $r \circ s = f_{P'}^n$.

$$(r \circ s)([L]') = r([L]) = [L]' = f_P^n([L]').$$

Agora para $x \in N' \setminus L$, temos

$$(r \circ s)([x]') = r([f^n(x)]) = [f^n(x)]' = f_{P'}^n([x]').$$

Para a composição $s \circ r$ obtemos,

$$(s \circ r)([L]) = s([L]') = [L] = f_P^n([L]),$$

e para $x \in N_L \setminus \{[L]\}$

$$\begin{aligned} (s \circ r)([x]) &= s([(x)]') = [f^n(x)] \\ &= f_P^n([x]). \end{aligned}$$

Portanto $f_P \sim_s f_{P'}$. □

Daremos agora o teorema que relaciona as aplicações espaço pontuado associadas a pares filtrações quaisquer para um conjunto invariante isolado.

Teorema 3.3.4. *Suponha $P' = (N', L')$ e $P = (N, L)$ pares de filtrações para S . Então as aplicações induzidas, $f_{P'}$ e f_P , nos correspondentes espaços pontuados são shift equivalentes.*

Demonstração:

Como $P' = (N', L')$ e $P = (N, L)$ são pares de filtração para S , temos $S \subset \text{int}(\overline{N \setminus L})$ e também $S \subset \text{int}(\overline{N' \setminus L'})$, e daí

$$S \subset (\text{int}(\overline{N \setminus L}) \cap \text{int}(\overline{N' \setminus L'})) = V.$$

Logo V é vizinhança de S em N e em N' . Pela proposição (2.2.10) temos

Existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $C_{\epsilon_1}(N, S) \subset V$.

Existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $C_{\epsilon_2}(N', S) \subset V$.

Logo, se $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$

$$C_\epsilon(N, S) \subset C_{\epsilon_1}(N, S) \subset V \subset \text{int}(\overline{N' \setminus L'}).$$

$$C_\epsilon(N', S) \subset C_{\epsilon_2}(N', S) \subset V \subset \text{int}(\overline{N \setminus L}).$$

Assim, se $x \in C_\epsilon(N, S)$, temos que $x \in N$ e existe uma ϵ -cadeia $\{x_n\}_{-k}^{+k} \subset N$ com $x_0 = x$ e $x_k, x_{-k} \in S$.

Como $C_\epsilon(N, S) \subset \text{int}(\overline{N' \setminus L'}) \subset N'$, segue que $x \in N'$. Já que cada elemento da ϵ -cadeia $\{x_n\}_{-k}^{+k}$ pertence a $C_\epsilon(N, S)$ (obs(2.2.9)), temos ela também pertencente a N' . Logo $x \in C_\epsilon(N', S)$, ou seja $C_\epsilon(N, S) \subset C_\epsilon(N', S)$. Com os mesmos argumentos podemos ver que $C_\epsilon(N', S) \subset C_\epsilon(N, S)$.

Portanto para ϵ suficientemente pequeno temos, $C_\epsilon(N', S) = C_\epsilon(N, S) \subset V$.

Seja $B = \overline{C_\epsilon(N, S)}$. Veremos que se B_0 é uma vizinhança suficientemente pequena de B^- em B , então $P_0 = (B, B_0)$ é um par filtração com a propriedade que f_{P_0} é shift equivalente tanto a f_P quanto a $f_{P'}$. Provaremos a shift equivalência para f_P , já que os argumentos são os mesmos para ambos os casos.

Como identificamos $N_L \setminus \{[L]\}$ com $N \setminus L$, podemos considerar B como um subconjunto de N_L e a aplicação como sendo f_P . Assim $B^- = \{x \in C_\epsilon(N, S) \text{ tal que } f_P(x) \notin \text{int}(B)\}$. Da definição de $C_\epsilon(N, S)$, temos que $x \in B^-$ implica que não existe uma ϵ -cadeia de $f_P(x)$ para S . Logo pela observação(2.2.7) o conjunto $\omega(x)$ pode ser somente o ponto $[L]$. Disto segue que existe um $n > 0$ tal que para cada $x \in B^-$ temos $f_P^n(x) = [L]$. Se B_0 é uma vizinhança suficientemente pequena de B^- em B , o mesmo acontece para os pontos de B_0 . Definimos $K \subset N_L$ como $\overline{(\text{int}(f_P^{-n}([L]))}$. Então $f_P(K) \subset \text{int}(K)$, pois, $f_P^{-1}([L])$ é uma vizinhança de $[L]$ e para cada seqüência convergindo para um ponto de $f_P(K)$ temos sua imagem sob f_P^{n-1} convergindo para $[L]$. Assim cada tal seqüência está eventualmente em K . Temos também que $B_0 \subset \text{int}(K)$.

Assim $R = (N_L, K)$ e $Q = (B \cup K, K)$ são pares de filtração para S . Completamos a prova mostrando que $f_R : N_L/K \longrightarrow N_L/K$ é shift equivalente a $f_P : N_L \longrightarrow N_L$ e

$f_{P_0} : B_{B_0} \longrightarrow B_{B_0}$. Pelo lema(3.3.2) f_{P_0} é shift equivalente à f_Q e pelo lema(3.3.3) f_Q é shift equivalente à f_R . Assim f_R é shift equivalente à f_{P_0} .

