Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Movimento Browniano com respeito a métricas Riemannianas dependendo do tempo e aplicações ao fluxo de curvatura média

por

Claudia Luque Justo

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Diego Sebastian Ledesma

Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Movimento Browniano
com respeito a métricas Riemannianas dependendo do tempo
e aplicações ao Fluxo de curvatura média

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Claudia Luque Justo** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de abril de 2011

Prof. Dr. Diego Sebastian Ledesma
Orientador

Banca Examinadora:

1 Prof. Dr. Diego Sebastian Ledesma
2 Prof. Dr. Edson Alberto Coayla Teran
3 Prof. Dr. Pedro Jose Catuogno

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Luque Justo, Claudia

L974m Movimento browniano com respeito a métricas riemannianas dependendo do tempo e aplicações ao fluxo de curvatura média/Claudia Luque Justo-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : Diego Sebastian Ledesma.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Movimentos brownianos. 2.Semimartingala (Matemática). 3.Variedades riemanianas. I. Ledesma, Diego Sebastian. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Brownian motion with respect to riemannian metrics depending on time and applications to the mean curvature flow

Palavras-chave em inglês: 1.Brownian movements. 2.Semimartingala (Matemática). 3.Riemannian manifolds.

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Diego Sebastian Ledesma (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Edson Alberto Coayla Teran (UFBA)
Prof. Dr. Pedro Jose Catuogno (IMECC - UNICAMP)

Data da defesa: 25/04/2011

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 25 de abril de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA

Edson Alberto Coayla Teran

Prof. (a). Dr (a). EDSON ALBERTO COAYLA TERAN

Prof. (a). Dr (a). PEDRO JOSE CATUOGNO

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades, mostrar o caminho nas horas incertas e me suprir em todas as minhas necessidades.

À meu orientador e amigo Prof. Dr. Diego Sebastian Ledesma pela confiança em mim depositada, por sua dedicação, paciência e pelos inumeráveis conhecimentos que me proporcionou durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ào Prof. Dr. Pedro José Catuogno, pela pronta disponibilidade sempre que precisei de ajuda, e por seu olhar atencioso à minha trajetória acadêmica.

À minha família, em especial aos meus pais, Claudio Luque e Pastora Justo, por sempre acreditarem em mim. Estudar fora é difícil e a saudade é grande mas o amor, o apoio e o carinho da minha família superaram as distâncias.

À Capes, pelo apoio financeiro sem o qual não haveria condições de executá-lo.

Aos funcionários da Secretaria de Pós Graduação do IMECC-UNICAMP pela gentileza e atenção diariamente prestados.

À todos meus professores da Graduação e Pós Graduação, em especial ao Prof. Walter Torres e ao Prof. Dr. Richard Mamani, por suas imensas contribuições em minha formação professional.

À meus amigos do predinho, que me fizeram sentir em casa e me ajudaram intelectual e emocionalmente durante a realização deste trabalho.

À todos que contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado, meus sinceros agradecimentos.

Dedico este trabalho ao meus pais, Claudio e Pastora, que iluminaram o caminho da miha vida e, a meus irmãos, Carlos e Maria, que me incentivaram a ser melhor cada dia.

Resumo

Neste trabalho estudamos o movimento Browniano, sobre uma variedade Riemanniana munida de métricas que variam com respeito ao tempo. Tratamos brevemente os conceitos de semimartingale, equações diferenciáveis estocásticas e processos de difusão sobre variedades diferenciáveis. Apresentamos a construção clássica do movimento Browniano sobre uma variedade Riemanniana (M, g). Finalmente, munindo à variedade com uma família de métricas $\{g(t)\}_{t\in[0,T]}$ que variam com respeito ao tempo, damos duas construções do movimento Browniano sobre a variedade Riemanniana $(M, g(t))$, para cada $t \in [0, T]$ (denotamos a este processo como o $g(t)$-movimento Browniano). Consideramos o fluxo de curvatura média sobre uma hipersuperficie compacta, e damos uma estimativa para o tempo de explosão de um processo definido a partir do $g(t)$-movimento Browniano. Definimos o transporte paralelo amortiguado ao longo do $g(t)$-movimento Browniano e damos condições para que este seja de fato uma isometria.

Abstract

We study the Brownian motion on a Riemannian manifold equipped with a family of metrics that vary with respect to time. We treat briefly the concepts of semimartingale, stochastic differential equations and diffusion processes on manifolds. We present the classical construction of Brownian motion on an Riemannian manifold (M, g). Finally, equipping the variety with a family of metrics $\{g(t)\}_{t\in[0,T]}$ that vary with respect to time, we give two constructions of Brownian motion on the Riemannian manifold $(M, g(t))$ for each $t \in [0, T]$ (we denote this process as the $g(t)$-Brownian motion). We consider the mean curvature flow on a compact hypersurface, and give an estimate for the time of explosion of the $g(t)$-Brownian motion. We define the Damped parallel transport along of the $g(t)$-Brownian motion and we give conditions so that in fact is an isometry.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estamos interessados em estudar os processos estocásticos sobre uma variedade Riemanniana M, munida de uma $C^{1,2}$-família de métricas $\{g(t)\}_{t\in[0,T]}$. Em particular, nosso objetivo principal é o estudo do movimento Browniano sobre a variedade Riemanniana $(M, g(t))$, para cada $t \in [0, T]$. Chamamos a este processo como o $g(t)$-movimento Browniano. No final do trabalho, damos duas construções do $g(t)$-movimento Browniano.

A construção e as propriedades do movimento Browniano no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, são o ponto de partida fundamental para o desenvolvimento do cálculo estocástico em $\mathbb{R}^n$. Além disso, o movimento Browniano também fornece uma visão probabilística nos problemas que envolvem o operador Laplaciano $\Delta_{\mathbb{R}^n}$ em $\mathbb{R}^n$, incluindo problemas de fronteira de Dirichlet. Então, é natural esperar que o movimento Browniano exiba a mesma importância no contexto das variedades Riemannianas $(M, g(t))$, com seus operadores de Beltrami $\Delta_{g(t)}$ associados.

Este trabalho é formado por três capítulos que são descritos a seguir. No primeiro capítulo, damos uma breve introdução à teoria do cálculo estocástico sobre variedades diferenciáveis, destacando a noção do movimento Browniano no espaço euclidiano, a fórmula de Itô para a integral de Stratonovich e às equações diferenciáveis estocásticas sobre variedades, que são uma generalização natural das equações diferenciáveis estocásticas no espaço euclidiano. Por último, estudamos os processos de difusão sobre variedades. As principais referencias para o conteúdo deste capítulo, são N. Ikeda e S. Watanabe [10], E.P. Hsu [2], M. Émery [8] e K.D. Elworthy [5]. No segundo capítulo, apresentamos duas construções do movimento Browniano sobre uma variedade Riemanniana (M, g) munida de uma métrica fixa g. A primeira construção do movimento Browniano X_t sobre (M, g), consiste en definir seu levantamento horizontal U_t e seu "anti-desenvolvimento"estocástico W_t o que nos leva a construir uma equação diferencial estocástica horizontal sobre o fibrado de bases ortonormais $\mathcal{O}(M)$ dada por;

$$dU_t = H_i(U_t) \circ dW_t.$$

Resulta que X_t será um movimento Browniano sobre (M, g) se, e somente se seu anti-desenvolvimento W_t é movimento Browniano euclidiano. A segunda construção será feita via um mergulho isométrico de M no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Dizemos que, X_t é um movimento Browniano sobre (M, g) se ele é uma difusão gerada pelo operador $(1/2)\sum_{\alpha=1}^{l} P_\alpha^2 = (1/2)\Delta_M$, onde P_α denota a α-ésima projeção ortogonal do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ no subespaço $T_xM \subseteq \mathbb{R}^n$. Isto da uma relação entre certos operadores elípticos de segundo ordem e processos de Itô.

No capítulo três encontra-se o objetivo principal deste trabalho, o estudo do $g(t)$-movimento Browniano e uma aplicação ao fluxo de curvatura média. Apresentamos a noção de transporte paralelo ao longo deste processo e estabelecemos uma generalização do transporte paralelo amortiguado ao longo de um $g(t)$-movimento Browniano, nossa referencia é o trabalho de A.K. Coulibaly [1]. Por último, consideramos o fluxo de curvatura média denotada por $M_t = F(t, M)$ de uma hipersuperficie $M = M_0$. Caracterizamos dito fluxo de curvatura média em termos do $g(t)$-movimento Browniano e damos uma estimação do tempo de explosão deste processo em termos do diâmetro da hipersuperficie inicial M_0.

Capítulo 1

Cálculo Estocástico em Variedades Diferenciáveis

Neste capítulo, damos uma introdução à teoria do cálculo estocástico sobre variedades diferenciáveis. Começamos com uma breve revisão do cálculo estocástico no contexto euclidiano. Destacando a noção do movimento Browniano, a fórmula de Itô para a integral de Stratonovich e as equações diferenciáveis estocásticas (do tipo: Itô e Stratonovich) no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Depois, tratamos às equações diferenciáveis estocásticas sobre variedades, que serão uma generalização natural das equações diferenciáveis estocásticas no espaço euclidiano. Esta generalização será obtida via mergulho da variedade no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Assim, mediante este mergulho podemos estender os campos de vetores (dados na equação diferencial estocástica sobre a variedade) no espaço ambiente isto é, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Obtendo assim, uma equação estendida no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, onde existe a solução e é única.

Por último, damos os conceitos básicos de processo de difusão em variedades. Boas referencias para este capítulo, principalmente para as demonstrações omitidas ao longo do mesmo, são N. Ikeda e S. Watanabe [10], E.P. Hsu [2], M. Émery [8] e K.D. Elworthy [5].

1.1 Movimento Browniano

Começamos esta seção introduzindo algumas noções básicas da teoria do cálculo estocástico no espaço euclidiano. Para mais informação, ver N. Ikeda e S. Watanabe [10],

M. Émery [8] e K.D. Elworthy [5].

Definição 1.1. *Um processo estocástico em* $\mathbb{R}^n$ *é uma família de variáveis aleatórias* $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ *a valores em* $\mathbb{R}^n$*, definida sobre um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$*. Dizemos que o processo estocástico é contínuo, se para cada* $\omega \in \Omega$ *o caminho* $X(\cdot, \omega) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *é contínuo.*

Uma filtração $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ é uma família de sub σ-algebras $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$ tais que $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$ quando $s < t$. Um processo estocástico $X = \{X_t\}_{t\in[0,T]}$ é dito adaptado em relação à filtração $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ se para todo $t \in [0, T]$ tem-se que a variável aleatória X_t é $\mathfrak{F}_t$-mensurável.

Denotamos por $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ o espaço de probabilidade filtrado.

Definição 1.2. *Um processo estocástico* $X = \{X_t\}_{t\in[0,T]}$ *é uma martingale relativa ao espaço de probabilidade filtrado* $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$*, se satisfaz as seguintes condições:*

(1) *O processo* X *é adaptado,*

(2) $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$*, para todo* $t \in [0, T]$*,*

(3) $\mathbb{E}(X_s|\mathfrak{F}_t) = X_t$ *para todo* $s \geq t$*.*

Outro conceito que será muito utilizado neste trabalho é o conceito de martingale local. Dizemos que um processo X é uma martingale local se existe uma sequência de tempos de parada $\tau_n \uparrow \infty$ tal que, para todo n, X^{τ_n} é uma martingale. Denotamos por $(\Omega, \mathfrak{F}_*, \mathbb{P})$ o espaço de probabilidade filtrado que satisfaz as condições usuais e sobre este espaço damos a noção de semimartingale.

Definição 1.3. *Um processo* $Y = \{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ *a valores em* $\mathbb{R}^n$*, é uma* $\mathfrak{F}_*$*-semimartingale (isto é, adaptado à filtração* $\mathfrak{F}_*$*) se admite uma descomposição do tipo* $Y = X + A$*. Onde,* X *é uma* $\mathfrak{F}_*$*-martingale local continua a valores em* $\mathbb{R}^n$ *e* A *é um processo* $\mathfrak{F}_*$*-adaptado de variação finita tal que* $A_0 = 0$*.*

As semimartingales são uma ferramenta muito útil pois muitos processos que podem ser definidos explicitamente são semimartingales (por exemplo, as difusões que serão tratadas na última seção deste capítulo). O espaço de semimartingales é o melhor cenário para a realização do cálculo estocástico. A partir de agora, enfocaremos nosso estudo ao movimento Browniano que é um processo especial dentre os demais processos estocásticos.

Definição 1.4. *Um processo* W *a valores em* $\mathbb{R}$*, é um movimento Browniano se:*

(1) $W_t = 0$, *para* $t = 0$.

(2) *Para todo* $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k$, *as variáveis aleatórias* $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ *são independentes e normalmente distribuídas com:*

$$\mathbb{E}[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}] = 0 \quad e \quad \mathbb{E}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] = t_i - t_{i-1}.$$

Generalizando isto para o caso n dimensional, dizemos que um processo $W = (W^1, ..., W^n)$ é um movimento Browniano em $\mathbb{R}^n$, se cada W^i constitui um movimento Browniano em $\mathbb{R}$ e as σ-algebras geradas por cada W^i são independentes.

No seguinte teorema nos da uma caracterização do movimento Browniano em termos de martingale e sua variação quadrática.

Proposição 1.5. $\{$*Caracterização de Levy*$\}$.
Seja $X = (X^1, ..., X^n)$ *um processo estocástico a valores em* $\mathbb{R}^n$, *contínuo e* $\mathfrak{F}_t$*-adaptado com* $X_{\{t=0\}} = 0$. *Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

i) *O processo* $X = (X^1, ..., X^n)$ *é um movimento Browniano em* $\mathbb{R}^n$;

ii) *O processo* X *é uma martingale local contínuo com* $\langle X^i, X^j \rangle = \delta_{i,j} t$.

1.2 Equações Diferenciais Estocásticas sobre $\mathbb{R}^n$

Nesta seção tratamos as equações diferenciáveis estocásticas do tipo Itô sobre um espaço euclidiano com coeficientes localmente Lipschitz dados por semimartingales continuas. Damos alguns resultados úteis para nosso trabalho, muitos sem demostrar. As demonstrações omitidas podem ser vistas no libro de E.P. Hsu [2].

O objetivo desta seção, é estudar a existência e unicidade de soluções para equações diferencias estocásticas do tipo Itô. Começamos, formulando o tipo de equações sobre $\mathbb{R}^n$ que queremos resolver, onde entraram em jogo: uma matriz de coeficientes de difusão σ e uma semimartingale Z a valores em $\mathbb{R}^n$. Mais especificamente;

* A matriz de coeficientes de difusão $\sigma = \{\sigma^i_\alpha\} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}(n, l)$ (onde $\mathcal{M}(n, l)$ denota as matrices $n \times l$ dimensionais em $\mathbb{R}$) será assumida localmente Lipschitz, isto é, existem constantes R e $C(R)$ em $\mathbb{R}$, onde $C(R)$ depende de R, tais que

  $$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C(R)|x - y|,$$

  para todo $x, y \in B(R)$, onde $B(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$. Dizemos que σ é globalmente Lipschitz se $C(R)$ pode ser escolhido independente de R.

* O processo $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ é uma $\mathfrak{F}_*$-semimartingale a valores em $\mathbb{R}^l$, definida sobre o espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathfrak{F}_*, \mathbb{P})$. Mas, Z é escrita por definição como uma suma $Z = M + A$, onde M é uma $\mathfrak{F}_*$-martingale local e A é um $\mathfrak{F}_*$-processo adaptado de variação limitada tal que $A_0 = 0$.

Definição 1.6. *Seja τ um $\mathfrak{F}_*$-tempo de parada. Dadas, uma semimartingale Z a valores em $\mathbb{R}^l$, uma variável aleatória $\mathfrak{F}_0$-mensurável, X_0 a valores em $\mathbb{R}^l$ e uma função σ como a descrita acima. Dizemos que uma semimartingale $X = \{X_t,\, t \in [0, \tau)\}$ resolve a seguinte equação diferencial estocástica do tipo Itô;*

$$\begin{cases} dX_t &= \sigma(X_t)\, dZ_t, \\ X_{\{t=0\}} &= X_0; \end{cases} \tag{1.1}$$

atê o tempo de parada τ, se

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\, dZ_s, \quad 0 \leq t < \tau. \tag{1.2}$$

Denotamos à equação (1.1) por $\mathrm{EDE}(\sigma, Z, X_0)$.

Observamos que, se $Z_t = (W_t,\, t)$ onde W_t é o movimento Browniano euclidiano de dimensão $(l-1)$ e $\sigma = (\sigma_1,\, b)$ com $\sigma_1 : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}(n, l-1)$ e $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, então a equação (1.1) toma uma forma mais familiar:

$$dX_t = \sigma_1(X_t)\, dW_t + b(X_t)\, dt$$

Observação 1.7. *Seja X é um processo que resolve uma* $\mathrm{EDE}(\sigma, Z, X_0)$. *Então se aplicamos a fórmula de Itô para $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ temos que:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \partial_{x^i} f(X_s)\, \sigma_\alpha^i(X_s)\, dZ_s^\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{x^i}\partial_{x^j} f(X_s)\, \sigma_\alpha^i(X_s)\, \sigma_\beta^j(X_s)\, d\left\langle Z^\alpha, Z^\beta \right\rangle_s$$

Com efeito, observamos que por (1.2) temos que $X_t^i = \sigma_\alpha^i(X_t)\, dZ_t^i$ e pela fórmula de Itô, tem-se

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \partial_{x^i} f(X_s)\, dX_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{x^i}\partial_{x^j} f(X_s)\, d\left\langle dX^i, dX^j \right\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t \partial_{x^i} f(X_s)\, \sigma_\alpha^i(X_s)\, dZ_s^\alpha + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{x^i}\partial_{x^j} f(X_s)\, \sigma_\alpha^i(X_s)\, \sigma_\beta^j(X_s)\, d\left\langle Z^\alpha, Z^\beta \right\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t \partial_{x^i} f(X_s)\, \sigma_\alpha^i(X_s)\, dM_s^\alpha + \int_0^t \partial_{x^i} f(X_s)\, \sigma_\alpha^i(X_s)\, dA_s^\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{x^i}\partial_{x^j} f(X_s)\, \sigma_\alpha^i(X_s)\, \sigma_\beta^j(X_s)\, d\left\langle M^\alpha, M^\beta \right\rangle_s, \end{aligned}$$

onde a última igualdade provém do fato que $Z_t = M_t + A_t$ e $\langle Z^\alpha, Z^\beta \rangle = \langle M^\alpha, M^\beta \rangle$, pois o processo A tem variação limitada.

Voltando à equação diferencial estocástica dada em (1.2), consideramos o caso sem explosão.

Teorema 1.8. *Suponhamos que σ é globalmente Lipschitz e X_0 é quadrado integrável, então a equação diferencial estocástica dada em (1.2) tem uma única solução $X = \{X_t,\, t \geq 0\}$.*

A partir deste teorema, temos que a solução X está bem definida para todo tempo, pois temos assumido que a matriz de coeficientes σ é globalmente Lipschitz, o qual implica que a solução pode crescer no máximo linearmente. Quando a matriz σ é somente localmente Lipschitz pode-se dar a possibilidade de explosão. Por exemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} X_t &= X_t^2 \\ X_{\{t=0\}} &= 1 \end{cases}$$

tem como solução $X_t = 1/1 - t$, a qual explota no tempo $t = 1$.

Em vista de aplicações posteriores, tomamos um ponto de vista mais geral e definimos o tempo de explosão de um caminho em um espaço métrico localmente compacto M.

Definição 1.9. *Seja M um espaço métrico localmente compacto e $\widehat{M} = M \cup \{\partial_M\}$ sua compactificação a um ponto. Um caminho x a valores em M com tempo de explosão $e = e(x) > 0$ é uma aplicação contínua $x\colon [0, \infty) \to \widehat{M}$ tal que $x_t \in M$ para $0 \leq t < e$ e $x_t = \partial_M$ para todo $t \geq e$, se $e < \infty$.*
Denotamos por $W(M)$, o espaço dos caminhos que tomam valores em M com tempo de explosão $e(x)$ e chamamos a ele como o espaço de caminhos sobre M.

Agora, entalecemos alguns fatos básicos sobre os tempos de explosão. Ressaltamos que uma exaustão de um espaço métrico localmente compacto M é uma sequência de conjuntos abertos relativamente compactos $\{O_N\}$ tais que $\bar{O}_N \subseteq O_{N+1}$ e $M = \cup_{N=1}^{\infty} O_N$.

Proposição 1.10. **(1)** *Se $\{O_N\}$ é uma exaustão e τ_{O_N} o primeiro tempo de saída de O_N. Então $\tau_{O_N} \uparrow e$ quando $N \uparrow \infty$.*

(2) *Suponha que $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ é uma métrica em M com a propriedade que cada conjunto fechado e limitado, é compacto. Fixamos um ponto o em M. Seja τ_R o primeiro tempo de saída da bola $B(R) = \{x \in M : d(x, o) \leq R\}$. Então $\tau_R \uparrow e$ quando $N \uparrow \infty$.*

Usaremos o item (2) da proposição anterior nas duas situações dadas a continuação: (i) M é variedade Riemanniana completa e d é uma função distancia Riemanniana; (ii) M é mergulhada como uma subvariedade fechada em outra variedade Riemanniana e d é a métrica Riemanniana do espaço ambiente. Seja $\mathfrak{B}_t = \mathfrak{B}_t(W(M))$ a σ-algebra gerada pelas aplicações coordenadas até o tempo t. Então temos um espaço mensurável filtrado $(W(M), \mathfrak{B}_*)$ onde o tempo de vida $e : W(M) \to (0, \infty]$ é um $\mathfrak{B}_*$-tempo de parada.

Sejam τ um $\mathfrak{F}_*$-tempo de parada e $(\Omega, \mathfrak{F}_*, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado. Um processo contínuo, definido num intervalo $[0, \tau)$, é dito de uma $\mathfrak{F}_*$-semimartingale até τ se existe uma sequência de $\mathfrak{F}_*$-tempos de parada $\tau_n \uparrow \tau$ tal que para cada n o processo parado $X^{\tau_n} = \{X_{t\wedge\tau_n},\, t \geq 0\}$ é uma semimartingale no sentido usual.

Assim, se consideramos uma matriz σ com coeficientes localmente Lipschitz, a solução de EDE(σ, Z, X_0) é naturalmente uma semimartingale definida até um tempo de parada τ. Para ser mais precisos temos a seguinte definição;

Definição 1.11. *Uma semimartingale X até um tempo de parada τ é solução de* EDE$(\sigma,$ $Z, X_0)$ *se existe uma sequência de tempos de parada $\tau_n \uparrow \tau$ tal que para cada n o processo parado $X^{\tau_n} = \{X_{t\wedge\tau_n},\, t \geq 0\}$ é uma semimartingale no sentido usual e satisfaz;*

$$X_{t\wedge\tau_n} = X_0 + \int_0^{t\wedge\tau_n} \sigma\left(X_s\right) dZ_s, \quad t \geq 0.$$

A seguinte proposição mostra que existe uma única variável aleatória X tomando valores no espaço de caminhos $W(\mathbb{R}^n)$, a qual é solução da EDE(σ, Z, X_0) até seu tempo de explosão $e(X)$.

Proposição 1.12. *Suponhamos que são satisfeitas as seguintes condições:*

(i) *A matriz de coeficientes de difusão $\sigma = \{\sigma^i_\alpha\} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}(n, l)$ é localmente Lipschitz;*

(ii) *O processo $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ definido sobre o espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathfrak{F}_*, \mathbb{P})$, é uma $\mathfrak{F}_*$-semimartingale tomando valores em $\mathbb{R}^l$;*

(iii) *A variável aleatória X_0 é $\mathfrak{F}_0$-mensurável e toma valores em $\mathbb{R}^n$.*

Então, existe uma única variável aleatória X a valores em $W(\mathbb{R}^n)$ que é solução de EDE(σ, Z, X_0) *até seu tempo de explosão $e(X)$.*

1.3 Formulação de Stratonovich para uma Equação Diferencial Estocástica

Nesta seção primeiro fazemos a comparação das equações diferenciais estocásticas do tipo Itô com as do tipo de Stratonovich, esta comparação é feita a fim de utilizar o teorema de existência de soluções para uma EDE(σ, Z, X_0) do tipo Itô sobre o espaço euclidiano, que foi tratada na seção anterior. A formulação obtida para equações do tipo Stratonovich è a que melhor se adapte para aplicações geométricas, pois esse tipo de equações se transformam naturalmente sobre difeomorfismos.

Como mencionamos acima, para todas as aplicações geométricas realizadas neste trabalho, formulamos as equações diferenciais estocásticas do tipo Stratonovich, pois a vantagem desta formulação é que satisfaz o teorema fundamental do calculo. Assim o cálculo estocástico nesta formulação se torna mais conveniente quando estudamos às equações diferencias estocásticas sobre variedades.

Sejam V_α, com $\alpha = 1, ..., l$ campos de vetores diferenciáveis sobre $\mathbb{R}^n$, onde cada um deles pode ser considerado como uma função $V_\alpha \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Assim $V = (V_1, ..., V_l)$ é uma função a valores em $\mathcal{M}(n, l, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$ e para Z e X_0 como antes, consideramos a equação diferencial estocástica de Stratonovich;

$$X_t = X_0 + \int_0^t V(X_s) \circ dZ_s$$

onde a integral estocástica esta dada no sentido de Stratonovich, equivalentemente podemos reescrever esta equação da seguinte forma;

$$X_t = X_0 + \sum_{\alpha=1}^{l} \int_0^t V_\alpha(X_s) \circ dZ_s^\alpha$$

onde se enfatiza o fato que V é um conjunto de l campos vetoriais.

