Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Grupos de Lie Compactos

Dissertação de Mestrado

Conrado Damato de Lacerda

sob a orientação de

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro do CNPq

Campinas
2011

Grupos de Lie Compactos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Conrado Damato de Lacerda e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 31 de maio de 2011.

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
(Orientador)

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (UNICAMP)
2. Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino (UNICAMP)
3. Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Lacerda, Conrado Damato de

L116g Grupos de Lie compactos/Conrado Damato de Lacerda-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : Luiz Antonio Barrera San Martin.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Lie, Grupos de. 2.Lie, Algebra de. 3.Topologia. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Compact Lie groups

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Lie groups. 2.Lie algebras. 3.Topology.

Área de concentração: Teoria de Lie

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)

Data da defesa: 20/04/2011

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 20 de abril de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof. (a). Dr (a). PAULO REGIS CARON RUFFINO

Prof. (a). Dr (a). ELIEZER BATISTA

Resumo

Neste trabalho apresentamos os principais resultados da teoria dos grupos de Lie compactos e provamos o Teorema de Weyl sobre os seus grupos fundamentais.

Palavras-chave: grupos de Lie, álgebras de Lie, topologia.

Abstract

In this work we present the main results about compact Lie groups and prove Weyl's Theorem on their fundamental groups.

Key Words: Lie groups, Lie algebras, topology.

Conteúdo

Introdução

A teoria dos grupos de Lie é vasta, assim como o seu campo de aplicações. As perguntas que alguém pode fazer acerca das propriedades desses grupos, mesmo as mais sofisticadas, com freqüência possuem respostas surpreendentemente simples, ainda que difíceis de provar. Este trabalho é a resposta a uma dessas perguntas: "Sob que condições o recobrimento universal de um grupo de Lie compacto e conexo também é compacto?"

Vamos denotar por G um grupo de Lie compacto e conexo qualquer e por $\widetilde{G}$ o seu recobrimento universal. Sabemos da teoria geral dos grupos de Lie que existe um subgrupo discreto e central $D \subseteq \widetilde{G}$ tal que $\widetilde{G}/D \cong G$. (Em particular, D é fechado em $\widetilde{G}$.) Sendo o quociente $\widetilde{G}/D$ compacto, temos que $\widetilde{G}$ é compacto se, e somente se, D é compacto. Como D é discreto, isso ocorre exatamente quando D é finito. Por outro lado, sabemos da teoria geral dos espaços de recobrimento que D é isomorfo ao grupo fundamental de G, e com isso provamos o seguinte resultado.

Teorema 0.1. *O recobrimento universal de um grupo de Lie compacto e conexo G é compacto se, e somente se, $\pi_1(G)$ é finito.*

Vejamos dois exemplos que ilustram bem a situação. Primeiro, consideremos o grupo $SO(3)$. Temos $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$, e portanto $\widetilde{SO(3)}$ deve ser compacto. De fato, $\widetilde{SO(3)} \cong SU(2)$. Agora, seja $\mathbb{T}^n := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ vezes}}$ o toro n-dimensional. Então, $\pi_1(\mathbb{T}^n) \cong \mathbb{Z}^n$, de modo que $\widetilde{\mathbb{T}^n}$ não é compacto. Com efeito, $\widetilde{\mathbb{T}^n}$ é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{R}^n$.

O problema do critério fornecido no Teorema 0.1 é que, em geral, o cálculo do grupo fundamental é uma tarefa árdua e pouco prática. No entanto, numa série de artigos publicados entre 1925 e 1926 que estabelecem os fundamentos da teoria dos grupos compactos, H. Weyl forneceu uma segunda resposta a essa questão, e ela surpreendentemente faz menção apenas à álgebra de Lie do grupo. O resultado que Weyl provou é o seguinte:

Teorema 0.2 (Weyl)**.** *Seja G um grupo de Lie compacto e conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então, $\pi_1(G)$ é finito se, e somente se, $\mathfrak{g}$ é semi-simples.*

Este resultado é notável por estabeler uma forte relação entre uma propriedade topológica de G (a finitude do seu grupo fundamental) e uma propriedade algébrica dos espaços tangentes a G. O leitor deve pressentir que a demonstração do Teorema de Weyl exige a construção de uma teoria substancial acerca dos grupos de Lie compactos, o que faremos na primeira parte deste trabalho. Entre os assuntos abordados estão convergência uniforme, medidas de Haar, representações, álgebras de Lie compactas, toros maximais e outros.

A segunda parte é voltada à prova do Teorema de Weyl propriamente dita. Fornecemos quatro demonstrações, uma em cada capítulo. A do Capítulo 4 utiliza ferramentas de Geometria Riemanniana, e para tanto discutimos propriedades geométricas dos grupos de Lie compactos como métricas riemannianas bi-invariantes e as diferentes noções de curvatura associadas. Já a prova do Capítulo 5 utiliza as propriedades de medida de Haar desenvolvidas no Capítulo 1 e algumas do grupo fundamental discutidas no Capítulo 3. No Capítulo 6, estabelecemos uma forte relação entre os pesos máximos das representações irredutíveis da álgebra de Lie do grupo com os seus espaços de recobrimento, e no Capítulo 7 obtemos o Teorema de Weyl como conseqüência de uma análise dos elementos regulares e singulares do grupo.

Nenhuma tentativa foi feita para fazer deste um texto auto-contido. Assumiremos ao longo desta monografia a familiaridade do leitor com os conteúdos usualmente vistos numa pós-graduação em Matemática (medida e integração de Lebesgue, análise funcional, topologia geral, variedades diferenciáveis e geometria riemanniana). Além disso, também assumiremos que o leitor tenha um bom conhecimento dos conceitos e resultados fundamentais da Teoria de Lie. O livro do Prof. Luiz A. B. San Martin (SAN MARTIN, 1999) é a referência básica adotada para a teoria das álgebras de Lie, podendo ser complementado por (KNAPP, 2002) (especialmente para as interações das álgebras de Lie com os grupos de Lie). Para a teoria básica dos grupos de Lie, as notas de aula do Prof. San Martin (SAN MARTIN, 2006) são uma excelente referência. Também sugerimos a leitura de (KNAPP, 2002) para tópicos avançados.

Este trabalho foi redigido tanto quanto possível no formato de livro-texto. Com isso, desejamos auxiliar os interessados em estudar a teoria dos grupos de Lie compactos com um texto acessível (tendo o leitor cumprido os pré-requisitos mencionados acima) e detalhado. Além disso, devido à quase inexistência de textos em Teoria de Lie publicados em língua portuguesa, esperamos que este trabalho tenha uma boa recepção no meio técnico-científico e que contribua para a produção de uma literatura matemática nacional de qualidade. Encorajamos o leitor a encaminhar quaiquer dúvidas ou sugestões ao endereço eletrônico `conrado.d.lacerda@gmail.com`.

Campinas, maio de 2011.

Parte I

Teoria Geral

Capítulo 1

Análise em Grupos Topológicos

Este primeiro capítulo do nosso trabalho, juntamente ao segundo, tem como objetivo o desenvolvimento da teoria básica de representações para grupos topológicos compactos. Grosso modo, uma representação de um grupo topológico G é um homomorfismo contínuo de G no grupo de operadores lineares invertíveis de um espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita. A partir das representações de um grupo compacto, extrairemos, através de escolhas de bases nos espaços associados, funções contínuas de G a valores em $\mathbb{C}$ que fornecem os coeficientes matriciais destas representações. Um estudo cuidadoso destas funções é capaz de fornecer informações preciosas acerca das representações do grupo e sobre o próprio grupo.

Esta metodologia exige um conhecimento prévio de certas técnicas de Análise em grupos topológicos, principalmente no que se refere à continuidade uniforme e integração, que discutiremos neste capítulo.

1.1 Continuidade Uniforme

Seja G um grupo topológico. Apesar de G não ser, necessariamente, um espaço métrico, é possível definir em G uma noção de continuidade uniforme bastante útil e que será fundamental para o nosso trabalho adiante. Mais precisamente, sejam X um espaço métrico com função de distância d e $f : G \to X$ uma função. Dizemos que f é

- **uniformemente contínua à esquerda** se, para todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança $U \subseteq G$ de 1 tal que $xy^{-1} \in U$ implica $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$ para todos $x, y \in G$;

- **uniformemente contínua à direita** se, para todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança $U \subseteq G$ de 1 tal que $y^{-1}x \in U$ implica $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$ para todos $x, y \in G$.

Lema 1.1. *Seja $f : G \to X$ uma função e consideremos $\iota : x \in G \mapsto x^{-1} \in G$. Então, f é uniformemente contínua à esquerda se, e somente se, $(f \circ \iota)$ é uniformemente contínua à direita.*

Demonstração. Suponhamos f uniformemente contínua à esquerda. Dado $\epsilon > 0$, seja $U \subseteq G$ uma vizinhança de 1 tal que $xy^{-1} \in U$ implica $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$. Consideremos a vizinhança de 1 dada por $V := U^{-1}$. Se $x, y \in G$ são tais que $y^{-1}x \in V$, então $x^{-1}y = (y^{-1}x)^{-1} \in U$ e $d(f(x^{-1}), f(y^{-1})) \leq \epsilon$. Portanto, $(f \circ \iota)$ é uniformemente contínua à direita. Prova-se a recíproca de maneira semelhante. $\square$

Conseqüentemente, uma função $f : G \to X$ é uniformemente contínua à direita se, e somente se, $(f \circ \iota)$ o é à esquerda; para ver isto, basta aplicar o Lema 1.1 à função $(f \circ \iota)$ e observar que $\iota^2 = \mathrm{id}_G$.

Lema 1.2. *Se $f : G \to X$ é uniformemente contínua (à esquerda ou à direita), então f é contínua.*

Demonstração. Pelo Lema 1.1, basta verificar a afirmação quando f é uniformemente contínua à esquerda. Sejam, então, $x_0 \in G$, $\epsilon > 0$ e U uma vizinhança de 1 tal que $xy^{-1} \in U$ implica $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$ para todos $x, y \in G$. Tomando $V := Ux_0$, se $x \in V$ então $xx_0^{-1} \in U$ e portanto $d(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon$. Logo, f é contínua em x_0. $\square$

A partir de agora, restringiremos a discussão ao caso em que $X = \mathbb{C}$.

Proposição 1.3. *Seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função contínua de suporte compacto. Então, f é uniformemente contínua tanto à esquerda quanto à direita.*

Demonstração. Como ι é homeomorfismo, o Lema 1.1 implica que é suficiente provar que f é uniformemente contínua à esquerda. Denotemos $K := \mathrm{supp}(f)$ e tomemos $\epsilon > 0$. Como f é contínua, para cada $x \in K$, existe uma vizinhança U_x de 1 tal que $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon/2$ para todo $y \in U_x x$. Além disso, para cada $x \in K$ existe uma vizinhança simétrica V_x de 1 tal que $V_x^2 \subseteq U_x$. Claramente, $\{V_x x : x \in K\}$ é uma cobertura de K, de modo que existem $x_1, \ldots, x_n \in K$ tais que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} x_i$. Seja $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Então, V é uma vizinhança simétrica de 1. Afirmamos que, se $x, y \in G$ são tais que $xy^{-1} \in V$, então $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. Há dois casos a considerar:

1. $y \in K$: neste caso, existe $i = 1, \ldots, n$ tal que $y \in V_{x_i} x_i$, isto é, $yx_i^{-1} \in V_{x_i}$. Como $xy^{-1} \in V \subseteq V_{x_i}$, então

$$x = (xy^{-1})(yx_i^{-1})x_i \in V_{x_i}^2 x_i \subseteq U_{x_i} x_i,$$

e, portanto,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| \leq \epsilon.$$

2. $y \notin K$: se também tivermos $x \notin K$, então $f(x) = f(y) = 0$ e a conclusão é imediata. Se $x \in K$, então $x \in V_{x_i} x_i$ para algum $i = 1, \ldots, n$, de modo que

$$y = (yx^{-1})(xx_i^{-1})x_i \in V_{x_i}^2 x_i \subseteq U_{x_i} x_i.$$

Logo, $|f(x_i)| = |f(x_i) - f(y)| \leq \epsilon/2$, e, portanto,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i)| \leq \epsilon. \quad \square$$

Corolário 1.4. *Sejam G um grupo compacto e $f : G \to \mathbb{C}$ uma função. Então, são equivalentes:*

(a) f é contínua;

(b) f é uniformemente contínua à esquerda;

(c) f é uniformemente contínua à direita.

Quando G é compacto e $f : G \to \mathbb{C}$ satisfaz a alguma das três condições do Corolário anterior, dizemos simplesmente que f é **uniformemente contínua**.

Continuidade Uniforme e Translações

A operação binária de um grupo G define, para cada elemento $x \in G$, duas transformações em G: $L_x : y \mapsto xy$, usualmente denominada **translação à esquerda** por x, e $R_x : y \mapsto yx$, chamada de **translação à direita** por x. Ainda há uma terceira, denotada por ι, que associa a cada $x \in G$ o seu inverso $x^{-1} \in G$.

Seja X um conjunto e consideremos uma função $f : G \to X$. Podemos definir, para cada $x \in G$, as funções $L_x f$ e $R_x f$ por $(L_x f)(y) = f(x^{-1}y)$ e $(R_x f)(y) = f(yx)$. Estas funções são chamadas de **transladadas** de f por x. Denotando por $F(G, X)$ o conjunto de todas as funções de G em X, uma família de funções $A \subseteq F(G, X)$ é dita **invariante por translações à esquerda** (resp., **à direita**) se $L_x f \in A$ para todo $x \in G$ e $f \in A$ (resp., $R_x f \in A$). Quando A é invariante por translações tanto à direita quanto à esquerda, dizemos simplesmente que A é **invariante por translações**.

Se G é um grupo topológico, é imediato da definição que L_x, R_x e ι são homeomorfismos de G. Isto implica, em particular, que, se X é um espaço topológico e $f : G \to X$ é uma função contínua, então $L_x f, R_x f$ também são contínuas, isto é, $C(G, X)$ é uma família de funções invariante por translações. Temos ainda que $C_b(G)$, o espaço das funções contínuas e limitadas de G em $\mathbb{C}$, e $C_c(G)$, o espaço das funções contínuas de suporte compacto de G em $\mathbb{C}$, também são invariantes por translações.

Sabemos que $C_b(G)$ é um espaço de Banach complexo com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar e munido da norma do supremo. Vemos facilmente que as aplicações $L_x, R_x : C_b(G) \to C_b(G)$ são transformações lineares. Além disso, L_x, R_x são isometrias uma vez que

$$\{|f(x^{-1}y)| : y \in G\} = \{|f(y)| : y \in G\} = \{|f(yx)| : y \in G\}$$

e tomando os supremos destes conjuntos obtemos $||L_x f||_{\sup} = ||f||_{\sup} = ||R_x f||_{\sup}$.

Proposição 1.5. *Seja $f \in C_b(G)$ e consideremos as aplicações $Lf, Rf : G \to C_b(G)$ definidas por $(Lf)(x) = L_x f$, $(Rf)(x) = R_x f$. Então,*

(a) f é uniformemente contínua à esquerda se, e somente se, Lf é contínua;

(b) f é uniformemente contínua à direita se, e somente se, Rf é contínua.

Demonstração. Provaremos (a), a demonstração de (b) sendo inteiramente análoga. Suponhamos, então, que f é uniformemente contínua à esquerda, e tomemos $x_0 \in G$. Dado $\epsilon > 0$, seja V uma vizinhança de 1 tal que $xy^{-1} \in V$ implica $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ e tomemos $U = x_0 V$. Claramente, U é uma vizinhança de x_0, e se $x \in U$ então

$$(x_0^{-1}y)(x^{-1}y)^{-1} = x_0^{-1}x \in V,$$

para todo $y \in G$, o que implica

$$|(L_{x_0}f - L_x f)(y)| = |f(x_0^{-1}y) - f(x^{-1}y)| \leq \epsilon.$$

Portanto, $||L_{x_0}f - L_x f||_{\sup} \leq \epsilon$, e Lf é contínua em x_0.

Reciprocamente, se Lf é contínua, então, em particular, Lf é contínua em 1. Isto significa que, dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança U de 1 — que podemos assumir ser simétrica — tal que $||L_x f - f||_{\sup} \leq \epsilon$ para todo $x \in U$. Se $x, y \in G$ são tais que $xy^{-1} \in U$, então

$$|f(x) - f(y)| = |(L_{yx^{-1}}f - f)(y)| \leq ||L_{yx^{-1}}f - f||_{\sup} \leq \epsilon,$$

e assim f é uniformemente contínua à esquerda. □

Se G é compacto, então $C_b(G) = C(G)$ e toda função contínua é uniformemente contínua. Deste modo, Lf e Rf são contínuas para toda $f \in C(G)$. Considere as aplicações $L, R : G \times C(G) \to C(G)$ definidas da maneira natural. Estas duas aplicações são ações do grupo G no espaço $C(G)$ por isometrias lineares. De fato, dados $x, y \in G$ e $f \in C(G)$, então, para todo $z \in G$, temos

$$\begin{aligned}(L_{xy}f)(z) &= f((xy)^{-1}z) = f(y^{-1}x^{-1}z) = (L_y f)(x^{-1}z) = (L_x(L_y f))(z)\\ (R_{xy}f)(z) &= f(zxy) = (R_y f)(zx) = (R_x(R_y f))(z),\end{aligned}$$

além do fato óbvio que $L_1 f = R_1 f = f$.

Proposição 1.6. *Seja G um grupo topológico, V um espaço normado e α uma ação de G em V por isometrias lineares. Então, α é contínua se, e somente se, para cada $v \in V$, a aplicação $\alpha^v : x \in G \mapsto \alpha(x, v) \in V$ é contínua.*

Demonstração. Se $\alpha : G \times V \to V$ é contínua, então está claro que, fixando a segunda variável de α, obtemos uma função contínua de G em V. Suponhamos, reciprocamente, que α^v é contínua para todo $v \in V$, e provemos que α é contínua. Sejam, então, $(x_0, v_0) \in G \times V$ e $\epsilon > 0$. Como, por hipótese, α^{v_0} é contínua, então existe uma vizinhança $U \subseteq G$ de x_0 tal que, se $x \in U$, então $||\alpha(x, v_0) - \alpha(x_0, v_0)|| \leq \epsilon/2$. Com isso, se $(x, v) \in U \times B(v_0, \epsilon/2)$, então

$$\begin{aligned}||\alpha(x,v) - \alpha(x_0, v_0)|| &\leq ||\alpha(x,v) - \alpha(x, v_0)|| + ||\alpha(x, v_0) - \alpha(x_0, v_0)||\\ &= ||\alpha(x, v - v_0)|| + ||\alpha(x, v_0) - \alpha(x_0, v_0)||\\ &= ||v - v_0|| + ||\alpha(x, v_0) - \alpha(x_0, v_0)||\\ &\leq \epsilon,\end{aligned}$$

provando a continuidade de α em (x_0, v_0).[1] □

Corolário 1.7. *Se G é um grupo compacto, então $L, R : G \times C(G) \to C(G)$ são ações contínuas.*

1.2 Medidas de Haar

A medida de Lebesgue é uma ferramenta indispensável no estudo das funções com domínio em $\mathbb{R}^n$. A principal razão para este fato reside na estreita relação entre esta medida e as estruturas topológica e algébrica do espaço. Se G é um grupo topológico, a compatibilidade entre a topologia de G e as operações do grupo (multiplicação e inversão) é bastante semelhante ao que ocorre em $\mathbb{R}^n$, e podemos nos perguntar se existe em G uma medida com propriedades análogas à de Lebesgue.

Seja G um grupo topológico, que sempre assumiremos ser de Hausdorff, e denotemos por $\mathcal{B}_G$ a σ-álgebra de Borel de G. Uma **medida de Haar**[2] em G é uma medida não-nula $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, +\infty]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) μ é finita nos subconjuntos compactos de G;

(2) μ é **externamente regular**, isto é,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supseteq A, U \text{ aberto}\}$$

para todo $A \in \mathcal{B}_G$;

(3) μ é **internamente regular** nos abertos, ou seja,

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq U, K \text{ compacto}\}$$

para todo $U \subseteq G$ aberto;

(4) μ é **invariante à esquerda**, o que significa que para todos $A \in \mathcal{B}_G$ e $x \in G$ vale $\mu(xA) = \mu(A)$.

As propriedades (1) – (3) acima significam que toda medida de Haar em G é uma medida de Radon no espaço topológico G. Vemos facilmente que (4) é equivalente a

$$\int_G f(xy) d\mu(y) = \int_G f(y) d\mu(y) \tag{1.1}$$

para toda $f \geq 0$ mensurável.

[1] Fica claro nesta demonstração que o resultado pode ser generalizado assumindo apenas que a família de operadores lineares $\{\alpha(x, \cdot) : x \in G\}$ seja uniformemente limitada.

[2] Alfred Haar (1885-1933) foi um matemático húngaro pioneiro na investigação de tais medidas.

Exemplo 1.8. Seja G um grupo finito munido da topologia discreta. Então, G é um grupo topológico e $\mathcal{B}_G = P(G)$. A medida de contagem de G, verifica-se facilmente, é uma medida de Haar para G.

Exemplo 1.9. Seja $G = \mathbb{R}^n$ munido da operação de adição. Com a topologia canônica, G é um grupo topológico, e a medida de Lebesgue é uma medida de Haar. $\square$

Exemplo 1.10. Seja $G = (0, +\infty)$ munido da operação de multiplicação de números reais e da topologia induzida de $\mathbb{R}$. Com esta estrutura, G é um grupo topológico. Consideremos a função $\mu : \mathcal{B}_G \to [0, +\infty]$ dada por

$$\mu(A) := \int_A \frac{1}{y}\, d\lambda(y),$$

em que λ denota a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ restrita a $(0, +\infty)$. Como μ é obtida através de integração de uma função mensurável e positiva por uma medida de Radon, então μ é também é uma medida de Radon em G. Para verificar que μ é invariante à esquerda, tomemos $A \in \mathcal{B}_G$ e $x \in G$. Então,

$$\begin{aligned}
\mu(xA) &= \int_{xA} \frac{1}{y}\, d\lambda(y) = \int_G \frac{\chi_{xA}(y)}{y}\, d\lambda(y) = \int_G \frac{\chi_A(x^{-1}y)}{y}\, d\lambda(y) \\
&= \int_G \frac{\chi_A(y)}{xy}\, d\lambda(xy) = \int_G \frac{\chi_A(y)}{xy}\, x d\lambda(y) = \int_G \frac{\chi_A(y)}{y}\, d\lambda(y) \\
&= \int_A \frac{1}{y}\, d\lambda(y) = \mu(A).
\end{aligned}$$

Portanto, μ é uma medida de Haar em G. $\square$

Apesar da regularidade interna de uma medida de Haar valer, a princípio, apenas para os subconjuntos abertos, ela ainda é válida para outros subconjuntos: um resultado geral da teoria das medidas garante que, se μ é uma medida de Radon em G e $A \in \mathcal{B}_G$ é σ-finito com respeito a μ, então

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ compacto}\}.$$

(Ver (FOLLAND, 1999), p. 216.)

Lema 1.11. *Se G é um grupo topológico conexo localmente compacto e μ é uma medida de Haar em G, então G é σ-finito com respeito a μ. Em particular, μ é internamente regular.*

DEMONSTRAÇÃO. Sendo G conexo, para toda vizinhança V de 1 temos $G = \bigcup_{n \geq 1} V^n$. Tomando, em particular, V compacta, temos que G é uma união enumerável de subconjuntos compactos, e, portanto, σ-finito com respeito a μ. $\square$

Lema 1.12. *Se G é um grupo localmente compacto com uma quantidade enumerável de componentes conexas e μ é uma medida de Haar em G, então G é σ-finito com respeito a μ. Este é o caso de todo grupo compacto localmente conexo*[3] *e todo grupo de Lie.*

Demonstração. O Lema 1.11 garante que a componente conexa G_0 do neutro é σ-finita com respeito a μ. Como as outras componentes conexas são todas da forma xG_0 com $x \in G$ e há uma quantidade enumerável delas, então G é σ-finito com respeito a qualquer medida de Haar. □

Proposição 1.13 (Propriedades das Medidas de Haar)**.** *Sejam G um grupo topológico localmente compacto e μ uma medida de Haar em G.*

(a) Se $U \subseteq G$ é um aberto não-vazio, então $\mu(U) > 0$.

(b) μ é finita se, e somente se, G é compacto.

Demonstração. (a) Dado um compacto $K \subseteq G$, o fato de $\{xU : x \in G\}$ ser uma cobertura de G implica que existem $x_1, \ldots, x_n \in G$ tais que $K \subseteq x_1U \cup \cdots \cup x_nU$. Logo, $\mu(K) \leq n\mu(U)$. Isto significa que se $U \subseteq G$ é um aberto não-vazio tal que $\mu(U) = 0$, então $\mu(K) = 0$ para todo $K \subseteq G$ compacto, o que implica

$$\mu(G) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq G, K \text{ compacto}\} = 0,$$

e isto é um absurdo.

(b) Se G é compacto, claramente $\mu(G) < \infty$. Reciprocamente, suponhamos que G não é compacto e provemos que $\mu(G) = \infty$. Sejam U uma vizinhança compacta de 1 e $V \subseteq G$ uma vizinhança aberta e simétrica de 1 tal que $V^2 \subseteq U$. Como U é compacto, então para todo subconjunto finito $F \subseteq G$ temos que $\bigcup_{x \in F} xU$ é compacto. Como G não é compacto, então $\bigcup_{x \in F} xU \subsetneq G$ para cada $F \subseteq G$ finito. Isto implica que existe uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de G tal que, para todo $n \geq 1$, $x_n \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} x_kU$. Afirmamos que a seqüência de abertos (x_nV) é disjunta. Com efeito, tome $n > m$ e suponha que $x_nV \cap x_mV \neq \emptyset$. Logo, existem $y, z \in V$ tais que $x_ny = x_mz$, ou seja, tais que

$$x_n = x_mzy^{-1} \in x_mVV^{-1} \subseteq x_mU,$$

o que é um absurdo. Com isso,

$$\mu(G) \geq \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} x_nV\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(x_nV) = \sum_{n \geq 1} \mu(V) = +\infty,$$

pois $\mu(V) > 0$. □

[3] Se G é um grupo localmente conexo, suas componentes conexas são subconjuntos abertos de G. Isto significa, se assumirmos adicionalmente que G é compacto, que há apenas uma quantidade finita delas. Além disso, o fato de G ser compacto e de Hausdorff implica que G é localmente compacto.

