Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Instituto de Matemática, Estatística

e Computação Científica

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Um Grupo de Richard Thompson e Seu Invariante Homotópico Sigma

Lonardo Rabelo[1]

Orientadora: **Dr. Dessislava H. Kochloukova**

Agosto, 2008

[1]Projeto financiado pela FAPESP, processo 06/01872-8

Um Grupo de Richard Thompson
e
Seu Invariante Homotópico Sigma

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Lonardo Rabelo e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de agosto de 2008.

Prof. Dr. Dessislava H. Kochloukova
Orientadora

Banca Examinadora

Prof. Dr. Dessislava H. Kochloukova
Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves
Prof. Dr. Ketty Abaroa de Rezende

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Rabelo, Lonardo

R112u Um grupo de Richard Thompson e seu invariante homotópico Sigma/Lonardo Rabelo -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientadora : Dessislava Hristova Kochloukova

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria de grupos. 2. Algebra homológica. 3. Topologia algébrica. 4. Teoria combinatória dos grupos. I. Kochloukova, Dessislava Hristova. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: A Richard Thompson Group and its Homotopical Sigma Invariant.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Group theory. 2. Homological algebra. 3. Algebraic topology. 4. Combinatorial group theory.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves (IME-USP)
Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende (IMECC-Unicamp)

Data da defesa: 05/08/2008

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 05 de agosto de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

Ketty A. de Rezende.

Prof. (a). Dr (a). KETTY ABAROA DE REZENDE

Daciberg Lima Gonçalves

Prof. (a). Dr (a). DACIBERG LIMA GONÇALVES

Ó profundidade da riqueza da sabedoria
e do conhecimento de Deus!
Quão insondáveis são os seus juízos e
inescrutáveis seus caminhos!
Quem conheceu a mente do Senhor?
Ou quem foi seu conselheiro?
Quem primeiro lhe deu, para que ele o recompense?

Pois dele, por ele e para ele são todas as coisas.
A ele seja a glória para sempre! Amém.

(apóstolo Paulo)

Agradecimentos

É indispensável ter um espaço como este onde posso agradecer às pessoas e instituições que têm me acompanhado até agora, de modo que eu pudesse finalizar este projeto.

Das instituições, agradeço: à FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) cujo apoio teve início ainda na graduação por meio da bolsa de IC (Iniciação Científica) e se estendeu até o mestrado; ao IMECC (Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica) - UNICAMP, principal responsável pela minha formação matemática, onde me formei e onde concluí o mestrado. Assim, gostaria também de agradecer às pessoas que fazem parte destas instituições. Em particular, ao Ednaldo, Tânia e Cidinha, que são da secretaria de Pós-Graduação e sempre estiveram dispostos a me ajudar quando precisei.

Gostaria de agradecer aos amigos.

Aos amigos de república, por quem tenho um apreço especial. Estiveram comigo todos os dias, em meio a muitas conversas, risadas, conselhos e consolos. Desde a casa da ABU até a "Personalite", conheci pessoas muito legais e fiz grandes amigos. Foram certamente muito importantes na minha formação pessoal e me ajudaram a chegar aqui. Dentre estes, gostaria de destacar o Tiago, que me ajudou muitíssimo em vários detalhes da dissertação e que teve a paciência de ensaiar a apresentação da defesa comigo. Valeu!!!

Aos amigos de faculdade. Com alguns pude aprender e resolver questões que sozinho não conseguiria. Também e, principalmente, gostaria de agradecer àqueles com quem aprendi sobre a vida e que me apoiaram em todos os momentos.

Aos amigos de Petrópolis que, mesmo distantes, sempre me apoiaram. Ao Franklin pelo suporte na reta final.

Finalmente, aos amigos cristãos. Agradeço porque oraram por mim, me escutaram e aconselharam. Me ajudaram a caminhar cada dia mais perto de Deus e me apontaram para a vida que há em Cristo. Sou muito grato a vocês.

Gostaria de agradecer aos familiares.

Aos da casa da Vanessa que têm me hospedado aos finais de semana e me tratado com muito carinho. A minha avó Dalila e minha tia-avó Darcylia pelo cuidado. Aos meus tios e primos pelo apoio constante e pelas orações. As minhas irmãs Dianie e

Larissa pela compreensão. Aos meus pais Rabelo e Zezé pelo amor e pelo exemplo.

Há duas pessoas que gostaria de mencionar especificamente. Minha orientadora Dessislava por ter me direcionado desde os tempos de graduação. Ensinou-me muito mais do que os cálculos. Sempre me incentivou ao estudo e à dedicação à matemática. E, finalmente, minha noiva Vanessa. Pela sua companhia marcante. Pelos seus sábios conselhos que foram fundamentais nos momentos de decisão. E pelo seu amor.

Concluindo, agradeço e dedico tudo isto a Deus. DEle, por Ele e para Ele são todas as coisas. O seu caráter e as suas leis têm me ensinado a viver de maneira satisfatória e feliz. E ao seu Filho, Jesus Cristo, por meio de quem tenho acesso a Deus.

Resumo

Neste projeto de mestrado, estudamos um dos grupos de Richard Thompson e apresentamos os cálculos de seu invariante homotópico Sigma, em qualquer dimensão m, onde m é um inteiro positivo.

O grupo de Richard Thompson, denotado por F, foi por ele definido em 1965 e ficou conhecido, mais tarde, por suas propriedades homotópicas e homológicas interessantes. Por exemplo, F é tipo FP_∞ ([04]). Além disso, F pode ser descrito de maneiras distintas, o que o torna ainda mais interessante.

A teoria de invariantes (homotópicos e homológicos) Sigma foi desenvolvida nas últimas décadas do século vinte por R. Bieri, J. Groves, R. Geoghegan, H. Meinert, R. Strebel e outros e está relacionada com propriedades FP_m de grupos.

O Invariante $\Sigma^1(F)$ foi obtido em [03]. Recentemente, o caso geral do invariante $\Sigma^m(F)$ e $\Sigma^m(F, \mathbb{Z})$ (homotópico e homológico, respectivamente), $m \geq 2$, foi descrito por R. Bieri, R. Geoghegan e D. Kochloukova. Nesta dissertação, apresentamos a versão homotópica deste resultado.

Abstract

In this project we study one of the Richard Thompson´s Group F e its Homotopical m-dimensional Sigma Invariant.

The Richard Thompson Group F is very known by its interesting homological and homotopical properties, for example, it is of type FP_∞ ([04]). Also, F has the property of being defined in several distinct ways.

The Sigma Invariant Theory was developed in last decades of twentieth century by R. Bieri, J. Groves, R. Geoghegan, H. Meinert, R. Strebel and others and is related to FP_m properties of groups.

The $\Sigma^1(F)$ was obtained in [03]. Recently the general case of $\Sigma^m(F)$ and $\Sigma^m(F, \mathbb{Z})$ (homotopical and homological versions, respectively), $m \geq 2$, were described by R. Bieri, R. Geoghegan and D. Kochloukova. Here, we present the homotopical version of this result.

Sumário

Agradecimentos **v**

Resumo **vii**

Abstract **viii**

Introdução **1**

1 Teoria Combinatorial de Grupos **4**
1.1 Grupos Livres 4
1.1.1 Construção de um grupo livre 4
1.1.2 Geradores e Relações 7
1.2 Produto Livre de Grupos 8
1.3 Produto Livre Amalgamado 11
1.4 Extensões HNN 15

2 Álgebra Homológica **20**
2.1 Produto Tensorial 20
2.2 Produto e Soma de módulos 21
2.3 Funtores Exatos 23
2.4 Limites Diretos 24
2.5 Adjuntos 25
2.6 Módulos Livres 25
2.7 Módulos Projetivos e Injetivos 26
2.8 Lemas Fundamentais da Álgebra Homológica 27
2.9 Funtor Tor 30
2.10 Sequência Espectral 31

3 Álgebra via Topologia Algébrica **34**
3.1 Construção de Resoluções via Topologia 34
3.1.1 Complexos de Cayley 34
3.1.2 G-módulos 35

3.1.3 Resoluções de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ via Topologia . . . 36
3.2 Módulos Induzidos . . . 37
3.2.1 O Produto Tensorial $\otimes_G$ . . . 37
3.2.2 Extensão de Escalares . . . 37
3.2.3 Módulos Induzidos . . . 38

4 Aplicações 40
4.1 Resoluções de tipo finito . . . 40
4.2 Critério de Bieri . . . 42
4.3 Grupos de tipo FP_m . . . 44
4.4 Critério de Brown . . . 44
4.5 Ação de Extensões HNN sobre árvores . . . 46

5 Σ-Teoria 48
5.1 O Invariante Homológico . . . 48
5.2 O Invariante Homotópico . . . 49
5.3 Critério de Meinert . . . 52

6 O grupo de Richard Thompson F 53
6.1 Introdução . . . 53
6.2 O grupo F via homeomorfismos do intervalo . . . 53
6.3 Isomorfismos . . . 60
6.4 Propriedades Algébricas de F . . . 62
6.5 O grupo F via extensão-HNN . . . 65
6.6 Outras propriedades importantes . . . 65

7 O Cálculo de $\Sigma^m(F)$ 66
7.1 Cálculos para $\Sigma^1(F,\mathbb{Z})$ . . . 66
7.1.1 Definição equacional de $\Sigma^1(G,\mathbb{Z})$ . . . 67
7.1.2 Grupos de homeomorfismos lineares por partes do intervalo $[0,1]$ . . . 70
7.2 Cálculos para $\Sigma^m(F)$, $m \geq 2$ . . . 74
7.2.1 Cálculos para $\Sigma^2(F,\mathbb{Z})$ . . . 74
7.2.2 Cálculos para $\Sigma^m(F)$ . . . 81

Bibliografia 89

Introdução

Esta dissertação, como se observa pelo seu título, é composta por duas partes: uma delas diz respeito à teoria dos invariantes homotópicos $\Sigma^m(G)$ de um grupo G (em geral, finitamente gerado) enquanto a outra apresenta um dos grupos de Richard Thompson, o qual denotamos por F. O objetivo é mostrar o cálculo do invariante $\Sigma^m(F)$, para qualquer inteiro $m \geq 1$.

A teoria dos invariantes Σ tem seu início na década de oitenta através de R. Bieri, R. Strebel, W. Neumman, B. Renz, entre outros. Mais especificamente, o surgimento se deu em 1980, com R. Bieri e R. Strebel (ver [01]), onde o invariante Σ^1 foi definido somente para grupos metabelianos sendo que, através dele, obteve-se uma classificação para grupos metabelianos finitamente gerados. Mais tarde, já em 1984, os mesmos citados acima, juntamente com W. Neumman (ver [03]), o redefiniram num contexto mais geral; desta vez para grupos finitamente gerados. Finalmente, em 1988, R. Bieri e B. Renz (ver [02]) definiram os invariantes homotópicos $\Sigma^m(G)$ e homológicos $\Sigma^m(G,\mathbb{Z})$ para dimensões m maiores do que um.

Basicamente, para cada grupo G de tipo F_m (resp. de tipo FP_m), o invariante homotópico $\Sigma^m(G)$ (resp. homológico $\Sigma^m(G,\mathbb{Z})$) é um subconjunto da esfera de caracteres $S(G)$ que é o conjunto de classes de equivalência $[\chi] = r\chi$, com $r \in \mathbb{R}_{>0}$ e $\chi : G \to \mathbb{R}$ um caracter não-nulo de G. A esfera de caracteres $S(G)$ pode ser identificada com S^{n-1}, onde n é o posto da parte livre de G/G'. Este é o motivo pelo qual o invariante é chamado *geométrico*. Os invariantes $\Sigma^m(G)$ e $\Sigma^m(G,\mathbb{Z})$ são calculados para uma quantidade pequena de tipos de grupos e em poucos casos se obteve uma descrição completa. Um dos principais resultados desta teoria é que $\Sigma^m(G)$ (resp. $\Sigma^m(G,\mathbb{Z})$) é um subconjunto aberto de $S(G)$ e que $\Sigma^m(G)$ (resp. $\Sigma^m(G,\mathbb{Z})$) classifica todos os subgrupos normais N de G tais que N é de tipo F_m (resp. de tipo FP_m) e G/N é abeliano (ver [02]).

Os grupos de Richard Thompson são três: F, T e V e foram definidos em 1965. Mais tarde, em 1973, eles aparecem na solução de problemas em lógica (ver [13]). Aqui, estudamos apenas o grupo F que pode ser apresentado da seguinte maneira:

$$F_1 = \langle x_0, x_1, x_2, \ldots \,|\, x_k^{-1} x_n x_k = x_{n+1},\, n > k \geq 0, n \in \mathbb{N} \rangle.$$

Acontece que este grupo possui muitas particularidades. Por exemplo, há maneiras bem distintas de o definirmos: é possível ver que existe uma outra apresentação para

F que é finita com dois geradores e duas relações ou podemos considerá-lo como um subgrupo do grupo de homeomorfismos do intervalo $[0,1]$ e, ainda, F pode ser visto como uma extensão HNN. Além disso, F tem propriedade homotópicas e homológicas interessantes, tem servido, ao longo do tempo, como primeiro exemplo de alguns problemas em aberto (por exemplo, ver [04]) e, ainda hoje, a questão se F é *amenable* está em aberto. Resolver este problema fornecerá um novo exemplo ainda não descoberto até então, seja F amenable ou não (para mais detalhes, veja [11] e [17]).

Deste modo, esta dissertação apresenta o cálculo do invariante para este grupo F. Veremos que este cálculo envolve esta versatilidade do grupo F, sendo que através destas diferentes maneiras de realizá-lo podemos aplicar resultados de teorias distintas para obtermos resultados sobre F.

Segue agora uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo da dissertação.

No capítulo 1, apresentamos a teoria combinatorial de grupos, o que nos permitirá entendermos a propriedade de F ser uma extensão HNN. Neste caso, optamos por apresentar a teoria em detalhes visto que seu conteúdo está diretamente ligado à topologia algébrica e ao longo do texto usamos muito de seus conceitos. Com isso, pretendo também fornecer um conteúdo acessível para um estudante iniciante na teoria combinatorial de grupos, justificando assim o aparecimento de exemplos ao longo do texto.

No capítulo 2, introduzimos conceitos da álgebra homológica que aparece naturalmente pois estaremos lidando com resoluções e complexos durante toda a dissertação. Assim, apresentamos conceitos básicos como o de produto tensorial, funtores exatos, limites diretos, módulos e resoluções livres e projetivos, entre outros, para no final definirmos duas ferramentas fundamentais: o funtor Tor e as sequências espectrais. Neste caso, não entramos em detalhes pois tal teoria é muito extensa e só nos preocupamos em enunciar os principais resultados.

Já no capítulo 3, começamos a obter resultados mais concretos em termos de resoluções e complexos de cadeias. Utilizando um pouco de topologia algébrica, contruímos resoluções e obtemos resultados interessantes sobre a estrutura do complexo de cadeias de um G-complexo X, isto é, um complexo-CW que tem uma ação de um grupo G por homeomorfismos que permutam células.

Assim, depois de três capítulos basicamente teóricos, temos algumas aplicações no capítulo 4. Definimos tipo homológico FP_m de um grupo e provamos dois critérios, um de caráter algébrico atribuído a Bieri (ver [14]) e outro de caráter topológico atribuído a Brown (ver [05]), para determinarmos quando um grupo é deste tipo. O primeiro deles fornece uma condição necessária e suficiente enquanto o segundo, uma suficiente. Além disso, através da ação de extensões sobre árvores, encontramos uma condição necessária para que uma extensão HNN também seja de tipo FP_m.

No capítulo 5, introduzimos a teoria dos invariantes homotópicos $\Sigma^m(G)$ e homológicos $\Sigma^m(G,\mathbb{Z})$. Mostramos como estes invariantes estão relacionados e enunciamos o critério de Meinert, que é análogo ao critério de Brown e, que devido ao contexto, é chamado de versão monoidal do critério de Brown.

No capítulo 6, definimos o grupo F de Richard Thompson F e nos restrigimos à sua realização como subgrupo do grupo de homeomorfismos do intervalo $[0,1]$ para obter uma forma normal para os elementos de F. Usando esta forma normal, é possível obter os isomorfismos entre as diversas realizações de F. Além disso, este capítulo contém a demonstração de algumas propriedades algébricas de F.

Finalmente, no capítulo 7, que encerra a dissertação, apresentamos todos os detalhes para o cálculo de $\Sigma^m(F)$, sendo este dividido em duas partes: uma para o cálculo do $\Sigma^1(F)$ e outra para o $\Sigma^m(F)$, com $m \geq 2$.

Capítulo 1

Teoria Combinatorial de Grupos

Neste primeiro capítulo, apresentamos a teoria combinatorial de grupos cujo contexto permite entender os grupos por meio de seus geradores e relações. Isto está diretamente ligado à construção dos grupos livres. A partir destes definimos produtos livres, produtos livres amalgamados e extensões HNN de grupos.

Além disso, o grupo principal desta dissertação é o grupo de Richard Thompson e acontece que uma de suas realizações é dada exatamente como uma extensão HNN. Assim, vamos estabelecer com detalhes as bases para entendermos esta realização. Veremos também que, por conta desta propriedade, poderemos derivar outras propriedades importantes a respeito do grupo.

Esta seção tem como fonte o livro [16] o qual introduz a teoria combinatorial de grupos no seu primeiro capítulo. O fato de ele dedicar um capítulo a parte para este assunto facilita seu estudo individual porém, sua notação é um tanto complicada.

Assim, temos outras referências além desta como as notas de aula do C.F. Miller III [18], que possui notação muito mais clara, e o livro clássico [20], que apresenta a teoria dentro do contexto de suas aplicações em topologia algébrica.

1.1 Grupos Livres

1.1.1 Construção de um grupo livre

Seja G um grupo e X um conjunto que gera G. Informalmente, os pares (G, X) são chamados de grupos livres em X quando os elementos em $X \cup X^{-1}$ tem produto igual a 1 somente quando as propriedades que são mantidas em quaisquer grupos requerem que seja 1.

Formalmente, temos uma definição em termos da seguinte propriedade universal:

Definição 1.1.1. *Sejam X em conjunto, G um grupo e $i : X \to G$ uma função. O par (G, i) é chamado **livre em X** se para qualquer grupo H e função $f : X \to H$ existe um único homomorfismo de grupos $\varphi : G \to H$ tal que $f = \varphi i$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & G \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

Como se trata de um objeto universal, não é difícil mostrar que se existe um par livre sobre X, então ele é único, a menos de isomorfismos. Além disso, podemos considerar sempre a função i na definição como uma inclusão, como mostra a seguinte proposição:

Proposição 1.1.2. *Seja (F, i) livre em X.*

i *Se existe um grupo G com uma função injetiva $f : X \to G$ então i é injetiva.*

ii *Existe um grupo ao qual X é levado injetivamente; a saber, o conjunto $\mathbb{Z}^X$ de todas as funções de X em $\mathbb{Z}$.*

iii *A função i é injetiva.*

Prova. Segue pela definição de grupo livre que existe uma $\varphi : F \to G$ tal que $\varphi i = f$ donde segue que i é injetora e assim provamos [i]. Daí, tome $\mathbb{Z}^X$. Defina, para cada $x \in X$:

$$\alpha_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x, \\ 0 & \text{se } y \neq x. \end{cases}$$

A função que leva $x \in X$ em α_x é claramente injetora. Isto prova $[ii]$ e $[iii]$. □

Agora, exibimos um caminho pelo qual se constrói, a partir de um conjunto X qualquer, um grupo livre. Assim mostramos que existem grupos livres sobre quaisquer conjuntos de modo arbitrário. Para isso, vamos apresentar algumas definições.

Dado X um conjunto, definimos $M(X)$ o conjunto de todas as sequências finitas $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ de elementos em X. Tomamos um conjunto X^{-1} em bijeção a X através da bijeção que leva x em x^{-1} e tal que $X \cap X^{-1} = \emptyset$. A partir disto, dizemos que os elementos de $M(X \cup X^{-1})$ são chamados de **palavras**. Se w é uma palavra do tipo $x_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, onde $\epsilon_i = \pm 1$, então n é chamado o *comprimento* de w.

Uma palavra é dita **reduzida** se, para $1 \leq r \leq n-1$: [i] $i_{r+1} \neq i_r$ ou [ii] $i_{r+1} = i_r$ mas $\epsilon_{r+1} \neq -\epsilon_r$.Dito de outro modo, uma palavra não é reduzida se ela contém subpalavras da forma xx^{-1} ou $x^{-1}x$, chamadas de **pares inversos**.

Se w não é uma palavra reduzida podemos obter uma nova palavra u apagando estes pares inversos; a este processo damos o nome de **redução elementar**. Daí, definimos uma relação de equivalência $w \approx v$ se w é igual a v como palavra (notação: $w \equiv v$ se w e v são iguais como palavra e $w =_G v$ se são iguais como elementos de um grupo G) ou se existe uma sequência de palavras $w_1 w_2 \cdots w_k$ tal que $w_1 = w$ e

$w_k = v$ e para cada $j < k$ um dos w_{j+1} ou w_j é obtido do outro por uma redução elementar. Então denotamos por $\mathcal{F}(X)$ o conjunto das classes de equivalência.

Agora, definimos em $\mathcal{F}(X)$ uma multiplicação $[u][v] = [uv]$. Esta multiplicação é associativa, tem elemento neutro (a sequência vazia), e a inversa de uma classe da palavra $[x_{i_1} \cdots x_{i_n}]$ é a clase da palavra $[x_{i_n}^{-1} \cdots x_{i_1}^{-1}]$. Disto temos que $\mathcal{F}(X)$ com esta multiplicação é um grupo. Mais ainda, vê-se facilmente que:

Teorema 1.1.3. *$(\mathcal{F}(X), i)$ é livre em X, com $i : x \hookrightarrow [x]$.*

O próximo resultado é bastante fundamental pois garante que podemos trabalhar com palavras reduzidas ao considerarmos um elemento em $\mathcal{F}(X)$.

Teorema 1.1.4. *[Forma Normal para Grupos Livres] Existe exatamente uma palavra reduzida em cada classe de equivalência.*

Prova. [método de Van der Warden]

Seja S o conjunto de todas as palavras reduzidas. Seja $Sim(S)$ o grupo de todas as permutações em S. Defina $f : X \to Sim(S)$ por

$$f(x)(x_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_{i_n}}) = \begin{cases} (x x_{i_1}^{\epsilon_{i_1}}) x_{i_2}^{\epsilon_{i_2}} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_{i_n}} & \text{se } x_{i_1}^{-\epsilon_1} \neq x, \\ x_{i_2}^{\epsilon_{i_2}} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_{i_n}} & \text{se } x_{i_1}^{-\epsilon_1} = x. \end{cases}$$

É fácil ver que f é uma permutação em S, com $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$. Segue, pela definição, que existe um homomorfismo $\varphi : \mathcal{F}(X) \to Sim(S)$ com $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Daí, se w é uma palavra reduzida $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ então $\varphi[w] = f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots f(x_{i_n})^{\epsilon_n}$. Por indução, segue que $\varphi[w] = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} \equiv w$.

Em particular, se w e w' são reduzidas com $w \approx w'$ então $[w] = [w']$ e portanto w e w' sendo a ação de $\varphi(w)$ em 1 e de $\varphi(w')$ em 1 tem que ser iguais.

Logo existe somente uma única palavra reduzida em cada classe de equivalência.

□

A próxima proposição nos garante uma condição para mais adiante definirmos com precisão o que venha a ser um grupo livre.

Proposição 1.1.5. *$\mathcal{F}(X)$ é isomorfo a $\mathcal{F}(Y)$ se e somente se $|X| = |Y|$.*

Assim, podemos partir da definição de um par (G, X) livre para a seguinte definição:

Definição 1.1.6. *Um grupo G é **livre** se é isomorfo a $\mathcal{F}(X)$ para algum X.*

*Se $i : \mathcal{F}(X) \to G$ é um isomorfismo então $i(X)$ é chamada **base de** G. A cardinalidade de uma base é chamada de **posto**.*

No restante da dissertação, reservamos a notação $\mathcal{F}$ para nos referir a um grupo livre. Finalmente, temos uma proposição para caracterizar os grupos livres.

Teorema 1.1.7. *[Caracterização de Grupos Livres] Seja X um subconjunto de um grupo G. Então, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

1 *G é livre com base X.*

2 *todo elemento de G pode escrito de maneira única como $x_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ para algum $n \geq 0$, $x_{i_r} \in X$, $\epsilon_r = \pm 1$ onde $\epsilon_{r+1} \neq -\epsilon_r$ se $i_{r+1} = i_r$.*

3 *G é gerado por X e se $w = 1$ em G então w contém um par inverso, ie, se $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ com $n > 0$, então, para algum $r > 0$ temos que $i_{r+1} = i_r$ com $\epsilon_i = -\epsilon_{i+1}$.*

1.1.2 Geradores e Relações

O objetivo nesta parte é mostrar como descrever qualquer grupo em termos de seus "geradores e relações"e como isto nos fornece uma boa maneira de trabalhar com grupos. O próximo resultado já nos aponta de que maneira podemos fazer isso.

Proposição 1.1.8. *Qualquer grupo G é quociente de algum grupo livre.*

Prova. Tome X_G o conjunto dos elementos de G. Seja $\mathcal{F}(X_G)$ o grupo livre com base X_G. Defina $f : X_G \to G$ por $g \mapsto g$. Segue, pela definição de $\mathcal{F}(X)$, que existe um homomorfismo $\varphi : \mathcal{F}(X_G) \to G$ que estende f e é sobrejetora. Logo, pelo teorema dos isomorfismos, $G \cong \mathcal{F}(X_G)/\ker\varphi$. $\square$

A partir disto, estudam-se os epimorfismos $F(X) \xrightarrow{\varphi} G$, onde X é um conjunto qualquer; neste caso, X é chamado de conjunto de símbolos que geram G. A única coisa que se sabe é que $\ker\varphi \triangleleft \mathcal{F}(X)$. A partir disso, definimos:

- $\ker\varphi$ é chamado de **conjunto das relações de G sob** φ.
- O **fecho normal** de um conjunto R em um grupo F é o menor subgrupo normal em F que contém R (F não precisa ser livre). Por definição, o conjunto $<R^F>$ é o fecho normal de R em F, onde $R^F = \{f^{-1}rf : f \in F\, r \in R\}$.
- Se o $\ker\varphi$ é o fecho normal de algum subconjunto R de $\mathcal{F}(X)$ (grupo livre com base X), denomina-se R de **conjunto de relações que definem G sob** φ.
- Uma **apresentação** $\langle G, R\rangle^\varphi$ **de G** consiste de um conjunto X, um epimorfismo $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\varphi} G$ e um conjunto R de conjunto de relações que definem G sob φ.

Usaremos a notação $G = \langle X \mid R \rangle$ se $G \cong \mathcal{F}(X)/ < R^{\mathcal{F}(X)} >$. Assim, um exemplo simples como consequência desta definição é que um grupo abeliano livre com base X tem apresentação:

$$G = \langle\ X \mid xyx^{-1}y^{-1} = 1\,, \forall x, y\ \in X\ \rangle.$$

A partir da proposição 1.1.8, o próximo resultado nos permite construir, a partir da apresentação de um dado grupo, homomorfismos dele em outros grupos desde que as relações sejam preservadas.

Teorema 1.1.9 (von Dyck's)**.** *Sejam $G = \langle G, R \rangle \varphi$, $f : X \to H$ uma função, H um grupo qualquer e $\vartheta : \mathcal{F}(X) \to H$ o homomorfismo que estende f. Se $R \subseteq \ker \vartheta$ então existe um homomorfismo $\psi : G \to H$ tal que $f(x) = \psi\varphi(x)$ para todo $x \in X$.*

Prova. Por definição, $\ker \varphi$ é o menor subgrupo normal que contém R. Como $R \subseteq \ker \vartheta$ que é um subgrupo normal, temos que $\ker \varphi \subseteq \ker \vartheta$. Assim, podemos definir um homomorfismo $\psi : G \to H$ por $\psi(\bar{g}) = \vartheta(g)$, onde $\bar{g} = \varphi(y)$, $y \in \mathcal{F}(X)$.

Note que ψ está bem definida. Como ϑ é homomorfismo segue que ψ também o é. Finalmente, se $x \in X$, então $f(x) = \vartheta(x) = \psi(\bar{g})$ onde $\bar{g} = \varphi(x)$ e, portanto, $f(x) = \psi(\varphi(x))$, para todo $x \in X$. $\square$

`Exemplo` Duas apresentações para $\mathbb{Z}_6$:

$$\mathbb{Z}_6 = \langle x | x^6 \rangle \text{ e } \mathbb{Z}_6 = \langle x, y | x^3, y^2, xyx^{-1}y^{-1} \rangle.$$

1.2 Produto Livre de Grupos

Vamos generalizar a construção de um grupo livre. Sejam H e K dois grupos.

Definição 1.2.1. *Um grupo L é chamado de **produto livre** H e K se existem homomorfismos $i_H : H \to L$ e $i_K : K \to L$ que satisfazem a seguinte propriedade: para qualquer par de homomorfismos $\alpha : H \to G$ e $\beta : K \to G$ onde G é um grupo qualquer, existe um único homomorfismo $\gamma : L \to G$ tal que $\gamma i_H = \alpha$ e $\gamma i_K = \beta$.*

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "i_H"'] \arrow[dr, "\alpha"'] & L \arrow[d, dashed, "\exists!\gamma"] & K \arrow[l, "i_K"] \arrow[dl, "\beta"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Como trata-se de um objeto universal, se existe, ele é único a menos de isomorfismos. Vamos denotá-lo por $L = H * K$. Agora vamos ver que estes produtos existem.

Teorema 1.2.2. *O produto livre de $H * K$ existe.*

Prova. Suponha que tenhamos apresentações $\langle\ X \,|\, R\ \rangle$ para H e $\langle\ Y \,|\, S\ \rangle$ para K. Podemos assumir que $X \cap Y = \emptyset$. Então, podemos apresentar L unindo as apresentações de H e K da seguinte maneira:

$$H * K = \langle X \cup Y \,|\, R \cup S \rangle.$$

Os homomorfismos i_H e i_K são simplesmente os homomorfismos induzidos pela inclusão dos geradores de H e K respectivamente em L. Agora, definimos o homomorfismo $\gamma' : \mathcal{F}(X \cup Y) \to G$ por $\gamma'(x) = \alpha(x)$ se $x \in X$ e $\gamma'(y) = \beta(y)$ se $y \in Y$. Daí, γ' induz $\gamma : L \to G$ que é unica pelo modo que foi construída. $\square$

De certo modo, este produto é o grupo mais livre que contém H e K. Tais grupos são chamados de fatores livres de $H * K$. É importante ressaltar que esta construção não se limita a apenas dois fatores e pode ser generalizada facilmente para uma quantidade arbitrária de grupos $\{H_j\}_{j \in J}$ e, neste caso, denotamos o produto livre por $*_{j \in J} H_j$.

`Exemplo` O produto livre de duas cópias de $\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle\ x, y \,|\, \emptyset\ \rangle$, grupo livre de posto 2.

Vamos agora em direção a uma forma normal para os elementos de $H * K$.

Definimos uma **palavra alternada** ou **expressão alternada** em $H * K$ como um produto da forma $h_1 k_1 \cdots h_m k_m$ onde cada $h_i \in M$ e cada $k_i \in K$, permitindo uma das quatro formas seguintes : $h_1 k_1 \cdots h_m k_m$, $k_1 h_2 \cdots h_m k_m$, $h_1 k_1 \cdots k_{m-1} h_m$ e $k_1 h_2 \cdots k_{m-1} h_m$. O número de elementos que ocorrem na expressão é chamado de **comprimento da palavra**.

Dizemos que uma expressão alternada num produto livre é **reduzida** se cada $1 \neq h_i$ e cada $1 \neq k_i$ quando ocorrem. Suponha que uma expressão alternada $h_1 k_1 \cdots h_{i-1} k_{i-1} h_i k_i \cdots h_m k_m$ não seja reduzida. ie, vamos assumir que algum $h_i = 1$. Então, podemos substituir $k_{i-1} h_i k_i$ por $k' = k_{i-1} k_i = k_{i-1} h_i k_i$ e obtemos uma outra expressão alternada $h_1 k_1 \cdots h_{i-1} k' h_{i+1} \cdots h_m k_m$ para o mesmo elemento no grupo L. Podemos fazer o mesmo se algum $k_i = 1$.

Prosseguindo deste modo podemos obter uma expressão alternada reduzida que representa o mesmo elemento que o original. Note que a expressão vazia já é reduzida.

Teorema 1.2.3 (Forma Normal). *Qualquer elemento não-trivial de $L = H * K$ é igual a uma única expressão alternada $h_1 k_1 \cdots h_m k_m$ com $1 \neq_H h_i$ e $1 \neq_K k_i$ quando* *ocorrem. Isto quer dizer que se duas expressões tais quais acima são iguais em $H * K$, ie:*

$$h_1k_1\cdots h_mk_m =_L h_1'k_1'\cdots h_n'k_n'$$

então $n = m$ e cada $h_i = h_i'$ e cada $k_i = k_i'$.

Prova. É fácil ver que qualquer elemento é igual a uma expressão alternada por causa da apresentação de L.

Para provar a unicidade, considere Ω o conjunto de todas as formas reduzidas. A cada elemento de $h \in H$ e $k \in K$ vamos associar uma permutação respectiva em $Sim(\Omega)$ da seguinte maneira:

$$\theta(h)(h_1k_1\cdots h_mk_m) = \begin{cases} k_1h_2\cdots h_mk_m & \text{se } h = h_1^{-1}, \\ (hh_1)k_1\cdots h_mk_m & \text{se } h \neq h_1^{-1}. \end{cases}$$

Note que tanto o primeiro caso quanto o segundo contemplam a possibilidade de h_1 não ocorrer.

Podemos verificar que $(\theta(h))^{-1} = \theta(h^{-1})$ e que $\theta(hh') = \theta(h)\theta(h')$ e assim θ define um homomorfismo de H em $Sim(\Omega)$.

Definimos um homomorfismo $\psi : K \to Sim(\Omega)$ de maneira análoga. Assim, temos que θ e ψ definem um homomorfismo $\theta * \psi : H * K \to Sim(\Omega)$.

Agora, se $h_1k_1\cdots h_mk_m$ é uma expressão reduzida, temos que:

$$\theta * \psi(h_1k_1\cdots h_mk_m)(1) = h_1k_1\cdots h_mk_m.$$

Logo, $h_1k_1\cdots h_mk_m \neq 1$ em L. Isso implica a unicidade da expressão alternada reduzida.

De fato, suponha que:

$$h_1k_1\cdots h_mk_m =_{H*K} h_1'k_1'\cdots h_n'k_n'$$

onde ambos os lados são expressões reduzidas. Segue que:

$$h_1k_1\cdots h_mk_m{k_n'}^{-1}{h_n'}^{-1}\cdots {k_1'}^{-1}{h_1'}^{-1} =_{H*K} 1$$

e, como as expressões originais são reduzidas, temos necessariamente que $k_m = k_n'$ e, seguindo por indução, teremos que as expressões são idênticas. $\square$

Uma outra versão deste teorema que segue diretamente deste último é a seguinte:

Teorema 1.2.4 (Caracterização de Produtos Livres)**.** *L é o produto livre de H e K se e somente se valem as seguintes condições:*

1. *H e K geram L, ie, todo elemento de L é igual a alguma expressão alternada $h_1k_1\cdots h_mk_m$.*

2. *se $w \equiv h_1k_1\cdots h_mk_m$ é uma expressão alternada e $w =_L 1$ então $h_i =_H 1$ ou $k_i =_K 1$ para algum i.*

1.3 Produto Livre Amalgamado

Vamos generalizar a construção de produto livres da seguinte maneira: suponha que H e K possuem subgrupos isomorfos de modo que existam dois monomorfismos $\sigma : M \to H$ e $\tau : M \to K$. Vamos construir um grupo que contem H e K no qual seus subgrupos $\sigma(M)$ e $\tau(M)$ estão identificados e $H \cap K = \sigma(M) = \tau(M)$.