Para verificar que f_R é shift equivalente à f_P , notemos que se $\rho : N \longrightarrow N_L$ é a aplicação quociente então podemos identificar os espaços pontuados (e aplicações) dos pares de filtração (N_L, K) e $(N, \rho^{-1}(K))$. Pelo lema(3.3.2) f_P é shift equivalente a aplicação espaço pontuado associada ao par $(N, \rho^{-1}(K))$ que identificamos com f_R . $\square$

Sejam X e Y espaços topológicos pontuados e $[f] : X \longrightarrow X$ e $[g] : Y \longrightarrow Y$ classes de homotopia preservando ponto base. Dizemos que $(X, [f])$ e $(Y, [g])$ são *shift equivalentes* se existem aplicações de classe de homotopia $[r] : X \longrightarrow Y$ e $[s] : Y \longrightarrow X$ tais que $[g \circ r] = [r \circ f]$, $[s \circ g] = [f \circ s]$, $[r \circ s] = [g^m]$ e $[s \circ r] = [f^m]$ para algum m .

Definição 3.3.5. Sendo S um conjunto invariante isolado para uma aplicação contínua, definimos o *índice homotópico de Conley* para S como a classe de shift equivalência de $h_p(S)$, onde $P = (N, L)$ é um par filtração para S e o denotamos por $h(S, f)$ ou simplesmente $h(S)$.

Definido este invariante homotópico, podemos aplicar funtores para obter novos invariantes, como o índice homológico, índice cohomológico, etc.

Listamos agora, duas importantes propriedades do índice de Conley. A propriedade de Wazewski e a propriedade de continuação(homotopia).

Dizemos que $h(S) = 0$, se cada aplicação espaço pontuado para S for shift equivalente (na categoria de homotopia) à aplicação no espaço pontuado constituído de apenas um ponto.

Exemplo 3.3.6. Considere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$. Vimos no exemplo(2.2.4) que $N = [0, 1/2] \cup [1, 3/2]$ e $L_\epsilon = ([0, \epsilon] \cup [1/2 - \epsilon, 1/2] \cup [1, 3/2])$, $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, formam um par filtração para $S = \emptyset$. Como $f_P : N_L \longrightarrow N_L$ é constante igual a $[L]$, temos $h(S) = 0$. Este exemplo apresentado aqui, é um caso particular da seguinte proposição.

Proposição 3.3.7. O conjunto $\emptyset$ é um conjunto invariante isolado, onde $h(\emptyset) = 0$. Daí segue que, se $h(S) \neq 0$ então $S \neq \emptyset$.

Teorema 3.3.8. *Suponha $f_\lambda : X \times [0, 1] \longrightarrow X$ uma homotopia contínua e N uma vizinhança isolante para f_0 , com $S_0 = \text{Inv}(N, f_0)$. Então existe um $\epsilon > 0$ tal que N é vizinhança isolante para f_λ , $\lambda < \epsilon$. Assim, $h(S_0, f_0) = h(S_\lambda, f_\lambda)$, onde $S_\lambda = \text{Inv}(N, f_\lambda)$ e $\lambda < \epsilon$.*

Demonstração: Segue do teorema(2.2.12).

Como consequência desse teorema, temos que, dados uma variedade M e uma aplicação contínua $f : M \longrightarrow M$ com vizinhança isolante N e um conjunto invariante isolado $S = \text{Inv}N$ então existe uma vizinhança V de f na topologia C^0 com a propriedade que N é uma vizinhança isolante para toda $\tilde{f} \in V$. Conseqüentemente, $h(S, f) = h(\tilde{S}, \tilde{f})$, onde $\tilde{S} = \text{Inv}(N, \tilde{f})$.

Exemplo 3.3.9. Considere f e $P = (N, L)$ como no exemplo (4.1.4). Temos então que a aplicação espaço pontuado $f_P : N_L \longrightarrow N_L$ é dada por

$$f_P([(x, y)]) = \begin{cases} [L] & \text{se, } (x, y) \in L \\ \rho((2x, \frac{1}{2}y)) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$



Figura 3.4: Espaço Pontuado N_L

Consideremos agora a classe das funções homotópicas a f_P . Temos então que o índice homotópico de Conley, $h(S)$, é a classe de shift equivalência de $h_p(S) = [f_P]$.

Exemplo 3.3.10. Para este exemplo, vamos considerar a ferradura de Smale apresentada no capítulo 1. Seja $N = [0, 1] \times [0, 1] = Q$. Vimos no capítulo 1 que $F^{-1}(N) \cap N \cap F(N)$ é formado por quatro quadrados no interior de N , ou seja, N é bloco isolante. Logo, se L é uma vizinhança suficientemente pequena de $N^- = Q \setminus (V_1 \cup V_2)$ em N , temos pelo teorema(2.2.12), que $P = (N, L)$ é um par filtração para $S = \Lambda$.