Existência de Medidas de Haar

Vimos alguns exemplos de medidas de Haar na seção anterior. No entanto, provar a sua existência para classes mais gerais de grupos mostrou-se uma tarefa bastante desafiadora para os matemáticos do início do século XX. O resultado mais importante neste sentido foi obtido por Haar no começo da década de 1930.

Teorema 1.14 (Haar). *Se G é um grupo topológico de Hausdorff localmente compacto, então G admite uma medida de Haar não-nula. Além disso, se μ_1 e μ_2 são medidas de Haar em G, então existe um número real $c > 0$ tal que $\mu_2 = c\mu_1$.*

A demonstração deste fato em toda sua generalidade é bastante envolvente, mas não a faremos neste trabalho. O leitor interessado pode encontrá-la em (FOLLAND, 1999), pp. 342-344. Provaremos aqui um caso especial deste Teorema, a saber, quando G é um grupo de Lie. Primeiramente, lembramos o seguinte resultado de Análise Real.

Teorema 1.15 (Riesz). *Seja X um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto e denotemos por $C_c(X, \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções reais contínuas de suporte compacto com domínio em X. Então, para todo funcional linear $I : C_c(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que satisfaz $I(f) \geq 0$ para toda $f \geq 0$, existe uma medida de Radon $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, +\infty]$ tal que*

$$I(f) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

para toda $f \in C_c(X, \mathbb{R})$. Além disso, μ satisfaz

$$\mu(U) = \sup\{I(f) : 0 \leq f \leq 1, \operatorname{supp}(f) \subseteq U\}$$

para todo $U \subseteq X$ aberto, e

$$\mu(K) = \inf\{I(f) : 0 \leq f \leq 1, K \subseteq \operatorname{supp}(f)\}$$

para todo $K \subseteq X$ compacto.

Um funcional linear como descrito no enunciado do Teorema 1.15 é chamado de **positivo**. A recíproca do Teorema de Riesz também é verdadeira: se μ é uma medida de Radon em X, então $I : f \in C_c(X, \mathbb{R}) \mapsto \int_X f(x) d\mu(x) \in \mathbb{R}$ é um funcional linear positivo. A verificação deste fato é imediata. Deste modo, o Teorema de Riesz estabelece uma correspondência entre medidas de Radon em X e funcionais lineares positivos em $C_c(X, \mathbb{R})$. No caso dos grupos topológicos, ainda temos o seguinte.

Proposição 1.16. *Seja μ uma medida de Radon num grupo topológico localmente compacto G e $I : C_c(G, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ o funcional linear positivo associado. Então, μ é uma medida de Haar se, e somente se, o funcional I satisfaz $I(L_x f) = I(f)$ para toda $f \in C_c(G, \mathbb{R})$ e todo $x \in G$.*

Demonstração. Se μ é de Haar, então, para toda $f \in C_c(G, \mathbb{R})$ e todo $x \in G$, temos por (1.1)

$$I(L_x f) = \int_G f(x^{-1}y)d\mu(y) = \int_G f(y)d\mu(y) = I(f).$$

Reciprocamente, suponhamos que I satisfaz $I(L_x f) = I(f)$ para toda $f \in C_c(G, \mathbb{R})$ e todo $x \in G$. Em vista da propriedade (2) da definição de medida de Haar, para provar que μ é invariante à esquerda, é suficiente verificar que $\mu(xU) = \mu(U)$ para $U \subseteq G$ aberto. Seja, então, $U \subseteq G$ aberto e tomemos $f \in C_c(G, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq f \leq 1$ e $\text{supp}(f) \subseteq xU$. Consideremos a função $L_{x^{-1}} f \in C_c(G, \mathbb{R})$. Claramente, $0 \leq L_{x^{-1}} f \leq 1$, e além disso $\text{supp}(L_{x^{-1}} f) \subseteq U$. De fato, se $y \in G$ é tal que $(L_{x^{-1}} f)(y) = f(xy) \neq 0$, então $xy \in \text{supp}(f)$. Logo,

$$x \cdot \{y \in G : (L_{x^{-1}} f)(y) \neq 0\} \subseteq \text{supp}(f),$$

o que implica que $x \cdot \text{supp}(L_{x^{-1}} f) \subseteq \text{supp}(f) \subseteq xU$; isto é, $\text{supp}(L_{x^{-1}} f) \subseteq U$. Com isso,

$$\begin{aligned} \mu(xU) &= \sup\{I(f) : 0 \leq f \leq 1,\ \text{supp}(f) \subseteq xU\} \\ &= \sup\{I(L_{x^{-1}} f) : 0 \leq f \leq 1,\ \text{supp}(f) \subseteq xU\} \\ &\leq \sup\{I(f) : 0 \leq f \leq 1,\ \text{supp}(f) \subseteq U\} \\ &= \mu(U). \end{aligned}$$

Portanto, $\mu(xU) \leq \mu(U)$ para todo $U \subseteq G$ aberto e todo $x \in G$. Esta propriedade também implica que $\mu(U) = \mu(x^{-1}xU) \leq \mu(xU)$, e obtemos a igualdade desejada. □

Um funcional linear positivo $I : C_c(G, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que satisfaz $I(L_x f) = I(f)$ para toda $f \in C_c(G, \mathbb{R})$ e todo $x \in G$ é chamado de **invariante à esquerda**. Deste modo, para garantir a existência de uma medida de Haar num grupo topológico localmente compacto G, é suficiente provar a existência de um funcional linear positivo e invariante à esquerda $I : C_c(G) \to \mathbb{R}$. A dificuldade de se provar o Teorema de Haar na sua maior generalidade é exatamente garantir a existência de um tal funcional linear em $C_c(G, \mathbb{R})$.

Demonstração do Teorema 1.14. Consideremos um grupo de Lie G, e denotemos por $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie formada pelos campos vetoriais invariantes à esquerda sobre G. Seja w uma n-forma alternada não-nula em $\mathfrak{g}$ ($n = \dim \mathfrak{g}$), e seja ω a n-forma diferencial em G definida por

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_n) = w(V_1, \ldots, V_n),$$

em que $x \in G$, $v_1, \ldots, v_n \in T_x G$ e $V_1, \ldots, V_n \in \mathfrak{g}$ são os únicos campos invariantes à esquerda tais que $(V_i)_x = v_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Claramente, ω é não-degenerada. Afirmamos que ω é invariante à esquerda, isto é, que $(L_x)^* \omega = \omega$ para todo $x \in G$. Com efeito, se $x, y \in G$ e $v_1, \ldots, v_n \in T_y G$, então, tomando campos $V_1, \ldots, V_n \in \mathfrak{g}$ tais que $(V_i)_y = v_i$, temos

$$\begin{aligned} [(L_x)^*\omega]_y(v_1,\ldots,v_n) &= \omega_{xy}((L_x)_*v_1,\ldots,(L_x)_*v_n) \\ &= \omega_{xy}((L_x)_*(V_1)_y,\ldots,(L_x)_*(V_n)_y) \\ &= \omega_{xy}([(L_x)_*V_1]_{xy},\ldots,[(L_x)_*V_n]_{xy}) \\ &= w(V_1,\ldots,V_n) \\ &= \omega_y(v_1,\ldots,v_n). \end{aligned}$$

A forma diferencial ω acima, por ser não-degenerada, determina uma orientação em G, e esta orientação, por sua vez, define uma noção de integração de n-formas diferenciais de suporte compacto sobre G. Isso nos permite definir o funcional

$$I : f \in C_c(G,\mathbb{R}) \longmapsto \int_G f\omega \in \mathbb{R}.$$

Claramente I é linear e positivo, de modo que, pelo Teorema 1.15, I determina uma medida de Radon μ em G. Resta-nos verificar que I é invariante à esquerda para que μ seja de Haar. Para tanto, sejam $f \in C_c(G,\mathbb{R})$ e $x \in G$. Dados $y \in G$ e $v_1,\ldots,v_n \in T_yG$, temos

$$\begin{aligned} [(L_xf)\omega]_y(v_1,\ldots,v_n) &= f(x^{-1}y)\omega_y(v_1,\ldots,v_n) \\ &= f(x^{-1}y)[(L_{x^{-1}})^*\omega]_y(v_1,\ldots,v_n) \\ &= f(x^{-1}y)\omega_{x^{-1}y}((L_{x^{-1}})_*v_1,\ldots,(L_{x^{-1}})_*v_n) \\ &= [(L_{x^{-1}})^*(f\omega)]_y(v_1,\ldots,v_n). \end{aligned}$$

Logo, $(L_xf)\omega = (L_{x^{-1}})^*(f\omega)$, e isto implica que

$$I(L_xf) = \int_G (L_xf)\omega = \int_G (L_{x^{-1}})^*(f\omega).$$

Uma vez que $L_{x^{-1}}$ é um difeomorfismo de G que preserva a orientação escolhida (pois preserva a forma volume que a determina), concluimos que

$$I(L_xf) = \int_G (L_{x^{-1}})^*(f\omega) = \int_G f\omega = I(f).$$

Com isto, provamos a existência de uma medida de Haar para o grupo de Lie G.

Consideremos, agora, duas medidas de Haar em G, a saber μ_1 e μ_2. Provaremos que existe um número real $c > 0$ tal que $\mu_2 = c\mu_1$. Seja $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Então, μ é uma medida em G que é absolutamente contínua com respeito a μ_1. Uma vez que G é um grupo de Lie, então ambas μ e μ_1 são σ-finitas, de modo que, pelo Teorema de Radon-Nikodým, existe uma função mensurável $f : G \to [0,+\infty]$ tal que $\mu_1(A) = \int_A f(x)d\mu(x)$ para todo $A \in \mathcal{B}_G$. Para cada $x \in G$, seja $\mu_x : \mathcal{B}_G \to [0,+\infty]$ a medida definida por

$\mu_x(A) = \int_A (L_x f)(y) d\mu(y)$. Se $A \in \mathcal{B}_G$, então

$$\begin{aligned}
\mu_x(A) &= \int_G f(x^{-1}y)\chi_A(y)d\mu(y) = \int_G f(y)\chi_A(xy)d\mu(y) \\
&= \int_G f(y)\chi_{x^{-1}A}(y)d\mu(y) = \int_{x^{-1}A} f(y)d\mu(y) \\
&= \mu_1(x^{-1}A) = \mu_1(A).
\end{aligned}$$

Logo, $\mu_x = \mu_1$ e $f = L_x f$ μ-q.t.p. para todo $x \in G$.

Seja $F : G \times G \to [0, +\infty]$ a função definida por $F(x, y) = (L_x f)(y) = f(x^{-1}y)$. Como F é a composta da aplicação $(x, y) \in G \times G \mapsto x^{-1}y \in G$, que é contínua, com f, então F é mensurável. Com isso, se $A, B \in \mathcal{B}_G$, então

$$\begin{aligned}
\int_{A\times B} F(x,y)d(\mu\times\mu)(x,y) &= \int_A \left(\int_B F(x,y)d\mu(y)\right) d\mu(x) \\
&= \int_A \left(\int_B (L_x f)(y)d\mu(y)\right) d\mu(x) \\
&= \int_A \left(\int_B f(y)d\mu(y)\right) d\mu(x) \\
&= \int_{A\times B} f(y)d(\mu\times\mu)(x,y)
\end{aligned}$$

pelo Teorema de Tonelli. Tomando $N := \{(x, y) \in G\times G : F(x, y) \neq f(y)\}$, concluimos que $(\mu \times \mu)(N) = 0$.

Agora, para cada $y \in G$, seja $N^y := \{x \in G : (x, y) \in N\}$. Como a função $y \in G \mapsto \mu(N^y) \in [0, +\infty]$ é mensurável e

$$\int_G \mu(N^y)d\mu(y) = (\mu \times \mu)(N) = 0,$$

então $\mu(N^y) = 0$ μ-q.t.p. Portanto, podemos escolher $y_0 \in G$ tal que $\mu(N^{y_0}) = 0$. Uma vez que

$$N^{y_0} = \{x \in G : f(x^{-1}y_0) \neq f(y_0)\},$$

então $f = f(y_0)$ μ-q.t.p, e portanto

$$\mu_1(A) = \int_A f(x)d\mu(x) = \int_A f(y_0)d\mu(x) = f(y_0)\mu(A)$$

para todo $A \in \mathcal{B}_G$. Logo, $\mu_1 = f(y_0)\mu$. Além disso, $c = f(y_0)$ é um número real positivo pois, caso contrário, μ_1 seria identicamente nula. Aplicando este argumento também à medida μ_2, obtemos um número real $d > 0$ tal que $\mu_2 = d\mu$, e portanto $\mu_1 = cd^{-1}\mu_2$. □

Se G é compacto e μ é uma medida de Haar em G, então μ é finita e podemos normalizá-la para obter uma medida de Haar em G tal que $\mu(G) = 1$. Uma medida de Haar com esta propriedade é, claramente, única e, no contexto dos grupos compactos, sempre assumiremos que quaisquer medidas de Haar estarão normalizadas. Além disso, utilizaremos a notação simplificada

$$\int_G f(x)dx$$

para denotar a integral de uma função com respeito a uma medida de Haar normalizada.

A Função Modular

Seja G um grupo topológico localmente compacto e μ uma medida de Haar em G. Fixado $x \in G$, definimos $\mu_x : \mathcal{B}_G \to [0, +\infty]$ por $\mu_x(A) = \mu(Ax)$. Uma vez que $R_x : y \mapsto yx$ é um homeomorfismo, então μ_x é uma medida de Radon em G, e vemos facilmente que μ_x é invariante à esquerda. Logo, μ_x é uma medida de Haar. Pelo Teorema 1.14, existe um único número real $\Delta(x) > 0$ tal que $\mu_x = \Delta(x)\mu$.

Vale a pena observar que $\Delta(x)$ não depende da medida de Haar μ escolhida. De fato, se μ' é uma outra medida de Haar em G, então $\mu' = c\mu$ para algum número real $c > 0$. Logo, se $x \in G$, temos $\mu'_x = c\mu_x$. Analogamente, para cada $x \in G$ existe um número real $\Delta'(x) > 0$ definido por $\mu'_x = \Delta'(x)\mu'$. Então,

$$\mu'_x = c\mu_x = c\Delta(x)\mu = \Delta(x)\mu',$$

e portanto $\Delta'(x) = \Delta(x)$. A função $\Delta : G \to (0, +\infty)$ assim definida é chamada de **função modular** de G.

Proposição 1.17. *Sejam G um grupo topológico localmente compacto, Δ a sua função modular e μ uma medida de Haar em G.*

(a) Se $f : G \to \mathbb{C}$ é integrável com respeito a μ e $x \in G$, então

$$\int_G f(yx)d\mu(y) = \Delta(x^{-1}) \int_G f(y)d\mu(y).$$

(b) Δ é um homomorfismo de grupos contínuo.

Demonstração. (a) Pela definição de integral, é suficiente verificar a igualdade no caso em que $f = \chi_A$ para algum $A \in \mathcal{B}_G$ de medida finita. Dado $x \in G$, para todo $y \in G$ temos $\chi_A(yx) = \chi_{Ax^{-1}}(y)$, de modo que

$$\int_G \chi_A(yx)d\mu(y) = \mu(Ax^{-1}) = \Delta(x^{-1})\mu(A) = \Delta(x)^{-1} \int_G \chi_A(y)d\mu(y).$$

(b) Para ver que Δ é homomorfismo de grupos, basta observar que

$$\Delta(xy)\mu(A) = \mu_{xy}(A) = \mu(Axy) = \Delta(y)\mu(Ax) = \Delta(y)\Delta(x)\mu(A) = \Delta(x)\Delta(y)\mu(A)$$

para todos $x, y \in G$ e $A \in \mathcal{B}_G$. Para ver que Δ é contínua, primeiramente lembramos que o fato de μ ser uma medida de Radon implica que existe uma função contínua $f : G \to \mathbb{C}$ de suporte compacto tal que $\int_G f(y)d\mu(y) = 1$. Como, pela Proposição 1.3, f é uniformemente contínua, então

$$Rf : x \in G \mapsto R_{x^{-1}}f \in C_c(G)$$

é contínua (com respeito à norma do supremo). Portanto, a função

$$x \in G \mapsto \int_G (R_{x^{-1}}f)(y)d\mu(y) \in \mathbb{R}$$

é contínua. Por outro lado, pelo item (a), esta função coincide com Δ, e a afirmação está provada. $\square$

Um grupo topológico localmente compacto G é chamado de **unimodular** se a sua função modular é constante e igual a 1, ou, equivalentemente, se G admite uma medida de Haar que também é invariante à direita (no sentido que $\mu(Ax) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}_G$ e todo $x \in G$).

Lema 1.18. *Se G é um grupo compacto, então G é unimodular.*

DEMONSTRAÇÃO. A função modular de G é um homomorfismo contínuo de G em $(0, +\infty)$, o que implica que a sua imagem é um subgrupo compacto de $(0, +\infty)$. A única possibilidade é $\Delta(G) = \{1\}$. $\square$

Existem outras classes de grupos topológicos além dos compactos que são unimodulares; por exemplo, os abelianos, os grupos de Lie semi-simples e os nilpotentes. As verificações destes fatos podem ser vistas em (KNAPP, 2002), p. 535.

Sejam G um grupo topológico localmente compacto e μ uma medida de Haar em G. Uma vez que $\iota : x \mapsto x^{-1}$ é um homeomorfismo de G, podemos definir uma medida de Radon $\widetilde{\mu} : \mathcal{B}_G \to [0, +\infty]$ por $\widetilde{\mu}(A) = \mu(A^{-1})$. Esta medida é invariante à direita, pois se $A \in \mathcal{B}_G$ e $x \in G$, então

$$\widetilde{\mu}(Ax) = \mu(x^{-1}A^{-1}) = \mu(A^{-1}) = \widetilde{\mu}(A).$$

No entanto, $\widetilde{\mu}$ não é necessariamente invariante à esquerda. O resultado a seguir estabelece a principal relação entre μ e $\widetilde{\mu}$ utilizando a função modular.

Proposição 1.19. *Dado $A \in \mathcal{B}_G$, temos que*

$$\widetilde{\mu}(A) = \int_A \Delta(x)^{-1}d\mu(x).$$

Em particular, se $f : G \to \mathbb{C}$ é integrável com respeito a $\widetilde{\mu}$, então $f\Delta^{-1}$ é integrável com respeito a μ e vale a igualdade

$$\int_G f(x)d\widetilde{\mu}(x) = \int_G f(x)\Delta(x)^{-1}d\widetilde{\mu}(x).$$

Demonstração. Temos que $f\Delta^{-1} \in C_c(G;\mathbb{R})$ para cada $f \in C_c(G;\mathbb{R})$, de modo que $\int_G f(x)\Delta(x)^{-1}d\mu(x) \in \mathbb{R}$. Definimos o funcional $I : C_c(G;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por

$$I(f) = \int_G f(x)\Delta(x)^{-1}d\mu(x),$$

que claramente é linear e positivo. Além disso, I é invariante à direita, pois se $f \in C_c(G;\mathbb{R})$ e $x \in G$ então

$$\begin{aligned} I(R_xf) &= \int_G f(yx)\Delta(y)^{-1}d\mu(y) = \Delta(x)\int_G f(yx)\Delta(yx)^{-1}d\mu(y) \\ &= \Delta(x)\int_G \left[R_x(f\Delta^{-1})\right](y)d\mu(y) = \Delta(x)\Delta(x)^{-1}\int_G f(y)\Delta(y)^{-1}d\mu(y) \\ &= I(f) \end{aligned}$$

pela Proposição 1.17. Isto implica que a medida de Radon $\nu : \mathcal{B}_G \to [0,+\infty]$ definida por I é invariante à direita. Uma vez que, por definição,

$$\int_G f(x)d\nu(x) = \int_G f(x)\Delta(x)^{-1}d\mu(x) \tag{1.2}$$

para toda $f \in C_c(G,\mathbb{R})$, a mesma igualdade é válida para toda f integrável com respeito a ν. Como $\widetilde{\nu}$ é uma medida de Haar em G, então $\widetilde{\nu} = c\mu$ para algum número real $c > 0$ pelo Teorema 1.14, isto é, $\nu = c\widetilde{\mu}$. Afirmamos que $c = 1$. De fato, suponhamos, por absurdo, que $c \neq 1$, e tomemos, pela continuidade de Δ, uma vizinhança simétrica $U \subseteq G$ de 1 tal que $|\Delta(x)^{-1} - 1| \leq |c-1|/2$ para todo $x \in U$. Como G é localmente compacto, podemos assumir que $\mu(U) < +\infty$. Além disso, como U é simétrica, então $\mu(U) = \widetilde{\mu}(U)$, de modo que

$$\begin{aligned} |c-1|\mu(U) &= |c\widetilde{\mu}(U) - \mu(U)| = |\nu(U) - \mu(U)| \\ &= \left|\int_G \chi_U(x)d\nu(x) - \int_G \chi_U(x)d\mu(x)\right| \\ &= \left|\int_G \chi_U(x)(\Delta(x)^{-1} - 1)d\mu(x)\right| \\ &\leq \frac{|c-1|\mu(U)}{2}, \end{aligned}$$

o que claramente é um absurdo. Portanto, $c = 1$ e $\nu = \widetilde{\mu}$. Este fato mais a igualdade (1.2) garantem o resultado. □

Corolário 1.20. *Se G é um grupo unimodular, então $\widetilde{\mu} = \mu$ para toda medida de Haar μ em G. Neste caso, temos também que*

$$\int_G f(x^{-1})d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x)$$

para toda função $f : G \to \mathbb{C}$ integrável.

1.3 A Álgebra de Convolução de um Grupo Compacto

Como mencionamos no parágrafo que introduz o capítulo, o sucesso do estudo das representações de um grupo compacto depende de uma análise cuidadosa do espaço $C(G)$. Por razões técnicas, no entanto, é conveniente mergulhar $C(G)$ num espaço de Hilbert (separável, quando possível) e efetuar a análise neste novo espaço. Existe uma escolha natural para este espaço: trata-se do espaço $L^2(G)$ com respeito à medida de Haar normalizada de G.

Como veremos adiante, ainda é possível definir em $L^2(G)$ uma operação binária, o chamado **produto de convolução**, que faz deste espaço uma álgebra de Banach. Esta álgebra, que chamamos de **álgebra de convolução** do grupo, é uma peça fundamental na teoria de representações dos grupos compactos.

O Espaço $L^2(G)$

Sejam G um grupo compacto e μ a sua medida de Haar normalizada. Denotaremos por $L^2(G)$ o conjunto de todas as funções Borel-mensuráveis $f : G \to \mathbb{C}$ e tais que $\int_G |f(x)|^2 dx < +\infty$, fatorado pela relação de equivalência na qual duas funções são equivalentes se elas são iguais μ-q.t.p. Por simplicidade, adotaremos a convenção de que os elementos de $L^2(G)$ são funções, e não classes de equivalência, e que duas funções de $L^2(G)$ que coincidem no complementar de um conjunto de medida nula são a mesma.

Sabemos que $L^2(G)$ é um espaço vetorial complexo com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar e que a aplicação $(\ ,\ ) : L^2(G) \times L^2(G) \to \mathbb{C}$ definida por

$$(f, g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}dx$$

é um produto interno que torna $L^2(G)$ um espaço de Hilbert. Como é usual na literatura, dada uma função $f \in L^2(G)$, denotaremos por $||f||_2$ o número real

$$\sqrt{(f, f)} = \left(\int_G |f(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

e lembramos que a aplicação $f \in L^2(G) \mapsto ||f||_2 \in \mathbb{R}$ é uma norma.

O resultado a seguir é um fato geral de Análise Real, cuja demonstração omitiremos. O leitor interessado pode encontrá-la em (FOLLAND, 1999), p. 217.

Teorema 1.21. *Sejam X um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto e μ uma medida de Radon em X. Então, para todo $p \in [1, +\infty)$, $C_c(X)$ é um subespaço denso de $L^p(X, \mu)$.*

Corolário 1.22. *Seja G um grupo compacto. Então, $C(G)$ é um subespaço denso de $L^2(G)$.*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 1.21 ao caso $p = 2$, lembrando que, como G é compacto, então $C_c(G) = C(G)$. □

Dizemos que um grupo topológico G é **separável** se G admite um subconjunto enumerável e denso e, além disso, a topologia de G é metrizável. Como sabemos da Topologia Geral, esta definição implica, em particular, que a topologia de todo grupo topológico separável admite uma base enumerável. Todo grupo de Lie é separável.

Proposição 1.23. *Seja G um grupo compacto separável. Então, $L^2(G)$ é um espaço de Hilbert separável. Em particular, toda base de Hilbert de $L^2(G)$ é enumerável.*

Demonstração. Pelo Corolário 1.22, é suficiente provar que $C(G)$, munido da norma $|| \ ||_2$, é separável. Por outro lado, $\mu(G) = 1$ implica que $|| \ ||_2 \leq || \ ||_{\text{sup}}$, e portanto basta provar que $(C(G), || \ ||_{\text{sup}})$ é separável.

A separabilidade de G implica, como observamos acima, que a topologia de G admite uma base unumerável; seja $\mathcal{O}$ uma tal base. Para cada par de abertos $U, V \in \mathcal{O}$ que satisfaz $\overline{U} \subseteq V$, escolhamos, pelo Lema de Urysohn[4], uma função contínua $f_{U,V} : G \to \mathbb{R}$ tal que $f_{U,V}|_U \equiv 1$ e $f_{U,V}|_{G \setminus V} \equiv 0$, e denote por $\mathcal{F} \subseteq C(G)$ o conjunto de todas estas funções. Como G é localmente compacto, então $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Além disso, como $\mathcal{O}$ é enumerável, então $\mathcal{F}$ também é enumerável.