Definição 1.3.1. *Um grupo L é chamado de **produto livre amalgamado de H e K com subgrupo amalgamado** M se existem homomorfismos de grupos $i_H : H \to L$ e $i_K : K \to L$ tal que $i_H\sigma = i_K\tau$ que satisfazem a seguinte propriedade: para qualquer par de homomorfismos $\alpha : H \to G$ e $\beta : K \to G$ com $\alpha\sigma = \beta\tau$ onde G é um grupo qualquer, existe um único homomorfismo $\gamma : L \to G$ tal que $\gamma i_H = \alpha$ e $\gamma i_K = \beta$.*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau"'] & H \arrow[d, "i_H"] \arrow[ddr, bend left, "\alpha"] & \\
K \arrow[r, "i_K"] \arrow[drr, bend right, "\beta"'] & L \arrow[dr, dashed, "\gamma"] & \\
& & G
\end{tikzcd}$$

Como trata-se de um objeto universal, se existe, ele é único a menos de isomorfismos. Vamos denotá-lo por $L = H *_M K$. Agora vamos ver que estes produtos existem.

Teorema 1.3.2. *O produto livre amalgamado $H *_M K$ existe.*

Prova. Suponha que tenhamos apresentações $\langle X \mid R\rangle$ para H e $\langle Y \mid S\rangle$ para K. Além disso suponha que $M = \langle Q\rangle$. Podemos assumir que $X \cap Y = \emptyset$. Então, podemos apresentar L unindo as apresentações de H e K e identificando as imagens de M da seguinte maneira:

$$H *_M K = \langle X \cup Y \mid R \cup S,\ \sigma(q) = \tau(q) \forall q \in Q\rangle.$$

Os homomorfismos i_H e i_K são simplesmente os homomorfismos induzidos pela inclusão dos geradores de H e K respectivamente em L. Agora, definimos o homomorfismo $\gamma' : \mathcal{F}(X \cup Y) \to G$ por $\gamma'(x) = \alpha(x)$ se $x \in X$ e $\gamma'(y) = \beta(y)$ se $y \in Y$. Temos que mostrar que $\gamma'(\sigma(q)) = \gamma'(\tau(q))$ para todo $q \in Q$. De fato,

$$\gamma'(\sigma(q)) = \gamma'|_H(\sigma(q)) = \alpha\sigma'(q) = \beta\tau(q) = \gamma'|_K(\tau(q)) = \gamma'(\tau(q))$$

e portanto, γ' induz $\gamma : L \to G$ que é unica pelo modo que foi construída. $\square$

Note que se M é trivial obtemos que L é o produto livre de H e K.

Vamos introduzir uma outra notação para o produto livre amalgamado. Seja $A = \sigma(M) \subseteq H$ e $B = \tau(M) \subseteq K$. Então estes subgrupos são isomorfos via $\varphi = \tau\sigma^{-1} : A \to B$. Neste caso denotamos por $L = H *_{A=B} K$ e apresentamos da seguinte maneira equivalente:

$$H *_{A=B} K = \langle X \cup Y \mid R \cup S,\, a = \varphi(a) \forall a \in \sigma(Q)\rangle.$$

`Exemplo` Considere $H = \langle c\rangle$ e $K = \langle d\rangle$ com seus subgrupos respectivos $A = \langle c^2\rangle$ e $B = \langle d^3\rangle$ que são isomorfos via $c^2 \mapsto d^3$. Então seu produto livre amalgamado é

$$G = H *_{A=B} K = \langle c,\ d \mid c^2 = d^3\rangle.$$

Vamos agora caminhar para mostrar a forma normal dos elementos de $H *_{A=B} K$.

A noção de palavras alternadas em L é a mesma que em produtos livres, sendo cuidadoso pois ainda não provamos que H e K estão imersos em L.

Dizemos que uma expressão alternada num produto livre amalgamado é **reduzida** se nenhum $h_i \in A = \sigma(M)$ e nenhum $k_i \in B = \tau(M)$. Suponha que uma expressão alternada $h_1k_1 \cdots h_{i-1}k_{i-1}h_ik_i \cdots h_mk_m$ não seja reduzida. Vamos assumir que algum $h_i = a_i \in A$. Pela identificação feita em L temos que $a_i = \varphi(a_i) = b_i$, para algum $b_i \in B \subseteq K$. Então, podemos substituir a_i por b_i e, tomando $k' = k_{i-1}b_ik_i$, obtemos uma outra expressão alternada $h_1k_1 \cdots h_{i-1}k'h_{i+1} \cdots h_mk_m$ para o mesmo elemento no grupo. Podemos fazer o mesmo se algum $k_i \in B$.

No exemplo anterior, temos que c^7d^7 e $c^{11}d$ são expressões reduzidas. Mas em G temos que $c^7d^7 = c^7d^3d^3d = c^7c^2c^2d = c^{11}d$ e portanto são iguais em G.

Precisamos de um critério ainda mais forte para definir uma forma normal que seja única. Para isso, vamos trabalhar com transversais de A em H e de B em K. Escolha S uma transversal à direita de A em H e T uma transversal à direita de B em K tal que $1 \in S \cap T$. Definimos uma **forma normal** como sendo um elemento de $A = B$ ou uma expressão da forma $ah_1k_1 \cdots h_mk_m$ com $1 \neq h_i \in S$ e $1 \neq k_i \in T$ e $a \in A$. Aqui $h_1k_1 \cdots h_mk_m$ representa uma expressão alternada que pode ser qualquer uma das formas: $h_1k_1 \cdots h_mk_m$, $k_1 \cdots h_mk_m$, $h_1k_1 \cdots h_m$ ou $k_1 \cdots h_m$. No caso em que h_1 não ocorre, escolhemos $b = \varphi(a)$ e escrevemos $bk_1 \cdots h_mk_m$.

Vamos mostrar que qualquer elemento w de $L = H *_{A=B} K$ é representado por uma forma normal. Aplicando o processo de redução, podemos supor que temos uma expressão alternada reduzida para w. Fazendo as contas da direira para a esquerda, podemos chegar a uma expressão alternada na forma normal para w. Suponha que $h_1k_1 \cdots k_{i-1}h_ik_i \cdots h_mk_m$ é reduzida e que cada termo à direita de h_i é um elemento em S e T diferente de 1. Sabemos que $h_i = ah_i'$ onde $a \in A$ e $h_i \in S$. Note que $h_i' \neq 1$ pois $h_i \notin A$, ie, w está na forma reduzida. Seja $b = \varphi(a) \in K$ e sabemos que em L, $a = \varphi(a) = b$, ie, $a = b$. Assim, podemos reescrever esta última expressão por $h_1k_1 \cdots h_{i-1}(k_{i-1}b)h_i'k_i \cdots h_mk_m$ que é o mesmo elemento em L. Note que como

$k_{i-1} \notin B$, temos que $k_{i-1}b \notin B$ o que implica termos uma expressão reduzida após a substituição. Presseguindo desta maneira, podemos obter uma expressão na forma normal para qualquer elemento w em L. Note que esta forma normal possui o mesmo comprimento que a expressão original para w. Isto se resume da seguinte maneira:

Proposição 1.3.3. *Seja $L = H *_{A=B} K$ um produto livre amalgamado. Escolha tranversais à direita de S em H e T em K. Então, se w é qualquer palavra em L:*

i *w é igual a uma expressão alternada.*

ii *qualquer expressão alternada para w pode ser transformada em uma expressão alternada reduzida ou a um elemento de $A = B$ que é igual a w em L.*

iii *qualquer expressão reduzida pode ser transformada em uma forma normal que possui o mesmo comprimento e é igual a w em L.*

Teorema 1.3.4. *Seja $L = H *_{A=B} K$ um produto livre amalgamado. Então:*

1 *as funções i_h e i_k são monomorfismos de H e K em L.*

2 *se $w \equiv h_1k_1 \cdots h_mk_m$ é uma expressão alternada e se $w = 1$ em L então para algum i ou $h_i \in A$ visto como um elemento de H ou $k_i \in B$ visto como um elemento de K.*

Prova. Primeiramente, provamos a segunda parte. Considere Ω o conjunto de todas as formas normais. A cada elemento de $h \in H$ e $k \in K$ vamos associar uma permutação respectiva em $Sim(\Omega)$ da seguinte maneira:

$$\theta(h)(ah_1k_1 \cdots h_mk_m) = \begin{cases} b'k_1h_2 \cdots h_mk_m & \text{se } hah_1 \in A = B \\ a'h_1'k_1 \cdots h_mk_m & \text{se } hah_1 \notin A = B \end{cases}$$

onde $hah_1 = a'h_1'$ com $h_1' \in S$ e $b' = \varphi(a')$. Note que tanto o primeiro caso quanto o segundo contemplam a possibilidade de h_1 não aparecer. Temos que checar que $(\theta(h))^{-1} = \theta(h^{-1})$ e que $\theta(hh') = \theta(h)\theta(h')$ e assim θ define um homomorfismo de H em $Sim(\Omega)$. Definimos:

$$\psi(k)(ah_1k_1 \cdots h_mk_m) = \begin{cases} (kb)h_1k_1 \cdots h_mk_m & \text{se } kb \in B = A \\ b'k_0'h_1 \cdots h_mk_m & \text{se } kb \notin B = A \end{cases}$$

onde $b = \varphi(a)$ e $kb = b_0'k_1'$ com $k_0' \in T \cup 1$ e $b' \in B$.

Quando h_1 não ocorre, definimos:

$$\psi(k)(ak_1 \cdots h_mk_m) = \begin{cases} b'h_2 \cdots h_mk_m & \text{se } kbk_1 \in B = A \\ b'k_1'h_2 \cdots h_mk_m & \text{se } kbk_1 \notin B = A \end{cases}$$

onde $b = \varphi(a)$ e $kbk_1 = b'k'_1$ com $k'_1 \in T$ e $b' \in B$.

Novamente, temos que checar que ψ é um homomorfismo de K para $Sim(\Omega)$.

É fácil ver que $\theta(a) = \psi(b)$ e então temos que θ e ψ induzem um homomorfismo $\theta *_{A=B} \psi : H *_{A=B} K \to Sim(\Omega)$.

Agora, se $ah_1k_1 \cdots h_mk_m$ é uma forma normal, temos que:

$$\theta *_{A=B} \psi(ah_1k_1 \cdots h_mk_m)(1) = ah_1k_1 \cdots h_mk_m.$$

Logo, $ah_1k_1 \cdots h_mk_m \neq 1$ em L.

Se $1 \neq h \in H$ com $h = ah_1$ com $h_1 \in S$, então a imagem de h em L envia (1) a ah_1. Logo a imagem de $1 \neq_L h$ e então H está imerso naturalmente em L pela inclusão. Igualmente temos K imerso em L.

□

Note que a construção de uma forma normal a partir de uma forma reduzida preserva comprimento e portanto uma expressão alternada que representa a identidade 1 não pode ser reduzida.

Como corolário imediato temos que $H \cap K = A = B$. Claramente $A = B \subseteq H \cap K$ e se $g \in H \cap K$ então $g = h = k$, $h \in H$ e $k \in K$ donde segue que $hk^{-1} = 1$ em L e daí, pelo segundo item do teorema, temos que $h \in A$ ou $k \in B$ ie, $g \in A = B$ ou $g \in B = A$.

Uma outra consequência é a seguinte:

Teorema 1.3.5 (Forma Normal)**.** *Qualquer elemento de $L = H *_{A=B} K$ é igual a uma única forma normal $ah_1k_1 \cdots h_mk_m$ com $1 \neq h_i \in S$ e $1 \neq k_i \in T$ quando ocorrem e $a \in A$. Isto quer dizer que se duas expressões tais quais acima são iguais em $H *_{A=B} K$, ie:*

$$ah_1k_1 \cdots h_mk_m =_L a'h'_1k'_1 \cdots h'_nk'_n$$

então $n = m$ e cada $h_i = h'_i$, $k_i = k'_i$ e $a = a'$.

Prova. A existência foi demonstrada na proposição acima. A unicidade segue do último teorema pois se

$$ah_1k_1 \cdots h_mk_m =_L a'h'_1k'_1 \cdots h'_nk'_n$$

então

$$ah_1k_1 \cdots h_m(k_m{k'_n}^{-1}){h'_n}^{-1} \cdots {k'_1}^{-1}{h'_1}^{-1}{a'}^{-1} =_L 1$$

e portanto $k_m{k'_n}^{-1} \in A = B$. Como k_m e k'_n pertencem à transversais, temos que $k_m = k'_n$. O resultado segue por indução. □

Segue agora um último resultado, que é uma versão alternativa para caracterização do produto livre amalgamado.

Teorema 1.3.6. *Um grupo L é o produto livre amalgamado de seus subgrupos H e K com subgrupo amalgamado $M = H \cap K$ se e somente se valem as seguintes condições:*

1. *H e K geram L, ie, todo elemento de L é igual a alguma expressão alternada $h_1 k_1 \cdots h_m k_m$.*

2. *se $w \equiv h_1 k_1 \cdots h_m k_m$ é uma expressão alternada e $w =_L 1$ então $h_i \in M$ ou $k_i \in M$ para algum i.*

1.4 Extensões HNN

Seja G um grupo com apresentação $\langle X \,|\, R \rangle$ e um par de subgrupos isomorfos A e B com um isomorfismo $\varphi : A \to B$. Vamos construir agora um grupo maior que contém G e nos quais os subgrupos A e B são conjugados por um elemento que realiza o isomorfismo entre eles. Optamos por definir via apresentação do grupo e não pela propriedade universal embora isto seja possível.

Definição 1.4.1. *Chamamos de **extensão** HNN **com grupo base** G**, letra estável** p**, com subgrupos associados** A **e** B **pelo isomorfismo** $\varphi : A \to B$ ao grupo $G*_\varphi$ com apresentação:*

$$G*_\varphi = \langle\ X\ ,\ p \,|\, R\ ,\ p^{-1}ap = \varphi(a)\, \forall a \in A\ \rangle.$$

O termo HNN vem das iniciais de Higman-Neumman-Neumman, os autores que introduziram esta construção. Vale ressaltar que tal grupo existe e é construído a partir do produto livre amalgamado de grupos específicos. Não colocamos aqui tal demonstração (ela pode ser encontrada em [20], teorema 11.70).

Precisamos então verificar que, de fato, $G*_\varphi$ contém G e, além disso, encontrar uma forma normal para os elementos de $G*_\varphi$ por meio de alguma operação de redução entre seus elementos.

Note que p gera um sugbrupo cíclico infinito de $G*_\varphi$.

`Exemplo`

O grupo com apresentação $\langle c, p \,|\, p^{-1}c^2p = c^3 \rangle$ é a extensão HNN tendo como grupo base o grupo cíclico infinito $\langle c \rangle$, letra estável p e subgrupos associados $\langle c^2 \rangle$ e $\langle c^3 \rangle$ pelo isomorfismo φ que leva $c^2 \mapsto c^3$.

Podemos também considerar $G*_\varphi$ como um quociente do produto livre $G * \langle p \rangle$ pelo subgrupo normal N gerado por $\{p^{-1}ap(\varphi(a))^{-1}\}_{a \in A}$.

Uma **p-expressão** é uma sequência na forma:

$$g_0 p^{\epsilon_1} g_1 \cdots g_{m-1} p^{\epsilon_{m-1}} g_m$$

onde cada g_i é um elemento de G e $\epsilon = \pm 1$. Permitimos os casos em que não ocorrem símbolos p. Nos casos em que ocorre pelo menos um p ou p^{-1}, dizemos que é uma p-expressão que **envolve p**.

Claramente, qualquer palavra nos geradores de $G*_\varphi$ pode ser vista como uma p-expressão. Se para algum i a sub-expressão $p^{-1}g_ip$ aparece e se $g_i = a \in A$, então pelas relações que definem $G*_\varphi$ temos que $p^{-1}g_ip = p^{-1}ap = \varphi(a) = b$ e então podemos reescrever a p-expressão por:

$$g_0p^{\epsilon_1}\cdots p^{\epsilon_{i-1}}(g_{i-1}bg_{i+1})p^{\epsilon_{i+2}}\cdots p^{\epsilon_{m-1}}g_m$$

que contém dois símbolos p a menos e representa o mesmo elemento em $G*_\varphi$. Analogamente, se para algum i a sub-expressão pg_ip^{-1} aparece e se $g_i = b \in B$ então pelas relações que definem $G*_\varphi$ temos que $pg_ip^{-1} = pbp^{-1} = \varphi^{-1}(b) = a$ e então podemos novamente reescrever a p-expressão com dois símbolos p a menos obtendo o mesmo elemento em $G*_\varphi$. Qualquer uma destas operações que envolvem estas sub-expressões são chamadas **p-pinches**. Se não é possível efetuar nenhuma p-pinche então a p-expressão é chamada de **p-reduzida**.

Sejam $g_0p^{\epsilon_1}g_1\cdots g_{m-1}p^{\epsilon_{m-1}}g_m$ e $g'_0p^{\delta_1}g'_1p^{\delta_2}g'_2\cdots g'_{n-1}p^{\epsilon_{n-1}}g'_n$ duas p-expressões. Dizemos que elas são **p-paralelas** se $n = m$ e $\epsilon_1 = \delta_1$, $\epsilon_2 = \delta_2, \cdots, \epsilon_m = \delta_m$. Vamos provar adiante que duas expressões p-reduzidas que representam o mesmo elemento em $G*_\varphi$ devem ser p-paralelas.

Por exemplo, em $\langle c, p \,|\, p^{-1}c^2p = c^3\rangle$ temos que $cp^{-1}c^3p$ e $c^4p^{-1}cp$ são ambas p-reduzidas. Porém, elas representam o mesmo elemento em $G*_\varphi$ pois:

$$cp^{-1}c^3p = c(p^{-1}c^2p)p^{-1}cp = cc^3p^{-1}cp = c^4p^{-1}cp.$$

Isto nos informa que ainda não temos uma forma única em $G*_\varphi$. Para isto, assim como no caso de produto livre amalgamado, vamos recorrer às transversais de classes laterais. Escolha S uma transversal à direita de A em G e T uma transversal à direita de B em G tal que $1 \in S \cap T$. Assim, definimos que

$$g_0p^{\epsilon_1}g_1p^{\epsilon_2}g_2\cdots p^{\epsilon_m}g_m \quad \text{onde} \begin{cases} g_i \in S & \text{se } \epsilon_i = -1 \\ g_i \in T & \text{se } \epsilon_i = 1 \\ \epsilon_i \neq \epsilon_{i+1} & \text{se } g_i = 1 \\ g_0 \in G & \end{cases}$$

é um elemento de $G*_\varphi$ na **forma normal**.

Note que uma forma normal é necessariamente p-reduzida. Precisamos mostrar que todo elemento w em $G*_\varphi$ é representado desta maneira. Aplicando reduções sucessivas, podemos assumir que temos uma expressão p-reduzida para w. Agora, vamos converter esta expressão p-reduzida em uma forma normal por operações sucessivas da direita para a esquerda. Assim, suponha que

$$g_0p^{\epsilon_1}g_1p^{\epsilon_2}g_2\cdots p^{\epsilon_m}g_m$$

é p-reduzida e que a parte da expressão à direita de g_i está na forma normal.

No caso em que $\epsilon_i = -1$, podemos escrever $g_i = as_i$ de forma única com $a \in A$ e $s_i \in S$. Daí, segue que $p^{-1}g_i = p^{-1}as_i = (p^{-1}ap)p^{-1}s_i = bp^{-1}s_i$ onde $\varphi(a) = b \in B$ e obtemos

$$g_0 p^{\epsilon_1} \cdots p^{\epsilon_{i-1}} g_{i-1} b p^{-1} s_i p^{\epsilon_{i+1}} \cdots p^{\epsilon_m} g_m.$$

Note que se $s_i = 1$ então $g_i = a \in A$ e daí teríamos que $\epsilon_{i+1} = -1$ pois a expressão está na forma reduzida. Ainda, se $\epsilon_{i-1} = 1$ então $g_{i-1} \notin B$ pelo mesmo motivo, ie, a expressão está na forma reduzida. Neste caso, também temos que $g_{i-1}b \notin B$ e logo esta nova expressão é p-reduzida com uma parte à direita ainda maior que está na forma normal. O caso $\epsilon_i = 1$ se trata analogamente.

Assim, depois de uma quantidade finita destas operações, obtemos uma nova expressão p-reduzida na forma normal que é p-paralela à original. Isto se resume da seguinte maneira:

Proposição 1.4.2. *Seja $G*_\varphi$ uma extensão HNN. Escolha S e T transversais à direita de A e de B em G respectivamente. Logo, se w é qualquer elemento em $G*_\varphi$:*

i *w é igual a uma p-expressão em $G*_\varphi$;*

ii *qualquer p-expressão para w pode ser transformada em uma expressão p-reduzida que igual a w em $G*_\varphi$;*

iii *qualquer expressão p-reduzida pode ser transformada em uma expressão na forma normal que é p-paralela a w e é igual a w em $G*_\varphi$.*

Por exemplo, em $G*_\varphi = \langle c, p \,|\, p^{-1}c^2p = c^3 \rangle$, escolhendo transversais $S = \{1, c\}$ de $A = \langle c^2 \rangle$ e $T = \{1, c, c^{-1}\}$ de $B = \langle c^3 \rangle$ em $G = \langle c \rangle$, a forma normal de $c^{-3}pc^2p^{-1}c^3pc^{-3}p^{-1}cp^2$ e de $c^3pc^{-2}p^{-1}c^{-4}pc^4p^{-1}$ é $cpc^{-1}p^{-1}$.

Agora, enunciamos o teorema principal:

Teorema 1.4.3. *Seja $G*_\varphi$ uma extensão HNN de G com subgrupos associados A e B pelo isomorfismo $\varphi : A \to B$. Então:*

1 *[Higman-Neumman-Neumman]*

A identidade nos geradores induz uma imersão de G em $G*_\varphi$ e p gera um subgrupo cíclico infinito em $G*_\varphi$.

2 *[Lema de Britton]*

Seja w uma palavra em $G*_\varphi$ que envolve p, ie, p ou p^{-1} aparece como subpalavra. Se $w =_{G*_\varphi} 1$ então w contém uma subpalavra da forma [i] $p^{-1}cp$ ou [ii] pcp^{-1}, onde $c \in G$ e tal que, no caso [i], c é igual em G a um elemento de A e, no caso [ii], c é igual a um elemento de B.

Prova. A proposição acima nos garante a existência de elementos na forma normal para os elementos de $G*_\varphi$. Para provar unicidade, usamos o argumento de Van der Warden. Seja Ω o conjunto de todas as formas normais. Vamos associar a cada gerador de $G*_\varphi$ uma permutação de Ω.

A cada elemento $g \in G$ associamos:

$$\theta(g)(g_0 p^{\epsilon_1} g_1 \cdots p^{\epsilon_m} g_m) = (g g_0) p^{\epsilon_1} g_1 \cdots p^{\epsilon_m} g_m$$

Ao símbolo p associamos a seguinte permutação:

$$\psi(p)(g_0 p^{\epsilon_1} g_1 \cdots p^{\epsilon_m} g_m) = \begin{cases} apt_0 p^{\epsilon_1} g_1 \cdots p^{\epsilon_m} g_m & \text{se } \epsilon_1 = 1 \\ apt_0 p^{\epsilon_1} g_1 \cdots p^{\epsilon_m} g_m & \text{se } t_0 \neq 1 \text{ e } \epsilon_1 = -1 \\ (ag_1) p^{\epsilon_2} g_2 \cdots p^{\epsilon_m} g_m & \text{se } t_0 = 1 \text{ e } \epsilon_1 = -1 \end{cases}$$

onde $g_0 = bt_0$ com $a \in A$, $a = \varphi^{-1}(b)$ e $t_0 \in T$.

E ao símbolo p^{-1} associamos a seguinte permutação:

$$\psi(p^{-1})(g_0 p^{\epsilon_1} g_1 \cdots p^{\epsilon_m} g_m) = \begin{cases} bp^{-1} s_0 p^{\epsilon_1} g_1 \cdots p^{\epsilon_m} g_m & \text{se } \epsilon_1 = -1 \\ bp^{-1} s_0 p^{\epsilon_1} g_1 \cdots p^{\epsilon_m} g_m & \text{se } s_0 \neq 1 \text{ e } \epsilon_1 = 1 \\ (bg_1) p^{\epsilon_2} g_2 \cdots p^{\epsilon_m} g_m & \text{se } s_0 = 1 \text{ e } \epsilon_1 = 1 \end{cases}$$

onde $g_0 = as_0$ com $b \in B$, $b = \varphi(a)$ e $s_0 \in S$.

Podemos verificar que, de fato, θ e ψ são homomorfismos de G para $Sim(\Omega)$ e de $\langle p \rangle$ para $Sim(\Omega)$, respectivamente.

Disto segue, pela definição de produto livre, que estes homomorfismos estendem a um homomorfismo

$$\theta * \psi : G * \langle p \rangle \to Sim(\Omega).$$

Mais ainda, note que:

$$\theta * \psi(p\varphi(a)) = \theta * \psi(ap)$$

e portanto, $\theta * \psi$ é um homomorfismo de $G*_\varphi$ para $Sim(\Omega)$. De fato,

$$\begin{aligned} \theta * \psi(ap)(g_0 p^{\epsilon_1} g_1 \cdots p^{\epsilon_m} g_m) &= \theta(a)\psi(p)(g_0 p^{\epsilon_1} g_1 \cdots p^{\epsilon_m} g_m) \\ &= \theta(a) \begin{cases} a_0 pt_0 p^{\epsilon_1} g_1 \cdots p^{\epsilon_m} g_m & \text{se } \epsilon_1 = 1 \\ a_0 pt_0 p^{\epsilon_1} g_1 \cdots p^{\epsilon_m} g_m & \text{se } t_0 \neq 1 \text{ e } \epsilon_1 = -1 \\ (a_0 g_1) p^{\epsilon_2} g_2 \cdots p^{\epsilon_m} g_m & \text{se } t_0 = 1 \text{ e } \epsilon_1 = -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (aa_0) pt_0 p^{\epsilon_1} g_1 \cdots p^{\epsilon_m} g_m & \text{se } \epsilon_1 = 1 \\ (aa_0) pt_0 p^{\epsilon_1} g_1 \cdots p^{\epsilon_m} g_m & \text{se } t_0 \neq 1 \text{ e } \epsilon_1 = -1 \\ (aa_0 g_1) p^{\epsilon_2} g_2 \cdots p^{\epsilon_m} g_m & \text{se } t_0 = 1 \text{ e } \epsilon_1 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

onde representamos $g_0 = bt_0$, $b \in B$ e $t_0 \in T$, e $a_0 = \varphi^{-1}(b) \in A$. Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
\theta * \psi(p\varphi(a))(g_0p^{\epsilon_1}g_1\cdots p^{\epsilon_m}g_m) &= \psi(p)\theta(\varphi(a))(g_0p^{\epsilon_1}g_1\cdots p^{\epsilon_m}g_m) \\
&= \psi(p)((\varphi(a)g_0)p^{\epsilon_1}g_1\cdots p^{\epsilon_m}g_m) \\
&= \begin{cases} a'pt_0p^{\epsilon_1}g_1\cdots p^{\epsilon_m}g_m & \text{se } \epsilon_1 = 1 \\ a'pt_0p^{\epsilon_1}g_1\cdots p^{\epsilon_m}g_m & \text{se } t_0 \neq 1 \text{ e } \epsilon_1 = -1 \\ (a'g_1)p^{\epsilon_2}g_2\cdots p^{\epsilon_m}g_m & \text{se } t_0 = 1 \text{ e } \epsilon_1 = -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Note que tínhamos $g_0 = bt_0$ e agora $\varphi(a)g_0 = \varphi(a)bt_0$, com $\varphi(a)b \in B$. Por isso, denotamos $b_0 = \varphi(a)b \in B$ e $a' = \varphi^{-1}(b_0) \in A$. Assim, para provar a igualdade, basta verificar que $a' = aa_0$. Com efeito,

$$a' = \varphi^{-1}(b_0) = \varphi^{-1}(\varphi(a)b) = \varphi^{-1}(\varphi(a))\varphi^{-1}(b) = aa_0.$$

Portanto, concluímos que $\theta * \psi(p\varphi(a)) = \theta * \psi(ap)$.

Agora, se $g_0p^{\epsilon_1}g_1\cdots p^{\epsilon_m}g_m$ é um elemento não trivial de $G*_\varphi$ então:

$$\theta * \psi(g_0p^{\epsilon_1}g_1\cdots p^{\epsilon_m}g_m)(1) = g_0p^{\epsilon_1}g_1\cdots p^{\epsilon_m}g_m.$$

Logo, tal elemento tem forma normal diferente de 1 em $G*_\varphi$. Em particular, segue que G mergulha em $G*_\varphi$ e que uma palavra p-reduzida que envolve p não é igual a 1. □

Finalmente, temos o teorema da forma normal.

Teorema 1.4.4 (Forma Normal)**.** *Todo elemento em $G*_\varphi$ é igual a uma única palavra*

$$g_0p^{\epsilon_1}g_1p^{\epsilon_2}g_2\cdots p^{\epsilon_m}g_m$$

na forma normal.

Prova. Suponha que exista uma outra expressão $g'_0p^{\delta_1}g'_1p^{\delta_2}g'_2\cdots p^{\delta_n}g'_n$ para a mesma palavra. Segue que $g_0p^{\epsilon_1}g_1p^{\epsilon_2}g_2\cdots p^{\epsilon_m}(g_m{g'_n}^{-1})p^{-\delta_n}\cdots {g'_2}^{-1}p^{-\delta_2}{g'_1}^{-1}p^{-\delta_1}{g'_0}^{-1} = 1$ e portanto, deve haver uma p-pinche. Como as palavras são reduzidas, este p-pinche só pode ser aparecer em $p^{\epsilon_m}(g_m{g'_n}^{-1})p^{-\delta_n}$. Disto seque que $\epsilon_m = \delta_n$. Se $\epsilon_m = -1$ então $g_m{g'_n}^{-1} \in A$ e portanto $g_m = g'_n$. Se $\epsilon_m = 1$ então $g_m{g'_n}^{-1} \in B$ e portanto $g_m = g'_n$ pois, em ambos os casos, cada g_i está em uma transversal e escolhemos o elemento neutro como representante de A e B. O restante segue por indução. □

Vale ressaltar que esta construção não se limita a um único par e uma única letra estável. Podemos definir extensões HNN para qualquer quantidade de pares de subgrupos isomorfos (A_i, B_i) conjugados por um conjunto de letras estáveis $\{p_i\}$.

Capítulo 2

Álgebra Homológica

Este segundo capítulo apresenta, em linhas gerais, os conceitos básicos da álgebra homológica. A idéia aqui não é apresentar a teoria em todos os seus detalhes pois é bastante extensa. Procuramos expor o que será necessário para os cálculos feitos nesta dissertação e, quando possível, situar um determinado tópico dentro de seu contexto mais geral.

Tomamos como texto base para esta seção o livro [19], principalmente, o material contido nos capítulos 1, 2, 3, 6, 7, 8 e 11. Além disso, assumimos um conhecimento básico da teoria de categorias conforme consta no seu primeiro capítulo.

Neste capítulo, R é um anel associativo com identidade. Vamos denotar por ${}_R\mathcal{M}$ a categoria de R-módulos à esquerda e por $\mathcal{M}_R$ a categoria de R-módulos à direita. Chamamos um homomorfismo entre R-módulos de R-mapa.

2.1 Produto Tensorial

Definição 2.1.1. *Sejam $A \in \mathcal{M}_R$, $B \in {}_R\mathcal{M}$ e G um grupo abeliano aditivo. Uma função $f : A \times B \to G$ é R-**biaditiva** se para todo $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ e $r \in R$:*

$$f(a+a', b) = f(a, b)+f(a', b); \quad f(a, b+b') = f(a, b)+f(a, b') \quad e \quad f(ar, b) = f(a, rb).$$

Definição 2.1.2. *Um **produto tensorial** de $A \in \mathcal{M}_R$ e $B \in {}_R\mathcal{M}$ é um grupo abeliano $A \otimes_R B$ e uma função bi-aditiva h que resolve o seguinte diagrama universal:*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A\otimes_R B \arrow[dl, dashed, "f'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

para todo grupo abeliano G e para qualquer função bi-aditiva f sobre R, existe um único homomorfismo f' que faz o diagrama comutar.

Um resultado imediato a partir desta construção universal é o seguinte:

Teorema 2.1.3. *Nas condições descritas acima:*

1 *Quaisquer dois produtos tensoriais de A e B são isomorfos.*

2 *Existe o produto tensorial de A e B.*

A partir do produto tensorial podemos construir um funtor que leva R-módulos em grupos abelianos, que, com alguma hipótese adicional, torna-se um funtor entre R-módulos.

Sejam $f : A \to A'$, R-mapa entre R-módulos à direita e $g : B \to B'$, R-mapa entre R-módulos à esquerda. Então, pode-se mostrar que existe um único homomorfismo $A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$ onde $a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$. Denotamos esta função por $f \otimes g$. Assuma que $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ são R-mapas de R- módulos à direita e $B \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g'} B''$ são R-mapas de R- módulos à esquerda. Segue que $(f \circ f') \otimes (g \circ g') = (f \otimes g) \circ (f' \otimes g')$ e portanto:

Teorema 2.1.4. *Existe $F :_R \mathcal{M} \to \mathbf{Ab}$, funtor aditivo definido por $F(B) = A \otimes_R B$. Se $f : B \to B'$ é um R-mapa entre R-módulos à esquerda então $F(f) = 1_A \otimes f$.*

A notação usual para F é $A \otimes_R$.

Agora, sejam R e S dois anéis. Um grupo abeliano B é um $R - S$ **bi-módulo**, denotado por $_R B_S$ se $B \in \mathcal{M}_S$ e $B \in_R \mathcal{M}$ e para todo $r \in R$, $b \in B$ e $s \in S$, $r(bs) = (rb)s$. Sabemos que $A \otimes_R B$ a priori é um grupo abeliano. Quando ele se torna um módulo?

Teorema 2.1.5. *Sejam $A \in \mathcal{M}_R$ e $B \in_R \mathcal{M}_S$. Então $A \otimes_R B$ é um S-módulo à direita onde $(a \otimes b)s = a \otimes bs$.*

Corolário 2.1.6. *Sejam R um anel comutativo e A e B R-módulos. Então $A \otimes_R B$ é um R-módulo com $r(a \otimes b) = ra \otimes b = a \otimes rb$. Mais ainda, para $r \in R$ fixo, se $\mu_r : B \to B$ com $\mu_r(b) = rb$ então $1 \otimes \mu_r : A \otimes_R B \to A \otimes_R B$ é multiplicação por r.*

Finalmente, enunciamos um último resultado que nos será bastante útil adiante.

Teorema 2.1.7. *Seja B um R-módulo à esquerda. Então existe um R-isomorfismo $R \otimes_R B \xrightarrow{\sim} B$, onde $r \otimes b \mapsto rb$.*

2.2 Produto e Soma de módulos

Vamos agora definir algumas operações entre módulos. A partir destas operações, definimos os módulos livres que são de grande importância no nosso estudo. Aqui, vamos assumir que todos os módulos são R-módulos à esquerda.

Definição 2.2.1. *Seja $\{A_j : j \in J\}$ uma família de submódulos.*

(a) *O* ***produto*** *desta família* $\prod_{j\in J} A_j$ *é o módulo cujos vetores são da forma* $a = (a_j)_{j\in J}$, $a_j \in J$ *com operação* $(a_j) + (b_j) = (a_j + b_j)$ *e* $r(a_j) = (ra_j)$.

(b) *A* ***soma*** *desta família* $\coprod_{j\in J} A_j$ *é o submódulo de* $\prod_{j\in J} A_j$ *cujos vetores são da forma* $a = (a_j)_{j\in J}$, *com* $a_j = 0$ *exceto por um número finito de índices.*

Segue que se J *é um conjunto finito então* $\prod_{j\in J} A_j = \coprod_{j\in J} A_j = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_j$.