A aplicação espaço pontuado associada a P , $F_P : N_L \longrightarrow N_L$ é dada por

$$F_P([(x, y)]) = \begin{cases} [L] & \text{se } (x, y) \in L \\ \rho(F(x, y)) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

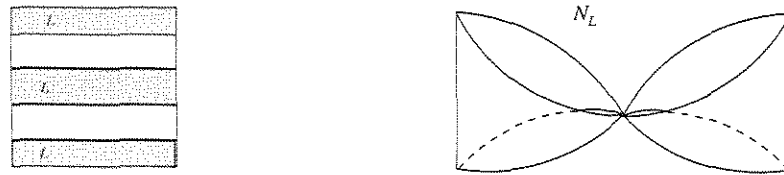


Figura 3.5: Espaço Pontuado N_L para ferradura.

e seu comportamento é semelhante ao da função dada no exemplo (2.2.15). Temos então $h_p(S)$ a classe de homotopia de F_P , e portanto $h(S)$ é a classe das funções shift equivalentes a $h_p(S)$.

Os exemplos acima mostram a dificuldade do cálculo do índice homotópico mesmos nos casos mais simples.

Para tanto, aplica-se funtores de homologia e cohomologia ao índice como veremos no capítulo seguinte.

Capítulo 4

Outras Abordagens para a Definição do Índice

Neste capítulo vamos definir o índice homotópico de Conley baseado nos trabalhos de A.Szymczak, onde é utilizada a teoria de categorias. Veremos que dado um par filtração para um conjunto isolado S , temos $h(S)$ equivalente a classe dos isomorfismos de (N_L, f_P) na categoria de Szymczak $(Htop_*)_m$, ou seja, a definição do índice homotópico de Franks e Richeson e a de Szymczak se equivalem. Veremos também a definição do índice cohomológico, com base nos trabalhos de M.Mrozek, onde daremos exemplos do cálculo do índice.

4.1 Índice Homotópico via Szymczak

Iniciamos esta sessão com a definição da categoria de Szymczak, que será utilizada para a definição do índice.

Seja K uma categoria. Definimos a categoria dos objetos munidos com um morfismo sobre K , denotado por K_m , como segue:

$$Ob(K_m) := \{(X, f) : X \in Ob(K) \text{ e } f \in Mor_K(X, X)\}.$$

Agora para $(X, f), (X', f') \in Ob(K_m)$ definimos

$$Mor_{K_m}((X, f), (X', f')) := M((X, f), (X', f')) / \sim .$$

onde,

$$M((X, f), (X', f')) = \{(g, n) \in Mor_K(X, X') \times \mathbb{Z}^+ : g \circ f = f' \circ g\}.$$

e " $\sim$ " é uma relação de equivalência, assim definida, $(g_1, n_1) \sim (g_2, n_2)$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que o diagrama abaixo comute,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f^{n_1+k}} & X \\ \downarrow f^{n_2+k} & & \downarrow g_2 \\ X & \xrightarrow{g_1} & X' \end{array}$$

Um morfismo em $Mor_{K_m}((X, f), (X', f'))$ tendo como representante (g, n) , será denotado por $[g, n]$.

A composição dos morfismos

$$[g, n] \in Mor_{K_m}((X, f), (X', f')) \quad \text{e} \quad [g', n'] \in Mor_{K_m}((X', f'), (X'', f''))$$

é definida por

$$[g', n'] \circ [g, n] := [g' \circ g, n' + n].$$

Temos ainda que os morfismos identidade pertencentes a $Mor_{K_m}((X, f), (X, f))$ são da forma $Id_{(X, f)} = [id_X, 0]$.

Chamaremos uma tal categoria $K_m = \{Ob(K_m), Mor_{K_m}\}$ de *categoria de Szymczak*.

Definição 4.1.1. Dizemos que (X, f) e (X', f') em K_m são isomorfos se existem morfismos $[g_1, n_1] : (X, f) \longrightarrow (X', f')$ e $[g_2, n_2] : (X', f') \longrightarrow (X, f)$ tais que

$$[g_1, n_1] \circ [g_2, n_2] := Id_{(X', f')}$$

$$[g_2, n_2] \circ [g_1, n_1] := Id_{(X, f)}.$$

Seja $Htop$ a categoria dos espaços topológicos pontuados, onde morfismos em $Htop$ são classes de homotopia preservando ponto base. Denotaremos a categoria de Szymczak associada a $Htop$ por $Htop_m$. As classes de isomorfismo em $Htop_m$ definem o índice de Conley, como veremos na definição seguinte.

Definição 4.1.2. Seja S um conjunto invariante isolado para a aplicação contínua $f : X \longrightarrow X$. O índice homotópico de Conley de S , denotado por $h(S, f, X)$, é definido como a classe

dos objetos isomorfos a $((N/L, [L]), [f_{N,L}]) \in Ob(Htop_m)$. Szymczak provou em [Sz] que essa classe independe da escolha do par índice (N, L) , logo

$$h(S, f, X) = [(N/L, [L]), f_{N,L}].$$

Veremos no próximo teorema que isomorfismos na categoria de Szymczak equivalem a shift equivalência. Vale ressaltar que este teorema vale não apenas para $Htop_m$, mas para categorias de Szymczak em geral.