Afirmamos que $\mathcal{F}$ separa pontos de G. De fato, sejam $x, y \in G$ com $x \neq y$ e $A, B \subseteq G$ abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $y \in B$. O conjunto $G \setminus A$ é fechado e contém B; logo, $G \setminus A$ contém $\overline{B}$. Já $G \setminus \overline{B}$ é aberto e $x \in G \setminus \overline{B}$, de modo que existem $U, V \in \mathcal{O}$ tais que

$$x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V \subseteq G \setminus \overline{B}.$$

Uma rápida verificação baseada nestas relações mostra que $f_{U,V}(x) = 1$ e $f_{U,V}(y) = 0$, e a afirmação está provada.

Para cada número natural $n \geq 1$, seja $\mathcal{F}^n$ o conjunto formado pelos produtos da forma $f_1 \cdots f_n$, em que $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$. Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})\mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})\mathcal{F}^n \\ \mathcal{A}' &= \mathbb{C}\mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}\mathcal{F}^n, \end{aligned}$$

[4]Como G é metrizável, então é normal, e podemos usar o Lema de Urysohn.

em que $\mathbf{1} : G \to \mathbb{C}$ é função constante e igual a 1. Observamos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ são subálgebras de $C(G)$, $\mathcal{A}$ sobre o corpo $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ e $\mathcal{A}'$ sobre $\mathbb{C}$. Claramente, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$. Além disso, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ possuem as seguintes propriedades:

1. *$\mathcal{A}$ é enumerável:* Segue imediatamente de $\mathcal{F}$ e $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ serem enumeráveis.

2. *$\mathcal{A}$ é denso em $\mathcal{A}'$:* Seja $f \in \mathcal{A}'$ e escrevamos

$$f = z_0\mathbf{1} + \sum_{j=1}^{n} z_j f_j,$$

em que $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ e $f_j \in \mathcal{F}^j$. Dado $\epsilon > 0$, sejam $w_0, w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ tais que

$$|z_j - w_j| \leq \frac{\epsilon}{(n+1)\sup\{1, ||f_1||_{\sup}, \ldots, ||f_n||_{\sup}\}}, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

e tomemos

$$g = w_0\mathbf{1} + \sum_{j=1}^{n} w_j f_j \in \mathcal{A}.$$

Então,

$$\begin{aligned} ||f - g||_{\sup} &\leq |z_0 - w_0| + \sum_{j=1}^{n} |z_j - w_j| \cdot ||f_j||_{\sup} \\ &\leq \left(|z_0 - w_0| + \sum_{j=1}^{n} |z_j - w_j| \right) \sup\{1, ||f_1||_{\sup}, \ldots, ||f_n||_{\sup}\} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

3. *$\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ separam pontos de G:* De fato, $\mathcal{F}$ separa pontos de G e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.

4. *$\mathcal{A}'$ contém as funções constantes:* Imediato da definição de $\mathcal{A}'$.

5. *$\mathcal{A}'$ é fechada por conjugações:* Decorre da definição de $\mathcal{A}'$, lembrando que os elementos de $\mathcal{F}$ são funções reais.

Como G é um espaço métrico compacto, os fatos 3, 4 e 5 acima implicam, pelo Teorema de Stone-Weierstrass, que $\mathcal{A}'$ é um subconjunto denso de $C(G)$. Por outro lado, $\mathcal{A}$ é enumerável e denso em $\mathcal{A}'$, o que completa a demonstração. $\square$

Translações em $L^2(G)$

Dada $f \in L^2(G)$, com G um grupo compacto, para cada $x \in G$ podemos formar as funções $L_x f, R_x f : G \to \mathbb{C}$ da maneira descrita na primeira seção deste capítulo. Como G é unimodular, então

$$\int_G |(L_x f)(y)|^2 dy = \int_G |f(x^{-1}y)|^2 dy = \int_G |f(y)|^2 dy$$

e
$$\int_G |(R_x f)(y)|^2 dy = \int_G |f(yx)|^2 dy = \int_G |f(y)|^2 dy,$$
e concluimos que o espaço $L^2(G)$ é invariante por translações. Estas equações mostram, adicionalmente, que as aplicações $L_x, R_x : L^2(G) \to L^2(G)$ são isometrias lineares com respeito a $|| \, ||_2$.

Definimos $L, R : G \times L^2(G) \to L^2(G)$ por $L(x, f) = L_x f, R(x, f) = R_x f$. Assim como no caso do espaço $C(G)$, L, R são ações de G sobre $L^2(G)$.

Proposição 1.24. *Seja G um grupo compacto. Então, L, R são ações contínuas de G em $L^2(G)$.*

Demonstração. Como ambas L, R se dão por isometrias lineares, então pela Proposição 1.6 é suficiente provar que as aplicações $Lf : x \mapsto L_x f$ e $Rf : x \mapsto R_x f$ são contínuas para toda $f \in L^2(G)$. Provaremos apenas a continuidade de Lf, pois a de Rf é análoga. Dados $x_0 \in G$ e $\epsilon > 0$, escolhamos, pela densidade de $C(G)$ em $L^2(G)$, uma função $h \in C(G)$ tal que $||f - h||_2 \leq \epsilon/3$. Seja $U \subseteq G$ uma vizinhança de x_0 tal que
$$||L_x h - L_{x_0} h||_{\sup} \leq \frac{\epsilon}{3}$$
para todo $x \in U$, conforme provamos na Proposição 1.5. Deste modo,
$$\begin{aligned} ||L_x f - L_{x_0} f||_2 &\leq ||L_x f - L_x h||_2 + ||L_x h - L_{x_0} h||_2 + ||L_{x_0} h - L_{x_0} f||_2 \\ &\leq ||L_x (f - h)||_2 + ||L_{x_0} (h - f)||_2 + ||L_x h - L_{x_0} h||_{\sup} \\ &= ||f - h||_2 + ||h - f||_2 + ||L_x h - L_{x_0} h||_{\sup} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$
para todo $x \in U$, e a continuidade de Lf em x_0 está provada. □

O Produto de Convolução

Sejam G um grupo compacto munido de uma medida de Haar normalizada μ, e $f, g \in L^2(G)$. A **convolução** de f por g é a função $f * g : G \to \mathbb{C}$ definida por
$$(f * g)(x) = \int_G f(xy^{-1}) g(y) dy.$$

Como
$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int_G |f(xy^{-1})| \cdot |g(y)| dy = \int_G |((L_{x^{-1}} f) \circ \iota)(y)| \cdot |g(y)| dy \\ &= \big(|(L_{x^{-1}} f) \circ \iota|, |g| \big) \leq ||(L_{x^{-1}} f) \circ \iota||_2 ||g||_2 \\ &= ||f||_2 ||g||_2, \end{aligned}$$
então $f * g$ está bem-definida. ($||(L_{x^{-1}} f) \circ \iota||_2 = ||f||_2$ pois G é unimodular.)

Lema 1.25. *Sejam G um grupo compacto e $f, g \in L^2(G)$. Então:*

(a) $(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy$;

(b) $L_x(f * g) = (L_x f) * g$ *e* $R_x(f * g) = f * (R_x g)$.

Demonstração. (a) Como G é unimodular, então

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_G f(xy^{-1})g(y)dy = \int_G f((yx^{-1})^{-1})g((yx^{-1})x)dy \\ &= \int_G f(y^{-1})g(yx)dy = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy. \end{aligned}$$

(b) Se $y \in G$ é qualquer, então

$$\begin{aligned} (L_x(f * g))(y) &= (f * g)(x^{-1}y) = \int_G f(x^{-1}yz^{-1})g(z)dz \\ &= \int_G (L_x f)(yz^{-1})g(z)dz = (L_x f) * g. \end{aligned}$$

Além disso, pelo item (a),

$$\begin{aligned} (R_x(f * g))(y) &= (f * g)(yx) = \int_G f(z)g(z^{-1}yx)dz \\ &= \int_G f(z)(R_x g)(z^{-1}y)dz = (f * (R_x g))(y). \quad \square \end{aligned}$$

Proposição 1.26. *Se G é um grupo compacto e $f, g \in L^2(G)$, então $f * g$ é contínua. Em particular, $f * g \in L^2(G)$.*

Demonstração. Se $g = 0$, então $f * g = 0$, como vemos facilmente da definição. Suponhamos, então, que $g \neq 0$. Sejam $x_0 \in G$ e $\epsilon > 0$, e tomemos uma vizinhança $U \subseteq G$ de x_0 tal que $||L_{x^{-1}} f - L_{x_0^{-1}} f||_2 \leq \epsilon/||g||_2$ para todo $x \in U$. Deste modo, dado $x \in U$, então

$$\begin{aligned} |(f * g)(x) - (f * g)(x_0)| &\leq \int_G |f(xy^{-1}) - f(x_0 y^{-1})| \cdot |g(y)|dy \\ &\leq \left(\int_G |f(xy^{-1}) - f(x_0 y^{-1})|^2 dy \right)^{1/2} \cdot ||g||_2 \\ &= \left(\int_G |f(xy) - f(x_0 y)|^2 dy \right)^{1/2} \cdot ||g||_2 \\ &= ||L_{x^{-1}} f - L_{x_0^{-1}} f||_2 ||g||_2 \\ &\leq \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Se $f, g, h \in L^2(G)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então é imediato da definição que $(\lambda f) * g = f * (\lambda g) = \lambda(f * g)$, que $(f + g) * h = f * h + g * h$ e que $f * (g + h) = f * g + f * h$. Além disso, o produto de convolução é associativo. Para verificar isto, sejam $f, g, h \in L^2(G)$ e $x \in G$; então,

$$\begin{aligned}
(f * (g * h))(x) &= \int_G f(xz^{-1})(g * h)(z)dz \\
&= \int_G \int_G f(xz^{-1})g(zy^{-1})h(y)dydz \\
&= \int_G \left(\int_G f(xz^{-1})g(zy^{-1})dz \right) h(y)dy \\
&= \int_G \left(\int_G f(xy^{-1}(zy^{-1})^{-1})g(zy^{-1})dz \right) h(y)dy \\
&= \int_G \left(\int_G f(xy^{-1}z^{-1})g(z)dz \right) h(y)dy \\
&= \int_G (f * g)(xy^{-1})h(y)dy \\
&= ((f * g) * h)(x).
\end{aligned}$$

Ademais, se $f, g \in L^2(G)$, temos

$$\begin{aligned}
||f * g||_2^2 &= \int_G \left| \int_G f(xy^{-1})g(y)dy \right|^2 dx \leq \int_G \int_G |f(xy^{-1})|^2 |g(y)|^2 dydx \\
&= \int_G \left(\int_G |f(xy^{-1})|^2 dx \right) |g(y)|^2 dy = ||f||_2^2 \cdot ||g||_2^2.
\end{aligned}$$

Com isso, provamos o seguinte resultado.

Teorema 1.27. *Seja G um grupo compacto. Então, o espaço de Hilbert $L^2(G)$, munido do produto de convolução, é uma álgebra de Banach.*

Chamaremos a álgebra de Banach $L^2(G)$ de **álgebra de convolução** do grupo compacto G.

Unidades Aproximadas

Não é necessário que uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ possua unidade. Por exemplo, a álgebra de convolução de um grupo de Lie compacto e infinito não possui unidade, conforme provaremos adiante. Uma **unidade aproximada à esquerda** em $\mathcal{A}$ é uma rede $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tal que, para todo $c \in \mathcal{A}$, temos $\lim_{\lambda \to \infty} a_\lambda c = c$, e uma **unidade aproximada à direita** é uma rede $(b_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ tal que, para todo $c \in \mathcal{A}$, vale $\lim_{\sigma \to \infty} c b_\sigma = c$. Numa álgebra de Banach que não possui unidade, é necessário trabalhar com as unidades aproximadas.

Sejam G um grupo compacto e μ a medida de Haar normalizada de G. Como provamos na Proposição 1.13, se $U \subseteq G$ é um aberto não-vazio, então $0 < \mu(U) < \infty$. Denotando por $\mathcal{U}$ o sistema de vizinhanças de $1 \in G$, definimos, para cada $U \in \mathcal{U}$, a função $I_U := \chi_U/\mu(U)$. Como $\int_G |I_U(x)|^2 dx = 1/\mu(U)$, então $I_U \in L^2(G)$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Além disso, vemos facilmente que $I_U|_{G\setminus U} \equiv 0$ e que $\int_G I_U(x)dx = 1$.

Teorema 1.28. *Seja G um grupo compacto munido de uma medida de Haar normalizada μ. Então, a rede $(I_U)_{U\in\mathcal{U}}$ é uma unidade aproximada bilateral da álgebra de convolução de G. Ademais, se $f \in C(G)$, então as redes $(I_U * f)_{U\in\mathcal{U}}$ e $(f * I_U)_{U\in\mathcal{U}}$ convergem uniformemente a f.*

Demonstração. Primeiro, mostraremos a convergência uniforme no caso em que f é contínua. Dado $\epsilon > 0$, tomemos, pelas continuidades de $Lf, Rf : G \to C(G)$, um aberto $U_0 \subseteq G$ contendo 1 tal que $||L_y f - f||_{\sup} \leq \epsilon$ e $||R_{y^{-1}} f - f||_{\sup} \leq \epsilon$ sempre que $y \in U_0$. Se $U \subseteq U_0$ é uma vizinhança de 1, então, para todo $x \in G$, temos

$$\begin{aligned} |(I_U * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_G I_U(y) f(y^{-1}x) dy - \int_G I_U(y) f(x) dy \right| \\ &\leq \int_G I_U(y) |f(y^{-1}x) - f(x)| dy \\ &= \frac{1}{\mu(U)} \int_U |(L_y f)(x) - f(x)| dy \\ &\leq \frac{1}{\mu(U)} \int_U ||L_y f - f||_{\sup} dy \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

e, portanto, $||I_U * f - f||_{\sup} \leq \epsilon$. Uma estimativa semelhante vale para $||f * I_U - f||_{\sup}$.

Se f é uma função de $L^2(G)$, a situação é mais delicada. A essência da demonstração é provar que, para cada vizinhança U de 1, temos

$$\begin{aligned} ||I_U * f - f||_2 &\leq \int_G I_U(y) ||L_y f - f||_2 \, dy \\ ||f * I_U - f||_2 &\leq \int_G I_U(y) ||R_{y^{-1}} f - f||_2 \, dy. \end{aligned}$$

Assumindo a validade destas desigULdades, conseguimos provar que ambas as redes $(I_U * f)_{U\in\mathcal{U}}$ e $(f * I_U)_{U\in\mathcal{U}}$ convergem a f com respeito a $||\ ||_2$. De fato, dado $\epsilon > 0$, seja U_0 uma vizinhança de 1 tal que

$$||L_y f - f||_2 \leq \epsilon \quad \text{e} \quad ||R_{y^{-1}} f - f||_2 \leq \epsilon$$

para todo $y \in U_0$. Se $U \subseteq U_0$ é uma vizinhança de 1, então

$$||I_U * f - f||_2 \leq \int_G I_U(y) ||L_y f - f||_2 \, dy = \frac{1}{\mu(U)} \int_U ||L_y f - f||_2 \, dy \leq \epsilon$$

e
$$||f * I_U - f||_2 \leq \int_G I_U(y)||R_{y^{-1}}f - f||_2\, dy = \frac{1}{\mu(U)}\int_U ||R_{y^{-1}}f - f||_2\, dy \leq \epsilon.$$

Provaremos apenas a primeira das desigualdade acima, pois a demonstração da outra é análoga. Seja, então, U uma vizinhança de 1. Primeiramente,

$$\begin{aligned} ||I_U * f - f||_2^2 &= \int_G |(I_U * f)(x) - f(x)|^2 dx \\ &= \int_G \left| \int_G I_U(y) \cdot (f(y^{-1}x) - f(x))dy \right|^2 dx \\ &= \int_G \left| \int_G I_U(y) \cdot (L_y f(x) - f(x))dy \right|^2 dx. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Definimos $F : G \times G \to \mathbb{C}$ por $F(x,y) := I_U(y) \cdot (L_y f(x) - f(x))$. Observamos que F é integrável com relação à medida produto $\mu \times \mu$, pois F é mensurável e, pelo Teorema de Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_{G\times G} |F(x,y)|d(x,y) &\leq \int_{G\times G} |I_U(y)|\big(|(L_y f)(x)| + |f(x)|\big)d(x,y) \\ &= \int_{G\times G} |I_U(y)| \cdot |(L_y f)(x)|d(x,y) + \int_{G\times G} |I_U(y)| \cdot |f(x)|d(x,y) \\ &= \int_G |I_U(y)| \left(\int_G |(L_y f)(x)|dx\right) dy + \int_{G\times G} |I_U(y)| \cdot |f(x)|d(x,y) \\ &= \int_G |I_U(y)| \left(\int_G |f(x)|dx\right) dy + \int_{G\times G} |I_U(y)| \cdot |f(x)|d(x,y) \\ &= 2\int_{G\times G} |I_U(y)| \cdot |f(x)|d(x,y) \\ &= 2\left(\int_G |I_U(y)|dy\right) \cdot \left(\int_G |f(x)|dx\right) \\ &= 2(|f|, \mathbf{1}) \leq 2||f||_2. \end{aligned}$$

Desta forma, no que segue, podemos utilizar o Teorema de Fubini livremente. Assim, continuando o desenvolvimento de (1.3), obtemos

$$\begin{aligned} ||I_U * f - f||_2^2 &= \int_G \left|\int_G F(x,y)dy\right|^2 dx \\ &= \int_G \left(\int_G F(x,y)dy\right) \overline{\left(\int_G F(x,z)dz\right)} dx \\ &= \int_G \int_G \int_G F(x,y)\overline{F(x,z)} dydzdx \\ &= \int_G \int_G \left(\int_G F(x,y)\overline{F(x,z)}dx\right) dydz = (\star). \end{aligned}$$

Para cada $y \in G$, seja $\phi_y : G \to \mathbb{C}$ dada por $\phi_y(x) := F(x,y)$. Então, $\phi_y \in L^2(G)$, pois, pelas definições,

$$\int_G |\phi_y(x)|^2 dx = |I_U(y)|^2 ||L_y f - f||_2^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(\star) &= \int_G \int_G \left(\int_G \phi_y(x)\overline{\phi_z(x)}dx \right) dydz \\
&= \int_G \int_G (\phi_y, \phi_z)dydz = \int_G \int_G \mathrm{Re}\,(\phi_y, \phi_z)dydz \\
&\leq \int_G \int_G |(\phi_y, \phi_z)|dydz \leq \int_G \int_G ||\phi_y||_2 \cdot ||\phi_z||_2\, dydz \\
&= \left(\int_G ||\phi_y||_2\, dy \right)^2,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
||I_U * f - f||_2 &\leq \int_G ||\phi_y||_2\, dy \\
&= \int_G \left(\int_G |I_U(y) \cdot (L_y f(x) - f(x))|^2 dx \right)^{1/2} dy \\
&= \int_G I_U(y) \left(\int_G |L_y f(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} dy \\
&= \int_G I_U(y) ||L_y f(x) - f(x)||_2\, dy,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Corolário 1.29. *Seja G um grupo compacto e infinito cuja topologia satisfaz ao Primeiro Axioma de Enumerabilidade — por exemplo, um grupo de Lie compacto cuja dimensão é maior ou igual a um. Então, a álgebra de convolução de G não possui unidade.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existe $g \in L^2(G)$ tal que

$$f * g = g * f = f$$

para toda $f \in L^2(G)$. Isto implica, pelo Teorema 1.28, que $g = \lim_{U \in \mathcal{U}} I_U$, pois $I_U * g = I_U$. A hipótese da topologia de G satisfazer ao Primeiro Axioma de Enumerabilidade garante que existe uma seqüência decresecente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{U}$ tal que, para todo $U \in \mathcal{U}$, existe $n \in \mathbb{N}$ com $U_n \subseteq U$. Em particular, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{1\}$ e $g = \lim_{n\to\infty} I_{U_n}$. Logo,

$$||g||_2 = \lim_{n\to\infty} ||I_{U_n}||_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu(U_n)^{1/2}}. \tag{1.4}$$

Por outro lado, como G é compacto, então $\mu(U_1) < +\infty$, e, conseqüentemente,

$$\mu(\{1\}) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n). \tag{1.5}$$

Além disso, como G é infinito, então existem elementos $x_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$, dois-a-dois distintos. Logo,

$$1 = \mu(G) \geq \mu(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{x_n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{1\}),$$

do que concluimos que $\mu(\{1\}) = 0$.[5] Por (1.4) e (1.5), temos $||g||_2 = +\infty$, o que é um absurdo. □

A Adjunção

Sejam G um grupo topológico e $f : G \to \mathbb{C}$ uma função. Definimos a **adjunta** de f como sendo a função $f^* : G \to \mathbb{C}$ dada por $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$. A aplicação

$$* : F(G, \mathbb{C}) \to F(G, \mathbb{C})$$

assim definida é usualmente chamada de **adjunção** ou de **operador estrela**.

Proposição 1.30. *Seja G um grupo topológico.*

(a) A adjunção é uma involução, isto é, $(f^*)^* = f$ para toda $f \in F(G, \mathbb{C})$.

(b) Se $f, g \in F(G, \mathbb{C})$ e $z \in \mathbb{C}$, então $(f + zg)^* = f^* + \overline{z}g^*$.

(c) Se $f \in C_b(G)$, então $f^* \in C_b(G)$ e $||f^*||_{\sup} = ||f||_{\sup}$.

Se G é compacto, ainda temos as seguintes propriedades:

(d) Se $f \in L^2(G)$, então $f^* \in L^2(G)$ e $||f^*||_2 = ||f||_2$. Em particular, $||f^* * f||_2 \leq ||f||_2^2$ e $||f * f^*||_2 \leq ||f||_2^2$.

(e) Se $f, g \in L^2(G)$, então $(f^*, g^*) = \overline{(f, g)}$.

(f) Se $f, g \in L^2(G)$, então $(f * g)^* = g^* * f^*$.

[5]Este último argumento também prova um fato interessante acerca dos grupos compactos: se G é um grupo compacto e infinto, então G é não-enumerável. De fato, a invariância por translações da medida de Haar de G mais o fato que $\mu(\{1\}) = 0$ implicam que todo subconjunto enumerável de G deve ter medida nula. Uma vez que $\mu(G) > 0$, não podemos ter G enumerável.

Demonstração. As propriedades (a), (b) e (c) são imediatas da definição. A propriedade (d) é conseqüência de G ser unimodular. Para (e) e (f), tomemos $f, g \in L^2(G)$. Então,

$$(f^*, g^*) = \int_G \overline{f(x^{-1})} g(x^{-1}) dx = \int_G \overline{f(x)} g(x) dx = \overline{(f, g)}$$

e

$$\begin{aligned} (f * g)^*(x) &= \overline{(f * g)(x^{-1})} = \int_G \overline{f(x^{-1}y^{-1})} \cdot \overline{g(y)} dy \\ &= \int_G \overline{f(x^{-1}y)} \cdot \overline{g(y^{-1})} dy = \int_G \overline{f((y^{-1}x)^{-1})} \cdot \overline{g(y^{-1})} dy \\ &= \int_G g^*(y) f^*(y^{-1}x) dy = (g^* * f^*)(x). \quad \square \end{aligned}$$

Seja G um grupo compacto, e tomemos $f, g \in L^2(G)$. Por um lado, temos

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_G f(xy^{-1}) g(y) dy = \int_G f(xy) g(y^{-1}) dy \\ &= \int_G (L_{x^{-1}} f)(y) \overline{g^*(y)} dy = (L_{x^{-1}} f, g^*); \end{aligned}$$

por outro,

$$\begin{aligned} (g * f)(x) &= \int_G g(y) f(y^{-1}x) dy = \int_G g(y^{-1}) f(yx) dy \\ &= \int_G (R_x f)(y) \overline{g^*(y)} dy = (R_x f, g^*). \end{aligned}$$

Logo,

$$(f * g - g * f)(x) = (L_{x^{-1}} f - R_x f, g^*).$$

Proposição 1.31. *Seja G um grupo compacto. Uma função $f \in L^2(G)$ está no centro da álgebra de convolução se, e somente se, $f(xy) = f(yx)$ para todos $x, y \in G$. Em outras palavras, o centro da álgebra de convolução de G é o conjunto $\mathrm{Cl}(G)$ das funções de classes de $L^2(G)$.*

Demonstração. Se $f \in L^2(G)$ é de classes, então

$$0 = f(xy) - f(yx) = (L_{x^{-1}} f)(y) - (R_x f)(y)$$

para todos $x, y \in G$, isto é, $L_{x^{-1}} f - R_x f = 0$. Isto implica que $(L_{x^{-1}} f - R_x f, g^*) = 0$ para todo $x \in G$ e toda $g \in L^2(G)$, ou seja, $f * g = g * f$ para toda $g \in L^2(G)$. Logo, f está no centro da álgebra de convolução de G. Para a recíproca, suponhamos que $f \in L^2(G)$ está no centro. Provaremos que existe uma função $\widetilde{f} \in \mathrm{Cl}(G)$ que coincide com f exceto num subconjunto de G de medida nula: a nossa convenção acerca da igualdade de elementos de $L^2(G)$ mostra que a própria função f está em $\mathrm{Cl}(G)$. Como f está no centro de $L^2(G)$, então

$$(L_{x^{-1}}f - R_x f, g^*) = (f * g - g * f)(x) = 0$$

para todo $x \in G$ e toda $g \in L^2(G)$. Isto significa que, para cada $x \in G$, temos $L_{x^{-1}}f - R_x f = 0$ μ–q.t.p., isto é, $f - L_x R_x f = 0$ μ–q.t.p. Seja $F : G \times G \to \mathbb{C}$ definida por

$$F(x,y) = (f - L_x R_x f)(y) = f(y) - f(x^{-1}yx).$$

Claramente, F é mensurável. Além disso, pelo Teorema de Tonelli,

$$\begin{aligned}
\int_{G\times G} |F(x,y)| d(x,y) &= \int_G \left(\int_G |F(x,y)| dy \right) dx \\
&= \int_G \left(\int_G |f(y) - f(x^{-1}yx)| dy \right) dx \\
&= 0,
\end{aligned}$$

o que significa que $F = 0$ $(\mu \times \mu)$–q.t.p. Denotando

$$E := \{(x,y) \in G \times G : F(x,y) \neq 0\} = \{(x,y) \in G \times G : f(y) \neq f(x^{-1}yx)\},$$

temos $(\mu \times \mu)(E) = 0$. Tomemos, para cada $y \in G$, o conjunto

$$E^y := \{x \in G : (x,y) \in E\} = \{x \in G : f(y) \neq f(x^{-1}yx)\}.$$

Como a medida $\mu \times \mu$ é finita, então

$$\int_G \mu(E^y) dy = (\mu \times \mu)(E) = 0,$$

o que significa que $\mu(E^y) = 0$ para quase todo $y \in G$. Seja $\widetilde{f} : G \to \mathbb{C}$ definida por $\widetilde{f}(y) = \int_G f(x^{-1}yx)dx$. Se $y \in G$ é tal que $\mu(E^y) = 0$, então

$$\int_G f(x^{-1}yx)dx = \int_G f(y)dx = f(y).$$

Isto implica que $\widetilde{f} = f$ μ–q.t.p. Além disso, se $y, z \in G$, então

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(yz) &= \int_G f(x^{-1}yzx)dx = \int_G f((zx)^{-1}zy(zx))dx \\
&= \int_G f(x^{-1}zyx)dx = \widetilde{f}(zy),
\end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{f} \in \mathrm{Cl}(G)$. $\square$

Corolário 1.32. *A álgebra de convolução de um grupo compacto G é comutativa se, e somente se, G é abeliano.*

Demonstração. Se G é abeliano, então a igualdade $f(xy) = f(yx)$ é válida para toda $f \in L^2(G)$ e todos $x, y \in G$. O Teorema 1.31 implica, então, que $L^2(G)$ é uma álgebra comutativa. Reciprocamente, se $L^2(G)$ é comutativa, então, em particular, toda função contínua $f : G \to \mathbb{C}$ é de classes. Por outro lado, como G é Hausdorff e compacto, então $C(G)$ separa pontos de G pelo Lema de Urysohn. Com isso, se existem $x, y \in G$ tais que $xy \neq yx$, então também existe $f \in C(G)$ tal que $f(xy) \neq f(yx)$, o que é impossível por hipótese. Portanto, G é abeliano. $\square$

Corolário 1.33. *Se G é um grupo compacto, então $\mathrm{Cl}(G)$ é um subespaço fechado de $L^2(G)$.*

Demonstração. O centro de qualquer álgebra de Banach é um subespaço fechado da álgebra. $\square$

Capítulo 2

Teoria de Representações de Grupos Compactos

Neste capítulo, apresentamos a teoria básica de representações dos grupos topológicos compactos. Nosso objetivo é provar o Teorema de Peter & Weyl, uma importante generalização do Teorema de Fourier sobre a convergência em L^2 da série de Fourier de uma função periódica para qualquer grupo compacto.