Proposição 1.13. *A fórmula de Itô para integrais de Stratonovich se describe da seguinte forma: Se X é solução da equação,*

$$dX_t = V_\alpha(X_t) \circ dZ_t^\alpha$$

Então, para $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ temos;

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \partial_{x^i} f(X_s) \, V_\alpha^i(X_s) \circ dZ_s^\alpha \\ &= f(X_0) + \int_0^t V_\alpha(f)(X_s) \circ dZ_s^\alpha, \end{aligned}$$

onde $0 \leq t < e(X)$ *e* $V_\alpha(f)$ *denota a derivada na direção* V_α *da função* f. *A fórmula de conversão da integral Itô-Stratonovich, é dada da seguinte maneira:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_\alpha(X_s)\, dZ_s^\alpha + \frac{1}{2}\int_0^t \nabla_{V_\beta} V_\alpha(X_s)\, d\left\langle Z^\alpha, Z^\beta \right\rangle_s, \quad 0 \leq t < e(X).$$

Onde $\nabla_{V_\beta} V_\alpha$ *denota a derivada covariante do campo de vetores* V_α *na direção do campo de vetores* V_β.

Assim, a partir desta fórmula de conversão da integral Itô-Stratonovich, podemos definir a solução de uma equação diferencial estocástica de Stratonovich como segue na seguinte definição.

Definição 1.14. *Dados* Z *uma semimartingale com valores em* $\mathbb{R}^l$, X_0 *uma variável aleatória* $\mathfrak{F}_0$*-mensurável e um conjunto de campos vetoriais diferenciáveis* $V = (V_1, ..., V_l)$. *Dizemos que uma semimartingale* X *é solução de uma equação diferencial estocástica de Stratonovich, dada por:*

$$\begin{cases} dX_t &= V_\alpha(X_t) \circ dZ_t^\alpha, \\ X_{\{t=0\}} &= X_0 \end{cases}$$

até o tempo de parada τ, *se*

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_\alpha(X_s) \circ dZ_s^\alpha, \quad 0 \leq t < \tau.$$

1.4 Equações Diferenciais Estocásticas sobre variedades diferenciáveis

Nesta seção, discutimos a noção de semimartingales a valores em variedades diferenciáveis e, a existência e unicidade para EDE(σ, Z, X_0) sobre variedades.

Definição 1.15. *Sejam* M *uma variedade diferenciável,* $(\Omega, \mathfrak{F}_*, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade filtrado e* τ *um* $\mathfrak{F}_*$*-tempo de parada. Dizemos que um processo contínuo* X *tomando valores em* M *e definido sobre* $[0, \tau)$ *é uma semimartingale a valores em* M *se* $f(X)$ *é uma semimartingale a valores em* $\mathbb{R}$, *sobre* $[0, \tau)$ *e para cada* $f \in C^\infty(M)$.

Analogamente como no espaço euclidiano, uma equação diferencial estocástica de Stratonovich sobre uma variedade diferenciável é definida por l campos vetoriais $V_1, ..., V_l$ sobre M, uma semimartingale Z a valores em $\mathbb{R}^l$ e uma variável aleatória $X_0 \in \mathfrak{F}_0$ tomando valores em M e que serve como valor inicial da solução. Assim ela é dada por:

$$dX_t = V_\alpha(X_t) \circ dZ_t^\alpha$$

Denotamos a esta equação por $\mathrm{EDE}(V_1, ..., V_l; Z, X_0)$.

Definição 1.16. *Uma semimartingale X a valores em M, definida até um tempo de parada τ é uma solução da equação* $\mathrm{EDE}(V_1, ..., V_l; Z, X_0)$ *até τ, se para todo $f \in C^\infty(M)$ tem-se:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t V_\alpha(f(X_s)) \circ dZ_s^\alpha, \quad 0 \le t < \tau. \tag{1.3}$$

Mais para frente vemos que, se M é mergulhada no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e a equação dada em (1.3) se satisfaz para as funções coordenadas $f_1, ..., f_l$, então teremos que (1.3) se cumpre para qualquer função diferenciável.

Como foi dito na introdução da seção anterior, uma vantagem da formulação via Stratonovich é que as equações diferenciáveis estocásticas de Stratonovich definidas sobre a variedade M se transformam consistentemente por difeomorfismos entre variedades. Se $\Gamma(TM)$ denota o espaço de campos de vetores diferenciáveis em uma variedade M (O espaço de seções do fibrado tangente TM). Um difeomorfismo $\phi : M \to N$ entre duas variedades induz uma aplicação $\phi_* : \Gamma(TM) \to \Gamma(TN)$ entre campos de vetores nas variedades respectivas pela regra

$$(\phi_* V) f(y) = V(f \circ \phi)(x), \quad y = \phi(x) \quad f \in C^\infty(N).$$

Ou equivalentemente, se V é um vetor tangente a uma curva C sobre a variedade M, $\phi_* V$ é o vetor tangente à curva $\phi \circ C$ sobre a variedade N.

Proposição 1.17. *Suponhamos que $\phi : M \to N$ é um difeomorfismo entre as variedades M e N, e X uma semimartingale a valores em M que é solução de* $\mathrm{EDE}(V_1, ..., V_l; Z, X_0)$. *Então $\phi(X)$ é uma solução de* $\mathrm{EDE}(\phi_* V_1, ..., \phi_* V_l; Z, \phi(X_0))$ *sobre a variedade N.*

Demonstração. Com efeito, como X é uma solução da $\mathrm{EDE}(V_1, ..., V_l; Z, X_0)$, então para todo $f \in C^\infty(M)$ tem-se:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t V_\alpha(f(X_s)) \circ dZ_s^\alpha.$$

Denotamos por $Y = \phi(X)$ e seja $\varphi \in C^\infty(N)$. Se $f = \varphi \circ \phi \in C^\infty(M)$ e utilizando o fato que $V_\alpha(\varphi \circ \phi)(X_s) = (\phi_* V_\alpha)\varphi(Y_s)$ obtemos que;

$$\begin{aligned}
\varphi(Y_t) &= \varphi(\phi(X_t)) \\
&= \varphi(\phi(X_0)) + \int_0^t V_\alpha(\varphi \circ \phi)(X_s) \circ dZ_s^\alpha \\
&= \varphi(Y_0) + \int_0^t (\phi_* V_\alpha)\varphi(Y_s) \circ dZ_s^\alpha.
\end{aligned}$$

Por tanto, $Y = \phi(X)$ é uma solução de $\mathrm{EDE}(\phi_* V_1, ..., \phi_* V_l; Z, \phi(X_0))$ em N. □

O nosso objetivo é mostrar que a EDE($V_1, ..., V_l; Z, X_0$), tem uma única solução até seu tempo de explosão. A nossa estratégia será reduzir esta equação a uma equação sobre o espaço euclidiano, isto será feito da mesma maneira como no teorema do mergulho de Whitney, como enunciamos a continuação.

Teorema 1.18. {*Teorema do mergulho de Whitney*}
Seja M é uma variedade diferenciável. Então existe um mergulho $i\colon M \to \mathbb{R}^n$ para algum n suficientemente grande, tal que a imagem $i(M)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$.

Assim, podemos ver a M como uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^n$ para n suficientemente grande e identificar M com sua imagem $i(M)$. Logo, um ponto $x \in M$ terá n-funções coordenadas $f^i(x) = x^i$ os quais servem como conjunto natural de funções teste para a fórmula de Itô em M.

Proposição 1.19. *Seja M uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^n$, $f^1, ..., f^n$ as funções coordenadas e X um processo contínuo a valores em M. Então se verificam os seguintes items:*

(i) *O processo X é uma semimartingale sobre M se, e somente se X é uma semimartingale a valores em $\mathbb{R}^n$ ou equivalentemente se, e somente se $f^i(X)$ é uma semimartingale a valores em $\mathbb{R}$, para cada $i = 1, ..., n$.*

(ii) *O processo X é uma solução de* EDE($V_1, ..., V_l; Z, X_0$) *até um tempo de parada σ se, e somente se para cada $i = 1, ..., n$ tem-se que:*

$$f^i\left(X_t\right) = f^i\left(X_0\right) + \int_0^t V_\alpha\left(f^i\left(X_s\right)\right) \circ dZ_s^\alpha, \quad 0 \le t < \sigma. \tag{1.4}$$

Demonstração. (i) Suponha que o processo X é uma semimartingale a valores em M, então por definição temos que para todo $f \in C^\infty(M)$, $f(X)$ é uma semimartingale a valores em $\mathbb{R}$. Mas cada f^i para $i = 1, ..., n$ é uma função diferenciável sobre M, então $f^i(X) = X^i$ é uma semimartingale a valores em $\mathbb{R}$. Por tanto, X é uma semimartingale a valores em $\mathbb{R}^n$.

Para a reciproca, suponha que o processo X mora em M e é uma semimartingale a valores em $\mathbb{R}^n$. Seja $f \in C^\infty(M)$, como M é uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^n$, então a função f pode ser estendida a uma função $\widetilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $f \equiv \widetilde{f}$ em M. Assim $f(X) = \widetilde{f}(X)$ é uma semimartingale a valores em $\mathbb{R}$, mas isto quer dizer que X é uma semimartingale a valores em M.

(ii) Para a volta, suponha que X é uma solução da EDE$(V_1, ..., V_l; Z, X_0)$ até um tempo de parada σ, então para cada $f \in C^\infty(M)$ se cumpre (1.3), em particular para cada $f^i \in C^\infty(M)$ temos,

$$f^i(X_t) = f^i(X_0) + \int_0^t V_\alpha(f^i(X_s)) \circ dZ_s^\alpha, \quad 0 \le t < \sigma. \tag{1.5}$$

Agora para a ida, suponha que cada $f^i \in C^\infty(M)$ com $i = 1, ..., n$, satisfaz a equação (1.4). Seja $f \in C^\infty(M)$ e $\widetilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sua extensão a $\mathbb{R}^n$, então $f(X_t) = \widetilde{f}(f^1(X_t), ..., f^n(X_t))$ e aplicando a fórmula de Itô a este processo resulta que,

$$\begin{aligned} d\{f(X_t)\} &= f_{x_i}\left(f^1(X_t), ..., f^n(X_t)\right) \circ d\left\{f^i(X_t)\right\} \\ &= f_{x_i}\left(f^1(X_t), ..., f^n(X_t)\right) \circ V_\alpha f^i(X_t) \circ dZ_t^\alpha \\ &= \left\{f_{x_i}\left(X_t^1, ..., X_t^n\right) V_\alpha f^i(X_t)\right\} \circ dZ_t^\alpha \\ &= V_\alpha f(X_t) \circ dZ_t^\alpha. \end{aligned}$$

Na ultima passagem acima utilizamos a regra da cadeia para diferenciação de funções compostas. Assim, da integral da ultima equação obtemos que o processo X que toma valores em M, é solução da EDE$(V_1, ..., V_l; Z, X_0)$ até um tempo de parada σ. □

Voltando às EDE$(V_1, ..., V_l; Z, X_0)$, fixamos um mergulho de M sobre $\mathbb{R}^n$ e consideramos M como uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^n$. Cada campo de vetores V_α pode ser visto como uma função diferenciável em M com valores em $\mathbb{R}^n$ e pode ser estendido a um campo vetorial $\widetilde{V}_\alpha$ sobre $\mathbb{R}^n$. Assim, temos que a equação dada por:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \widetilde{V}_\alpha(X_s) \circ dZ_s^\alpha \tag{1.6}$$

está no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Por tanto, tem uma única solução X, até seu tempo de explosão $e(X)$.

Proposição 1.20. *Seja X a solução da equação estendida dada em (1.6) até seu tempo de explosão $e(X)$ e $X_0 \in M$, então $X_t \in M$ para $0 \le t < e(X)$.*

Para uma prova desta proposição, o leitor pode consultar o livro de E.P. Hsu [2]. Assim, a partir do Teorema 1.18, Proposição 1.19, e a Proposição 1.20 estamos na posição de provar o resultado principal desta seção.

Teorema 1.21. *Se $\{V_1, ..., V_l\}$ são campos de vetores sobre M, Z uma semimartingale a valores em $\mathbb{R}^l$, e X_0 uma variável aleatória $\mathfrak{F}_0$-mensurável que toma valores em M. Então, existe uma única solução da* EDE$(V_1, ..., V_l; Z, X_0)$ *até um tempo de explosão $e(X)$.*

Demonstração. Seja X a solução da equação estendida EDE$(\widetilde{V}_1, ..., \widetilde{V}_k; Z, X_0)$, então pela Proposição 1.20, esta solução esta em M até seu tempo de vida e satisfaz (1.6). Mas (1.6) é uma reescrita de (1.4), então pela parte (ii) da Proposição 1.19 temos que X é solução da EDE$(V_1, ..., V_k; Z, X_0)$. Seja Y uma outra solução até um tempo τ. Logo, considerando a Y como uma semimartingale que toma valores em $\mathbb{R}^n$ temos que ela é solução da equação estendida EDE$(\widetilde{V}_1, ..., \widetilde{V}_k; Z, X_0)$ até τ. Por tanto, Y coincide com X sobre $[0, \tau)$. □

1.5 Processos de difusão

Nesta seção apresentamos um breve estudo das difusões, onde relacionamos a certos operadores elípticos de segundo ordem com certas classes de semimartingales via equações diferenciáveis estocásticas do tipo Itô. Sendo mais específicos, estudamos às semimartingales geradas por operadores diferenciáveis, elípticos de segundo ordem. Notemos que, o significado analítico de um processo de difusão pode-se obter de sua relação com os operadores elípticos de segundo ordem.

Seja L um operador diferenciável, elíptico de segundo ordem sobre uma variedade diferenciável M. Logo, para ω no espaço de caminhos de M (isto é, $\omega \in W(M)$) e para $f \in C^2(M)$, temos o processo

$$M^f(\omega)_t = f(\omega_t) - (\omega_0) - \int_0^t Lf(\omega_s)\, ds, \tag{1.7}$$

onde $t \in [0, e(\omega))$.

Definição 1.22. **(i)** *Um processo estocástico $\mathfrak{F}_*$-adaptado $X\colon \Omega \to W(M)$, definido sobre um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathfrak{F}_*, \mathbb{P})$ é dito um processo de difusão gerado pelo operador L (ou simplesmente uma L-difusão), se X é uma $\mathfrak{F}_*$-semimartingale a valores em M, até seu tempo de explosão $e(X)$ e*

$$M^f(X)_t = f(X_t) - (X_0) - \int_0^t Lf(X_s)\, ds, \quad 0 \le t < e(X),$$

é uma $\mathfrak{F}_*$-martingale local para todo $f \in C^\infty(M)$

(ii) *Uma medida de probabilidade μ sobre o espaço padrão filtrado $(W(M), \mathfrak{B}(W(M))_*)$ é dita a medida de difusão gerada pelo operador L (ou simplesmente uma L-medida de difusão) se*

$$M^f(w)_t = f(w_t) - (w_0) - \int_0^t Lf(w_s)\, ds, \quad 0 \le t < e(w),$$

é uma $\mathfrak{B}(W(M))_*$-martingale local para cada $f \in C^\infty(M)$, em relação à medida μ.

Notemos que para um operador diferenciável, elíptico de segundo ordem L, define uma L-difusão e uma L-medida de difusão. Se X é uma L-difusão, então sua lei de probabilidade $\mu^X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ é uma L-medida de difusão; reciprocamente, se denotamos por μ a L-medida de difusão no espaço $W(M)$ que é gerada pelo operador L, então seus correspondentes processos coordenados $X(\omega)_t = \omega_t$ sobre $(W(M), \mathfrak{B}(W(M))_*, \mu)$ são L-difusões.

Em coordenadas locais sobre uma variedade M, o operador L tem a seguinte forma:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{d} a^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^{d} b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.8}$$

onde $a = \{a^{ij}\} \colon U \to \mathcal{L}_+(d)$ e $b = \{b^i\} \colon U \to \mathbb{R}^d$ são funções diferenciáveis. Denotamos por $\mathcal{L}_+(l)$ o espaço de matrices simétricas, definidas positivas de ordem $l \times l$ e $d = \dim(M)$. Restringindo nossa atenção para o caso $M = \mathbb{R}^n$ cuja base canônica é dada por $\{e_1, ..., e_n\}$ e supondo que X é solução da equação diferencial estocástica;

$$dX_t^i = \sigma_i^j(X_t) dB_t^i + b^i(X_t) dt$$

onde $B_t = (B_t^1, ..., B_t^n)$ é um movimento Browniano n-dimensional. Aplicando a fórmula de Itô para $f \in C^2(M)$ temos que:

$$\int_0^t \partial_{x^i} f\left(X_s\right) \sigma_i^j\left(X_s\right) dB_s^j = f\left(X_t\right) - f\left(X_0\right) - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\left(\sigma \sigma^T\right)^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x^j} + b_i \partial_{x^i} \right) f\left(X_s\right) ds$$

Observamos que nesta equação integral de Itô, o lado direito é uma martingale pois $B_t^i = B_t e_i$ é um movimento Browniano. Então X é uma L-difusão para o operador

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n} \left(\sigma \cdot \sigma^T\right)^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_{x^i}.$$

O objetivo principal nesta seção é mostrar que: dado um operador diferenciável elíptico de segundo ordem e uma distribuição de probabilidade μ_0 em M, existe uma única L-medida de difusão cuja distribuição inicial é dada por μ_0. Para mostrar isto, utilizamos a mesma estratégia que usamos para tratar as equações diferenciáveis estocásticas sobre uma variedade, isto é consideramos a M como uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^n$ e estendemos o operador L a um operador $\widetilde{L}$ sobre $\mathbb{R}^n$, de modo que $L \equiv \widetilde{L}$ em M. Assim, para o operador $\widetilde{L}$ temos que a $\widetilde{L}$-difusão X é construída via solução de uma equação diferencial estocástica sobre $\mathbb{R}^n$, e verificamos que ela de fato mora em M e assim será uma L-difusão.

Primeiro, assumamos que M é uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^n$ (via mergulho isométrico $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$), e estendemos o operador L em M ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ da seguinte maneira: Sejam $\{z^1, ..., z^n\}$ as funções coordenadas sobre $\mathbb{R}^n$, então definamos o operador;

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \tilde{a}^{\alpha\beta} \partial_{z^\alpha} \partial_{z^\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} \tilde{b}^\alpha \partial_{z^\alpha}; \tag{1.9}$$

onde

$$\tilde{a}^{\alpha\beta} = a^{ij} \left(\partial_{x^i} z^\alpha\right) \left(\partial_{x^j} z^\beta\right) \qquad \text{e} \qquad \tilde{b}^\alpha = b^i \left(\partial_{x^i} z^\alpha\right),$$

são funções diferenciáveis sobre M e $\left\{\tilde{a}^{\alpha\beta}\right\}$ é definida positiva.

Assim, obtemos o operador $\widetilde{L}$ que é uma extensão do operador L no sentido do seguinte Lema.

Lema 1.23. *Suponha que $f \in C^\infty(M)$. Então para qualquer $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ extensão de f de M a $\mathbb{R}^n$, temos que $\tilde{\mathrm{L}}\, \tilde{f} = \mathrm{L}\, f$ sobre M.*

Demonstração. Seja $x = \{x^1, ..., x^l\}$ um sistema de coordenadas locais sobre M. Logo, as funções coordenadas sobre M estão dadas por $f^i(x) = x^i$ e assim $f(x) = f(f^1(x), ..., f^n(x))$. Calculamos $\mathrm{L}\, f$ dado em (1.8), e aplicando a regra da cadeia obtemos que;

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}\, f(x) &= \frac{1}{2} a^{ij}(x) \partial_{x^i} \partial_{x^j} + b^i(x) \partial_{x^i} \\
&= \frac{1}{2} a^{ij}(x) \partial_{f^i(x)} \partial_{f^j(x)} + b^i(x) \partial_{f^i(x)} \\
&= \frac{1}{2} a^{ij}(x) \partial_{f^\alpha} \left(\partial_{x^i} f^\alpha\right) \partial_{f^\beta} \left(\partial_{x^j} f^\beta\right) + b^i(x) \partial_{f^\alpha} \left(\partial_{x^i} f^\alpha\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(a^{ij}(x) \left(\partial_{x^i} f^\alpha\right) \left(\partial_{x^j} f^\beta\right)\right) \partial_{f^\alpha} \partial_{f^\beta} + \left(b^i(x) \left(\partial_{x^i} f^\alpha\right)\right) \partial_{f^\alpha} \\
&= \frac{1}{2} \tilde{a}^{\alpha\beta} \partial_{f^\alpha} \partial_{f^\beta} + \tilde{b}^\alpha \partial_{f^\alpha} \\
&= \tilde{\mathrm{L}}\, \tilde{f}(x).
\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathrm{L}\, f$ coincide com $\tilde{\mathrm{L}}\, \tilde{f}$ em M. □

O seguinte passo é construir uma $\widetilde{L}$-difusão sobre $\mathbb{R}^n$, via solução de uma equação diferencial estocástica da forma;

$$X_t = X_0 + \int_0^t \widetilde{\sigma}\left(X_s\right) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \widetilde{b}\left(X_s\right) ds, \tag{1.10}$$

onde W é um movimento Browniano euclidiano n-dimensional e X_0 é uma variável aleatória em $\mathbb{R}^n$ independente de W. Se X é uma solução de equação (1.10), então pela fórmula de Itô temos que X é uma $\widetilde{L}$-difusão com $\widetilde{L}$ dado por (1.9). Se definimos $\widetilde{\sigma} = (\widetilde{a})^{1/2}$ (no sentido de matrices, pois $\widetilde{a}$ é uma matriz definida positiva devido à elipticidade do operador L). Mas isto quer dizer que $\widetilde{\sigma} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ é a única função matricial, que é simétrica e definida positiva satisfazendo $(\widetilde{\sigma})^2 = \widetilde{a}$. A modo de aplicar a teoria estudada previamente, precisamos saber se $\widetilde{\sigma}$ é localmente Lipschitz o que será tratado na seguinte proposição.

Proposição 1.24. *Seja $a : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ uma função a valores matriciais, que é simétrica e definida positiva com $a \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(n, \mathbb{R}))$. Então sua raiz quadrada $\sigma = a^{1/2}$, é localmente Lipschitz.*

Para uma prova desta proposição, o leitor pode consultar o livro de E.P. Hsu [2]. Em virtude da Proposição 1.24 de acima, podemos dar uma solução X, da equação EDE($\widetilde{\sigma}$, (B_t, t), X_0) para algum X_0 onde X será uma L-difusão, como se enuncia no seguinte teorema.

Teorema 1.25. *Seja L um operador elíptico diferenciável de segundo ordem sobre uma variedade diferenciável M e μ_0 uma medida de probabilidade sobre M. Se o processo X satisfaz a equação diferencial estocástica,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t (\widetilde{a})^{1/2} (X_s) \, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \widetilde{b} (X_s) \, ds, \tag{1.11}$$

então o processo X toma valores em M, e é uma L-difusão com distribuição inicial μ_0.

Demonstração. Seja $\widetilde{L}$ a extensão de L no espaço ambiente e $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ como na equação (1.9). Então, considerando $\tilde{\sigma} = \tilde{a}^{1/2}$ a única matriz raiz quadrada definida positiva de $\tilde{a}$, pelo Lema 1.24 temos que $\tilde{\sigma}$ é localmente Lipschitz sobre $\mathbb{R}^n$.

Seja $B = (B^1, ..., B^n)$ um movimento Browniano n-dimensional e uma variável aleatória X_0, a valores em M e independente de W cuja distribuição é dada por μ_0. Temos que, a solução X de (1.11) é uma $\tilde{L}$-difusão. Daí se mostra que, a lei $\mu^X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ de X no espaço $W(\mathbb{R}^n)$ está no espaço de caminhos $W(M)$ e é uma L-medida de difusão com distribuição inicial μ_0.

A prova de que a solução X toma valores em M, é similar ao caso das equações diferenciáveis do tipo Stratonovich, pois para qualquer $f(X)$, todas as derivadas de f na fórmula de Itô são tomadas ao longo de M. Afirmamos que X é uma L- difusão. Com efeito, temos que X é uma $\tilde{L}$-difusão e para cada $\tilde{f} \in C^\infty$ tem-se

$$\tilde{f}(x_t) = \tilde{f}(x_0) + \text{martingale local} + \int_0^t \tilde{\mathrm{L}}\,\tilde{f}(X_s)ds, \quad 0 \leq t < e(X).$$

Seja $f \in C^\infty(M)$ e $\tilde{f}$ sua extensão a $\mathbb{R}^n$, então pelo Lema 1.23 e pelo fato que X toma valores em M, temos que;

$$f(x_t) = f(x_0) + \text{martingale local} + \int_0^t \mathrm{L}\,f(X_s)ds, \quad 0 \leq t < e(X).$$

Mas isto quer dizer que, X é uma L-difusão então sua lei de distribuição μ^X é uma L-medida de difusão com distribuição inicial dada por $\mu_0 = \mathbb{P} \circ X_0^{-1}$. $\square$

Teorema 1.26. *Uma L-medida de difusão com distribuição inicial dada é única.*

Para uma prova desta proposição, o leitor pode consultar o livro de E.P. Hsu [2].