Teorema 4.1.3. *Suponha que $(X, f), (X', f') \in Ob(K_m)$. Temos que (X, f) e (X', f') são isomorfos se, e somente se, f e f' são shift equivalentes.*

Demonstração: Suponha que f e f' sejam shift equivalentes, por definição existem $m \in \mathbb{Z}^+$, $r : X \rightarrow X'$ e $s : X' \rightarrow X$ tais que

$$r \circ f = f' \circ r, s \circ f = f' \circ s, r \circ s = f^m \text{ e } s \circ r = (f')^m.$$

Temos que $[r, m] \in Mor_{K_m}((X, f), (X', f'))$ é um isomorfismo cujo isomorfismo inverso é $[s, 0] \in Mor_{K_m}((X, f), (X', f'))$, pois, da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f^m} & X \\ \downarrow id & & \downarrow id \\ X & \xrightarrow{s \circ r} & X \end{array}$$

segue que $(s, 0) \circ (r, m) = (s \circ r, m) \sim (id_X, 0)$. Similarmente, $(r \circ s, m) \sim (id_{X'}, 0)$. Portanto $[r, m]$ e $[s, 0]$ são isomorfismos inversos.

Reciprocamente, suponha que (X, f) e (X', f') são objetos isomorfos na categoria de Szymczak, existem então $[r, t] \in Mor_{K_m}((X, f), (X', f'))$ e $[s, u] \in Mor_{K_m}((X', f'), (X, f))$ morfismos inversos. Daí segue que

$$(s \circ r, t + u) \sim (id_X, 0) \text{ e } (r \circ s, t + u) \sim (id_{X'}, 0).$$

Temos então $r \circ f = f' \circ r$, $f \circ s = s \circ f'$ e existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+$ tais que os diagramas abaixo comutam

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f^{t+u+k_1}} & X \\ \downarrow f^{k_1} & & \downarrow id \\ X & \xrightarrow{s \circ r} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{(f')^{t+u+k_2}} & X' \\ \downarrow (f')^{k_2} & & \downarrow id \\ X' & \xrightarrow{r \circ s} & X' \end{array}$$

Sejam $k = \max\{k_1, k_2\}$, $m = t + u + k$, $s' = s$ e $r' = r \circ f^k$. Assim temos

$$r' \circ f = f' \circ r', \quad s' \circ f' = f \circ s', \quad r' \circ s' = (f')^m \text{ e } s' \circ r' = f^m.$$

Portanto f e f' são shift equivalentes. $\square$

O teorema acima garante a equivalência entre a definição do índice homotópico de Conley apresentada por Szymczak e a definição dada no capítulo anterior por Franks e Richeson. Em outras palavras, dado um par filtração (N, L) para um conjunto isolado S , a classe dos isomorfismos (N_L, f_P) na categoria de Szymczak, $h(S, f, X)$, é o índice homotópico de Conley $h(S)$ definido por [FrRi].

O próximo exemplo ilustra o teorema (4.1.3).

Exemplo 4.1.4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$. Considere os conjuntos compactos em $\mathbb{R}^2$, $N = [-2, 2] \times [-2, 2]$ e $L = [-2, -1 + \epsilon] \times [-2, 2] \cup [1 - \epsilon, 2] \times [-2, 2]$. Temos que o par (N, L) é um par filtração para $S = (0, 0)$. Tomando $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [3, \frac{5}{2}]$, obtemos que o par $P' = (N', L)$ onde $N' = N \cup Q$ é outro par filtração para S . Veja figura

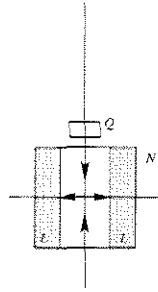


Figura 4.1: Par Filtração $P' = (N', L)$.

A aplicação induzida $f_{P'}$ é então dada por,

$$\begin{aligned} f_{P'}([x]) &= f_P([x]) & \text{se } x \notin Q \\ f_{P'}([x]) &= [f(x)] & \text{se } x \in Q. \end{aligned}$$

Considerando a inclusão $i : N/L \hookrightarrow N'/L$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} N/L & \xrightarrow{f_P} & N/L \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ N'/L & \xrightarrow{f_{P'}} & N'/L \end{array}$$

ou seja, $i_* f_P = f_{P'} \circ i$. Logo para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, segue que $[[i], n]$ é um morfismo entre $(N/L, [f_P])$ e $(N'/L, [f_{P'}])$. Considere agora $h : N'/L \rightarrow N/L$, onde

$$\begin{aligned} h([x]) &= [x] & \text{se } x \notin Q \\ h([x]) &= [f(x)] & \text{se } x \in Q. \end{aligned}$$

segue daí que

$$\begin{aligned} h_* f_{P'}([x]) &= f_P h([x]) & \text{se } x \notin Q, \\ h_* f_{P'}([x]) &= h([f(x)]) = [f(x)], & \text{se } x \in Q, \\ f_P h([x]) &= f_P([f(x)]) = [f^2(x)], & \text{se } x \in Q. \end{aligned}$$

Logo o seguinte diagrama é homotopicamente comutativo

$$\begin{array}{ccc} N'/L & \xrightarrow{f_{P'}} & N'/L \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ N/L & \xrightarrow{f_P} & N/L \end{array}$$

Portanto, para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, temos que $[[h], m]$ é um morfismo entre $(N'/L, [f_{P'}])$ e $(N/L, [f_P])$.