2.1 Representações

Uma **representação** de um grupo topológico G num espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita V é um homomorfismo contínuo $\Phi : G \to GL(V)$. Se Φ é injetiva, então Φ é chamada de **fiel**. No caso em que G é um grupo de Lie, esta terminologia justifica-se pelo fato que, se $\Phi : G \to GL(V)$ é uma representação fiel, então $\Phi(G)$ é um subgrupo de Lie de $GL(V)$ isomorfo a G. Neste caso, podemos considerar G como um grupo de matrizes.

A importância do estudo de representações está no fato que muitas propriedades dos grupos topológicos e, em especial, dos grupos de Lie, podem ser obtidas através de uma análise das suas representações que, em essência, envolve apenas Álgebra Linear. Além disso, como o resultado a seguir mostra, existe uma estreita relação entre representações de um grupo e as ações deste grupo por transformações lineares.

Proposição 2.1. *Sejam G um grupo topológico e V um espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita. Se $\Phi : G \to GL(V)$ é uma representação, então a aplicação $\alpha : G \times V \to V$ definida por $\alpha(x, v) = \Phi(x)v$ é uma ação contínua de G sobre V através de transformações lineares. Reciprocamente, se $\alpha : G \times V \to V$ é uma tal ação, então $\Phi : G \to GL(V)$ definida por $\Phi(x)v = \alpha(x, v)$ é uma representação de G em V.*

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que Φ é dada e que α é definida como no enunciado. Que α é uma ação por transformações lineares de G em V é facilmente verificado usando o fato que Φ é um homomorfismo com imagem contida em $GL(V)$.

Resta provar a continuidade de α. Para tanto, sejam $(x_0, v_0) \in G \times V$ e $\epsilon > 0$. Fixemos em V uma norma $|| \; ||$ qualquer, e consideremos em $GL(V)$ a norma de operador induzida por $|| \; ||$, que também denotaremos por $|| \; ||$. Como Φ é uma aplicação contínua, podemos tomar uma vizinhança $U \subseteq G$ de x_0 tal que $||\Phi(x) - \Phi(x_0)|| \leq \frac{\epsilon}{3(||v_0||+1)}$ para todo $x \in U$. Seja $\delta > 0$ um número real tal que

$$\delta \leq \min\left\{ ||v_0|| + 1, \frac{\epsilon}{3||\Phi(x_0)||} \right\}.$$

Deste modo, se $(x, v) \in G \times V$ é tal que $x \in U$ e $||v - v_0|| \leq \delta$, então

$$\begin{aligned}
||\alpha(x,v) - \alpha(x_0,v_0)|| &= ||\Phi(x)v - \Phi(x_0)v_0|| \\
&\leq ||\Phi(x)v - \Phi(x)v_0|| + ||\Phi(x)v_0 - \Phi(x_0)v_0|| \\
&\leq ||\Phi(x)|| \cdot ||v - v_0|| + ||\Phi(x) - \Phi(x_0)|| \cdot ||v_0|| \\
&\leq ||\Phi(x)||\delta + \frac{\epsilon}{3(||v_0|| + 1)} \cdot ||v_0|| \\
&\leq \big(||\Phi(x) - \Phi(x_0)|| + ||\Phi(x_0)||\big)\delta + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \frac{\epsilon}{3(||v_0|| + 1)} \cdot (||v_0|| + 1) + ||\Phi(x_0)|| \cdot \frac{\epsilon}{3||\Phi(x_0)||} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Isto prova a continuidade de α em (x_0, v_0).

Reciprocamente, suponhamos que α é uma ação contínua de G em V por transformações lineares, e seja Φ definida como no enunciado. A definição de ação de grupo implica que $\Phi(x)$ é um operador linear invertível para todo $x \in G$ e também que Φ é um homomorfismo de grupos. Para verificar a continuidade de Φ, seja $S \subseteq V$ o conjunto dos vetores unitários de V com respeito à norma fixada no parágrafo anterior. Como V é de dimensão finita, então S é compacto. Sejam $x_0 \in G$ e $\epsilon > 0$. Pela continuidade de α, para cada $v \in S$ existem $U_v \subseteq G$ uma vizinhança de x_0 e um número real $\delta_v \in \left(0, \frac{\epsilon}{2||\Phi(x_0)||}\right)$ tais que, se $(x, u) \in G \times V$ satisfazem $x \in U_v$ e $||u - v|| \leq \delta_v$, então $||\alpha(x, u) - \alpha(x_0, v)|| \leq \epsilon/2$. A família de abertos $\{B(v, \delta_v) : v \in S\}$ é uma cobertura de S, de modo que existem $v_1, \ldots, v_n \in S$ tais que

$$S \subseteq B(v_1, \delta_{v_1}) \cup \cdots \cup B(v_n, \delta_{v_n}).$$

Tomando a vizinhança $U = U_{v_1} \cap \cdots \cap U_{v_n}$ de x_0, se $x \in U$ e $v \in S$, então $v \in B(v_i, \delta_{v_i})$ para algum $i = 1, \ldots, n$, e portanto

$$\begin{aligned}
||(\Phi(x) - \Phi(x_0))v|| &\leq ||\Phi(x)v - \Phi(x_0)v_i|| + ||\Phi(x_0)v_i - \Phi(x_0)v|| \\
&= ||\alpha(x,v) - \alpha(x_0,v_i)|| + ||\Phi(x_0)(v_i - v)|| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + ||\Phi(x_0)|| \cdot ||v_i - v|| \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Deste modo, se $x \in U$, então

$$||\Phi(x) - \Phi(x_0)|| = \sup\{||(\Phi(x) - \Phi(x_0))v|| : v \in S\} \leq \epsilon,$$

assim provando a continuidade de Φ em x_0. Com isso, Φ é uma representação. $\square$

Seja Φ uma representação do grupo topológico G no espaço V. Um subespaço $U \subseteq V$ é **invariante** por Φ se $\Phi(x)U \subseteq U$ para todo $x \in G$. Uma vez que V é de dimensão finita, essa condição é equivalente a $\Phi(x)U = U$ para todo $x \in G$. Se U é um subespaço invariante por Φ, então podemos definir $\Phi_U : G \to GL(U)$ restringindo, para cada $x \in G$, o operador $\Phi(x)$ ao subespaço U. Claramente, Φ_U assim definida é uma representação de G, usualmente denominada **restrição** de Φ ao subespaço U. Uma **sub-representação** de Φ é uma restrição de Φ a algum subespaço invariante do espaço V.

Observamos que uma representação $\Phi : G \to GL(V)$ sempre admite os subespaços $\{0\}$ e V como invariantes. Se estes forem os únicos, a representação é chamada **irredutível**. Caso contrário, ela é dita **redutível**. Quando U é um subespaço invariante por Φ e a restrição Φ_U é irredutível, é comum chamar o próprio subespaço U de **irredutível** com respeito a Φ. A ausência de subespaços invariantes não-triviais torna as representações irredutíveis particularmente adequadas para um estudo sistemático, e uma questão importante é determinar se uma certa representação, mesmo que redutível, pode ser decomposta em sub-representações irredutíveis.

Mais precisamente, uma representação $\Phi : G \to GL(V)$ é **completamente redutível** se podemos escrever $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$, em que cada subespaço U_i é não-nulo, invariante por Φ e irredutível. Esta decomposição, quando existe, não é necessariamente única. Por exemplo, se $\dim V \geq 2$ e $\Phi \equiv \mathrm{id}_V$, então qualquer decomposição de V como soma direta de subespaços unidimensionais satisfaz essa definição.

Toda representação irredutível é completamente redutível, mas uma representação ser redutível não implica, necessariamente, que ela é completamente redutível. Por exemplo, consideremos o grupo $\mathbb{Z}$ dos números inteiros com a operação de adição e a topologia discreta, e seja $\Phi : \mathbb{Z} \to GL(\mathbb{R}^2)$ dada, relativamente à base canônica de $\mathbb{R}^2$, por

$$\Phi(n)e_1 = e_1, \quad \Phi(n)e_2 = ne_1 + e_2.$$

Verifica-se facilmente que Φ é uma representação de $\mathbb{Z}$, e o subespaço $\mathbb{R}e_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ é invariante por Φ, de modo que Φ é redutível. No entanto, Φ não é completamente redutível; para ver isto, argumentamos da seguinte maneira. Dado $n \in \mathbb{Z}$, a matriz de $\Phi(n)$ com respeito à base canônica é

$$[\Phi(n)] = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e portanto o único autovalor de $\Phi(n)$ é 1 para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se Φ fosse completamente redutível, então, por questões de dimensão, existiriam $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$ linearmente independentes e homomorfismos $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^*$ tais que

$$\Phi(n)u_1 = \lambda_1(n)u_1, \quad \Phi(n)u_2 = \lambda_2(n)u_2 \tag{2.1}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Claramente, $\lambda_1(n), \lambda_2(n)$ são os autovalores de $\Phi(n)$, e, portanto, $\lambda_1(n) = \lambda_2(n) = 1$. Este fato mais (2.1) implica que $\Phi(n) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, o que visivelmente é um absurdo.

Proposição 2.2. *Uma representação $\Phi : G \to GL(V)$ é completamente redutível se, e somente se, para todo subespaço invariante $U \subseteq V$ existe outro subespaço invariante $W \subseteq V$ tal que $V = U \oplus W$.*

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que Φ é completamente redutível, e procedamos por indução sobre $\dim V$. Se $\dim V = 0$, então $V = \{0\}$ e nada há a fazer. Suponha, então, que $\dim V \geq 1$ e que a afirmação é válida para todas as representações completamente redutíveis de G em espaços de dimensão menor do que $\dim V$. Assumiremos também que Φ é redutível, pois caso contrário a afirmação segue trivialmente. Escrevamos, então, $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ uma decomposição de V em subespaços invariantes e irredutíveis, e tomemos $U \subseteq V$ um subespaço invariante não-trivial. Há dois casos a considerar:

1. *existe $i = 1, \ldots, n$ tal que $U_i \cap U \neq \{0\}$:* nesta situação, após uma possível reordenação dos subespaços $U_1, \ldots, U_n$, podemos assumir que $U_1 \cap U \neq \{0\}$. Como $U_1 \cap U$ é um subespaço não-nulo invariante por Φ contido em U_1 e U_1 é irredutível, então devemos ter $U_1 \cap U = U_1$, isto é, $U_1 \subseteq U$. Deste modo, podemos escrever $U = U_1 \oplus U'$, em que $U' = U \cap (U_2 \oplus \cdots \oplus U_n)$. Denotando por V' o subespaço $U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$, temos que V' é invariante por Φ e $U' \subseteq V'$ é um subespaço invariante. Como $\dim V' < \dim V$ e $\Phi_{V'}$ é completamente redutível, pela hipótese de indução existe um subespaço invariante $W \subseteq V'$ tal que $V' = U' \oplus W$. Portanto,
$$V = U_1 \oplus V' = U_1 \oplus U' \oplus W = U \oplus W,$$
como queríamos demonstrar.

2. *$U_i \cap U = \{0\}$ para todo $i = 1, \ldots, n$:* neste caso, seja $U' = U_1 \oplus U$. Então, $U' \subseteq V$ é um subespaço invariante e $U_1 \cap U' \neq \{0\}$. Aplicando o caso anterior, existe um subespaço invariante $W' \subseteq V$ tal que $V = U' \oplus W'$. Fazendo $W = U_1 \oplus W'$, temos que W é um subespaço invariante e que $V = U \oplus W$.

A prova da recíproca baseia-se no fato que, se $\Phi : G \to GL(V)$ é uma representação que satisfaz a propriedade de que para todo subespaço invariante $U \subseteq V$ existe subespaço invariante $W \subseteq V$ tal que $V = U \oplus W$, então toda sub-representação de Φ também satisfaz esta propriedade. Para ver isto, seja $U \subseteq V$ um subespaço invariante por Φ, e considere um subespaço $U' \subseteq U$ também invariante. Por hipótese, existe um subespaço invariante $W \subseteq V$ tal que $V = U \oplus W$. Seja $P : V \to U$ a projeção sobre U paralela a W. Uma vez que o subespaço $U' \oplus W$ é invariante, aplicando a hipótese novamente temos um subespaço invariante $W'' \subseteq V$ tal que $V = U' \oplus W \oplus W''$. Seja $W' = P(W'') \subseteq U$. Primeiramente, dado $u \in U$, podemos escrever $u = u' + w + w''$, em que $u' \in U'$, $w \in W$ e $w'' \in W''$. Logo,
$$u = Pu = Pu' + Pw + Pw'' = u' + Pw'' \in U' + W',$$

de modo que $U = U' + W'$. Segundamente,

$$\begin{aligned}\dim U &= \dim(U' + W') \leq \dim U' + \dim W' \leq \dim U' + \dim W'' \\ &= \dim(U' \oplus W'') = \dim V - \dim W \\ &= \dim U,\end{aligned}$$

o que implica que $\dim(U' + W') = \dim U' + \dim W'$ e devemos ter $U = V' \oplus W'$. Terceiramente, afirmamos que W' é invariante. De fato, dado $w' \in W'$, seja $w'' \in W''$ tal que $w' = Pw''$. Escrevendo $w'' = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$, temos, para todo $x \in G$, que

$$\begin{aligned}\Phi(x)w' &= \Phi(x)Pw'' = \Phi(x)P(u + w) \\ &= \Phi(x)u = P(\Phi(x)u + \Phi(x)w) \\ &= P\Phi(x)w'' \in W'\end{aligned}$$

pois U, W, W'' são invariantes.

Finalmente, com base na afirmação acima, provaremos a recíproca por indução sobre $\dim V$. Se $\dim V = 0$, não há o que fazer. Suponhamos, então, que $\dim V \geq 1$ e que a asserção está provada para todas as representações de G em espaços de dimensão menor do que $\dim V$ e que possuem a propriedade em questão. Se Φ é irredutível, está claro que Φ é completamente redutível: a decomposição $V = V$ é a desejada. Podemos assumir, então, que V é redutível e tomar um subespaço invariante não-trivial $U \subseteq V$. Seja $W \subseteq V$ um subespaço invariante tal que $V = U \oplus W$, que também deve ser não-trivial. Como ambos U e W são não-triviais, então $\dim U < \dim V$ e $\dim W < \dim V$, e a afirmação provada acima garante que podemos aplicar a hipótese de indução tanto a U quanto a W, assim obtendo decomposições $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ e $W = U_{k+1} \oplus \cdots \oplus U_n$ em que cada subespaço U_i é irredutível. A decomposição $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ satisfaz as condições necessárias. □

Corolário 2.3. *Seja $\Phi : G \to GL(V)$ uma representação e suponhamos que existe em V um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ tal que $\langle \Phi(x)u, \Phi(x)v\rangle = \langle u, v\rangle$ para quaisquer $x \in G$ e $u, v \in V$. Então, Φ é completamente redutível. Além disso, existe uma decomposição de V em subespaços invariantes irredutíveis dois-a-dois ortogonais.*

Demonstração. Pela Proposição 2.2, é suficiente verificar que para todo subespaço invariante $U \subseteq V$ temos $U^\perp$ também invariante. Tomemos, então, $U \subseteq V$ um subespaço invariante, $x \in G$ e $v \in U^\perp$. Então,

$$\langle \Phi(x)v, U\rangle = \langle \Phi(x)v, \Phi(x)\Phi(x^{-1})U\rangle = \langle v, \Phi(x^{-1})U\rangle = \langle v, U\rangle = \{0\},$$

isto é, $\Phi(x)v \in U^\perp$.

Para obter a decomposição desejada, basta argumentar da seguinte forma. Se Φ é irredutível, não há o que fazer; caso contrário, existe um subespaço invariante não-trivial $U_1 \subseteq V$, que assumiremos ser de dimensão mínima. Claramente, U_1 é irredutível, e podemos escrever $V = U_1 \oplus U_1^\perp$, lembrando que $U_1^\perp$ também é invariante. Se $U_1^\perp$ é irredutível, a decomposição $V = U_1 \oplus U_1^\perp$ é a desejada; caso contrário, existe um subespaço invariante não-trivial $U_2 \subseteq U_1^\perp$ de dimensão mínima (com respeito à sub-representação $\Phi_{U_1^\perp}$), e escrevemos $U_1^\perp = U_2 \oplus (U_1^\perp \cap U_2^\perp)$. Logo,

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus (U_1^\perp \cap U_2^\perp)$$

e cada um destes subespaços é invariante e ortogonal aos outros. Levando adiante este processo, a cada passo a dimensão do subespaço $U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ aumenta, de modo que o processo deve eventualmente encerrar uma vez que V possui dimensão finita, e assim obtemos a decomposição requerida. $\square$

Um produto interno como no enunciado do Corolário 2.3 é chamado de **invariante** pela representação Φ. Se $\Phi : G \to GL(V)$ é uma representação que admite um produto interno invariante, então, ao fixarmos uma base ortonormal de V, temos que as matrizes dos operadores $\Phi(x)$, $x \in G$, com respeito a esta base são ortogonais ou unitárias, dependendo se o espaço V é real ou complexo. Por este motivo, estas representações são chamadas de **unitárias**.

Proposição 2.4. *Toda representação de um grupo compacto é unitária.*

Demonstração. Faremos aqui a demonstração no caso em que V é um espaço vetorial complexo, o caso real sendo provado de maneira análoga. Sejam G um grupo compacto, μ a sua medida de Haar normalizada e $\Phi : G \to GL(V)$ uma representação. Dado $(\ ,\ )$ um produto interno qualquer em V, definimos para $u, v \in V$

$$\langle u, v\rangle = \int_G (\Phi(x)u, \Phi(x)v)dx.$$

Como Φ é contínua, então $x \in G \mapsto (\Phi(x)u, \Phi(x)v) \in \mathbb{C}$ também é contínua, e, portanto, integrável, de modo que $\langle u, v\rangle \in \mathbb{C}$. Afirmamos que a função $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ definida desta maneira é um produto interno invariante em V. A sesquilinearidade de $\langle\ ,\ \rangle$ decorre da mesma propriedade que $(\ ,\ )$ possui por hipótese. Se $u \in V$ é tal que $\langle u, u\rangle = \int_G (\Phi(x)u, \Phi(x)u)dx = 0$, então a função $x \in G \mapsto (\Phi(x)u, \Phi(x)u) \in \mathbb{C}$ é quase-nula. Como μ é uma medida não-nula, isto significa que existe algum $x \in G$ tal que $(\Phi(x)u, \Phi(x)u) = 0$, e portanto $u = 0$. Por fim, resta-nos verificar a invariância de $\langle\ ,\ \rangle$ por Φ. Dados $u, v \in V$ e $x \in G$, temos que

$$\begin{aligned}\langle \Phi(x)u, \Phi(x)v\rangle &= \int_G (\Phi(y)\Phi(x)u, \Phi(y)\Phi(x)v)dy = \int_G (\Phi(yx)u, \Phi(yx)v)dy \\ &= \int_G (\Phi(y)u, \Phi(y)v)dy = \langle u, v\rangle. \quad \square\end{aligned}$$

As Proposições 2.2 e 2.4 implicam que, no estudo das representações dos grupos compactos, é suficiente restringir a atenção à irredutíveis e unitárias. Por este motivo, procedemos agora a um estudo sistemático dessas representações. Além disso, a partir de agora todas as representações consideradas serão em espaços complexos. Utilizaremos a notação $\Phi : G \to GL_{\mathbb{C}}(V)$ quando for necessário deixar claro que estamos trabalhando neste contexto.

Sejam G um grupo topológico e Φ, Φ' representações de G nos espaços complexos V, V', respectivamente. Uma transformação linear $T : V \to V'$ que satisfaz $\Phi'(x)T = T\Phi(x)$ para todo $x \in G$ é chamado de **operador de intercâmbio** entre Φ e Φ'. Se T é um operador de intercâmbio invertível entre Φ e Φ', não é difícil verificar a sua inversa $T^{-1} : V' \to V$ é um operador de intercâmbio entre Φ' e Φ; neste caso, dizemos que T é um **isomorfismo de representações** e que as representações Φ e Φ' são **equivalentes**. Denotamos este fato por $\Phi \cong \Phi'$.

Proposição 2.5 (Lema de Schur). *(a) Se Φ, Φ' são representações irredutíveis de G nos espaços V, V', respectivamente, e $T : V \to V'$ é um operador de intercâmbio entre Φ e Φ', então ou T é nulo ou T é um isomorfismo.*

(b) Se Φ é uma representação irredutível de G no espaço V e $T : V \to V$ é um operador de intercâmbio entre Φ e a própria Φ, então T é um operador escalar.

Demonstração. (a) Consideremos os subespaços $U = \ker T \subseteq V$ e $W = \operatorname{Im} T \subseteq V'$. Então, U é invariante por Φ, pois

$$T\Phi(x)U = \Phi'(x)TU = \{0\}$$

para todo $x \in G$, e W é invariante por Φ', pois

$$\Phi'(x)W = \Phi'(x)TV = T\Phi(x)V = TV = W$$

para todo $x \in G$. Logo, ou $U = V$, do que segue $T = 0$, ou $U = \{0\}$, isto é, T é injetiva. Neste último caso, $W \neq \{0\}$, pois $V \neq \{0\}$, de modo que $W = V'$, ou seja, T é um isomorfismo.

(b) Como V é um espaço complexo e $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, então T admite um autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$. Seja $T_\lambda = T - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$. Claramente, temos $\Phi(x)T_\lambda = T_\lambda\Phi(x)$ para todo $x \in G$, de modo que, por (a), T_λ ou é nulo ou é um isomorfismo. Por outro lado, a escolha de λ garante que T_λ não é injetivo, e portanto $T_\lambda = 0$, isto é, $T = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$. □

Corolário 2.6. *Se G é abeliano e $\Phi : G \to GL_{\mathbb{C}}(V)$ é uma representação irredutível, então* $\dim V = 1$.

Demonstração. Dado $x \in G$ qualquer, o fato de G ser abeliano implica que $\Phi(x)$ é um operador de intercâmbio entre Φ e ela mesma. Logo, $\Phi(x) = \lambda(x)\mathrm{id}_V$ e a única maneira de Φ ser irredutível é com V unidimensional. □

Se Φ_1, Φ_2 são representações do grupo topológico G nos espaços V_1, V_2, respectivamente, podemos definir uma nova representação $\Phi_1 \oplus \Phi_2$ de G no espaço $V_1 \oplus V_2$ da maneira natural: se $(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$ e $x \in G$, então $(\Phi_1 \oplus \Phi_2)(x)(v_1, v_2) := (\Phi_1(x)v_1, \Phi(x)v_2)$. Esta representação é chamada **soma direta** de Φ_1 por Φ_2. Claramente, uma construção análoga é válida para quaisquer coleções finitas de representações de G. Observamos ainda que, nesta terminologia, uma representação Φ de G é completamente redutível se, e somente se, existem representações irredutíveis $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ de G tais que $\Phi = \Phi_1 \oplus \cdots \oplus \Phi_n$.