Capítulo 2

Movimento Browniano em uma Variedade Riemanniana (M, g)

Uma vez tratadas as semimartingales sobre variedades diferenciáveis, neste capítulo estudamos o movimento Browniano o qual é um tipo especial de semimartingale. O objetivo principal será dar condições suficientes e necessárias para que uma semimartingale X a valores em uma variedade riemanniana (M, g), seja um movimento Browniano.

Começamos introduzindo as noções de levantamento horizontal U_t, desenvolvimento e anti-desenvolvimento estocástico W_t, de uma semimartingale X_t sobre (M, g). Logo, a partir destas noções construímos a equação diferencial estocástica horizontal do tipo Stratonovich sobre o fibrado de bases $\mathcal{F}(M)$ dada por;

$$dU_t = H_i(U_t) \circ dW_t.$$

Assim, X_t é um movimento Browniano sobre (M, g) se, e somente se seu anti-desenvolvimento W_t é movimento Browniano euclidiano. Outra maneira de construir o movimento Browniano, é ver ele como a solução da equação diferencial estocástica dada por:

$$\begin{cases} dX_t = P_\alpha(X_t) \circ dW_t^\alpha \\ X_0 \in M, \end{cases}$$

onde P_α denotará a α-ésima projeção ortogonal do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ ao subespaço $T_xM \subseteq \mathbb{R}^n$, onde M é mergulhada isométricamente em $\mathbb{R}^n$. A solução é uma difusão, gerada pelo operador $\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{l} P_\alpha^2 = \frac{1}{2}\Delta_M$.

2.1 Fibrado de Bases e Conexões

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão d. Para cada x em M, denotemos por T_xM ao espaço tangente em x e por TM ao fibrado tangente. O espaço $\Gamma(TM)$ de seções diferenciáveis do fibrado tangente TM é justamente o conjunto de campos de vetores sobre M. Uma conexão sobre M, é uma aplicação dada por:

$$\begin{array}{rcl} \nabla : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) & \to & \Gamma(TM) \\ (X,Y) & \mapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

e que satisfaz as seguintes afirmações:

(1) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_X Z,$

(2) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

(3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

para todo $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ e $f,g \in C^\infty(M)$. Seja $x = \{x^1,...,x^d\}$ uma carta local sobre um aberto O de M, então o conjunto de campos de vetores $\{X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},...,X_d = \frac{\partial}{\partial x^d}\}$ gera o espaço tangente T_xM. Os símbolos de Christoffel Γ^k_{ij} são funções sobre O definidos unívocamente pela seguinte relação:

$$\nabla_{X_i}X_j = \Gamma^k_{ij}X_k.$$

Seja M uma variedade munida de uma conexão ∇. Dizemos que um campo V é paralelo ao longo de uma curva $\{x_t\}$ em M, se $\nabla_{\dot{x}}V = 0$ em cada ponto da curva. Neste caso se o campo V, esta dado em coordenadas locais por: $V = v^iX^i$, então V será paralelo se, e somente se suas componentes v^i satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciáveis ordinárias de primeiro ordem:

$$\dot{v}^k(t) + \Gamma^k_{ij}(x_t)\dot{x}^j v^l(t) = 0 \qquad \forall k = 1,...,d. \tag{2.1}$$

Assim, em coordenadas locais, o transporte paralelo de V ao longo da curva $\{x_t\}$ é unívocamente determinado por seu valor inicial em $t = 0$. Para cada $x \in M$ consideramos o conjunto

$$\mathcal{F}(M)_x = \{u\colon \mathbb{R}^d \to T_xM,\ \text{tal que } u \text{ é isomorfismo}\},$$

onde $d = \dim M$. Chamamos a este conjunto, como *o espaço de todas as bases sobre* x. Logo, para $\{e_1,...,e_d\}$ uma base canônica ortonormal de $\mathbb{R}^d$ temos que $\{ue_1,...,ue_d\}$ constitui uma base do espaço tangente T_xM. Logo, o fibrado de bases é definido por:

$$\mathcal{F}(M) = \bigcup_{x\in M} \mathcal{F}(M)_x.$$

Observamos que $\mathcal{F}(M)$, tem estrutura de variedade diferenciável com dimensão $d+d^2$, e a projeção canônica

$$\begin{array}{rccc} \pi\colon & \mathcal{F}(M) & \to & M \\ & u & \mapsto & \pi(u) \end{array}$$

com $\pi(u) = x$ para cada $u \in \mathcal{F}(M)$, é uma aplicação diferenciável.

Definição 2.1. *Uma curva $\{u_t\}$ em $\mathcal{F}(M)$ é dita horizontal se para cada $e \in \mathbb{R}^d$ o campo de vetores $\{u_t e\}$ é o transporte paralelo de uma base $u_0 \in \mathcal{F}(M)$ ao longo da curva $\{\pi(u_t)\}$ em M. Um vetor tangente $X \in T_u\mathcal{F}(M)$ é dito horizontal se, ele é o vetor tangente a uma curva horizontal.*

Denotamos por $H_u\mathcal{F}(M)$ o conjunto de vetores tangentes às curvas horizontais passando por um ponto fixo $u \in \mathcal{F}(M)$. Este é um subespaço de dimensão d do espaço tangente $T_u\mathcal{F}(M)$. Nos referimos a ele como o subespaço horizontal de $T_u\mathcal{F}(M)$ e a partir de isto, obtemos a seguinte decomposição:

$$T_u\mathcal{F}(M) = H_u\mathcal{F}(M) \oplus V_u\mathcal{F}(M),$$

onde $V_u\mathcal{F}(M)$ é o subespaço vertical, constituído pelos vetores verticais em u. Observe que, um vetor $X \in T_u\mathcal{F}(M)$ será chamado vertical, se ele é tangente à fibra $\mathcal{F}(M)_{\pi(u)}$. A partir desta decomposição, a projeção canônica induz um isomorfismo $\pi_*\colon H_u\mathcal{F}(M) \to T_{\pi(u)}M$, onde para cada vetor $X \in T_xM$ e cada base u em x, existe um único vetor horizontal X^*, denominado levantamento horizontal de X em u, tal que $\pi_*(X^*) = X$. Assim, se X é um campo de vetores sobre M, então X^* será um campo de vetores horizontais sobre $\mathcal{F}(M)$. Seja $u \in \mathcal{F}(M)$. Para cada $e \in \mathbb{R}^d$, definimos o campo vetorial H_e em $\mathcal{F}(M)$, pela seguinte relação

$$\begin{aligned} H_e(u) &= (ue)^* \\ &= \text{"O levantamento horizontal de } ue \in T_{\pi(u)}M \text{ a } u\text{"} \end{aligned}$$

que constitui um campo de vetores horizontais sobre $\mathcal{F}(M)$.

Sejam $\{e_1, ..., e_d\}$ uma base ortonormal unitária de $\mathbb{R}^d$. Então, sobre o fibrado de bases $\mathcal{F}(M)$ definimos d campos de vetores horizontais, dados por $H_i = H_{e_i}$ onde $i = 1, ..., d$. Eles são denominados campos horizontais fundamentais sobre $\mathcal{F}(M)$. Assim, para cada $u \in \mathcal{F}(M)$ obtemos que $H_i(u)$ é o único vetor horizontal em $H_u\mathcal{F}(M)$ cuja projeção é dada pelo i-ésimo vetor unitário ue_i da base ortonormal $\{ue_1, ..., ue_d\}$. Isto é,

$$H_i(u) = (ue_i)^* \in H_u\mathcal{F}(M),$$

onde sua projeção, é dada por:

$$\pi_*(H_i(u)) = ue_i.$$

Dada uma carta local $x = \{x^i\}$ em uma vizinhança $O \subset M$, temos que esta induz uma outra carta local $\widetilde{O} = \pi^{-1}(O)$ sobre $\mathcal{F}(M)$ como segue: Seja $\{X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, ..., X_d = \frac{\partial}{\partial x^d}\}$ uma base de T_xM definida pela carta. Então, para cada $u \in \widetilde{O} \subset \mathcal{F}(M)$, $ue_i = e_i^j X_j$, para alguma matriz $e = (e_i^j) \in GL(d, \mathbb{R})$. Assim, resulta que $(x, e) = (x^i, e_i^j) \in \mathbb{R}^{d+d^2}$ constitui uma carta local para $\widetilde{O}$. Portanto, em termos desta carta, para cada $u \in \widetilde{O}$ o subespaço vertical $V_u\mathcal{F}(M)$ está gerado por $\{X_{kj} = \frac{\partial}{\partial e_j^k},\ 1 \leq j, k \leq d\}$ e o espaço tangente $T_u\mathcal{F}(M)$ é gerado por $\{X_i,\ X_{ij},\ 1 \leq i, j \leq d\}$. Desta maneira com a carta $(x, e) = \{(x^i, e_i^j)\}$ de uma vizinhança $\widetilde{O}$ de $\mathcal{F}(M)$ podemos dar uma expressão local do campo vetorial horizontal fundamental sobre $\mathcal{F}(M)$.

Proposição 2.2. *Considerando a carta local sobre o fibrado de bases* $\mathcal{F}(M)$ *descrita acima, em* $u = (x, e) = \{(x^i, e_j^k)\} \in \mathcal{F}(M)$*, obtemos que:*

$$H_i(u) = e_i^j X_j - e_i^j e_m^l \Gamma_{jl}^k(x) X_{km} \tag{2.2}$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ *e* $X_{km} = \frac{\partial}{\partial e_m^k}$

Demonstração. Seja $u \in \widetilde{O} \subset \mathcal{F}(M)$, então

$$H_i(u) = (ue_i)^*$$

é o levantamento horizontal de $ue_i \in T_xM$, onde e_i é a i-ésima coordenada de um vetor unitário em $\mathbb{R}^d$. Consideramos a curva horizontal $t \mapsto u_t = (x_t, e(t))$, com $u_0 = u$ tal que $\pi_*\dot{u}_0 = ue_i$. Assim, como $\pi_*H_i(u) = ue_i = \pi_*\dot{u}_0$ então

$$H_i(u) = \dot{u}_0 = \dot{x}_0^j X_j + \dot{e}_m^k(0) X_{km} \tag{2.3}$$

pois $\dot{u}_t = (\dot{x}_t, \dot{e}(t))$ e $\{X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^d$ é base de T_xM.

Observamos que o campo $V(t) = e_m^k(t) X_k$ é paralelo ao longo da curva $X_t = \{x_t^i\}$ para cada m, então por (2.1) satisfaz,

$$\dot{e}_m^k(t) + \Gamma_{ij}^k(x_t)\dot{x}_t^j e_m^l(t) = 0$$

Mas, para $t = 0$ tem-se

$$\dot{e}_m^k(0) = -\dot{x}_0^j e_m^l(0) \Gamma_{jl}^k(x_0) \tag{2.4}$$

Por outro lado vemos que $\pi(u_t) = x_t$, então $\dot{x}_0 = \pi_*(\dot{u}_0) = ue_i$, $\dot{x}_0^j = e_i^j$. Substituindo isto em (2.3) e (2.4) obtemos que

$$H_i(u) = e_i^j X_j - e_i^j e_m^l \Gamma_{jl}^k(x) X_{km}$$

$\square$

2.2 Levantamento horizontal e desenvolvimento estocástico

Nesta seção, introduzimos as noções de levantamento horizontal, desenvolvimento e anti-desenvolvimento estocástico, de modo que permitam identificar as curvas em $\mathbb{R}^n$ como curvas na variedade M e vice-versa. Começamos fazendo isto, para uma curva diferenciável $\{x_t\}$ em M, para depois apresentar uma generalização natural que nos permita fazer o mesmo para semimartingales X_t sobre M. Para mais detalhes sobre isto ver, o livro de E.P. Hsu [2].

Seja $\mathcal{F}(M)$ o fibrado de bases de uma variedade M, equipada convenientemente com a conexão Levi-Civita ∇, temos que uma curva diferenciável $\{x_t\}$ em M, pode se levantar para uma curva horizontal $\{u_t\}$ em $\mathcal{F}(M)$. Dada por

$$u_t \colon \mathbb{R}^d \to T_{x_t}M$$

e como $\dot{x}_t \in T_{x_t}M$, então $u_t^{-1}\dot{x}_t \in \mathbb{R}^d$.

Definição 2.3. *Uma curva $\{w_t\}$ em $\mathbb{R}^d$ é o anti-desenvolvimento de uma curva $\{x_t\}$ em M (ou da curva horizontal $\{u_t\}$ em $\mathcal{F}(M)$) se*

$$w_t = \int_0^t u_s^{-1}\dot{x}_s ds. \tag{2.5}$$

Assim, de (2.5) tem-se $u_t\dot{w}_t = \dot{x}_t$. Então

$$\begin{aligned} H_{\dot{w}_t}(u_t) &= (u_t\dot{w}_t)^* \\ &= (\dot{x}_t)^* \\ &= \dot{u}_t. \end{aligned}$$

Portanto, o anti-desenvolvimento $\{w_t\}$ e o levantamento horizontal $\{u_t\}$ de $\{x_t\}$ sobre M, estão ligados por uma equação diferencial ordinaria sobre $\mathcal{F}(M)$, dada por:

$$\dot{u}_t = H_i(u_t)\dot{w}_t^i \tag{2.6}$$

Isto motiva a seguinte definição.

Definição 2.4. *Para uma curva diferenciável $\{w_t\}$ em $\mathbb{R}^d$, a curva diferenciável $\{u_t\}$ definida por*

$$\dot{u}_t = H_i(u_t)\dot{w}_t^i$$

é chamada o desenvolvimento de $\{w_t\}$ em $\mathcal{F}(M)$. Sua projeção $\pi(u_t) = x_t$ é chamada o desenvolvimento da $\{w_t\}$ em M.

Seja X uma semimartingale sobre M. O levantamento horizontal U de X é obtido via solução de uma equação diferencial estocástica similar à equação (2.6). Considerando então a equação diferencial estocástica sobre o fibrado de bases $\mathcal{F}(M)$

$$dU_t = \sum_{i=1}^{d} H_i(U_t) \circ dW_t^i \tag{2.7}$$

onde $W = (W^1, ..., W^d)$ é uma semimartingale a valores em $\mathbb{R}^d$. Note que temos assumido implicitamente que a variedade M está equipada com uma conexão ∇, e $\{H_i\}$ são os correspondentes campos horizontais fundamentais sobre $\mathcal{F}(M)$.

Definição 2.5. *Seja* $(\Omega, \mathfrak{F}_*, \mathbb{P})$ *o espaço de probabilidade filtrado, para todo processo* $\mathfrak{F}_*$-*adaptado tem-se*

(i) Uma semimartingale U, *que toma valores em* $\mathcal{F}(M)$, *é dita horizontal se existe uma semimartingale* W *a valores em* $\mathbb{R}^d$, *tal que (2.7) se cumpre. A única semimartingale* W *a valores em* $\mathbb{R}^d$, *é chamada o anti-desenvolvimento de* U *(ou de sua projeção* $X = \pi(U)$ *na variedade* M*).*

(ii) Seja W *uma semimartingale a valores em* $\mathbb{R}^d$ *e* U_0 *uma variável aleatória* $\mathfrak{F}_0$-*mensurável, que toma valores em* $\mathcal{F}(M)$. *A solução* U *da equação diferencial estocástica (2.7) é chamada de desenvolvimento (estocástico) de* W *em* $\mathcal{F}(M)$. *Sua projeção* $X = \pi(U)$ *é chamada desenvolvimento (estocástico) de* W *na variedade* M.

(iii) Seja X *uma semimartingale a valores em* M. *Uma semimartingale horizontal* U *que toma valores em* $\mathcal{F}(M)$ *tal que sua projeção* $\pi(U) = X$ *é chamada de levantamento horizontal (estocástico) de* X.

Dada X uma semimartingale em M, queremos provar a existência de um levantamento horizontal via solução de alguma equação diferencial estocástica sobre o fibrado de bases $\mathcal{F}(M)$ que seja dada pela semimartingale X. Para este propósito, vamos assumir que M é uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$ e consideramos $X = \{X^\alpha\}$ como uma semimartingale que toma valores em $\mathbb{R}^n$.

Para cada $x \in M$, seja $P(x)\colon \mathbb{R}^n \to T_xM$ a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre o subespaço $T_xM \subseteq \mathbb{R}^n$. Então, intuitivamente sobre $\mathbb{R}^n$, devemos ter

$$X_t = X_0 + \int_0^t P(X_s) \circ dX_s. \tag{2.8}$$

Observamos que se $P_\alpha(x) = P(x)(\xi)$ é a projeção em T_xM da α-ésima coordenada do vetor unitário $\xi_\alpha \in \mathbb{R}^n$, então podemos reescrever (2.8) como

$$dX_t = P_\alpha(X_t) \circ dX_t^\alpha.$$

Seja $P_\alpha^*(u)$ o levantamento horizontal de $P_\alpha(\pi(u))$ para $u \in \mathcal{F}(M)$, então obtemos n campos de vetores horizontais. Consideramos a seguinte equação diferencial estocástica sobre $\mathcal{F}(M)$ dada por:

$$dU_t = \sum_{\alpha=1}^{N} P_\alpha^*(U_t) \circ dX_t^\alpha, \tag{2.9}$$

que tem uma solução para uma base U_0 dada.

Teorema 2.6. *A solução da equação (2.9) é o levantamento horizontal de X a $\mathcal{F}(M)$.*

Antes de provar este teorema, precisamos de analisar outros resultados que nos servirão de muita ajuda.

Sejam $f = \{f^\alpha\} \colon M \to \mathbb{R}^n$ a função coordenada e seu levantamento $\widetilde{f} \colon \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}^n$. A projeção $\pi \colon \mathcal{F}(M) \to M$ é considerada como uma função a valores em $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathcal{F}(M)$, dada por

$$\widetilde{f}(u) = f(\pi u) = \pi u \in M \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Lema 2.7. *Seja $\widetilde{f} \colon \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}^n$ a função projeção, então as seguintes identidades se cumprem sobre $\mathcal{F}(M)$.*

$$P_\alpha^* \widetilde{f}(u) = P_\alpha(\pi(u)), \tag{2.10}$$

e

$$\sum_{\alpha=1}^{n} P_\alpha(\pi(u)) H_i \widetilde{f}^\alpha(u) = ue_i. \tag{2.11}$$

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{F}(M)$, consideramos a curva $\{u_t\}$ com $u_0 = u$ que é o levantamento horizontal de uma curva $\{x_t\}$ em M, tal que $P_\alpha(\pi u) = \dot{x}_0$, daí $P_\alpha^*(u) = \dot{u}_0$. Assim,

$$P_\alpha^* \tilde{f}(u) = \left[\frac{d}{dt}\widetilde{f}(u_t)\right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt}\pi(u_t)\right]_{t=0} = \dot{x}_0 = P_\alpha(\pi(u)).$$

Para provar (2.11), do mesmo jeito consideramos $\{v_t\}$ com $v_0 = u$ que é o levantamento horizontal da curva $\{y_t\}$ em M com $\dot{y}_0 = ue_i$. Então,

$$H_i \widetilde{f}(v) = \left[\frac{d}{dt}\widetilde{f}(v_t)\right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt}\pi(v_t)\right]_{t=0} = \dot{y}_0 = ue_i.$$

O que significa que $H_i\widetilde{f}(u) \in T_{\pi(u)}M$, então $P(\pi(u))H_i\widetilde{f}(u) = H_i\widetilde{f}(u)$. Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{N} P_\alpha(\pi(u))H_i\widetilde{f}^\alpha(u) &= P(\pi(u))\, H_i\widetilde{f}(u) \\ &= H_i\widetilde{f}(u) \\ &= ue_i.\end{aligned}$$

Portanto, as identidades dadas nas equações (2.10) e (2.11) são satisfeitas sobre $\mathcal{F}(M)$. □

No seguinte lema provamos que cada semimartingale sobre uma subvariedade M fechada de $\mathbb{R}^n$ é uma solução de uma equação diferencial estocástica do tipo Stratonovich sobre M.

Lema 2.8. *Seja M uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^n$. Para cada $x \in M$, considere $P : \mathbb{R}^n \to T_xM$ a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^n$ no espaço tangente T_xM. Se X é uma semimartingale a valores em M, então*

$$X_t = X_0 + \int_0^t P_\alpha(X_s) \circ dX_s^\alpha. \tag{2.12}$$

Demonstração. Consideramos as aplicações dadas por;

$$P_\alpha(x) = P(x)\xi_\alpha \quad \text{e} \quad Q_\alpha(x) = \xi_\alpha - P(x)\xi_\alpha,$$

onde $\{\xi_\alpha\}$ é uma base canônica para $\mathbb{R}^n$. Assim a projeção ortogonal $P_\alpha(x)$ é tangente a M e $Q_\alpha(x)$ é normal a M. Além disso $P_\alpha + Q_\alpha = \xi_\alpha$. Denotamos por

$$Y_t = X_0 + \int_0^t P_\alpha(X_s) \circ dX_s^\alpha. \tag{2.13}$$

Afirmamos que $Y_t \in M$. Com efeito, seja f uma função diferenciável não-negativa sobre $\mathbb{R}^n$ que se anula sobre M. Aplicando a fórmula de Itô, resulta:

$$f(Y_t) = f(X_0) + \int_0^t P_\alpha f(X_s) \circ dX_s^\alpha.$$

Mas se $x \in M$, então $P_\alpha(x) \in T_xM$ e $P_\alpha f(x) = 0$. Por tanto $P_\alpha(X_t) = 0$ e $f(Y_t) = 0$, o que mostra que Y dado em (2.13) está em M.

Seja $h : \mathbb{R}^n \to M$ uma função, tal que para cada $x \in M$ faz corresponder um ponto sobre M próximo a x. Como M é uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^n$, h é uma função diferenciável que está bem definida sobre uma vizinhança de M e é constante em cada segmento de linha perpendicular a M. Isto significa que $Q_\alpha h(x) = 0$ para cada $x \in M$, pois Q_α é normal a M. Assim, considerando ξ_α como um campo de vetores sobre $\mathbb{R}^n$ temos

$$P_\alpha\, h(x) = P_\alpha\, h(x) + Q_\alpha\, h(x) = \xi_\alpha, \quad \forall x \in M. \tag{2.14}$$

Por tanto, para $Y_t \in M$ obtemos

$$\begin{aligned} Y_t &= h(Y_t) \\ &= X_0 + \int_0^t P_\alpha h\,(X_s) \circ dX_s^\alpha \\ &= X_0 + \int_0^t \xi_\alpha h\,(X_s) \circ dX_s^\alpha \\ &= h(X_t) \\ &= X_t. \end{aligned}$$

Observe que as últimas igualdades provêm da fórmula de Itô e do fato de que $X_t \in M$. $\square$

Agora, estamos em condições de provar o Teorema 2.6 que é um dos teoremas mais importantes desta seção.

Demonstração. {Prova do Teorema 2.6}
Assumamos que M é uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^n$. Pelo Lema 2.8, para uma semi-martingale X_t sobre M, temos que

$$X_t = X_0 + \int_0^t P_\alpha(X_s) \circ dX_s^\alpha, \tag{2.15}$$

pode ser considerado como uma equação diferencial estocástica sobre M.

Seja $\widetilde{f}\colon \mathcal{F}(M) \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ como antes, se consideramos $Y_t = f(U_t) = \pi(U_t)$, só bastará mostrar que $X_t \equiv Y_t$. De fato, aplicando a fórmula de Itô a $f(U_t)$ resulta que,

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^t P_\alpha^* f\,(U_s) \circ dX_s^\alpha \\ &= Y_0 + \int_0^t P_\alpha\,(\pi\,(U_s)) \circ dX_s^\alpha \\ &= Y_0 + \int_0^t P_\alpha\,(X_s) \circ dX_s^\alpha. \end{aligned}$$

Observe que a segunda igualdade provém do Lema 2.7, de onde $P_\alpha^* f(u) = P_\alpha\,(\pi(u))$ e $\pi\,(U_t) = X_t$. Assim, temos que Y_t satisfaz a mesma equação diferencial estocástica que X_t, dada em (2.15), mas por unicidade das soluções temos que $X = Y = \pi(U)$. Portanto, U é levantamento horizontal de X. $\square$

Uma consequência quase imediata deste teorema é mostrar que, para o levantamento horizontal U de X, podemos escrever seu anti-desenvolvimento de uma única forma, como na equação (2.16) dada no teorema seguinte.

Teorema 2.9. *Uma semimartingale horizontal U, sobre o fibrado de bases ortonormais $\mathcal{F}(M)$, tem um único anti-desenvolvimento W, dado por:*

$$W_t = \int_0^t U_s^{-1} P_\alpha (X_s) \circ dX_s^\alpha, \tag{2.16}$$

onde $X_t = \pi (U_t)$.