Queremos encontrar $m, n \in \mathbb{Z}^+$ tais que

$$[[h], m] \circ [[i], n] = [(Id_{N'_L}], 0)]$$

$$[[i], m] \circ [[h], n] = [(Id_{N_L}], 0)].$$

Ou seja, encontrar valores para m, n, k, j em $\mathbb{Z}^+$, tais que os seguintes diagramas sejam homotopicamente comutativos

$$\begin{array}{ccc} N/L & \xrightarrow{(f_P)^{m+n+k}} & N/L \\ \downarrow (f_P)^k & & \downarrow h \circ i = Id \\ N/L & \xrightarrow{Id} & N/L \end{array} \quad \begin{array}{ccc} N'/L & \xrightarrow{(f_{P'})^{m+n+j}} & N'/L \\ \downarrow (f_{P'})^j & & \downarrow i \circ h = Id \\ N'/L & \xrightarrow{Id} & N'/L \end{array}$$

Basta tomarmos $m = n = 0$ e j, k inteiros positivos quaisquer, para termos o desejado. Portanto temos que $(N/L, [f_P])$ e $(N'/L, [f_{P'}])$ são isomorfos em $Htop_m$.

Pelo teorema (4.1.3), temos então que $(N/L, [f_P])$ e $(N'/L, [f_{P'}])$ são shift equivalentes

com $lag = m$ onde, $m = \max\{k, j\}$, $s = h$ e $r = i \circ f_P^m$. Ou seja,

$$\begin{aligned} [s] \circ [f_{P'}] &= [f_P] \circ [s] \\ [r] \circ [f_P] &= [i \circ f_P^m] \circ [f_P] = [f_{P'}] \circ [i \circ f_P^m] = [f_{P'}] \circ [r] \\ [r] \circ [s] &= [i \circ f_P^m] \circ [h] = [f_{P'}^m] \\ [s] \circ [r] &= [h] \circ [i \circ f_P^m] = [f_P^m]. \end{aligned}$$

□

4.2 Índice Cohomológico de Mrozek

Iniciamos esta sessão com as definições de núcleo e imagem generalizados, que são necessárias para a definição da redução de Leray. Em seguida definiremos o índice cohomológico e apresentaremos alguns exemplos.

Denotaremos por $\mathfrak{S}$ a categoria dos endomorfismos, onde um objeto de $\mathfrak{S}$ é um par (F, f) sendo F um módulo sobre um anel e $f : F \longrightarrow F$ um endomorfismo. Analogamente denotamos por $\mathfrak{S}I$ a categoria dos isomorfismos.

Sabemos que se $f : F \longrightarrow F$ for um isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Mas se f for apenas um endomorfismo podemos ter $f^n(x) = 0$ com $x \neq 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim $x \in \ker(f^n)$ para algum n . Analogamente, temos $Im(f^n) = Im(f) = F$ se f for um isomorfismo. Já para monomorfismos, nem sempre esses conjuntos coincidem. Com a idéia de generalizar a definição de núcleo e de imagem temos a seguinte definição

Definição 4.2.1. Seja $f : F \longrightarrow F$ um endomorfismo. O *núcleo generalizado* de f é dado por

$$gker(f) := \{x \in F : f^n(x) = 0, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

Suponha agora $g : F \longrightarrow F$ um monomorfismo, definimos a *imagem generalizada* de g por

$$gim(g) := \{x \in F : \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset F \text{ tal que } g^n(x_n) = x \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Como $f(gker(f)) \subseteq gker(f)$ temos induzido o monomorfismo

$$f' : F/gker(f) \longrightarrow F/gker(f) \text{ tal que } f'([x]) = [f(x)].$$

Façamos então $LM(F, f) := (F/gker(f), f') \in \mathfrak{S}$.

Seja φ é um morfismo entre (E, e) e (F, f) . Segue da definição de morfismos que $\varphi(gker(e)) \subset gker(f)$. Logo podemos definir a aplicação

$$\varphi' : E/gker(e) \longrightarrow F/gker(f) \text{ tal que } \varphi'([x]) = [\varphi(x)].$$

Assim temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} E/gker(e) & \xrightarrow{e'} & E/gker(e) \\ \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi' \\ F/gker(f) & \xrightarrow{f'} & F/gker(f) \end{array}$$

Façamos $LM(\varphi) := \varphi'$. Logo temos que $LM(\varphi)$ é um monomorfismo entre $LM(F, f)$ e $LM(E, e)$.

Agora para a imagem generalizada de um monomorfismo f , temos $f(gim(f)) \subseteq gim(f)$. Logo podemos considerar a aplicação

$$f'' : gim(f) \longrightarrow gim(f) \text{ dada por } f''(x) = f(x).$$

Temos que f'' é um monomorfismo sobrejetor, ou seja, um isomorfismo.

Façamos agora $LI(F, f) := (gim(f), f'') \in \mathfrak{S}$.