Os produtos são chamados *produtos diretos* e as somas de *somas diretas.*

Como funtores só reconhecem morfismos, vamos caracterizar estes espaços através de morfismos. Se $A = \prod_{j\in J} A_j$, definimos a projeção $p_j : A \to A_j$ por $p((a_j)) = a_j$ e a injeção $\lambda_j : A_j \to A$ por $\lambda_j(a_j)$ como o elemento que tem a_j na j-ésima coordenada e zero nas restantes. Assim $p_j\lambda_j = 1_{A_j}$ e $p_j\lambda_k = 0$ se $j \neq k$. Se $A = \coprod_{j\in J} A_j$, então p_j e λ_j também estão definidos e $\sum_j \lambda_j p_j = 1_A$.

Teorema 2.2.2. *Seja* A *um módulo e* $\{A_j : j \in J\}$ *uma família de módulos.*

1 $A \simeq \coprod_{j\in J} A_j$ *se e somente se existem* $\lambda_j : A_j \to A$ *tal que, dado qualquer módulo* X *e quaisquer mapas* $f_j : A_j \to X$ *existe um único* $\varphi : A \to X$ *com* $\varphi\lambda_j = f_j$, *para todo* $j \in J$.

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[rr, "\lambda_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & & A \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

2 $A \simeq \prod_{j\in J} A_j$ *se e somente se existem* $p_j : A \to A_j$ *tal que, dado qualquer módulo* X *e quaisquer mapas* $f_j : X \to A_j$ *existe um único* $\varphi : X \to A$ *com* $p_j\varphi = f_j$, *para todo* $j \in J$.

$$\begin{tikzcd} A_j & & A \arrow[ll, "p_j"'] \\ & X \arrow[ul, "f_j"] \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 2.2.3. *Seja* $A_j \to \coprod_{j\in J} A_j$ *a* j*-ésima injeção* λ_j, *seja* $\prod_{j\in J} A_j \to A_j$ *a* j*-ésima projeção* p_j *e seja* B *um módulo. Então:*

1 $\theta_1 : Hom(\coprod_{j\in J} A_j, B) \longrightarrow \prod_{j\in J} Hom(A_j, B)$, $\varphi \overset{\theta_1}{\mapsto} (\varphi\lambda_j)$ *é um isomorfismo.*

2 $\theta_2 : Hom(B, \prod_{j\in J} A_j) \longrightarrow \prod_{j\in J} Hom(B, A_j)$, $\varphi \overset{\theta_2}{\mapsto} (p_j\varphi)$ *é um isomorfismo.*

Ou seja, temos que $Hom(\ , B)$ converte somas diretas em produtos diretos; em particular, preserva somas diretas finitas. Mais ainda, $Hom(B,\ )$ preserva produtos diretos.

Teorema 2.2.4. *Sejam A um R-módulo à direita e $\{B_j : j \in J\}$ uma família de R-módulos à esquerda. Então*

$$\theta : A \otimes_R \coprod_{j\in J} B_j \longrightarrow \coprod_{j\in J} A \otimes B_j$$

definido por $\theta(a \otimes (b_j)) = (a \otimes b_j)$ é um isomorfismo.

Assim temos que $A\otimes_R$ e, analogamente, $\otimes_R B$ preservam somas diretas.

Um caso particular frequente é quando temos a soma direta de dois módulos.

Teorema 2.2.5. *Sejam A e B dois módulos e $i : A \hookrightarrow B$ monomorfismo. Então A é um somando de B se e somente existe $p : B \to A$ com $pi = 1_A$.*

Dizemos que dois R-mapas $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ são **exatos** em M se $imf = \ker g$. Uma sequência de R-mapas

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \cdots$$

é **exata** se cada dois mapas adjacentes são exatos.

Considere uma **sequência exata curta**, ie, uma sequência da forma $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$. Dizemos que ela **cinde** se existe um mapa $j : C \to B$ tal que $pj = 1_C$. Segue pelo teorema 2.2.5 que A é um somando de B se e somente se tal sequência exata curta cinde.

2.3 Funtores Exatos

Uma propriedade que é bastante usada em homologia algébrica diz respeito à variação da exatidão de uma sequência exata ao aplicarmos um funtor sobre ela. Assim, definimos o que se entende por funtores exatos. Assumimos que todos os funtores são funtores aditivos entre categorias de módulos.

Definição 2.3.1.

(a) *um funtor(covariante) é **exato à esquerda** se para uma sequência exata $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ temos que a sequência $0 \to F(A) \xrightarrow{F\alpha} F(B) \xrightarrow{F\beta} F(C)$ é exata.*

(b) *um funtor(covariante) é **exato à direita** se para uma sequência exata $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ temos que a sequência $F(A) \xrightarrow{F\alpha} F(B) \xrightarrow{F\beta} F(C) \to 0$ é exata.*

(c) *Um funtor é **exato** se é exato à direita e à esquerda.*

Logo se F é um funtor exato, ele preserva sequências exatas curtas. Ainda mais, todo funtor exato preserva sequências exatas longas. Para ver isso, basta separar uma sequência exata longa em várias sequências exatas curtas de modo adequado.

Temos definições análogas para funtores contravariantes invertendo a direção das setas. O próximo resultado caracteriza o tipo dos funtores Hom e $\otimes$.

Teorema 2.3.2.

1 *$Hom(M, \ )$ é um funtor covariante exato à esquerda e $Hom(\ , M)$ é um funtor contravariante exato à esquerda, para qualquer módulo M.*

2 *Os funtores $M \otimes_R$ e $\otimes_R M$ são funtores covariantes exatos à direita.*

2.4 Limites Diretos

Definição 2.4.1. *Seja I um conjunto quase-ordenado e $\mathcal{C}$ uma categoria. Um **sistema direto** com índice I em $\mathcal{C}$ é um funtor $F : I \to \mathcal{C}$. Isto é, para cada $i \in I$, existe um objeto F_i e sempre que $i, j \in J$ satisfizerem $i \leq j$, então existe um morfismo $\varphi^i_j : F_i \to F_j$ tal que:*

(a) *$\varphi^i_i : F_i \to F_i$ é a identidade para todo $i \in I$ e*

(b) *se $i \leq j \leq k$, existe diagrama comutativo tal que $\varphi^i_k = \varphi^j_k \varphi^i_j$.*

$$\begin{tikzcd}
F_i \arrow[rr, dashed, "\varphi^i_k"] \arrow[dr, "\varphi^i_j"'] & & F_k \\
& F_j \arrow[ur, "\varphi^j_k"'] &
\end{tikzcd}$$

Definição 2.4.2. *Seja $\{F_i, \varphi^i_j\}$ um sistema direto em $\mathcal{C}$. O **limite direto** deste sistema é um objeto $\varinjlim F_i$ e uma família de morfismos $\alpha_i : F_i \to \varinjlim F_i$ com $\alpha_i = \alpha_j \varphi^i_j$ sempre que $i \leq j$ satisfazendo o seguinte diagrama universal:*

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim F_i \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & X \\
& F_i \arrow[ul, "\alpha_i"] \arrow[ur, "f_i"'] \arrow[d, "\varphi^i_j"] & \\
& F_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Para todo objeto X e toda família de morfismos $f_i : F_i \to X$ com $f_i = f_j \varphi^i_j$ sempre que $i \leq j$ existe um único morfismo $\beta : \varinjlim F_i \to X$ que faz o diagrama abaixo comutar.

A definição dual de sistemas diretos e limite direto nos fornecem sistemas inversos e o **limite inverso** $\varprojlim$ que se traduzem pela inversão de todas as setas nas definições acima.

Teorema 2.4.3. *O limite direto de um sistema direto de módulos* $\varinjlim F_i$ *e o limite inverso de um sistema inverso* $\varprojlim G_i$ *de módulos existem.*

`Exemplo` Considere um conjunto de índices com quase-ordem trivial: $i \leq j$ se e somente se $i = j$. Um sistema direto e um sistema inverso com índice I coincidem neste caso sendo uma família de módulos $\{F_i : i \in I\}$. Assim temos pelas definições de soma direta e produto direto que $\varinjlim F_i = \coprod A_i$ e $\varprojlim F_i = \prod A_i$.

Um conjunto ordenado I é dito **direcionado** se, para cada $i, j \in I$, existe um $k \in I$ com $i \leq k$ e $j \leq k$. Por exemplo, o conjunto dos inteiros com a ordem usual é direcionado. No contexto de sistemas diretos sobre conjuntos direcionados, temos um bom comportamento de limites diretos vistos como funtores entre a categoria de sistemas diretos e a categoria de R-módulos. Neste caso, $\varinjlim$ é um funtor exato.

2.5 Adjuntos

Definição 2.5.1. *Sejam* $F : \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ *e* $G : \mathcal{C} \to \mathcal{U}$ *funtores. O par ordenado* (F, G) *é dito um* ***par adjunto*** *se, para cada* $A \in obj\,\mathcal{U}$ *e* $C \in obj\mathcal{C}$ *existe uma bijeção*

$$\tau = \tau_{A,C} : Hom_{\mathcal{C}}(FA, C) \to Hom_{\mathcal{U}}(A, GC)$$

que preserva "naturalmente" todos os morfismos $f : A \to A'$ *em* $\mathcal{U}$ *e* $g : C \to C'$ *em* $\mathcal{C}$*.*

Ao considerarmos que qualquer função em duas variáveis $f : A \times B \to C$ pode ser vista como uma família de funções a um parâmetro em uma variável $f_a : B \to C$, $a \in A$ fixo, podemos provar que os funtores $\otimes$ e $Hom(\ ,\ )$ formam um par exato.

Teorema 2.5.2. *Se* B *é um* R*-bimódulo então* $(B \otimes_R, Hom_R(B,\ ))$ *é um par adjunto.*

Teorema 2.5.3. *Se* (F, G) *é um par adjunto então* F *comuta com limites diretos e* G *comuta com limites inversos.*

Segue então que $B \otimes_R$ comuta com $\varinjlim$ e $Hom_R(B,\ )$ com $\varprojlim$.

2.6 Módulos Livres

Definição 2.6.1. *Um* R*-módulo à esquerda* A *é* ***livre*** *se é uma soma de cópias de* R*. Se* $Ra_i \cong R$ *e* $A = \coprod_{i \in I} Ra_i$*, o conjunto* $\{a_i : i \in I\}$ *é chamada uma* ***base*** de A. *Neste caso, cada elemento* $a \in A$ *tem uma expressão única* $a = \sum r_i a_i$*.*

Teorema 2.6.2. *Seja* $X = \{a_i : i \in I\}$ *uma base de um módulo livre* A *com a inclusão* $i : X \hookrightarrow A$*. Dado qualquer módulo* B *e função* $f : X \to B$*, então existe um único* R*-mapa* $\tilde{f} : A \to B$ *que estende* f*.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}"] & \\
X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Novamente, como no caso do produto tensorial, temos a existência de tais módulos, ie, se X é um conjunto então existe um módulo livre A cuja base é X e que é único no sentido de que quaisquer dois módulos livres sobre o mesmo conjunto X são isomorfos. Dado um R-módulo M, tome X_M o conjunto dos elementos de M e procedemos como fizemos para grupos livres. Seja A um módulo livre com base X_M. Defina $f : X_M \to M$ por $m \mapsto m$. Pelo teorema 2.6.2, temos que existe um R-mapa $\tilde{f} : A \to M$ que estende f e é sobrejetora pois f o é. Portanto:

Teorema 2.6.3. *Todo módulo M é quociente de um módulo livre.*

Isto quer dizer que todo módulo pode ser descrito em termos de geradores e relações pois se A é livre com base X e $f : A \twoheadrightarrow M$ é epimorfismo, X é chamado **conjunto de geradores** de M e $ker(f)$ é chamado de **submódulo de relações**. Com isto, temos a seguinte sequência exata $0 \to Kerf \hookrightarrow A \xrightarrow{f} M \to 0$.

Definição 2.6.4. *Seja M um R-módulo à esquerda. Uma **resolução** de M é uma sequência exata de R-módulos*

$$\cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

*Se cada F_i for livre então a resolução é dita **livre**.*

Finalmente, a partir do teorema 2.6.3 podemos construir uma sequência exata passo a passo para cada R-módulo M e garantir que:

Teorema 2.6.5. *Todo módulo M admite uma resolução livre.*

2.7 Módulos Projetivos e Injetivos

Módulos projetivos e resoluções projetivas, ie, resoluções onde cada módulo F_i é projetivo, serão nossa principal base posteriormente para definirmos o funtor Tor que, por sua vez, está relacionado ao funtor de homologia. Uma outra classe de módulos é a de módulos injetivos que representam a construção dual dos módulos projetivos. Eles serão a base para a construção do funtor Hom que está relacionado ao funtor de cohomologia.

Como a maior parte do nosso trabalho envolve cálculo de homologias e não de cohomologias, apresentaremos resultados referentes aos módulos projetivos enquanto só deixaremos uma definição do que vem a ser um módulo injetivo.

Definição 2.7.1. *Considere o seguinte diagrama onde $\beta : B \to C$ é um epimorfismo.*

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\
B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

O módulo P é dito ***projetivo*** *se para qualquer mapa $\alpha : P \to C$ existe um mapa $\gamma : P \to B$ tal que $\alpha = \beta\gamma$.*

De maneira equivalente, P é projetivo se e somente se o funtor $Hom(P, \ )$ é exato. Segue de qualquer destas definições que todo módulo livre é projetivo.

Se P é um módulo projetivo e $\beta : B \to P$ é epimorfismo então por uma aplicação direta do teorema 2.2.5 temos $B = ker\beta \oplus P'$ onde $P' \simeq P$. De outro modo, isto diz que toda sequência exata $0 \to A \to B \to P \to 0$ com P projetivo cinde. Ainda uma outra caracterização importante dos módulos projetivos:

Teorema 2.7.2. *Um módulo P é projetivo se e somente se ele é somando de um módulo livre. Mais ainda, todo somando de um módulo projetivo é projetivo.*

Definição 2.7.3. *Um módulo E é* ***injetivo*** *se, para qualquer módulo B e qualquer submódulo A de B, qualquer mapa $f : A \to E$ pode ser extendida a um mapa $g : B \to E$.*

$$\begin{tikzcd}
& E & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r] & B \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

2.8 Lemas Fundamentais da Álgebra Homológica

Nesta parte, introduzimos os chamados lemas fundamentais da algébra homológica. Tais lemas desempenham papel essencial na construção dos principais funtores além de serem utilizados na prova de alguns dos resultados apresentados à frente.

Um **complexo de cadeias (complexo)** é uma sequência de módulos e mapas

$$(\mathbf{A}, d) \ = \cdots \to A_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} A_n \overset{d_n}{\to} A_{n-1} \to \cdots$$

com $n \in \mathbb{Z}$ e $d_n d_{n+1} = 0$. Por exemplo, toda sequência exata é um complexo. Em particular, se A é um módulo, toda resolução projetiva de A : $\mathbf{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$ é um complexo assim como $\mathbf{F(A)} = \cdots \to F(P_1) \to F(P_0) \to F(A) \to 0$ se F é um funtor. Definimos também funções entre complexos de cadeias. Se ($\mathbf{A}$,d) e $(\mathbf{A}', d')$ são complexos, um **mapa de cadeias** $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ é uma sequência de mapas $f_n : A_n \to A'_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, tal que $d'_{n+1} f_{n+1} = f_n d_{n+1}$.

Definição 2.8.1. *Se $(\boldsymbol{A}, d)$ é um complexo e denotamos $Z_n(\boldsymbol{A}) = \ker d_n$ e $B_n(\boldsymbol{A}) = \operatorname{im} d_{n+1}$. Então seu n-**ésimo módulo de homologia** é $H_n(\boldsymbol{A}) = Z_n(\boldsymbol{A})/B_n(\boldsymbol{A})$.*

Afim de tornar H um funtor, definimos sua ação sobre os morfismos da seguinte maneira: Se $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ é um mapa de cadeias, então $H_n(f) : H_n(\mathbf{A}) \to H_n(\mathbf{A}')$ é definido por $z_n + B_n(\mathbf{A}) \mapsto f_n(z_n) + B_n(\mathbf{A}')$. Assim definido, H é um funtor da categoria da classe de todos os complexos e mapas de cadeias para categoria dos R-módulos. Vamos agora enunciar como teoremas os chamados lemas fundamentais que dão base à álgebra homológica.

Teorema 2.8.2 (Homomorfismos de Conexão)**.** *Seja $0 \to \boldsymbol{A}' \xrightarrow{i} \boldsymbol{A} \xrightarrow{p} \boldsymbol{A}'' \to 0$ uma sequência exata de complexos. Para cada n, existe um homomorfismo (dito homomorfismo de conexão)*

$$\delta_n : H_n(\boldsymbol{A}'') \to H_{n-1}(\boldsymbol{A}')$$

definido por $\delta(z'' + B_n(\boldsymbol{A}'')) = i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1} z'' + B_n(\boldsymbol{A}')$, onde d é o diferencial de $\boldsymbol{A}$.

Teorema 2.8.3 (Sequência Exata Longa)**.** *Seja $0 \to \boldsymbol{A}' \xrightarrow{i} \boldsymbol{A} \xrightarrow{p} \boldsymbol{A}'' \to 0$ uma sequência exata de complexos. Então existe uma sequência exata longa de módulos*

$$\cdots \to H_n(\boldsymbol{A}'') \xrightarrow{i_*} H_n(\boldsymbol{A}) \xrightarrow{p_*} H_n(\boldsymbol{A}') \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(\boldsymbol{A}'') \to \cdots$$

Teorema 2.8.4 (Naturalidade de δ)**.** *Considere o seguinte diagrama comutativo de complexos com linhas exatas:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{A}' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{A} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & \mathbf{A}'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathbf{C}' \arrow[r, "j"'] & \mathbf{C} \arrow[r, "q"'] & \mathbf{C}'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Então existe um diagrama comutativo de módulos com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(\mathbf{A}') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(\mathbf{A}) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "g_*"'] & H_n(\mathbf{A}'') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h_*"] & H_n(\mathbf{A}') \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(\mathbf{C}') \arrow[r, "j_*"'] & H_n(\mathbf{C}) \arrow[r, "q_*"'] & H_n(\mathbf{C}'') \arrow[r, "\delta'"'] & H_n(\mathbf{C}') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Seja $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ um mapa de cadeias. Dizemos que f é **homotopicamente nula** se existe $s_n : A_n \to A'_{n+1}$ tal que $f_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$ para todo n e f **é homotópico a** g ($f \simeq g$) se $f - g$ é homotopicamente nula.

Teorema 2.8.5. *Se $f, g : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ são mapas de cadeias e $f \simeq g$ então $f_* = g_* : H_n(\boldsymbol{A}) \to H_n(\boldsymbol{A}')$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Vamos introduzir a seguinte notação: Se $\mathbf{X}$ é um complexo

$$\mathbf{X} = \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$$

o complexo obtido apagando-se o módulo M

$$\mathbf{X}_M = \cdots \to X_1 \to X_0 \to 0$$

é dito **complexo deletado** de $\mathbf{X}$ denotado por $\mathbf{X}_M$.

Teorema 2.8.6 (Teorema da Comparação)**.** *Considere o diagrama abaixo onde as linhas são complexos. Se cada X_n na linha de cima for projetivo e a linha de baixo for exata, então existe um mapa de cadeia $\bar{f} : \boldsymbol{X}_A \to \boldsymbol{X'}_{A'}$ (em pontilhado) que faz o diagrama completado comutar. Mais ainda, quaisquer dois destes mapas de cadeia são homotópicos.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed] & X_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed] & X_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, dashed] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & {X_2}' \arrow[r, "{d_2}'"'] & {X_1}' \arrow[r, "{d_1}'"'] & {X_0}' \arrow[r, "\epsilon'"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Teorema 2.8.7 (Lema da Ferradura)**.** *Considere o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d] & & {} \arrow[d] & \\
& {P_1}' \arrow[d, "{d_1}'"'] & & {P_1}'' \arrow[d, "{d_1}''"] & \\
& {P_0}' \arrow[d, "\epsilon'"'] & & {P_0}'' \arrow[d, "\epsilon''"] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"'] \arrow[d] & A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

onde as colunas são resoluções projetivas e a linha de baixo é exata. Então existe resolução projetiva de A e mapas de cadeias tais que as colunas formam uma sequência exata de complexos.

Os últimos 6 teoremas, juntamente com o chamado lema de Snake, são chamados lemas fundamentais da álgebra homológica. O lema de Snake não enunciado aqui serve para demonstrar o teorema 2.8.3.

2.9 Funtor Tor

Dado um funtor covariante T, podemos definir seus funtores derivados à esquerda $L_n(T)$. Para cada módulo A, escolha uma resolução projetiva $\mathbf{P}$ de A e tome $\mathbf{P}_A$, o complexo deletado correspondente. Aplicamos o funtor T a este novo complexo e calculamos a homologia.

Definição 2.9.1. *Para cada módulo A, $L_nT = H_n(T\boldsymbol{P}_A) = ker(Td_n)/im(Td_{n+1})$.*

Chegamos então à definição de um dos funtores mais utilizados nesta dissertação.

Definição 2.9.2. *Se $T = B\otimes_R$, definimos $L_n(T) = Tor_n^R(B,\ )$. Em particular,*

$$Tor_n^R(B, A) = ker(1 \otimes d_n)/im(1 \otimes d_{n+1})$$

onde

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0$$

é uma resolução projetiva deletada de A escolhida.

Note que esta definição depende da escolha da resolução projetiva de A. Mas pode ser provado, usando o teorema 2.8.6, que podemos escolher qualquer uma, ie:

Teorema 2.9.3. *A definição de $Tor_n^R(B, A)$ independe da escolha da resolução projetiva de A.*

Aqui surge uma pergunta: há diferença entre aplicarmos o funtor $T = B\otimes_R$ em $\mathbf{P}_A$ e $T = \otimes_R A$ em $\mathbf{P}_B$?

Teorema 2.9.4. *$H_n(\boldsymbol{P}_A \otimes B) \cong H_n(A \otimes \boldsymbol{P}_B)$.*

Portanto, $Tor_n^R(A, B) = H_n(B \otimes \mathbf{P}_A) \cong H_n(\mathbf{P}_B \otimes A)$.

Este resultado não é trivial e é demonstrado no contexto do funtor Ext. Tal funtor é definido a partir dos funtores derivados à direita R^nT, que são construídos, de maneira análoga, em termos de resoluções injetivas para funtores T covariantes. Assim, Se $T = Hom(\ , A)$, definimos o funtor $Ext^n(\ , A) = R^nT$.

A seguir, uma lista com algumas propriedades:

Proposição 2.9.5. *Seja B um R-módulo à direita.*

i *Se n é negativo então $Tor_n^R(B, A) = 0$ para qualquer R-módulo A à esquerda.*

ii *$Tor_0^R(B, \ )$ é naturalmente equivalente a $B \otimes_R$.*

iii *Se P é projetivo então $Tor_n^R(B, P) = 0 = Tor_n^R(P, A)$ para todo $n \geq 1$.*

Teorema 2.9.6. *Seja $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ uma sequência exata de R-módulos. Então existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \to Tor_n^R(B, A') \to Tor_n^R(B, A) \to Tor_n^R(B, A'') \xrightarrow{\delta} Tor_{n-1}^R(B, A') \to \cdots$$

$$\cdots \to Tor_1^R(B, A'') \to B \otimes A' \to B \otimes A \to B \otimes A'' \to 0.$$

2.10 Sequência Espectral

Esta seção contém as definições básicas que envolvem a construção de uma técnica muito útil da topologia algébrica que consiste em aproximar a homologia de um espaço através das chamadas sequências espectrais. Estas são definidas no contexto de módulos bigraduados e dos pares exatos.

Definição 2.10.1.

(a) *Um **módulo graduado** é uma família de módulos $\{M_p | p \in \mathbb{Z}\}$. Se $M = \{M_p\}$ e $N = \{N_p\}$ são dois módulos graduados então para cada $a \in \mathbb{Z}$ fixo, uma sequência de homomorfismos $f : \{f_p : M_p \to M_{p+a}\}$ é um **mapa** de **grau** a.*

(b) *Um **módulo bigraduado** é uma família de módulos $\{M_{p,q} | (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$. Se $M = \{M_{p,q}\}$ e $N = \{N_{p,q}\}$ são dois módulos bigraduados então para cada $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fixo, uma sequência de homomorfismos $f : \{f_{p,q} : M_{p,q} \to M_{p+a,q+b}\}$ é um **mapa** de **bigrau** (a, b).*

Definição 2.10.2. *Um **par exato** é um par de módulos bigraduados D e E e mapas α, β, γ, cada um com algum bigrau, tal que existe exatidão em cada vértice do triângulo*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

Basicamente, os pares exatos, por conta de sua estrutura, nos permitem obter recursivamente outros pares exatos. Desta construção recursiva, teremos a definição das sequências espectrais.

Considere o seguinte par exato $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$, α com bigrau (1,-1), β com bigrau (0,0) e γ com bigrau (-1,0). Note que obtemos a seguinte sequência exata longa

$$\cdots \to E_{p+1,q} \xrightarrow{\gamma} D_{p,q} \xrightarrow{\alpha} D_{p+1,q-1} \xrightarrow{\beta} D_{p+1,q-1} \to \cdots$$

Defina: $d^1_{p,q} : E_{p,q} \to E_{p-1,q}$ por $d^1_{p,q} = \beta\gamma$ e temos que $d^1 d^1 = 0$, $E^2_{p,q} = H(E, d^1) = ker d^1_{p,q}/im d^1_{p+1,q}$, $D^2_{p,q} = \alpha_{p-1,q+1}(D_{p-1,q+1}) = im\alpha_{p-1,q+1} \subset D_{p,q}$. Nosso objetivo é obter um novo par exato do tipo $(D^2, E^2, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$. Para isso, definamos $\alpha^2 = \alpha \circ i$, $\beta^2 : y \mapsto [\beta\alpha^{-1}y]$ e $\gamma^2 : [z_{p,q}] \mapsto \gamma_{p,q} z_{p,q}$.

Teorema 2.10.3. *Com as definições acima, $(D^2, E^2, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ é um par exato.*

O par $(D^2, E^2, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ é chamado **par derivado** de $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ e podemos definir o r-ésimo par derivado reiterando este processo $r - 1$ vezes. O próximo teorema nos fornece um panorama geral desta construção:

Teorema 2.10.4. *Seja $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ um par exato onde α, β e γ tem bigraus (1,-1),(0,0) e (-1,0) respectivamente. Se o r-ésimo par derivado é $(D^r, E^r, \alpha^r, \beta^r, \gamma^r)$ então:*

1 *$\alpha^r, \beta^r, \gamma^r$ tem bigraus (-1,1),(1-r, r-1) e (-1,0) respectivamente.*

2 *$d^r = \beta^r\gamma^r$ tem bigrau (-r, r-1).*

3 *$E^r_{p,q} = ker\, d^r_{p,q}/im\, d^r_{p+r,q-r+1}$.*

Definição 2.10.5. *Uma **sequência espectral** é uma sequência $\{E^r, d^r : r \geq 1\}$ de módulos bigraduados e mapas com $d^r d^r = 0$ tal que $E^{r+1} = H(E^r; d^r)$ como módulos bigraduados.*

Todo par exato define uma sequência espectral. Chamaremos de **subquociente** ao quociente entre dois submódulos. Note que $E^3 = Z^3/B^3$ é um subquociente de E^2 e segue pelo terceiro teorema dos isomorfismos que ao assurmirmos $B^2 \subset B^3$ temos $Z^3/B^3 \cong \frac{Z^3/B^2}{B^3/B^2}$ e assim podemos identificar Z^3/B^3 em E^3 dentro de E^2 isomorficamente aos seus respectivos quocientes. Assim temos

$$0 \subset B^2 \subset \cdots \subset B^r \subset B^{r+1} \subset Z^{r+1} \subset Z^r \subset \cdots \subset Z^2 \subset E^2.$$

Definição 2.10.6. *$Z^\infty_{p,q} = \cap_r Z^r$, $B^\infty_{p,q} = \cup_r B^r$ e $E^\infty_{p,q} = Z^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q}$.*

O módulo bigraduado $E^\infty_{p,q}$ é chamado **módulo limite**.

Finalmente, vamos desenvolver o conceito de convergência de uma sequência espectral. Isso se dá através das filtrações.

Definição 2.10.7. *Seja $\mathcal{U}$ uma categoria e $A \in obj(\mathcal{U})$. Uma **filtração** de A é uma família de sub-objetos $\{F^pA : p \in \mathbb{Z}\}$ de A tal que*

$$\cdots \subset F^{p-1}A \subset F^pA \subset F^{p+1}A \subset \cdots .$$

Como exemplo, a filtração de um complexo $\mathbf{C}$ é uma família de subcomplexos de $\{F^pC : p \in \mathbb{Z}\}$ com $F^{p-1}C \subset F^pC$. O próximo teorema é fundamental pois tem como corolário a existência de uma sequência espectral para qualquer filtração de um dado complexo.

Teorema 2.10.8. *Qualquer filtração $\{F^p\mathbf{C} : p \in \mathbb{Z}\}$ de um complexo $\mathbf{C}$ determina um par exato $(D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ no qual α, β e γ tem graus $(1, -1)$, $(0, 0)$ e $(1, 0)$.*

Corolário 2.10.9. *Toda filtração $\{F^p\mathbf{C} : p \in \mathbb{Z}\}$ de um complexo $\mathbf{C}$ determina uma sequência espectral.*

Uma filtração $\{F^pH\}$ de um módulo graduado H é **limitada** se, para cada n, exitem inteiros $s = s(n)$ e $t = t(n)$ tais que $F^sH_n = 0$ e $F^tH_n = H_n$. Segue que se $\{F^pH\}$ é limitada então para todo $p \leq s$ tem-se que $F^pH_n = 0$ e para todo $p \geq t$ $F^pH_n = H_n$, ie, existe cadeia finita.

Definição 2.10.10. *Seja H um módulo bigraduado. Uma sequência espectral $\{E^r\}$ **converge** para H, $E^2_{p,q} \underset{p}{\Rightarrow} H$ se existe alguma filtração limitada $\{\Phi^pH\}$ de H tal que*

$$E^{\infty}_{p,q} \cong \Phi^pH_n/\Phi^{p-1}H_n$$

onde $n = p + q$.

Teorema 2.10.11. *Assuma que $\{F^p\mathbf{C} : p \in \mathbb{Z}\}$ é uma filtração limitada de um complexo $\mathbf{C}$. Seja $\{E^r\}$ a sequência espectral determina por esta filtração. Então:*

1 *para cada p, q temos que $E^{\infty}_{p,q} = E^r_{p,q}$ para algum r grande;*

2 $E^2_{p,q} \underset{p}{\Rightarrow} H_n(\mathbf{C})$.

A principal aplicação que faremos das sequências espectrais nesta dissertação é a sequência espectral LHS garantida pelo teorema abaixo. Note que, embora consideremos um $\mathbb{Z}G$-módulo A no enunciado, não definimos ainda o que é o anel de grupo $\mathbb{Z}G$, o que será feito na segunda seção do próximo capítulo.

Teorema 2.10.12 (Lyndon-Hochschild-Serre)**.** *Seja G um grupo com subgrupo normal N. Para cada $\mathbb{Z}G$-módulo A, existe uma sequência espectral com $p, q \geq 0$*

$$E^2_{p,q} = Tor_p^{\mathbb{Z}[G/N]}(\mathbb{Z}, Tor_q^{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, A)) \underset{p}{\Rightarrow} Tor_{p+q}^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A).$$

Capítulo 3

Álgebra via Topologia Algébrica

Neste capítulo veremos um intercâmbio entre álgebra homólogica e topologia algébrica. Na primeira seção, introduzimos os complexos-CW e os complexos de Cayley, definimos o anel de grupo $\mathbb{Z}G$ e estudamos a estrutura de um $\mathbb{Z}G$-módulo para então construir resoluções de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ através de recursos da topologia algébrica. Na segunda, definimos os módulos induzidos e os relacionamos com a ação de um grupo G sobre um complexo X para obtermos informações interessantes sobre a estrutura do complexo de cadeias de X.

Para esta parte, as referências são [15] e [21]. Consideramos que todos os módulos são à esquerda e todas as ações de grupo são à esquerda. Vale ressaltar também que, não somente aqui como no restante da dissertação, assumimos um certo conhecimento de topologia algébrica, principalmente a teoria de recobrimentos, sendo [21] uma boa referência no assunto.

3.1 Construção de Resoluções via Topologia

3.1.1 Complexos de Cayley

Seja X um espaço de Hausdorff. X é um **complexo-CW** se

(1) X é união disjunta de **células n-dimensionais** e^n, onde e^n é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

(2) O n-**esqueleto** da decomposição CW é $X^n = \cup_{k \leq n} e^k$. Para cada célula e^n, existe uma função contínua $\phi_{e^n} : (B^n, S^{n-1}) \to (X^{n-1} \cup e^n, X^{n-1})$ tal que a restrição $\phi_{e^n} : B^n \setminus S^{n-1} \to e^n$ é um homeomorfismo.

(3) O fecho $\bar{e}$ de cada célula está contido numa união finita de células.

(4) Um subconjunto $A \in X$ é fechado em X se e somente se $A \cap \bar{e}$ é fechado em $\bar{e}$ para toda célula e na decomposição CW de X.

`Exemplo`

Definimos agora complexos-CW contruídos a partir da apresentação de um grupo $G = \langle\, X \mid R \,\rangle$. O **complexo de Cayley associado à apresentação de G**, Γ, é construído da seguinte maneira:

(1) os *vértices* de Γ são os elementos de G

(2) as *arestas* de Γ são os elementos de $G \times (X \cup X^{-1})$. O par (g, x^{ϵ}) representa a aresta que começa no vértice g e ponto final gx^{ϵ} que tem *rótulo* x^{ϵ}. O *inverso* da aresta (g, x) é (gx, x^{-1}) e as arestas (g, x) e (gx, x^{-1}) são identificadas.

(3) as *células 2-dimensionais* são obtidas a partir dos elementos de R. Para cada $r \in R$, existe um único caminho fechado γ_r em Γ que começa em 1_G. Ao percorrermos γ_r teremos como rótulo a palavra reduzida r. Assim definimos as células 2-dimensionais de Γ como $G \times R$ onde (g, r) representa a célula que tem como fronteira o caminho fechado γ_r anexado à g com rótulo r.

Então temos que se Γ é um complexo de Cayley, $V(\Gamma) = G$, $E(\Gamma) = G\times(X\cup X^{-1})$ e $C_2(\Gamma) = G \times R$. G age naturalmente à esquerda em $E(\Gamma)$ e $C_2(\Gamma)$: $g_1(g, x^{\epsilon}) = (g_1 g, x^{\epsilon})$ e $g_1(g, r) = (g_1 g, r)$.

Uma propriedade interessante do complexo de Cayley Γ, além de ser conexo por caminhos, é ter grupo fundamental $\pi_1(\Gamma)$ trivial.

Neste capítulo assumimos que todas as ações de grupo são à esquerda. Porém, é necessário ressaltar que esta construção acima pode ser dada também em termos de uma ação à direita e que, inclusive, será a adotada em capítulos posteriores.

3.1.2 G-módulos

Definição 3.1.1. *Seja G um grupo. O* ***anel do grupo*** *G, denotado por $\mathbb{Z}G$, é um $\mathbb{Z}$-módulo livre com base G e produto estendido do produto em G*

Então, $\mathbb{Z}G = \{\sum_{g\in G} z_g g : z_g \in \mathbb{Z}\}$, ie, um elemento de $\mathbb{Z}G$ é escrito de maneira única como $\sum_{g\in G} z_g g$ onde $z_g \in \mathbb{Z}$ e $z_g = 0$ para quase todo g.

`Exemplo`

Seja G é cíclico de ordem n. Temos que $\mathbb{Z}G \approx \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$.

Vamos denotar um $\mathbb{Z}G$- módulo de G-módulo. Sabemos que ele consiste de um grupo abeliano A e uma ação de $\mathbb{Z}G$ no anel dos homomorfismos de A. Pela identificação $Hom_{anel}(\mathbb{Z}G, End(A)) \approx Hom_{grupo}(G, Aut(A))$, tal ação pode ser dada por uma ação de G no anel dos automorfismos de A. Então, um G-módulo é um grupo abeliano A juntamente com uma ação de G em A.