Demonstração. Para mostrar que W é o único anti-desenvolvimento de U, devemos mostrar que W é uma semimartingale a valores em $\mathbb{R}^d$ dada por

$$dU_t = H_i (U_t) \circ dW_t^i.$$

Com efeito, seja $\widetilde{f} : \mathcal{F}(M) \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ a função projeção ortogonal considerada como uma função a valores em $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathcal{F}(M)$, dada por $\widetilde{f} (U_t) = \pi (U_t) = X_t$. Então, para $\widetilde{f}$ tem-se

$$dX_t = H_i \widetilde{f} (U_t) \circ dW_t^i,$$

ou equivalentemente

$$dX_t^\alpha = H_i \widetilde{f}^\alpha (U_t) \circ dW_t^i.$$

Multiplicando ambos membros por $U_t^{-1} P_\alpha (X_t) \in \mathbb{R}^d$ e usando a equação (2.11) obtemos que

$$\begin{aligned} U_t^{-1} P_\alpha (X_t) \circ dX_t^\alpha &= U_t^{-1} P_\alpha (X_t) \, H_i \widetilde{f} (U_t) \circ dW_t^i \\ &= U_t^{-1} (U_t e_i) \circ dW_t^i \\ &= e_i \, dW_t^i. \end{aligned}$$

Mas isto implica que:

$$W_t = \int_0^t U_s^{-1} P_\alpha (X_s) \circ dX_s^\alpha.$$

□

Assim temos verificado a seguinte correspondência

$$W \leftrightarrow U \leftrightarrow X$$

que é de muita utilidade, pois transforma um processo X a valores em M, a um processo W que toma valores no espaço euclidiano onde é mais fácil de trabalhar. Observamos que este procedimento é válido para qualquer semimartingale a valores em M e depende da conexão usada para definir o levantamento horizontal.

2.3 Integrais Estocásticas em Variedades

Como uma aplicação dos conceitos de levantamento horizontal e anti-desenvolvimento estocástico, a continuação definiremos a integral estocástica sobre uma variedade Riemanniana M.

Definição 2.10. *Sejam θ uma 1-forma sobre M e X uma semimartingale a valores em M. Seja U o levantamento horizontal de X no $\mathcal{F}(M)$ e W seu correspondente anti-desenvolvimento(com respeito a qualquer conexão). Então a integral (estocástica) de θ ao longo de $X[0,t]$ é definida como*

$$\int_{X[0,t]} \theta = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \theta\left(U_s e_i\right) \circ dW_s^i.$$

Se consideramos à variedade M como uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$, então pelo Lema 2.8 cada semimartingale sobre M é solução de uma equação diferencial estocástica dada por

$$X_t = X_0 + \int_0^t P_\alpha(X_s) \circ dX_s^\alpha.$$

A partir disto, a definição de integral estocástica é independente da escolha da conexão para a variedade, pois a integral estocástica da 1-forma θ também pode ser escrita por

$$\int_{X[0,t]} \theta = \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t \theta\left(P_\alpha\right)(X) \circ dX_s^i.$$

Se θ é uma 1-forma exata, isto é $\theta = df$, e aplicando a fórmula de Itô para uma função diferenciável f sobre M, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{X[0,t]} df &= \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t df\left(P_\alpha\right)(X) \circ dX_s^i \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^t P_\alpha f\,(X) \circ dX_s^i \\
&= f(X_t) - f(X_0).
\end{aligned}$$

Agora, definimos a variação quadrática de uma semimartingale com respeito a um $(0,2)$-tensor. Um $(0,2)$-tensor $h \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ é uma seção do fibrado vetorial $T^*M \otimes T^*M$, isto é, que é uma designação diferenciável de um tensor $h_x \in T_x^*M \otimes T_x^*M$ para cada $x \in M$. Sua escalarização $\widetilde{h}$, é uma função a valores em $\mathbb{R}^{d^*} \otimes \mathbb{R}^{d^*}$ no fibrado de bases $\mathcal{F}(M)$. Assim,

$$\widetilde{h}(u)(e, f) = h(ue, uf),$$

para cada $e, f \in \mathbb{R}^d$ e $u \in \mathcal{F}(M)$.

Definição 2.11. *Sejam h um $(0,2)$-tensor sobre M e X uma semimartingale a valores em M. Seja U o levantamento horizontal de X e W seu anti-desenvolvimento. Então a h-variação quadrática de X é dada por*

$$\int_0^t h(dX_s, dX_s) = \int_0^t \widetilde{h}(dW_s, dW_s),$$

ou mais precisamente,

$$\int_0^t h(dX_s, dX_s) = \int_0^t h(U_s e_i,\, U_s e_j)\, d\langle W^i, W^j \rangle_s \tag{2.17}$$

Observamos que, se a semimartingale X a valores em M, é solução de uma EDE($V_1, ...,$ $V_n,\ Z,\ X_0$), então a equação (2.17) pode-se reescrever como:

$$\int_0^t h(dX_s, dX_s) = \int_0^t h(V_\alpha, V_\beta)(X_s)\, d\langle Z^\alpha, Z^\beta \rangle_s \tag{2.18}$$

Esta nova reescrita será de muita utilidade para demonstrações posteriores.

2.4 Operador laplaciano de Beltrami

A partir de agora, considere a M uma variedade Riemanniana equipada com uma conexão de Levi-Cevita denotada por ∇^M. Definimos sobre M o operador laplaciano de Beltrami, como um operador elíptico de segundo ordem, que é uma generalização do operador de Laplace usual no espaço euclidiano. Lembremos que sobre o espaço euclidiano tínhamos

$$\triangle f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Assim, para poder definir o operador laplaciano de Beltrami Δ_M sobre M, precisamos primeiro definir o gradiente e a divergência sobre M. O gradiente $\operatorname{grad} f$ é o dual do diferencial df, assim este é o único campo vetorial sobre M definido pela relação:

$$\mathrm{g}\,(\operatorname{grad} f, X) = df(X) = Xf, \quad \forall X \in \Gamma(TM),$$

onde g denota a métrica euclidiana. Em coordenadas locais, o gradiente é dado por:

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

A divergência $\operatorname{div} X$ de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é definido pela contração de um $(1,1)$-tensor ∇X. Logo, em coordenadas locais $\operatorname{div} X$ é dado por

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial(\sqrt{G} a^i)}{\partial x^i},$$

onde o campo $X = \sum_i a^i \partial / \partial x^i$.

Assim combinando as expressões locais do gradiente e divergência, obtemos que o operador laplaciano de Beltrami Δ_M sobre M, é dado por

$$\begin{aligned} \Delta_M &= \operatorname{div} \operatorname{grad} f \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}). \end{aligned}$$

Por tanto, Δ_M é um operador elíptico de segundo ordem não-degenerado. Ainda mais, da definição de $\operatorname{div} X$ temos

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{g} \left(\nabla_{X_i} X, X_i \right), \tag{2.19}$$

onde $\{X_i\}_{i=1}^d$ é uma base ortonormal de $T_x M$. Então, para $X = \operatorname{grad} f$ vemos que o operador div pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{d} \mathrm{g} \left(\nabla_{X_i} \operatorname{grad} f, X_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \nabla_{X_i} \mathrm{g} \left(\operatorname{grad} f, X_i \right) - \mathrm{g} \left(\operatorname{grad} f, \nabla_{X_i} X_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \nabla^2 f(X_i, X_i). \end{aligned}$$

Como $\Delta_M/2$ é um operador elíptico de segundo ordem sobre M, pelo feito na última seção do Capítulo 1, qualquer processo de difusão a valores em M gerado por $\Delta_M/2$ é chamado de um movimento Browniano sobre M. Precisamos gerar um movimento Browniano como uma solução de uma equação estocástica tipo Itô. Vimos no primeiro capítulo, que a solução de uma equação diferencial estocástica sobre M da forma:

$$dX_t = V_\alpha(X_t) \circ W_t^\alpha + V_0(X_t) dt,$$

onde W é um movimento Browniano euclidiano, é uma L-difusão gerada por um operador elíptico de segundo ordem do tipo Hörmander:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} V_i^2 + V_0.$$

Se conseguirmos escrever $\triangle_M$ nesta forma, então nosso movimento Browniano poderá ser gerado como uma solução de uma equação diferencial estocástica sobre uma variedade M. Infelizmente em geral, não existe uma maneira intrínseca de fazer isto sobre uma variedade Riemanniana. Veremos depois que se M é mergulhada isometricamente no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ então existe uma maneira de escrever $\triangle_M$ como uma soma de quadrados naturalmente associados com o mergulho. Em geral, existe um levantamento de Δ_M ao fibrado de bases ortonormais $\mathcal{O}(M)$, onde este levantamento terá forma de acima, isto é, será escrito como uma suma dos quadrados dos $d = \dim M$ campos de vetores intrinsecamente definidos sobre $\mathcal{O}(M)$.

Seja $\mathcal{O}(M)$ o fibrado de bases ortonormais sobre M e $\pi : \mathcal{O}(M) \to M$ a projeção ortogonal canônica em M. Lembremos que, o campo de vetores horizontais fundamentais H_i (com respeito à conexão de Levi-Cevita ∇_M) são os únicos campos de vetores horizontais sobre $\mathcal{O}(M)$ tais que $\pi_* H_i(u) = ue_i$ onde $\{e_i\}_{i=1}^d$ é uma base canônica de $\mathbb{R}^d$. O laplaciano horizontal de Bochner é um operador elíptico de segundo ordem sobre $\mathcal{O}(M)$ definido por:

$$\Delta_{\mathcal{O}(M)} = \sum_{i=1}^{d} H_i^2,$$

e sua relação com o operador laplaciano de Beltrami é dada pola próxima proposição.

Proposição 2.12. *O laplaciano horizontal de Bochner* $\triangle_{\mathcal{O}(M)}$ *é o levantamento horizontal do operador laplaciano de Beltrami* $\triangle_M$ *no fibrado de bases ortonormais* $\mathcal{O}(M)$. *Mais precisamente, seja* $f \in C^\infty(M)$ *e* $\widetilde{f} = f \circ \pi$ *seu levantamento a* $\mathcal{O}(M)$. *Então para qualquer* $u \in \mathcal{O}(M)$ *tem-se*

$$\Delta_M f(x) = \Delta_{\mathcal{O}(M)} \widetilde{f}(u),$$

onde $x = \pi(u)$.

Demonstração. Notamos que para desenvolver o laplaciano sobre $\triangle_{\mathcal{O}(M)}$ precisamos achar os operadores grad e div sobre $\mathcal{O}(M)$. Para fazer isto, lembremos que a escalarização de uma 1-forma θ sobre M é dada por:

$$\begin{aligned} \widetilde{\theta} :& \mathcal{O}(M) \to \mathbb{R}^d \\ u \quad & \mapsto \widetilde{\theta}(u) = (\theta(ue_1), ..., \theta(ue_d)). \end{aligned}$$

Assim $\widetilde{\theta}$ é chamado a escalarização de θ. Aplicando esta definição à 1-forma df, temos que sua escalarização é dada por:

$$\begin{aligned}\widetilde{df} &= (df(ue_1), ..., df(ue_d)) \\ &= ((ue_1)f, ..., (ue_d)f) \\ &= (H_1\widetilde{f}, ..., H_d\widetilde{f}),\end{aligned}$$

onde $\{e_1, ..., e_d\}$ é uma base canônica de $\mathbb{R}^d$. Então a escalarização do grad f é dada pelo vetor

$$\widetilde{\operatorname{grad} f} = (H_1\widetilde{f}, ..., H_d\widetilde{f}).$$

Por outro lado, se $u \in \mathcal{O}(M)$ e $\pi(u) = x$, então $\{ue_1, ..., ue_d\}$ é uma base ortonormal de $T_{\pi(u)}M$, pois u é isometria. Agora calculemos o operador de divergência isto é;

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{d} \mathrm{g}\left(\nabla_{ue_i} X, ue_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \mathrm{g}_{\mathbb{R}^d}\left(u^{-1}\nabla_{ue_i} X, e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \mathrm{g}_{\mathbb{R}^d}\left(H_i\widetilde{X}(u), e_i\right),\end{aligned}$$

onde $\widetilde{X}$ é a escalarização de X. Assim, se denotamos $[H_i\widetilde{X}(u)]^i$ como a i-ésima componente do campo vetorial horizontal $H_i\widetilde{X}(u)$, temos

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{d} [H_i\widetilde{X}(u)]^i.$$

Daqui,

$$\begin{aligned}\Delta_M f(\pi(u)) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(\pi(u))) \\ &= \sum_{i=1}^{d} [H_i \widetilde{\operatorname{grad} f}(u)]^i \\ &= \sum_{i=1}^{d} H_i H_i \widetilde{f}(u) \\ &= \Delta_{\mathcal{O}(M)} \widetilde{f}(u).\end{aligned}$$

Portanto, O laplaciano horizontal de Bochner $\triangle_{\mathcal{O}(M)}$ é o levantamento horizontal do operador laplaciano de Beltrami $\triangle_M$ no fibrado de bases ortonormais $\mathcal{O}(M)$. $\square$

Gostaríamos de mostrar que o operador laplaciano de Beltrami $\triangle_M$, pode ser escrito como a soma de $d = dim(M)$ campos sobre TM. Mas o laplaciano horizontal de Bochner $\triangle_{\mathcal{O}(M)}$ pode ser descrito desta maneira. Então, pela relação descrita na proposição anterior, é possível escrever $\triangle_M$ como uma suma de quadrados, mas isto acontece se mergulhamos M isométricamente, como uma subvariedade de algum espaço euclideano. O teorema de mergulho de Nash assegura que tais mergulhos sempre existem.

Teorema 2.13. {*Teorema de mergulho de Nash*}
Toda variedade Riemanniana pode ser mergulhada isometricamente em algum espaço euclidiano com a métrica padrão.

Suponhamos então que M está mergulhada isométricamente em $\mathbb{R}^n$ (isto é, que a métrica em M induzida por $\mathbb{R}^n$ coincide com a métrica inicial de M). Seja $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Para cada $x \in M$, consideramos $P_\alpha(x)$ a projeção ortogonal de ξ_α a T_xM. Assim P_α é um campo de vetores sobre M. No próximo teorema, damos uma caracterização do operador laplaciano de Beltrami sobre M em função deste campo de vetores.

Teorema 2.14. *Nas condições acima, temos*

$$\Delta_M = \sum_{\alpha=1}^{n} P_\alpha^2.$$

Demonstração. Denotemos por $\widetilde{\nabla}$ a derivada covariante em $\mathbb{R}^n$. Definamos, para $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$\nabla_X Y = \text{a projeção de } \widetilde{\nabla}_X Y \text{ a } T_xM,$$

É fácil verificar que ∇ é a conexão de Levi-Cevita sobre M. Seja $f \in C^\infty(M)$ e como o campo vetorial $\operatorname{grad} f$ é tangente a M, obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \sum_{\alpha=1}^{n} \mathrm{g}\left(\operatorname{grad} f, \xi_\alpha\right) \xi_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \mathrm{g}\left(\operatorname{grad} f, P_\alpha\right) P_\alpha. \end{aligned}$$

Logo, tomamos a divergência em ambos lados e utilizamos no lado direito a seguinte fórmula:

$$\operatorname{div}(hX) = Xh + h \operatorname{div} X$$

para $h \in C^\infty(M)$ e $X \in \Gamma(TM)$, temos

$$\begin{aligned}\Delta_M f &= \operatorname{div}\{\sum_{\alpha=1}^{n} \mathrm{g}\,(\operatorname{grad} f, P_\alpha)\, P_\alpha\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} P_\alpha\, \mathrm{g}\,(\operatorname{grad} f, P_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^{n} \mathrm{g}\,(\operatorname{grad} f, P_\alpha) \operatorname{div} P_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} P_\alpha P_\alpha f + \sum_{\alpha=1}^{n} P_\alpha(f) \operatorname{div} P_\alpha.\end{aligned}$$

Para provar o teorema bastará mostrar que o último termo se anula. De fato, lembramos que para $\{X_i\}$ qualquer base ortonormal de $T_x M$, temos a seguinte definição de divergência

$$\operatorname{div} P_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{d} \mathrm{g}\,(\nabla_{X_i} P_\alpha, X_i)\,.$$

Para simplificar o cálculo, consideramos $\{x^i\}$ um sistema de coordenadas normais de M em x, induzida pela aplicação exponencial e seja $X_i = \partial/\partial x^i$. Como $\nabla_{X_i} X_j$ se anula em x o que significa que em $\mathbb{R}^n$ a derivada covariante $\widetilde{\nabla}_{X_i} X_j$ é perpendicular a M. Agora, usando o fato que ∇ é compatible com a métrica, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{n} (\operatorname{div} P_\alpha) P_\alpha &= \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{d} \mathrm{g}\,(\nabla_{X_i} P_\alpha, X_i) \right\} P_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{d} \{X_i\, \mathrm{g}\,(P_\alpha, X_i) - \mathrm{g}\,(P_\alpha, \nabla_{X_i} X_i)\} \right\} P_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{d} X_i\, \mathrm{g}\,(P_\alpha, X_i) \right\} P_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{d} X_i\, \mathrm{g}_{\mathbb{R}^d}\,(\xi_\alpha, X_i) \right\} P_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \{ \sum_{i=1}^{d} \left\{ \mathrm{g}\left(\widetilde{\nabla}_{X_i} \xi_\alpha, X_i\right) + \mathrm{g}\left(\xi_\alpha, \widetilde{\nabla}_{X_i} X_i\right) \} \right\} P_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{d} \mathrm{g}\left(\xi_\alpha, \widetilde{\nabla}_{X_i} X_i\right) \right\} P_\alpha \\ &= \text{ a projeção de } \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} \mathrm{g}\left(\xi_\alpha, \widetilde{\nabla}_{X_i} X_i\right) \xi_\alpha \right\} \text{ em } T_p M \\ &= \text{ a projeção de } \left\{ \widetilde{\nabla}_{X_i} X_i \right\} \text{ em } T_p M \\ &= 0.\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Por último, faremos referência a seguinte identidade, que será utiliza em demonstrações posteriores.

Corolário 2.15. *Com as mesmas notações acima resulta*

$$\Delta_M f = \sum_{\alpha=1}^{n} \nabla^2 f(P_\alpha, P_\alpha)$$

2.5 Construção do Movimento Browniano sobre uma Variedade Riemanniana

Nesta seção, construímos o movimento Browniano sobre uma variedade Riemanniana (M, g) munida con uma métrica fixa g. O movimento Browniano será dado como um processo de difusão gerado por un operador laplaciano de Beltrami $\triangle_M/2$. A partir das propriedades do operador laplaciano de Beltrami, daremos duas construções do movimento Browniano: A primeira, é via levantamento horizontal estocástico e a segunda via mergulho isométrico de M no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ considerando as projeções ortogonais $P_\alpha(x)$ do espaço euclidiano no espaço tangente T_xM, para cada $x \in M$.

2.5.1 Primeira construção do Movimento Browniano

Seja M uma variedade Riemanniana equipada com uma conexão de Levi-Cevita ∇^M, e Δ_M o operador laplaciano de Beltrami sobre M. Temos mostrado no capítulo 1, que dada uma medida de probabilidade μ sobre M, existe uma única $\Delta_M/2$-medida de difusão $\mathbb{P}_\mu$ sobre um espaço de medida filtrado $(W(M), \mathfrak{B}_*)$ (onde $W(M)$ é o espaço de caminhos sobre M).

Lembramos que, um processo estocástico X a valores em M, é uma aplicação mensurável $X : \Omega \to W(M)$ (ou que é o mesmo que $X : \Omega \times \mathbb{R}^n \to M$) definido para algum espaço mensurável $(\Omega, \mathfrak{F})$. Assim, o movimento Browniano sobre M é um processo estocástico X a valores em M, cuja lei de probabilidade coincide com a medida de Wiener sobre um espaço de caminhos $W(M)$ (isto é, coincide com $\mathbb{P}_\mu$, uma $\Delta_M/2$-medida de difusão sobre $W(M)$). Na seguinte proposição damos equivalências importantes das definições do movimento Browniano sobre M.

Proposição 2.16. *Seja* $X : \Omega \to W(M)$ *uma aplicação mensurável definida sobre um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. *Seja* $\mu = \mathbb{P} \circ X_0^{-1}$ *sua distribuição inicial. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

(1) *O processo estocástico* X *é um* $\Delta_M/2$*-processo de difusão (a solução do problema da martingale para o operador* $\Delta_M/2$ *com respeito a sua filtração* $\mathfrak{F}_*^X$*) i.e.,*

$$M^f(X)_t \triangleq f(X_t) - (X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta_M f(X_s)\, ds, \quad 0 \le t < e(X),$$

é uma $\mathfrak{F}_*^X$*-martingale local, para todo* $f \in C^\infty(M)$

(2) *A lei* $\mathbb{P}^X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ *é uma medida de Wiener sobre* $(W(M), \mathfrak{B}(W(M)))$ *i.e.,* $\mathbb{P}^X = \mathbb{P}_\mu$.

(3) *O processo* X *é uma* $\mathfrak{F}_*^X$*-semimartingale sobre* M *cujo anti-desenvolvimento é um movimento Browniano euclidiano padrão.*

Um processo X *a valores em* M*, que satisfaz qualquer das condições acima é chamado de um movimento Browniano sobre a variedade Riemanniana* M*.*

Demonstração. A equivalência entre (1) e (2) foi discutida no capítulo 1. Em seguida, demonstraremos a equivalência entre (1) e (3).

(1) $\Longrightarrow$ (3). Assumamos que X é uma $\mathfrak{F}_*^X$-semimartingale sobre M. Seja U o levantamento horizontal de X e W seu correspondente anti-desenvolvimento. Então,

$$dU_t = H_i(U_t) \circ dW_t.$$

Assim W_t é um movimento Browniano euclidiano padrão. Agora seja $f \in C^\infty(M)$ e $\widetilde{f} = f \circ \pi$ seu levantamento sobre $\mathcal{O}(M)$. Aplicando a fórmula de Itô para $\widetilde{f}(U_t)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(U_t) &= \widetilde{f}(U_0) + \int_0^t \partial_{U_s}\widetilde{f}(U_s) \circ dW_s \\
&= f(\pi(U_0)) + \int_0^t H_i(\widetilde{f})(U_s) \circ dW_s \\
&= f(X_0) + \int_0^t H_i(\widetilde{f})(U_s) dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \nabla_{H_i} H_j(\widetilde{f})(U_s) d\langle W^i, W^j\rangle_s \\
&= f(X_0) + \int_0^t H_i(\widetilde{f})(U_s) dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t H_i H_j(\widetilde{f})(U_s) d\langle W^i, W^j\rangle_s.
\end{aligned}$$

Como W é um movimento Browniano euclidiano então $\langle W^i, W^j\rangle_t = \delta_{ij} t$ e pela Proposição 2.12, tem-se

$$\sum_{i=1}^d H_i^2 \widetilde{f}(u) = \Delta_{\mathcal{O}(M)} \widetilde{f}(u) = \Delta_M f(x),$$

onde $x = \pi(u)$. Assim

$$\int_0^t H_i(\widetilde{f})(U_s)dW_s = f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta_M f(X_s)ds$$
$$= M^f(X)_t,$$

que é de fato uma martingale local.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Seja X $\mathfrak{F}_*^X$-semimartingale sobre M, tal que o processo:

$$M^f(X)_t = f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta_M f(X_s)\,ds, \quad 0 \leq t < e(X),$$

é uma $\mathfrak{F}_*^X$-martingale local, para todo $f \in C^\infty(M)$. Suponhamos que M esta mergulhada isometricamente em R^n. Consideremos $f^\alpha(x) = x^\alpha$, $\quad \alpha = 1, ..., n$ funções coordenadas e $\widetilde{f^\alpha} = f^\alpha \circ \pi$ seus correspondentes levantamentos a $\mathcal{O}(M)$. Aplicamos as hipóteses para cada f^α então

$$M^{f^\alpha}(X)_t = X_t^\alpha - X_0^\alpha - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta_M f^\alpha(X_s), \tag{2.20}$$

é uma martingale local. Por outro lado, para U o levantamento horizontal de X e W seu correspondente anti-desenvolvimento, tínhamos

$$dU_t = H_i(U_t) \circ dW_t.$$

Daqui pela fórmula de Itô para cada $\widetilde{f^\alpha}(U_t)$, temos

$$f^\alpha(X_t) = f^\alpha(X_0) + \int_0^t H_i(\widetilde{f^\alpha})(U_s)dW_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t H_iH_j(\widetilde{f^\alpha})(U_s)d\langle W^i, W^j\rangle, \tag{2.21}$$

onde $H_iH_j(\widetilde{f^\alpha})(u) = \nabla^2\widetilde{f^\alpha}(ue_i, ue_j)$. Afirmamos que

$$\int_0^t \nabla^2 f^\alpha(dX_s, dX_s) = \int_0^t \Delta_M f^\alpha(X_s)ds. \tag{2.22}$$

Com efeito, para $f, g \in C^\infty(M)$ definamos,

$$\Gamma(f, g) = L(fg) - fL(g) - gL(f).$$

Logo, como X é uma $\Delta_M/2$-difusão, para o operador Γ definido acima tem-se

$$d\langle X^\alpha, X^\beta\rangle_t = d\langle M^{f^\alpha}, M^{f^\beta}\rangle_t = \Gamma(f^\alpha, f^\beta)dt, \tag{2.23}$$

mas para o operador $\Gamma = \Delta_M$ obtemos

$$\Delta_M(f, g) = \Delta_M(fg) - f\Delta_M(g) - g\Delta_M(f)$$

logo

$$\Gamma(f^\alpha, f^\beta) = \langle \nabla f^\alpha, \nabla f^\beta \rangle = \langle P_\alpha, P_\beta \rangle, \tag{2.24}$$

e pelo Corolário 2.15 segue que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \nabla^2 f(P_\alpha, P_\beta)\langle P_\alpha, P_\beta\rangle &= \sum_{\alpha=1}^{n} \nabla^2 f(P_\alpha, P_\alpha)\\ &= \Delta_M f.\end{aligned}$$