Consideremos φ um morfismo entre (E, e) e (F, f) , onde e, f são monomorfismos. Como temos $\varphi(gim(e)) \subseteq gim(f)$, podemos definir a aplicação

$$\varphi'' : gim(e) \longrightarrow gim(f) \text{ tal que } \varphi''(x) = \varphi(x).$$

E temos ainda o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} gim(e) & \xrightarrow{e''} & gim(e) \\ \downarrow \varphi'' & & \downarrow \varphi'' \\ gim(f) & \xrightarrow{f''} & gim(f) \end{array}$$

Fazendo $LI(\varphi) := \varphi''$, temos que $LI(\varphi)$ é um morfismo entre os objetos $LI(F, f)$ e $LI(E, e)$ pertencentes a $\mathfrak{S}$.

Definição 4.2.2. Dado $(F, f) \in \mathfrak{S}$, definimos a *redução de Leray* como a composição $LI \circ LM(F, f)$, e denotada $\mathcal{L}(F, f)$. Se φ é um morfismo entre (E, e) e (F, f) , então $\mathcal{L}(\varphi) = LI(LM(\varphi))$.

A seguinte proposição nos diz que $\mathcal{L}$ restrita a $\mathfrak{S}I$ é simplesmente a identidade.

Proposição 4.2.3. *Sejam $(E, e), (F, f) \in \mathfrak{S}$, com e, f isomorfismos. Então $\mathcal{L}(E, e) = (E, e)$, $\mathcal{L}(F, f) = (F, f)$ e se φ é um morfismo entre (E, e) e (F, f) , então $\mathcal{L}(\varphi) = \varphi$.*

Vamos agora definir o índice cohomológico de Conley.

Lema 4.2.4. *Se (N, L) é um par índice para um conjunto isolado S , então*

1. $(N, L) \subset (N \cup f(L), L \cup f(L))$.
2. *A inclusão $i_{N,L} : (N, L) \hookrightarrow (N \cup f(L), L \cup f(L))$ induz um isomorfismo na cohomologia de Alexander-Spainer.*

Seja então a aplicação

$$f_{N,L}^* = f^* \circ (i_{N,L}^*)^{-1} : H^*(N, L) \longrightarrow H^*(N, L)$$

onde

$$f^* : H^*(N \cup f(L), L \cup f(L)) \longrightarrow H^*(N, L)$$

é a induzida cohomológica da f . A aplicação $f_{N,L}^*$ é chamada *aplicação índice*. Temos então que o par $(H^*(N, L), f_{N,L}^*)$ pertence a $\mathfrak{S}$.

Agora daremos um resultado importante que assegura que o índice cohomológico está bem definido.

Teorema 4.2.5. *Suponha (N', L') e (N, L) pares-índices para um conjunto isolado S . Então $\mathcal{L}(H^*(N, L), f_{N,L}^*)$ e $\mathcal{L}(H^*(N', L'), f_{N',L'}^*)$ são objetos isomorfos em $\mathcal{L}$.*

Pelo teorema acima, a redução de Leray da cohomologia de Alexander-Spainer de um par índice para um conjunto isolado S , só depende do conjunto S . Logo podemos definir.

Definição 4.2.6. Dado um conjunto isolado S , definimos o índice cohomológico de Conley como o par $Con^*(S) = \mathcal{L}(H^*(N, L), f_{N,L}^*)$, onde (N, L) é um par índice para S .

O índice cohomológico de Conley possui três propriedades. São elas:

- (Propriedade de Wazewski) Se $Con^*(S) \neq \emptyset$, então $S \neq \emptyset$.

- (Propriedade de Aditividade) Seja $S = S_1 \cup S_2$ um conjunto invariante isolado, onde S_1, S_2 são conjuntos invariantes isolados disjuntos. Então $Con^*(S) = Con^*(S_1) \times Con^*(S_2)$.
- (Propriedade de Homotopia) Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $f : \Lambda \times X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua tal que para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$f_\lambda : X \longrightarrow X \text{ definida por } f_\lambda(x) = f(\lambda, x)$$

é uma aplicação contínua e N é uma vizinhança isolante em relação a f_λ . Então $Con^*(Inv(N, f_\lambda))$ não depende de λ .

Daremos a seguir um exemplo do cálculo do índice de Conley.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto fixo de um difeomorfismo f de classe C^1 . Dizemos que x_0 é um *ponto fixo hiperbólico* se $Df(x_0)$ é um *isomorfismo hiperbólico*, isto é, se $Df(x_0)$ não possui autovalor de norma 1. Denotando por k o número de autovalores de $Df(x_0)$ com módulo maior que 1, e l o número de autovalores reais de $Df(x_0)$ menores que -1, definimos o índice de Morse do ponto hiperbólico x_0 como o par (k, l) .

Exemplo 4.2.7. Seja x_0 um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo de classe C^1 , $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Então $\{x_0\}$ é um conjunto invariante isolado e

$$Con_i(\{x_0\}) = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq k \\ (Q, (-1)^l id) & \text{para } i = k \end{cases}$$

onde, (k, l) é o índice de Morse de x_0 .