2.2 Coeficientes Matriciais

Sejam $\Phi : G \to GL_{\mathbb{C}}(V)$ uma representação unitária e $\langle \ , \ \rangle$ um produto interno invariante em V. Um **coeficiente matricial** de Φ é uma função $\phi : G \to \mathbb{C}$ da forma $\phi(x) = \langle \Phi(x)u, v\rangle$, em que $u, v \in V$. Claramente, os coeficientes matriciais de uma representação unitária são funções contínuas. Um coeficiente matricial ϕ é chamado de **básico** se existe uma base ortonormal $(e_1, \ldots, e_n)$ de V com respeito ao produto interno invariante escolhido e índices $i, j = 1, \ldots, n$ tais que $\phi(x) = \phi_{ij}(x) := \langle \Phi(x)e_j, e_i\rangle$. Os coeficientes matriciais básicos são exatamente as entradas de matriz de Φ com relação à base ortonormal fixada. De fato, para cada $x \in G$ e cada $j = 1, \ldots, n$, temos

$$\Phi(x)e_j = \sum_{i=1}^{n} \langle \Phi(x)e_j, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \phi_{ij}(x)e_i.$$

Além disso, todo coeficiente matricial de Φ pode ser escrito como combinação linear de coeficientes básicos. Com efeito, se $\phi(x) = \langle \Phi(x)u, v\rangle$ é um coeficiente matricial, ao escrevermos

$$u = \sum_{j=1} c^j e_j, \quad v = \sum_{i=1}^{n} d^i e_i$$

temos

$$\phi(x) = \left\langle \Phi(x) \sum_{j=1}^{n} c^j e_j, \sum_{i=1}^{n} d^i e_i \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} c^j \overline{d^i} \langle \Phi(x)e_j, e_i\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} c^j \overline{d^i} \phi_{ij}(x).$$

Lema 2.7. *Representações unitárias e equivalentes de um grupo topológico G possuem os mesmos coeficientes matriciais.*

Demonstração. Sejam Φ, Φ' representações unitárias e equivalentes de G nos espaços V, V', respectivamente, e $T : V' \to V$ um operador de intercâmbio invertível. Por simplicidade, denotaremos por $\langle \ , \ \rangle$ ambos os produtos internos invariantes de V e de V'. Dado um coeficiente matricial ϕ de Φ, escrevamos $\phi(x) = \langle \Phi(x)u, v\rangle$, com $x \in G$ e $u, v \in V$. Então,

$$\phi(x) = \langle \Phi(x)TT^{-1}u, v\rangle = \langle T\Phi'(x)T^{-1}u, v\rangle = \langle \Phi'(x)T^{-1}u, T^* v\rangle,$$

em que T^* denota o operador adjunto a T com respeito aos produtos internos invariantes fixados. O membro direito desta expressão claramente define um coeficiente matricial de Φ', de modo que todo coeficiente matricial de Φ também é coeficiente matricial de Φ'. Um argumento análogo, em que substituimos T por T^{-1}, prova a recíproca. $\square$

O próximo resultado mostra que é possível efetuar certas transformações no conjunto dos coeficientes matriciais de um grupo topológico G e ainda permanecer nesta classe de funções.

Proposição 2.8. *Se ϕ é um coeficiente matricial de uma representação unitária do grupo topológico G, então $\phi' := \phi \circ \iota$, $\overline{\phi}$ e ϕ^* também são.*

Demonstração. Uma vez que $\overline{\phi} = (\phi')^*$, é suficiente provar que ϕ' e ϕ^* são coeficientes matriciais de G. Sejam, então, $\Phi : G \to GL_{\mathbb{C}}(V)$ uma representação unitária com produto interno invariante $\langle\ ,\ \rangle$ e $u, v \in V$ tais que $\phi(x) = \langle \Phi(x)u, v\rangle$. Para cada operador linear $T : V \to V$, denotemos por T^* o operador adjunto a T com respeito a $\langle\ ,\ \rangle$. Como $\langle\ ,\ \rangle$ é invariante por Φ, então $\Phi(x)^* = \Phi(x)^{-1}$ para todo $x \in G$, e, com isso,

$$\phi^*(x) = \overline{\langle \Phi(x^{-1})u, v\rangle} = \langle \Phi(x)v, u\rangle.$$

Conseqüentemente, ϕ^* é um coeficiente matricial.

Para verificar que ϕ' é um coeficiente matricial, definimos $\Phi^* : G \to GL_{\mathbb{C}}(V^*)$ por $\Phi^*(x)f = f\Phi(x^{-1})$ para cada $f \in V^*$. Como

$$\Phi^*(xy)f = f\Phi((xy)^{-1}) = f\Phi(y^{-1})\Phi(x^{-1}) = (\Phi^*(x)\Phi^*(y))f$$

para $x, y \in G$ e $f \in V^*$, então Φ^* é um homomorfismo. Observamos que $\Phi^*(x)$ é o operador transposto de $\Phi(x^{-1})$ e, uma vez que a aplicação que associa a cada operador linear o seu operador transposto é uma transformação linear, então Φ^* é uma representação. Afirmamos que Φ^* é uma representação unitária e que ϕ' é um coeficiente matricial de Φ^*. Para verificarmos isto, sejam $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base de V ortonormal com respeito a $\langle\ ,\ \rangle$, $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ a base dual associada e $\langle\ ,\ \rangle'$ o produto interno em V^* que admite $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ como base ortonormal. Seja também $\{\phi_{ij}\}_{i,j=1}^n$ o conjunto de coeficientes matriciais básicos de Φ relativos a $(e_1, \ldots, e_n)$. Como

$$(\Phi^*(x)e_j^*)(e_i) = e_j^*(\Phi(x^{-1})e_i) = \sum_{k=1}^n \phi_{ki}(x^{-1})e_j^*(e_k) = \phi_{ji}(x^{-1})$$

para todos $x \in G$ e $i, j = 1, \ldots, n$, então

$$\Phi^*(x)e_j^* = \sum_{i=1}^n \phi_{ji}(x^{-1})e_i^*.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\langle \Phi^*(x)e_j^*, e_i^*\rangle' &= \phi_{ji}(x^{-1}) = \langle \Phi(x^{-1})e_i, e_j\rangle = \overline{\langle \Phi(x)e_j, e_i\rangle} \\
&= \overline{\phi_{ij}(x)} = \overline{\langle \Phi^*(x^{-1})e_i^*, e_j^*\rangle'} \\
&= \langle e_j^*, \Phi^*(x^{-1})e_i^*\rangle'
\end{aligned}$$

para todos $x \in G$ e $i, j = 1, \ldots, n$. Com isso, $\langle\ ,\ \rangle'$ é um produto interno em V^* invariante por Φ^*. Por fim, escrevendo

$$u = \sum_{j=1} c^j e_j, \quad v = \sum_{i=1}^{n} d^i e_i$$

e definindo

$$f = \sum_{j=1} \overline{c^j} e_j^*, \quad g = \sum_{i=1}^{n} \overline{d^i} e_i^*,$$

temos que

$$\phi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} c^j \overline{d^i} \phi_{ij}(x) = \sum_{i,j=1}^{n} c^j \overline{d^i} \langle \Phi^*(x^{-1}) e_i^*, e_j^* \rangle' = \langle \Phi^*(x^{-1}) g, f \rangle',$$

e portanto

$$\phi(x^{-1}) = \langle \Phi^*(x) g, f \rangle'. \quad \square$$

Já sabemos que todo coeficiente matricial de um grupo topológico G pode ser escrito como uma combinação linear de coeficientes básicos. No entanto, para que o método proposto de estudo das representações dos grupos compactos seja bem-sucedida, ainda é necessário que obtenhamos uma forma de reduzir a análise dos coeficientes matriciais aos das representações irredutíveis de G.

Lema 2.9. *Se ϕ é um coeficiente matricial de uma representação unitária do grupo topológico G, então podemos escrever ϕ como uma combinação linear de coeficientes matriciais básicos de representações unitárias irredutíveis de G.*

Demonstração. Sejam $\Phi : G \to GL_{\mathbb{C}}(V)$ uma representação unitária e $u, v \in V$ tais que $\phi(x) = \langle \Phi(x)u, v \rangle$, em que $\langle\ ,\ \rangle$ é um produto interno em V invariante por Φ. Seja $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ uma decomposição de V em subespaços invariantes, irredutíveis e mutuamente ortogonais com respeito a $\langle\ ,\ \rangle$, e sejam $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ as subrepresentações obtidas restringindo Φ a estes subespaços. Escrevendo $u = u_1 + \cdots + u_k$ e $v = v_1 + \cdots + v_k$, em que $u_i, v_i \in U_i$, temos que $\phi(x) = \sum_{i,j=1}^{k} \langle \Phi(x) u_i, v_j \rangle$. Como os subespaços $U_1, \ldots, U_k$ são invariantes e mutuamente ortogonais, então $\Phi(x)u_i \perp v_j$ e $\phi(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle \Phi_i(x) u_i, v_i \rangle$. Definindo $\phi_i(x) := \langle \Phi_i(x) u_i, v_i \rangle$ para $i = 1, \ldots, k$, temos que cada ϕ_i é um coeficiente matricial de uma representação unitária e irredutível de G, e, claramente, $\phi = \phi_1 + \cdots + \phi_k$. Escrevendo cada ϕ_i como combinação linear de coeficientes matriciais básicos da respectiva representação, obtemos o resultado. $\square$

Proposição 2.10 (Relações de Ortogonalidade de Schur)**.** *Sejam G um grupo compacto, Φ e Φ' representações unitárias, irredutíveis e não-equivalentes de G em V e V', respectivamente, e $\{\phi_{ij}\}_{i,j}$, $\{\phi'_{kl}\}_{k,l}$ os respectivos conjuntos de coeficientes matriciais básicos com relação a um par de bases ortonormais fixadas. Então,*

(a) $(\phi_{ij}, \phi'_{kl}) = 0$, *para todos i, j, k, l;*

(b) $(\phi_{ij}, \phi_{i'j'}) = \dfrac{\delta_{ii'}\delta_{jj'}}{\dim V}$ *para todos* i, i', j, j'.

Demonstração. Primeiramente, verificaremos alguns fatos de caráter geral. Sejam Φ, Φ' representações unitárias irredutíveis de G nos espaços V, V', respectivamente, e, por simplicidade, denotemos por $\langle\ ,\ \rangle$ ambos os produtos internos invariantes. Dada uma transformação linear $T : V' \to V$ qualquer, definimos $B : V \times V' \to \mathbb{C}$ por

$$B(v, v') = \int_G \langle v, \Phi(x)T\Phi'(x^{-1})v'\rangle dx. \tag{2.2}$$

Como a função $x \in G \mapsto \langle v, \Phi(x)T\Phi'(x^{-1})v'\rangle \in \mathbb{C}$ é contínua para todos $v \in V$ e $v' \in V'$, então B está bem-definida. Além disso, não é difícil provar que B é uma forma sesquilinear. Logo, para cada $v' \in V'$ a função $v \in V \mapsto B(v, v') \in \mathbb{C}$ é um funcional linear em V, e portanto existe um único vetor $S_T(v') \in V$ tal que $B(v, v') = \langle v, S_T(v')\rangle$. Isto define uma aplicação linear $S_T : V' \to V$ que, por (2.2), satisfaz a relação

$$\langle v, S_T(v')\rangle = \int_G \langle v, \Phi(x)T\Phi'(x^{-1})v'\rangle dx$$

para todos $v \in V$ e $v' \in V'$. Afirmamos que S_T é um operador de intercâmbio entre Φ' e Φ. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle v, \Phi(x)S_T\Phi'(x^{-1})v'\rangle &= \langle \Phi(x^{-1})v, S_T\Phi'(x^{-1})v'\rangle \\
&= \int_G \langle \Phi(x^{-1})v, \Phi(y)T\Phi'(y^{-1})\Phi'(x^{-1})v'\rangle dy \\
&= \int_G \langle v, \Phi(xy)T\Phi'((xy)^{-1})v'\rangle dy \\
&= \int_G \langle v, \Phi(y)T\Phi'(y^{-1})v'\rangle dy \\
&= \langle v, S_T(v')\rangle
\end{aligned}$$

para todos $v \in V$ e $v' \in V'$; isto é, $\Phi(x)S_T\Phi'(x^{-1}) = S_T$. Uma vez que Φ e Φ' são irredutíveis, pelo Lema de Schur temos $S_T = 0$ ou S_T invertível, fazendo com que Φ, Φ' sejam representações equivalentes. Neste último caso, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\Phi = \Phi'$ e que $T : V \to V$, e aplicando o Lema de Schur novamente temos $S_T = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Este valor λ pode ser calculado da seguinte maneira: seja $(e_i, \ldots, e_n)$ uma base ortonormal de V com respeito a $\langle\ ,\ \rangle$; então,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\mathrm{Tr}(S_T)}{\dim V} = \frac{1}{\dim V}\sum_{i=1}^{n} \langle S_T(e_i), e_i\rangle \\
&= \frac{1}{\dim V}\sum_{i=1}^{n} \int_G \langle \Phi(x)T\Phi(x^{-1})e_i, e_i\rangle dx \\
&= \frac{1}{\dim V}\int_G \mathrm{Tr}(\Phi(x)T\Phi(x^{-1}))dx \\
&= \frac{\mathrm{Tr}(T)}{\dim V}.
\end{aligned}$$

Portanto, $S_T = \dfrac{\mathrm{Tr}(T)}{\dim V} \cdot \mathrm{id}_V$.

Para provar o item (a), sejam $(e_1, \ldots, e_n)$ e $(e'_1, \ldots, e'_m)$ bases ortonormais de V e V', respectivamente, tais que $\phi_{ij}(x) = \langle \Phi(x)e_j, e_i\rangle$ e $\phi'_{kl}(x) = \langle \Phi'(x)e'_l, e'_k\rangle$. Para cada $j = 1, \ldots, n$ e cada $l = 1, \ldots, m$, seja $T_{jl} : V' \to V$ a transformação linear definida por $T_{jl}(v') = \langle v', e'_l\rangle e_j$. Como Φ, Φ' são não-equivalentes, então $S_{T_{jl}} = 0$, e portanto

$$\begin{aligned} 0 &= \langle e_i, S_{T_{jl}} e'_k\rangle = \int_G \langle e_i, \Phi(x)T_{jl}\Phi'(x^{-1})e'_k\rangle dx \\ &= \int_G \langle e_i, \langle \Phi'(x^{-1})e'_k, e'_l\rangle \Phi(x)e_j\rangle dx = \int_G \langle \Phi'(x)e'_l, e'_k\rangle \overline{\langle \Phi(x)e_j, e_i\rangle} dx \\ &= \int_G \phi'_{kl}(x)\overline{\phi_{ij}(x)} dx = (\phi'_{kl}, \phi_{ij}). \end{aligned}$$

Para verificar (b), definimos, para cada $j, j' = 1, \ldots, n$, a transformação linear $T_{jj'} : V \to V$ por $T_{jj'}(v) = \langle v, e_{j'}\rangle e_j$. Então,

$$\mathrm{Tr}(T_{jj'}) = \sum_{i=1}^n \langle T_{jj'}(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \langle e_i, e_{j'}\rangle e_j, e_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_{j'}\rangle \langle e_j, e_i\rangle = \langle e_j, e_{j'}\rangle,$$

de modo que $S_{T_{jj'}} = \dfrac{\langle e_j, e_{j'}\rangle}{\dim V} \cdot \mathrm{id}_V$. Com isso, se $i, i' = 1, \ldots, n$, então, por um lado,

$$\langle e_i, S_{T_{jj'}}(e_{i'})\rangle = \frac{\langle e_j, e_{j'}\rangle \langle e_i, e_{i'}\rangle}{\dim V}$$

e, por outro,

$$\begin{aligned} \langle e_i, S_{T_{jj'}}(e_{i'})\rangle &= \int_G \langle e_i, \Phi(x)T_{jj'}\Phi(x^{-1})e_{i'}\rangle dx \\ &= \int_G \langle e_i, \langle \Phi(x^{-1})e_{i'}, e_{j'}\rangle \Phi(x)e_j\rangle dx \\ &= \int_G \langle \Phi(x)e_{j'}, e_{i'}\rangle \overline{\langle \Phi(x)e_j, e_i\rangle} dx \\ &= \int_G \phi_{i'j'}(x)\overline{\phi_{ij}(x)} dx \\ &= (\phi_{i'j'}, \phi_{ij}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\phi_{ij}, \phi_{i'j'}) = \overline{(\phi_{i'j'}, \phi_{ij})} = \frac{\langle e_j, e_{j'}\rangle \langle e_{i'}, e_i\rangle}{\dim V} = \frac{\delta_{ii'}\delta_{jj'}}{\dim V}. \quad \square$$

Dado um grupo compacto G, para toda representação $\Phi : G \to GL_{\mathbb{C}}(V)$ existe um número natural n e uma representação $\Phi' : G \to GL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ equivalente a Φ.[1] Além

[1]De fato, basta tomar $n = \dim V$, $T : V \to \mathbb{C}^n$ um isomorfismo linear e definir $\Phi' : G \to GL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ por $\Phi'(x) = T\Phi(x)T^{-1}$.

disso, se Φ é unitária, podemos usar o operador de intercâmbio entre Φ e Φ' para definir um produto interno em $\mathbb{C}^n$ invariante por Φ'. Uma vez que os coeficientes matriciais de representação unitárias equivalentes são os mesmos, então podemos assumir, sem perde de generalidade, que todas as representações unitárias de G se dão nos espaços $\mathbb{C}^n$.

Seja Rep_n um conjunto de representações unitárias, irredutíves e duas-a-duas não-equivalentes de G em $\mathbb{C}^n$ que, além disso, é maximal com respeito a estas propriedades e tomemos $\mathrm{Rep}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Rep}_n$. Então, $\mathrm{Rep}(G)$ é um conjunto formado de representações unitárias de G, irredutíveis e duas-a-duas não-equivalentes com a propriedade de que se Φ' é uma representação unitária e irredutível de G então Φ' é equivalente a alguma representação de $\mathrm{Rep}(G)$. Escrevamos $\mathrm{Rep}(G) = \{\Phi^\alpha\}_{\alpha \in A}$ e denotemos, para cada $\alpha \in A$, d^α a dimensão do espaço da representação Φ^α.

Para cada representação Φ^α, fixamos um produto interno invariante no espaço da representação e tomamos uma base ortonormal com respeito a este produto interno, assim obtendo um conjunto de coeficientes matriciais básicos que denotaremos por $\{\phi_{ij}^\alpha\}_{i,j}$. Tomando $B(G) := \bigcup_{\alpha \in A} \{(d^\alpha)^{1/2} \phi_{ij}^\alpha\}_{i,j}$, concluimos da Proposição 2.10 que $B(G)$ é um sistema ortonormal em $L^2(G)$. Provaremos adiante neste capítulo que $B(G)$ é, na verdade, uma base de Hilbert para $L^2(G)$. Este resultado é o famoso Teorema de Peter & Weyl, uma das peças fundamentais da teoria de representações dos grupos compactos e da teoria de análise harmônica.

Funções Representativas

Seja G um grupo compacto. Vamos denotar por $\mathcal{R}(G)$ o subespaço vetorial de $L^2(G)$ gerado pelos coeficientes matriciais das representações unitárias de G. Uma função $f \in \mathcal{R}(G)$ é chamada de **função representativa** de G. Claramente, toda função representativa de G é contínua. Vale a pena observar que, pela Proposição 2.8, se $f \in L^2(G)$ é uma função representativa, então f^*, $\overline{f}$ e $f \circ \iota$ também são.

Teorema 2.11. *Seja G um grupo compacto. Para toda função $f \in L^2(G)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) f é representativa;

(b) existe um subespaço $V \subseteq L^2(G)$ de dimensão finita que contém f e que é invariante por translações;

(c) existe um subespaço $V \subseteq L^2(G)$ de dimensão finita que contém f e que é invariante por translações à direita;

(d) existe um subespaço $V \subseteq L^2(G)$ de dimensão finita que contém f e que é invariante por translações à esquerda.

Demonstração. (a)$\Rightarrow$(b): Seja U o subconjunto de $L^2(G)$ formado por todas as funções $f \in L^2(G)$ que satisfazem (b). Precisamos provar que $\mathcal{R}(G) \subseteq U$. Primeiramente, observamos que U é um subespaço vetorial de $L^2(G)$. Com efeito, é fácil ver que $0 \in U$ e, dados $f, g \in U$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, sejam $V, W \subseteq L^2(G)$ subespaços de dimensão finita tais que $f \in V$, $g \in W$. Então, $V + W$ é um subespaço de dimensão finita de $L^2(G)$ invariante por translações e que contém $f + \lambda g$.

Uma vez que U é um subespaço vetorial de $L^2(G)$ e $\mathcal{R}(G)$ é gerado pelos coeficientes matriciais de representações unitárias de G, para provar que $\mathcal{R}(G) \subseteq U$ é suficiente mostrar que $\phi \in U$ sempre que ϕ é um coeficiente matricial. Tomemos $\Phi : G \to GL_{\mathbb{C}}(W)$ uma representação unitária com produto interno invariante $\langle\ ,\ \rangle$ e que tenha ϕ como um coeficiente matricial e seja $V \subseteq L^2(G)$ o subespaço gerado pelos coeficientes matriciais de Φ. Claramente, $\phi \in V$ e, uma vez que os coeficiente matriciais básicos de Φ com respeito a alguma base ortonormal de W formam uma base de V, então V é de dimensão finita. Resta provar que V é invariante por translações. Seja ψ um coeficiente matricial de Φ e escreva $\psi(x) = \langle \Phi(x)u, v\rangle$, em que $u, v \in W$. Dados $x, y \in G$, temos

$$(R_x\psi)(y) = \psi(yx) = \langle \Phi(yx)u, v\rangle = \langle \Phi(y)(\Phi(x)u), v\rangle$$

e

$$(L_x\psi)(y) = \psi(x^{-1}y) = \langle \Phi(x)^{-1}\Phi(y)u, v\rangle = \langle \Phi(y)u, \Phi(x)v\rangle$$

o que significa que $R_x\psi$ e $L_x\psi$ ainda são coeficientes matriciais de Φ e que, portanto, pertencem a V. Como R_x, L_x são lineares, o resultado segue.

(b)$\Rightarrow$(c) e (b)$\Rightarrow$(d): São imediatas.

(c)$\Rightarrow$(a): Seja $V \subseteq L^2(G)$ o subespaço do enunciado e definamos $\Phi : G \to GL_{\mathbb{C}}(V)$ por $\Phi(x)g = R_x g$. As Proposições 1.24 e 2.1 garantem que Φ é uma representação de G. Além disso, o produto interno de $L^2(G)$ restrito a V é invariante por Φ. Seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base ortonormal de V e tomemos $\{\phi_{ij}\}_{i,j}$ os coeficientes matriciais básicos associados. Escrevendo $f = \sum_{j=1}^n c^j e_j$, temos

$$\Phi(x)f = \sum_{j=1}^n c^j \Phi(x)e_j = \sum_{i,j=1}^n c^j \phi_{ij}(x)e_i,$$

ou seja, para cada $x \in G$ vale a igualdade

$$(\Phi(x)f)(y) = \sum_{i,j=1}^n c^j \phi_{ij}(x)e_i(y)$$

para quase todo $y \in G$. Vamos considerar a função $F : G \times G \to \mathbb{C}$ definida por

$$F(x, y) = (\Phi(x)f)(y) - \sum_{i,j=1}^n c^j \phi_{ij}(x)e_i(y).$$

Claramente, F é mensurável. Além disso, pelo Teorema de Tonelli temos

$$\int_{G\times G} |F(x, y)|d(x, y) = \int_G \left(\int_G \left| (\Phi(x)f)(y) - \sum_{i,j=1}^n c^j \phi_{ij}(x)e_i(y) \right| dy \right) dx = 0,$$

de modo que $F = 0$ $(\mu \times \mu)$-q.t.p. Isto significa que

$$E^y = \left\{ x \in G : (\Phi(x)f)(y) \neq \sum_{i,j=1}^{n} c^j \phi_{ij}(x) e_i(y) \right\}$$

é um conjunto de medida nula para quase todo $y \in G$, e portanto podemos escolher $y_0 \in G$ tal que

$$f(y_0 x) = (\Phi(x)f)(y_0) = \sum_{i,j=1}^{n} c^j \phi_{ij}(x) e_i(y_0)$$

para quase todo $x \in G$. Como μ é uma medida de Haar, então

$$f(x) = (\Phi(y_0^{-1}x)f)(y_0) = \sum_{i,j=1}^{n} c^j e_i(y_0) \phi_{ij}(y_0^{-1}x) = \sum_{i,j=1}^{n} c^j e_i(y_0)(L_{y_0}\phi_{ij})(x)$$

para quase todo $x \in G$, e concluimos que $f = \sum_{i,j=1}^{n} c^j e_i(y_0) L_{y_0}\phi_{ij}$. Como provamos acima, as funções $L_{y_0}\phi_{ij}$ são coeficientes matriciais de Φ, e isto implica que f é uma função representativa.

(d)$\Rightarrow$(a): Seja V como no enunciado e tomemos $U = \{g \circ \iota : g \in V\}$. Como a aplicação $g \in L^2(G) \mapsto g \circ \iota \in L^2(G)$ é uma transformação linear, então U é um subespaço vetorial de dimensão finita de $L^2(G)$ que contém $f \circ \iota$. Se $g \in U$, então $g \circ \iota \in V$, de modo que $L_x(g \circ \iota) \in V$ para todo $x \in G$. Por outro lado,

$$(L_x(g \circ \iota))(y) = (g \circ \iota)(x^{-1}y) = g(y^{-1}x) = ((R_x g) \circ \iota)(y),$$

ou seja, $R_x g \in U$. Isto significa que U é invariante por translações à direita, e pelo que provamos acima concluimos que $f \circ \iota \in U$ é uma função representativa. Portanto, $f = (f \circ \iota) \circ \iota \in \mathcal{R}(G)$. □

Corolário 2.12. *Seja G um grupo compacto. Então, $\mathcal{R}(G)$ é invariante por translações.*

Demonstração. Se $f \in \mathcal{R}(G)$, então existe um subespaço $V \subseteq L^2(G)$ de dimensão finita contendo f que é invariante por translações. Claramente, cada elemento de V satisfaz a condição (b) do Teorema 2.11, de modo que $V \subseteq \mathcal{R}(G)$. Portanto, $R_x f, L_x f \in V \subseteq \mathcal{R}(G)$ para todo $x \in G$. □

Corolário 2.13. *Seja G um grupo compacto. Então, $\mathcal{R}(G)$ é um ideal bilateral da álgebra de convolução $L^2(G)$.*

Demonstração. Sejam $f \in \mathcal{R}(G)$ e $g \in L^2(G)$. Pelo Teorema 2.11, existe um subespaço $V \subseteq L^2(G)$ de dimensão finita contendo f que é invariante por translações. Sejam $W_1 := V * g$ e $W_2 := g * V$. Claramente, W_1 e W_2 são subespaços de dimensão finita de $L^2(G)$ contendo, respectivamente, $f * g$ e $g * f$. Além disso, pelo item (b) do Lema 1.25, temos que W_1 é invariante por translações à esquerda e W_2, por translações à direita. Portanto, $f * g$ e $g * f$ são funções representativas. □

Caracteres

Seja Φ uma representação do grupo compacto G no espaço vetorial complexo V de dimensão finita. O **caracter** de Φ é a função $\chi_\Phi : G \to \mathbb{C}$ definida por $\chi_\Phi(x) := \mathrm{Tr}(\Phi(x))$. Dados $x, y \in G$, temos

$$\chi_\Phi(xy) = \mathrm{Tr}(\Phi(x)\Phi(y)) = \mathrm{Tr}(\Phi(y)\Phi(x)) = \chi_\Phi(yx),$$

ou seja, o caracter de uma representação de G é uma função de classes. Além disso, não é difícil provar que representações equivalentes de G possuem o mesmo caracter. Vamos denotar por $\mathrm{Char}(G)$ o subespaço de $L^2(G)$ gerado pelos caracteres das representações de G.