Assim, substituindo todo isto em um lado de (2.22), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \nabla^2 f^\alpha(dX_s, dX_s) &= \int_0^t \nabla^2 f^\alpha(P_\alpha, P_\beta)\langle P_\alpha, P_\beta\rangle ds\\ &= \int_0^t \Delta_M f^\alpha(X_s) ds,\end{aligned}$$

o que demonstra a afirmacão. Logo, comparando as equações (2.20) e (2.21) obtemos a seguinte igualdade

$$M^{f^\alpha}(X)_t = \int_0^t H_i(\widetilde{f})(U_s) dW_s^i. \tag{2.25}$$

Para mostrar que W é um movimento Browniano, usamos o critério de Levi. Seja $\{\xi_\alpha\}$ uma base canônica de $\mathbb{R}^n$, então para esta base vemos que

$$H_i(\widetilde{f})(u) = \langle \xi_\alpha, u e_i \rangle.$$

a partir deste fato, a equação (2.25) pode ser reescrita como

$$dM^{f^\alpha}(X)_t = \langle \xi_\alpha, U_t e_i \rangle dW_t^i$$

e multiplicando ambos lados por $\langle \xi_\alpha, U_t e_j \rangle$, resulta

$$dW_t^j = \langle \xi_\alpha, U_t e_j \rangle dM^{f^\alpha}(X)_t.$$

Logo, das equações (2.23) e (2.24) a variação quadrática de M^{f^α} é dada por

$$\begin{aligned}d\langle M^{f^\alpha}, M^{f^\beta} \rangle_t &= d\langle X^\alpha, X^\beta \rangle_t\\ &= \langle P_\alpha, P_\beta \rangle\, dt\end{aligned}$$

Assim,

$$d\langle W_t^i, W_t^j \rangle_t = \langle \langle \xi_\alpha, U_t e_i \rangle dM^{f^\alpha}(X)_t, \langle \xi_\alpha, U_t e_j \rangle dM^{f^\alpha}(X)_t \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \langle \xi_\alpha, U_t e_i \rangle \langle \xi_\alpha, U_t e_j \rangle \langle dM^{f^\alpha}(X)_t, dM^{f^\alpha}(X)_t \rangle \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \langle \xi_\alpha, U_t e_i \rangle \langle \xi_\alpha, U_t e_j \rangle \langle P_\alpha, P_\beta \rangle dt \\
&= \langle U_t e_i, U_t e_j \rangle dt \\
&= \delta_{ij} dt.
\end{aligned}
$$

Portanto, a variação quadrática de W é dada por

$$\langle W_t^i, W_t^j \rangle = \delta_{ij} t,$$

e pelo teorema de caracterização de Levi, W é um movimento Browniano euclidiano. □

2.5.2 Segunda construção do movimento Browniano

Seja M uma subvariedade do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, munida de uma métrica fixa g. O movimento Browniano sobre M pode ser obtido via solução de uma equação diferencial estocástica em M. Pelo Teorema 2.14 o operador laplaciano de Beltrami Δ_M pode ser escrito como uma soma de quadrados

$$\Delta_M = \sum_{\alpha=1}^{n} P_\alpha^2$$

onde, para $\{\xi_\alpha\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e cada $x \in M$, $P_\alpha(x)$ é a projeção ortogonal de ξ_α no $T_x M$. Cada P_α é um campo vetorial sobre M. Consideramos a seguinte equação diferencial estocástica sobre M, dado por um movimento Browniano euclideano W de dimensão n.

$$\begin{cases} dX_t &= P_\alpha(X_t) \circ dW^\alpha, \\ X_0 &= x \in M \end{cases} \tag{2.26}$$

que é uma equação diferenciável estocástica sobre M, pois P_α são campos de vetores sobre M. Ainda mais, a solução X_t é um processo de difusão gerado por $(1/2)\sum_{\alpha=1}^{n} P_\alpha^2 = (1/2)\Delta_M$. Pela fórmula de Itô, para $f \in C^\infty(M)$ qualquer, obtemos que

$$f(X_t) = f(X_0) + M_t^f + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta_M f(X_s) ds, \quad 0 \le t < e,$$

onde o processo:

$$M_t^f = \int_0^t P_\alpha f(X_s) \cdot dW_s^\alpha$$

é uma martingale local, e pela Proposição 2.16 a solução X_t da equação (2.26), constitui um movimento Browniano sobre M.

Exemplo 2.17. *Assim, para $M = S^d$ a esfera d-dimensional mergulhada em $\mathbb{R}^{d+1}$, dada por:*

$$S^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1}; \quad \|x\|^2 = 1\}$$

Seguiremos a construção de acima para o movimento Browniano B_t, sobre $(S^n,\, g)$. Sejam $\xi \in \mathbb{R}^{d+1}$ e $x \in S^d$ arbitrários temos que a projeção ortogonal de ξ no espaço tangente $T_x S^d$, está dada por

$$P(x)\xi = \xi - \mathrm{g}\,(\xi,\, x)\, x.$$

Logo a matriz de $P(x)$ estará dada por

$$\begin{aligned}(P(x))_{ij} &= \mathrm{g}\,(P(x)\xi_i,\, \xi_j)\\ &= \mathrm{g}\,(\xi_i - \mathrm{g}\,(\xi_i, x)\, x,\, \xi_j)\\ &= \mathrm{g}\,(\xi_i,\, \xi_j) - \mathrm{g}\,(\xi_i,\, x)\, \mathrm{g}\,(x,\, \xi_j)\\ &= \delta_{ij} - x_i x_j,\end{aligned}$$

onde $\{\xi_i\}_{i=1}^{d+1}$ é base canônica de $\mathbb{R}^{d+1}$. Assim substituindo isto na equação (2.26) resulta que a solução B_t da equação

$$\begin{cases} dX_t^i = (\delta_{ij} - X_t^i X_t^j) \circ dW_t^j, \\ X_0^i \in S^d \end{cases}$$

equivalentemente

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t (\delta_{ij} - X_s^i X_s^j) \circ dW_s^j, \quad X_0 \in S^d$$

constitui um movimento Browniano sobre S^d.

Capítulo 3

Movimento Browniano em Variedades Riemannianas $(M, g(t))$ com respeito a métricas que dependem do tempo

No capítulo anterior, apresentamos duas construções do movimento Browniano sobre uma variedade Riemanniana (M, g), com respeito a uma métrica fixa g. A primeira foi via levantamento horizontal de uma semimartingale que toma valores em M, no fibrado de bases ortonormais $\mathcal{O}(M)$ e a segunda foi via mergulho isométrico de M no espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$. Neste capítulo, consideramos sobre M uma família de métricas $\{g(t)\}_{t\in[0,T]}$ que dependem diferenciávelmente do tempo e apresentaremos duas construções do movimento Browniano sobre a variedade Riemanniana $(M, g(t))$, para cada $t \in [0, T]$. Chamamos a este processo de $g(t)$-movimento Browniano. Em seguida, damos alguns exemplos deste processo sobre algumas variedades Riemannianas conhecidas (como: a Esfera e o Cilindro) com métricas variando no tempo.

Também, definimos o transporte paralelo amortiguado ao longo do $g(t)$-movimento Browniano e damos condições para que este seja de fato uma isometria. Em geral, parte destas discussões serão feitas em base aos trabalhos de M. Arnaudon, K.A. Coulibaly and A. Thalmaier [7] e A.K. Coulibaly [1].

Na última seção, mergulhando isométricamente M em $\mathbb{R}^{n+1}$, consideramos ao fluxo de curvatura média $M_t = F(t, M)$ da hipersuperficie $M = M_0$. Para ver mais detalhes sobre isto, ver k. Ecker [6] e G. Huisken [3]. Dotamos a M da família de métricas dadas pelo Pull-Back de $F(t,\cdot)$ da métrica induzida sobre M_t e caracterizamos a dito fluxo de curvatura média em termos do $g(t)$-movimento Browniano. Por último, damos uma estimação do tempo de explosão em termos do diâmetro da hipersuperficie inicial M_0.

3.1 O $g(t)$-movimento Browniano

Nesta seção, apresentamos duas construções do movimento Browniano sobre uma variedade Riemanniana, onde a variedade sera munida de uma família de métricas que dependem do tempo.

Seja M uma variedade Riemanniana compacta, conexa e de dimensão n. Seja $\{g(t)\}_{t\in[0,T]}$ em $C^{1,2}$, uma família de métricas Riemannianas sobre M. Associados a esta família $\{g(t)\}_{t\in[0,T]}$ de métricas temos uma família de conexões de Levi-Civita $\nabla^{g(t)}$ e uma família de operadores laplaciano de Beltrami $\Delta_{g(t)}$. Assim, o movimento Browniano sobre $(M, g(t))$, pode ser definido com respeito a cada métrica $g(t)$ da seguinte maneira.

Definição 3.1. *Fixemos por,* $(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade filtrado e* $\{g(t)\}_{t\in[0,T]}$ *uma* $C^{1,2}$*-família de métricas Riemannianas sobre* M*. Um processo* X*, que toma valores em* M *é chamado de um* $g(t)$*-movimento Browniano sobre* M*, com valor inicial* $x \in M$ *se para cada* $f \in C^\infty(M)$*, tem-se que o processo*

$$M^f(X)_t = f(X_t(x)) - f(x) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta_{g(s)} f(X_s(x))ds$$

é uma martingale local.

3.1.1 Construção do $g(t)$-movimento Browniano via levantamento horizontal

Seguindo o procedimento que fizemos para o caso de uma métrica fixa, passamos a definir os campos horizontais sobre $\mathcal{F}(M)$. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, para cada $u \in \mathcal{F}(M)$ definamos:

$$L_i(t, u) = (ue_i)^{*_t} = h^{g(t)}(ue_i)$$

isto é, $L_i(t, u)$ é o $\nabla^{g(t)}$-levantamento horizontal de $ue_i \in T_{\pi(u)}M$ a $u \in \mathcal{F}(M)$. Observamos que, para cada $u \in \mathcal{F}(M)$, estes n campos horizontais fundamentais sobre $\mathcal{F}(M)$, geram o espaço de campos horizontais $H_u\mathcal{F}(M)$. Seja $E_{\alpha,\beta}$ a base canônica de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ e

$$l_u \colon GL(n, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(M)$$

é a multiplicação a esquerda definida por $l_u(g) = g \cdot u$. Denotemos por $V_{\alpha,\beta}$, a base canônica dos campos verticais sobre $\mathcal{F}(M)$ definida por

$$V_{\alpha,\beta}(u) = Dl_u(E_{\alpha,\beta}).$$

Para cada $t \in [0, T]$, denotemos por $\mathcal{O}(M)_t = (\mathcal{O}, g(t))$ o $g(t)$-fibrado de bases ortonormais. Podemos restringir nosso estudo sobre este espaço, do seguinte modo.

Proposição 3.2. *Sejam* $\{g(t)\}_{t\in[0,T]}$ *uma* $C^{1,2}$*-família de métricas sobre* M*, e uma matriz*

$$\begin{array}{rccc} A: & [0,T] \times \mathcal{F}(M) & \to & \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \\ & (t, U) & \mapsto & (A_{\alpha,\beta}(t, U)) \end{array}$$

que é localmente Lipschitz em U *uniformemente em todo compacto de* t*. Consideremos a equação diferencial estocástica do tipo Stratonovich em* $\mathcal{F}(M)$*, dada por:*

$$\begin{cases} dU_t = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i(t, U_t) \circ dW^i + \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(t, U_t) V_{\alpha,\beta}(U_t) dt \\ U_0 \in \mathcal{F}(M), \quad \textit{tal que} \quad U_0 \in \mathcal{O}(M)_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Então, existe uma única escolha para A*, tal que* $U_t \in \mathcal{O}(M)_t$*. Além disso,*

$$A(t, U) = -\frac{1}{2} \partial_1 G(t, U),$$

onde $(\partial_1 G(t, U))_{i,j} = \partial_1 \, \mathrm{g}(t, x) \, (Ue_i, Ue_j)$*.*

Demonstração. Fixemos $\{g(t)\}_{t\in[0,T]}$ a $C^{1,2}$-família de métricas Riemannianas sobre a variedade M e $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Para a família de isomorfismos $\{U_t\}_{t\in[0,T]}$ temos que $\{U_t e_1, ..., U_t e_n\}$ constitui uma base do espaço tangente $T_{\pi(u)}M$. Observamos que, se

$$\mathrm{g}(t, \pi(u)) \; (U_t e_i, U_t e_j) = cte \tag{3.2}$$

para cada $t \in [0, T]$, e em particular para $t = 0$, tem-se que $\mathrm{g}(t, \pi(u)) \; (U_0 e_i, U_0 e_j) = 0$. Daí $U_t \in \mathcal{O}(M)_t$ para cada t. Assim, basta mostrar a equação (3.2). Com efeito, aplicando a fórmula de Itô à função

$$f(t, u) = \mathrm{g}(t, u) \, (ue_i, ue_j)$$

e considerando a equação (3.1), temos

$$\begin{aligned} df(t, U_t) = {} & \partial_t f(t, U_t) dt + \sum_{i=1}^{n} L_i(t, U_t) f(t, U_t) \circ dW_t^i + \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(t, U_t) V_{\alpha,\beta}(U_t) f(t, U_t) dt \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} L_i^2(t, U_t) f(t, U_t) dt \end{aligned} \tag{3.3}$$

Mas, para cada $i = 1, ..., n$

$$\begin{aligned}
L_i f(t, U_t) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=t} f(t, u_s) \\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=t} \mathrm{g}(t, \pi(u_s))\,(u_s e_i, u_s e_j) \\
&= \mathrm{g}(t, x_s)\ \left(\nabla^{g(t)}_{\dot{x}_s} u_s e_i, u_s e_j\right)\Big|_{s=t} + \mathrm{g}(t, x_s)\ \left(u_s e_i, \nabla^{g(t)}_{\dot{x}_s} u_s e_j\right)\Big|_{s=t} \\
&= \mathrm{g}(t, x_t)\ \left(\nabla^{g(t)}_{\dot{x}_t} u_t e_i, u_t e_j\right) + \mathrm{g}(t, x_t)\ \left(u_t e_i, \nabla^{g(t)}_{\dot{x}_t} u_t e_j\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

a última igualdade provem do fato que o campo de vetores $\{u_t e\}$ é o paralelo ao longo da curva $\{x_t = \pi(u_t)\}$. Denotamos a derivada $\partial_s f(t, u)$ avaliada em t, por $\partial_1 \mathrm{g}(t, x)\,(u_s e_i, u_s e_j)$ e substituindo $L_i f \equiv 0$ na equação (3.3) obtemos que

$$df(t, U_t) = \partial_1 \mathrm{g}(t, x)\,(U_t e_i, U_t e_j)dt + \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(t, U_t) V_{\alpha,\beta}(U_t) f(t, U_t) dt \tag{3.4}$$

Mas, observamos que por definição o campo

$$\begin{aligned}
V_{\alpha,\beta}\, f(t, U) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathrm{g}(t, x)\ (U(Id + sE_{\alpha,\beta})e_i, U(Id + sE_{\alpha,\beta})e_j) \\
&= \mathrm{g}(t, x)\ (UE_{\alpha,\beta} e_i, Ue_j) + \mathrm{g}(t, x)\ (Ue_i, UE_{\alpha,\beta} e_j) \\
&= \mathrm{g}(t, x)\ (U\delta_{i,\alpha} e_\beta, Ue_j) + \mathrm{g}(t, x)\ (Ue_i, U\delta_{j,\alpha} e_\beta) \\
&= \delta_{i,\alpha}\, \mathrm{g}(t, x)\ (Ue_\beta, Ue_j) + \delta_{j,\alpha}\, \mathrm{g}(t, x)\ (Ue_i, Ee_\beta) \\
&= \delta_{i,\alpha}\, (G(t, U))_{\beta,j} + \delta_{j,\alpha}\, (G(t, U))_{i,\beta}\,.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Para simplificar a notação, na equação (3.5) consideramos

$$(G(t, U))_{ij} = \mathrm{g}(t, x)\,(Ue_i, Ue_j)$$

$$\partial_1 (G(t, U_t))_{ij} = \partial_1 \mathrm{g}(t, x)\,(U_t e_i, U_t e_j)$$

Substituindo isto em (3.4) temos

$$\begin{aligned}
df(t, U_t) &= \partial_1 \mathrm{g}(t, x)\,(U_t e_i, U_t e_j)dt + \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(t, U_t)\delta_{i,\alpha}\,(G(t, U_t))_{\beta,j}\, dt \\
&\quad + \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(t, U_t)\delta_{j,\alpha}\,(G(t, U_t))_{i,\beta} \\
&= \Bigg[(\partial_1 G(t, U_t))_{ij} + \sum_{\beta=1}^{n} A_{\beta,i}(t, U_t)(G(t, U_t))_{\beta,j} \\
&\quad + \sum_{\beta=1}^{n} A_{\beta,j}(t, U_t)(G(t, U_t))_{i,\beta}\Bigg]\, dt \\
&= \left[(\partial_1 G(t, U_t))_{ij} + (G(t, U_t)A(t, U_t))_{ij} + (G(t, U_t)A(t, U_t))_{ji}\right] dt
\end{aligned}$$

Mas, para que $df(t, U_t) = d\,\mathrm{g}(t, \pi(u))\ (U_t e_i, U_t e_j) = 0$, para todo $t \in [0, T]$, debemos ter

$$(G(t, U_t)A(t, U_t))_{ij} + (G(t, U_t)A(t, U_t))_{ji} = -(\partial_1 G(t, U_t))_{ij} \tag{3.6}$$

Observemos que a partir da equação (3.6), tem-se que se

$$A(t, U) = -\frac{1}{2}G^{-1}(t, U)\,\partial_1 G(t, U)$$

então $d\,\mathrm{g}(t, \pi(u))\ (U_t e_i, U_t e_j) = 0$. Portanto, para esta escolha de A tem-se que $G(t, U_t) = \mathrm{Id}$ de onde $U_t \in \mathcal{O}(M)_t$. Ainda mais, se U_t satisfaz

$$dU_t = \sum_{i=1}^{n} L_i(t, U_t) \circ dW^i - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(G^{-1}(t, U)\,\partial_1 G(t, U))_{\alpha,\beta} V_{\alpha,\beta}(U_t)dt,$$

onde $U_0 \in \mathcal{O}(M)_{\{t=0\}}$, então $G(t, U_t) = \mathrm{Id}$. Portanto $G^{-1}(t, U_t) = \mathrm{Id}$ e assim

$$A(t, U) = -\frac{1}{2}\,\partial_1 G(t, U),$$

onde $(\partial_1 G(t, U))_{\alpha,\beta} = \partial_1\,\mathrm{g}(t, x)\,(Ue_\alpha, Ue_\beta)$. Logo, pelo teorema de existência e unicidade de soluções concluímos a demonstração da proposição. $\square$

Assim, temos o processo $U_t \in \mathcal{O}(M)_t$ como solução de uma equação diferencial estocástica e ainda mais, tal U_t é isometria. Em base a este processo definiremos o $g(t)$-movimento Browniano $X_t(x)$ e o $g(t)$-transporte paralelo. Mas para isto precisaremos de uma generalização da seguinte proposição:

Proposição 3.3. *Seja* $X \in \Gamma(TM)$ *e* $\theta \in \Gamma(T^*M)$ *então a escalarirazação da derivada covariante* $\nabla_X\theta$ *é dada por:*

$$\widetilde{\nabla_X\theta} = X^*\widetilde{\theta}$$

onde X^* *é o levantamento horizontal de* X*.*

Demonstração. Sem perda de generalidade consideremos $\theta = Y$ um campo vetorial. Sejam $\{x_t = x(t)\}$ uma curva diferenciável em M, tal que $\dot{x}(0) = X$ e $\{u_t = u(t)\}$ o levantamento horizontal da curva $\{x_t\}$, começando em u_0. Consideramos o transporte paralelo ao longo da curva $\{x_t\}$ dado por:

$$//_{0,t} = u_t u_0^{-1} \colon T_{x(0)} \to T_{x(t)}M$$

onde $u_t \colon \mathbb{R}^d \to T_{x(t)}M$ é uma base em $\mathcal{F}(M)$.

Observamos que, a derivada covariante do campo Y ao longo do campo X é dado por

$$(\nabla_X Y) = \frac{d}{dt}(//_{0,t})^{-1} Y(x_t) \tag{3.7}$$

onde a derivada é avaliada em $t = 0$. De fato, observamos que o transporte paralelo $//_{0,t} = u_t u_0^{-1}$ é uma isometria linear.

Sejam $W_0, V_0 \in T_{x(0)}M$ com $V(t) = //_{0,t}(V_0)$ e $W(t) = //_{0,t}(W_0)$ seus respectivos transportes paralelos ao longo da curva $\{x(t)\}$. Então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\mathrm{g}\,(V(t),\, W(t)) &= \mathrm{g}\left(\frac{D}{dt}V(t),\, W(t)\right) + \mathrm{g}\left(V(t),\, \frac{D}{dt}W(t)\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Mas, para $t = 0$ temos que $\mathrm{g}\,(V(0),\, W(0)) = \mathrm{g}\,(V_0,\, W_0)$. Assim

$$\mathrm{g}\,(//_{0,t}(V_0),\, //_{0,t}(W_0)) = \mathrm{g}\,(V_0,\, W_0)$$

Para $W \in T_{x(0)}M$ arbitrário, temos $\|//_{0,t}(W)\| = \|W\|$ o que significa que $//_{0,t}$ é injetiva e como $\dim T_{x(0)}M = \dim T_{x(t)}M$, então $//_{0,t}$ é bijetiva. Pela definição de campo paralelo vemos claramente que $//_{0,t}$ é uma aplicação linear. Assim, $//_{0,t}$ é uma bijeção linear entre espaços vetoriais que preserva produto interno, por tanto $//_{0,t}$ é uma isometria linear.

Agora mostremos (3.7), para isto consideremos $\{e_1(0), ..., e_d(0)\}$ uma base ortonormal de $T_{x(0)}M$, com $d = \dim T_{x(0)}M$. Então $\{e_1(t) = u_t e_1(0), ..., e_d(t) = u_t e_n(0)\}$ constitui uma base ortonormal de $T_{x(t)}M$. Assim

$$Y(x(t)) = \sum_{i=1}^{d} a_i(t) e_i(t)$$

onde $\{a_i(t)\}_{i=1}^d$ são as coordenadas do campo $Y(x(t))$ na base $\{e_i(t)\}_{i=1}^d$. Logo, tomando a diferenciação covariante de ambos lados na equação anterior, ao longo do campo X e usando o fato que $\{e_i(t)\}_{i=1}^d$ é paralelo ao longo da curva $x(t)$, temos

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{d} \dot{a}_i(0) e_i(0). \tag{3.8}$$

Por outro lado,

$$(//_{0,t})^{-1} Y(x(t)) = \sum a^i(t)(//_{0,t})^{-1}(e_i(t)) = \sum a_i(t) e_i(0),$$

e derivando esta equação com respeito a t, tem-se

$$\frac{d}{dt}(//_{0,t})^{-1}Y(x(t)) = \sum a_i(0)e_i(0)$$

de onde, por comparação com a equação (3.8), obtemos

$$\nabla_X Y = \frac{d}{dt}(//_{0,t})^{-1}Y(x(t))$$

como queríamos. Logo, pela definição de levantamento horizontal de X, temos que $X^* = \dot{u}_0$. Assim, a partir de

$$\tilde{Y}(u(t)) = u_t^{-1}Y(x(t)) = u_0^{-1}(//_{0,t})^{-1}Y(x(t))$$

tem-se

$$\begin{aligned} X^*\tilde{Y} &= \frac{d}{dt}\tilde{Y}(u(t)) \\ &= u_0^{-1}\frac{d}{dt}(//_{0,t})^{-1}Y(x(t)) \\ &= u_0^{-1}\nabla_X Y(x(0)) \\ &= \widetilde{\nabla_X Y}. \end{aligned}$$

Assim, a proposição fica demonstrada. □

Para fazer uma generalização deste resultado a nosso contexto, denotamos por:

$$\begin{array}{rccl} F_\theta\colon & \mathcal{F}M & \to & \mathbb{R}^d \\ & u & \mapsto & F_\theta^i(u) = \theta_{\pi(u)}(ue_i) \end{array}$$

a escalarização de $\theta \in \Gamma(T^*M)$, onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base canônica de $\mathbb{R}^d$. Assim, pela proposição anterior temos que, para todo $A \in \Gamma(TM)$ a escalarização da derivada covariante de θ ao longo de A, é dada pelo levantamento horizontal de A e da escalarização de θ, isto é,

$$(\widetilde{\nabla_A \theta})_{\pi(U)}(Ue_i) = h(A_{\pi(U)})F_\theta^i.$$

Fazendo variar a métrica, obtemos que $\nabla^{g(t)}$ e $h^{g(t)}$ dependem do tempo. Assim, para $\theta = df$ e todo $u \in \mathcal{F}M$, a equação anterior toma a seguinte forma:

$$\left(\widetilde{\nabla_A^{g(t)} df}\right)_{\pi(U)}(Ue_i) = h^{g(t)}\left(A_{\pi(U)}\right)F_{df}^i.$$

Observemos que para $f \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} L_i(t)(f \circ \pi)(U) &= d(f \circ \pi)L_i(t, U) \\ &= (df)_{\pi(U)}(Ue_i) \\ &= F^i_{df}(U) \end{aligned}$$

Usando isto, vemos que

$$\begin{aligned} L_i(t)L_j(t)(f \circ \pi)(U) &= L_i(t)\big[L_j(t)(f \circ \pi)(U)\big] \\ &= L_i(t)\big[F^j_{df}\,(U)\,\big] \\ &= h^{g(t)}\,(Ue_i)\,F^j_{df} \\ &= \left(\widetilde{\nabla^{g(t)}_{Ue_i} df}\right)(Ue_j) \\ &= \nabla^{g(t)} df\,(Ue_i,\, Ue_j) \end{aligned}$$

Pelo feito acima, estamos nas condições de demonstrar a seguinte proposição, onde se apresenta a construção do $g(t)$-movimento Browniano via os campos horizontais $L_i(t, \cdot)$.