`Exemplo`

Dado um grupo G, o *mapa de aumento* é o homomorfismo de anéis $\epsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ tal que $\epsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$. Assim, seja A um grupo abeliano qualquer e considere a ação *trivial* $g.a = a$ para todo $g \in G$, $a \in A$. Então A é um G-módulo com estrutura trivial. Segue que $ra = \epsilon(r)a$ para $r \in \mathbb{Z}G$.

Existe um modo de construir G-módulos. Se X é um conjunto onde G age então podemos formar o grupo abeliano $\mathbb{Z}X$ gerado por X onde se estende a ação de G em X a uma ação $\mathbb{Z}$-linear de G em $\mathbb{Z}X$. Este é chamado de módulo de permutações. Em particular, temos para cada subgrupo $H \leq G$, o módulo $\mathbb{Z}[G/H]$ e G age em G/H por multiplicação à esquerda.

A operação de união disjunta na categoria de G-conjuntos corresponde à soma direta na categoria de G-módulos e assim $\mathbb{Z}[\coprod X_i] = \oplus \mathbb{Z}X_i \approx \oplus \mathbb{Z}[G/G_x]$, onde tomamos x como representante de cada G-órbita de X e G_x é o subgrupo de isotropia de G em x. Em particular, se a ação de G é livre então $G/G_x = G$ e obtemos:

Proposição 3.1.2. *Se X é um conjunto onde G age livremente e E é um conjunto de representantes das G-órbitas de X então $\mathbb{Z}X$ é um G-módulo livre com base E.*

3.1.3 Resoluções de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ via Topologia

Aqui, consideramos $\mathbb{Z}$ como módulo trivial sobre $\mathbb{Z}G$. Vimos acima como podemos obter G-módulos livres a partir de G-conjuntos. Agora, vamos mostrar como obter resoluções de G-módulos basicamente tomando um complexo-CW X e formando G-módulos livres a partir de G-conjuntos em cada dimensão de X.

Chamemos de **G-complexo** um complexo-CW X que possui uma ação de G que permuta as células de X. Então, para cada $g \in G$, existe um homeomorfismo $x \mapsto gx$ tal que a imagem $g\sigma$ de cada célula σ é também uma célula. Note que se X é um G-complexo, então a ação de G sobre as células de X induz uma ação sobre o complexo de cadeias celulares $C_*(X)$ que, por sua vez, se torna um complexo celular de G-módulos. Mais ainda, $\epsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ é um mapa entre G-módulos.

Dizemos ainda que X é um **G-complexo livre** se ação de G permuta livremente as células de X, ie, $g\sigma \neq \sigma$ para todo $g \neq 1$. Neste caso, cada módulo de cadeia $C_n(X)$ tem uma base sobre $\mathbb{Z}$ que é livremente permutada por G e logo, pela proposição anterior, cada $C_n(X)$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com um elemento de base para cada G-órbita das células de X.

Assim, se X é contrátil, tem-se que $H_*(X) \approx H_*(ponto)$. Isto dá que

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \to \cdots \to C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

é exata e portanto:

Proposição 3.1.3. *Se X é um G-complexo contrátil livre então a cadeia de complexos celulares do mapa de aumento é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.*

A partir desta proposição, será interessante encontrar um contexto em que G-complexos contráteis livres aparecem naturalmente. Este é o caso dos espaços de recobrimento.

Suponha que $p : \tilde{Y} \to Y$ é um espaço de recobrimento regular com G sendo o grupo de "deck-transformações". Se Y é um complexo-CW segue que $\tilde{Y}$ herda uma estrutura de complexo-CW onde G age permutando células. Isto é visto da seguinte maneira: considere as células abertas de $\tilde{\sigma}$ em $\tilde{Y}$ que são levadas à célula aberta σ em Y. Estas são as componetes conexas de $p^{-1}\sigma$. Como o recobrimento é regular, G age livre e transitivamente sobre estas células e cada uma é mapeada sobre e homeomorficamente à σ por definição. Logo $\tilde{Y}$ é um G-complexo livre e cada $C_*(\tilde{Y})$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com um elemento básico para cada G-órbita das células de $\tilde{Y}$, ie, para cada célula de Y.

Definição 3.1.4. *Um **complexo** $K(G, 1)$ é um complexo-CW Y conexo satisfazendo as propriedades (i) $\pi_1(Y) = G$ e (ii) o recobrimento universal $\tilde{Y}$ de Y é contrátil.*

A condição (ii) tem outras duas equivalentes:

- (ii a) $H_i(\tilde{Y}) = 0$, $i \geq 2$.
- (ii b) $\pi_i(Y) = 0$, $i \geq 2$.

Se $Y = K(G, 1)$ então $p : \tilde{Y} \to Y$ é um recobrimento regular cujo grupo é isomorfo a $\pi_1(Y) = G$. Segue como aplicação de 3.1.3 que:

Proposição 3.1.5. *Se Y é um $K(G, 1)$ então o complexo de cadeias celulares do mapa de aumento do recobrimento universal $\tilde{Y}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.*

3.2 Módulos Induzidos

3.2.1 O Produto Tensorial $\otimes_G$

Como vimos no capítulo 1, o produto tensorial $M \otimes_R N$ é definido quando M é um R-módulo à direita e N é um R-módulo à esquerda. No caso em que R é o anel de grupo $\mathbb{Z}G$, nós podemos evitar esta distinção através do anti-automorfismo $g \mapsto g^{-1}$ em G. Assim, se M é G-módulo à esquerda qualquer, podemos considerá-lo como um G-módulo à direita se definimos $mg = g^{-1}m$, $m \in M$ e $g \in G$. Assim, faz sentido em falar do produto tensorial $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N$ de quaisquer dois G-módulos à esquerda M e N. Denotaremos por $M \otimes_G N$.

3.2.2 Extensão de Escalares

Seja $\alpha : R \to S$ um homomorfismo de anéis. Então, cada S-módulo pode ser considerado um R-módulo via α. Desse modo obtemos um funtor da categoria de S-módulos para a categoria de R-módulos chamada *restrição de escalares*.

Na direção contrária, vamos procurar por um funtor que estende escalares. Para qualquer R-módulo à esquerda M, considere o produto tensorial $S \otimes_R M$ onde S pode ser considerado como um R-módulo à direita pela ação $sr = s\alpha(r)$. Como a ação natural à esquerda de S em si mesmo comuta com sua ação à direita de R em S, podemos tornar $S \otimes_R M$ um S-módulo à esquerda se definimos $s(s' \otimes m) = ss' \otimes m$. Este S-módulo é dito ser obtido de M por *estensão de escalares*.

Note que existe um homomorfismo natural $i : M \to S \otimes_R M$. De fato, tome $i(m) = 1 \otimes m$. Como $1 \otimes rm = \alpha(r) \otimes m = \alpha(r)(1 \otimes m)$ para $r \in R$, temos que $i(rm) = \alpha(r)i(m)$ e, portanto, i é um R-mapa e o S-módulo $S \otimes_R M$ é considerado como R-módulo por restrição de escalares.

3.2.3 Módulos Induzidos

Aqui, aplicamos as construções da última seção para o homomorfismo de anel

$$\alpha = i : \mathbb{Z}H \hookrightarrow \mathbb{Z}G,$$

onde $H \leq G$. Neste caso chamamos a estensão de escalares de **indução de H para G** e denotamos

$$\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M = M \uparrow_H^G$$

Como a ação por translação à direita de H em G é livre, $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}H$-módulo livre à direita. Como base podemos tomar qualquer conjunto E de representantes para as classes laterais à esquerda gH. Segue que $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ como grupo abeliano admite uma decomposição

$$\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M = \bigoplus_{g \in E} g \otimes M$$

onde $g \otimes M = \{g \otimes m : m \in M\}$ e $g \otimes M \approx M$ pela identificação $g \otimes m \leftrightarrow m$. Em particular, como podemos escolher 1 como representante de sua classe, segue que o H-mapa canônico $i : M \to \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ leva M isomorficamente em sua imagem $1 \otimes M$. Assim, podemos a partir de i, considerar M como um H-submódulo de $M \uparrow_H^G$. Mais ainda, o somando $g \otimes M$ que ocorre acima pode ser visto como o resultado da ação de g em $1 \otimes M$ pois $g(1 \otimes M) = g \otimes M$. Portanto, vale o seguinte:

Proposição 3.2.1. *O G-módulo $M \uparrow_H^G$ contém M como um H-submódulo e é a soma direta de cópias de gM, onde g é tomado dentre um conjunto de representantes para as classes laterais à esquerda de H em G.*

Resumindo, temos que $M \uparrow_H^G = \bigoplus_{g \in G/H} gM$. Note que isto faz sentido pois M é levado em si mesmo pela ação de H, de modo que o subgrupo gM de $M \uparrow_H^G$ só depende da classe de g em G/H.

Esta descrição caracteriza completamente os G-módulos $M \uparrow_H^G$. Suponha, N é um G-módulo cujo grupo abeliano associado é uma soma direta $\bigoplus_{i \in I} M_i$. Assuma que a ação de G permuta transitivamente os somandos, no sentido de que existe uma ação transitiva de G sobre I tal que $gM_i = M_{gi}$ para todo $g \in G$ e $i \in I$. Então, não é difícil provar que:

Proposição 3.2.2. *Sejam N um G-módulo como descrito acima, M um dos somandos M_i, $H \leq G$ o subgrupo de isotropia de i. Então, M é um H-módulo e $N \approx M \uparrow_H^G$.*

Como corolário, anunciamos o seguinte resultado, que será considerado um lema para fins posteriores:

Lema 3.2.3. *Seja N um G-módulo cujo grupo abeliano associado é da forma $\bigoplus_{i \in I} M_i$. Assuma que a ação de G permuta os somandos de acordo com alguma ação de G sobre o conjunto I. Sejam G_i o grupo de isotropia de i e E um conjunto de representantes para $I \bmod G$. Então M_i é um G_i-módulo e existe um G-isomorfismo $N \approx \bigoplus_{i \in E} M_i \uparrow_{G_i}^G$.*

Prova. Temos que $I = \coprod_{i \in E} Gi$. Logo $N = \bigoplus_{i \in E} \bigoplus_{j \in Gi} M_j$. Agora, basta aplicar 3.2.2 à soma interna. □

Exemplo Seja X um G-complexo e considere o G-módulo $C_n(X)$. Este é uma soma direta de cópias de $\mathbb{Z}$, uma para cada n-célula de X. Por ser um G-complexo, os somandos são permutados pela ação de G. Logo, 3.2.3 nos fornece que

$$C_n(X) \approx \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} \mathbb{Z} \uparrow_{G\sigma}^G$$

onde Σ_n é um conjunto de representantes para as G-órbitas das n-células, $G_\sigma = \{g \in G : g\sigma = \sigma\}$ e supomos aqui que a ação de G_σ preserva orientação de cada célula σ, ie, e se $g\sigma = \sigma$, para algum $g \in G$ e alguma célula σ, então g fixa cada ponto da célula.

Note que se ação de G é livre, então temos como conclusão o que observamos acima: $C_n(X)$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com um elemento de base para cada $\sigma \in \Sigma_n$.

Capítulo 4

Aplicações

Agora que já temos vários conceitos da álgebra homológica e da topologia algébrica, apresentaremos algumas de suas aplicações. A partir da definição de um grupo de tipo homológico FP_n, vamos apresentar dois critérios explícitos para determinar quando um grupo é deste tipo FP_n. Basicamente, um deles é de caráter algébrico enquanto o outro é de caráter topológico. Além disso, vamos aplicar este último dentro do contexto de extensões HNN que agem sobre árvores e assim dar uma condição suficiente para que uma extensão HNN seja de tipo FP_n.

No que tange às definições de tipo homológico, as referências principais são o livro [15] e o survey [07]. No que tange aos critérios, temos o livro [14] para o critério "algébrico" e o artigo [05] para o "topológico".

4.1 Resoluções de tipo finito

Sabemos que um grupo G é finitamente gerado se o seu conjunto de geradores é finito, ie, $G = \langle\ S\ \rangle$ e $|S| < \infty$. Um grupo $G = \langle\ S \mid R\ \rangle$ é finitamente apresentável se ambos S e R são finitos. Assim um dos objetivos desta seção é, a partir dos conceitos já introduzidos até aqui, apresentar a definição de um grupo de tipo homológico FP_n que generaliza esta noção da "ordem de geração" de um grupo.

A referência básica para esta seção é o livro [15]. Novamente, consideramos módulos sobre um anel R associativo com identidade qualquer.

Lema 4.1.1. *Sejam $0 \to K \to P \to M \to 0$ e $0 \to K' \to P' \to M \to 0$ sequências exatas com P e P' projetivos. Então $P \oplus K' \approx P' \oplus K$.*

E, com este lema, podemos provar o seguinte:

Proposição 4.1.2. *Seja M um R-módulo. Então são equivalentes:*

i *Existe uma sequência exata $R^m \to R^n \to M \to 0$ para alguns inteiros m e n.*

ii *Existe uma sequência exata $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ para P_0 e P_1 finitamente gerados.*

iii *M é finitamente gerado e para qualquer mapa sobrejetor $\epsilon : P \to M$ com P finitamente gerado e projetivo, $ker\epsilon$ é finitamente gerado.*

O módulo M é dito **finitamente apresentado** se uma das condições acima sobre M são verdadeiras. No caso de [i] diz-se que a sequência exata é uma **apresentação finita** de M com n geradores e m relações. Uma resolução (P_i) é de **tipo finito** se cada P_i é finitamente gerado e, portanto, temos a seguinte definição:

Definição 4.1.3. *Seja M um R-módulo. M é de **tipo homológico** FP_m, $m \geq 0$, se existe uma resolução projetiva*

$$P_m \to P_{m-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

de M sobre R de tipo finito.

No que segue, apenas diremos M *é de tipo* FP_m para se referir a um módulo de tipo homológico FP_m. Constam abaixo generalização dos últimos dois resultados.

Lema 4.1.4. *Sejam*

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0 \quad e \quad 0 \to P'_n \to P'_{n-1} \to \cdots \to P'_0 \to M \to 0$$

sequências exatas com P_i e P'_i projetivos para $0 \leq i \leq n-1$. Então $P_0 \oplus P'_1 \oplus P_2 \oplus P'_3 \oplus \cdots \approx P'_0 \oplus P_1 \oplus P'_2 \oplus P_3 \oplus \cdots$. Consequentemente, se P_i e P'_i são finitamente gerados para $i \leq n-1$ então P_n é finitamente gerado se e somente se P'_n é finitamente gerado.

Este lema, tal qual acima para o caso mais simples, nos permite provar outras duas maneiras equivalentes de se definir tipo FP_n.

Proposição 4.1.5. *Para qualquer módulo M e inteiro $n \geq 0$, as seguintes condições são equivalentes:*

i *Existe uma resolução $F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$ com cada F_i livre de posto finito.*

ii *M é de tipo FP_n.*

iii *M é finitamente gerado e, para qualquer resolução projetiva $P_k \to P_{k-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ onde cada P_i é finito para $i \leq k$ com $k < n$, $ker\{P_k \to P_{k-1}\}$ é finitamente gerado.*

No caso de um módulo M que é de tipo FP_n para todos os inteiros $n \geq 0$ dizemos que M é de **tipo** FP_∞ e temos as seguintes equivalências:

Proposição 4.1.6. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i *M admite uma resolução livre de tipo finito.*

ii *M admite uma resolução projetiva de tipo finito.*

iii *M é de tipo FP_∞.*

4.2 Critério de Bieri

Esta seção tem como referência o livro [14].

Lema 4.2.1 (5-lema)**.** *Considere o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \end{tikzcd}$$

i *Se f_2 e f_4 são epimorfismos e f_5 é monomorfismo então f_3 é epimorfismo.*

ii *Se f_2 e f_4 são monomorfismos e f_1 é epimorfismo então f_3 é monomorfismo.*

Em particular, se f_1, f_2, f_4 e f_5 são isomorfismos então f_3 é isomorfismo.

Teorema 4.2.2 (Critério de Bieri)**.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

[1] *M é de tipo FP_n*

[2] *Para qualquer produto $\prod R$ de uma quantidade arbitrária de cópias de R, o homomorfismo $\theta : Tor_k^R(\prod R, M) \to \prod Tor_k^R(R, M)$, obtido pela propriedade universal de produtos diretos, é isomorfismo para $k < n$ e epimorfismo para $k = n$.*

Prova. [$i \Rightarrow ii$] Seja $(F) \to M$ uma resolução livre (projetiva) de M sobre R.

Por definição, $\theta : H_k((\prod R) \otimes_R \mathbf{F}_M) \to \prod H_k(R \otimes_R \mathbf{F}_M)$.

Sabemos que existe homomorfismo natural $(\prod R) \otimes_R F_k \to \prod (R \otimes_R F_k)$ que é isomorfismo para $k \leq n$ pois $\otimes_R$ e $\prod$ comutam com somas diretas, sendo F_k isomorfo a uma soma direta de cópias de R, $k \leq n$. Portanto

$$\theta : H_k(\prod(R \otimes_R \mathbf{F}_M)) \to \prod H_k(R \otimes_R \mathbf{F}_M).$$

Agora, $\prod$, por ser exato, comuta com H_k. Segue, por caça ao diagrama, que θ é isomorfismo para $k < n$ e epimorfismo quando $k = n$.

[$ii \Rightarrow i$] Faremos a prova por indução em n.

Tome $n = 0$. Considere M como conjunto de índices e o produto $\prod_M R$. Por hipótese, $\mu : (\prod_M R) \otimes_R M \to \prod_M R$ é um epimorfismo. Em particular, existe um elemento $c \in (\prod_M R) \otimes_R M$ que é levado para a diagonal $\prod_{m \in M} m$.

Este c é da forma $c = \sum_{i=1}^{l} (\prod_m \lambda_i^m \otimes m_i)$, onde $\lambda_i^m \in R$ e $m_i \in M$. Segue que $\mu(c) = \sum_{i=1}^{l} (\prod_m \lambda_i^m m_i) = \prod_m \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^m m_i = \prod_m m$. Logo $m = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^m m_i$, para todo $m \in M$. M é finitamente gerado pelos elementos $m_1, m_2, \ldots, m_l$ e portanto é FP_0.

Tome $n \geq 1$. Como fizemos acima concluímos que M é FP_0. Tomamos uma sequência exata curta $K \to F \to M$ com F finitamente gerado e livre. Aplicamos o funtor $Tor_k^R(\prod R, -)$ e $\prod Tor_k^R(R, -)$ e, pelo teorema 2.9.6, obtemos:

$$\begin{tikzcd}
Tor_k^R(\prod R, F) \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & Tor_k^R(\prod R, M) \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & Tor_{k-1}^R(\prod R, K) \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & Tor_{k-1}^R(\prod R, F) \arrow[r] \arrow[d, "f_4"'] & Tor_{k-1}^R(\prod R, M) \arrow[d, "f_5"'] \\
\prod Tor_k^R(R, F) \arrow[r] & \prod Tor_k^R(R, M) \arrow[r] & \prod Tor_{k-1}^R(R, K) \arrow[r] & \prod Tor_{k-1}^R(R, F) \arrow[r] & \prod Tor_{k-1}^R(R, M)
\end{tikzcd}$$

Por aplicação do 5-lema temos que:

- Se $k \leq n-1$, f_1, f_2, f_4 e f_5 são isomorfismos e portanto f_3 é isomorfismo.
- Se $k = n-1$, f_2 é epimorfismo, f_4 e f_5 são isomorfismos e assim f_3 é epimorfismo.

Segue, por hipótese de indução, que K é de tipo FP_{n-1}. Tomando a sequência exata curta original juntamente com a resolução de comprimento $n-1$ de K, suprimindo K, segue que existe uma resolução de comprimento n de M com módulos livres finitamente gerados em cada dimensão $k \leq n$. Logo M é de tipo FP_n. □

`Observação` Se consideramos que $Tor_k^R(R, M) = 0$ para $k \neq 0$, μ ser isomorfismo é equivalente a termos M finitamente gerado e que o caso $k = n$ se cumpre trivialmente, temos um enunciado [2′] equivalente ao [2]:

[2′] M é finitamente gerado e $Tor_k^R(\prod R, M) = 0$ para $1 \leq k \leq n-1$.

Corolário 4.2.3. *Seja $M' \to M \to M''$ sequência exata curta de R-módulos.*

i *Se M' é FP_{k-1} e M é FP_k então M'' é FP_k.*

ii *Se M é FP_{k-1} e M'' é FP_k então M' é FP_{k-1}.*

iii *Se M' e M'' são FP_k então M é FP_k.*

Prova. Aplicar o funtor Tor na sequência exata curta. O resultado segue imediatamente a partir de 4.2.1 e de 4.2.2. □

4.3 Grupos de tipo FP_m

A partir da definição para módulos, podemos definir também quando um grupo G dado é de tipo FP_m tomando o módulo trivial sobre o anel do grupo G.

Definição 4.3.1. *Um grupo G é de* ***tipo*** *FP_m se o $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ tem tipo FP_m.*

Proposição 4.3.2. **i** *Todo grupo é de tipo FP_0.*

ii *Um grupo é de tipo FP_1 se e somente se é finitamente gerado.*

iii *Todo grupo finitamente apresentável é de tipo FP_2.*

Proposição 4.3.3. *Seja $H \leq G$ um subgrupo índice finito. Então G é de tipo FP_m ($0 \leq m \leq \infty$) se e somente se H é de tipo FP_m.*

Como caso particular desta proposição, temos o fato de que todo subgrupo de um grupo finitamente gerado de índice finito é também finitamente gerado.

4.4 Critério de Brown

O resultado principal desta seção, o critério de Brown, se encontra em [05]. Porém, apresentamos aqui uma demonstração diferente, mais extensa e mais elementar.

Lema 4.4.1. *Se $H \leq G$ e M é um $\mathbb{Z}H$-módulo de tipo FP_k então $M \uparrow_H^G$ é um G-módulo de tipo FP_k.*

Prova. Seja
$$P_k \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$
uma resolução livre de M sobre $\mathbb{Z}H$ onde cada P_i é finitamente gerado, $i \leq k$. Como $G = \dot{\cup}_{t\in E} tH$ segue que $\mathbb{Z}G = \oplus_{t\in E} t(\mathbb{Z}H)$ e, portanto, $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}H$-módulo livre. Daí, segue que o funtor $\mathbb{Z}G\otimes_{\mathbb{Z}H}$ é exato e:
$$P_k \uparrow_H^G \to \cdots \to P_1 \uparrow_H^G \to P_0 \uparrow_H^G \to M \uparrow_H^G \to 0$$
é uma resolução livre de $M \uparrow_H^G$ sobre $\mathbb{Z}G$. Note que cada P_i tem, por hipótese, posto finito sobre $\mathbb{Z}H$, ie, $P_i = \oplus_{\alpha=1}^n \mathbb{Z}H$. Como $\otimes$ comuta com somas diretas, aplicando 2.1.7, temos que:
$$P_i \uparrow_H^G = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} (\oplus_{\alpha=1}^n \mathbb{Z}H) = \oplus_{\alpha=1}^n (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}H) = \oplus_{\alpha=1}^n \mathbb{Z}G$$
Assim cada $P_i \uparrow_H^G$ é finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}G$ e temos então uma resolução livre de $M \uparrow_H^G$ sobre $\mathbb{Z}G$ de tipo finito até dimensão k. □

Lema 4.4.2. *Se M e N são R-módulos de tipo FP_k então $M \oplus N$ é um R- módulo de tipo FP_k.*

Prova. A prova segue por aplicação direta do lema 4.2.3 [iii] para a sequência exata:

$$0 \to M \to M \oplus N \to N \to 0.$$

□

Teorema 4.4.3 (Critério de Brown)**.** *Se X é um G-complexo conexo tal que:*

1 *X é acíclico em dimensões $< n$, ie, $\widetilde{H}_i(X) = 0$ para todo $1 \leq i < n$;*

2 *Para cada p-célula σ, $0 \leq p \leq n$, tem-se que G_σ é de tipo FP_{n-p};*

3 *O n-esqueleto de X tem um número finito de órbitas pela ação de G;*

4 *Se $g\sigma = \sigma$, para algum $g \in G$ e alguma p-célula σ, com $0 \leq p \leq n$, então g fixa cada ponto da célula.*

Então G é de tipo FP_n.

Prova. Como X é um G-complexo conexo que satisfaz [4], o exemplo 3.2.3 se aplica e temos que:

$$C_p(X) = \oplus_{\sigma \in \Sigma_p} \mathbb{Z} \uparrow_{G_\sigma}^{G},\ 0 \leq p \leq n.$$

Pela hipótese [2], G_σ é de tipo FP_{n-p}, ie, $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_{n-p} sobre $\mathbb{Z}G_\sigma$. Como $G_\sigma \leq G$, temos pelo lema 4.4.1 que $\mathbb{Z} \uparrow_{G_\sigma}^{G}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo de tipo FP_{n-p}.

Pela hipótese [3], que nos garante que Σ_p é finito, e pelo lema 4.4.2, $C_p(X) = \oplus_{\sigma \in \Sigma_p} \mathbb{Z}_\sigma \uparrow_{G_\sigma}^{G}$ também é de tipo FP_{n-p}.

Pela hipótese [1], sabemos que existe um complexo celular de cadeias

$$C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

que é exato pois $\widetilde{H}_i(X) = 0$ para $0 \leq i < n$.

Portanto, temos uma cadeia de $\mathbb{Z}G$-módulos livres onde cada $C_p(X)$ é de tipo FP_{n-p}, ie, $C_n(X)$ é de tipo FP_0, $C_{n-1}(X)$ é de tipo FP_1, e assim por diante.

A partir da sequência longa, extraímos sequências exatas curtas da forma:

$$0 \to im\partial_{n-p+1} \hookrightarrow C_{n-p} \to im\partial_{n-p} \to 0$$

Note que $im\partial_{n-p+1}$ é de tipo FP_{p-1} e C_{n-p} é de tipo FP_p. Portanto, por aplicação do 4.2.3[i] $im\partial_{n-p}$ é de tipo FP_p. Usando isto, vamos aplicando este raciocínio, da esquerda para a direita no complexo, desde $C_n(X)$ até chegar em $\mathbb{Z}$.

Começando com $p = 0$, obtemos que $im\partial_n \subseteq C_{n-1}(X)$ é de tipo FP_0; com $p = 1$, obtemos que $im\partial_{n-1} \subseteq C_{n-2}(X)$ é de tipo FP_1 e assim por diante até que, para $p = n$, obtemos que $im(\epsilon) \subseteq \mathbb{Z}$ é de tipo FP_n. Como $im(\epsilon) = \mathbb{Z}$, segue que $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_n sobre $\mathbb{Z}G$. □

4.5 Ação de Extensões HNN sobre árvores

Para terminar este capítulo, apresentamos uma aplicação direta do último teorema 4.4.3 no contexto de grupos que agem sobre árvores. O grupo que age é uma extensão HNN, como vimos no primeiro capítulo, e a árvore é contruída a partir da forma normal dos elementos também numa extensão HNN e de forma natural.

Adotaremos a seguinte notação: $H = G*_{A=B} = \langle G, p | p^{-1}Ap = B\rangle$, com S e T transversais à direita de A e de B em G respectivamente, tais que $1 \in S \cap T$.

Definimos uma *árvore padrão orientada* $\Gamma(V, E, \alpha, \omega)$ associada a H como segue:

- $V(\Gamma) = \{Gh : h \in H\}$ e
- $E(\Gamma) = \{Ah : h \in H\}$, $\alpha(Ah) = Gh$ e $\omega(Ah) = Gp^{-1}h$.

Aqui, α é o começo e ω é o fim de uma aresta.

$$Gh \xrightarrow{\quad Ah \quad} Gp^{-1}h$$

Proposição 4.5.1. Γ *é uma árvore.*

Prova. Γ **está bem definida**. Se temos dois vértices ligados por duas arestas orientadas quaisquer, então estas arestas são iguais em H. Com efeito, se

$$\alpha(Ah_1) = \alpha(Ah_2) \Leftrightarrow Gh_1 = Gh_2 \Leftrightarrow h = h_1h_2^{-1} \in G$$

$$\omega(Ah_1) = \omega(Ah_2) \Leftrightarrow Gp^{-1}h_1 = Gp^{-1}h_2 \Leftrightarrow p^{-1}hp \in G$$

ie, temos que $p^{-1}hp = g_0$ donde temos que $gp^{-1}hp =_H 1$, com $g = g_0^{-1} \in G$. Pelo lema de Britton 1.4.3, $p^{-1}hp$ é um p-pinche. Segue que $h = h_1h_2^{-1} \in A$ e assim $Ah_1 = Ah_2$.

Note ainda que se $h = g_0p^{\epsilon_1}g_1p^{\epsilon_2}g_2 \cdots p^{\epsilon_m}g_m$ está na forma normal então $p^{-1}h$ tem forma normal

$$p^{-1}h = p^{-1}(bs_0) \cdots p^{\epsilon_m}g_m = p^{-1}bpp^{-1}s_0 \cdots p^{\epsilon_m}g_m = c_0p^{-1}s_0p^{\epsilon_1}g_1 \cdots p^{\epsilon_m}g_m,$$

com $g_0 = bs_0, b \in B$ e $s_0 \in S$. Assim o par de vértices $(Gh, Gp^{-1}h)$ associado a uma aresta Ah com $h \in H$ está bem definido.

Γ **não possui caminhos fechados**. Inicialmente, observe o seguinte:

- Seja Gh, $h \in H$, o começo de uma aresta. Então, como $Gh = Ggh$, para algum $g \in G$, a aresta é Agh e o seu fim é $Gp^{-1}gh$.

$$Gh \xrightarrow{\quad Agh \quad} Gp^{-1}gh$$

- Seja Gh, $h \in H$, o fim de uma aresta. Então, como $Gh = Ggh$, para algum $g \in G$, a aresta é $Apgh$ e o seu começo é $Gpgh$.

$$Gpgh \xrightarrow{\;Apgh\;} Gh$$

Agora, seja γ um caminho reduzido (ie, sem laços). Sem perder generalidade, suponha que comece com vértice G. Pelo que observamos acima, γ tem vértices consecutivos: $G, Gp^{\epsilon_1}g_1, Gp^{\epsilon_2}g_2p^{\epsilon_1}g_1, Gp^{\epsilon_3}g_3p^{\epsilon_2}g_2p^{\epsilon_1}g_1 \cdots, Gp^{\epsilon_m}g_m \cdots p^{\epsilon_3}g_3p^{\epsilon_2}g_2p^{\epsilon_1}g_1$.

Queremos mostrar que γ não é fechado. Suponha que γ seja fechado. Então

$$Gp^{\epsilon_m}g_m \cdots p^{\epsilon_3}g_3p^{\epsilon_2}g_2p^{\epsilon_1}g_1 = G,$$

ie, existe $g_0 \in G$ tal que $g_0p^{\epsilon_m}g_m \cdots p^{\epsilon_3}g_3p^{\epsilon_2}g_2p^{\epsilon_1}g_1 = 1$ em H. Portanto, pelo lema de Britton 1.4.3, se $w = gp^{\epsilon_m}g_m \cdots p^{\epsilon_3}g_3p^{\epsilon_2}g_2p^{\epsilon_1}g_1$, então w contém um p-pinch, ie, alguma expressão da forma $p^{\epsilon_i}g_ip^{\epsilon_{i-1}}$, para algum $i = 2, \ldots, m$, tal que:

$$g_i \in A \text{ se } \epsilon_i = -1 \text{ e } \epsilon_{i-1} = 1 \text{ ou } g_i \in B \text{ se } \epsilon_i = 1 \text{ e } \epsilon_{i-1} = -1.$$

Agora, se na sequência de vértices de γ nós temos que

$$v_1 = Gp^{\epsilon_{i-2}}g_{i-2} \cdots p^{\epsilon_1}g_1, v_2 = Gp^{\epsilon_{i-1}}g_{i-1} \cdots p^{\epsilon_1}g_1 \text{ e } v_3 = Gp^{\epsilon_i}g_i \cdots p^{\epsilon_1}g_1$$

são vértices consecutivos de γ, como $p^{\epsilon_i}g_ip^{\epsilon_{i-1}}g_{i-1} \in G$, temos que $v_1 = v_3$. Portanto, o caminho não é reduzido. Com isso concluímos que, como γ é reduzido, tal caminho não pode ser fechado. $\square$

A ação de H sobre V e E por multiplicação à direita induz uma ação de H sobre a árvore Γ por permutação de células de mesma dimensão. É fácil verificar que esta ação satisfaz as seguintes propriedades:

(1) Os subgrupos dos estabilizadores das 0-células em H e das 1-células de Γ são isomorfos a G e A respectivamente.

(2) Existe uma única órbita de 0-células e uma única órbita de 1-células pela ação de H, ie, o 1-esqueleto de Γ tem um número finito pela ação de H.

(3) A ação preserva a orientação das células no sentido de que as 1-células que são fixas por algum elemento de H tem todos os pontos fixos.

A partir destas propriedades, podemos provar diretamente que:

Proposição 4.5.2. *Seja m um número natural e H uma extensão HNN com grupo base G, letra estável p e subgrupos associados $A \simeq B$. Suponha que G é de tipo FP_m e que A é de tipo FP_{m-1}. Então H é de tipo FP_m.*

Prova. Note que, pela propriedade [1], os subgrupos dos estabilizadores das 0-células e das 1-células são isomorfos ao grupo G, que é de tipo FP_m e ao grupo A, que é de tipo FP_{m-1}, respectivamente. Isto, juntamente com as propriedades [2] e [3], nos permite aplicar diretamente o teorema 4.4.3 (Critério de Bieri) donde segue imediatamente que H é de tipo FP_m. $\square$

Trata-se de um resultado que nos será útil pois fornece um critério para determinar quando uma extensão HNN é de tipo FP_m.

Capítulo 5

Σ-Teoria

Lembremos que nosso objetivo nesta dissertação é calcular os Σ-invariantes homotópicos para um grupo de Richard Thompson. Aqui, introduzimos estes invariantes e apresentamos também sua versão homológica. Ainda, enunciamos algumas de suas propriedades e qual é a relação entre o invariante homotópico e o homológico. Finalmente, estabelecemos um critério, atribuído a Meinert, conhecido como a versão monoidal do critério de Brown.

O conteúdo da primeira parte desta seção se encontra no survey [07] enquanto o critério de Meinert se encontra em [09], [10].

5.1 O Invariante Homológico

Seja G um grupo abeliano finitamente gerado. Um **caracter** é um homomorfismo de grupos $\chi : G \to \mathbb{R}$, onde $(\mathbb{R}, +)$ é o grupo abeliano via adição. Vamos nos concentrar agora no conjunto de todos os caracteres $Hom(G, \mathbb{R}) = \{\chi : G \to \mathbb{R}\}$. Vejamos que, na verdade, $Hom(G, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$, para algum n natural.

Pela classificação dos grupos abelianos finitamente gerados, temos que $G \simeq \mathbb{Z}^n \oplus T$, onde T representa a parte de torção de G e n é o posto da parte livre.

A partir da comutatividade entre Hom e somas diretas, segue que

$$Hom(G, \mathbb{R}) = Hom(\mathbb{Z}^n \oplus T, \mathbb{R}) = Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}) \oplus Hom(T, \mathbb{R}).$$

Como $\mathbb{R}$ é livre de torção temos que $Hom(T, \mathbb{R}) = 0$. Finalmente, temos que $Hom(G, \mathbb{R}) = \oplus_{i=1}^n Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$ e, para este último isomorfismo $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$, associamos a cada $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ o elemento $f(1_{\mathbb{Z}})$ em $\mathbb{R}$.

Agora definimos uma *relação de equivalência* em $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$, de modo que

$$\chi_1 \backsim \chi_2 \text{ se existe um real } r > 0 \text{ tal que } \chi_1 = r\chi_2.$$

Definimos a **esfera de caracteres** $S(G)$ como o conjunto dos caracteres não-nulos quocientado pela relação de equivalência definida acima. Segue pela idenficação acima que $S(G) \simeq \mathbb{S}^{n-1}$.