De fato, assumamos sem perda de generalidade que $x_0 = 0$. Primeiramente consideraremos o caso em que f é linear, isto é, $f(x) = Ax$, onde A é uma matriz real $n \times n$. Como A é um isomorfismo hiperbólico, logo podemos decompor $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ como soma direta de dois subespaços U, V invariantes por A , onde os autovalores de $A^U = A|_U$ e $A^V = A|_V$ são os autovalores de A com módulo menor que 1 e maior que 1 respectivamente. E ainda existe uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $\|A^U\| < 1$ e $\|(A^V)^{-1}\| < 1$, ou seja, A^U é uma contração e A^V é uma expansão. Seque então que $\{0\}$ é um conjunto invariante isolado.

Suponha que A possua n autovalores diferentes. Escolha uma base do $\mathbb{R}^n$ em que A nesta base tenha forma bloco diagonal, com blocos unidimensionais $[\lambda_j]$ correspondentes aos

autovalores reais λ_j e blocos bidimensionais

$$\begin{pmatrix} r_j \cos \varphi_j & r_j \sin \varphi_j \\ r_j \sin \varphi_j & r_j \cos \varphi_j \end{pmatrix}$$

correspondentes ao par de autovalores complexos $r_j \exp(-i\varphi_j)$ e $r_j \exp(i\varphi_j)$.

Definamos a aplicação $h : \mathbb{R} \times [0, 1]$ tal que

$$h(u, t) = tu + (1 - t) \operatorname{sgn}(u) \exp(\operatorname{sgn}(|u| - 1) \ln 2),$$

onde,

$$\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u > 0 \\ -1 & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

Para $t \in [0, 1]$, seja A_t uma matriz de mesma estrutura bloco diagonal que A , e cujos blocos correspondentes aos autovalores reais e complexos tenham a forma,

$$(h(\lambda_j, t)) \quad \text{e} \quad h(r_j, t) \begin{pmatrix} \cos(t\varphi_j) & \sin(t\varphi_j) \\ -\sin(t\varphi_j) & \cos(t\varphi_j) \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Temos $|h(u, t)| > 1$ para todo $t \in [0, 1]$, se $|u| > 0$ e $|h(u, t)| < 1$ para todo $t \in [0, 1]$, se $|u| < 0$. Logo, a origem é um conjunto invariante isolado associado a cada A_t . Aplicando então a propriedade de homotopia do índice de Conley obtemos

$$\operatorname{Con}(\{0\}, A_1) = \operatorname{Con}(\{0\}, A_0).$$

Notemos que $A = A_1$, e para $t = 0$ segue que A_0 assume a forma bloco diagonal com o valor -2 aparecendo l vezes e 2 aparecendo $k - l$ vezes, sendo as entradas não nulas restantes iguais a $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Sejam

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} : \|x\| \leq 2 \text{ e } \|y\| \leq 2\}$$

$$L = \{z \in N : 2 \leq \|z\| \leq 1\}$$

$$B = \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$$

$$S = \{x \in V : \|x\| = 1\}.$$

É fácil ver que (N, L) é um par índice para $\{0\}$. Considere então as aplicações

$$d : (B, S) \longrightarrow (B, S) \text{ onde } d(u, v) = (u, -v)$$

$$\alpha : (B, S) \longrightarrow (N, L) \text{ onde } \alpha(x) = (x, 0).$$

Logo o seguinte diagrama é homotopicamente comutativo,

$$\begin{array}{ccc} N/L & \xrightarrow{f_{N,L}} & N/L \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ B/S & \xrightarrow{d} & B/S \end{array}$$

Daí, o diagrama em homologia

$$\begin{array}{ccc} H_*(N/L) & \xrightarrow{(f_{N,L})_*} & H_*(N/L) \\ \downarrow \alpha_* & & \downarrow \alpha_* \\ H_*(B/S) & \xrightarrow{d_*} & H_*(B/S) \end{array}$$

é também comutativo e temos então α_* e d_* isomorfismos. Logo,

$$Con_i(\{0\}, f) = (H_*(B/S), d_*) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ (Q, (-1)^l id) & \text{se } i = k. \end{cases}$$

Para obter o resultado no caso de uma aplicação linear com autovalores com multiplicidade é suficiente construir uma homotopia ligando a aplicação A com uma aplicação A' que possui pares de autovalores diferentes e então aplicar a propriedade de homotopia.

Consideremos agora o caso de uma aplicação f qualquer. O fato que também neste caso $\{0\}$ é um conjunto invariante isolado segue diretamente do caso linear e do teorema de Hartman-Grobman ([PaMe]). Seja $A = D(f(0))$. Temos $f(x) = Ax + r(x)$, onde $r(x) = \theta(\|x\|)$.