Proposição 3.4. *Suponhamos que U_t satisfaz, a equação diferencial estocástica do tipo Stratonovich em $\mathcal{F}(M)$, dada por:*

$$\begin{cases} dU_t = \displaystyle\sum_{i=1} L_i(t, U_t) \circ dW^i - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \partial_1 G(t, U_t)_{\alpha,\beta} V_{\alpha\beta}(U_t)dt \\ U_0 \in \mathcal{F}(M) \ \text{tal que}\ U_0 \in (\mathcal{O}_x(M), g(0)). \end{cases} \tag{3.9}$$

Então, o processo $X_t = \pi(U_t)$ com valor inicial x, é um $g(t)$-movimento Browniano sobre $(M, g(t))$.

Demonstração. Pela Definição 3.1, o processo X_t será um $g(t)$-movimento Browniano se, para todo $f \in C^\infty(M)$ o processo

$$M^f(X)_t = f(X_t) - f(x) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta_{g(t)} f(X_s)ds \tag{3.10}$$

é uma martingale local. Observemos que a equação (3.10) equivale a

$$d(M^f(X)_t) = d(f(X_t)) - \frac{1}{2}\Delta_{g(t)} f(X_t)dt$$

isto é, $d(f(X_t))$ é igual $\frac{1}{2}\Delta_{g(t)} f(X_t)dt$ a menos de uma martingale local. Mostremos isto, seja $f \in C^\infty(M)$ e $\widetilde{f} = f \circ \pi$ seu levantamento a $\mathcal{O}(M)$, aplicando a fórmula de Itô a

$\widetilde{f}(U_t)$ obtemos

$$\begin{aligned} d(f(X_t)) &= d(f \circ \pi \circ U_t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} L_i(t)(f \circ \pi)(U_t) dW^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} L_i(t) L_j(t)(f \circ \pi)(U_t)\ \mathrm{g}\left(dW^i,\, dW^j\right)_t \\ &\overset{d\mathcal{M}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \nabla^{g(t)}\, df(U_t e_i,\, U_t e_i)\, dt, \end{aligned}$$

onde a última equação, denota igualdade a menos de martingale local. Logo, como $U_t \in \mathcal{O}(M)_t$ então

$$d(f(X_t)) \overset{d\mathcal{M}}{=} \frac{1}{2} \Delta_{g(t)} f(\pi \circ U_t) dt \overset{d\mathcal{M}}{=} \frac{1}{2} \Delta_{g(t)} f(X_t) dt$$

como queríamos mostrar. □

Definimos o $g(t)$-transporte paralelo ao longo do $g(t)$-movimento Browniano, por $//_{0,t} = U_t \circ U_0^{-1}$ onde U_t é solução da equação (3.9). Dizemos que ele é transporte paralelo, pois é uma extensão natural do transporte paralelo usual no caso de uma métrica constante. Da demostração da Proposição 3.3, o $g(t)$-transporte paralelo

$$//_{0,t} \colon T_{X_0}(M,\, g(0)) \to T_{X_t}(M,\, g(t))$$

é uma isometria linear.

Consideramos uma base ortonormal $\{v_1, ..., v_n\}$ de $T_{X_0}(M,\, g(0))$. Para um $g(t)$-movimento Browniano como na Proposição 3.4, temos

$$dX_t = //_{0,t} v_i \circ dW_t^i \tag{3.11}$$

Assim, a fórmula de Itô dada por

$$df(X_t) = \mathrm{g}(t, x_0)\ \left(\nabla^{g(t)} f,\, //_{0,t}\, v_i\right) dW^i + \frac{1}{2}\, \Delta_{g(t)}\, f(X_t)\, dt. \tag{3.12}$$

para $f \in C^2(M)$.

3.1.2 Construção do $g(t)$-movimento Browniano via mergulho isométrico

Fixamos $\{\mathrm{g}_t = g(t)\}_{t \in [0,T]}$ uma $C^{1,2}$-família de métricas Riemannianas sobre M. Consideramos a variedade produto $N = M \times [0, T]$, e munindo a esta variedade com a métrica produto dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{g}_*: \quad T(M\times[0,T])\times T(M\times[0,T]) & \to & \mathbb{R} \\ (\,(u,\,a\partial_t),(v,\,b\partial_t)\,) & \mapsto & \mathrm{g}_t(u,v)+ab \end{array}$$

onde a e b são constantes positivas em $\mathbb{R}$. Observamos que de fato, g_* define uma métrica em $N = M \times [0, T]$, isto é que g_* é uma forma bilinear, simétrica e definida positiva, pois g_t o é uma métrica para todo $t \in [0, T]$. Seja

$$I : (N, \mathrm{g}_*) \longrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \mathrm{g}_{\text{cân}})$$

o mergulho isométrico, onde

$$\begin{aligned} \mathrm{g}_{\text{cân}}\left((dI)_{(x,t)}(u, a\partial_t), (dI)_{(x,t)}(v, b\partial_t)\right)_{(x,t)} &= \mathrm{g}_*\left((u, a\partial_t), (v, b\partial_t)\right)_{(x,t)} \\ &= \mathrm{g}_t(u, v) + ab\,\mathrm{g}(\partial_t, \partial_t) \\ &= \mathrm{g}_t(u, v) + ab. \end{aligned}$$

Assim, a métrica g_* em $N = M \times [0, T]$, é tomada de modo que $N = M \times [0, T]$ seja mergulhada isométricamente como uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$. Denotemos por $\widetilde{N} = I(N)$ e $M_t = I(M, t)$ para cada $t \in [0, T]$. Logo a aplicação,

$$\begin{array}{rcl} I_t : M & \longrightarrow & M_t \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \\ x & \longmapsto & I_t(x) = I(x, t) \end{array}$$

é um difeomorfismo sobre sua imagem $M_t = I(M, t)$. Para cada $p = I(x, t) \in M_t \subseteq \widetilde{N}$, denotemos por $\widetilde{P}_\alpha(p)$ a projeção ortogonal do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ no espaço tangente $T_p\widetilde{N}$ e por

$$P^t_\alpha(p) = P_1\left(\widetilde{P}_\alpha(p)\right),$$

a projeção ortogonal sobre o espaço tangente $T_p(M_t)$. Assim, temos os campos P^t_α sobre $\widetilde{N}$e consideramos a equação diferencial estocástica sobre $\widetilde{N}$ dada por:

$$\begin{cases} dX_t = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n+1} P^t_\alpha(X_t) \circ dW^\alpha, \\ X_0 \in M_0 \end{cases} \tag{3.13}$$

onde, W é o movimento Browniano euclidiano $n+1$-dimensional. Observe que a solução X_t da equação (3.13) está em M_t para cada t. Para cada $p \in M_t$, assuma que

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} (P^t_\alpha)^2 (f \circ I_t^{-1})(p) = (\Delta_{\mathrm{g}_t} f) \circ I_t^{-1}(p), \tag{3.14}$$

se cumpre, para cada $f \in C^\infty(M)$. Definimos $\varphi : \widetilde{N} \to M$ por $\varphi(p) = P_1 \circ I^{-1}(p)$ para todo $p \in \widetilde{N} = I(N)$. Ainda mais, observamos que para todo $p = I(x,t) \in M_t$ tem-se

$$f \circ I_t^{-1}(p) = f(x) = f \circ \varphi(p) \tag{3.15}$$

para cada $f \in C^\infty(M)$. Logo o processo $Y_t = \varphi(X_t)$ constitui um movimento Browniano sobre (M, g_t). De fato, seja $f \in C^\infty(M)$ e utilizando as equações (3.14) e (3.15) temos

$$\begin{aligned} d(f \circ \varphi(X_t)) &= \sum_{\alpha=1}^{n+1} P_\alpha^t (f \circ \varphi)(X_t) \circ dW^\alpha \\ &\overset{d\mathcal{M}}{=} \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n+1} (P_\alpha^t)^2 (f \circ \varphi)(X_t)\, dt \\ &\overset{d\mathcal{M}}{=} \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n+1} (P_\alpha^t)^2 (f \circ I_t^{-1})(X_t)\, dt \\ &\overset{d\mathcal{M}}{=} \frac{1}{2} (\Delta_{g_t} f) \circ I_t^{-1}(X_t)\, dt \\ &\overset{d\mathcal{M}}{=} \frac{1}{2} (\Delta_{g_t} f) \circ \varphi(X_t)\, dt. \end{aligned}$$

Portanto

$$df(Y_t) \overset{d\mathcal{M}}{=} \frac{1}{2} \Delta_{g_t} f(Y_t)$$

o que significa, que o processo Y_t é um movimento Browniano sobre (M, g_t).

Teorema 3.5. *A seguinte identidade*

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} (P_\alpha^t)^2 (f \circ I_t^{-1}) = (\Delta_{g(t)} f) \circ I_t^{-1},$$

vale para cada $f \in C^\infty(M)$ *e* I_t *como acima.*

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(M)$ e $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ uma base ortonormal do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Observe que, I_t é uma isometria para cada $t \in [0, T]$, pois I é isometria. Assim, denotando por $f_t = f \circ I_t^{-1}$ temos que o campo $\operatorname{grad}_t f_t$ esta no espaço tangente de M_t, então ele é dado por;

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_t f_t &= \sum_{\alpha=1}^{n+1} \mathrm{g}_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\operatorname{grad}_{\mathbb{R}^{n+1}} f_t, P_1 \left(\widetilde{P}_\alpha(p) \right) \right) e_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n+1} \mathrm{g}_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\operatorname{grad}_{\mathbb{R}^{n+1}} f_t, P_\alpha^t \right) P_\alpha^t. \end{aligned}$$

Em seguida, tomando divergência a ambos lados, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_{g(t)} f_t &= \operatorname{div}_t(\operatorname{grad}_t f_t)\\
&= \operatorname{div}_t \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n+1} \mathrm{g}_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\operatorname{grad}_{\mathbb{R}^{n+1}} f_t, P_\alpha^t\right) P_\alpha^t \right\}\\
&= \sum_{\alpha=1}^{n+1} \left[P_\alpha^t\, \mathrm{g}_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\operatorname{grad}_{\mathbb{R}^{n+1}} f_t, P_\alpha^t\right) + \mathrm{g}_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\operatorname{grad}_{\mathbb{R}^{n+1}} f_t, P_\alpha^t\right) \operatorname{div}_t P_\alpha^t\right]\\
&= \sum_{\alpha=1}^{n+1} P_\alpha^t P_\alpha^t f_t + \sum_{\alpha=1}^{n+1} P_\alpha^t(f_t) \operatorname{div}_t P_\alpha^t.
\end{aligned}$$

Para cada $p \in M_t$, consideramos uma carta local $\{p = \{x^i\}\}$, tal que $\{X_1 = \partial/\partial x^1, ..., X_d = \partial/\partial x^d\}$ constitui uma base ortonormal de T_pM_t. Como $\nabla^{g(t)}_{X_i} X_j$ (onde, $\nabla^{g(t)}_{X_i} X_j$ denota a projeção de $\widetilde{\nabla}_{X_i} X_j$ a T_pM_t, para $\widetilde{\nabla}$ conexão em $\mathbb{R}^{n+1}$) se anula em p o que significa que em $\mathbb{R}^{n+1}$ a derivada covariante $\widetilde{\nabla}_{X_i} X_j$, é perpendicular a M_t. Usando o fato que $\nabla^{g(t)}$ é compatível com a métrica, tem-se que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{n+1} (\operatorname{div}_t P_\alpha^t) P_\alpha^t &= \sum_{\alpha=1}^{n+1} \left\{ \sum_{i=1}^{d} \mathrm{g}_t \left(\nabla^{g(t)}_{X_i} P_\alpha^t, X_i\right) \right\} P_\alpha^t\\
&= \sum_{\alpha=1}^{n+1} \left\{ \sum_{i=1}^{d} \{X_i\, \mathrm{g}_t \left(P_\alpha^t, X_i\right) - \mathrm{g}_t \left(P_\alpha^t, \nabla^{g(t)}_{X_i} X_i\right) \right\} P_\alpha^t\\
&= \sum_{\alpha=1}^{n+1} \left\{ \sum_{i=1}^{d} X_i\, \mathrm{g}_t \left(P_\alpha^t, X_i\right) \right\} P_\alpha^t\\
&= \sum_{\alpha=1}^{n+1} \left\{ \sum_{i=1}^{d} X_i\, \mathrm{g}_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(e_\alpha, X_i\right) \right\} P_\alpha^t\\
&= \sum_{\alpha=1}^{n+1} \left\{ \sum_{i=1}^{d} \mathrm{g}_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\widetilde{\nabla}_{X_i} e_\alpha, X_i\right) + \mathrm{g}_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(e_\alpha, \widetilde{\nabla}_{X_i} X_i\right) \right\} P_\alpha^t\\
&= \sum_{\alpha=1}^{n+1} \left\{ \sum_{i=1}^{d} \mathrm{g}_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(e_\alpha, \widetilde{\nabla}_{X_i} X_i\right) \right\} P_\alpha^t\\
&= \text{ a projeção de } \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{d} \mathrm{g}_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(e_\alpha, \widetilde{\nabla}_{X_i} X_i\right) e_\alpha \right\} \text{ em } T_pM_t\\
&= \text{ a projeção de } \left\{ \widetilde{\nabla}_{X_i} X_i \right\} \text{ em } T_pM_t\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como queríamos provar. ☐

3.2 Exemplos do $g(t)$-movimento Browniano

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos das construções do $g(t)$-movimento Browniano sobre algumas variedades conhecidas como a esfera e o cilindro.

3.2.1 O $g(t)$-movimento Browniano sobre a esfera

Seja $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, |x|^2 = 1\}$ a esfera de dimensão n. Equipamos a S^n com uma família de métricas $\{g(t) = (1+t)^2\,\mathrm{g}_{\text{cân}}\}_{t\in[0,T]}$, onde $\mathrm{g}_{\text{cân}}$ é a métrica no espaço euclidiano. Queremos construir o $g(t)$-movimento Browniano sobre $(S^n)_t$, para cada $t \in [0,T]$. Para isto, sobre $S^n \times [0,T]$ consideramos a métrica

$$\mathrm{g}_* = (1+t)^2\,\mathrm{g}_{\text{cân}} + ab,$$

para algumas constantes a e b em $\mathbb{R}$, de modo que

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & S^n \times [0,T] & \hookrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & (x,t) & \mapsto & f(t)x = (1+t)\cdot x \end{array}$$

é isometria. De fato, para $(x,t) \in S^n \times [0,T]$ sejam $u, v \in T_{(x,t)}(S^n \times [0,T])$, de modo que $(X(s), \alpha(s))$ e $(Y(s), \beta(s))$ sejam curvas em $S^n \times [0,T]$, tais que

$$u = (\dot{X}(0), \dot{\alpha}(0)) \quad \text{e} \quad v = (\dot{Y}(0), \dot{\beta}(0))$$

onde $X(0) = Y(0) = x$. Assim,

$$\begin{aligned} d\varphi \cdot u &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \varphi(X(s), \alpha(s)) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(\alpha(s)) \cdot X(s) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (1+\alpha(s)) \cdot X(s) \\ &= (1+\alpha(0)) \cdot \dot{X}(0) + \dot{\alpha}(0)x. \end{aligned}$$

Da mesma forma, para $v = (\dot{Y}(0), \dot{\beta}(0))$ temos que $d\varphi \cdot v = (1+\beta(0)) \cdot \dot{Y}(0) + \dot{\beta}(0)x$. Então,

$$\begin{aligned} \mathrm{g}_{\text{cân}}(d\varphi \cdot u, d\varphi \cdot v) &= \mathrm{g}_{\text{cân}}((1+\alpha(0)) \cdot \dot{X}(0) + \dot{\alpha}(0)x, (1+\beta(0)) \cdot \dot{Y}(0) + \dot{\beta}(0)x) \\ &= \dot{\alpha}(0) \cdot \dot{\beta}(0)\,\mathrm{g}_{\text{cân}}(x,x) + (1+t)^2\,\mathrm{g}_{\text{cân}}(\dot{X}(0), \dot{Y}(0)) \\ &= (1+t)^2\,\mathrm{g}_{\text{cân}}(\dot{X}(0), \dot{Y}(0)) + \dot{\alpha}(0) \cdot \dot{\beta}(0) \\ &= \mathrm{g}_*((\dot{X}(0)), (\dot{\alpha}(0)), (\dot{Y}(0)), (\dot{\beta}(0))) \\ &= \mathrm{g}_*(u,v). \end{aligned}$$

Por tanto, $S^n \times [0,T]$ é mergulhado isometricamente em $\mathbb{R}^{n+1}$, via a isometria φ. Logo, para cada $(x,t) \in S^n \times [0,T]$ definimos a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^{n+1}$ ao espaço tangente $T_{(x,t)}(S^n \times [0,T])$ como sendo;

$$\widetilde{P_\omega}(x,t) = \Pi_{T_{(x,t)}(S^n \times [0,T])}(p,t)\, e_i$$

Daqui, para cada $t \in [0,T]$, definamos a projeção ortogonal do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ no espaço tangente $T_x(S^n)_t$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
P_t(x) \cdot \omega &= P_1(\widetilde{P_\omega}(x,t)) \\
&= \omega - \mathrm{g}_t(\omega, x) \cdot x \\
&= \omega - (1+t)^2\, \mathrm{g}_{\text{cân}}(\omega, x) \cdot x.
\end{aligned}$$

onde $P_t(x) \cdot \omega = \omega$, se $\omega \in T_x(S^n)_t$ e $P_t(x) \cdot \omega = 0$ se $\omega \in \{T_x(S^n)_t\}^\perp$.

Assim para $\{e_\alpha\}$ uma base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$ e cada $x \in (S^n)_t$, a matriz de $P_t(x)$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}_t(P_t \cdot e_\alpha, e_\beta) &= (1+t)^2\ \mathrm{g}_{\text{cân}}(P_t \cdot e_\alpha, e_\beta) \\
&= (1+t)^2\ \mathrm{g}_{\text{cân}}(e_\alpha - (1+t)^2\ \mathrm{g}_{\text{cân}}(e_\alpha, x) \cdot x, e_\beta) \\
&= (1+t)^2\ \mathrm{g}_{\text{cân}}(e_\alpha, e_\beta) - (1+t)^4\ \mathrm{g}_{\text{cân}}(e_\alpha, x)\, \mathrm{g}_{\text{cân}}(x, e_\beta) \\
&= (1+t)^2\, \delta_{\alpha,\beta} - (1+t)^4 x_\alpha \cdot x_\beta.
\end{aligned}$$

Por tanto, o $g(t)$-movimento Browniano sobre $(S^n)_t$, esta dado pela solução da equação

$$X_t^\alpha = X_0^\alpha + \int_0^t \left((1+s)^2 \delta_{\alpha,\beta} - (1+s)^4 X_s^\alpha \cdot X_s^\beta\right) \circ dW_s^\beta,$$

com $X_0 \in (S^n)_t$.

3.2.2 O $g(t)$-movimento Browniano sobre o cilindro

Consideramos o cilindro de dimensão n, dado por

$$\mathcal{C}^n = \left\{ x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

Equipamos a $\mathcal{C}^n$ com uma família de métricas $\{g(t) = (1+t)^2\, \mathrm{g}_{\text{cân}} + vw\}_{t \in [0,T]}$ para alguns v e w em $\mathbb{R}$. O nosso objetivo é construir o $g(t)$-movimento Browniano sobre $(\mathcal{C}^n)_t$, para cada $t \in [0,T]$. Para isto, sobre $\mathcal{C}^n \times [0,T]$ consideramos a métrica

$$\mathrm{g}_*((\vec{v}, v_{n+1}), a\partial_t), ((\vec{w}, w_{n+1}), b\partial_t)) = (t+1)^2\, \mathrm{g}_{\text{cân}}(\vec{v}, \vec{w}) + v_{n+1} \cdot w_{n+1} + ab,$$

para $v = (\vec{v}, v_{n+1})$, $w = (\vec{w}, w_{n+1})$ em $T_p\mathcal{C}^n$ e algumas constantes a e b em $\mathbb{R}$, de modo que

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathcal{C}^n \times [0,T] & \hookrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & ((\vec{x}, x_{n+1}), t) & \mapsto & f(t)(\vec{x}, x_{n+1}) = ((1+t)\vec{x}, x_{n+1}) \end{array}$$

é isometria. De fato, para $(x,t) \in \mathcal{C}^n \times [0,T]$ com $x = (\vec{x}, x_{n+1})$, sejam $u, v \in T_{(x,t)}(\mathcal{C}^n \times [0,T])$ de modo que $((\vec{X}(s), X_{n+1}(s)), \alpha(s))$ e $((\vec{Y}(s), Y_{n+1}(s)), \beta(s))$ sejam curvas em $\mathcal{C}^n \times [0,T]$, tais que

$$u = ((\dot{\vec{X}}(0), \dot{X}_{n+1}(0)), \dot{\alpha}(0)) \quad \text{ e } \quad v = ((\dot{\vec{Y}}(0), \dot{Y}_{n+1}(0)), \dot{\beta}(0))$$

onde $(\vec{X}(0), X_{n+1}(0)) = (\vec{x}, x_{n+1}) = (\vec{Y}(0), Y_{n+1}(0))$.