Podemos ainda trazer para G a ordem intrínseca dos reais, definindo certos subconjuntos de G por pré-imagens de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Para isso, definimos:

$$G_{\chi \geq d} = \chi^{-1}([d, \infty))$$

e denotamos

$$G_\chi = G_{\chi \geq 0}.$$

Observe que G_χ é um submonóide de G pois contém 1_G, é fechado via produto mas não via operação de inversão de seus elementos, ie, se $g \in G$ é tal que $\chi(g) > 0$ então $\chi(g^{-1}) = -\chi(g) < 0$. Portanto $\mathbb{Z}G_\chi$ é um subanel de $\mathbb{Z}G$ e assim temos as condições necessárias para definir o invariante.

Definição 5.1.1. *Definimos o* ***invariante homológico de dimensão*** m

$$\Sigma^m(G, \mathbb{Z}) = \{[\chi] \in S(G) \,|\, \mathbb{Z} \text{ é de tipo homológico } FP_m \text{ sobre } \mathbb{Z}G_\chi\}$$

Esta definição, por ser dada em termos de resoluções, é dita a versão homológica do invariante. Existe também a versão homotópica. Vamos descrevê-la a seguir.

5.2 O Invariante Homotópico

Antes de definirmos o invariante homotópico propriamente dito, temos ainda que definir um tipo de natureza homotópica de um dado grupo, à semelhança do tipo homológico. Relembrando a definição de um complexo $K(G, 1)$ dada no segundo capítulo, temos:

Definição 5.2.1. *Um grupo G é de* ***tipo homotópico*** F_m *se existe um complexo $K(G, 1)$ Y tal que o m-esqueleto de Y é finito.*

Novamente, no que segue, apenas diremos G *é de tipo* F_m para se referir a um grupo de tipo homotópico F_m. A próxima proposição nos mostra quais são os grupos de tipo F_1 e F_2.

Proposição 5.2.2.

i *G é de tipo homotópico F_1 se e somente se é finitamente gerado.*

ii *G é de tipo homotópico F_2 se e somente se é finitamente apresentável.*

Lema 5.2.3. *Todo grupo de tipo F_m é de tipo FP_m.*

Prova. Seja G grupo de tipo F_m. Então existe um complexo $K(G, 1)$ Y com m-esqueleto finito. Seja $p : \tilde{Y} \to Y$ um recobrimento regular cujo grupo é isomorfo a $\pi_1(Y) = G$.

Pela proposição 3.1.5, o complexo de cadeias celulares do mapa de aumento de $\tilde{Y}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Sabemos que cada $C_*(\tilde{Y})$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com um elemento básico para cada célula de Y. Como o m-esqueleto de Y é finito segue que cada $C_i(\tilde{Y})$ é finitamente gerado para $1 \leq i \leq m$ e, portanto, temos uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ com módulos finitamente gerados até dimensão m. Logo, G é de tipo FP_m. □

Para $m \geq 2$, a recíproca desta proposição ficou por muito tempo em aberto até que, em 1997, num artigo de Bestvina e Brady [12], faz-se uma construção que mostra a existência de grupos de tipo FP_∞ que não são F_2. Isto também mostra que a recíproca da proposição 4.3.2[iii] não vale.

Seja $Y = K(G,1)$ com um único vértice e $\tilde{Y}$ seu recobrimento universal. Temos que os vértices de $\tilde{Y}$ correspondem aos elementos de G. De fato, se $\tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ é recobrimento universal e $Y = \tilde{Y}/G$ tem um único vértice, isto implica que a pré-imagem deste único vértice em Y são todos os vértices de $\tilde{Y}$ os quais estão em correspondência biunívuca com G. Deste modo, já que cada vértice de $\tilde{Y}$ corresponde a um elemento de G, definimos $\tilde{Y}_\chi$ como sendo o subcomplexo de $\tilde{Y}$ gerado pelos vértices que estão em G_χ.

Definição 5.2.4. *Seja G um grupo F_m. Definimos o* ***invariante homotópico de dimensão m***

$$\Sigma^m(G) = \{[\chi] \in S(G) |$$
$$\exists\, Y = K(G,1) \text{ e } \tilde{Y} \text{ recobrimento de } Y \text{ tal que } \pi_i(\tilde{Y}_\chi) = 0\ \forall i \leq m-1\}$$

Note que nesta definição Y tem um único vértice.

Antes de prosseguirmos, vamos enunciar um teorema conhecido atribuído a Hurewicz ([21], cap. 4, teo. 4.32): Seja X um espaço topológico conexo por caminhos. Se X é $(n-1)-$conexo para $n \geq 2$ (i.e. $\pi_i(X)$ é trivial para $1 \leq i \leq n-1$) então os grupos $\pi_n(X)$ e $H_n(X)$ são naturalmente isomorfos. Disto temos que

- $[a]$ se X é 1-conexo e $H_i(X) = 0$ para $i \leq n-1$ então X é $(n-1)$-conexo;
- $[b]$ se X é $(n-1)$-conexo, para $n \geq 2$, então X é $(n-1)$-acíclico.

Este resultado tem sua importância neste contexto pois relaciona propriedades homotópicas e homológicas. Agora, com a definição apresentada acima, podemos estabelecer um primeiro resultado que relaciona os dois tipos de invariantes:

Proposição 5.2.5. *Se G é de tipo F_m então $\Sigma^m(G) \subseteq \Sigma^m(G,\mathbb{Z})$.*

Prova. Tome $[\chi] \in \Sigma^m(G)$. Então existe $Y = K(G,1)$ e $\tilde{Y}$ recobrimento de Y tal que $\pi_i(\tilde{Y}_\chi) = 0$, para $i \leq m-1$. Note que $\tilde{Y}_\chi \subseteq \tilde{Y}$. Logo $\tilde{Y}_\chi$ também é um G_χ-complexo livre e o número de G_χ-órbitas de k-células de $\tilde{Y}_\chi$ é finito para $k \leq m$. Logo, a cadeia de complexos celulares

$$\mathbb{Z}[C_m(\tilde{Y}_\chi)] \xrightarrow{\partial_m} \mathbb{Z}[C_{m-1}(\tilde{Y}_\chi)] \xrightarrow{\partial_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[C_0(\tilde{Y}_\chi)] \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \to 0$$

é exata pois se $\pi_i(\tilde{Y}_\chi) = 0$, para $i \leq m-1$ então, pelo resultado de Hurewicz ([b]), $H_i(\tilde{Y}_\chi) = 0$, para $i \leq m-1$. Além disso, $\mathbb{Z}[C_k(\tilde{Y}_\chi)]$ é um $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo finitamente gerado para $k \leq m$ pois o número de G_χ-órbitas de k-células de $\tilde{Y}_\chi$ é finito para $k \leq m$. Portanto temos uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G_\chi$ com módulos finitamente gerados até dimensão m e, portanto, $[\chi] \in \Sigma^m(G, \mathbb{Z})$. □

Para $m = 1$, vale ressaltar que é conhecido que $\Sigma^1(G) = \Sigma^1(G, \mathbb{Z})$.

Veja que, na definição acima para $\Sigma^m(G)$, o complexo $K(G, 1)$ e, portanto, o recobrimento $\tilde{Y}$ depende de cada classe $[\chi]$ e, por isso, não é considerada uma boa definição. Adiante, vamos apresentar uma outra definição equivalente que não depende da classe (para mais detalhes, veja [10]). Para isso, precisamos definir:

Definição 5.2.6. *Seja G um grupo, $\chi : G \to \mathbb{R}$ um caracter e Z um espaço com uma ação de G. Uma função contínua $h : Z \to \mathbb{R}$ é chamada **função de altura χ-equivariante** se $h(gv) = h(v) + \chi(g)$ para todo ponto em Z.*

Esta função h é definida de modo a estender linearmente a função χ ie, $h|_{V(\tilde{Y})} = \chi$. Agora, temos uma segunda definição para o invariante homotópico.

Definição 5.2.7. *Considere Y um complexo $K(G, 1)$ fixo com m-esqueleto finito e seu recobrimento universal Z juntamente com uma função de altura χ-equivariante $h : Z \to \mathbb{R}$ tal que $Z_{h\geq 0} = Z_\chi$. Então: $[\chi] \in \Sigma^m(G)$ se e somente se existe $d \leq 0$ tal que as funções $\pi_i(Z_{h\geq 0}) \to \pi_i(Z_{h\geq d})$, com $Z_{h\geq d} = h^{-1}([d, \infty))$, induzidas pela inclusão são triviais para todos $0 \leq i \leq m-1$.*

Terminamos esta seção apresentando uma identidade que relaciona $\Sigma^m(G)$ e $\Sigma^m(G, \mathbb{Z})$. Ela é obtida como versão monoidal do seguinte lema que nos fornece uma descrição exata da relação entre grupos de tipo homológico FP_m e de tipo homotópico F_m.

Lema 5.2.8. *Seja $m \geq 2$. G é de tipo F_m se e somente se G é F_2 e FP_m.*

Esboço da prova. Se G é de tipo F_m então G é de tipo F_2 e, pelo lema 5.2.3, G também é de tipo FP_m.

Agora, suponha que G é de tipo F_2 e de tipo FP_m. É suficiente considerar o caso $m \geq 3$. Por ser F_2, existe um G-complexo 2-dimensional simplesmente conexo $\tilde{\Gamma}_2$, espaço de recobrimento universal de $\Gamma = K(G, 1)$. Sejam V, E e C os vértices, as arestas e as 2-células de $\tilde{\Gamma}_2$. Portanto, pela proposição 3.1.5 existe uma cadeia de complexos celulares:

$$\mathbb{Z}[C] \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[E] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[V] \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \to 0.$$

Pela proposição 4.1.5, como G é FP_m, $m \geq 3$, temos que o $ker\partial_2$ é finitamente gerado. Logo podemos estender o complexo acima a um complexo exato

$$\mathbb{Z}[D] \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}[C] \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[E] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[V] \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \to 0$$

onde D é a união finita das G-órbitas livres das 3-células que foram coladas a cada uma das 2-células básicas do $ker\partial_2$ de modo a se obter um G-complexo 3-dimensional simplesmente conexo $\tilde{\Gamma}_3$ tal que a sequência acima seja o complexo de cadeias celulares de $\tilde{\Gamma}_3$, ie, fazendo $H_2(\tilde{\Gamma}_2) = 0$ donde tem-se que $\tilde{\Gamma}_3$ é 2-acíclico.

Se $m > 3$, continuamos este mesmo processo, ie, colamos uma quantidade finita de m-células em cada $(m-1)$-célula básica do $ker\partial_{m-1}$ de modo que $H_{m-1}(\tilde{\Gamma}_{m-1}) = 0$, até construirmos um G-complexo m-dimensional $(m-1)$-acíclico simplesmente conexo $\tilde{\Gamma}_m$.

Pelo resultado de Hurewicz ([a]), todo complexo-CW $(m-1)$ a-cíclico e simplesmente conexo é $(m-1)$-conexo. Tome $\Gamma_m = \tilde{\Gamma}_m/G$ e segue que G é de tipo F_m, pois $\Gamma_m = K(G,1)$ com m-esqueleto finito. □

Abaixo, enunciamos a versão monoidal:

Teorema 5.2.9. *Se G é um grupo de tipo F_m, então $\Sigma^m(G) = \Sigma^m(G,\mathbb{Z}) \cap \Sigma^2(G)$.*

Este último resultado nos permite reduzir o estudo de questões sobre os invariantes, em dimensões $m \geq 3$, ao estudo de sua parte homológica, uma vez que sabemos resolver a questão da parte homotópica em dimensão 2.

5.3 Critério de Meinert

Existe uma versão monoidal do critério de Brown chamada de critério de Meinert. Fazendo algumas adaptações, é possível demonstrá-lo seguindo os mesmos passos de acordo com o que foi feito na demonstração do critério de Brown.

Teorema 5.3.1. *[09] [Critério de Meinert]*

Se X é um G-complexo conexo e $\chi : G \to \mathbb{R}$ é um caracter tal que:

1 $\widetilde{H}_i(X) = 0$ *para todo* $1 \leq i < n$;

2 *Para cada p-célula σ, $0 \leq p \leq n$, $\widetilde{\chi} = \chi|_{G_\sigma} \neq 0$ tem-se que $(G_\sigma)_{\widetilde{\chi}}$ é de tipo FP_{n-p};*

3 *O n-esqueleto de X tem um número finito de órbitas pela ação de G;*

4 *Se $g\sigma = \sigma$, para algum $g \in G$ e alguma p-célula σ, com $0 \leq p \leq n$, então g fixa cada ponto da célula.*

Então G_χ é de tipo FP_n.

E, finalmente, apenas citamos aqui que existe uma versão homotópica da versão monoidal do critério de Brown, também obtida por Meinert (ver [10]).

Capítulo 6

O grupo de Richard Thompson F

6.1 Introdução

Dentre os grupos de Richard Thompson F, T e V definidos em 1965, nós estaremos estudando o grupo F que tem a seguinte apresentação infinita:

$$F_1 = \langle x_0, x_1, x_2, \ldots \,|\, x_k^{-1} x_n x_k = x_{n+1},\, n > k \geq 0, n \in \mathbb{N} \rangle.$$

Com esta apresentação, veremos adiante que o grupo de Richard Thompson é uma extensão HNN.

Entretanto, este grupo também é finitamente apresentado, ie, admite uma apresentação finita com dois geradores e duas relações

$$F_2 = \langle y_0, y_1 | \, [y_0 {y_1}^{-1}, {y_0}^{-1} y_1 y_0], [y_0 {y_1}^{-1}, {y_0}^{-2} y_1 {y_0}^2] \rangle.$$

onde $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

Podemos ainda considerá-lo como um subgrupo do grupo de homeomorfismos do intervalo $[0, 1]$, o qual denotaremos por F.

A partir destas considerações, neste capítulo faremos uma descrição do grupo F e mostramos que F, F_1 e F_2 são isomorfos. Ao final, exibiremos algumas propriedades algébricas de F que nos permitirão aplicar para F alguns resultados existentes para quaisquer outros grupos que partilham tais propriedades.

Para esta seção, quanto à descrição do grupo em termos de diagramas de árvore, o teorema da forma normal e os isomorfismos, a principal referência é o survey [11] e em relação às outras propriedades algébricas, tomamos a tese [17] como fonte.

6.2 O grupo F via homeomorfismos do intervalo

A primeira abordagem é a realização do grupo de Richard Thompson através do subgrupo F de homeomorfismos do intervalo $[0, 1]$, que fixam 0 e 1 e satisfazem as seguintes propriedades:

(1) linear por pedaços ("piecewise linear");

(2) diferenciável exceto por um número finito de pontos; mais ainda, estes pontos são racionais diádicos;

(3) a inclinação em cada intervalo diferenciável é potência de 2;

Pode ser visto sem dificuldades que se trata de um subgrupo. Segue da definição que qualquer elemento em F é crescente, pois a derivada é positiva em cada intervalo diferenciável.

Como exemplos, estão abaixo as funções a e b, que, como veremos adiante, desempenham um papel fundamental dentro de F:

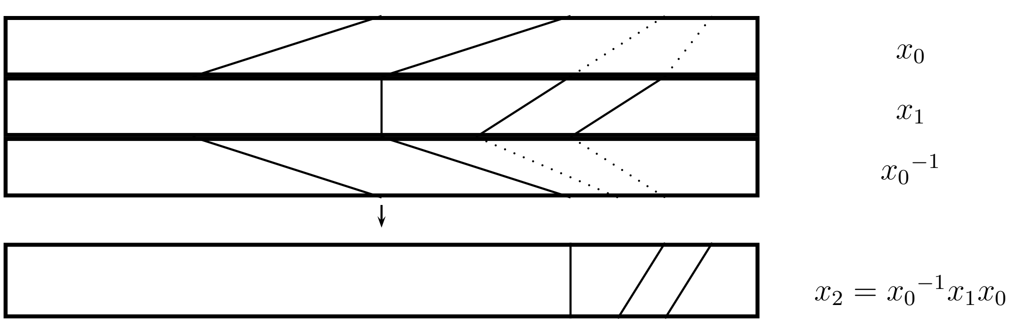
$$a(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{4} & , \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 2x - 1 & , \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4} & , \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ x - \frac{1}{8} & , \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8} \\ 2x - 1 & , \frac{7}{8} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

A partir de a e b, definimos as funções $x_0, x_1, x_2, \ldots$ em F do seguinte modo:

$$x_0 = a,\ x_1 = b,\ \text{ e } x_n = a^{-(n-1)} b a^{n-1} \text{ para } n \geq 1.$$

Diagramas de retângulo

Seja f uma função em F. Considere um retângulo. Vamos "representar" f no retângulo da seguinte maneira: a aresta superior é vista como o domínio de f e a aresta inferior como a imagem de f. Para cada elemento x no qual f não é diferenciável construímos um segmento de reta que liga x a $f(x)$. O diagrama resultante será chamado de `diagrama de retângulo de` f. Estes diagramas nos ajudam a vizualizar a composição de funções em F pois seguem simplesmente por justaposição dos retângulos correspontes às funções. As figuras abaixo exemplificam esta construção.



Diagramas de árvore

Agora vamos dar os preliminares para associarmos a cada f no grupo um diagrama de árvores.

Seja S uma árvore. Dizemos que S é uma **árvore binária ordenada pela raíz** se:

(1) S tem uma raíz v_0.

(2) se S tem mais de um vértice, então v_0 tem valência 2.

(3) se v é um vértice em S com valência maior que 1, então existem exatamente duas arestas $e_{v,L}$ e $e_{v,R}$ que contém v e não estão contidas na geodésica que liga v_0 e v.

A aresta $e_{v,L}$ é dita uma aresta à esquerda (l-aresta) de S e a aresta $e_{v,R}$ é dita uma aresta à direita (r-aresta) de S. Vértices com valência 0 (árvore trivial) ou 1 serão chamados de **folhas** de S. Existe uma ordenação canônica das folhas de S da esquerda para a direita e o **lado direito** de S é o arco maximal formado por r-arestas que começa na raíz de S.

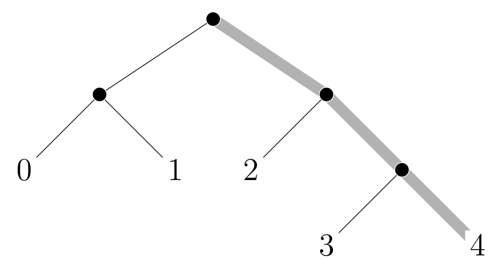


Figura 6.1: Uma árvore binária ordenada pela raíz com 5 folhas com lado direito destacado

Um **isomorfismo** entre árvores binárias ordenadas pela raíz é um isomorfismo de árvores com raíz que leva l-arestas em l-arestas e r-arestas em r-arestas. Uma **subárvore binária ordenada pela raíz** S' de uma árvore binária ordenada pela raíz S é uma árvore binária ordenada pela raíz que é uma subárvore de S cujas as l-arestas são l-arestas de S e cujas r-arestas são r-arestas de S mas a raíz de S' não necessariamente é uma raíz de S.

Intervalos em que os pontos finais são racionais diádicos são chamados de **intervalos diádicos**. Em particular, um intervalo da forma $[\frac{a}{2^n}, \frac{a+1}{2^n}]$ com a, n números inteiros não-negativos com $a \leq 2^n - 1$ é chamado um **intervalo diádico padrão**.

Existe uma árvore Γ, chamada **árvore de intervalos diádicos padrões**, que é definida da seguinte maneira:

(1) os vértices de Γ são os intervalos diádicos de $[0, 1]$;

(2) uma aresta de Γ é um par (I, J) de intervalos diádicos padrões tal que:

- I é uma metade de J à esquerda se (I, J) é uma l-aresta.
- J é uma metade de I à direita se (I, J) é uma r-aresta.

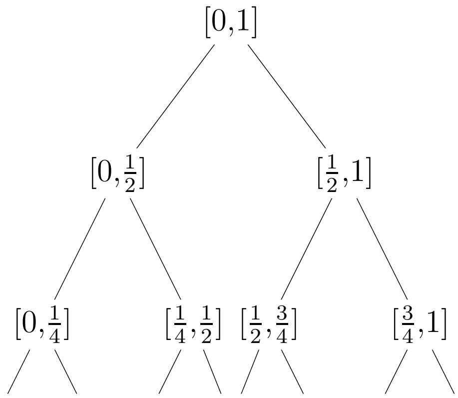


Figura 6.2: A árvore Γ de invervalos diádicos padrões

Claramente Γ é uma árvore binária ordenada pela raíz.

Uma Γ-árvore é uma sub-árvore binária ordenada pela raíz de Γ que é finita e tem raiz $[0, 1]$. Denotamos por Γ_n, para cada n inteiro não negativo, a Γ-árvore que tem $n + 1$ folhas e lado direito com n arestas.

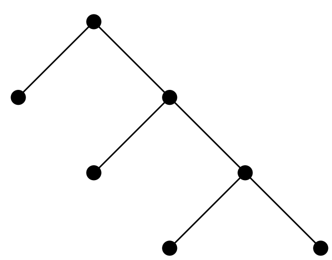


Figura 6.3: A árvore Γ_3

Um **caret** é uma subárvore binária ordenada pela raíz de Γ com exatamente duas arestas.

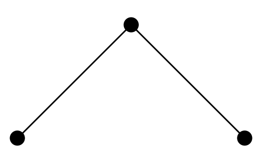


Figura 6.4: Um caret

Uma partição de $[0, 1]$ é chamada **partição diádica padrão** se e somente se cada intervalo da partição é um intervalo diádico padrão. Podemos mostrar que:

Proposição 6.2.1. *Seja $f \in F$.*

Existe uma partição diádica padrão $\mathcal{P} = \{0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = 1\}$ tal que f é linear em cada intervalo da partição e $\mathcal{Q} = \{0 = f(x_0) \leq f(x_1) \leq \cdots \leq f(x_n) = 1\}$ é uma partição diádica padrão.

Um **diagrama de árvores** é um par (R, S) de Γ-árvores R e S tal que R e S têm o mesmo número de folhas. Denotamos por $R \to S$, R é árvore-domínio e S é a árvore-imagem. Assim, pela proposição, podemos associar para cada $f \in F$ um diagrama $R \to S$, onde R e S são as Γ-árvores associadas a cada partição diádica padrão $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q} = f(\mathcal{P})$, respectivamente.

Como $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ não são únicos, existem diversos diagramas associados a f. Dado um diagrama (R, S) podemos contruir um outro, adjuntando carets a R e S do seguinte modo: seja I_n a n-ésima folha de R e seja J_n a n-ésima folha de S. Seja C um caret com arestas I_{n_1} e I_{n_2} com raíz I_n e D um caret com arestas J_{n_1} e J_{n_2} com raíz J_n. Como f é linear em I e $f(I) = J$, então $f(I_{n_1}) = J_{n_1}$ e $f(I_{n_2}) = J_{n_2}$. Daí, segue que $(R \cup C, S \cup D)$ é um diagrama para f.

Inversamente, podemos contruir um outro diagrama por redução em vez de adjunção. Chamamos a seguinte operação de redução: Suponha que exista um positivo inteiro n tal que as n-ésima e $n+1$-ésima folhas de R, e de S, formem um caret C, e D respectivamente. Ao apagar C e D menos suas raízes, temos um novo diagrama para f. Dizemos que um diagrama (R, S) é **reduzido** se não é possível efetuar nenhuma redução em (R, S).

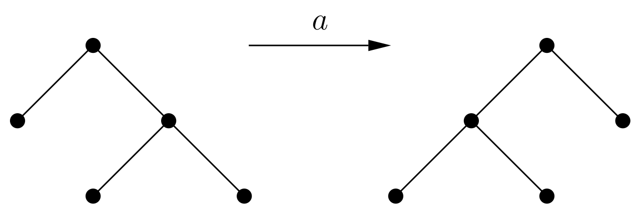


Figura 6.5: O diagrama reduzido para a

Não é difícil estabelecer que:

Proposição 6.2.2. *Existe uma bijeção entre o grupo F e o conjunto de todos os diagramas de árvores reduzidas.*

Seja S uma Γ-árvore. Sejam $I_0, I_1, \ldots, I_n$ as folhas de S ordenadas. Para cada k com $0 \leq k \leq n$, seja a_k o comprimento do arco maximal formado por l-arestas que tem origem em I_k e que não tocam o lado direito de S. A n-upla ordenada $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ é chamada **expoente** de S.

Esta descrição das Γ-árvores em termos de seus expoentes, nos dá um forma normal para os elementos de F.

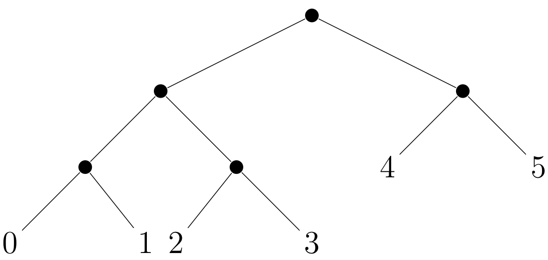


Figura 6.6: Uma árvore com expoente $(2, 0, 1, 0, 0, 0)$

Teorema 6.2.3. *Sejam R, S $\Gamma-$árvores com $n+1$ folhas para algum n inteiro não negativo. Sejam $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ os expoentes de R e $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ os expoentes de S. Então*

1 *a função em F com diagrama (R, S) é $x_0^{b_0} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} x_n^{-a_n} \cdots x_2^{-a_2} x_1^{-a_1} x_0^{-a_0}$*

2 *o diagrama de árvore (R, S) é reduzido se e somente se i) se as duas últimas folhas de R pertencem a um caret então as duas últimas folhas de S não pertencem a um caret; ii) se para todo k inteiro com $0 \leq k < n$, se $a_k > 0$ e $b_k > 0$ então $a_{k+1} > 0$ ou $b_{k+1} > 0$.*

Prova. Seja h a função correspondente ao diagrama de árvore (R, S). Podemos, por composição de funções, considerar $h = g^{-1} f$ onde:

- f é a função corresponte ao diagrama de árvore (R, Γ_n) e
- g é a função corresponte ao diagrama de árvore (S, Γ_n).

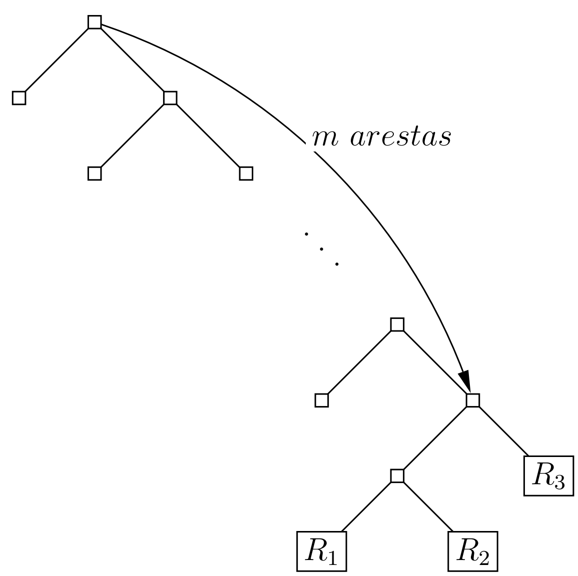


Figura 6.7: Diagrama de R

Assim, basta mostrarmos que no caso do diagrama (R, Γ_n) temos que $f = x_n^{-a_n} \cdots x_1^{-a_1} x_0^{-a_0}$ pois disto segue que $g = x_n^{-b_n} \cdots x_1^{-b_1} x_0^{-b_0}$ e portanto $h = g^{-1} f = x_0^{b_0} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} x_n^{-a_n} \cdots x_2^{-a_2} x_1^{-a_1} x_0^{-a_0}$.

Isto será provado por indução em $a = \sum_{i=0}^n a_i$. Se $a = 0$ então trivialmente $R = \Gamma_n$ e $f = 1$. Se $a > 0$, suponhamos que a hipótese é verdadeira para valores menores que a. Seja $m = min\{j : a_j > 0\}$. Como $a_j = 0$ para todo $j < m$, o diagrama de R é dado pela figura 6.7.

Seja $R^{'}$ a Γ-árvore que se obtém a partir de R com a forma dada pela figura 6.8:

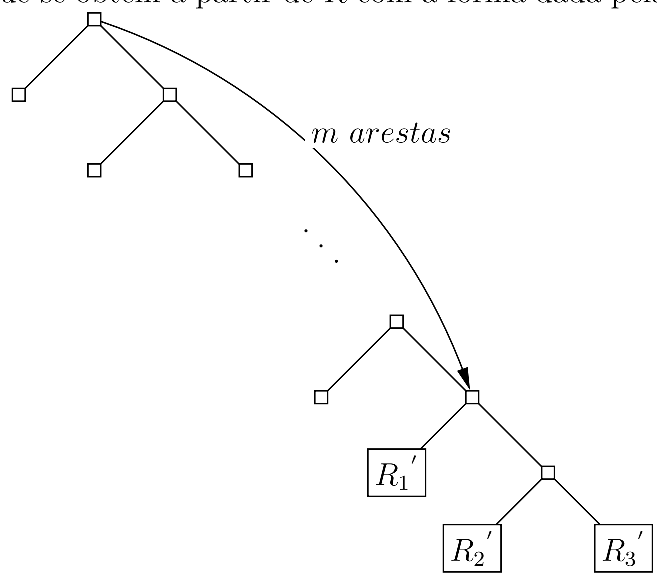


Figura 6.8: Diagrama de R'

onde $R_1^{'}, R_2^{'}$ e $R_3^{'}$ são isomorfas a R_1, R_2 e R_3.

É fácil ver que o diagrama $(R, R^{'})$ corresponde à função x_m^{-1}. Se $(a_0^{'}, \ldots, a_n^{'})$ é o expoente de $R^{'}$ então tem-se que $a_m^{'} = a_m - 1$ e $a_j^{'} = a_j$ para todos $j \neq m$.

Neste caso temos que $a^{'} = \sum_{i=0}^n a_i^{'} < a$ e podemos aplicar a hipótese de indução que nos dá que a função associada ao diagrama $(R^{'}, \Gamma_n)$ é ${x_n}^{-a_n^{'}} \cdots {x_1}^{-a_1^{'}} {x_0}^{-a_0^{'}}$. Por composição de funções, a função associada ao diagrama (R, Γ_n) é

$$f = {x_n}^{-a_n^{'}} \cdots {x_1}^{-a_1^{'}} {x_0}^{-a_0^{'}} x_m^{-1}.$$

Porém, pela minimalidade de m, segue que

$$\begin{aligned} f &= x_n^{-a_n^{'}} \cdots {x_{m+1}}^{-a_{m+1}^{'}} {x_m}^{-a_m^{'}} x_m^{-1} \\ &= x_n^{-a_n} \cdots x_{m+1}^{-a_{m+1}} x_m^{-a_m+1} x_m^{-1} \\ &= x_n^{-a_n} \cdots x_{m+1}^{-a_{m+1}} x_m^{-a_m} \\ &= x_n^{-a_n} \cdots x_1^{-a_1} x_0^{-a_0}. \end{aligned}$$

O segundo ítem segue facilmente eliminando os casos onde pode ocorrer uma redução e descrevendo-os em termos dos expoentes. □

Corolário 6.2.4. *O grupo de Richard Thompson é gerado por a e b.*

Segue como corolário-definição que todo elemento não-trivial de F pode ser expresso de maneira única como:

$$x_0^{b_0}x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_n^{b_n}x_n^{-a_n}\cdots x_2^{-a_2}x_1^{-a_1}x_0^{-a_0}$$

onde n, $a_0,\ldots,a_n$ e $b_0,\ldots,b_n$ são inteiros não-negativos tais que: [i] exatamente um dos a_n ou b_n é não nulo e [ii] se $a_k > 0$ e $b_k > 0$, $0 \leq k < n$ então $a_{k+1} > 0$ ou $b_{k+1} > 0$.

6.3 Isomorfismos

Agora que já temos uma forma normal para os elementos de F, vamos mostrar os isomorfismos entre F, F_1 e F_2.

Lema 6.3.1. *Existe um isomorfismo φ de F_2 para F_1 tal que $y_0 \stackrel{\varphi}{\mapsto} x_0$ e $y_1 \stackrel{\varphi}{\mapsto} x_1$.*

Prova. Inicialmente, note que

- $[x_0{x_1}^{-1}, {x_0}^{-1}x_1x_0] = x_0x_1^{-1}(x_0^{-1}x_1x_0)x_1x_0^{-1}(x_0^{-1}x_1^{-1}x_0) = x_0(x_1^{-1}x_2x_1)x_0^{-1}x_2^{-1} = (x_0x_3x_0^{-1})x_2^{-1} = x_2x_2^{-1} = 1$ e
- $[x_0{x_1}^{-1}, {x_0}^{-2}x_1{x_0}^2] = x_0x_1^{-1}(x_0^{-2}x_1x_0^2)x_1x_0^{-1}(x_0^{-2}x_1^{-1}x_0^2) = x_0(x_1^{-1}x_3x_1)x_0^{-1}x_3^{-1} = (x_0x_4x_0^{-1})x_3^{-1} = x_3x_3^{-1} = 1.$

Logo existe $\varphi : F_2 \to F_1$ que é sobrejetora a partir da relação $x_n = x_0^{-(n-1)}x_1x_0^{n-1}$.

Inversamente, queremos encontrar uma $\psi : F_1 \to F_2$ que seja a inversa de φ.

Para isso, definamos $y_0 = \tilde{a}$, $y_1 = \tilde{b}$ e $y_m = \tilde{a}^{-(m-1)}\tilde{b}\tilde{a}^{m-1}$, para $m \geq 2$.

Queremos mostrar que $y_k^{-1}y_ny_k = y_{n+1}$ para $n > k$ ie, $y_ny_k = y_ky_{n+1}$. Pela definição acima, isto equivale a mostrar que:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}^{-(n-1)}\tilde{b}\tilde{a}^{n-1}\tilde{a}^{-(k-1)}\tilde{b}\tilde{a}^{k-1} &= \tilde{a}^{-(k-1)}\tilde{b}\tilde{a}^{k-1}\tilde{a}^{-n}\tilde{b}\tilde{a}^{n} \\
\tilde{a}^{k-n}\tilde{b}\tilde{a}^{n-k}\tilde{b} &= \tilde{b}\tilde{a}^{k-n-1}\tilde{b}\tilde{a}^{n+1-k} \\
\tilde{a}(\tilde{a}^{k-n-1}\tilde{b}\tilde{a}^{n+1-k})\tilde{a}^{-1}\tilde{b} &= \tilde{b}y_{n-k+2} \\
\tilde{a}y_{n-k+2}\tilde{a}^{-1}\tilde{b} &= \tilde{b}y_{n-k+2} \\
y_{n-k+2}\tilde{a}^{-1}\tilde{b} &= \tilde{a}^{-1}\tilde{b}y_{n-k+2}
\end{aligned}$$

Assim, temos que provar que $[\tilde{a}^{-1}\tilde{b}, y_m] = 1$ para $m = n-k+2 \geq 3$. Isto segue por indução em m e das relações em F_1.

Seja $m = 3$. Então

$$[\tilde{a}^{-1}\tilde{b}, y_3] = \tilde{a}^{-1}(\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}\tilde{a})\tilde{a} = \tilde{a}^{-1}[\tilde{b}\tilde{a}^{-1}, \tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}]\tilde{a} = 1$$

pois se $[\tilde{a}\tilde{b}^{-1}, \tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}] = 1$ temos que $[\tilde{b}\tilde{a}^{-1}, \tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a}] = 1$.