Para $\lambda \in [0, 1]$ defina a família de aplicações

$$f_\lambda(x) = Ax + \lambda r(x).$$

Fixo $\lambda \in [0, 1]$, podemos aplicar o Hartman-Grobman teorema e encontrar $\delta(\lambda) > 0$ tal que $B(\delta(\lambda)) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \delta(\lambda)\}$ é uma vizinhança isolante para f_λ , isolando $\{0\}$. Um argumento de compacidade mostra que existe $\delta > 0$ tal que $B(\delta)$ é uma vizinhança

isolante associada a f_λ para cada $\lambda \in [0, 1]$. Podemos fazer δ suficientemente pequeno para assegurar que $Inv(B(\delta), f) = \{0\}$. Como $H(x, \lambda) = f_\lambda$ define uma homotopia entre A e f e pelo caso anterior sabemos calcular $Con(\{0\}, A)$ temos que a tese segue agora da invariância homotópica do índice de Conley para o caso linear provado acima. $\square$

Exemplo 4.2.8. Considere agora a aplicação ferradura de Smale F dada no capítulo 1. Queremos determinar o índice cohomológico de Conley para $Inv(N) = \Lambda$, sendo $N = Q$. Se tomarmos $L = Q \setminus (H_0 \cup H_1)$, o par (N, L) é um par índice para F .

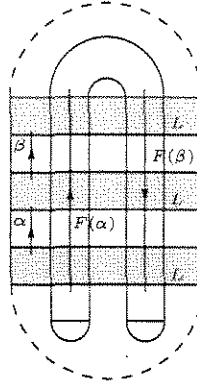


Figura 4.2: Par índice para a ferradura de Smale

Temos que

$$H^i(N, L) = \begin{cases} Q \times Q & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo para o cálculo do índice de Conley, basta considerar $i = 1$. Na figura (4.2), α e β denotam representantes dos geradores de $H_1(N, L)$. Temos que a aplicação induzida pode ser representada pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como $(f_{N,L}^*(H^1(N, L)))^2$ é a matriz nula, temos $gker(f_{N,L}^*(H^1(N, L))) = H^1(N, L)$. Assim

$$\frac{H^1(N, L)}{gker(f_{N,L}^*(H^1(N, L)))} \cong 0.$$

Portanto a aplicação induzida ao nível 1 é também nula, ou seja, $Con^*(Inv(N))$ é trivial.

Referências Bibliográficas

- [CoEa] CONLEY, C. ; EASTON, R., *Isolated invariante sets and isolating blocks*, Trans. Amer. Math. Soc. **158** (1971) 35-61.
- [De] DEVANEY, R. L., *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [Fr] FRANKS, J., *Homology and dynamical systems*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 49, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1982.
- [FrRi] FRANKS, J. ; RICHESON, D., *Shift equivalence and the Conley index*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 7, 3305-3322.
- [Ir] IRWIN, M. C., *Smooth Dynamical Systems*, Academic Press, 1980.
- [KiRo] KIM, K. H. ; ROUSH, F. W., *Williams's conjecture is false for reducible subshifts*, J Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 1, 213-215.
- [MiMr] MISCHAIKOW, K. ; MROZEK, M., *Conley index theory*,
<http://www.math.gatech.edu/~mischaik/papers/paperlist.html>.
- [Mr] MROZEK, M., *Leray functor and cohomological Conley index for discrete dynamical systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), no. 1, 149-178.
- [PaMe] PALIS, J. ; MELO, W., *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Projeto Euclides, Rio de Janeiro.
- [Ri] RIBEIRO, P. C. E., *O índice de Conley discreto e o par de matrizes de conexão*, Dissertação de Mestrado, ICMC, USP-SC, 1999.

- [RoSa] ROBBIN, J. W. ; SALAMON, D., *Dynamical systems, shape theory and the Conley index*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **8***, (1988), 375-393.
- [Sh] SHUB, M., *Global Stability of Dynamical Systems*, Springer, Verlag, New York, 1987.
- [St] STEPHEN, W. , *Introductions to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer, Verlag, New York, 1990.
- [Sz] SZYMCZAK, A., *The Conley index for discrete semidynamical systems*, Topology Appl. **66** (1995), no. 3, 215-240.
- [Wi1] WILLIAMS, R. F., *Classification of one dimensional attractors*, *Global Analysis*, (Proc. Sypos. Pure Math., Vol XIV, Berkeley, Calif, 1968)(1970)341-361.
- [Wi2] ———, *Classification of subshifts of finite type*, Ann. of Math. **98**, (1973), 120-153; Errata **99**, (1974), 380-381.

Request: hpnp-8107 from rogerioc@athenas

Options:

Title: 8107-1

Mon Apr 29 16:56:41 EST 2002

***** Option Summary *****
(See "man net_ljx000" for details)

auto (default), postscript, pcl, hpgl2, hpgl2_p, raw, relay
manual, tray1, tray2, tray3, bin1, bin2, mtype<media type>
legal, letter, exec, ledger/11x17 A3, A4, A5, A6, B5-ISO
com10, C5, DL, monarc PostCardS, PostCard/PostCardD
B4-JIS, B5-JIS, B6-JIS topaz, yb, nb, job, nojob
dpi#, fuser<fusing mode> simplex, duplex, hduplex
2up, 2+, 4up(pcl-hpux only), portrait, landscape, quality<mode>
srbb#, srb#, sre#, tondensity<mode>, econo# (#=on/off)
For PS : wnum#, wmstr<string>, ascii, ps1, ps2
For PCL : text, ln66, stye#, italic, condensed, condensed i
c, 10, 12, lpi# height#, weight#, medium, bold, ebold, type#