Assim,

$$\begin{aligned} d\varphi \cdot u &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \varphi(X(s), \alpha(s)) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(\alpha(s)) \cdot X(s) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} ((1+\alpha(s))\, \vec{X}(s), X_{n+1}(s)) \\ &= (\dot{\vec{X}}(0) + \dot{\alpha}(0)\, \vec{X}(0) + \alpha(0)\, \dot{\vec{X}}(0), \dot{X}_{n+1}(0)) \\ &= \dot{\alpha}(0)(\vec{x}, 0) + ((1+t)\, \dot{\vec{X}}(0), \dot{X}_{n+1}(0)). \end{aligned}$$

Da mesma forma, para $v = ((\dot{\vec{Y}}(0), \dot{Y}_{n+1}(0)), \dot{\beta}(0))$ temos que $d\varphi \cdot v = \dot{\beta}(0)(\vec{x}, 0) + ((1+t)\dot{\vec{Y}}(0), \dot{Y}_{n+1}(0))$. De onde,

$$\begin{aligned} \mathrm{g}_{\text{cân}}(d\varphi \cdot u, d\varphi \cdot v) &= \mathrm{g}_{\text{cân}} \Big(\dot{\alpha}(0)(\vec{x}, 0) + ((1+t)\, \dot{\vec{X}}(0), \dot{X}_{n+1}(0)), \dot{\beta}(0)(\vec{x}, 0) \\ &\quad + ((1+t)\, \dot{\vec{Y}}(0), \dot{Y}_{n+1}(0)) \Big) \\ &= \dot{\alpha}(0) \cdot \dot{\beta}(0)\, \mathrm{g}_{\text{cân}}(\vec{x}, \vec{x}) + (1+t)^2\ \mathrm{g}_{\text{cân}} \big(\dot{\vec{X}}(0), \dot{\vec{Y}}(0)\big) \\ &\quad + \dot{X}_{n+1}(0) \cdot \dot{Y}_{n+1}(0) \\ &= (1+t)^2\ \mathrm{g}_{\text{cân}} \big(\dot{\vec{X}}(0), \dot{\vec{Y}}(0)\big) + \dot{X}_{n+1}(0) \cdot \dot{Y}_{n+1}(0) + \dot{\alpha}(0) \cdot \dot{\beta}(0) \\ &= \mathrm{g}_* \Big(\big(\dot{\vec{X}}(0), \dot{X}_{n+1}(0)\big), \dot{\alpha}(0)),\ \big(\dot{\vec{Y}}(0), \dot{Y}_{n+1}(0)\big), \dot{\beta}(0) \Big) \\ &= \mathrm{g}_*(u, v). \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{C}^n \times [0,T]$ esta mergulhado isométricamente em $\mathbb{R}^{n+1}$, via a isometria φ. Logo, para cada $(x,t) \in \mathcal{C}^n \times [0,T]$ definimos a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^{n+1}$ no espaço tangente $T_{(x,t)}(\mathcal{C}^n \times [0,T])$ como sendo;

$$\widetilde{P_\omega}(x,t) = \Pi_{T_{(x,t)}(\mathcal{C}^n \times [0,T])}(p,t)\, e_i$$

Assim, para cada $t \in [0, T]$, definamos a projeção ortogonal do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ no espaço tangente $T_x(\mathcal{C}^n)_t$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
P_t(x) \cdot \omega &= P_1\left(\widetilde{P_\omega}(x,t)\right) \\
&= \omega - \frac{\mathrm{g}_t(\omega, x)}{\mathrm{g}_t(x, x)} \cdot x \\
&= (\vec{\omega}, \omega_{n+1}) - \frac{\mathrm{g}_t\left((\vec{\omega}, \omega_{n+1}), (\vec{x}, x_{n+1})\right)}{\mathrm{g}_t\left((\vec{x}, x_{n+1}), (\vec{x}, x_{n+1})\right)} \cdot (\vec{x}, x_{n+1}) \\
&= (\vec{\omega}, \omega_{n+1}) - \frac{(1+t)^2\ \mathrm{g}_{\text{cân}}\left(\vec{\omega}, \vec{x}\right) + \omega_{n+1} x_{n+1}}{(1+t)^2\ \mathrm{g}_{\text{cân}}\left(\vec{x}, \vec{x}\right) + x_{n+1}^2} \cdot (\vec{x}, x_{n+1}) \\
&= (\vec{\omega}, \omega_{n+1}) - \frac{(1+t)^2\ \mathrm{g}_{\text{cân}}\left(\vec{\omega}, \vec{x}\right) + \omega_{n+1} x_{n+1}}{(1+t)^2 + x_{n+1}^2} \cdot (\vec{x}, x_{n+1}) \\
&= \left((\vec{P}_t \cdot \omega), (P_t \cdot \omega)_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

De onde, temos que $P_t(x) \cdot \omega = \omega$, se $\omega \in T_x(\mathcal{C}^n)_t$ e $P_t(x) \cdot \omega = 0$, se $\omega \in \{T_x(\mathcal{C}^n)_t\}^\perp$. Assim para $\{e_\alpha\}$ uma base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$ e cada $x \in (\mathcal{C}^n)_t$, a matriz de $P_t(x)$, é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}_t(P_t \cdot e_\alpha, e_\beta) &= \mathrm{g}_t\left(\left((\vec{P}_t \cdot e_\alpha), (P_t \cdot e_\alpha)_{n+1}\right), (\vec{e}_\beta, (e_\beta)_{n+1})\right) \\
&= (1+t)^2\ \mathrm{g}_{\text{cân}}\left((\vec{P}_t \cdot e_\alpha), \vec{e}_\beta\right) + (P_t \cdot e_\alpha)_{n+1} (e_\beta)_{n+1} \\
&= (1+t)^2\ \mathrm{g}_{\text{cân}}\left(\left(\vec{e}_\alpha - \frac{(1+t)^2\ \mathrm{g}_{\text{cân}}\left(\vec{e}_\alpha, \vec{x}\right) + (e_\alpha)_{n+1} x_{n+1}}{(1+t)^2 + x_{n+1}^2} \cdot \vec{x}\right), \vec{e}_\beta\right) \\
&\quad + \left((e_\alpha)_{n+1} - \frac{(1+t)^2\ \mathrm{g}_{\text{cân}}\left(\vec{e}_\alpha, \vec{x}\right) + (e_\alpha)_{n+1} x_{n+1}}{(1+t)^2 + x_{n+1}^2} \cdot x_{n+1}\right)(e_\beta)_{n+1} \\
&= (1+t)^2\ \mathrm{g}_{\text{cân}}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) - \frac{(1+t)^4}{(1+t)^2 + x_{n+1}^2}\, \mathrm{g}_{\text{cân}}(\vec{e}_\alpha, \vec{x})\, \mathrm{g}_{\text{cân}}(\vec{x}, \vec{e}_\beta) \\
&\quad - \frac{(1+t)^4}{(1+t)^2 + x_{n+1}^2}\, (e_\alpha)_{n+1} x_{n+1}\, \mathrm{g}_{\text{cân}}(\vec{x}, \vec{e}_\beta) + (e_\alpha)_{n+1}(e_\beta)_{n+1} \\
&\quad - \frac{(1+t)^4}{(1+t)^2 + x_{n+1}^2}\, (e_\beta)_{n+1} x_{n+1}\, \mathrm{g}_{\text{cân}}(\vec{e}_\alpha, \vec{x}) \\
&\quad - \frac{(1+t)^4}{(1+t)^2 + x_{n+1}^2}\, (e_\alpha)_{n+1}(e_\beta)_{n+1} x_{n+1}^2 \\
&= (1+t)^2\, \delta_{\alpha,\beta} + (e_\alpha)_{n+1}(e_\beta)_{n+1} - \frac{(1+t)^4}{(1+t)^2 + x_{n+1}^2}\Big(\vec{x}_\alpha \vec{x}_\beta \\
&\quad - (e_\alpha)_{n+1} x_{n+1} \vec{x}_\beta - (e_\beta)_{n+1} x_{n+1} \vec{x}_\alpha - (e_\alpha)_{n+1}(e_\beta)_{n+1} x_{n+1}^2\Big).
\end{aligned}$$

Por tanto, o $g(t)$-movimento Browniano sobre $(\mathcal{C}^n)_t$, é dado pela solução da equação

$$X^\alpha(t) = X^\alpha(0) + \int_0^t \Bigg((1+s)^2\,\delta_{\alpha,\beta} + (e_\alpha)_{n+1}(e_\beta)_{n+1} - \frac{(1+s)^4}{(1+s)^2 + X_{n+1}^2(s)} \Big(\vec{X}_\alpha(s)\vec{X}_\beta(s) - (e_\alpha)_{n+1}X_{n+1}(s)\vec{X}_\beta(s) - (e_\beta)_{n+1}X_{n+1}(s)\vec{X}_\alpha(s) - (e_\alpha)_{n+1}(e_\beta)_{n+1}X_{n+1}^2(s) \Big) \Bigg) \circ dW^\beta(s),$$

com $X(0) \in (\mathcal{C}^n)_t$.

3.3 Transporte Paralelo Amortiguado

Nesta seção estudamos a equação do calor por médio do fluxo de Ricci. Definimos o transporte paralelo amortiguado (ou transporte de Dohrn-Guerra). Observamos que através do fluxo de Ricci, a deformação da geometria por médio do fluxo de Ricci compensa a deformação do transporte paralelo amortiguado. Mostramos a isometria do transporte paralelo amortiguado, que resulta ser uma vantagem para o cálculo estocástico.

Para $g(t)_{[0,T_c[}$ uma $C^{1,2}$ família de métricas sobre M, consideramos a equação do calor

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) = \frac{1}{2}\Delta_{g(t)} f(x,t) \\ f(0,x) = f_0(x) \end{cases} \tag{3.16}$$

onde f_0 é uma função em M. Suponhamos que a solução de (3.16) exista até seu tempo de explosão T_c. Para $T < T_c$, sejam X_t^T o $g(T-t)$-movimento Browniano com valor inicial $x \in M$ e $//_{0,t}^T$ o transporte paralelo associado.

Definição 3.6. *Definimos o transporte paralelo amortiguado como a solução de*

$$d(//_{0,t}^T)^{-1}(\boldsymbol{W}_{0,t}^T) = -\frac{1}{2}(//_{0,t}^T)^{-1}(Ric_{g(T-t)} - \partial_t(g(T-t)))^{\#g(T-t)}(\boldsymbol{W}_{0,t}^T)dt$$

com

$$\boldsymbol{W}_{0,t}^T : T_xM \to T_{X_t^T}M, \quad \boldsymbol{W}_{0,0}^T = Id_{T_xM}.$$

Teorema 3.7. *Para cada solução* $f(t,\cdot)$ *de* (3.16), *e para cada* $v \in T_xM$ *o processo*

$$df(T-t,\cdot)_{X_t^T}(\boldsymbol{W}_{0,t}^T v)$$

é uma martingale local.

Demonstração. Lembremos que o transporte paralelo $//_{0,t}^{T} = U_t^T \circ U_0^{-1}$, ao longo do $g(T-t)$-movimento Browniano X_t^T, provem da equação

$$\begin{cases} dU_t^T = \sum_{i=1}^{d} L_i(T-t, U_t^T) \circ dW^i - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \partial_1 G(T-t, U_t^T)_{\alpha,\beta} V_{\alpha,\beta}(U_t^T) dt \\ U_0^T \in (\mathcal{O}(M), g(T)). \end{cases} \tag{3.17}$$

Para $f \in C^\infty(M)$, a escalarização da 1-forma df sobre M está dada por

$$\begin{aligned} \widetilde{df} : \mathcal{F}(M) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ U &\longmapsto (df(Ue_1), ..., df(Ue_n)). \end{aligned}$$

Daí, obtemos a seguinte fórmula em $\mathbb{R}^n$

$$d_{X_t^T} f(T-t, \cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v) = \mathrm{g}\left(\widetilde{df}(T-t, U_t^T), (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T v\right),$$

para cada $v \in T_x M$. Denotemos por

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_{e_i} : \mathcal{F}(M) &\longrightarrow TM \\ U &\longmapsto Ue_i. \end{aligned}$$

Lembremos que U_t^T, solução da equação (3.17), é uma difusão associada ao gerador

$$\frac{1}{2}\Delta_{T-t} - \frac{1}{2}\partial_t(g(T-t))(\mathrm{ev}_{e_i}(\cdot), \mathrm{ev}_{e_i}(\cdot))V_{i,j}(\cdot)$$

onde Δ_{T-t} é o operador laplaciano de Beltrami em M, associado à métrica $g(T-t)$. Logo, no sentido de Itô temos

$$\begin{aligned} & d\left[d_{X_t^T} f(T-t, \cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\right] \\ &= d\,\mathrm{g}\left(\widetilde{df}(T-t, U_t^T), (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T v\right) \\ &= \mathrm{g}\left(d\left[\widetilde{df}(T-t, U_t^T)\right], (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T v\right) + \mathrm{g}\left(\widetilde{df}(T-t, U_t^T), d\left[(U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T\right]\right) \\ &\overset{d\mathcal{M}}{=} \mathrm{g}\left(-\left(\frac{d}{dt}\widetilde{df}\right)(T-t, \cdot)(U_t^T)dt + \left[\frac{1}{2}\Delta_{g(T-t)}^H \widetilde{df}(T-t, \cdot)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{1}{2}\partial_t(g(T-t))(\mathrm{ev}_{e_i}(\cdot), \mathrm{ev}_{e_j}(\cdot))V_{i,j}(\cdot)\widetilde{df}(T-t, \cdot)\right](U_t^T)dt, (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T v\right) \\ &\quad + \mathrm{g}\left(\widetilde{df}(T-t, U_t^T), d(//_{0,t}^T \circ U_0^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T v\right) \\ &\overset{d\mathcal{M}}{=} \mathrm{g}\left(-\left(\frac{d}{dt}\widetilde{df}\right)(T-t, \cdot)(U_t^T)dt + \left[\frac{1}{2}\Delta_{g(T-t)}^H \widetilde{df}(T-t, \cdot)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{1}{2}\partial_t(g(T-t))(\mathrm{ev}_{e_i}(\cdot), \mathrm{ev}_{e_j}(\cdot))V_{i,j}(\cdot)\widetilde{df}(T-t, \cdot)\right](U_t^T)dt, (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T v\right) \\ &\quad + \mathrm{g}\left(\widetilde{df}(T-t, U_t^T), (U_0^T)^{-1} d(//_{0,t}^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T v\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\stackrel{d\mathcal{M}}{=} - \left(\frac{d}{dt}\widetilde{df}\right)(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^{T}v)dt + \mathrm{g}\Bigg(\bigg[\frac{1}{2}\Delta^{H}_{g(T-t)}\widetilde{df}(T-t,\cdot)\\
&\quad - \frac{1}{2}\partial_t(g(T-t))(\mathrm{ev}_{e_i}(\cdot),\mathrm{ev}_{e_j}(\cdot))V_{i,j}(\cdot)\widetilde{df}(T-t,\cdot)\bigg](U_t^T)dt, (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^{T}v\Bigg)\\
&\quad + \mathrm{g}\left(\widetilde{df}(T-t,U_t^T), (U_0^T)^{-1}\left[-\frac{1}{2}(//_{0,t}^{T})^{-1}(\mathrm{Ric}_{g(T-t)} - \partial_t(g(T-t))^{\#g(T-t)}(\mathbf{W}_{0,t}^{T})dt)\right]v\right)
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Nesta igualdade fazemos os cálculos de cada termo por separado. Usando a fórmula

$$\Delta^{H}\widetilde{df} = \widetilde{\Delta df}$$

dada em E. P. Hsu [2], página 193. Observamos que

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{g}\left(\frac{1}{2}\Delta^{H}_{g(T-t)}\widetilde{df}(T-t,\cdot)(U_t^T)dt\,, (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^{T}v\right)\\
&\qquad = \frac{1}{2}\,\mathrm{g}\left(\widetilde{\Delta_{g(T-t)}df}(T-t,\cdot)(U_t^T)\,, (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^{T}v\right)dt\\
&\qquad = \frac{1}{2}\Delta_{g(T-t)}df(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^{T}v)dt.
\end{aligned}
$$

Por definição dos campos verticais,

$$
\begin{aligned}
V_{i,j}\widetilde{df}(U) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\widetilde{df}(u(Id+tE_{ij}))\\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(df(u(Id+tE_{ij})e_1),...,df(u(Id+tE_{ij})e_n))\\
&= (df(u\delta_{1,i}e_j),...,df(u\delta_{n,i}e_j))\\
&= (0,...,0,df(ue_j),0,...,0) \qquad \text{na } i-\text{ésima posição}\\
&= df(ue_j)e_i.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
&\sum_{ij}\partial_t(g(T-t))(\mathrm{ev}_{e_i}(\cdot),\mathrm{ev}_{e_j}(\cdot))V_{i,j}(\cdot)\widetilde{df}(T-t,\cdot)(U_t^T)\\
&\qquad = \sum_{ij}\partial_t(g(T-t))(U_t^T e_i, U_t^T e_j)df(U_t^T e_j)e_i\\
&\qquad = \left\{\mathrm{g}_{T-t}\left(\nabla^{T-t}f(T-t,\cdot), \sum_j \partial_t(g(T-t))(U_t^T e_i, U_t^T e_j)U_t^T e_j\right)\right\}_{i=1}^{n}\\
&\qquad = \left\{df(T-t,\partial_t(g(T-t)))^{\#T-t}(U_t^T e_i)\right\}_{i=1}^{n}.
\end{aligned}
$$

Substituindo todo isto em (3.18), resulta

$$
\begin{aligned}
& d\left[d_{X_t^T(x)} f(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\right] \\
& \overset{d\mathcal{M}}{=} -\frac{d}{dt} df(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)dt + \frac{1}{2}\Delta_{g(T-t)} df(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)dt \\
& \quad - \frac{1}{2}\,\mathrm{g}\left(\left\{df(T-t,\partial_t(g(T-t)))^{\#g(T-t)}(U_t^T e_i)dt\right\}_{i=1}^n, (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T v\right) dt \\
& \quad - \frac{1}{2}\,\mathrm{g}\left(\widetilde{df}(T-t,U_t^T), (U_0^T)^{-1}(//_{0,t}^T)^{-1}(\mathrm{Ric}_{g(T-t)} - \partial_t(g(T-t)))^{\#g(T-t)}(\mathbf{W}_{0,t}^T)v\,dt\right).
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Logo, como U_t^T é uma $g(T-t)$-isometria,

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{g}\left(\left\{df(T-t,\partial_t(g(T-t)))^{\#g(T-t)}(U_t^T e_i)dt\right\}_{i=1}^n, (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T v\right) \\
& \qquad = \mathrm{g}\left(\sum_i \partial_t(g(T-t))(U_t^T e_i, \nabla^{g(T-t)} f(T-t,\cdot))e_i, (U_t^T)^{-1}\mathbf{W}_{0,t}^T v\right) \\
& \qquad = \mathrm{g}_{T-t}\left(\sum_i \partial_t(g(T-t))(U_t^T e_i, \nabla^{g(T-t)} f(T-t,\cdot))U_t^T e_i, \mathbf{W}_{0,t}^T v\right) \\
& \qquad = \mathrm{g}_{T-t}\left(\partial_t(g(T-t))^{\#g(T-t)}(\mathbf{W}_{0,t}^T v), \nabla^{g(T-t)} f(T-t,\cdot)\right).
\end{aligned}
$$

Substituindo a equação anterior em (3.19), temos

$$
\begin{aligned}
& d\left[d_{X_t^T} f(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\right] \\
& \quad \overset{d\mathcal{M}}{=} -\frac{d}{dt} df(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)dt + \frac{1}{2}\Delta_{g(T-t)} df(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)dt \\
& \qquad - \frac{1}{2}\,\mathrm{g}_{T-t}\left(\partial_t(g(T-t))^{\#g(T-t)}(\mathbf{W}_{0,t}^T v), \nabla^{g(T-t)} f(T-t,\cdot)\right)dt \\
& \qquad - \frac{1}{2}\,\mathrm{g}\left(\widetilde{df}(T-t,U_t^T), (U_t^T)^{-1}(\mathrm{Ric}_{g(T-t)})^{\#g(T-t)}(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\right)dt \\
& \qquad + \frac{1}{2}\,\mathrm{g}\left(\widetilde{df}(T-t,U_t^T), (U_t^T)^{-1}\partial_t(g(T-t))^{\#g(T-t)}(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\right)dt.
\end{aligned}
$$

Mas, como

$$\nabla^{g(T-t)} f(T-t,\cdot) = (\widetilde{df}(T-t,U_t^T)(U_t^T)).$$

Então

$$
\begin{aligned}
d\left[d_{X_t^T} f(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\right] \overset{d\mathcal{M}}{=} & -\frac{d}{dt} df(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)dt + \frac{1}{2}\Delta_{g(T-t)} df(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)dt \\
& - \frac{1}{2} df(T-t,\cdot)(\mathrm{Ric}_{g(T-t)})^{\#g(T-t)}(\mathbf{W}_{0,t}^T v)dt.
\end{aligned}
$$

Agora, lembramos que f é solução de

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{1}{2}\Delta_{g(t)} f.$$

Portanto

$$-\frac{\partial}{\partial t} df(T-t,\cdot) = -\frac{1}{2} d\Delta_{g(T-t)} f(T-t,\cdot).$$

Logo, utilizamos o laplaciano de Hodge-de Rham $\square_{g(T-t)} = -(d\delta_{g(T-t)} + \delta_{g(T-t)} d)$, o qual comuta com o diferencial de Rham. Pela fórmula de Weitzenböck (ver Jürgen Jost, [4]), que afirma que para uma 1-forma θ tem-se

$$\square_{g(T-t)}\theta = \Delta_{g(T-t)}\theta - \mathrm{Ric}_{g(T-t)}\theta.$$

Assim

$$\begin{aligned} d\Delta_{g(T-t)} f(T-t,\cdot) &= d\,\square_{g(T-t)} f(T-t,\cdot) \\ &= \square_{g(T-t)} df(T-t,\cdot) \\ &= \Delta_{g(T-t)} df(T-t,\cdot) - \mathrm{Ric}_{g(T-t)} df(T-t,\cdot). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} & d\Big[d_{X_t^T(x)} f(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)\Big] \\ & \overset{d\mathcal{M}}{=} -\frac{1}{2} d\Delta_{g(T-t)} f(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)dt \\ & \qquad + \frac{1}{2}\Delta_{g(T-t)} df(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)dt - \frac{1}{2} df(T-t,\cdot)(\mathrm{Ric}_{g(T-t)})^{\#g(T-t)}(\mathbf{W}_{0,t}^T v)dt \\ & \overset{d\mathcal{M}}{=} \frac{1}{2}[\Delta_{g(T-t)} df(T-t,\cdot) - d\Delta_{g(T-t)} f(T-t,\cdot)](\mathbf{W}_{0,t}^T v)dt \\ & \qquad - \frac{1}{2} df(T-t,\cdot)(\mathrm{Ric}_{g(T-t)})^{\#g(T-t)}(\mathbf{W}_{0,t}^T U)dt \\ & \overset{d\mathcal{M}}{=} \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_{g(T-t)} df(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)dt - \frac{1}{2}(\mathrm{Ric}_{g(T-t)})^{\#g(T-t)} df(T-t,\cdot)(\mathbf{W}_{0,t}^T v)dt \\ & \overset{d\mathcal{M}}{=} 0, \end{aligned}$$

pois, pela dualidade da 1-forma θ e para $v \in TM$, tem-se

$$\mathrm{Ric}(\theta)(v) = \mathrm{Ric}(\theta^{\#}, v),$$

onde $\langle\theta^{\#}, v\rangle = \theta(v)$. $\square$

Consideramos o caso quando a família de métricas $\{g(t)\}_{t\in[0,T]}$, evoluciona no contexto do fluxo de Ricci forward. Isto é,

$$\frac{d}{dt}g_{i,j}(t) = -\mathrm{Ric}_{i,j}(t).$$

Todo o feito acima, motiva o seguinte teorema cuja demonstração é evidente.

Teorema 3.8. *Nas condições acima, os seguintes itens são equivalentes*

(i) *A família de métricas* $\{g(t)\}_{t\in[0,T]}$*, evoluciona no contexto do fluxo de Ricci forward,*

(ii) *Para cada* $T < T_c$*, a igualdade* $//_{0,t}^{T} = \boldsymbol{W}_{0,t}^{T}$ *se cumpre.*

Em qualquer dos casos o transporte paralelo amortiguado é uma isometria ao longo do $g(T-t)$*-movimento Browniano.*

3.4 Aplicações ao Fluxo de Curvatura Média

Nesta seção, a nossa discussão sobre a existência e outros resultados relacionados ao fluxo de curvatura média são baseados nos trabalhos de k. Ecker [6] e G. Huisken [3]. Seja M uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo e de dimensão n. Para $n > 2$, consideramos a M mergulhada isométricamente em $\mathbb{R}^{n+1}$ e denotamos a este mergulho por:

$$F_0 : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}.$$

Consideramos a família de mergulhos $F_t = F(\cdot, t) : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ com $M_t = F(t, M)$. O fluxo de curvatura média é definido por:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial_t}F(t,x) &=& -H_v(t,x)\vec{v}(t,x) \\ F(0,x) &=& F_0(x). \end{cases} \tag{3.20}$$

onde $v(t,x)$ é um campo normal unitário no ponto $F(t,x)$ em M_t, e $H_v(t,x)$ é a curvatura média no $F(t,x)$ sobre M_t na direção do campo $v(t,x)$, isto é $H_v(x) =$ traço $(S_v(x))$ onde S_v é a segunda forma fundamental definida em M.P. Do Carmo [9]. Logo, a solução da equação (3.20) é dada por $M_t = F(t, M)$, onde identificamos a M com M_0 e F_0 com Id. Trabalhamos com a solução diferenciável desta equação, antes do tempo de explosão. Seja Δ_t o operador laplaciano de Beltrami sobre a variedade M_t, a fim de caracterizar ao fluxo de curvatura média em termos do $g(t)$-movimento Browniano, no seguinte lema damos uma outra caracterização da equação (3.20) em termos deste operador.

Lema 3.9. *Seja (M,g) uma variedade riemanniana mergulhada isométricamente em* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Denotemos por* ι *à isometria:*

$$\iota : (M, g) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}.$$

Então, para cada $x \in M$ *se cumpre*

$$\Delta_M \iota(x) = -H_v(x)\vec{v}(x), \tag{3.21}$$

Onde Δ_M *é operador laplaciano de Beltrami associado à la métrica* g*.*

Demonstração. Pelo nivelamento da variedade objetivo, nos temos

$$\Delta\iota(x) = \begin{pmatrix} \Delta\iota^1(x) \\ \vdots \\ \Delta_\iota^{n+1}(x) \end{pmatrix}$$

e $\Delta\iota^j(x) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt^2}\Big|_{t=0} \iota^j(\gamma_i(t))$, onde $\gamma_i(t)$ é uma geodésica em M tal que $\gamma_i(0) = x$ e $\dot{\gamma}_i(0) = A_i$ e A_i é uma base ortonormal de $T_x M$. Pela definição de uma geodésica obtemos que

$$\Delta\iota(x) \perp T_{\iota(x)}(\iota(M)),$$

de onde $\{\vec{v}(x)\}$ gera ao espaço $(T_\iota(x)\iota(M)^\perp$. Assim existe uma função β tal que $\delta_\iota(x) = \beta(x)\vec{v}(x)$. Calculamos β como segue

$$\begin{aligned}
\beta(x) &= g_{\text{cân}}(\Delta\iota(x)\,,\, \vec{v}) \\
&= \sum_{i=1}^n g_{\text{cân}}\Big(\frac{d}{dt^2}\Big|_{t=0} \iota(\gamma_i(t))\,,\, \vec{v}(x)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n g_{\text{cân}}\Big(\nabla^{\mathbb{R}^n}_{\iota(\dot{\gamma_i}(t)}\iota(\dot{\gamma_i(t)})\Big|_{t=0}\,,\, \vec{v}(x)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n \Big\{\iota(\dot{\gamma_i}(t) g_{\text{cân}}\big(\iota(\dot{\gamma_i}(t))\,,\, \vec{v}(x)\big)\Big|_{t=0} - g_{\text{cân}}\Big(\iota(\dot{\gamma_i}(t))\,,\, \nabla^{\mathbb{R}^n}_{\iota(\dot{\gamma_i}(t)}\vec{v}(x)\Big)\Big|_{t=0}\Big\} \\
&= \sum_{i=1}^n -g_{\text{cân}}\Big(\iota(\dot{\gamma_i}(t))\,,\, \nabla^{\mathbb{R}^n}_{\iota(\dot{\gamma_i}(t)}\vec{v}(x)\Big)\Big|_{t=0}) \\
&= \sum_{i=1}^n -\Big\{g_{\text{cân}}\Big(\iota(\dot{\gamma_i}(t))\,,\, (\nabla^{\mathbb{R}^n}_{\iota(\dot{\gamma_i}(t))}\vec{v}(x))^\top\Big) + g_{\text{cân}}\Big(\iota(\dot{\gamma_i}(t))\,,\, (\nabla^{\mathbb{R}^n}_{\iota(\dot{\gamma_i}(t))}\vec{v}(x))^\perp\Big)\Big\}\Big|_{t=0}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -g_{\text{cân}}\Big(\iota(\dot{\gamma_i}(t)) \, , \, (\nabla^{\mathbb{R}^n}_{\iota(\dot{\gamma_i}(t))}\vec{v}(x))^{\top}\Big)\Big|_{t=0}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} -g_{\text{cân}}\Big(\iota(\dot{\gamma_i}(t)) \, , \, S_{\vec{v}(x)}(\iota(\dot{\gamma_i}(t)))\Big|_{t=0}$$
$$= - \text{ trace } (S_v(x)).$$

onde $\mathrm{g}_{\text{cân}}$ denota a métrica em $\mathbb{R}^{n+1}$. □

Para cada $t \in [0, T]$, consideramos a imersão

$$F(t, \cdot) : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

Denotamos por $F^* \mathrm{g}_{\text{cân}}$ a métrica pullback de $\mathrm{g}_{\text{cân}}$ por $F(t, \cdot)$, que para cada $p \in M$ é dada por

$$(F^* \mathrm{g}_{\text{cân}})(t, p)(X, Y) = \mathrm{g}_{\text{cân}}(t, F(p))(dF_p(X_p), dF_p(Y_p)),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Observe que $F^* \mathrm{g}_{\text{cân}}$ é claramente uma métrica sobre M.