Agora suponha que $[\tilde{a}^{-1}\tilde{b}, y_m] = 1$ para $m > 3$. Da mesma maneira, segue que $[\tilde{b}^{-1}\tilde{a}, y_m] = 1$ e temos que:

$$[\tilde{a}^{-1}\tilde{b}, y_{m+1}] = [\tilde{a}^{-1}\tilde{b}, \tilde{a}^{-1}y_m\tilde{a}] = \tilde{a}^{-1}(\tilde{b}\tilde{a}^{-1}y_m\tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a}\tilde{a}^{-1}y_m^{-1})\tilde{a} = \tilde{a}^{-1}[\tilde{b}\tilde{a}^{-1}, y_m]\tilde{a} = 1.$$

Portanto, φ e ψ estão bem-definidas, $\varphi\psi = 1_{F_1}$ e $\psi\varphi = 1_{F_2}$ e portanto F_1 e F_2 são isomorfos. □

Dada uma função $f \in F$, definimos o **suporte de** f, *supp*(f), como o fecho do complementar dos pontos fixos de f em $[0,1]$. Assim, provamos que:

Teorema 6.3.2. *Existe um isomorfismo de F_1 e F_2 em F de modo que os símbolos formais $y_0, y_1, x_0, x_1, x_2, \ldots$ são mapeados às funções correspondentes em F.*

Prova. Através dos diagramas de retângulo, é fácil verificar que o suporte de ab^{-1} é disjunto do suporte de $a^{-1}ba$ e $a^{-2}ba^2$ e, portanto:

$$[a^{-1}ba, ab^{-1}] = 1 \text{ e } [a^{-2}ba^2, ab^{-1}] = 1.$$

Portanto, existe uma função $\varphi : F_2 \to F$ com $y_0 \overset{\varphi}{\mapsto} a$ e $y_1 \overset{\varphi}{\mapsto} b$. Pelo corolário 6.2.4, ψ é sobrejetora.

Logo, aplicando 6.3.1, existe um homomorfismo induzido $\psi : F_1 \to F$ que é sobrejetor e leva $x_0 \overset{\psi}{\mapsto} a$, $x_1 \overset{\psi}{\mapsto} b$ e os símbolos x_n às funções x_n. Falta-nos provar que ψ é injetora.

Vamos mostrar que podemos estabeler a forma normal como vimos no teorema 6.2.3 para as funções de F. Seja $x \in F_1$, então $x = x_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ onde $x_{i_j} \in \{x_0, x_1, \ldots\}$, $\epsilon = \pm 1$ e $n \in \mathbb{Z}_+$. As relações em F_1 podem ser divididas em quatro casos:

r0 $x_n x_k = x_k x_{n+1}, n > k$;

r1 $x_k^{-1}x_n^{-1} = x_{n+1}^{-1}x_k^{-1}, n > k$;

r2 $x_n^{-1}x_k = x_k {x_{n+1}}^{-1}, n > k$;

r3 $x_k^{-1}x_n = x_{n+1}x_k^{-1}, n > k$.

Agora, vamos mostrar que, a partir das relações [r0],[r1],[r2] e [r3], podemos escrever $x = x_0^{b_0}x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}x_n^{-a_n}\cdots x_1^{-a_1}x_0^{-a_0}$ com $a_i, b_i \geq 0$, obtendo assim uma expressão para x na forma normal.

Basicamente, temos as seguintes possibilidades, para algum $j, 0 \leq j < n$:

- $\epsilon_j = \epsilon_{j+1} = 1$.

  Se $i_j < i_{j+1}$, então mantemos mas, se $i_j > i_{j+1}$, a relação [r0] fornece $x_{i_j}x_{i_{j+1}} = x_{i_{j+1}}x_{i_j+1}$ e colocamos na forma normal.

- $\epsilon_j = \epsilon_{j+1} = -1$.

  Se $i_j > i_{j+1}$, então mantemos mas, se $i_j < i_{j+1}$, a relação [r1] fornece $x_{i_j}^{-1} x_{i_{j+1}}^{-1} = x_{i_{j+1}+1}^{-1} x_{i_j}^{-1}$ e colocamos na forma normal.

- $\epsilon_j = -1$ e $\epsilon_{j+1} = 1$.

  Se $i_j < i_{j+1}$ então a relação [r3] fornece $x_{i_j}^{-1} x_{i_{j+1}} = x_{i_{j+1}+1} x_{i_j}^{-1}$.

  Se $i_j > i_{j+1}$ então a relação [r2] fornece $x_{i_j}^{-1} x_{i_{j+1}} = x_{i_{j+1}} x_{i_j+1}^{-1}$ e colocamos, em ambos os casos, na forma normal.

Ainda, se x_k ocorre em ambas as partes, positiva e negativa, mas x_{k+1} não aparece, pela relação $x_k x_{n+1} x_k^{-1} = x_n, n > k$, é possível simplificar x deletando uma ocorrência de x_k em ambas as partes, surgindo x_n no lugar do x_{n+1} que foi eliminado juntamente com x_k. Portanto, temos que cada elemento não trivial de F_1 pode ser colocado na forma normal como no corolário-definição acima. Segue que cada elemento não-trivial de F_1 é levado a um elemento não-trivial de F e então ψ é injetora. $\square$

6.4 Propriedades Algébricas de F

Teorema 6.4.1. *Se $\varphi : F \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ é definida por $\varphi(f) = (\log_2 f'(0), \log_2 f'(1))$, então φ é um epimorfismo e ker$(\varphi) = [F, F]$.*

Prova. Observe que $\varphi(x_0) = (-1, 1)$ e $\varphi(x_1) = (0, 1)$ donde temos que $\langle \varphi(x_0), \varphi(x_1) \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Portanto, φ é sobrejetora. É fato que se um grupo G é gerado por dois elementos e existe uma $f : G \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sobrejetora então $\ker f = [G, G]$. Pelo corolário (1.1), F é gerado por a e b e segue que $\ker \varphi = [F, F]$. $\square$

A abelianização de F é $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle x_0, x_1 \mid x_0 x_1 = x_1 x_0 \rangle$. Além disso, $f \in [F, F]$ se e, somente se, f é trivial nas vizinhanças de 0 e de 1.

Seja I um intervalo diádico. Há um subgrupo dentro de F que se destaca ao qual denotamos $PL_2(I) = \{f \in F \mid \mathrm{supp}(f) \subseteq I\} \leq F$, ie, o subgrupo de todas as funções com suporte em I.

Proposição 6.4.2. *$PL_2(I) \cong F$.*

Prova. Claramente, I é uma união finita de intervalos diádicos padrões. Escolhendo arbitrariamente uma partição diádica padrão de $[0, 1]$, podemos construir um homeomorfismo linear por pedaços $\gamma : [0, 1] \to I$ tal que

- as derivadas em cada intervalo diádico padrão é potência de 2 e

- todos os pontos de não-diferenciabilidade são números racionais diádicos.

O isomorfismo de F em $PL_2(I)$ é dado por $f \mapsto \gamma^{-1} f \gamma$. Como γ é linear por pedaços, temos que f é uma função em $[0,1]$ cujos pontos de não-diferenciabilidade são números racionais diádicos se e somente se $\gamma^{-1} f \gamma$ é uma função em I cujos pontos de não-diferenciabilidade são números racionais diádicos. $\square$

Note também que, pelo teorema 6.4.1, $PL_2(I) \subseteq [F,F]$.

Teorema 6.4.3. *Qualquer subgrupo não trivial de F que é normalizado pelo comutador $[F,F]$ contém $[F,F]$.*

Prova. Seja N um subgrupo de F normalizado por $[F,F]$. Tome um elemento $\eta \in N \setminus \{1\}$. Como $\eta \neq 1_F$ existe um intervalo diádico padrão $I \subset (0,1)$ suficientemente pequeno tal que $\eta(I) \cap I = \emptyset$.

Tome uma função $f \in PL_2(I)$ qualquer. Então valem as seguintes propriedades:

- $[\eta, f] \in N$.

  De fato, $[\eta, f] = \eta(f\eta^{-1}f^{-1})$ e, por hipótese, $(f\eta^{-1}f^{-1}) \in N$.

- $[\eta, f]$ tem suporte em $\eta(I) \cup I$.

  Seja $t \notin \eta(I) \cup I$. Temos que mostrar que $[\eta, f](t) = t$. De fato, $[\eta, f](t) = \eta f \eta^{-1}(f^{-1}(t))$. Como $t \notin I$ então $f^{-1}(t) = t$. Além disso, como $\eta(I) \cap I = \emptyset$ temos que $n^{-1}(t) \notin I$, caso contrário $\eta(I) \cap I \neq \emptyset$. Disto temos que $f(\eta^{-1}(t)) = \eta^{-1}(t)$ e, portanto, $[\eta, f](t) = (\eta\eta^{-1})(t) = (t)$.

- $[\eta, f]_{|_I} = f_{|_I}$.

  Tome $t \in I$. Como $f^{-1}(t) = s \in I$ e $\eta(I) \cap I = \emptyset$ temos que $\eta^{-1}(s) \notin I$, caso contrário $s \in \eta(I) \cap I$. Portanto $f(\eta^{-1}(s)) = \eta^{-1}(s)$ donde segue que $[\eta, f](t) = \eta(\eta^{-1}(s)) = s = f^{-1}(t)$.

Destas três propriedades, temos que

$$[f,g] = [[\eta, f], g] \in N \,, \forall\ f, g \in PL_2(I)$$

ie, N contém todos os comutadores $[f,g], \forall\ f,g \in PL_2(I)$. Queremos ainda mais: que N contenha qualquer comutador com suporte em $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], [\frac{1}{8}, \frac{7}{8}], \ldots, [\frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}]$.

Tome $f, g \in PL_2([\frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}])$. Queremos que $[f,g] \in N$.

Existem funções $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ tais que $\gamma_n(I) = [\frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}]$.

Defina $f_n = \gamma_n^{-1} f \gamma_n$ e $g_n = \gamma_n^{-1} g \gamma_n$.

Note que *supp*$(f_n) \subseteq I$. Tome $t \notin I$. Como $\gamma_n t \notin [\frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}]$, temos que $f|_{\gamma_n t} = \gamma_n t$ e assim $f_n t = \gamma_n^{-1} \gamma_n t = t$. Analogamente, *supp*$(g_n) \subseteq I$. Logo, N contém $[f_n, g_n]$.

Novamente, como N é normalizado por $[F,F]$ e $f, g \in PL_2(I) \subset [F,F]$, temos que $\gamma_n [f_n, g_n] \gamma_n^{-1} = [\gamma_n f_n \gamma_n^{-1}, \gamma_n g_n \gamma_n^{-1}] = [f,g] \in N$.

Isto já é suficiente pois $f \in [F,F]$ se e, somente se, f é trivial nas vizinhanças de 0 e de 1 e N contém todos os comutadores em $PL_2([\frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}])$ para todo natural n. $\square$

A partir deste teorema, obviamente obtemos dois resultados:

Corolário 6.4.4.

i *Qualquer quociente próprio de F é abeliano.*

ii *O subgrupo dos comutadores $[F, F]$ é simples.*

Lema 6.4.5. *Seja G um grupo livre de posto maior ou igual a 1. Sejam N_1, N_2 subgrupos normais não-triviais de G. Então $N_1 \cap N_2$ é não-trivial.*

Prova. Como N_1 e N_2 são normais em G temos que $[N_1, N_2] \subseteq N_1 \cup N_2$. Assim, é suficiente mostrar que $[N_1, N_2] \neq 1$. De fato, se $[N_1, N_2] = 1$ então temos que o centro de G é não-trivial contradizendo o fato de ser livre. Logo, $1 \neq [N_1, N_2] \subseteq N_1 \cap N_2$. $\square$

Teorema 6.4.6. *O grupo F não contém subgrupo livre de posto 2.*

Prova. Tome $f, g \in F$. Temos que mostrar que f e g não geram um subgrupo livre.

- (Caso reduzido) Suponha que f e g não tenham ponto fixo em comum em $(0, 1)$. Note que, neste caso, para qualquer $t \in (0, 1)$ existe um $h \in \langle f, g\rangle$ tal que $h(t)$ pode estar arbitrariamente próximo de 0. Senão, o ínfimo do conjunto $\{h(t)\}_{h\in\langle f,g\rangle}$ seria um ponto fixo comum de f e g. Segue deste fato que existe um $h \in \langle f, g\rangle$ tal que $[f, g]^h$ tem suporte disjunto do suporte de $[f, g]$. De fato, tome $s \in supp[f, g]$. Existe $h \in \langle f, g\rangle$ tal que $h(s) \notin supp[f, g]$. Logo existe h tal que $[f, g](h(s)) = h(s)$ donde temos que $s \notin supp[f, g]^h$. Fazendo isso para s=$sup\{t : t \in supp[f, g]\}$, pelo fato de h ser crescente, temos a garantia de que todo o suporte de $[f, g]$ se torna disjunto do suporte de $[f, g]^h$. Logo, $[f, g]$ e $[f, g]^h$ comutam e portanto o subgrupo gerado por f e g não é livre.

- (Caso geral) Suponha que f e g tenham pontos fixos em comum em $(0, 1)$. Portanto, o suporte de $\langle f, g\rangle$ é uma união disjunta finita de intervalos diádicos I_1,. . .,I_n. Se $h \in \langle f, g\rangle$, restringindo seu domínio a cada um destes intervalos, temos que $h|_{I_j} \in PL_2(I_j)$, para cada $j = 1, \ldots, n$. Isto fornece um monomorfismo:
$$\langle f, g\rangle \hookrightarrow PL_2(I_1) \times \cdots \times PL_2(I_n)$$
Como separamos os intervalos dos pontos fixos em comum de f e g, garantimos que f e g não tem pontos fixos em comum em cada I_j e, portanto, pelo argumento acima, a imagem de $\langle f, g\rangle$ em cada $PL_2(I_j)$ não é livre. Segue disto que, se $\mathcal{F}(f, g)$ é o grupo livre com base $\{f, g\}$, o kernel de cada composição $\mathcal{F}(f, g) \to \langle f, g\rangle \to PL_2(I_j)$ é não trivial. Portanto, o kernel da projeção $\mathcal{F}(f, g) \to \langle f, g\rangle$ é a interseção finita de subgrupos não-triviais e normais de $\mathcal{F}(f, g)$ que, pelo lema 6.4.5, é não trivial.

$\square$

6.5 O grupo F via extensão-HNN

Teorema 6.5.1. *O grupo F é uma extensão-HNN com grupo base G_1, onde $G_i = \langle x_i, x_{i+1}, \ldots \rangle$, letra estável x_0 e subgrupos associados G_1 e G_2.*

Prova. Vamos mostrar que $F_1 \cong G_1$ e, pelo teorema 6.3.2, temos que $F \cong G_1$.

Seja o homomorfismo

$$\theta : \left\langle x_0, x_1, \ldots | x_k^{-1} x_n x_k = x_{n+1},\, n > k \right\rangle \to \langle x_1, x_2, \ldots \rangle,$$

definido por $\theta(x_i) = x_{i+1}$, para todo $i \geq 0$.

Segue θ está bem definida pois preserva as relações, ie:

$$\theta(x_k^{-1} x_n x_k) = x_{k+1}^{-1} x_{n+1} x_{k+1} = x_{n+2} = \theta(x_{n+1}), \text{ para } n > k \geq 0.$$

Além disso, θ é sobrejetora por definição e injetora pois

$$\theta(x_0^{b_0} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} x_n^{-a_n} \cdots x_1^{-a_1} x_0^{-a_0}) = x_1^{b_0} x_2^{b_1} \cdots x_{n+1}^{b_n} x_{n+1}^{-a_n} \cdots x_2^{-a_1} x_1^{-a_0}$$

também está na forma normal.

Logo, θ é um isomorfismo e $G_1 = \left\langle x_1, x_2, \ldots | x_k^{-1} x_n x_k = x_{n+1},\, n > k \geq 1 \right\rangle$.

Considere o grupo G definido como a extensão HNN com base G_1, letra estável x_0 e subgrupos associados G_1 e G_2 (isomorfos a F como vimos acima), com isomorfismo entre G_1 e G_2 dado por $\varphi(x_i) = x_{i+1}$, $i \geq 1$. Logo:

$$\begin{aligned} G &= \left\langle x_0; x_1, \ldots | \{x_0^{-1} x_i x_0 = \varphi(x_i), i \geq 1\} \cup \{x_k^{-1} x_n x_k = x_{n+1},\, n > k \geq 1\} \right\rangle \\ &= \left\langle x_0; x_1, \ldots | \{x_0^{-1} x_i x_0 = x_{i+1}, i \geq 1\} \cup \{x_k^{-1} x_n x_k = x_{n+1},\, n > k \geq 1\} \right\rangle \\ &= \left\langle x_0; x_1, \ldots | x_k^{-1} x_n x_k = x_{n+1},\, n > k \geq 0 \right\rangle \\ &= F_1 \end{aligned}$$

e, novamente, pelo teorema 6.3.2, segue que G é isomorfo a F. □

6.6 Outras propriedades importantes

F ainda possui outras propriedades homológicas interessantes. Foi provado por Geoghegan-Brown em [04] que F tem tipo homotópico F_∞, ie, tem tipo homológico FP_∞ e é finitamente apresentável. Isto nos permite aplicar o critério de Brown para F.

Capítulo 7

O Cálculo de $\Sigma^m(F)$

Finalmente, chegamos à seção onde calculamos o invariante homotópico do grupo de Richard Thompson para qualquer dimensão m. Este cálculo esta dividido basicamente em duas partes.

Uma primeira parte referente ao cálculo do Σ^1 é corolário de uma teoria desenvolvida para calcular o $\Sigma^1(G, \mathbb{Z})$ para grupos mais gerais, sendo que F satisfaz tais condições. Para isso, temos como referência o artigo [03].

A segunda parte referente ao cálculo do invariante para dimensões $m \geq 2$ é feita diretamente através das propriedades de F e se utiliza de técnicas diversificadas tais como o cálculo do grupo fundamental de um determinado subcomplexo de Cayley associado a uma apresentação de F, ferramentas da álgebra homológica como o funtor Tor e as sequências espectrais, ação de extensões HNN sobre árvores, entre outras. Para esta parte, a referência é o preprint [06].

7.1 Cálculos para $\Sigma^1(F, \mathbb{Z})$

Como dissemos acima, estes próximos resultados foram estudados no artigo [03]. Vale a pena ressaltar a generalidade em que são obtidos os resultados neste artigo.

Podemos dizer que esta generalidade, tendo em vista a aplicação que faremos nesta dissertação, aparece tanto na abordagem do invariante Σ^1 como nos grupos para os quais se faz o cálculo do invariante. De fato, é feito o cálculo de $\Sigma^1(G, \mathbb{Z})$ para qualquer subgrupo G finitamente gerado de homeomorfismos lineares por pedaços do intervalo $[0, 1]$ que seja irredutível e tenha dois elementos independentes. Em particular, veremos que F satisfaz estas condições e, por isso, podemos aplicar este resultado para F.

A respeito do invariante, o contexto apresentado é de um grupo G finitamente gerado e um G-grupo A onde G' age por automorfismos internos, calculando o invariante do grupo A e denotando-o por Σ_A, sendo a definição do invariante também um pouco diferente da apresentada anteriormente:

$$\Sigma_A = \{[\chi] \in S(G)|$$

A é finitamente gerado sobre um submonóide finitamente gerado de $G_\chi\}$.

Porém, esta abordagem é uma generalização do seguinte contexto: G age sobre G' naturalmente por conjugação, ie, $[x,y]^g = [x^g, y^g]$ caracteriza uma ação de G sobre G'. Neste caso, pode ser demonstrado que $\Sigma^1(G,\mathbb{Z}) = \Sigma_{G'}$ (ver [02]) e temos que:

$$\Sigma_{G'} = \{[\chi] \in S(G)|$$

G' é finitamente gerado sobre um submonóide finitamente gerado de $G_\chi\}$.

`Notação:` Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{R}$ são subconjuntos de G e G', então $\mathcal{R}^{\mathcal{X}}$ denota o conjunto dos elementos $a^x = x^{-1}ax$ com $a \in \mathcal{R}$ e $x \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X}^{-1}$ denota o conjunto dos elementos x^{-1} com $x \in \mathcal{X}$ e $\mathcal{X}^{\pm}$ denota o conjunto $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$. Além disso, para um subconjunto $\mathcal{B}$ de um grupo B, $\langle \mathcal{B} \rangle$ e $\langle \mathcal{B}]$ denotam respectivamente o subgrupo e o submonóide de B gerado por $\mathcal{B}$.

7.1.1 Definição equacional de $\Sigma^1(G,\mathbb{Z})$

Seja G um grupo finitamente gerado. Seja $\mathcal{X}$ um subconjunto do grupo G e $w = x_k x_{k-1} \cdots x_2 x_1$ uma palavra no alfabeto $\mathcal{X}^{\pm 1} = \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$ e vamos usar o mesmo símbolo para sua representação no grupo G. O conjunto dos segmentos finais de w

$$\{x_1, x_2x_1, \ldots, x_k \cdots x_2x_1\}$$

será chamado **traço** de w. Se $\chi : G \to \mathbb{R}$ um homomorfismo, então o conjunto de números reais

$$\{\chi(x_1), \chi(x_2x_1), \ldots, \chi(x_k \cdots x_2x_1)\}$$

é chamado de **χ-track** de w.

Proposição 7.1.1. *Sejam $\mathcal{X}$ conjunto finito de geradores de G e $\mathcal{R} \subseteq G'$ conjunto finito tal que, para quaisquer $x, y \in \mathcal{X}^{\pm 1}$, $[x,y] \in \langle \mathcal{R} \rangle$. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

i $[\chi] \in \Sigma^1(G,\mathbb{Z})$.

ii *cada elemento $a \in G'$ tem uma expressão*

$$a = r_1^{w_1} \cdots r_f^{w_f}$$

com $r_1, \cdots, r_f \in \langle \mathcal{R} \rangle$, e onde cada w_i é uma $\mathcal{X}^{\pm 1}$-palavra com χ-track positivo.

iii *para cada $r \in \mathcal{R}$ e $x \in \mathcal{X}$, $a = r^x$ tem uma expressão como no item [ii].*

iv *o mesmo que em [iii], porém com χ-track não-negativo para os w_i.*

`Observação` Vamos fazer uso da seguinte equivalência dentro das condições do enunciado:

$$G' = \langle \mathcal{R}^G \rangle \Leftrightarrow \text{ para quaisquer } x, y \in \mathcal{X}^{\pm 1}, [x, y] \in \langle \mathcal{R} \rangle.$$

Prova. $[i] \implies [ii]$

Tome $[\chi] \in \Sigma^1(G, \mathbb{Z}) = \Sigma_{G'}$. Então, G' é finitamente gerado por $\mathcal{C} \subset G'$ sobre um submonóide finitamente gerado $\mathcal{D} \subseteq G_\chi$.

Desta maneira, qualquer $b \in G'$ se escreve

$$b = s_1^{v_1} \cdots s_k^{v_k} \tag{7.1}$$

onde $s_i \in \mathcal{C}$ e cada é v_i uma $\mathcal{D}$-palavra.

Agora, observe que:

- cada $s_i \in \mathcal{C} \subset G'$ se escreve

$$s_i = r_{1,i}^{v_{1,i}} \cdots r_{f,i}^{v_{f,i}} \tag{7.2}$$

  onde $r_{j,i} \in \mathcal{R}$ e cada $v_{j,i}$ é uma $\mathcal{X}^{\pm 1}$-palavra.

- cada $v_i \in \mathcal{D} \subseteq G_\chi$ se escreve

$$v_i = w(v_i) \tag{7.3}$$

  onde $w(v_i)$ é uma $\mathcal{X}^{\pm 1}$-palavra.

Note que como $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são finitos, a lista com todas as $\mathcal{X}^{\pm 1}$-palavras com as quais obtemos cada expressão 7.2 e 7.3 para os elementos de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é finita. Portanto, existe um inteiro α que é a cota inferior para os χ-tracks de todos os $v_{j,i}$ e todas as palavras $w(v_i)$ possíveis.

Assim, substituindo as expressões 7.2 e 7.3 em 7.1 obtemos que cada $b \in G'$ se escreve:

$$b = {r'_1}^{w_1} \cdots {r'_l}^{w_l} \tag{7.4}$$

onde $r'_i \in \mathcal{R}$ e cada w_i é uma $\mathcal{X}^{\pm 1}$-palavra com χ-track limitado inferiormente por α.

Agora, escolha um $x \in \mathcal{X}^{\pm 1}$ com $\chi(x) > 0$ e um $\beta \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha + \beta\chi(x) > 0$. Seja $y = x^{-\beta}$. Seja $a \in G'$. Como $a^y \in G'$, ele pode ser escrito como em 7.4, ie, $a^y = {r'_1}^{w_1} \cdots {r'_l}^{w_l}$. Portanto, $a = (a^y)^{x^\beta} = {r'_1}^{w_1 x^\beta} \cdots {r'_l}^{w_l x^\beta}$ sendo que $\chi(w_i x^\beta) = \chi(w_i) + \beta\chi(x) \geq \alpha + \beta\chi(x) > 0$.

Claramente, $[ii] \implies [iii] \implies [iv]$.

Vamos mostrar que $[iv] \implies [i]$. Para cada $r \in \mathcal{R}$ e cada $x \in \mathcal{X}^{\pm 1}$ temos que

$$r^x = {r_1}^{w_1} \cdots {r_f}^{w_f} \tag{7.5}$$

com χ-track não-negativo para cada $\mathcal{X}^{\pm 1}$-palavra w_i. Como $\mathcal{R}$ e $\mathcal{X}$ são conjunto finitos, obtemos um sistema com um número finito de equações do tipo 7.5 ao esgotarmos os conjuntos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{X}$.

Queremos mostrar que podemos gerar G' por um conjunto finito sobre algum submonóide de G_χ. Para isso, defina $\mathcal{B}$ como a união do todos os traços de cada w_i que aparece no sistema acima. Claramente, $\mathcal{B}$ é finito e como o χ-track dos w_i é não-negativo podemos gerar a partir de $\mathcal{B}$ um submonóide de G_χ. Desta maneira, qualquer elemento $u \in \langle \mathcal{B}]$ é uma $\mathcal{X}^{\pm 1}$-palavra com χ-track contido em $\langle \mathcal{B}]$.

Considere $G_0 = \left\langle \mathcal{R}^{\langle \mathcal{B}]} \right\rangle$. Se ${G_0}^{\mathcal{X}^{\pm 1}} \subseteq G_0$ então teremos o seguinte:

Como $\mathcal{R} \subseteq G_0$ temos que $\mathcal{R}^{\mathcal{X}^{\pm 1}} \subseteq {G_0}^{\mathcal{X}^{\pm 1}} \subseteq G_0$. Logo, $\mathcal{R}^{\mathcal{X}^{\pm 1}} \cdots \mathcal{R}^{\mathcal{X}^{\pm 1}} \subseteq G_0$ e assim $\left\langle \mathcal{R}^{\langle \mathcal{X} \rangle} \right\rangle \subseteq G_0$. Finalmente, $G' = \left\langle \mathcal{R}^{\langle \mathcal{X} \rangle} \right\rangle \subseteq G_0$ donde obtemos que $G' = G_0$.

Assim, falta apenas mostrar que ${G_0}^{\mathcal{X}^{\pm 1}} \subseteq G_0$; de fato, tome $r \in \mathcal{R}$, $u \in \langle \mathcal{B}]$ e $x \in \mathcal{X}^{\pm 1}$; queremos que $(r^u)^x \in G_0$. Note que para quaisquer $\mathcal{X}^{\pm 1}$-palavras $\tilde{u}, \tilde{v}$ e quaisquer $x, y \in \mathcal{X}^{\pm 1}$:

$$r^{\tilde{u}yx\tilde{v}} = r^{\tilde{u}(xy[x,y]^{-1})\tilde{v}}.$$

Mas, por hipótese, $[x, y] = r' \in \langle \mathcal{R} \rangle$ e assim

$$r^{\tilde{u}yx\tilde{v}} = r^{\tilde{u}(xy[x,y]^{-1})\tilde{v}} = r'^{-\tilde{v}} r^{\tilde{u}xy\tilde{v}} r'^{\tilde{v}}.$$

Deste modo, deslocamos a `letra` x para a esquerda até que tenhamos que $(r^u)^x \in \langle (r^x)^{u'} \rangle_{u' \in \langle \mathcal{B}]}$ e $r^x \in G_0$ pela hipótese [iv]. Logo, $(r^u)^x = (r^x)^{u'} \in {G_0}^{\langle \mathcal{B}]} \subseteq G_0$. $\square$

Teorema 7.1.2. *Sejam $\mathcal{X}$ conjunto finito de geradores de G e $\mathcal{R} \subseteq G'$ conjunto finito tal que, para quaisquer $x, y \in \mathcal{X}^{\pm 1}$, $[x, y] \in \langle \mathcal{R} \rangle$. Então $[\chi] \in \Sigma^1(G, \mathbb{Z})$ se e somente se cada $r \in \mathcal{R}$ pode ser expresso*

$$r = {r_1}^{w_1} \cdots {r_f}^{w_f} \tag{7.6}$$

onde $r_1, \ldots, r_f \in \langle \mathcal{R} \rangle$ e cada w_i é uma $\mathcal{X}^{\pm 1}$-palavra com χ-track não-negativo e $\chi(w_i) > 0$.

Prova. Pela proposição 7.1.1 acima, a condição [ii] implica diretamente uma direção deste teorema. Vamos então mostrar que esta condição acima implica na condição [iv] da proposição 7.1.1 acima.

Seja $r \in \mathcal{R}$. Então r pode ser expresso como descrito em 7.6. Mais do que isso, podemos assumir que cada r se expressa

$$r = {r_1}^{u_1} \cdots {r_f}^{u_f} \tag{7.7}$$

onde $\chi(u_i) + \chi(x) > 0$ para cada $\mathcal{X}^{\pm 1}$-palavra u_i e para qualquer $x \in \mathcal{X}^{\pm 1}$.De fato, pela finitude de $\mathcal{R}$ temos um sistema finito de equações do tipo 7.6.Ao substituirmos novamente o sistema nele mesmo, ie, se temos $r_i = {r_{i,1}}^{w_{i,1}} \cdots {r_{i,f}}^{w_{i,f}}$ então $r = ({r_{i,1}}^{w_{i,1}})^{w_1} \cdots ({r_{i,f}}^{w_{i,f}})^{w_f} = {r_{i,1}}^{w_{i,1}w_1} \cdots {r_{i,f}}^{w_{i,f}w_f}$. Neste caso, note que cada expoente u é um produto vw de dois expoentes do sistema original. Este processo, sendo iterado tantas vezes quanto precisarmos, no permite tomar o mínimo dos $\chi(u_i)$ sobre todos os expoentes no sistema tão grande quanto quisermos e assim obtermos $\chi(u_i) + \chi(x) > 0$.

Agora, escolha um $x \in \mathcal{X}^{\pm 1}$ e um $r \in \mathcal{R}$ e reescreva cada expoente em 7.7 como $xx^{-1}u_i$. Note que para $\mathcal{X}^{\pm 1}$-palavras v e w e para $x, y \in \mathcal{X}^{\pm 1}$ temos que:

$$r^{wx^{-1}yv} = r^{wy[x,y]^{-1}x^{-1}v} = ((r')^{x^{-1}v})^{-1} r^{wyx^{-1}v} (r')^{x^{-1}v}$$

onde $[x, y]^{-1} = r' \in \langle \mathcal{R} \rangle$.

Usando esta igualdade podemos empurrar x^{-1} para a direita obtendo expoentes da forma xu_ix^{-1} para algum u_i na forma original ou da forma ux^{-1} onde u é um segmento terminal de algum dos u_i. Logo, ao aplicarmos x em r, obtemos uma expressão para r^x como na condição [iv]. $\square$

7.1.2 Grupos de homeomorfismos lineares por partes do intervalo $[0, 1]$

Seja $\mathcal{G}$ o grupo de todos os homeomorfismos lineares por partes do intervalo $[0, 1]$ que preservam orientação, ie, fixam 0 e 1. Seja G um subgrupo de $\mathcal{G}$ finitamente gerado. Vamos assumir, sem perder generalidade, que G é *irredutível*, ie, G não tem pontos fixos no intervalo aberto $(0, 1)$.

Para qualquer subgrupo G de $\mathcal{G}$, existem dois homomorfismos λ e ρ ao grupo multiplicativo $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ dos números reais positivos dados pelas derivadas à esquerda e à direita dos pontos finais de $[0, 1]$:

$$\lambda : G \to \mathbb{R}^* \ , \ \lambda(f) = \frac{df}{dt}(0)$$

$$\rho : G \to \mathbb{R}^* \ , \ \rho(f) = \frac{df}{dt}(1)$$

Dizemos que λ e ρ são **independentes** se $\lambda(G) = \lambda(Ker\rho)$ e $\rho(G) = \rho(Ker\lambda)$.

Lema 7.1.3. *Se G é irredutível então para quaisquer $0 < a < b < 1$ existe $f \in G$ tal que $0 < f(b) < a < 1$.*

Prova. Suponha que não exista tal f, ie, para qualquer $f \in G$ temos $f(b) \geq a$. Tome $c = inf\{f(b) : f \in G\}$. Segue, pela continuidade dos elementos de G, que c é ponto fixo de G. Se $g \in G$ então $g(c) = g\{inf\{f(b) : f \in G\}\} = inf\{gf(b) : f \in G\} = c$ pois $\{gf\}_{f \in G} = G$. Isto contradiz o fato de G ser irredutível. $\square$

Para anunciarmos o próximo teorema, denotamos $fix(f)$ o conjunto dos pontos fixos de f e definimos $\Sigma^1(G,\mathbb{Z})^c = S(G) \setminus \Sigma^1(G,\mathbb{Z})$.

Teorema 7.1.4. *Se G é finitamente gerado e irredutível e λ e ρ são independentes então $\Sigma^1(G,\mathbb{Z})^c = \{[-\log\lambda], [-\log\rho]\}$.*

Prova. Primeiramente, vamos mostrar que $\{[-\log\lambda], [-\log\rho]\}^c \in \Sigma^1(G,\mathbb{Z})$.

Suponha que $[\chi] \notin \{[-\log\lambda], [-\log\rho]\}$.

Como λ e ρ são independentes, temos que $G = \ker\rho \cdot \ker\lambda$. Note que $\ker\rho \triangleleft G$ e $\ker\lambda \triangleleft G$ e portanto $\ker\rho \cdot \ker\lambda \leq G$. Agora, seja $g \in G$. Existe um $g_1 \in \ker\lambda$ tal que $\rho(g) = \rho(g_1)$. Disto segue que $gg_1^{-1} \in Ker\rho$, ie, $gg_1^{-1} = g_1^{'}$, onde $g_1^{'} \in \ker\rho$ donde temos que $g = g_1^{'}g_1 \in \ker\rho \cdot \ker\lambda$.

Portanto, χ não se anula simultaneamente em $\ker\rho$ e $\ker\lambda$.

Vamos assumir que $\chi(\ker\rho) \neq 0$. Logo,

$$\text{existe } h \in \ker\rho \text{ tal que } \chi(h) > 0.$$

Se $\chi(\tilde{h}) < 0$ então tome $h = \tilde{h}^{-1}$ e daí $\chi(h) > 0$. Como $\rho(h) = 1$ temos que existe $b < 1$ tal que $supp(h) \subseteq [0,b]$. Isto se dá pois $\rho(h) = 1$ implica que $h^{'}(1) = 1$ e, portanto, existe uma vizinhança $[\epsilon, 1]$ de 1, $\epsilon > 0$, tal que $[\epsilon, 1] \subseteq fix(h)$. Logo,

$$supp(h) \subseteq [0,b] \text{ com } b \in (0,1).$$

Além disso, $[\chi] \neq [-\log\lambda]$ implica que

$$\text{existe } g \in G \text{ com } \lambda(g) < 1 \text{ e } \chi(g) < 0.$$

Para ver isto, note que $[\chi_1] \neq [\chi_2]$ se e somente para qualquer $r \in \mathbb{R}^+$ existe $g \in G$ tal que $\chi_1(g) \neq r(\chi_2(g))$. Como $r > 0$, isto acontece se e somente se existe $g \in G$ tal que $\chi_1(g)$ e $\chi_2(g)$ tem sinais distintos. Neste caso, $[\chi] \neq [-\log\lambda]$ e então existe $g \in G$ tal que $\chi(g)$ e $-r(\log\lambda(g))$ tem sinais distintos. Neste caso, podemos supor que $\chi(g) < 0$; caso contrário, trocamos g por g^{-1} e obtemos $\chi(g^{-1}) < 0$. Daí, como $-r < 0$, temos que ter $\log\lambda(g) < 0$ que equivale a termos $\lambda(g) < 1$.