Lema 2.14. *Seja Φ uma representação unitária do grupo compacto G no espaço V. Então, χ_Φ é uma função representativa.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\langle\ ,\ \rangle$ um produto interno em V invariante por Φ e $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base de V ortonormal com respeito a $\langle\ ,\ \rangle$. Se $\{\phi_{ij}\}_{i,j}$ é o conjunto dos coeficientes matriciais básicos associados a esta base, então, para todo $x \in G$, temos

$$\chi_\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle \Phi(x)e_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \phi_{ii}(x). \quad \square$$

Se Φ_1, Φ_2 são representações de G nos espaços V_1, V_2, respectivamente, então vemos facilmente que $\chi_{\Phi_1 \oplus \Phi_2} = \chi_{\Phi_1} + \chi_{\Phi_2}$. Deste modo, se Φ é uma representação completamente redutível de G, então podemos escrever χ_Φ como uma soma de caracteres de representações irredutíveis de G.

Proposição 2.15. *Sejam G um grupo compacto e $\mathrm{Rep}(G)$ um conjunto maximal de representações unitárias, irredutíveis e duas-a-duas não-equivalentes de G. Então, o conjunto dos caracteres das representações de $\mathrm{Rep}(G)$ é um sistema ortonormal em $L^2(G)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\Phi^\alpha, \Phi^\beta \in \mathrm{Rep}(G)$ representações de G nos espaços V_α, V_β, respectivamente, e $\{\phi^\alpha_{ij}\}_{i,j}, \{\phi^\beta_{kl}\}_{k,l}$ os respectivos conjuntos de coeficientes matriciais básicos associados. Como $\chi_{\Phi^\alpha} = \sum_{i=1}^{\dim V_\alpha} \phi^\alpha_{ii}$ e $\chi_{\Phi^\beta} = \sum_{k=1}^{\dim V_\beta} \phi^\beta_{kk}$, então

$$(\chi_{\Phi^\alpha}, \chi_{\Phi^\beta}) = \sum_{i=1}^{\dim V_\alpha} \sum_{k=1}^{\dim V_\beta} (\phi^\alpha_{ii}, \phi^\beta_{kk}).$$

Pela Proposição 2.10, se $\alpha \neq \beta$ então todas as parcelas do somatório acima se anulam, e temos $(\chi_{\Phi^\alpha}, \chi_{\Phi^\beta}) = 0$. Por outro lado, se $\alpha = \beta$, então

$$(\chi_{\Phi^\alpha}, \chi_{\Phi^\alpha}) = \sum_{i,k=1}^{\dim V_\alpha} \frac{(\delta_{ik})^2}{\dim V_\alpha} = 1. \quad \square$$

Corolário 2.16. *Sejam G um grupo compacto, Φ uma representação unitária de G no espaço V e $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ uma decomposição de V em subespaços invariantes e irredutíveis por Φ. Dada uma representação irredutível Φ^α de G, temos que $(\chi_{\Phi^\alpha}, \chi_\Phi)$ é um número natural igual à quantidade de subrepresentações Φ_{U_i} equivalentes a Φ^α.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $\chi_\Phi = \sum_{i=1}^k \chi_{\Phi_{U_i}}$, então $(\chi_{\Phi^\alpha}, \chi_\Phi) = \sum_{i=1}^k (\chi_{\Phi^\alpha}, \chi_{\Phi_{U_i}})$. Para cada $i = 1, \ldots, k$, se Φ_{U_i} é equivalente a Φ^α, então a parcela correspondente no somatório vale 1; caso contrário, ela vale 0. □

Corolário 2.17. *Sejam G um grupo compacto e Φ uma representação unitária de G no espaço V. Se $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ e $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_l$ são duas decomposições de V em subespaços invariantes por Φ e irredutíveis, então $k = l$ e, após uma possível reordenação desses subespaços, temos que Φ_{U_i} e Φ_{W_i} são equivalentes para todo $i = 1, \ldots, k$.*

Corolário 2.18. *Se G é um grupo compacto, então duas representações unitárias de G de mesmo caracter são equivalentes.*

Funções de Classes

Seja G um grupo compacto. Como provamos no Capítulo 1, o centro da álgebra de convolução de G é o conjunto $\mathrm{Cl}(G)$ composto das funções de classes de $L^2(G)$. Por causa disso, $\mathrm{Cl}(G)$ é um subespaço fechado de $L^2(G)$, de modo que podemos considerar a projeção ortogonal de $L^2(G)$ sobre $\mathrm{Cl}(G)$, que denotaremos por P.

Proposição 2.19. *Se $f \in L^2(G)$, então*

$$(Pf)(x) = \int_G f(yxy^{-1})dy$$

para todo $x \in G$.

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente, provaremos que a função

$$\widetilde{f} : x \in G \longmapsto \int_G f(yxy^{-1})dy \in \mathbb{C}$$

está bem-definida e pertence a $L^2(G)$. Para tanto, observamos que

$$\begin{aligned} \int_G \left(\int_G |f(yxy^{-1})|dy \right) dx &= \int_G \left(\int_G |f(yxy^{-1})|dx \right) dy \\ &= \int_G \left(\int_G |f(x)|dx \right) dy \\ &\leq ||f||_2 \end{aligned}$$

pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Isto significa que a função

$$x \in G \longmapsto \int_G |f(yxy^{-1})|dy \in [0, +\infty]$$

é integrável, e portanto que $\left|\int_G f(yxy^{-1})dy\right| < +\infty$ para quase todo $x \in G$. Logo, $\widetilde{f}$ está bem-definida. Para ver que $\widetilde{f} \in L^2(G)$, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\int_G \left|\widetilde{f}(x)\right|^2 dx &= \int_G \left|\int_G f(yxy^{-1})dy\right|^2 dx \\
&\leq \int_G \left(\int_G |f(yxy^{-1})|dy\right)^2 dx \\
&= \int_G \left[\left(\int_G |f(yxy^{-1})|dy\right)\left(\int_G |f(zxz^{-1})|dz\right)\right] dx \\
&= \int_{G\times G\times G} |f(yxy^{-1})| \cdot |f(zxz^{-1})| d(y,z,x) \\
&= \int_{G\times G} \left(\int_G |f(yxy^{-1})| \cdot |f(zxz^{-1})| dx\right) d(y,z) \\
&\leq \int_{G\times G} \left[\left(\int_G |f(yxy^{-1})|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_G |f(zxz^{-1})|^2 dx\right)^{1/2}\right] d(y,z) \\
&= ||f||_2^2.
\end{aligned}$$

Agora, seja $P' : L^2(G) \to L^2(G)$ a aplicação definida por $(P'f)(x) = \int_G f(yxy^{-1})dy$. Mostramos acima que P' está bem-definida, e é imediato que P' é linear. Afirmamos que $P' = P$. Para provar isto, temos que verificar três fatos: (i) $P'^2 = P'$; (ii) P' é autoadjunto; (iii) $\mathrm{Im}(P') = \mathrm{Cl}(G)$.

(i) Seja $f \in L^2(G)$. Então,

$$\begin{aligned}
(P'^2 f)(x) &= \int_G (P'f)(yxy^{-1})dy = \int_G \left(\int_G f(zyxy^{-1}z^{-1})dz\right) dy \\
&= \int_G \left(\int_G f(zxz^{-1})dz\right) dy = \int_G (P'f)(x)dy = (P'f)(x).
\end{aligned}$$

(ii) Se $f, g \in L^2(G)$, então

$$\begin{aligned}
(P'f, g) &= \int_G (P'f)(x)\overline{g(x)}dx = \int_G \left(\int_G f(yxy^{-1})dy\right) \overline{g(x)}dx \\
&= \int_G \left(\int_G f(yxy^{-1})\overline{g(x)}dx\right) dy = \int_G \left(\int_G f(x)\overline{g(y^{-1}xy)}dx\right) dy \\
&= \int_G f(x)\overline{\left(\int_G g(y^{-1}xy)dy\right)}dx = \int_G f(x)\overline{(P'g)(x)}dx \\
&= (f, P'g).
\end{aligned}$$

(iii) Se $f \in L^2(G)$ e $x, y \in G$, então

$$\begin{aligned}(P'f)(xy) &= \int_G f(zxyz^{-1})dz = \int_G f((zy^{-1})yx(zy^{-1})^{-1})dz \\ &= \int_G f(zyxz^{-1})dz = (P'f)(yx),\end{aligned}$$

provando que $P'f \in \mathrm{Cl}(G)$. Reciprocamente, se $f \in \mathrm{Cl}(G)$, então

$$(P'f)(x) = \int_G f(yxy^{-1})dy = \int_G f(x)dy = f(x),$$

de modo que $f = P'f \in \mathrm{Im}(P')$. □

Corolário 2.20. *Se G é um grupo compacto e $f : G \to \mathbb{C}$ é contínua, então Pf também é contínua.*

Demonstração. Sejam $x_0 \in G$ e $\epsilon > 0$. Pela continuidade uniforme de f, existe uma vizinhança $U \subseteq G$ de 1 tal que $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ para todos $x, y \in G$ que satisfazem $xy^{-1} \in U$.

Afirmamos que existe uma vizinhança $V \subseteq G$ de 1 tal que $yVy^{-1} \subseteq U$ para todo $y \in G$. Suponhamos, por absurdo, que para toda vizinhança $V \subseteq G$ de 1 existem $y_V \in G$ e $x_V \in V$ tais que $y_V x_V y_V^{-1} \notin U$. Claramente, a rede $(x_V)_V$ assim definida converge a 1. Além disso, uma vez que G é compacto, podemos assumir que a rede $(y_V)_V$ converge a $y \in G$. Isto significa que a rede $(y_V x_V y_V^{-1})_V$ converge a 1, o que contradiz o fato de que $y_V x_V y_V^{-1} \notin U$.

Seja $V \subseteq G$ uma vizinhança de 1 tal que $yVy^{-1} \in U$ para todo $y \in G$, e tomemos $W = Vx_0$. Se $x \in W$, então

$$(yxy^{-1})(yx_0y^{-1})^{-1} = yxx_0^{-1}y^{-1} \in yVy^{-1} \subseteq U$$

para todo $y \in G$. Isto significa que, se $x \in W$, então

$$|f(yxy^{-1}) - f(yx_0y^{-1})| \leq \epsilon$$

para todo $y \in G$. Portanto,

$$|(Pf)(x) - (Pf)(x_0)| \leq \int_G |f(yxy^{-1}) - f(yx_0y^{-1})|dy \leq \epsilon$$

para todo $x \in W$. □

Corolário 2.21. *Sejam G um grupo compacto e $f \in L^2(G)$ uma função representativa. Então, $Pf \in \mathrm{Char}(G)$. Em particular, $\mathcal{R}(G)$ é invariante por P.*

Demonstração. É suficiente provar a afirmação quando f é um coeficiente básico de uma representação unitária e irredutível de G. Sejam, então, Φ uma representação irredutível de G no espaço V, $\langle\ ,\ \rangle$ um produto interno em V invariante por Φ e $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base ortonormal de V com respeito a $\langle\ ,\ \rangle$. Se $\{\phi_{ij}\}_{i,j}$ são os coeficientes matriciais básicos associados, então

$$
\begin{aligned}
(P\phi_{ij})(x) &= \int_G \phi_{ij}(yxy^{-1})dy = \int_G \langle \Phi(y^{-1}xy)e_j, e_i\rangle dy \\
&= \int_G \langle \Phi(x)\Phi(y)e_j, \Phi(y)e_i\rangle dy = \int_G \left\langle \Phi(x)\sum_{k=1}^n \phi_{kj}(y)e_k, \sum_{l=1}^n \phi_{li}(y)e_l \right\rangle dy \\
&= \sum_{k,l=1}^n \int_G \phi_{kj}(y)\overline{\phi_{li}(y)}\langle \Phi(x)e_k, e_l\rangle dy = \sum_{k,l=1}^n \phi_{lk}(x)(\phi_{kj}, \phi_{li}) \\
&= \sum_{k,l=1}^n \phi_{lk}(x)\frac{\delta_{kl}\delta_{ji}}{\dim V} = \frac{\delta_{ij}}{\dim V}\sum_{k=1}^n \phi_{kk}(x) = \frac{\delta_{ij}}{\dim V}\chi_\Phi(x)
\end{aligned}
$$

para todos $i, j = 1, \ldots, n$ e todo $x \in G$. □

2.3 O Teorema de Peter & Weyl

No começo do século XIX, o matemático francês Joseph Fourier lançou as bases da análise harmônica ao reduzir o estudo das ondas sonoras e de calor ao estudo de ondas mais simples (os "harmônicos simples") e depois utilizar o princípio de sobreposição para reconstruir as ondas originais e, neste processo, obter as informações desejadas. Esta técnica, conhecida como Análise de Fourier, provou ser extremamente poderosa e está na base de muitas das atuais tecnologias de telecomunicações, acústica e óptica.

O problema central da Análise de Fourier é tentar escrever uma função periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de período $T > 0$ como combinação linear (possivelmente infinita) das funções

$$\cos\left(\tfrac{2\pi nx}{T}\right), \quad \mathrm{sen}\left(\tfrac{2\pi nx}{T}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Explicitamente,

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos\left(\tfrac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\tfrac{2\pi nx}{T}\right). \tag{2.3}$$

Utilizando as relações

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \mathrm{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2},$$

podemos reescrever (2.3) na forma

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e^{2\pi inx/T} + d_n e^{-2\pi inx/T}, \tag{2.4}$$

em que $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ e $d_n = \frac{a_n-b_n}{2}$. Pondo $c_n = d_{-n}$ para $n < 0$, temos ainda que (2.4) pode ser escrita da forma

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi inx/T} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \left(e^{2\pi ix/T}\right)^n. \tag{2.5}$$

Considerando a aplicação de recobrimento $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida por $p(x) = e^{2\pi ix/T}$, o fato de f ter período T implica que f fatora-se a uma função $\overline{f} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\overline{f} \circ p = f$, e deste modo (2.5) pode ser reescrita da forma

$$\overline{f}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n, \quad z = e^{2\pi ix/T}. \tag{2.6}$$

Isto significa que o problema original de Fourier de obter a equação (2.3) para f pode ser visto como o problema de escrever uma função $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ como combinação linear das funções $z \in \mathbb{S}^1 \mapsto z^n \in \mathbb{S}^1$, $n \in \mathbb{Z}$. Esta reformulação tem a vantagem de agora estarmos trabalhando sobre um grupo compacto ($\mathbb{S}^1$).

Outro ponto interessante desse ponto de vista é que as funções $z \in \mathbb{S}^1 \mapsto z^n \in \mathbb{S}^1$ são exatamente os coeficientes matriciais básicos das representações irresutíveis do grupo $\mathbb{S}^1$. Para ver isto, primeiro observamos que, como $\mathbb{S}^1$ é abeliano, então as suas representações irredutíveis são todas unidimensionais pelo Corolário 2.6. Além disso, sendo $\mathbb{S}^1$ compacto, todas as suas representações são unitárias, de modo que podemos assumir que as representações irredutíveis de $\mathbb{S}^1$ são homomorfismos contínuos $\Phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Estes homomorfismos coincidem com os coeficientes matriciais básicos que queremos determinar.

Dado um homomorfismo contínuo $\Phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, seja $\widetilde{\Phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ a função definida por $\widetilde{\Phi}(x) = \Phi(e^{2\pi ix})$. Como $q : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2\pi ix} \in \mathbb{S}^1$ é um homomorfismo de recobrimento, então $\widetilde{\Phi}$ é um homomorfismo contínuo. Seja D o núcleo de $\widetilde{\Phi}$. Então, D é um subgrupo fechado de $\mathbb{R}$, e portanto $D = \mathbb{R}$ ou $D = \mathbb{Z}x_0$ para algum $x_0 \geq 0$. Se $D = \mathbb{R}$, então está claro que $\Phi \equiv 1$, isto é, $\Phi(z) = z^0$ para todo $z \in \mathbb{S}^1$. Caso contrário, temos $0 < x_0 \leq 1$, pois $1 \in D$ e $x_0 = \min\{x \in D : x > 0\}$. Com isso, $\ker(\Phi)$ é finito, pois $\ker(\Phi) = p(D)$ e D é discreto e fechado. Em particular, x_0 é racional. Na verdade, $x_0 = 1/n$ para algum número natural $n > 0$. De fato, escrevendo $x_0 = m/n$, com $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ e $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $\alpha m + \beta n = 1$. Então,

$$\frac{1}{n} = \alpha x_0 + \beta \Rightarrow \widetilde{\Phi}\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\widetilde{\Phi}(x_0)\right)^\alpha \widetilde{\Phi}(\beta) = 1.$$

Logo, $1/n \in D$ e $0 < 1/n \leq x_0$, e portanto $x_0 = 1/n$.

Vamos provar que $\Phi(z) = z^n$ ou $\Phi(z) = z^{-n}$. Como $q : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ é recobrimento, então $\widetilde{\Phi}$ levanta-se a uma função contínua $\overline{\Phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $q \circ \overline{\Phi} = \widetilde{\Phi}$ e $\overline{\Phi}(0) = 0$. Além disso, como $\widetilde{\Phi}$ é um homomorfismo contínuo, então $\overline{\Phi}$ também é. Portanto, existe um número real $y_0 \neq 0$ tal que $\overline{\Phi}(x) = y_0 x$. Como $p^{-1}(1) = 2\pi\mathbb{Z}$, então $\overline{\Phi}(D) \subseteq 2\pi\mathbb{Z}$. Logo, $\overline{\Phi}(x_0) = y_0 x_0 = 2\pi k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Devemos ter $k \neq 0$, pois caso contrário teríamos $x_0 = \frac{2\pi k}{y_0} = 0$. Logo, $k > 0$ ou $k < 0$. Se $k > 0$, então $\overline{\Phi}$ é uma função crescente que manda bijetivamente o intervalo $[0, x_0]$ no intervalo $[0, 2\pi k]$. Isso significa que $k = 1$, pois caso contrário $x_0' = \overline{\Phi}^{-1}(2\pi)$ seria um número positivo em D menor do que x_0, um absurdo. Logo, $\frac{y_0}{n} = y_0 x_0 = 2\pi$, isto é, $y_0 = 2\pi n$. Portanto, se $z \in \mathbb{S}^1$ e $x \in \mathbb{R}$ é tal que $z = q(x)$, então

$$\Phi(z) = \Phi(q(x)) = \widetilde{\Phi}(x) = q(\overline{\Phi}(x)) = q(y_0 x) = q(2\pi n x) = z^n.$$

Agora, se $k < 0$, então um argumento análogo ao apresentado acima prova que $k = -1$, isto é, que $y_0 = \frac{2\pi k}{x_0} = -2\pi n$, e portanto

$$\Phi(z) = \Phi(q(x)) = \widetilde{\Phi}(x) = q(\overline{\Phi}(x)) = q(y_0 x) = q(-2\pi n x) = z^{-n}.$$

O resultado que provaremos agora generaliza esta situação para qualquer grupo compacto.

Teorema 2.22 (Peter & Weyl)**.** *Seja G um grupo compacto. Então:*

(a) $\mathcal{R}(G)$ é denso em $L^2(G)$;

(b) $\mathcal{R}(G)$ é denso em $C(G)$ (com respeito à norma do supremo);

(c) $\mathrm{Char}(G)$ *é denso em* $\mathrm{Cl}(G)$.

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que (b) e (c) decorrem de (a). Para verificar (c), sejam $f \in \mathrm{Cl}(G)$ e $\epsilon > 0$, e tomemos, de acordo com (a), uma função $g \in \mathcal{R}(G)$ tal que $||f - g||_2 \leq \epsilon$. Como $P : L^2(G) \to \mathrm{Cl}(G)$ é uma projeção ortogonal, então

$$||f - Pg||_2 = ||P(f - g)||_2 \leq ||f - g|| \leq \epsilon.$$

Além disso, $Pg \in \mathrm{Char}(G)$ pois $g \in \mathcal{R}(G)$.

Para provar (b), sejam $f \in C(G)$ e $\epsilon > 0$. Se $f = 0$, não há o que provar. Suponhamos, então, que $f \neq 0$. Para cada vizinhança $U \subseteq G$ de 1, seja $g_U \in \mathcal{R}(G)$ tal que $||I_U - g_U||_2 \leq \epsilon/2||f||_{\mathrm{sup}}$, em que $(I_U)_U$ é a unidade aproximada de $L^2(G)$ definida no Capítulo 1. Como $\mathcal{R}(G)$ é um ideal bilateral da álgebra de convolução de G, então para cada vizinhança U de 1 temos $f * g_U \in \mathcal{R}(G)$. Além disso,

$$||f * g_U - f||_{\mathrm{sup}} \leq ||f * g_U - f * I_U||_{\mathrm{sup}} + ||f * I_U - f||_{\mathrm{sup}}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |(f * g_U - f * I_U)(x)| &= \left|\int_G f(xy^{-1})(g_U - I_U)(y)dy\right| \\ &\leq ||f||_{\mathrm{sup}} \int_G |(g_U - I_U)(y)|dy \\ &\leq ||f||_{\mathrm{sup}} ||g_U - I_U||_2 \\ &\leq \epsilon/2 \end{aligned}$$

para todo $x \in G$, de modo que $||f*g_U - f*I_U||_{\sup} \leq \epsilon/2$. Como a rede $(f*I_U)_U$ converge uniformemente a f, então existe uma vizinhança U_0 de 1 tal que $||f*I_{U_0} - f||_{\sup} \leq \epsilon/2$. Portanto, $||f*g_{U_0} - f||_{\sup} \leq \epsilon$ e (b) está provada.

Agora, provemos (a). Denotemos por E o fecho de $\mathcal{R}(G)$ em $L^2(G)$ e suponhamos, por absurdo, que $E \neq L^2(G)$. Uma vez que E é um subespaço fechado de $L^2(G)$, isso significa que $E^\perp \neq \{0\}$. Como $\mathcal{R}(G)$ é invariante por translações e pela adjunção, então E também é. Com isso, o fato das translações serem isometrias lineares de $L^2(G)$ mais o item (e) da Proposição 1.30 implicam que $E^\perp$ é invariante por translações e pela adjunção.

Afirmamos que existe uma função $f \in E^\perp$ não-nula, contínua, de classes e que satisfaz $f^* = f$. Para ver isto, tomemos $h \in E^\perp \backslash \{0\}$ qualquer e consideremos a rede $(I_U * h)_U$ que converge a h. Como h é não-nula, então existe uma vizinhança $U_0 \subseteq G$ de 1 tal que $h_0 := I_{U_0} * h \neq 0$. Além disso, h_0 é contínua pela Proposição 1.26 e $h_0 \in E^\perp$, pois se $g \in E$ então

$$(h_0, g) = (I_{U_0} * h, g) = \int_G \int_G I_{U_0}(y) h(y^{-1}x)\overline{g(x)} dy dx = \int_G I_{U_0}(y)(L_y h, g) dy = 0.$$

Seja $x_0 \in G$ tal que $h_0(x_0) \neq 0$ e tomemos $h_1 := R_{x_0} h_0$. Então, h_1 é contínua e $h_1(1) \neq 0$. Fazendo $h_2 := \overline{h_1(1)} h_1$, temos que $h_2 \in E^\perp$ é contínua e que $h_2(1) > 0$. Seja $h_3 := P h_2 \in \mathrm{Cl}(G)$. Como P é uma projeção ortogonal e $P(E) \subseteq E$ pelo Corolário 2.21, então $h_3 \in E^\perp$. Além disso, como

$$h_3(1) = (Ph_2)(1) = \int_G h_2(y 1 y^{-1}) dy = h_2(1) > 0,$$

então $h_3 \neq 0$. A função $f := h_3 + h_3^*$ satisfaz as propriedades desejadas.

Tomemos, então, $f \in E^\perp$ nas condições acima. Seja $K : G \times G \to \mathbb{C}$ definida por $K(x, y) = f(x^{-1}y)$. Como f é contínua e não-nula, então K também é. Em particular, $K \in L^2(G \times G)$. Com isso, podemos definir o operador $T : L^2(G) \to L^2(G)$ por

$$(Tg)(x) = \int_G K(x, y) g(y) dy.$$

Como sabemos da teoria geral dos espaços de Hilbert, T é um operador linear não-nulo e compacto em $L^2(G)$. Além disso, T é simétrico, pois dadas $g, h \in L^2(G)$ temos

$$\begin{aligned}
(Tg, h) &= \int_G \left(\int_G K(x, y) g(y) dy \right) \overline{h(x)} dx = \int_G \int_G f(x^{-1}y) g(y) \overline{h(x)} dy dx \\
&= \int_G \int_G f^*(x^{-1}y) g(y) \overline{h(x)} dy dx = \int_G \int_G \overline{f(y^{-1}x)} g(y) \overline{h(x)} dy dx \\
&= \int_G g(y) \overline{\left(\int_G K(y, x) h(x) dx \right)} dy = (g, Th).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema Espectral para operadores simétricos e compactos, T admite um autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ cujo auto-espaço associado $V_\lambda \subseteq L^2(G)$ possui dimensão finita. Claramente, $V_\lambda \neq \{0\}$. Uma vez que $T \neq 0$, podemos assumir $\lambda \neq 0$.