Consideramos a família de métricas $\{g(t) = F(t, \cdot)^* \mathrm{g}_{\text{cân}}\}_{t\in[0,T]}$ sobre M, e usando o Lema 3.9 damos outra interpretação da equação (3.20) em termos do $g(t)$-laplaciano $\Delta_{g(t)}$ sobre M, como segue:

$$\begin{cases} \partial_t F(t, x) = \Delta_{g(t)} F(t, x) \\ F(0, x) = F_0(x), \end{cases} \tag{3.22}$$

onde $\Delta_{g(t)}$ denota o operador laplaciano de Beltrami associado à métrica $g(t)$.

Denotamos por T_c, o tempo de explosão do fluxo de curvatura média. Sejam $T < T_c$, $\{g(t)\}_{t\in[0,T]}$ uma $C^{1,2}$-família de métricas definidas como acima e $W = (W^1, ..., W^n)$ o movimento Browniano a valores em $\mathbb{R}^d$. Nestas condições, denotamos por X_t o $g(t)$-movimento Browniano (como na Definição 3.1), que toma valores em M e inicializado no $x \in M$. Na proposição seguinte damos uma caracterização do fluxo de curvatura média, a partir deste $g(t)$-movimento Browniano. Mas, antes precisamos do seguinte lema:

Lema 3.10. *sejam Δ_g e $\Delta_{\widetilde{g}}$ os operadores laplaciano de Beltrami com respeito das métricas g e $\widetilde{g}$ respectivamente. Se $\widetilde{g} = cg$, então*

$$\Delta_g = c\Delta_{\widetilde{g}}.$$

Demonstração. Com efeito, seja $\{X_1, ..., X_n\}$ uma base ortonormal de $T_x(M, g)$, então $\{Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{c}}, ..., Y_n = \frac{X_n}{\sqrt{c}}\}$ constitui uma base ortonormal de $T_x(M, \widetilde{g})$, pois

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(Y_i, Y_j) &= cg(Y_i, Y_j) \\
&= cg(\frac{X_i}{\sqrt{c}}, \frac{X_j}{\sqrt{c}}) \\
&= g(X_i, X_j) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para $f \in C^\infty(M)$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_{\widetilde{g}} f &= \text{traço}(\text{Hess})_{\widetilde{g}} f \\
&= \sum_{i=1}^{n} \text{Hess}_{\widetilde{g}} f(Y_i, Y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (Y_i^2 f - \widetilde{\nabla}_{Y_i} Y_i f) \\
&= \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 f - \nabla_{X_i} X_i f) \\
&= \frac{1}{c} \Delta_g f.
\end{aligned}$$

A última igualdade provem do fato que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{Y_i} Y_i f &= \widetilde{\Gamma}_{ii}^k Y_k \\
&= \Gamma_{ii}^k X_k \\
&= \nabla_{X_i} X_i,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_{jk}^i &= \frac{1}{2} \widetilde{g}^{im} (\partial_k \widetilde{g}_{jm} + \partial_j \widetilde{g}_{mk} - \partial_m \widetilde{g}_{jk}) \\
&= \frac{1}{2} g^{im} (\partial_k g_{jm} + \partial_j g_{mk} - \partial_m g_{jk}) \\
&= \Gamma_{jk}^i.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.11. *Seja M uma variedade n-dimensional mergulhada isometricamente em $\mathbb{R}^{n+1}$. Consideremos a aplicação*

$$F : [0, T] \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

de modo que os $F(t,\cdot)$ *sejam difeomorfismos, e a família de métricas* $\{g(t)\}_{t\in[0,T]}$ *sobre* M*, sejam o pullback por* $F(t,\cdot)$ *de métricas induzidas sobre* $M_t = F(t, M)$*. Então os seguintes itens são equivalentes*

(i) $F(t,\cdot)$ *é a solução do fluxo de curvatura média.*

(ii) *Sejam* $x_0 \in M$ *e* $T \in [0, T_c[$*. Se*

$$\widetilde{g}^T(t) := \frac{1}{2}\, g_{T-t}$$

para todo $t \in [0,T]$*, e* X_t^T *é um* $\widetilde{g}^T(t)$*-movimento Browniano com valor inicial* x_0*, então o processo*

$$Y_t^T = F(T-t, X_t^T)$$

é um martingale local a valores em $\mathbb{R}^{n+1}$*.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Seja a família de isometrias $\{F(t,\cdot)\}_{t\in[0,T]}$, dadas por

$$F(t,\cdot) : (M, g_t) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

que verificam (3.22). Suponhamos que X_t^T é um $\widetilde{g}^T(t)$-movimento Browniano, com $x_0 \in M$ e $T \in [0, T_c[$. Aplicamos a fórmula de Itô para

$$(Y_t^T)^i = F^i(T-t, X_t^T),$$

e utilizando a equação (3.12) e o Lema 3.10 temos

$$\begin{aligned} d[(Y_t^T)^i] &= -\frac{\partial}{\partial t}F^i(T-t, X_t^T)dt + dF^i_{T-t}(X_t^T) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}F^i(T-t, X_t^T)dt + \widetilde{g}^T(t, x_0)(\nabla^{g(t)} F^i_{T-t}, //_{0,t} v_i)dW^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\Delta_{\widetilde{g}^T(t)} F^i_{T-t}(X_t^T)dt \\ &\overset{d\mathcal{M}}{=} -\frac{\partial}{\partial t}F^i(T-t, X_t^T)dt + \frac{1}{2}\Delta_{\widetilde{g}^T(t)} F^i_{T-t}(X_t^T)dt \\ &\overset{d\mathcal{M}}{=} [-\partial_t F^i(T-t, X_t^T) + \Delta_{g(T-t)} F^i_{T-t}(X_t^T)]dt \\ &\overset{d\mathcal{M}}{=} 0, \end{aligned}$$

onde a última igualdade provém do fato que $F(t,\cdot)$ é solução do fluxo de curvatura média. Portanto, Y_t^T é uma martingale local.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Como $(Y_t^T)^i$ é uma martingale local a valores em $\mathbb{R}$ em quasi todo ponto, para todo $t \in [0,T]$ temos

$$-\frac{\partial}{\partial t}F^i(T-t, X_t^T)dt + \Delta_{g(T-t)} F^i_{T-t}(X_t^T)dt = 0.$$

Assim para cada $s \in [0, T]$, integrando a equação anterior obtemos que

$$\int_0^s \{-\frac{\partial}{\partial t} F^i(T-t, X_t^T)dt + \Delta_{g(T-t)} F_{T-t}^i(X_t^T)dt\} = 0,$$

e pela continuidade do $\widetilde{g}^T(t)$-movimento Browniano,

$$-\partial_t F^i(T, x_0) + \Delta_{g(T)} F_T^i(x_0) = 0.$$

Portanto, $F(t, \cdot)$ satisfaz a equação (3.20) como queríamos. □

Em seguida, usando o fluxo de curvatura média, apresentamos alguns exemplos de construções do $g(t)$-movimento Browniano sobre $(S^n)_t$ e $(\mathcal{C}^n)_t$.

Exemplo 3.12. *Para o caso $n = 2$, consideramos a parametrização de $(S^n)_t$ dada por*

$$X(u, v) = (r(t) \sin v \cos u, r(t) \sin v \sin u, r(t) \cos v),$$

onde, suas primeiras e segundas derivadas são

$$\begin{aligned}
X_u &= (-r(t) \sin v \sin u, r(t) \sin v \cos u, 0), \\
X_v &= (r(t) \cos v \cos u, r(t) \cos v \sin u, -r(t) \sin v), \\
X_{uu} &= (-r(t) \sin v \cos u, -r(t) \sin v \sin u, 0), \\
X_{vv} &= (-r(t) \sin v \cos u, -r(t) \sin v \sin u, -r(t) \cos v),
\end{aligned}$$

Assim, o vetor normal é dado por

$$N = (-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, -\cos v) = -\frac{X}{r(t)}$$

Então, os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são

$$\begin{array}{lll}
E = \mathrm{g}(X_u, X_u) = r(t)^2 \sin^2 v, & F = \mathrm{g}(X_u, X_v) = 0, & G = \mathrm{g}(X_v, X_v) = r(t)^2 \\
e = \mathrm{g}(X_{uu}, N) = -r(t) \sin^2 v, & f = \mathrm{g}(X_{uv}, N) = 0 & g = \mathrm{g}(X_{vv}, N) = r(t).
\end{array}$$

O vetor de curvatura média é

$$\vec{H} = H\, N = \frac{1}{2}\frac{eG - gF}{EG}\, N = -\frac{X}{r(t)^2}.$$

Para $t \in [0, T]$, consideramos uma família de mergulhos

$$\begin{array}{rcl}
\varphi : S^2 \times [0, T] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
(x, t) & \longmapsto & \varphi(x, t) = r(t)x.
\end{array}$$

Definimos o fluxo de curvatura média por

$$\partial_t \varphi = \vec{H} = -\frac{X}{r(t)^2}$$

como (3.20). Por outro lado, temos que $\partial_t \varphi = \dot{r}(t) X$, *e por comparação tem-se que*

$$\dot{r}(t) = -\frac{1}{r(t)^2},$$

cuja solução, para $r(0) = \rho$, *é dada por*

$$r(t) = (\rho^3 - 3t)^{1/3}.$$

Assim sobre $S^2 \times [0, T]$, *consideramos a métrica*

$$\begin{aligned} \mathrm{g}_*((u, a\partial_t), (v, b\partial_t)) &= r(t)^2 \, \mathrm{g}_{c\hat{a}n}(u, v) + \dot{r}(t)^2 ab \\ &= (\rho^3 - 3t)^{2/3} \, \mathrm{g}_{c\hat{a}n}(u, v) + (\rho^3 - 3t)^{-4/3} ab, \end{aligned}$$

onde o mergulho $\varphi(x, t) = r(t)x$ *é uma isometria. Logo, para cada* $t \in [0, T]$, *definamos a projeção ortogonal de* $\mathbb{R}^3$ *ao espaço tangente* $T_x(S^2)_t$ *da seguinte forma*

$$\begin{aligned} P_t(x) \cdot \omega &= \omega - \mathrm{g}_t(\omega, x) \cdot x \\ &= \omega - (\rho^3 - 3t)^{2/3} \, \mathrm{g}_{c\hat{a}n}(\omega, x) \cdot x. \end{aligned}$$

onde $P_t(x) \cdot \omega = \omega$, *se* $\omega \in T_x(S^2)_t$ *e* $P_t(x) \cdot \omega = 0$ *se* $\omega \in \{T_x(S^2)_t\}^\perp$. *Agora para* $\{e_\alpha\}$ *uma base canônica de* $\mathbb{R}^3$ *e cada* $x \in (S^2)_t$, *a matriz de* $P_t(x)$, *é dada por:*

$$\begin{aligned} \mathrm{g}_t(P_t \cdot e_\alpha, e_\beta) &= (\rho^3 - 3t)^{2/3} \; \mathrm{g}_{c\hat{a}n}(P_t \cdot e_\alpha, e_\beta) \\ &= (\rho^3 - 3t)^{2/3} \; \mathrm{g}_{c\hat{a}n}(e_\alpha - (\rho^3 - 3t)^{2/3} \; \mathrm{g}_{c\hat{a}n}(e_\alpha, x) \cdot x, e_\beta) \\ &= (\rho^3 - 3t)^{2/3} \; \mathrm{g}_{c\hat{a}n}(e_\alpha, e_\beta) - (\rho^3 - 3t)^{4/3} \; \mathrm{g}_{c\hat{a}n}(e_\alpha, x) \, \mathrm{g}_{c\hat{a}n}(x, e_\beta) \\ &= (\rho^3 - 3t)^{2/3} \, \delta_{\alpha,\beta} - (\rho^3 - 3t)^{4/3} x_\alpha \cdot x_\beta. \end{aligned}$$

Portanto, o $g(t)$*-movimento Browniano sobre* $(S^2)_t$, *é a solução da equação*

$$X_t^\alpha = X_0^\alpha + \int_0^t \left((\rho^3 - 3s)^{2/3} \delta_{\alpha,\beta} - (\rho^3 - 3s)^{4/3} X_s^\alpha \cdot X_s^\beta \right) \circ dW_s^\beta,$$

com $X_0 \in (S^2)_t$.

A seguir, consideramos o caso do cilindro $(\mathcal{C}^n)_t$.

Exemplo 3.13. *Para o caso $n = 2$, consideramos a parametrização de $(\mathcal{C}^n)_t$*

$$X(u, v) = (r(t)\cos u, r(t)\sin u, v)$$

Vemos que

$$\begin{aligned}
X_u &= (-r(t)\sin u, r(t)\cos u, 0),\\
X_v &= (0, 0, 1),\\
X_{uu} &= (-r(t)\cos u, -r(t)\sin u, 0),\\
X_{vv} &= (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Assim, o vetor normal é dado por

$$N = (\cos u, \sin u, 0)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
E &= \mathrm{g}(X_u, X_u) = r(t)^2, \qquad F = \mathrm{g}(X_u, X_v) = 0, \qquad G = \mathrm{g}(X_v, X_v) = r(t)^2\\
e &= \mathrm{g}(X_{uu}, N) = -r(t), \qquad f = \mathrm{g}(X_{uv}, N) = 0 \qquad g = \mathrm{g}(X_{vv}, N) = 0.
\end{aligned}$$

Logo, o vetor de curvatura média resulta

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= H\,N\\
&= \left[\frac{1}{2}\frac{eG - gF}{EG}\right] N\\
&= -\frac{1}{2\,r(t)}(\cos u, \sin u, 0)
\end{aligned}$$

Para cada $t \in [0, T]$, consideramos uma família de mergulhos

$$\varphi_t(u, v) = (r(t)\cos u, r(t)\sin u, v).$$

Definimos o fluxo de curvatura média por

$$\partial_t \varphi = \vec{H} = -\frac{1}{2\,r(t)}(\cos u, \sin u, 0)$$

Por outro lado, observamos que $\partial_t \varphi = (\dot{r}(t)\cos u, \dot{r}(t)\sin u, 0)$, e por comparação temos

$$\dot{r}(t) = -\frac{1}{2\,r(t)},$$

cuja solução, para $r(0) = \rho$, é dada por

$$r(t) = (\rho^2 - t)^{1/2}.$$

Assim sobre $\mathcal{C}^2 \times [0,T]$, *consideramos a métrica*

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}_*((\vec{v},v_3),a\partial_t),((\vec{w},w_3),b\partial_t)) &= r(t)^2\,\mathrm{g}_{c\hat{a}n}(\vec{v},\vec{w}) + v_3\cdot w_3 + \dot{r}(t)^2 ab \\
&= (\rho^2-t)\,\mathrm{g}_{c\hat{a}n}(\vec{v},\vec{w}) + v_3\cdot w_3 + \frac{1}{4}(\rho^2-t)^{-1}ab,
\end{aligned}$$

para $v = (\vec{v}, v_3)$, $w = (\vec{w}, w_3)$ *em* $T_p\mathcal{C}^2$ *e algumas constantes* a *e* b *em* $\mathbb{R}$, *de modo que o mergulho* $\varphi((\vec{x},x_3),t) = (r(t)\vec{x},x_3)$ *é uma isometria. Logo, para cada* $t \in [0,T]$, *definamos a projeção ortogonal de* $\mathbb{R}^3$ *ao espaço tangente* $T_x(\mathcal{C}^2)_t$ *da seguinte forma*

$$\begin{aligned}
P_t(x)\cdot\omega &= \omega - \frac{\mathrm{g}_t(\omega,x)}{\mathrm{g}_t(x,x)}\cdot x \\
&= (\vec{\omega},\omega_3) - \frac{(\rho^2-t)\ \mathrm{g}_{c\hat{a}n}\left(\vec{\omega},\vec{x}\right) + \omega_3 x_3}{(\rho^2-t)+x_3^2}\cdot(\vec{x},x_3) \\
&= \Big((\vec{P}_t\cdot\omega),(P_t\cdot\omega)_3\Big)
\end{aligned}$$

onde $P_t(x)\cdot\omega = \omega$, *se* $\omega \in T_x(\mathcal{C}^2)_t$ *e* $P_t(x)\cdot\omega = 0$ *se* $\omega \in \{T_x(\mathcal{C}^2)_t\}^{\perp}$. *Assim para uma base canônica* $\{e_\alpha\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *e cada* $x \in (\mathcal{C}^2)_t$, *a matriz de* $P_t(x)$, *é dada por:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}_t(P_t\cdot e_\alpha, e_\beta) &= (\rho^2-t)\ \mathrm{g}_{c\hat{a}n}\Big((\vec{P}_t\cdot e_\alpha),\vec{e}_\beta\Big) + (P_t\cdot e_\alpha)_3(e_\beta)_3 \\
&= (\rho^2-t)\,\delta_{\alpha,\beta} + (e_\alpha)_3(e_\beta)_3 - \frac{(\rho^2-t)^2}{(\rho^2-t)+x_3^2}\Big(\vec{x}_\alpha\vec{x}_\beta \\
&\quad - (e_\alpha)_3\,x_3\vec{x}_\beta - (e_\beta)_3\,x_3\vec{x}_\alpha - (e_\alpha)_3(e_\beta)_3\,x_3^2\Big).
\end{aligned}$$

Portanto, o $g(t)$*-movimento Browniano sobre* $(\mathcal{C}^2)_t$, *é a solução da equação*

$$\begin{aligned}
X^\alpha(t) = X^\alpha(0) + \int_0^t \Bigg(&(\rho^2-s)\,\delta_{\alpha,\beta} + (e_\alpha)_3(e_\beta)_3 - \frac{(\rho^2-s)^2}{(\rho^2-s)+X_3^2(s)} \\
&\Big(\vec{X}_\alpha(s)\vec{X}_\beta(s) - (e_\alpha)_3\,X_3(s)\vec{X}_\beta(s) - (e_\beta)_3\,X_3(s)\vec{X}_\alpha(s) \\
&- (e_\alpha)_3(e_\beta)_3\,X_3^2(s)\Big)\Bigg)\circ dW^\beta(s),
\end{aligned}$$

com $X(0) \in (\mathcal{C}^n)_t$.

Damos uma estimação do tempo de explosão do processo Y_t^T. Mas para isto, precisamos do seguinte resultado.

Proposição 3.14. *Seja* Y_t^T *como acima, então a covariação quadrática de* Y_t^T *para o produto escalar usual em* $\mathbb{R}^{n+1}$, *esta dada por*

$$\mathrm{g}(dY_t^T, dY_t^T) = 2n\mathbb{I}_{[0,T]}(t)dt$$

Demonstração. Consideramos o transporte paralelo

$$//_{0,t}^{T} : (T_{X_0}M, \tilde{g}(0)) \quad \rightarrow \quad (T_{X_t}M, \tilde{g}(t))$$

ao longo do processo X_t^T, o qual pela Proposição 3.3 é uma isometria linear. Sejam $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de $T_{X_0}(M, \tilde{g}(0)$ e $W = (W^1, ..., W^n)$ um movimento Browniano a valores em $\mathbb{R}^n$, tais que as equações (3.11) e (3.12) se cumprem para cada $F_{T-t}(\cdot) \in C^2(M, \tilde{g}(t))$, isto é, que para a equação diferencial estocástica

$$dX_t^T = //_{0,t}^{T}\, e_i dW_t^i,$$

tem-se

$$\begin{aligned} dF_{T-t}(X_t^T) = \tilde{g}(t, X_0)\Big(\nabla^{\tilde{g}(t)} F_{T-t}, //_{0,t}^{T} e_i\Big) dW^i \\ + \frac{1}{2}\Delta_{\tilde{g}(t)} F_{T-t}(X_t^T) dt, \end{aligned}$$

Utilizando o fato que $F_{T-t}(\cdot)$ é isometria temos que

$$\begin{aligned} g(dY_t^T, dY_t^T) &= g\left(dF_{t-t}(X_t^T), dF_{T-t}(X_t^T)\right) \\ &= g_{T-t}\left(d(X_t^T), d(X_t^T)\right), \\ &= 2\tilde{g}_t\Big(d(X_t^T), d(X_t^T)\Big) \\ &= 2\tilde{g}_t\Big(\sum_{i=1}^{n} //_{0,t}^{T}\, e_i dW_t^i, \sum_{j=1}^{n} //_{0,t}^{T}\, e_j dW_t^j\Big) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} \tilde{g}_t\Big(//_{0,t}^{T}\, e_i, //_{0,t}^{T}\, e_j\Big) dt \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} dt \\ &= 2n\, dt \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade provem da isometria do transporte paralelo $//_{0,t}^{T}$. □

Corolário 3.15. *Sejam M uma variedade compacta de dimensão n e T_c o tempo de explosão do fluxo de curvatura média, então*

$$T_c \leq \frac{diam(M_0)^2}{2n}.$$

Demonstração. Lembramos que o fluxo de curvatura média fica em uma região compacta, contido na menor bola que contém M_0, este resultado é claro quando começamos em uma variedade estritamente convexa (mais detalhes sobre isto podem ser encontrados em K. Ecker [6]). Assim,

$$\|Y_t^T\| \leq diam(M_0),$$

para todo $T \in [0, T_c]$. Observemos que Y_t^T é de fato uma martingale. Agora, consideramos a função

$$f(y) = \|y\|^2$$

que toma valores em $\mathbb{R}^{n+1}$. Aplicando a fórmula de Itô a f e pela Proposição 3.14, obtemos que

$$\begin{aligned}
f\left(Y_t^T\right) &= f\left(Y_0^T\right) + \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^T \partial_i f\left(Y_t\right)(dY_t^T)^i \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n+1} \int_0^T \partial_i \partial_j f\left(Y_t^T\right) d\,\mathrm{g}\left(dY_t^i, dY_t^j\right) \\
&\overset{d\mathcal{M}}{=} f\left(Y_0^T\right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n+1} \int_0^T \partial_i \partial_j f\left(Y_t^T\right) 2n dt \\
&\overset{d\mathcal{M}}{=} f\left(Y_0^T\right) + \sum_{i,j}^{n+1} 2\delta_{i,j} n \int_0^T dt \\
&\overset{d\mathcal{M}}{=} f\left(Y_0^T\right) + 2nT.
\end{aligned}$$

Então

$$\mathbb{E}\Big[\|Y_0^T\|^2\Big] + 2nT = \mathbb{E}\Big[\|Y_t^T\|^2\Big] \leq diam(M_0)^2.$$

Portanto

$$T \leq \frac{diam(M_0)^2}{2n},$$

como queríamos. □

Referências Bibliográficas

[1] A.K. Coulibaly. *Brownian motion with respect to time-changing Riemannian metrics, applications to Ricci flow*, Preprint http://arxiv.org/abs/0901.1999v1.

[2] E.P. Hsu. *Stochastic Analysis on Manifolds*, Graduate Studies in Mathematics, vol 38, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[3] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geom., 20(1):237–266, 1984.

[4] Jürgen Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, fourt edition, 2005.

[5] K.D. Elworthy, *Stochastic diferential equations on manifolds*, London Mathematical Society LectureNotes Series, vol. 70, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[6] K. Ecker, *Regularity Theory for Mean Curvature Flow*, Birkhäuser, 2004.

[7] M. Arnaudon, K.A. Coulibaly, and A. Thalmaier. *Brownian motion with respect to a metric depending on time: definition, existence and applications to Ricci flow*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 346(13-14):773–778, 2008.

[8] M. Émery. *Stochastic Calculus on Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[9] M.P. Do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, tercera edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[10] N. Ikeda e S. Watanabe. *Stochastic Diefrential Equations and Diffusion Processes*, North Holland-Kodansha, Tokyo, 1981.

[11] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry. Vol. I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.