Segue que $g(x) < x$ para todo $x \in [0,a]$ para algum $a \in (0,1)$. Pelo lema 7.1.3, podemos assumir que

$$b < a$$

conjugando h pela f que o lema fornece se for necessário. Com efeito, supondo que $0 < a < b < 1$, seja $\tilde{h} = fhf^{-1}$, com $f(b) < a$ onde f é dada pelo lema 7.1.3. Então, $\tilde{h}$ leva $f[b,1]$ em $f[b,1]$: $\tilde{h}|_{f[b,1]} = fhf^{-1}|_{f[b,1]} = fh|_{[b,1]} = f|_{[b,1]}$ pois $h|[b,1] = [b,1]$.

Seja $\mathcal{X}$ um conjunto finito que gera G e que inclua g e h. Seja $\mathcal{R} = [\mathcal{X}^{\pm 1}, \mathcal{X}^{\pm 1}]$. Como $G^{'} \subseteq \ker\rho \cap \ker\lambda$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $supp(r) \subseteq [\epsilon, 1-\epsilon]$ para todo $r \in \mathcal{R}$. Escolha k suficientemente grande tal que $g^k(b) \leq \epsilon$. Note que

$$w = g^k h g^{-k}$$

é uma $\mathcal{X}^{\pm 1}$-palavra com χ-traço positivo pois $\chi(g^{-k}) = -\chi(g^k) = (-k)\chi(g) > 0$, $\chi(hg^{-k}) = \chi(h) + \chi(g^{-k}) > 0$ e $\chi(g^k h g^{-k}) = k(\chi(g)) + \chi(h) + (-k)\chi(g) = \chi(h) > 0$.

Mais ainda, $supp(w) \subseteq [0, \epsilon]$. De fato, $g^k(b) \leq \epsilon$ implica $b \leq g^{-k}(\epsilon)$ pois g é crescente. Agora, $hg^{-k}(\epsilon) = g^{-k}(\epsilon)$ implica $g^k h g^{-k}(\epsilon) = g^k g^{-k}(\epsilon) = \epsilon$ e então $\epsilon \in fix(w)$. Também, se $\epsilon \leq t$ então $b \leq g^{-k}t$ e, da mesma forma, temos que $t \in fix(w)$. Segue que $[\epsilon, 1] \subseteq fix(w)$ donde temos que $supp(w) \subseteq [0, \epsilon]$.

Finalmente, disto temos que $r = r^w$ para qualquer $r \in \mathcal{R}$. Para verificar isto, analisamos o comportamento nos dois intervalos $[0, \epsilon]$ e $[\epsilon, 1]$.

Como $supp(r) \subseteq [\epsilon, 1-\epsilon]$ temos que $r|_{[0,\epsilon] \cup [1-\epsilon,1]} = Id_{[0,\epsilon] \cup [1-\epsilon,1]}$ e daí $r|_{[\epsilon,1]} \subseteq [\epsilon, 1]$. Como $supp(w) \subseteq [0, \epsilon]$ temos que $w|_{[\epsilon,1]} = Id_{[\epsilon,1]}$ e daí $w|_{[0,\epsilon]} \subseteq [0, \epsilon]$. Portanto:

- $r^w|_{[0,\epsilon]} = w^{-1} r w|_{[0,\epsilon]} = w^{-1} r|_{w([0,\epsilon])} = w^{-1}|_{w([0,\epsilon])} = Id|_{[0,\epsilon]} = r|_{[0,\epsilon]}$;
- $r^w|_{[\epsilon,1]} = w^{-1} r w|_{[\epsilon,1]} = w^{-1} r|_{[\epsilon,1]} = w^{-1}|_{r([\epsilon,1])} = r|_{[\epsilon,1]}$.

Logo r e r^w coincidem em $[0, \epsilon]$ e $[\epsilon, 1]$ e portanto são iguais em $[0, 1]$.

Pelo teorema 7.1.2, as igualdades $r = r^w$, $r \in \mathcal{R}$, implicam que $[\chi] \in \Sigma^1(G, \mathbb{Z})$.

A última parte consiste em mostrar que $\{[-\log \lambda], [-\log \rho]\} \in \Sigma^1(G, \mathbb{Z})^c$. Seja $[\chi] = [-\log \lambda]$. Suponha que $[\chi] \in \Sigma^1(G, \mathbb{Z})$. Pelas propriedades de G temos que G' é não-trivial e, por hipótese, podemos supor que G' é finitamente gerado por $\mathcal{R} \subseteq G'$ sobre um submonóide finitamente gerado $\mathcal{Y} \subseteq G_\chi$.

Escolha $a > 0$ tal que

- (i) $supp(r) \subseteq [a, 1]$ para todo $r \in \mathcal{R}$ e
- (ii) $g(x) \leq x$ para todo $g \in \mathcal{Y}$ e $x \in [0, a]$.

Note que $\mathcal{R} \subseteq G' \subseteq \ker \rho \cap \ker \lambda$ e daí $supp(r) \subseteq [\epsilon_r, 1 - \epsilon_r] \subseteq [\epsilon_r, 1]$, para todo $r \in \mathcal{R}$. Além disso, se $g \in \mathcal{Y} \subseteq G_\chi$ então $\chi(g) \geq 0$. Como $[\chi] = [-\log \lambda]$ então $\log \lambda(g) \leq 0$ donde tem se que $\lambda(g) \leq 1$ e portanto existe uma vizinhança $[0, \epsilon_g]$ tal que $g(x) \leq x$ para todo $x \in [0, \epsilon_g]$. Com estas condições, escolhemos $a = min\{\epsilon_r, \epsilon_g \,|\, r \in \mathcal{R}, g \in \mathcal{Y}\} > 0$ onde $\mathcal{R}$ e $\mathcal{Y}$ são finitos.

Disto temos que $supp(r^w) \subseteq [a, 1]$, para qualquer $w \in \langle \mathcal{Y}]$ e qualquer $r \in \mathcal{R}$. De fato, se $x \in [0, a]$ e $w = g_k \cdots g_1$ com $g_i \in \mathcal{Y}$ então para todo $g_i \in \mathcal{Y}$ temos $g_i(x) \leq x$ e assim $w(x) \leq x$. Então $w(x) \in [0, a]$ para $x \in [0, a]$ e, como $supp(r) \subseteq [a, 1]$, então para todo $r \in \mathcal{R}$, $r(w(x)) = w(x)$ pois $[0, a] \subseteq fix(r)$. Logo $[0, a] \subseteq fix(r^w)$ pois $r^w(x) = w^{-1} r w(x) = w^{-1} w(x) = x$. Assim $supp(r^w) \subseteq [a, 1]$ para qualquer $w \in \langle \mathcal{Y}]$ e qualquer $r \in \mathcal{R}$.

Como G' é gerado por elementos da forma r^w temos que $supp(h) \subseteq [a, 1]$ para todo $h \in G'$. Mas, escolhamos qualquer $h \in G'$ não-trivial e $b \in [0, 1]$ com $h(b) \neq b$. Isto implica que $b \in supp(h) \subseteq [a, 1]$. Tomando f segundo o lema 7.1.3 acima, com $0 < f(b) < a < 1$, temos que $f(b) \in supp(fhf^{-1})$ e como $fhf^{-1} \in G'$ temos que $f(b) \in [a, 1]$, chegando a um absurdo. $\square$

Note que este último resultado nos permite calcular explicitamente $\Sigma^1(G, \mathbb{Z})$ para alguns grupos G. Precisamos verificar que o grupo de Richard Thompson satisfaz as hipóteses requeridas pelo teorema 7.1.4. Já vimos que F é um subgrupo de $\mathcal{G}$ que é finitamente gerado. Falta ainda verificar a irredutibilidade de F e a independência de λ e ρ.

Quanto à irredutibilidade, temos que mostrar que F não tem pontos fixos em $(0, 1)$. Isso segue facilmente do fato de que o conjunto de pontos fixos de seus geradores x_0 e x_1 em (0,1) é vazio e, portanto, F não pode ter pontos fixos.

Agora, note que, pelo teorema dos isomorfismos, temos que $F/\ker\lambda \cong \mathbb{Z}$ e $F/\ker\ \rho \cong \mathbb{Z}$; Como $F/F' \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, temos, pelo segundo teorema dos isomorfismos, que $(\ker\lambda)/F' \cong \mathbb{Z}$ e $(\ker\rho)/F' \cong \mathbb{Z}$. Daí,

$$F/F' \cong (\ker\lambda)/F' \cdot (\ker\rho)/F'.$$

Lembrando que $Hom(G, \mathbb{R}) \cong Hom(G/G', \mathbb{R})$, ie, basta considerarmos o quociente pelo comutador, temos pela decomposição acima, que λ e ρ são independentes.

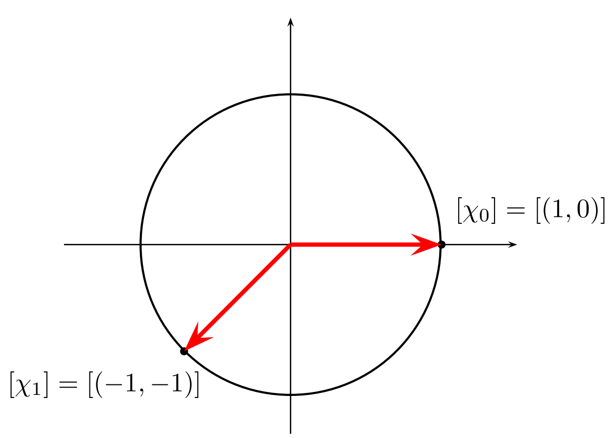
Logo, podemos aplicar o teorema para o grupo de Richard Thompson, donde temos que

Teorema 7.1.5. *Para o grupo de Richard Thompson F,*

$$\Sigma^1(F, \mathbb{Z})^c = \{[-\log\lambda], [-\log\rho]\}.$$

Já vimos anteriormente que $F/F' = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e portanto temos que a esfera de caracteres $S(F)$ pode ser identificada com o círculo $\mathbb{S}^1$, pelo mapa induzido por $\psi : Hom(F, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ dado por $\psi(\mu) = (\mu(x_0), \mu(x_1))$. Seja $\chi_0 = -\log\lambda \in Hom(F, \mathbb{R})$ e $\chi_1 = -\log\rho \in Hom(F, \mathbb{R})$.

Em termos gráficos, veja que $\psi(\chi_0) = (\chi_0(x_0), \chi_0(x_1)) = (1, 0)$ e $\psi(\chi_1) = (\chi_1(x_0), \chi_1(x_1)) = (-1, -1)$. Disso, podemos visualizar o que acontece em $\Sigma^1(F, \mathbb{Z})$.



$\Sigma^1(F, \mathbb{Z})^c = \{[\chi_0], [\chi_1]\}$

7.2 Cálculos para $\Sigma^m(F)$, $m \geq 2$

Agora partiremos para o cálculo do invariante homotópico $\Sigma^m(F)$, para $m \geq 2$. Como foi dito acima, temos como referência o preprint [06].

Veremos a seguir que um ponto crucial para se obter tal resultado se dá através do cálculo de somente um ponto em $\Sigma^2(F)$, como segue abaixo:

Teorema 7.2.1. $[-\chi_0] \in \Sigma^2(F)$.

7.2.1 Cálculos para $\Sigma^2(F, \mathbb{Z})$

Vamos partir de um importante resultado que mostra como o cálculo do invariante pode determinar quando subgrupos contendo o comutador de grupos de tipo F_m são de tipo F_m.

Teorema 7.2.2 (Bieri-Renz)**.** *[02] Seja G um grupo de tipo F_m (resp. de tipo FP_m) com um subgrupo normal N tal que G/N é abeliano. Então N é de tipo F_m (resp. de tipo FP_m) se e somente se para todo caracter real não-nulo χ tal que $\chi(N) = 0$ tem se que $[\chi] \in \Sigma^m(G)$ (resp. $\Sigma^m(G, \mathbb{Z})$).*

Seja χ_0 o caracter de F tal que $\chi_0(x_0) = 1$ e $\chi_0(x_1) = 0$. Seja $N = \ker \chi_0$, ie, o fecho normal de x_1 em F. Segue que $F/N \cong \mathbb{Z}$. Como $[\chi_0] \in \Sigma^1(F)^c$ temos pelo teorema de Bieri-Renz que N não é finitamente gerado.

Vamos agora encontrar um conjunto de geradores para N.

Lema 7.2.3.

i *Seja $y_i = x_1^{x_0^{-i}}$. Então $Y = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ é um conjunto infinito de geradores para N.*

ii *O grupo N tem uma apresentação infinita $\langle Y | S \rangle$ onde*

$$S = \{y_i^{-1} y_{i+2}^{-1} y_{i+1} y_{i+2}, y_i^{-1} y_{i+3}^{-1} y_{i+1} y_{i+3}\}_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Prova. [i] Note que F é uma extensão HNN estritamente decrescente com base G_1 e letra estável x_0, ie, $\cdots \subsetneq G_1^{x_0} \subsetneq G_1 \subsetneq G_1^{x_0^{-1}} \subsetneq \cdots$. Daí, considere $\cup_{j \in \mathbb{Z}} G_1^{x_0^j}$. Vê-se claramente que $\chi_0|_{G_1^{x_0^j}} = 0$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Além disso, como N é o fecho normal de x_1 em F e $\cup_{j \in \mathbb{Z}} G_1^{x_0^j}$ é um subgrupo normal de F que contém x_1, temos que $\cup_{j \in \mathbb{Z}} G_1^{x_0^j}$ contém N. Portanto, $N = \cup_{j \in \mathbb{Z}} G_1^{x_0^j}$.

Finalmente, note que G_1 é gerado por x_1 e $x_2 = x_1^{x_0}$ e assim N é gerado por

$$\cup_{j \in \mathbb{Z}} \{x_1^{x_0^j}, x_1^{x_0^{j+1}}\} = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} = Y.$$

[ii] Vimos que F tem apresentação

$$\langle x_0, x_1 | \, [x_0 x_1{}^{-1}, x_0{}^{-1} x_1 x_0], [x_0 x_1{}^{-1}, x_0{}^{-2} x_1 x_0{}^2] \rangle.$$

Mas, pelas identidades

$$x_1^{x_0x_1}(x_1^{x_0^2})^{-1} = [x_0x_1{}^{-1}, x_0{}^{-1}x_1x_0]^{x_0} \text{ e } x_1^{x_0^2x_1}(x_1^{x_0^3})^{-1} = [x_0x_1{}^{-1}, x_0{}^{-2}x_1x_2]^{x_0},$$

podemos supor que F tem apresentação $\langle x_0, x_1 |\, (x_1^{x_0^2})^{-1}x_1^{x_0x_1}, (x_1^{x_0^3})^{-1}x_1^{x_0^2x_1}\rangle$.

Agora, como $y_i = x_1^{x_0^{-i}}$ vamos substituir ainda mais uma vez as relações e reescrevê-las:

- $(x_1^{x_0^2})^{-1}x_1^{x_0x_1} = (x_1^{x_0^2})^{-1}x_1^{-1}x_1^{x_0}x_1 = y_{-2}^{-1}y_0^{-1}y_{-1}y_0$.
- $(x_1^{x_0^3})^{-1}x_1^{x_0^2x_1} = (x_1^{x_0^3})^{-1}x_1^{-1}x_1^{x_0^2}x_1 = y_{-3}^{-1}y_0^{-1}y_{-2}y_0$.

Disto segue que F tem a seguinte apresentação infinita:

$$\langle Y \cup \{x_0\} |\, \{y_i^{-1}y_{i+2}^{-1}y_{i+1}y_{i+2}, y_i^{-1}y_{i+3}^{-1}y_{i+1}y_{i+3}\}_{i\in\mathbb{Z}} \cup \{y_{i+1}y_i^{x_0^{-1}}\}\rangle.$$

A partir disso, subtraindo o elemento x_0, obtemos a apresentação que queríamos para $N = \langle Y|S\rangle$. □

Corolário 7.2.4. *O grupo N tem uma apresentação infinita:*

$$\left\langle Y|\{y_i^{-1}y_{i+2}^{-1}y_{i+1}y_{i+2}, y_i^{-1}y_{i+3}^{-1}y_{i+1}y_{i+3}, y_i^{-1}y_{i+4}^{-1}y_{i+1}y_{i+4}\}_{i\in\mathbb{Z}}\right\rangle$$

Prova. Basta checar que $y_i^{-1}y_{i+4}^{-1}y_{i+1}y_{i+4}$ é uma relação em N ie, que $y_{i+4}^{-1}y_{i+1}y_{i+4} = y_i$:

$$\begin{aligned}
y_{i+4}^{-1}y_{i+1}y_{i+4} &= x_0^{i+4}x_1^{-1}(x_0^{-(i+4)}x_0^{i+1}x_1x_0^{-(i+1)}x_0^{i+4})x_1x_0^{-(i+4)} \\
&= x_0^{i+4}x_1^{-1}(x_0^{-3}x_1x_0^3)x_1x_0^{-(i+4)} \\
&= x_0^{i+4}(x_1^{-1}x_4x_1)x_0^{-(i+4)} \\
&= x_0^{i+4}x_5x_0^{-(i+4)} \\
&= x_0^i(x_0^4x_5x_0^{-4})x_0^{-i} \\
&= x_1^{x_0^{-i}} \\
&= y_i.
\end{aligned}$$

□

Deste modo feito acima, N foi encontrado como um subgrupo do grupo de Richard Thompson. Agora vamos procurar uma descrição formal de N que é, num certo sentido, "independente"do grupo F. Na verdade, N é isomorfo a um limite direto de grupos. Vamos descrever este isomorfismo.

Considere o grupo

$$M_j \simeq \mathcal{F}_j/R_j$$

onde $\mathcal{F}_j$ é o grupo livre com base $\{z_i\}_{i\geq j}$ e R_j é o fecho normal de

$$\{z_i^{-1}z_{i+2}^{-1}z_{i+1}z_{i+2}, z_i^{-1}z_{i+3}^{-1}z_{i+1}z_{i+3}, z_i^{-1}z_{i+4}^{-1}z_{i+1}z_{i+4}\}_{i\geq j}$$

em $\mathcal{F}_j$. Note que a função identidade em $\{z_i\}_{i\geq j}$ induz um epimorfismo de grupos

$$\alpha_j : M_j \to M_{j-1}.$$

Para verificar que α_j é epimorfismo é suficiente mostrar que $\{z_i\}_{i\geq j-1} \subseteq Im(\alpha_j)$. Se $i \geq j$, $z_i = \alpha_j(z_i)$. Se $i = j-1$, veja que $z_{j-1}^{-1}z_{j+1}^{-1}z_j z_{j+1}$ é uma relação em M_{j-1} e daí $z_{j-1} = z_{j+1}^{-1}z_j z_{j+1} \in im(\alpha_j)$.

Compondo os mapas α_j obtemos um sistema direto em $\mathbb{Z}$ de modo que se $i < j$

$$M_j \xrightarrow{\alpha_j} M_{j-1} \xrightarrow{\alpha_{j-1}} \cdots \xrightarrow{\alpha_{i+1}} M_i$$

com $\alpha_j^i = \alpha_{i+1}\cdots\alpha_{j-1}\alpha_j$, temos que é $\{M_i, \alpha_j^i, i \leq j\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ um sistema direto em $\mathbb{Z}$.

Observando que N satisfaz o diagrama universal para este sistema direto, chegamos ao seguinte resultado:

Proposição 7.2.5. *Para o sistema direto $\{M_i, \alpha_j^i\}$ temos que*

$$N \simeq \varinjlim M_i \tag{7.8}$$

e o mapa $\phi_i : M_i \to N$ da definição de limite direto é epimorfismo para qualquer i.

Considere o complexo de Cayley Γ associado à apresentação de

$$F = \left\langle x_0, x_1 | (x_1^{x_0^2})^{-1}x_1^{x_0x_1}, (x_1^{x_0^3})^{-1}x_1^{x_0^2x_1}, (x_1^{x_0^4})^{-1}x_1^{x_0^3x_1} \right\rangle.$$

A partir de agora fixamos $\chi = -\chi_0$. Seja i um número inteiro não-positivo e seja $\Gamma_{\chi\geq i}$ o subcomplexo de Γ gerado pelos vértices $F_{\chi\geq i} = \{f \in F \mid \chi(f) \geq i\}$.

Segue abaixo a descrição dos vértices, arestas e 2-células de $\Gamma_{\chi\geq i}$.

(1) $V(\Gamma_{\chi\geq i}) \simeq F_{\chi\geq i}$.

(2) $E(\Gamma_{\chi\geq i}) \simeq (\{x_0\} \times F_{\chi\geq i+1}) \cup (\{x_1\} \times F_{\chi\geq i})$.

(3) $R(\Gamma_{\chi\geq i}) \simeq (\{r_1\} \times F_{\chi\geq i+2}) \cup (\{r_2\} \times F_{\chi\geq i+3}) \cup (\{r_3\} \times F_{\chi\geq i+4})$
onde $r_{i_0} = (x_1^{x_0^{i_0+1}})^{-1}x_1^{x_0^{i_0}x_1}$.

Agora, vamos definir novos grupos. Eles surgirão posteriormente, de modo natural, ao estudarmos o subcomplexo $\Gamma_{\chi\geq i}$ e o $\pi_1(\Gamma_{\chi\geq i})$. Definamos:

(1a) $\mathcal{F}_{-\infty} = \cup_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_j$, onde $\mathcal{F}_j$ é o grupo livre com base $\{z_i\}_{i\geq j}$ e

(1b) $V = \cup_{j\in\mathbb{Z}}R_j$, um subgrupo normal de $\mathcal{F}_{-\infty}$.

(2a) $T_i = \left\langle x_1^{x_0^{-j}} \right\rangle_{j \geq i}$ subgrupo do grupo livre gerado por x_0 e x_1 e

(2b) $T_{-\infty} = \left\langle x_1^{x_0^{-j}} \right\rangle_{j \in \mathbb{Z}}$ grupo livre com base $\{x_1^{x_0^{-j}}\}_{j \in \mathbb{Z}}$.

A partir destas definições, podemos estabelecer o seguinte isomorfismo:

$$\varphi : \mathcal{F}_{-\infty} \to T_{-\infty} \text{ onde } \ z_j \overset{\varphi}{\mapsto} x_1^{x_0^{-j}}.$$

Este isomorfismo será bastante útil adiante pois $\Gamma_{\chi \geq i}$ é um complexo associado a F, que tem os dois geradores x_0 e x_1. Por exemplo, ele nos permite obter informações em $\mathcal{F}_{-\infty}$ a partir de $T_{-\infty}$ o qual, por sua vez, contém informações a respeito do complexo $\Gamma_{\chi \geq i}$.

Observe também que $\mathcal{F}_i \simeq \varphi(\mathcal{F}_i) \simeq T_i$.

Proposição 7.2.6. *Sejam i um número inteiro não positivo, $\chi = -\chi_0$, $\mathcal{F}_i$, V e R_i acima definidos. Então existe um isomorfismo de grupos:*

$$\pi_1(\Gamma_{\chi \geq i}) \simeq (V \cap \mathcal{F}_i)/R_i.$$

`Notação`

(*) $\pi : \mathcal{F} \to F$ é a projeção canônica do grupo livre $\mathcal{F}$ com dois geradores x_0 e x_1;

(**) $p : M(x_0, x_0^{-1}, x_1, x_1^{-1}) \to \mathcal{F}$ é o mapa canônico do conjunto $M(x_0, x_0^{-1}, x_1, x_1^{-1})$ de todas as palavras em x_0, x_0^{-1}, x_1 e x_1^{-1};

(***) Uma aresta (x, f) em $\Gamma_{\chi \geq i}$ tem *ponto inicial* f e o *ponto final* é $\pi(x)f$. A *inversa* de uma aresta (x, f) é $(x^{-1}, \pi(x)f)$. O *rótulo* $l(\gamma)$ de um caminho $\gamma = (x_1^{\epsilon_1}, f_1)(x_2^{\epsilon_2}, f_2) \cdots (x_k^{\epsilon_k}, f_k)$ é a palavra $x_k^{\epsilon_k} \cdots x_2^{\epsilon_2} x_1^{\epsilon_1}$ no conjunto $M(x_0, x_0^{-1}, x_1, x_1^{-1})$, ie, $x_i \in \{x_0, x_1\}$ e $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$, para $i = 1, 2, \cdots, k$.

(****) Uma 2-célula (r, f) tem como fronteira um caminho fechado com ponto base f e rótulo r, onde r é escrita como uma palavra reduzida em x_0, x_0^{-1}, x_1 e x_1^{-1}.

Prova. Vamos dividir a demonstração em duas partes. Na primeira, vamos encontrar uma condição necessária e suficiente para que um caminho fechado γ anexado a 1_F seja contrátil em $\Gamma_{\chi \geq i}$. Depois, descreveremos todos os caminhos fechados em $\Gamma_{\chi \geq i}$ e daí o resultado seguirá facilmente.

`Caminhos Contráteis`

Inicialmente, note que um caminho que tem ponto inicial em $N = \ker \chi$ com rótulo $x_0^j x_1 x_0^{-j}$ está em $\Gamma_{\chi \geq i}$ se e somente se o $\chi\pi p$-valor de cada final de $x_0^j x_1 x_0^{-j}$ é pelo menos i. Isto é equivalente com $min\{0, j\} \geq i$ e como $i \leq 0$, isto é equivalente a $j \geq i$.

Vamos provar um primeiro fato:

(1) Se γ é um caminho em $\Gamma_{\chi\geq i}$ com ponto inicial 1_F e ponto final f, então γ é homotopicamente equivalente em $\Gamma_{\chi\geq i}$ a um caminho $w(\gamma)$ onde o rótulo

$$l(w(\gamma)) = x_0^{\chi_0(f)}v(\gamma)$$

é tal que $p(v(\gamma)) \in T_i$.

De fato, sendo γ um caminho em $\Gamma_{\chi\geq i}$, subcomplexo de Γ associado a F que é gerado por x_0 e x_1, temos que o seu rótulo é uma palavra

$$l(\gamma) = x_0^{\alpha_k}x_1^{\epsilon_{k-1}}x_0^{\alpha_{k-1}}\cdots x_1^{\epsilon_2}x_0^{\alpha_2}x_1^{\epsilon_1}x_0^{\alpha_1}$$

para alguns $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k \in \{\pm 1\}$ e $\chi_0(f) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$.

Assim, anexando caminhos diferentes a γ da forma $\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}^{-1}$ em $\Gamma_{\chi\geq i}$, temos que γ é elementariamente homotopicamente equivalente a um caminho $w(\gamma)$, ie:

$$\begin{aligned}
l(\gamma) &\cong x_0^{\alpha_k}x_1^{\epsilon_{k-1}}x_0^{\alpha_{k-1}}\cdots(x_0^{\alpha_1+\alpha_2}x_0^{-\alpha_1-\alpha_2})x_1^{\epsilon_2}x_0^{\alpha_2}(x_0^{\alpha_1}x_0^{-\alpha_1})x_1^{\epsilon_1}x_0^{\alpha_1}\\
&\cong x_0^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}(x_0^{-\alpha_1-\cdots-\alpha_{k-1}}x_1^{\epsilon_{k-1}}x_0^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}})\cdots(x_0^{-\alpha_1-\alpha_2}x_1^{\epsilon_2}x_0^{\alpha_1+\alpha_2})(x_0^{-\alpha_1}x_1^{\epsilon_1}x_0^{\alpha_1})\\
&\cong x_0^{\chi_0(f)}v(\gamma) = l(w(\gamma))
\end{aligned}$$

sendo que:

$$v(\gamma) = (x_1^{\epsilon_{k-1}})^{x_0^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}}}\cdots(x_1^{\epsilon_2})^{x_0^{\alpha_1+\alpha_2}}(x_1^{\epsilon_1})^{x_0^{\alpha_1}}.$$

Finalmente, $\gamma \in \Gamma_{\chi\geq i}$ implica que seus pontos finais estão em $\Gamma_{\chi\geq i}$. Recordemos que $\chi(x_0) = -1$ e que $\chi(x_1) = 0$. Logo, para $l = 1, \ldots, k-1$:

$$\chi(x_0^{\alpha_l}\cdots x_1^{\epsilon_1}x_0^{\alpha_1}) = -\alpha_1 - \cdots - \alpha_l \geq i.$$

Disto segue que cada $(x_1^{\epsilon_j})^{x_0^{-j}} = (x_1^{x_0^{-j}})^{\epsilon_j}$ em $v(\gamma)$ tem a propriedade $j \geq i$ e então temos que $p(v(\gamma)) \in T_i = \left\langle x_1^{x_0^{-j}} \right\rangle_{j\geq i}$.

Com isto já descrevemos os caminhos fechados em $\Gamma_{\chi\geq i}$ com ponto inicial 1_F. Agora, vamos mostrar o que acontece com as 2-células de $\Gamma_{\chi\geq i}$.

(2) Se uma 2-célula (r, f) de $\Gamma_{\chi\geq i}$ tem uma fronteira $\tilde{\gamma}$ anexada ao vértice f, γ é o caminho em $\Gamma_{\chi\geq i}$ que liga 1_F a f e $\overline{\gamma} = \gamma^{-1}\tilde{\gamma}\gamma$ é o caminho fechado anexado a 1_F em $\Gamma_{\chi\geq i}$, vamos provar abaixo que:

$$p(l(w(\overline{\gamma}))) \in \varphi(R_i) \triangleleft T_i.$$

Como (r, f) está em $\Gamma_{\chi\geq i}$, nós temos que $\chi(f) \geq i + 1 + i_0$, onde

$$r = r_{i_0} \in \{r_1 = x_0^{-2}x_1^{-1}x_0^2x_1^{-1}x_0^{-1}x_1x_0x_1,$$
$$r_2 = x_0^{-3}x_1^{-1}x_0^3x_1^{-1}x_0^{-2}x_1x_0^2x_1, r_3 = x_0^{-4}x_1^{-1}x_0^4x_1^{-1}x_0^{-3}x_1x_0^3x_1\}.$$

Vamos aqui tratar do caso $r = r_2$. Os outros são idênticos. Para um caminho γ em $\Gamma_{\chi\geq i}$ que liga 1_F a f e para o caminho fechado $\overline{\gamma} = \gamma^{-1}\tilde{\gamma}\gamma$ com ponto base 1_F em $\Gamma_{\chi\geq i}$ temos que:

$$l(w(\overline{\gamma})) = v(\gamma)^{-1}(x_1^{-1})^{x_0^{\chi_0(f)+3}}(x_1^{-1})^{x_0^{\chi_0(f)}}x_1^{x_0^{\chi_0(f)+2}}x_1^{x_0^{\chi_0(f)}}v(\gamma)$$

pois, novamente, adicionando caminhos $\gamma\gamma^{-1}$ em $\Gamma_{\chi\geq i}$, temos que o rótulo:

$$\begin{aligned} l(w(\overline{\gamma})) &= (l(w(\gamma^{-1})))x_0^{-3}x_1^{-1}x_0^{3}x_1^{-1}x_0^{-2}x_1x_0^{2}x_1(l(w(\gamma))) \\ &= (l(w(\gamma))^{-1})x_0^{-3}x_1^{-1}x_0^{3}x_1^{-1}x_0^{-2}x_1x_0^{2}x_1(l(w(\gamma))) \\ &= v(\gamma)^{-1}x_0^{-\chi_0(f)}x_0^{-3}x_1^{-1}x_0^{3}x_1^{-1}x_0^{-2}x_1x_0^{2}x_1x_0^{\chi_0(f)}v(\gamma) \\ &= v(\gamma)^{-1}(x_1^{-1})^{x_0^{\chi_0(f)+3}}(x_1^{-1})^{x_0^{\chi_0(f)}}x_1^{x_0^{\chi_0(f)+2}}x_1^{x_0^{\chi_0(f)}}v(\gamma). \end{aligned}$$

Como temos $r = r_{i_0}, i_0 = 2$, segue que:

$$-t = \chi_0(f) + 3 = \chi_0 + 1 + i_0 = -\chi(f) + 1 + i_0 \leq -i.$$

Então, temos que $p((x_1^{-1})^{x_0^{\chi_0(f)+3}}(x_1^{-1})^{x_0^{\chi_0}}x_1^{x_0^{\chi_0(f)+2}}x_1^{x_0^{\chi_0(f)}}) \in \varphi(R_t) \subseteq \varphi(R_i)$. Logo, $p(l(w(\overline{\gamma})))$ está no subgrupo normal $\varphi(R_i)$ de $\varphi(\mathcal{F}_i) = T_i$ pois, como vimos acima, $p(v(\gamma)) \in T_i = \varphi(F_i)$.

Por outro lado, é facil ver que:

(3) qualquer elemento de $\varphi(R_i)$ pode ser realizado como $p(l(w(\gamma)))$ de algum caminho contrátil $\tilde{\gamma}$ em $\Gamma_{\chi\geq i}$ anexado a 1_F.

Logo, (2) e (3) implicam:

Para qualquer caminho fechado γ em $\Gamma_{\chi\geq i}$ anexado a 1_F,

$$\gamma \text{ é contrátil em } \Gamma_{\chi\geq i} \Longleftrightarrow p(l(w(\gamma))) \in \varphi(R_i).$$

E com este resultado descrevemos todas as classes de caminhos fechados que são contráteis em $\Gamma_{\chi\geq i}$ com ponto base 1_F.

`Caminhos Fechados`

Agora, vamos descrever as classes de todos os caminhos fechados em $\Gamma_{\chi\geq i}$. Na verdade, temos o seguinte fato:

Para qualquer caminho γ em $\Gamma_{\chi\geq i}$ anexado a 1_F,

$$\gamma \text{ é fechado em } \Gamma_{\chi\geq i} \Longleftrightarrow p(l(w(\gamma))) \in \varphi(V \cap \mathcal{F}_i).$$

Γ é um complexo de Cayley e, portanto, simplesmente conexo. Disto segue que qualquer caminho fechado γ em $\Gamma_{\chi\geq i}$ é contrátil em algum $\Gamma_{\chi\geq m}$, com m suficientemente negativo ie, $p(l(w(\gamma))) \in \varphi(\cup_{j\in\mathbb{Z}} R_j) = \varphi(V)$. Portanto, $p(l(w(\gamma))) \in \varphi(V) \cap \varphi(\mathcal{F}_i) = \varphi(V \cap \mathcal{F}_i)$.

Tome $f \in V \cap \mathcal{F}_i$. Como $f \in V$, existe um caminho fechado γ anexado a 1_F tal que $p(l(w(\gamma))) = \varphi(f)$. Ainda, como $f \in \mathcal{F}_i$ temos que $\gamma \in \Gamma_{\chi \geq i}$. Logo, para todo $f \in V \cap \mathcal{F}_i$ existe um caminho fechado γ em $\Gamma_{\chi \geq i}$ anexado a 1_F tal que $p(l(w(\gamma))) = \varphi(f)$.

Finalmente, podemos calcular o grupo fundamental de $\Gamma_{\chi \geq i}$.

Sabemos, por definição, que o grupo fundamental de $\Gamma_{\chi \geq i}$ é o quociente entre o conjunto das classes de homotopia dos caminhos fechados em $\Gamma_{\chi \geq i}$ pelo conjunto das classes dos caminhos fechados contráteis em $\Gamma_{\chi \geq i}$. Deste modo, temos que:

$$\pi_1(\Gamma_{\chi \geq i}) \simeq \varphi(V \cap \mathcal{F}_i)/\varphi(R_i) \simeq (V \cap \mathcal{F}_i)/R_i.$$

$\square$

Proposição 7.2.7. *O mapa $\varphi_0 : M_0 \to N$ do limite direto em (7.8) é um isomorfismo.*

Prova. Para provar que φ_0 é um isomorfismo, não é difícil ver que é suficiente mostrar que o homomorfismo $\alpha_0 : M_0 \to M_{-1}$ induzido pela identidade em $\{z_j\}_{j \geq 0}$ é um isomorfismo (lembre-se que já sabemos pela proposição 7.2.5 que α_0 é sobrejetor).