O subespaço V_λ é invariante por translações à esquerda, pois se $g \in V_\lambda$ então

$$\begin{aligned}(T(L_x g))(y) &= \int_G f(y^{-1}z)g(x^{-1}z)dz = \int_G f(y^{-1}xz)g(z)dz \\ &= (Tg)(x^{-1}y) = \lambda g(x^{-1}y) = (\lambda L_x g)(y).\end{aligned}$$

Logo, podemos definir a representação $\Phi : G \to GL_{\mathbb{C}}(V_\lambda)$ por $\Phi(x)g = L_x g$, e observamos que o produto interno de $L^2(G)$ restrito a V_λ é invariante por Φ. Seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base ortonormal de V_λ e $\{\phi_{ij}\}_{i,j} \subseteq E$ os coeficientes matriciais básicos associados. Como

$$\phi_{ij}(x) = (L_x e_j, e_i) = \int_G e_j(x^{-1}y)\overline{e_i(y)}dy,$$

então

$$\begin{aligned}0 &= (f, \phi_{ij}) = \int_G f(x)\overline{\phi_{ij}(x)}dx = \int_G\int_G f(x)\overline{e_j(x^{-1}y)}e_i(y)dydx \\ &= \int_G\int_G f(yx^{-1})\overline{e_j(x)}e_i(y)dxdy = \int_G\int_G f(x^{-1}y)\overline{e_j(x)}e_i(y)dydx \\ &= \int_G\left(\int_G K(x,y)e_i(y)dy\right)\overline{e_j(x)}dx = (Te_i, e_j) \\ &= \lambda(e_i, e_j).\end{aligned}$$

Uma vez que $\lambda \neq 0$, temos que $(e_i, e_j) = 0$ para todos $i, j = 1, \ldots, n$, o que contradiz $V_\lambda \neq \{0\}$. Portanto, $E^\perp = \{0\}$ e o Teorema está provado. □

Corolário 2.23. *Sejam G um grupo compacto e* $\mathrm{Rep}(G) = \{\Phi^\alpha\}_\alpha$ *um conjunto maximal de representações unitárias, irredutíveis e duas-a-duas não-equivalentes de G. Então, $B(G) = \{\phi^\alpha_{ij}\}_{i,j,\alpha}$ é uma base de Hilbert para $L^2(G)$ e $\{\chi_{\Phi^\alpha}\}_\alpha$ é uma base de Hilbert para* $\mathrm{Cl}(G)$. *Em particular, se G é um grupo compacto e separável (entre os quais estão os grupos de Lie compactos), então* $\mathrm{Rep}(G)$ *é enumerável.*

Demonstração. Se G é separável, então $L^2(G)$ é um espaço de Hilbert separável, como foi provado na Proposição 1.23. Logo, toda base de Hilbert de $L^2(G)$ (assim como de qualquer subespaço fechado de $L^2(G)$) deve ser enumerável. □

Corolário 2.24. *Todo grupo de Lie compacto admite uma representação fiel.*

Demonstração. Como $\mathcal{R}(G)$ é denso em $C(G)$, então o conjunto dos coeficientes matriciais de G separa pontos de G. Logo, o conjunto das representações de G separa pontos de G. Com isso, para cada $x \in G\backslash\{1\}$, existe uma representação Φ de G tal que $\Phi(x) \neq \Phi(1)$, isto é, $x \notin \ker\Phi$.

Sejam $x_1 \in G_0\backslash\{1\}$ e Φ_1 uma representação de G tal que $x_1 \notin \ker\Phi_1$, em que G_0 é a componente conexa de G contendo o elemento neutro. Então, $(\ker\Phi_1)_0 \subsetneq G_0$, o que significa que $\ker\Phi_1$ é um subgrupo fechado de G cuja dimensão é estritamente menor do que a de G. Se $\dim\ker\Phi_1 > 0$, escolhemos $x_2 \in (\ker\Phi_1)_0\backslash\{1\}$ e uma representação

Φ_2' de G tal que $x_2 \notin \ker \Phi_2'$. Então, tomando $\Phi_2 = \Phi_1 \oplus \Phi_2'$, temos que $(\ker \Phi_2)_0 \subsetneq (\ker \Phi_1)_0$, e, portanto, $\ker \Phi_2$ é um subgrupo fechado de G cuja dimensão é menor do que a dimensão de $\ker \Phi_1$. Levando este processo adiante, que deve eventualmente encerrar pois cada passo resulta num subgrupo fechado de G de dimensão estritamente menor do que no passo anterior, obtemos uma representação $\Phi' = \Phi_1 \oplus \cdots \oplus \Phi_k$ de G tal que $\dim \ker \Phi' = 0$. Como G é compacto, o subgrupo $\ker \Phi'$ é finito. Escrevamos $\ker \Phi' = \{y_{k+1}, \ldots, y_n\}$ e tomemos, para cada $i = 1, \ldots, n-k$, uma representação Φ_{k+i} de G tal que $y_{k+i} \notin \ker \Phi_{k+i}$. Vemos facilmente que $\Phi := \Phi' \oplus \Phi_{k+1} \oplus \cdots \oplus \Phi_n$ é uma representação fiel de G. $\square$

Capítulo 3

Grupos de Lie Compactos

3.1 Álgebras de Lie Compactas

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real de dimensão finita. A representação adjunta de $\mathfrak{g}$ tem como imagem a álgebra de Lie $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$, e portanto existe um único subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ com álgebra de Lie $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. Este grupo é chamado de **grupo adjunto** de $\mathfrak{g}$ e denotado por $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Os elementos de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, que são automorfismos de $\mathfrak{g}$, são chamados de **automorfismos internos** de $\mathfrak{g}$. Cada elemento de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é um produto de automorfismos de $\mathfrak{g}$ da forma $e^{\mathrm{ad}(X)}$, $X \in \mathfrak{g}$.

Lema 3.1. *O centro do grupo adjunto de uma álgebra de Lie semi-simples é trivial.*

Demonstração. Seja $\phi \in Z_{\mathrm{Int}(\mathfrak{g})}$. Como ϕ é um automorfismo de $\mathfrak{g}$, então

$$(\phi \mathrm{ad}(X)\phi^{-1})Y = \phi[X, \phi^{-1}(Y)] = [\phi(X), Y] = \mathrm{ad}(\phi(X))Y$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$, isto é, $\phi \mathrm{ad}(X)\phi^{-1} = \mathrm{ad}(\phi(X))$. Com isso, dados $X \in \mathfrak{g}$ e $t \in \mathbb{R}$, temos $e^{t\mathrm{ad}(X)} = e^{\mathrm{ad}(tX)} \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, e portanto

$$e^{t\mathrm{ad}(X)} = \phi e^{t\mathrm{ad}(X)}\phi^{-1} = e^{t\phi \mathrm{ad}(X)\phi^{-1}} = e^{t\mathrm{ad}(\phi(X))}.$$

Diferenciando esta equação com respeito a t no ponto $t = 0$, obtemos $\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(\phi(X))$. Sendo $\mathfrak{g}$ semi-simples, segue que $X = \phi(X)$, e conseqüentemente $\phi = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. □

Lema 3.2. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal. Então, $\mathfrak{h}$ é um subespaço invariante pela representação canônica de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ em $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. O fato de $\mathfrak{h}$ ser um ideal significa que $\mathfrak{h}$ é invariante por $\mathrm{ad}(X)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Logo, se $X \in \mathfrak{g}$ então $\mathrm{ad}(X)^n\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, dado $Y \in \mathfrak{h}$, temos que

$$e^{\mathrm{ad}(X)}Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathrm{ad}(X)^n Y$$

é o limite de uma série convergente de elementos de $\mathfrak{h}$. Sendo $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, este limite pertence a $\mathfrak{h}$, e portanto $e^{\mathrm{ad}(X)}\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$. Como $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é gerado por elementos da forma $e^{\mathrm{ad}(X)}$, concluimos que $\mathfrak{h}$ é invariante por todo $\phi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. □

Lema 3.3. *Se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de um grupo de Lie G, então* $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ad}(G)_0$. *Em particular, se G é conexo, então* $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ad}(G)$.

Demonstração. A imagem do homomorfismo contínuo $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ é um subgrupo de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ cuja álgebra de Lie é a imagem de $\mathfrak{g}$ pelo homomorfismo induzido por Ad, que é ad. Logo, $\mathrm{Ad}(G)_0 \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ é um subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$, e portanto $\mathrm{Ad}(G)_0 = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. □

Se G é um grupo de Lie compacto e $\mathfrak{g}$ é a sua álgebra de Lie, então o Lema 3.3 implica que $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ também é um grupo de Lie compacto. Uma álgebra de Lie real de dimensão finita cujo grupo adjunto é compacto é chamada de **compacta**, ou **de tipo compacto**.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Dizemos que b é **invariante** pela representação adjunta de $\mathfrak{g}$ se vale $b(\mathrm{ad}(Z)X, Y) = -b(X, \mathrm{ad}(Z)Y)$ para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Um exemplo de forma bilinear invariante numa álgebra de Lie é a sua forma de Cartan-Killing, que denotaremos por B.

Quando a forma invariante b é um produto interno, a definição acima é equivalente à condição de $\mathrm{ad}(X)$ ser um operador anti-simétrico (com respeito a b) para todo $X \in \mathfrak{g}$. Neste caso, $\mathrm{ad}(X)$ é um operador linear semi-simples (diagonalizável quando levantado a $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$) com autovalores imaginários puros. Em termos matriciais, uma matriz que represente $\mathrm{ad}(X)$ é semelhante, sobre $\mathbb{C}$, a uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} i\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

de modo que $\mathrm{ad}(X)^2$ é representado por uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & -\lambda_n^2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Conseqüentemente, $B(X, X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)^2) \leq 0$. Portanto, para que uma dada álgebra de Lie admita um produto interno invariante é necessário que a sua forma de Cartan-Killing seja negativa semi-definida. Veremos a seguir que as álgebras de Lie compactas admitem tais produtos internos. No entanto, a forma de Cartan-Killing da álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é não-degenerada mas atinge tanto valores negativos quanto positivos, e portanto $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ não admite produto interno invariante.

Proposição 3.4. *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie compacta, então $\mathfrak{g}$ admite um produto interno invariante.*

Demonstração. Seja Φ a representação canônica de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ no espaço vetorial $\mathfrak{g}$. Como $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é compacto, então existe um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ em $\mathfrak{g}$ invariante por Φ.

Afirmamos que $\langle\ ,\ \rangle$ é invariante pela representação adjunta de $\mathfrak{g}$. Para tanto, sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Como $e^{t\mathrm{ad}(Z)} \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ para $t \in \mathbb{R}$, então $\langle e^{t\mathrm{ad}(Z)}X, e^{t\mathrm{ad}(Z)}Y\rangle = \langle X, Y\rangle$. Portanto

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\langle e^{t\mathrm{ad}(Z)}X, e^{t\mathrm{ad}(Z)}Y\rangle\bigg|_{t=0} \\ &= \langle \mathrm{ad}(Z)X, Y\rangle + \langle X, \mathrm{ad}(Z)Y\rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Corolário 3.5. *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie compacta, então $\mathfrak{g}$ é redutível e a forma de Cartan-Killing da sua componente semi-simples é negativa definida.*

Demonstração. Como $\mathfrak{g}$ é compacta, então é possível definir em $\mathfrak{g}$ um produto interno invariante $\langle\ ,\ \rangle$. Se $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é um ideal, então $\mathfrak{h}^\perp$ também é um ideal. De fato, dados $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}^\perp$, temos para todo $Z \in \mathfrak{h}$ que

$$\langle [X, Y], Z\rangle = -\langle Y, [X, Z]\rangle = 0,$$

pois $[X, Z] \in \mathfrak{h}$. Logo, todo ideal $\mathfrak{h}_1 \subseteq \mathfrak{g}$ admite um outro ideal $\mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, e isto significa que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie redutível. Então, podemos escrever $\mathfrak{g} = Z_{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}'$, lembrando que $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é semi-simples. Agora, como $\mathfrak{g}'$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, então a sua forma de Cartan-Killing pode ser obtida restringindo a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ ao subespaço $\mathfrak{g}'$, e isto implica que a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}'$ também é negativa semi-definida. Contudo, como $\mathfrak{g}'$ é semi-simples, a sua forma de Cartan-Killing é não-degenerada, e portanto deve ser negativa definida. $\square$

Estes dois últimos resultados têm grande impacto na metodologia utilizada no estudo das álgebras de Lie compactas. Primeiramente, podemos concluir que, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semi-simples e compacta, então a sua forma de Cartan-Killing B é negativa definida, e, conseqüentemente, que $-B$ é um produto interno invariante em $\mathfrak{g}$. Este fato simplifica enormemente o trabalho com exemplos concretos, principalmente na tarefa de se obter um produto interno invariante ou mesmo na tentativa de se determinar se uma álgebra de Lie é compacta ou não. Segundamente, mesmo que $\mathfrak{g}$ não seja semi-simples, podemos obter facilmente um produto interno invariante em $\mathfrak{g}$ fazendo a soma direta de um produto interno qualquer em $Z_{\mathfrak{g}}$ (como $Z_{\mathfrak{g}}$ é uma álgebra de Lie abeliana, a escolha não importa) com menos a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}'$. Terceiramente, estes resultados sugerem que, no estudo das álgebras de Lie compactas, é suficiente, em muitas situações, considerar apenas o caso semi-simples devido à ausência de complicações na estrutura das álgebras de Lie abelianas.

Proposição 3.6. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples. Então,*

(a) $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})_0$;

(b) $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ *é um grupo de Lie conexo cuja álgebra de Lie é (isomorfa a)* $\mathfrak{g}$;

(c) se G é um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, então $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é um homomorfismo de recobrimento.

Demonstração. Se $\mathfrak{g}$ é semi-simples, então $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{der}(\mathfrak{g})$ é um isomorfismo de álgebras de Lie. (A injetividade decorre de $Z_{\mathfrak{g}} = \{0\}$ e a sobrejetividade é conseqüência do fato da forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ ser não-degenerada.) Isto garante dois fatos: que $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é um subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{der}(\mathfrak{g})$, provando (a); e que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$, a álgebra de Lie de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, é isomorfa a $\mathfrak{g}$, provando (b). Agora, pelo Lema 3.2 temos que, sendo G conexo, $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ad}(G)$. Além disso, $\ker(\mathrm{Ad}) = Z_G$, que é discreto uma vez que $\mathfrak{g}$ é semi-simples.[1] Portanto, $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é recobrimento. □

Proposição 3.7. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie redutível, $\mathfrak{g} = Z_{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}'$. Então, os grupos adjuntos de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ são isomorfos.*

Demonstração. Como $\mathfrak{g}'$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}'$ é um subespaço invariante pela representação canônica de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ em $\mathfrak{g}$, e vamos considerar a subrepresentação Φ associada a este subespaço. Então, $\Phi : \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \to GL(\mathfrak{g}')$ e a Proposição estará provada quando mostrarmos que Φ é fiel e que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$. Primeiramente, afirmamos que $S|_{Z_{\mathfrak{g}}} = \mathrm{id}_{Z_{\mathfrak{g}}}$ para todo $S \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. De fato, dado $X \in \mathfrak{g}$, temos $\mathrm{ad}(X)Z_{\mathfrak{g}} = \{0\}$, de modo que $e^{\mathrm{ad}(X)}|_{Z_{\mathfrak{g}}} = \mathrm{id}_{Z_{\mathfrak{g}}}$ pela expansão em série de potências de $e^{\mathrm{ad}(X)}$. Como S pode ser escrito como produto de elementos da forma $e^{\mathrm{ad}(X)}$, $X \in \mathfrak{g}$, a afirmação segue. Esta afirmação mais a decomposição $\mathfrak{g} = Z_{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}'$ implica que se $S \in \ker(\Phi)$, isto é, se $S|_{\mathfrak{g}'} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}'}$, então necessariamente $S = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, e portanto Φ é fiel.

Para ver que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$, tomemos $X \in \mathfrak{g}$ e escrevamos $X = X_{Z_{\mathfrak{g}}} + X_{\mathfrak{g}'}$, em que $X_{Z_{\mathfrak{g}}} \in Z_{\mathfrak{g}}$ e $X_{\mathfrak{g}'} \in \mathfrak{g}'$. Como $\mathrm{ad}(X_{Z_{\mathfrak{g}}}) = 0$, então $e^{\mathrm{ad}(X)} = e^{\mathrm{ad}(X_{\mathfrak{g}'})}$. Além disso, uma vez que $\mathfrak{g}'$ é um ideal, temos

$$\Phi(e^{\mathrm{ad}(X)}) = \Phi(e^{\mathrm{ad}(X_{\mathfrak{g}'})}) = e^{\mathrm{ad}(X_{\mathfrak{g}'})}|_{\mathfrak{g}'} = e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}(X_{\mathfrak{g}'})},$$

o que significa que $\Phi(\exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}))) \subseteq \mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$. Logo, $\mathrm{Im}(\Phi) \subseteq \mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$. Para provar a inclusão contrária, basta observar que ambos $\mathrm{Im}(\Phi)$ são grupos de Lie conexos e que

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(\Phi)) &= \dim(\mathrm{Int}(\mathfrak{g})) = \dim(\mathrm{ad}(\mathfrak{g})) \\ &= \dim(\mathfrak{g}) - \dim(Z_{\mathfrak{g}}) = \dim(\mathfrak{g}') \\ &= \dim(\mathrm{Int}(\mathfrak{g}')). \quad \square \end{aligned}$$

Corolário 3.8. *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie compacta, então existe um grupo de Lie compacto G cuja álgebra de Lie é isomorfa a $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Como $\mathfrak{g}$ é redutível, podemos escrever $\mathfrak{g} = Z_{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}'$ com $\mathfrak{g}'$ semi-simples. Pelas Proposições 3.6.(b) e 3.7, temos que $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é um grupo de Lie compacto cuja álgebra de Lie é isomorfa a $\mathfrak{g}'$. Tomando G como sendo o produto direto do toro de dimensão $\dim(Z_{\mathfrak{g}})$ com $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, temos que G é um grupo de Lie compacto cuja álgebra de Lie é isomorfa a $\mathfrak{g}$. □

[1] O centro de G é um subgrupo de Lie de G cuja álgebra de Lie é $Z_{\mathfrak{g}}$. Como $\mathfrak{g}$ é semi-simples, então $Z_{\mathfrak{g}} = \{0\}$ e Z_G é discreto.

Corolário 3.9. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é compacta se, e somente se, $\mathfrak{g}$ admite um produto interno invariante.*

Demonstração. Se $\mathfrak{g}$ é compacta, então $\mathfrak{g}$ admite um produto interno invariante pela Proposição 3.4. Reciprocamente, se $\mathfrak{g}$ admite um produto interno invariante $\langle\ ,\ \rangle$, então $\mathfrak{g}$ é redutível. Logo, para provar que $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é compacto, podemos assumir, pela Proposição 3.7, que $\mathfrak{g}$ é semi-simples. Seja $O(\mathfrak{g}) \subseteq GL(\mathfrak{g})$ o grupo dos operadores ortogonais de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\langle\ ,\ \rangle$. Como $\langle\ ,\ \rangle$ é invariante pela representação adjunta de $\mathfrak{g}$, então $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \subseteq O(\mathfrak{g})$. De fato, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, temos, para todo $t \in \mathbb{R}$, que

$$\frac{d}{dt}\langle e^{t\mathrm{ad}(X)}Y, e^{t\mathrm{ad}(X)}Z\rangle = \langle \mathrm{ad}(X)e^{t\mathrm{ad}(X)}Y, e^{t\mathrm{ad}(X)}Z\rangle + \langle e^{t\mathrm{ad}(X)}Y, \mathrm{ad}(X)e^{t\mathrm{ad}(X)}Z\rangle = 0.$$

Logo, $\langle e^{t\mathrm{ad}(X)}Y, e^{t\mathrm{ad}(X)}Z\rangle = \langle Y, Z\rangle$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Tomando $t = 1$, concluimos que $e^{\mathrm{ad}(X)} \in O(\mathfrak{g})$ e que $O(\mathfrak{g})$ contém um conjunto de geradores de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Agora, pela parte (a) da Proposição 3.6, $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é um subgrupo fechado de $GL(\mathfrak{g})$, e conseqüentemente um subgrupo fechado de $O(\mathfrak{g})$. Portanto, $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é compacto. $\square$

Se G é um grupo de Lie compacto e $\mathfrak{g}$ é a sua álgebra de Lie, então a decomposição $\mathfrak{g} = Z_{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}'$ sugere que tenhamos uma decomposição para G da forma $G \cong A \times G'$ com A abeliano e G' semi-simples. Apesar disto não ser verdade em geral, é válido um resultado bastante parecido.

Proposição 3.10. *Sejam G um grupo de Lie compacto e conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e G' o subgrupo de Lie conexo de G cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}'$. Então, G' é um subgrupo fechado de G (e portanto compacto) e vale a decomposição $G = (Z_G)_0G'$. Mais ainda, a aplicação $p : (Z_G)_0 \times G' \to G$, $p(x, y) = xy$, é um homomorfismo de recobrimento finito.*

Demonstração. Sejam $\widetilde{(Z_G)_0}$ e $\widetilde{G'}$ recobrimentos universais de $(Z_G)_0$ e G', respectivamente. Então, $\widetilde{(Z_G)_0} \times \widetilde{G'}$ é um grupo de Lie simplesmente conexo cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$, e portanto é um recobrimento universal de G. A imagem de $\widetilde{(Z_G)_0}$ pelo homomorfismo de recobrimento $q : \widetilde{(Z_G)_0} \times \widetilde{G'} \to G$ é um subgrupo conexo de G cuja álgebra de Lie é $Z_{\mathfrak{g}}$; a única possibilidade é esta imagem ser $(Z_G)_0$. Analogamente, a imagem de $\widetilde{G'}$ por q é G'. Logo, $G = (Z_G)_0G'$.

Para provar que G' é fechado, provaremos que G' é compacto. Uma vez que $G'/Z_{G'} \cong \mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$ é compacto e a projeção canônica $G' \to G'/Z_{G'}$ é uma aplicação de recobrimento, então é suficiente verificar que $Z_{G'}$ é finito. Para tanto, consideramos $\Phi : G \to GL_{\mathbb{C}}(V)$ uma representação fiel e unitária de G e tomamos $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ uma decomposição de V em subespaços invariantes e irredutíveis por Φ. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, seja Φ_j a restrição de Φ ao subespaço U_j e façamos $d_j := \dim U_j$. Como $G = (Z_G)_0G'$, então $Z_{G'} \subseteq Z_G$ e os elementos de $\Phi(Z_{G'})$ comutam com os de $\Phi(G)$. Conseqüentemente, fixado $j = 1, \ldots, n$, temos pelo Lema de Schur que $\Phi_j(z)$ é um operador escalar para todo $z \in Z_{G'}$. Por outro lado, como G' é um grupo de Lie semi-simples, então $\det(\Phi_j(x)) = 1$ para todo $x \in G'$. Logo, dado $z \in Z_{G'}$, existe um número natural $k_z = 0, \dots, d_j - 1$ tal que $\Phi_j(z) = e^{(2\pi i k_z)/d_j} \cdot \mathrm{id}_{U_i}$. Deste modo, $\Phi_j(Z_{G'})$ é um conjunto finito com no máximo d_j elementos, e portanto $\Phi(Z_{G'})$ é finito com no máximo $d_1 \cdots d_n$ elementos. Sendo Φ fiel, concluimos que $Z_{G'}$ é finito.

Por fim, vejamos que $p : (Z_G)_0 \times G' \to G$, $p(x,y) = xy$, é um homomorfismo de recobrimento finito. Está claro que p é contínua. Para verificar que p é homomorfismo de grupos, basta observar que

$$p(xx', yy') = xx'yy' = (xy)(x'y') = p(x,y)p(x',y')$$

para $x, x' \in (Z_G)_0$ e $y, y' \in G'$. Já o núcleo de p é o conjunto

$$\ker(p) = \{(x,y) : x \in (Z_G)_0 \cap G', y = x^{-1}\},$$

como verificamos facilmente, e este conjunto é finito pois $(Z_G)_0 \cap G' \subseteq Z_{G'}$. □

Com base na Proposição 3.10, podemos mostrar uma das implicações do Teorema de Weyl (Teorema 0.2). Seja G um grupo de Lie compacto e conexo cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *não* é semi-simples. Como $\mathfrak{g}$ é compacta, isso significa que $Z_{\mathfrak{g}} \neq \{0\}$. Logo, $(Z_G)_0$ é isomorfo a um toro $\mathbb{T}^n$ ($n = \dim(Z_{\mathfrak{g}})$) e temos uma aplicação de recobrimento $q : \mathbb{T}^n \times G' \to G$. O homomorfismo induzido $q_* : \pi_1(\mathbb{T}^n \times G') \to \pi_1(G)$ é injetivo (pois q é recobrimento), e portanto $\pi_1(G)$ contém uma cópia isomorfa de $\mathbb{Z}^n \cong \pi_1(\mathbb{T}^n)$. Concluimos disso que $\pi_1(G)$ é infinito.

3.2 Sistemas de Raízes

Nesta seção, estudaremos as subálgebras de Cartan e os sistemas de raízes associados para álgebras de Lie compactas. Denotaremos por $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ a complexificação de uma álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$.

Proposição 3.11. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie compacta. Uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ se, e somente se, $\mathfrak{h}$ é maximal entre as subálgebras abelianas de $\mathfrak{g}$.*

Observação: Sendo $\mathfrak{g}$ compacta, então $\mathfrak{g}$ é redutível, isto é, $\mathfrak{g} = Z_{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}'$ com $\mathfrak{g}'$ semi-simples. Como qualquer subálgebra de Cartan do produto direto de duas álgebras de Lie é obtida fazendo-se o produto direto de um par de subálgebras de Cartan e $Z_{\mathfrak{g}}$ é abeliana, então é suficiente provar a Proposição 3.11 no caso em que $\mathfrak{g}$ é semi-simples. Lembramos ainda que uma subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra nilpotente $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ que satisfaz $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.[2] Assumindo que $\mathfrak{g}$ é semi-simples, sabemos que todas as subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$ são abelianas. Deste modo, o que a Proposição 3.11 afirma é que podemos substituir, no contexto das álgebras compactas, a condição $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ por $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

[2] $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ é o **normalizador** de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$, definido por $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ compacta e semi-simples. Se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{h}$ é abeliana, e portanto $\mathfrak{h} \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Além disso,

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}.$$

Logo, $\mathfrak{h}$ é abeliana maximal.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathfrak{h}$ é abeliana maximal. Para verificar que $\mathfrak{h}$ é subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, é suficiente provar que $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ é subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Como $\mathfrak{g}$ é compacta, existe um produto interno em $\mathfrak{g}$ invariante pela sua representação adjunta. Isto faz com que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, sejam todos diagonalizáveis, o que implica que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H)$, $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, são diagonalizáveis. De fato, escrevendo $H = H_1 + iH_2$, com $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$, temos $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H_1) + i\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H_2)$. Uma vez que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H_1)$ e $i\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H_2)$ são diagonalizáveis e comutam, temos que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H)$ é diagonalizável. Logo, $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ tal que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ é uma família de operadores simultaneamente diagonalizáveis. Uma tal subálgebra de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ é chamada de **toral**. Por um resultado geral da teoria das álgebras de Lie, para que $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ seja subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ é suficiente mostrar que $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ é maximal entre as subálgebras torais de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. (Ver (KNAPP, 2002), p. 136.)