Mostraremos isto exibindo uma inversa $\mu = {\alpha_0}^{-1} : M_{-1} \to M_0$ que é induzida pela identidade em $\{z_j\}_{j \geq 0}$ e leva z_{-1} em $z_1^{-1} z_0 z_1$. Seja então $\lambda_0 : \mathcal{F}_{-1} \to M_0$ o mapa induzido pela identidade em $\{z_j\}_{j \geq 0}$ e que leva z_{-1} em $z_1^{-1} z_0 z_1$, onde $\mathcal{F}_{-1}$ é o grupo livre com base $\{z_j\}_{j \geq -1}$. Assim, temos que mostrar que $\lambda_0(R_{-1}) = 1$. Note que já temos o seguinte:

$$\lambda_0(\{z_i^{-1} z_{i+2}^{-1} z_{i+1} z_{i+2}, z_i^{-1} z_{i+3}^{-1} z_{i+1} z_{i+3}, z_i^{-1} z_{i+4}^{-1} z_{i+1} z_{i+4}\}_{i \geq 0} \cup \{z_{-1}^{-1} z_1^{-1} z_0 z_1\}) = 1$$

restando provarmos que $\lambda_0(z_{-1}^{-1} z_2^{-1} z_0 z_2) = 1$ e $\lambda_0(z_{-1}^{-1} z_3^{-1} z_0 z_3) = 1$. Note que:

$$\lambda_0(z_{-1}^{-1} z_2^{-1} z_0 z_2) = z_1^{-1} z_0^{-1} z_1 z_2^{-1} z_0 z_2 = z_2^{-1}((z_1 z_2^{-1})^{-1} z_0^{-1} (z_1 z_2^{-1}) z_0) z_2 \text{ e}$$

$$\lambda_0(z_{-1}^{-1} z_3^{-1} z_0 z_3) = z_1^{-1} z_0^{-1} z_1 z_3^{-1} z_0 z_3 = z_3^{-1}((z_1 z_3^{-1})^{-1} z_0^{-1} (z_1 z_3^{-1}) z_0) z_3.$$

Isto sugere que temos que mostrar que z_0 comuta com $z_1 z_2^{-1}$ e $z_1 z_3^{-1}$ em M_0. Veja que em M_0 temos as seguintes relações:

$$z_i^{\epsilon} z_j = z_j z_{i-1}^{\epsilon} \text{ e } z_j^{-1} z_i^{\epsilon} = z_{i-1}^{\epsilon} z_j^{-1} \text{ para } 1 \leq i, 1 \leq j - i \leq 3, \epsilon \in \{\pm 1\}.$$

Então, para $1 < s < t \leq 4$, temos que:

$$z_t z_{s-1}^{-1} z_0 = z_s^{-1} z_t z_0 = z_s^{-1} z_1 z_t = z_0 z_s^{-1} z_t = z_0 z_t z_{s-1}^{-1}.$$

Portanto, z_0 comuta com $z_t z_{s-1}^{-1}$ em M_0, para $1 < s < t \leq 4$. Em particular, z_0 comuta com $z_4 z_1^{-1}$, $z_4 z_2^{-1}$ e com $z_3 z_1^{-1}$. Assim z_0 comuta com $z_1 z_2^{-1} = (z_4 z_1^{-1})^{-1} z_4 z_2^{-1}$ e com $z_1 z_3^{-1} = (z_3 z_1^{-1})^{-1}$. $\square$

Corolário 7.2.8. *$[-\chi_0] \in \Sigma^2(F)$.*

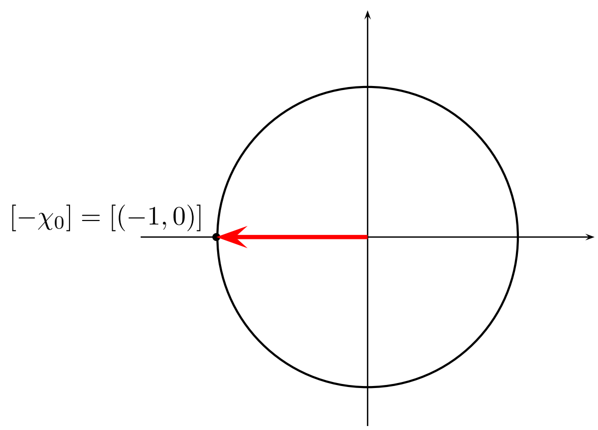
Prova. Seja i um número inteiro não-positivo. Como $[\chi] = [-\chi_0] \in \Sigma^1(F)$ temos que $\Gamma_{\chi \geq i}$ é conexo.

Sendo φ_0 um isomorfismo, temos que $\ker \varphi_0 = 1$. Mas, por outro lado, $\ker \varphi_0 = \{f \in M_0 : \varphi_0(f) = 1_N\} = (V \cap \mathcal{F}_0)/R_0 \simeq \pi_1(\Gamma_{\chi \geq 0})$ e, portanto:

$$\pi_1(\Gamma_{\chi \geq 0}) \simeq \ker \varphi_0 = 1.$$

Então o homomorfismo $\pi_1(\Gamma_\chi) \to \pi_1(\Gamma_{\chi \geq i})$ induzido pela inclusão $\Gamma_{\chi \geq 0} \hookrightarrow \Gamma_{\chi \geq i}$ é trivial donde temos que $[\chi] = [-\chi_0] \in \Sigma^2(F)$. $\square$

Graficamente, isto pode ser representado através da próxima figura.



$[-\chi_0] \in \Sigma^2(F) \subseteq \Sigma^2(F, \mathbb{Z})$

7.2.2 Cálculos para $\Sigma^m(F)$

Este último resultado para $\Sigma^2(F, \mathbb{Z})$ é fundamental para avançarmos para o caso geral. Isto fica evidente no próximo teorema abaixo.

Teorema 7.2.9. *Para qualquer número natural m, $[-\chi_0] \in \Sigma^m(F, \mathbb{Z})$.*

Prova. O caso $m = 1$ já foi estudado na seção anterior.

Como $\Sigma^2(F) \subseteq \Sigma^2(F, \mathbb{Z})$, temos que o caso $m = 2$ está resolvido, pelo corolário 7.2.8.

Assim, precisamos mostrar somente para $m > 2$. Vamos denotar $\chi = -\chi_0$. A condição [ii]' do teorema 4.2.2 (Critério de Bieri) diz que $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}F_\chi$ se e somente se $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_1 sobre $\mathbb{Z}F_\chi$ e $Tor_i^{\mathbb{Z}F_\chi}(\mathbb{Z}, \prod \mathbb{Z}F_\chi) = 0$ para $1 \leq i \leq m-1$. Como $[\chi] \in \Sigma^1(F, \mathbb{Z})$ basta provar que $Tor_i^{\mathbb{Z}F_\chi}(\mathbb{Z}, \prod \mathbb{Z}F_\chi) = 0$ para $1 \leq i \leq m-1$. Note ainda que $[\chi] \in \Sigma^2(F, \mathbb{Z})$ e, novamente, pelo teorema 4.2.2 temos que $Tor_1^{\mathbb{Z}F_\chi}(\mathbb{Z}, \prod \mathbb{Z}F_\chi) = 0$. Logo resta avaliarmos para $i > 1$.

Seja $Q = F/N \simeq \mathbb{Z}$, onde $N = \ker \chi$.

Considere a versão monoidal da sequência espectral LHS, como no teorema 2.10.12:

$$E^2_{p,q} = Tor_p^{\mathbb{Z}Q_\chi}(\mathbb{Z}, Tor_q^{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, \prod \mathbb{Z}F_\chi)) \underset{p}{\Longrightarrow} Tor_{p+q}^{\mathbb{Z}F_\chi}(\mathbb{Z}, \prod \mathbb{Z}F_\chi).$$

(1) Vamos mostrar que $Tor_q^{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, \prod \mathbb{Z}F_\chi) = 0$ para $q > 0$.

Lembre que $N = \cup_{j\in\mathbb{Z}} G_j$ onde $G_j = G_1^{x_0^j} = \langle x_j, x_{j+1}, \ldots\rangle$. Disto temos que $\mathbb{Z}N = \cup_{j\in\mathbb{Z}}\mathbb{Z}G_j$. Considerando o sistema direto formado por

$$\{\mathbb{Z}G_j;\ \text{inclusão } i_j^l : \mathbb{Z}G_j \hookrightarrow \mathbb{Z}G_l,\ \text{se } j \leq l\}$$

temos que o seu limite direto é dado pela união, ie:

$$\mathbb{Z}N = \varinjlim \mathbb{Z}G_j.$$

Logo, já temos que $Tor_q^{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, \prod \mathbb{Z}G_\chi) = Tor_q^{\varinjlim \mathbb{Z}G_j}(\mathbb{Z}, \prod \mathbb{Z}G_\chi)$.

Observe que, para $\mathbb{Z}$-módulos A e B, vale a seguinte propriedade:

$$A \otimes_{\varinjlim \mathbb{Z}G_j} B \simeq \varinjlim A \otimes_{\mathbb{Z}G_j} B.$$

Agora, seja P uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ como um $\mathbb{Z}N$-módulo trivial e $P_\mathbb{Z}$, o deletado de P. Disto segue que:

$$\begin{aligned}
Tor_q^{\varinjlim \mathbb{Z}G_j}(\mathbb{Z}, \prod \mathbb{Z}F_\chi) &= H_q(P_\mathbb{Z} \otimes_{\varinjlim \mathbb{Z}G_j} \prod \mathbb{Z}F_\chi) \\
&\simeq H_q(\varinjlim(P_\mathbb{Z} \otimes_{G_j} \prod \mathbb{Z}F_\chi)) \\
&\simeq \varinjlim H_q(P_\mathbb{Z} \otimes_{G_j} \prod \mathbb{Z}F_\chi) \\
&= \varinjlim Tor_q^{\mathbb{Z}G_j}(\mathbb{Z}, \prod \mathbb{Z}F_\chi)
\end{aligned}$$

pois note que o sistema direto $\{\mathbb{Z}G_j; i_j^l\}$ é sobre $\mathbb{Z}$, um conjunto de índices direcionado; portanto, $\varinjlim$ é exato e, por isso, comuta com o funtor de homologia.

Agora, veja que $G_j = G_1^{x_0^j} = G^{x_0^{j-1}} \simeq G$ é de tipo FP_m. Assim, pelo teorema 4.2.2, temos que existe o isomorfismo:

$$Tor_q^{\mathbb{Z}G_j}(\mathbb{Z}, \prod \mathbb{Z}G_\chi) \simeq \prod Tor_q^{\mathbb{Z}G_j}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}G_\chi).$$

Finalmente, podemos decompor $G_\chi = \cup_{m\geq 0} N x_0^{-m}$. De fato, é fácil ver que $G_\chi \supseteq \cup_{m\leq 0} N x_0^{-m}$. Agora, tome $x \in G_\chi$. Se $\chi(x) = 0$ então $x \in N$. Se $\chi(x) > 0$ então $\chi(x) = m$, com m inteiro positivo. Seja $y = x x_0^m$. Segue que $y \in N$ e portanto $x = y x_0^{-m} \in N x_0^{-m}$ para algum m inteiro positivo.

Assim, temos que $\mathbb{Z}G_\chi = \oplus_{m\geq 0}\mathbb{Z}N x_0^{-m}$ ie $\mathbb{Z}G_\chi$ é um $\mathbb{Z}N$-módulo livre. Como $\mathbb{Z}N$ é um $\mathbb{Z}G_j$-módulo livre, temos que $\mathbb{Z}G_\chi$ é um $\mathbb{Z}G_j$-módulo livre. Pela proposição 2.9.5, temos que $Tor_q^{\mathbb{Z}G_j}(\mathbb{Z}, \prod \mathbb{Z}G_\chi) = 0$ para $q \geq 1$.

Resumindo, todos estes passos acima nos mostram que, para $q>0$, temos:

$$Tor_q^{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z},\prod \mathbb{Z}G_\chi)=\varinjlim Tor_q^{\mathbb{Z}G_j}(\mathbb{Z},\prod \mathbb{Z}G_\chi)\simeq \varinjlim \prod Tor_q^{\mathbb{Z}G_j}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}G_\chi)=0.$$

(2) Vamos mostrar que $E^{\infty}_{p,q}=E^2_{p,q}$.

Queremos agora analisar o comportamento da sequência espectral.

Vimos acima que $E^2_{p,q}=\begin{cases}0 & \text{se } q>0,\\ Tor_p^{\mathbb{Z}Q_\chi}(\mathbb{Z},(\mathbb{Z}G_\chi)_N) & \text{se } q=0.\end{cases}$

onde definimos $M_N=\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}N} M$ para um $\mathbb{Z}N$-módulo à esquerda M qualquer.

Por definição, sabemos que $E^3=H(E^2,d^2)$ e d^2 tem bigrau $(-2,1)$ ie:

$$E^2_{p+2,q-1}\xrightarrow{d^2}E^2_{p,q}\xrightarrow{d^2}E^2_{p-2,q+1}.$$

Assim, podemos calcular o próximo elemento da sequência espectral pois, como $E^2_{p,q}=0$ se $q\neq 0$, temos que, para qualquer $q>0$, $\ker d^2=E^2$ e $imd^2=0$ donde temos que $E^3=E^2$.

Por definição, $E^{r+1}=H(E^r,d^r)$ e, calculando como se fez acima, temos que $E^{\infty}_{p,q}=\cdots=E^3_{p,q}=E^2_{p,q}$. Portanto, $E^{\infty}_{p,q}=E^2_{p,q}$.

(3) $Tor_n^{\mathbb{Z}G_\chi}(\mathbb{Z},\prod\mathbb{Z}G_\chi)\simeq Tor_n^{\mathbb{Z}Q_\chi}(\mathbb{Z},(\prod\mathbb{Z}G_\chi)_N)$.

Como $E^2_{p,q}\underset{p}{\Rightarrow} V_n=Tor_n^{\mathbb{Z}G_\chi}(\mathbb{Z},\prod\mathbb{Z}G_\chi)$ temos, por definição, que existe uma filtração limitada de $\{\Phi_pV_n\}_{p\in\mathbb{Z}}$ de V_n:

$$0\subseteq\cdots\subseteq\Phi_{p-1}V_{p+q}\subseteq\Phi_pV_{p+q}\subseteq\cdots\subseteq\Phi_kV_{p+q}=V_n$$

tal que $E^{\infty}_{p,q}\simeq\Phi_pV_n/\Phi_{p-1}V_n$.

Sabemos que $E^2_{p,q}=0$ se $q>0$ donde segue que $0=E^2_{p,q}=E^{\infty}_{p,q}\simeq\Phi_pV_{p+q}/\Phi_{p-1}V_{p+q}$ se $q>0$ ie, $\Phi_pV_{p+q}=\Phi_{p-1}V_{p+q}$ se $q>0$.

Assim, para um $n=p+q$ fixo, teremos que, somente para $(p,q)=(n,0)$, esta filtração terá um quociente não nulo. Neste caso, dizemos que a sequência espectral colapsa e obtemos que:

$$Tor_n^{\mathbb{Z}G_\chi}(\mathbb{Z},\prod\mathbb{Z}G_\chi)\simeq E^{\infty}_{n,0}=E^2_{n,0}=Tor_n^{\mathbb{Z}Q_\chi}(\mathbb{Z},(\prod\mathbb{Z}G_\chi)_N)$$

(4) $Tor_q^{\mathbb{Z}Q_\chi}(\mathbb{Z},-)=0$ para $i\geq 2$.

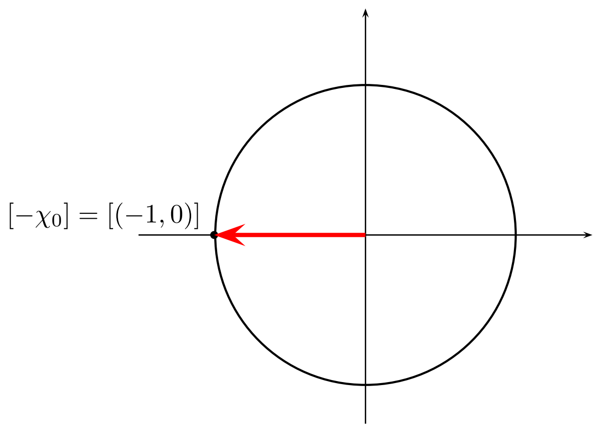
Note que $\mathbb{Z}Q_\chi\simeq\mathbb{Z}[t]$, onde $\mathbb{Z}[t]$ é o anel de polinômios na variável t. Isto vem do fato de que $Q_\chi=\{x_0^{-m}\}_{m\geq 0}$. Assim, podemos estabelecer um isomorfismo de anéis $\mathbb{Z}Q_\chi\xrightarrow{\varphi}\mathbb{Z}[t]$ onde $x_0^{-1}\overset{\varphi}{\mapsto}t$. A partir de agora, $\mathbb{Z}Q_\chi$ é um anel de polinômios em uma variável. Daí, note que $\mathbb{Z}$ admite uma resolução projetiva sobre $\mathbb{Z}[t]$ da seguinte forma:

$$0\to\mathbb{Z}[t]\xrightarrow{t-1}\mathbb{Z}[t]\xrightarrow{\epsilon}\mathbb{Z}\to 0.$$

Agora, como o cálculo do funtor $Tor_q^{\mathbb{Z}[t]}(\mathbb{Z},-)$ independe da resolução escolhida, podemos escolher esta acima e então obtemos que $Tor_q^{\mathbb{Z}Q_\chi}(\mathbb{Z},-)=Tor_q^{\mathbb{Z}[t]}(\mathbb{Z},-)=0$, para $i\geq 2$.

Em particular, $Tor_q^{\mathbb{Z}Q_\chi}(\mathbb{Z},(\prod \mathbb{Z}G_\chi)_N)=0$ para $i\geq 2$. Portanto, $Tor_n^{\mathbb{Z}G_\chi}(\mathbb{Z},\prod \mathbb{Z}G_\chi)\simeq Tor_n^{\mathbb{Z}Q_\chi}(\mathbb{Z},(\prod \mathbb{Z}G_\chi)_N)=0$ para $i\geq 2$. $\square$

Portanto, temos uma figura para o $\Sigma^m(F,\mathbb{Z})$ semelhante ao $\Sigma^2(F,\mathbb{Z})$, ie:



$[-\chi_0]\in\Sigma^m(F,\mathbb{Z})$, $m\geq 2$

Para enunciar o próximo resultado que apresenta o cálculo final para $\Sigma^m(F)$, denotamos por $conv_{\leq m}\Sigma^1(F)^c$ o conjunto que é a união dos fechos convexos de todos os subconjuntos de $\Sigma^1(F)^c$ com no máximo m elementos.

Proposição 7.2.10. *Se para algum $m\geq 2$ temos $[-\chi_0]\in\Sigma^m(F,\mathbb{Z})$, então:*

$$\Sigma^m(F,\mathbb{Z})^c\subseteq conv_{\leq 2}\Sigma^1(F)^c=conv\Sigma^1(F)^c.$$

Se para algum $m\geq 2$ temos que $[-\chi_0]\in\Sigma^m(F)=\Sigma^2(F)\cap\Sigma^m(F,\mathbb{Z})$, então:

$$\Sigma^m(F)^c=conv_{\leq 2}\Sigma^1(F)^c=conv\Sigma^1(F)^c.$$

Prova. A demonstração está dividida em alguns subitens para facilitar a sua compreensão.

(1) Seja ν o automomorfismo correspondente a conjugação pelo homeomorfismo $t\mapsto 1-t$ quando realizamos F como grupo de homeomorfismos lineares por pedaços do intervalo $[0,1]$. Seja $\nu^*:S(F)\to S(F)$ a bijeção induzida pelo automorfismo ν. Então, temos as seguintes propriedades:

- $\nu^*([\chi_0])=[\chi_1]$.

  De fato, calculando ν em $x_0,x_1\in F/[F,F]$ obtemos as seguintes funções:

$$\nu(x_0(t)) = \begin{cases} 2t & ,0 \le t \le \frac{1}{4} \\ t + \frac{1}{4} & ,\frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & ,\frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \qquad \nu(x_1(t)) = \begin{cases} 2t & ,0 \le t \le \frac{1}{8} \\ t + \frac{1}{8} & ,\frac{1}{8} \le t \le \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} & ,0 \le \frac{1}{4} \le \frac{1}{2} \\ t & ,\frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Segue que $(1,0,0), (0,0,0)$ são os expoentes de $\nu(x_0)$ e que $(2,0,0,0), (1,1,0,0)$ são os expoentes de $\nu(x_1)$. Portanto, a forma normal em F destes elementos é $\nu(x_0) = x_0^{-1}$ e $\nu(x_1) = x_0x_1x_0^{-2}$. Ainda mais:

(a) $\chi_0(\nu(x_0)) = -\chi_0(x_0) = -1$ e $\chi_0(\nu(x_1)) = \chi_0(x_0x_1x_0^{-2}) = 1 + 0 - 2 = -1$

(b) $\chi_1(\nu(x_0)) = -\chi_1(x_0) = 1$ e $\chi_1(\nu(x_1)) = \chi_1(x_0x_1x_0^{-2}) = -1 - 1 + 2 = 0$

e, portanto, $\nu^*([\chi_0]) = [\chi_1]$ e $\nu^*([\chi_1]) = [\chi_0]$.

- A matriz de ν^* na base canônica é: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

  Sabemos que $F/[F,F] \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle x_0, x_1 \rangle$. Tome a base canônica dual e_0, e_1 de $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})^*$, ie, $e_0(x_0) = 1$, $e_0(x_1) = 0$; $e_1(x_0) = 0$, $e_1(x_1) = 1$.

  Note que $\chi_0 = e_0$ e $\chi_1 = -e_0 - e_1$. Daí, temos que:

  $\nu^*(e_0) = \nu^*(\chi_0) = \chi_1 = (-1)e_0 + (-1)e_1$ e
  $\nu^*(e_1) = \nu^*(-\chi_0) - \nu^*(\chi_1) = -\chi_1 - \chi_0 = (1)e_1$.

- $\nu^*([-\chi_0]) = [-\chi_1]$.

  Segue diretamente do (1) pois ν^* é linear.

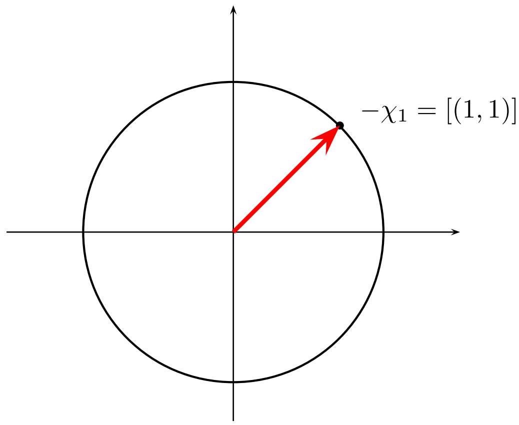
- $\nu^*(\Sigma^m(F, \mathbb{Z})) \subseteq \Sigma^m(F, \mathbb{Z})$.

  Note que $\nu^{-1}(F_\chi) = F_{\nu^*\chi}$ para todo $\chi : F \to \mathbb{R}$. Daí, segue toda resolução projetiva de comprimento m com módulos finitamente gerados de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}F_\chi$ pode ser levada por ν^{-1} a uma outra resolução projetiva de comprimento m com módulos finitamente gerados de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}F_{\nu^*\chi}$. Logo $[\nu^*\chi] \in \Sigma^m(F, \mathbb{Z})$.

Agora, por hipótese, temos que $[-\chi_0] \in \Sigma^m(F, \mathbb{Z})$. [ii] e [iii] implicam diretamente que

$$[-\chi_1] \in \Sigma^m(F, \mathbb{Z}).$$

Este fato pode ser visto através da seguinte figura:



$[-\chi_1] \in \Sigma^m(F, \mathbb{Z})$, $m \geq 2$

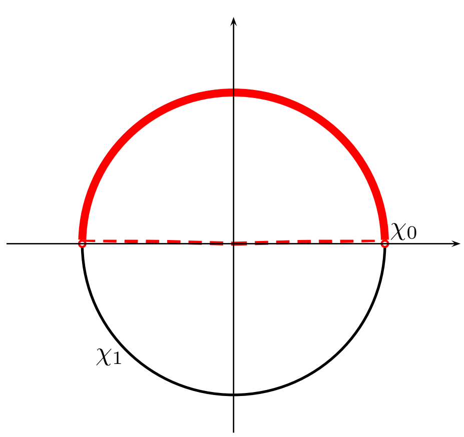
(2) Para qualquer $\chi : F \to \mathbb{R}$ tal que $\chi(x_1) > 0$ temos que $[\chi] \in \Sigma^m(F, \mathbb{Z})$. Pela seção 4.5, sabemos que F, visto como uma extensão HNN com base G_1, letra estável x_0 e subgrupos associados $G_1 \simeq G_2$ age em uma árvore Γ associada a F, sendo que os subgrupos de estabilizadores das 0-células e 1-células de Γ são conjugados a G_1. Como $\{x_i\}_{i\geq 1}$ são conjugados em G_1, temos que $\chi(x_i) = \chi(x_1) > 0$ para todo $i \geq 1$.

Seja $\tilde{\chi} = \chi|_{G_1}$, ie, a restrição de χ ao subgrupo G_1. Podemos identificar F e G_1 via o isomorfismo $\varphi : G_1 \to F$ que leva $x_i \overset{\varphi}{\mapsto} x_{i-1}$ para $i \geq 1$. Em particular, $\varphi(x_2) = x_1$ e $\varphi(x_1) = x_0$. Como $\tilde{\chi}(x_2) = \tilde{\chi}(x_1)$, segue que $[(\tilde{\chi}(x_1), \tilde{\chi}(x_2))] = [(1,1)]$ pois $\tilde{\chi}(x_1) > 0$. Assim, através de φ, identificamos $\tilde{\chi}$ com $-\chi_1$.

Portanto, para cada vértice ou aresta σ de Γ e para o estabilizador F_σ de σ temos $[\chi|_{F_\sigma}] \in \Sigma^m(F_\sigma, \mathbb{Z})$ pois $[\chi|_{F_\sigma}] = [\chi|_{G_1}] = [-\chi_1] \in \Sigma^m(F, \mathbb{Z})$.

Podemos então aplicar o critério de Meinert 5.3.1 e obter que $[\chi] \in \Sigma^m(F, \mathbb{Z})$ e deste modo provamos, como se vê na figura abaixo, que:

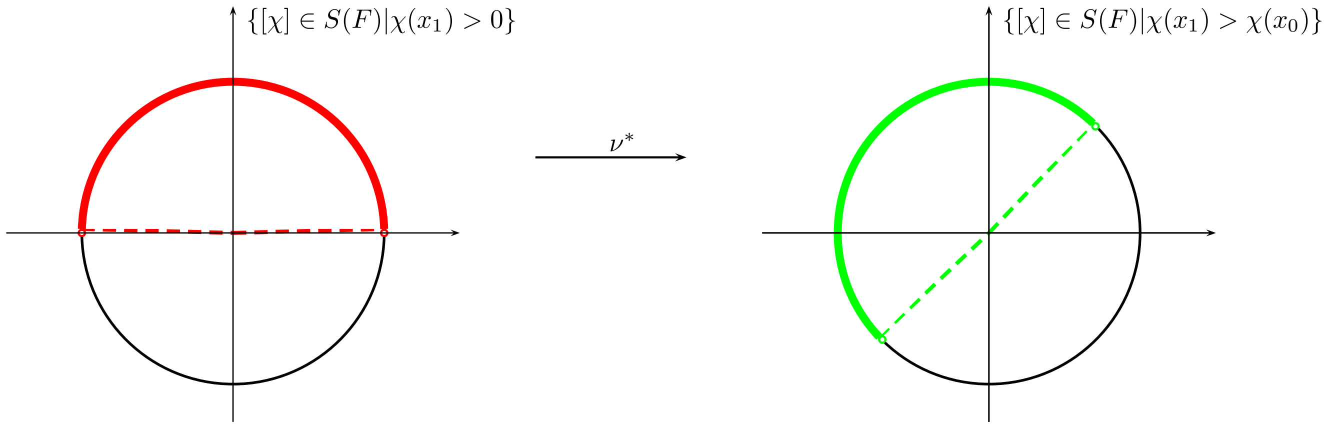
$$\{[\chi] \in S(F) | \chi(x_1) > 0\} \in \Sigma^m(F, \mathbb{Z}).$$



$\{[\chi] \in S(F) | \chi(x_1) > 0\} \in \Sigma^m(F, \mathbb{Z})$, $m \geq 2$

(3) $\nu^*(\{[\chi] \in S(F) | \chi(x_1) > 0\}) = \{[\chi] \in S(F) | \chi(x_1) > \chi(x_0)\} \subseteq \Sigma^m(F, \mathbb{Z})$.

Seja $(\chi(x_0), \chi(x_1)) = (a, b) \in \{[\chi] \in S(F) | \chi(x_1) > 0\}$, ie, $\chi(x_1) = b > 0$. Seja $\rho = \nu^*(\chi)$. Como $\rho(x_0) = -a$ e $\rho(x_1) = -a + b$, temos $\rho(x_1) - \rho(x_0) = b > 0$. O resultado segue aplicando a propriedade (iv) acima.



Disto, concluímos que

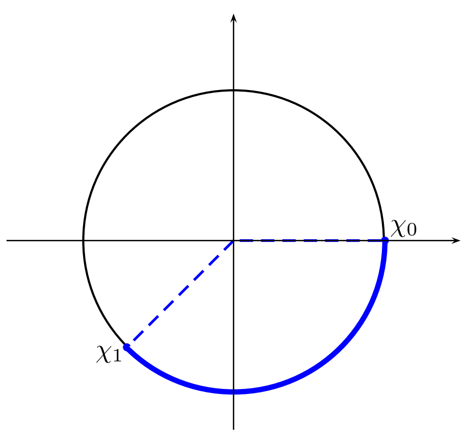
$$S(F) \setminus conv_{\leq 2}\{[\chi_0], [\chi_1]\} =$$

$$\nu^*(\{[\chi] \in S(F) | \chi(x_1) > 0\}) \cup \{[\chi] \in S(F) | \chi(x_1) > \chi(x_0)\} \subseteq \Sigma^m(F, \mathbb{Z})$$

donde temos que:

$$\Sigma^2(F, \mathbb{Z})^c \subseteq \Sigma^m(F, \mathbb{Z})^c \subseteq conv_{\leq 2}\{[\chi_0], [\chi_1]\} = conv_{\leq 2}\Sigma^1(F)^c = conv\Sigma^1(F)^c.$$

Ou seja, como se vê na figura abaixo:



$\Sigma^2(F, \mathbb{Z})^c \subseteq \Sigma^m(F, \mathbb{Z})^c \subseteq conv\Sigma^1(F)^c$

Para a segunda parte, suponha que $[-\chi_0] \in \Sigma^m(F) = \Sigma^2(F) \cap \Sigma^m(F, \mathbb{Z})$. Pelo mesmo argumento acima aplicado a $\Sigma^2(F)$ em vez de $\Sigma^m(F, \mathbb{Z})$, chegamos que:

$$S(F) \setminus conv_{\leq 2}\{[\chi_0], [\chi_1]\} \subseteq \Sigma^2(F).$$

Disto segue que:

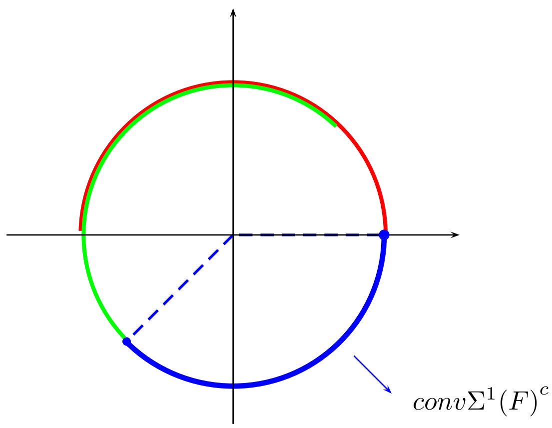
$$\Sigma^2(F)^c \subseteq conv_{\leq 2}\{[\chi_0], [\chi_1]\} = conv_{\leq 2}\Sigma^1(F)^2 = conv\Sigma^1(F)^c.$$

Além disso, por um resultado de [08], já que F não contem subgrupos livres de posto 2 (provado no teorema 6.4.6) então $conv_{\leq 2}\Sigma^1(F)^c \subseteq \Sigma^2(F)^c$ e daí segue facilmente que:

$$\Sigma^2(F)^c = conv_{\leq 2}\{[\chi_0], [\chi_1]\} = conv_{\leq 2}\Sigma^1(F)^2 = conv\Sigma^1(F)^c$$

e também, pelo que já foi feito acima:

$$\Sigma^m(F)^c = \Sigma^2(F)^c \cup \Sigma^m(F, \mathbb{Z})^c = conv_{\leq 2}\Sigma^1(F)^2 = conv\Sigma^1(F)^c.$$



$\Sigma^m(F)^c = conv\Sigma^1(F)^c$, $m \geq 2$

□

Finalmente, observamos que, recentemente, foi demonstrado por R. Bieri, R. Geoghegan, D. Kochloukova que $\Sigma^2(F, \mathbb{Z})^c = conv\Sigma^1(F)^c$ e, portanto,

$$\Sigma^2(F) = \Sigma^2(F, \mathbb{Z}).$$

Referências Bibliográficas

[1] **Artigos**

[01] R. Bieri, R. Strebel, Valuations and finitely-presented metabelian groups, Proc. London Math Soc. (3) 41(1980), 439-464.

[02] R. Bieri, B. Renz, Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups, Comment. Math. Helv. 63 (1988), no. 3, 464-497.

[03] R. Bieri, W. D. Neumann, R. Strebel, A geometric invariant of discrete groups, Invent. Math. 90 , no. 3 (1987), 451-477.

[04] K. S. Brown, R. Geoghehan, An infinite-dimensional torsion-free FP_∞ group, Invent. Math. 77, no 2 (1984), 367-381.

[05] K. S. Brown, Finiteness Properties of Groups, J Pure Appl. Algebra 44 (1987), 45-75.

[06] D. H. Kochloukova, On the Sigma invariants of a group of Richard Thompson, preprint, (2007).

[07] D. H. Kochloukova, Homological and homotopical invariants of groups, Notas de mini-curso proferido na XVII Escola de Álgebra, Cabo Frio-RJ, (2002).

[08] D. H. Kochloukova, Subgourps of construtible nilpotent-by-abelian groups ans a generalization of a result of Bieri, Neumman anda Strebel. J Group Theory 5 (2002), no. 2, 219-231.

[09] H. Meinert, The homological invariants for metabelian groups of finite Prufer rank: a proof of the Σ^m-conjecture, Proc. London Math. Soc. (3) 72(1996), no. 2, 385-424.

[10] H. Meinert, Actions on 2-complexes and the homotopical invariant Σ^2 of a group, J. Pure Appl. Algebra 119 (1997), no. 3, 297-317.

[11] J.W. Cannon, W.J. Floyd, W.R. Parry, Introduction notes on Richard Thompson's groups, Eisengn. Math. (2) 42 (1996), no 3-4, 215-56.

[12] M. Bestvina, N. Brady, Morse theory and finiteness properties of groups, Invent. Math. 129, no. 3 (1997), 445-470.

[13] R. McKenzie, R. J. Thompson, An elementary construction of unsolvable word problems in group theory, Studies in Logic and the Foundations of Math., 71, pp. 457-478, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[2] **Livros**

[14] R. Bieri, Homological dimension of discrete groups, 2nd edition, QMW College Math. Notes, London, 1981.

[15] K. S. Brown, Cohomology of Groups, Springer-Verlag, 1982.

[16] Cohen, Daniel E., Combinatorial Group Theory: a Topological Approach, London Mathematical Society, First Edition, Cambridge, 1989.

[17] J. M. Belk, PhD Thesis, Cornel University, August 2004, arXiv:0708.3609.

[18] C. F. Miller III, Combinatorial Group Theory, March 2004, www.ms.unimelb.edu.au/ cfm/notes/cgt-notes.pdf.

[19] Rotman, J. J., An Introduction to the Homological Algebra, Coleção Springer-Verlag, Quarta Edição, Nova York, 1997.

[20] Rotman, J. J., An Introduction to the Theory of Groups, Coleção Springer-Verlag, Quarta Edição, Nova York, 1999.

[21] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002.