Primeiramente, observamos que $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ é abeliana maximal em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Com efeito, dado $X \in Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$, temos

$$[X, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}] = \{0\}, \quad [\overline{X}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}] = [\overline{X}, \overline{\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}}] = \overline{[X, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}]} = \{0\}.$$

Isso significa que $\overline{X} \in Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$. Escrevendo $X = X_1 + iX_2$, com $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2}(X + \overline{X}) \in Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{g} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \\ X_2 &= -\frac{i}{2}(X - \overline{X}) \in Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{g} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}). \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{h}$ é abeliana maximal em $\mathfrak{g}$, então $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, e portanto $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ e $X \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$.

Com isso, se $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra toral de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ que contém $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, então $\mathfrak{k}$ é abeliana e, portanto, deve estar contida em $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Logo, $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ e $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ é toral maximal. □

Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan da álgebra de Lie compacta $\mathfrak{g}$. Passando para a complexificação $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, temos que $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ e obtemos a decomposição de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ em espaços de raízes

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\alpha}, \tag{3.1}$$

em que $\Pi \subseteq (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ denota o conjunto de raízes da representação adjunta de $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Por outro lado, como $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ é redutível, podemos escrever $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}} \oplus (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'$, com $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'$ uma subálgebra de Cartan de $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'$, e obter a decomposição em espaços de raízes

$$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})' = (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})' \oplus \sum_{\alpha' \in \Pi'} (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'_{\alpha'},$$

em que Π' é o sistema de raízes de $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'$ em $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'$. Logo,

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha' \in \Pi'} (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'_{\alpha'}. \tag{3.2}$$

Como $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'$ é uma álgebra de Lie semi-simples, sabemos da teoria geral que o sistema de raízes Π' possui propriedades importantes, que utilizaremos extensivamente adiante. Por exemplo, Π' é um sistema de raízes abstrato e reduzido em $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'^*$, de modo que podemos considerar o grupo de Weyl associado e utilizá-lo para obter informações acerca de $\mathfrak{g}$. Conseqüentemente, torna-se relevante relacionar os sistemas de raízes Π e Π' e as decomposições (3.1) e (3.2).

Lema 3.12. *Nas notações acima, toda raiz $\alpha \in \Pi$ se anula no centro de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Além disso, $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha \subseteq (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'$.*

Demonstração. Tomemos $H \in Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ e $\alpha \in \Pi$. Como $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H) = 0$, então

$$(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H) - \alpha(H))^n = (-1)^n \alpha(H)^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, dado $X_\alpha \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha \backslash \{0\}$, temos

$$(-1)^n \alpha(H)^n X_\alpha = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H) - \alpha(H))^n X_\alpha = 0$$

para algum $n \geq 1$, e portanto $\alpha(H) = 0$. Agora, seja $E_\alpha \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha$ e escrevamos $E_\alpha = (E_\alpha)_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}} + (E_\alpha)_{(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'}$, em que $(E_\alpha)_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}} \in Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ e $(E_\alpha)_{(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'} \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'$. Dado $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, existe $n \geq 1$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H) - \alpha(H))^n E_\alpha \\ &= (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H) - \alpha(H))^n (E_\alpha)_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}} + (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H) - \alpha(H))^n (E_\alpha)_{(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'}. \end{aligned}$$

Como ambos $Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ e $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'$ são subespaços de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ invariantes por $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$, então

$$(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H) - \alpha(H))^n (E_\alpha)_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}} \in Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}} \quad \text{e} \quad (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H) - \alpha(H))^n (E_\alpha)_{(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'} \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})',$$

de modo que

$$(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H) - \alpha(H))^n (E_\alpha)_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}} = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H) - \alpha(H))^n (E_\alpha)_{(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'} = 0.$$

Como isso vale para todo $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, então $(E_\alpha)_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}} \in Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}} \cap (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha = \{0\}$, e portanto $E_\alpha = (E_\alpha)_{(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'} \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'$. □

Proposição 3.13. *Nas notações acima, para cada funcional linear $\lambda \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ seja λ' a restrição de λ a $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'$. Então, a correspondência $\alpha \in \Pi \mapsto \alpha' \in \Pi'$ é uma bijeção entre os dois sistemas de raízes e, além disso, $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha = (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'_{\alpha'}$ para toda raiz $\alpha \in \Pi$.*

Demonstração. Dada uma raiz $\alpha \in \Pi$, temos pelo Lema 3.12 que

$$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha = \{X \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})' : \forall H \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})' \; \exists n \geq 1; \; (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H) - \alpha(H))^n X = 0\} = (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'_{\alpha'}.$$

Como $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha \neq \{0\}$, concluimos então que $\alpha' \in \Pi'$. Logo, a função $\alpha \in \Pi \mapsto \alpha' \in \Pi'$ está bem-definida e $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha = (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'_{\alpha'}$ para toda $\alpha \in \Pi$. Uma vez que uma raiz $\alpha \in \Pi$ qualquer se anula em $Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$, então α fica determinada pela sua restrição a $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'$ e, portanto, $\alpha \in \Pi \mapsto \alpha' \in \Pi'$ é injetiva. Por fim, dada $\alpha' \in \Pi'$, seja $\alpha \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ a extensão de α' a $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ que se anula em $Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$. Se $X \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'_{\alpha'}$ e $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, então escrevendo $H = H_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}} + H_{(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'}$ com $H_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}} \in Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ e $H_{(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'} \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'$, temos

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H) - \alpha(H))^n X &= \Big(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}}) + \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H_{(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'}) - \alpha(H_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}}) - \alpha(H_{(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'})\Big)^n X \\ &= \Big(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H_{(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'}) - \alpha'(H_{(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'})\Big)^n X\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, existe $n \geq 1$ tal que $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(H) - \alpha(H))^n X = 0$. Como $X \neq 0$, então $\alpha \in \Pi$ e $\alpha \mapsto \alpha'$ é sobrejetiva. □

Podemos concluir dos resultados acima que a decomposição de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ em espaços de raízes relativos a $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ possui propriedades semelhantes às que existiriam caso $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ fosse semi-simples. Em particular, se $\alpha \in \Pi$, então

$$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} : [H, X] = \alpha(H)X \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\}$$

e cada $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha$ é um subespaço unidimensional de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. No entanto, uma vez que $\alpha|_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}} = 0$ para toda $\alpha \in \Pi$, então não é verdade em geral que Π gera o dual $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$.

Lema 3.14. *Nas notações acima, temos*

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\Pi) = \{\lambda \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^* : \lambda|_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}} = 0\}.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.12, temos $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\Pi) \subseteq \{\lambda \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^* : \lambda|_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}} = 0\}$. Agora, se $\lambda \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ é tal que $\lambda|_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}} = 0$, então consideramos λ' a restrinção de λ a $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'$. Como $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'$ é uma álgebra de Lie semi-simples sobre $\mathbb{C}$ e $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})' \subseteq (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'$ é uma subálgebra de Cartan, então o dual de $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})'$ é gerado por Π'. Logo, podemos escrever $\lambda' = \sum_{\alpha' \in \Pi'} a_{\alpha'} \alpha'$, com $a_{\alpha'} \in \mathbb{C}$. Fazendo $a_\alpha = a_{\alpha'}$ para $\alpha \in \Pi$, temos $\lambda = \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \alpha$ e isto prova que

$$\{\lambda \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^* : \lambda|_{Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}} = 0\} \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\Pi). \quad \square$$

Proposição 3.15. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie compacta, $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ e Π o sistema de raízes de $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Então, $\alpha(H)$ é um número imaginário puro para toda raiz $\alpha \in \Pi$ e todo vetor $H \in \mathfrak{h}$.*

Demonstração. Seja G um grupo de Lie compacto cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$, e tomemos $T \subseteq G$ o subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Claramente, T é abeliano, e afirmamos que T é fechado em G. De fato, $\overline{T}$ é um subgrupo de Lie conexo e abeliano de G cuja álgebra de Lie $\overline{\mathfrak{h}}$ é abelina e contém $\mathfrak{h}$. Pela Proposição 3.11, temos $\overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$, e portanto $\overline{T} = T$. Em particular, T é compacto.

Seja $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha\in\Pi}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha$ a decomposição de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ em espaços de raízes com respeito a $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ e seja $\Phi : T \to GL_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ a representação dada por $\Phi(x)X = \mathrm{Ad}(x)X$, $x \in T$. Para cada raiz $\alpha \in \Pi$ o subespaço $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha$ é invariante por Φ, pois

$$\mathrm{Ad}(\exp H)E_\alpha = e^{\mathrm{ad}(H)}X_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathrm{ad}(H)^k E_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\alpha(H)^k E_\alpha = e^{\alpha(H)}E_\alpha$$

para todo $H \in \mathfrak{h}$ e todo $E_\alpha \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha$, e $\exp : \mathfrak{h} \to T$ é sobrejetiva uma vez que T é conexo e abeliano.

Dada uma raiz $\alpha \in \Pi$, fixamos $E_\alpha \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha\backslash\{0\}$ e definimos $\xi_\alpha : T \to \mathbb{C}^*$ por $\Phi(x)E_\alpha = \xi_\alpha(x)E_\alpha$. Claramente, ξ_α é um homomorfismo contínuo e, como T é compacto, então $\xi_\alpha(T) \subseteq \mathbb{S}^1$. Se $H \in \mathfrak{h}$, então $\xi_\alpha(\exp tH) = e^{t\alpha(H)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Poranto, $\alpha(H) = \frac{d}{dt}\,\xi_\alpha(\exp tH)\big|_{t=0}$. Por outro lado, como $\xi_\alpha(\exp tH)|_{t=0} = 1$, então $\alpha(H)$ pertence ao espaço tangente a $\mathbb{S}^1$ em 1, que coincide com $i\mathbb{R}$. □

Os subgrupos conexos de um grupo de Lie compacto G associados às subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$ são chamados de **toros maximais**. Um estudo mais aprofundado dos toros maximais (peça fundamental na análise dos grupos de Lie compactos) será feito na próxima seção. Dado um toro maximal $T \subseteq G$, os homomofismos contínuos $\xi : T \to \mathbb{S}^1$ são chamados de **caracteres multiplicativos** de T. A importância desses caracteres provém do fato que eles fornecem os autovalores dos operadores lineares $\mathrm{Ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $x \in T$. De fato, escrevendo $x = \exp(H)$ para algum $H \in \mathfrak{h}$, temos que os autovalores de $\mathrm{Ad}(x)$ são as exponenciais dos autovalores de $\mathrm{ad}(H)$. Uma vez que os últimos são 0 ou da forma $\alpha(H)$, $\alpha \in \Pi$, então os autovalores de $\mathrm{Ad}(x)$ são 1 ou da forma $e^{\alpha(H)} = \xi_\alpha(\exp H) = \xi_\alpha(x)$. Ainda existe uma relação entre os caracteres multiplicativos de T e representações de G que será discutida no Capítulo 6.

Corolário 3.16. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples e compacta, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan e Π é o sistema de raízes de $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Então, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := i\mathfrak{h}$ é a forma real de $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ na qual todas as raízes assumem valores reais.*

No Corolário 3.16, se $\mathfrak{g}$ não é semi-simples, então não existe uma única forma real de $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ na qual as raízes assumem valores reais. Na verdade, essas formas reais são da forma $\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{h}'$, em que $\mathfrak{h}'$ é a componente de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}'$ e $\mathfrak{k}$ é qualquer forma real de $Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$. (Como todas as raízes se anulam em $Z_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$, a escolha de $\mathfrak{k}$ não importa.) Em tudo o que segue, vamos adotar $\mathfrak{k} = iZ_{\mathfrak{g}}$, de modo que $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = i\mathfrak{h}$.

Dada uma álgebra de Lie compacta $\mathfrak{g}$, escrevemos $\mathfrak{g} = Z_{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}'$ e vamos considerar a forma bilinear em $\mathfrak{g}$ obtida fazendo a soma direta da forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}'$ com menos algum produto interno em $Z_{\mathfrak{g}}$. Essa forma será denotada por B. Então, B é simétrica, negativa-definida e invariante pela representação adjunta de $\mathfrak{g}$. (Em particular, $-B$ é um produto interno invariante em $\mathfrak{g}$.) Levantando B para a complexificação $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, obtemos uma forma bilinear em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — que também denotaremos por B —

não-degenerada, invariante pela representação adjunta de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ e que, quando restrita a $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})' = (\mathfrak{g}')^{\mathbb{C}}$, coincide com a forma de Cartan-Killing deste ideal.

Seja $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan e Π o sistema de raízes de $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Denotando por V o $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ gerado por Π, temos a aplicação $\lambda \in V \mapsto \lambda|_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}} \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, que é linear e injetiva. Deste modo, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\Pi \subseteq V \subseteq \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Além disso, pelo Lema 3.12 e comentários subseqüentes, temos

$$iZ_{\mathfrak{g}} = \{H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} : \lambda(H) = 0 \text{ para todo } \lambda \in V\}.$$

Como $B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ é negativa-definida, então $B_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\times\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}}$ é um produto interno invariante que será denotado por $\langle\ ,\ \rangle$. Logo, temos o isomorfismo linear natural $S : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ definido por $S(H) = \langle\cdot, H\rangle$. A inversa deste isomorfismo é a aplicação $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mapsto H_\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ definida por

$$\langle H, H_\lambda\rangle = \lambda(H), \quad H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}.$$

Usando este isomorfismo entre $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ e $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, podemos levar o produto interno de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ para um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ em $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Explicitamente,

$$\langle\lambda, \mu\rangle := \langle H_\lambda, H_\mu\rangle = \lambda(H_\mu) = \mu(H_\lambda)$$

para $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$.

Proposição 3.17. *Nas notações acima, seja $(iZ_{\mathfrak{g}})^* \subseteq (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ a imagem de $iZ_{\mathfrak{g}}$ por S. Então $(iZ_{\mathfrak{g}})^* = V^\perp$ e Π é um sistema de raízes abstrato reduzido em V.*

Demonstração. Pelas definições de S e $\langle\ ,\ \rangle$, a igualdade $(iZ_{\mathfrak{g}})^* = V^\perp$ é equivalente a

$$V = \{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* : \lambda|_{iZ_{\mathfrak{g}}} = 0\},$$

que é válida pelo Lema 3.14. Para ver que Π é um sistema de raízes abstrato e reduzido em V, argumentamos da seguinte maneira. Primeiramente, V é gerado por Π por definição. Escrevamos $\mathfrak{h} = Z_{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{h}'$, em que $\mathfrak{h}'$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}'$. Então, $(\mathfrak{h}')^{\mathbb{C}}$ é uma subálgebra de Cartan da álgebra de Lie semi-simples complexa $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'$: denotemos por Π' o sistema de raízes associado. Fazendo $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} := i\mathfrak{h}'$, temos que $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$ é a forma real de $(\mathfrak{h}')^{\mathbb{C}}$ na qual as raízes $\alpha' \in \Pi'$ assumem valores reais. Com isso, podemos assumir que $\Pi' \subseteq (\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}})^*$. Além disso, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = iZ_{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$, com $iZ_{\mathfrak{g}} \perp \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$, e a restrição de $\langle\ ,\ \rangle$ a $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$, que denotaremos por $\langle\ ,\ \rangle'$, é um produto interno invariante em $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$ (obtido, na verdade, restringindo a forma de Cartan-Killing de $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'$). Este produto interno define o isomorfismo linear $S' : H' \in \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} \mapsto \langle\cdot, H'\rangle' \in (\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}})^*$ e usamos este isomorfismo para passar $\langle\ ,\ \rangle'$ para $(\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}})^*$ da maneira usual. Utilizaremos o símbolo $\langle\ ,\ \rangle'$ para o produto interno em $(\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}})^*$ obtido desta maneira e denotaremos $S'^{-1}(\lambda') = H'_{\lambda'}$. Como $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'$ é semi-simples, então Π' é um sistema de raízes abstrato reduzido em $(\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}})^*$ com relação ao produto interno $\langle\ ,\ \rangle'$.

Consideremos a aplicação $Q : V \to (\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}})^*$ definida por $Q(\lambda) = \lambda|_{\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}}$. Claramente, Q é linear. Se $\lambda \in \ker Q$, então $\lambda|_{\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}} = 0$. Como $\lambda|_{iZ_{\mathfrak{g}}} = 0$ e $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = iZ_{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$, então

$\lambda = 0$. Isto significa que Q é injetiva, e a sobrejetividade é conseqüência do Lema 3.14. Também temos que $Q(\Pi) = \Pi'$ pela Proposição 3.13. Afirmamos que Q é uma isometria. Com efeito, dados os funcionais $\lambda, \sigma \in V$, escrevemos $H_\sigma = (H_\sigma)_{iZ_\mathfrak{g}} + (H_\sigma)_{\mathfrak{h}'_\mathbb{R}}$ com $(H_\sigma)_{iZ_\mathfrak{g}} \in iZ_\mathfrak{g}$ e $(H_\sigma)_{\mathfrak{h}'_\mathbb{R}} \in \mathfrak{h}'_\mathbb{R}$, de modo que

$$\langle \lambda, \sigma \rangle = \lambda(H_\sigma) = \lambda((H_\sigma)_{iZ_\mathfrak{g}} + (H_\sigma)_{\mathfrak{h}'_\mathbb{R}}) = Q(\lambda)((H_\sigma)_{\mathfrak{h}'_\mathbb{R}}).$$

Por outro lado, se $H' \in \mathfrak{h}'_\mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} Q(\sigma)(H') &= \sigma(H') = B(H', H_\sigma) \\ &= B(H', (H_\sigma)_{iZ_\mathfrak{g}}) + B(H', (H_\sigma)_{\mathfrak{h}'_\mathbb{R}}) \\ &= B(H', (H_\sigma)_{\mathfrak{h}'_\mathbb{R}}), \end{aligned}$$

o que significa que $(H_\sigma)_{\mathfrak{h}'_\mathbb{R}} = H'_{Q(\sigma)}$. Portanto,

$$\langle \lambda, \sigma \rangle = Q(\lambda)(H'_{Q(\sigma)}) = \langle Q(\lambda), Q(\sigma) \rangle'.$$

Para finalizar a demonstração, basta observar que, se $\alpha, \beta \in \Pi$, então

$$\frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{2\langle Q(\alpha), Q(\beta) \rangle}{\langle Q(\alpha), Q(\alpha) \rangle} \in \mathbb{Z}$$

e

$$\beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha = Q^{-1}\left(Q(\beta) - \frac{2\langle Q(\alpha), Q(\beta) \rangle}{\langle Q(\alpha), Q(\alpha) \rangle} Q(\alpha) \right) \in \Pi.$$

Ademais, se $\alpha \in \Pi$ é tal que $2\alpha \in \Pi$, então $2Q(\alpha) \in \Pi'$, o que contraria o fato de Π' ser reduzido. □

Observamos que, na demonstração da Proposição 3.17, provamos mais especificamente que Π e Π' são sistemas de raízes isomorfos. Uma vez que Π' é o sistema de raízes de uma subálgebra de Cartan da álgebra de Lie semi-simples $(\mathfrak{g}^\mathbb{C})'$, todas as construções feitas com Π produzem estruturas isomorfas às relativas a Π'. A mais importante é o grupo de Weyl, que será feita adiante neste capítulo.

Mantendo a notação da discussão acima, vamos agora produzir uma base de $\mathfrak{g}$ compatível com a decomposição de $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ em espaços de raízes.

Lema 3.18. *Seja*

$$\mathfrak{g}^\mathbb{C} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} (\mathfrak{g}^\mathbb{C})_\alpha.$$

a decomposição de $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ em espaços de raízes e, para cada raiz $\alpha \in \Pi$, seja $E_\alpha \in (\mathfrak{g}^\mathbb{C})_\alpha$. Então, $\overline{E_\alpha} \in (\mathfrak{g}^\mathbb{C})_{-\alpha}$.

Demonstração. Se $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, então

$$[H, \overline{E_\alpha}] = \overline{[\overline{H}, E_\alpha]} = \overline{\alpha(\overline{H})E_\alpha}.$$

Escrevendo $H = H_1 + iH_2$ e $E_\alpha = X_\alpha + iY_\alpha$, com $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ e $X_\alpha, Y_\alpha \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned} \alpha(\overline{H})E_\alpha &= (\alpha(H_1) - i\alpha(H_2))(X_\alpha + iY_\alpha) \\ &= (\alpha(H_1)X_\alpha + \alpha(H_2)Y_\alpha) + i(\alpha(H_1)Y_\alpha - \alpha(H_2)X_\alpha). \end{aligned}$$

Como $\alpha(H_1), \alpha(H_2) \in i\mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \overline{\alpha(\overline{H})E_\alpha} &= -(\alpha(H_1)X_\alpha + \alpha(H_2)Y_\alpha) + i(\alpha(H_1)Y_\alpha - \alpha(H_2)X_\alpha) \\ &= (-\alpha(H_1) - i\alpha(H_2))(X_\alpha - iY_\alpha) \\ &= -\alpha(H)\overline{E_\alpha}, \end{aligned}$$

provando o Lema. □

Para cada raiz $\alpha \in \Pi$, seja $E_\alpha \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha \backslash \{0\}$. Pelo Lema 3.18, os vetores E_α podem ser escolhidos de modo a satisfazerem $E_{-\alpha} = \overline{E_\alpha}$.

Lema 3.19. *Mantendo as notações acima, temos $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) < 0$. Em particular, podemos normalizar os vetores E_α de modo que $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = -1$.*

Demonstração. Escrevendo $E_\alpha = X_\alpha + iY_\alpha$, com $X_\alpha, Y_\alpha \in \mathfrak{g}$, temos

$$B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = B(X_\alpha + iY_\alpha, X_\alpha - iY_\alpha) = B(X_\alpha, X_\alpha) + B(Y_\alpha, Y_\alpha) < 0$$

pois B é negativa-definida em $\mathfrak{g}$. □

Agora, vamos fixar uma ordem lexicográfica em V com respeito a alguma base fixada e tomar o conjunto $\Pi^+ \subseteq \Pi$ das raízes positivas com respeito a essa ordem.

Teorema 3.20. *Para cada raiz $\alpha \in \Pi$ escrevamos $E_\alpha = X_\alpha + iY_\alpha$, com $X_\alpha, Y_\alpha \in \mathfrak{g}$. Então, ambos X_α e Y_α são não-nulos e*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} (\mathbb{R}X_\alpha \oplus \mathbb{R}Y_\alpha), \tag{3.3}$$

esta soma sendo direta. Além disso, os vetores X_α, Y_α satisfazem as relações

$$\begin{aligned} [H, X_\alpha] &= i\alpha(H)Y_\alpha \\ [H, Y_\alpha] &= -i\alpha(H)X_\alpha \\ [X_\alpha, Y_\alpha] &= -\frac{1}{2}(iH_\alpha) \end{aligned} \tag{3.4}$$

para todo $H \in \mathfrak{h}$.

Demonstração. Primeiramente, se $H \in \mathfrak{h}$ então

$$[H, X_\alpha] = \left[H, \frac{1}{2}(E_\alpha + \overline{E_\alpha})\right] = \frac{1}{2}\alpha(H)(E_\alpha - \overline{E_\alpha}) = i\alpha(H)Y_\alpha.$$

A expressão para $[H, Y_\alpha]$ é provada de maneira análoga, e

$$\begin{aligned}[X_\alpha, Y_\alpha] &= \left[\frac{1}{2}(E_\alpha + \overline{E_\alpha}), -\frac{i}{2}(E_\alpha - \overline{E_\alpha})\right] = \frac{i}{4}[E_\alpha + \overline{E_\alpha}, \overline{E_\alpha} - E_\alpha] \\ &= \frac{i}{2}[E_\alpha, \overline{E_\alpha}] = \frac{i}{2}[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \frac{i}{2}B(E_\alpha, \overline{E_\alpha})H_\alpha = -\frac{1}{2}(iH_\alpha).\end{aligned}$$

Em particular, $X_\alpha, Y_\alpha \neq 0$ uma vez que $H_\alpha \neq 0$.

Para provar (3.3), basta mostrar que o membro direito de (3.3) realmente é uma soma direta. Feito isso, a igualdade

$$\dim \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} + |\Pi| = \dim \mathfrak{h} + 2|\Pi^+|$$

garante o resultado. Para cada $\alpha \in \Pi^+$ tomemos escalares $\lambda_\alpha, \sigma_\alpha \in \mathbb{R}$ e $H \in \mathfrak{h}$ tais que

$$X := H + \sum_{\alpha \in \Pi^+} \lambda_\alpha X_\alpha + \sigma_\alpha Y_\alpha = 0.$$

Como $X_\alpha = \frac{1}{2}(E_\alpha + \overline{E_\alpha})$ e $Y_\alpha = \frac{-i}{2}(E_\alpha - \overline{E_\alpha})$, então

$$X = H + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Pi^+} (\lambda_\alpha - i\sigma_\alpha)E_\alpha + (\lambda_\alpha + i\sigma_\alpha)\overline{E_\alpha}.$$

Com isso, se $H' \in \mathfrak{h}$, então

$$0 = [H', X] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Pi^+} (\lambda_\alpha - i\sigma_\alpha)\alpha(H')E_\alpha - (\lambda_\alpha + i\sigma_\alpha)\alpha(H')\overline{E_\alpha},$$

e portanto $(\lambda_\alpha - i\sigma_\alpha)\alpha(H') = 0$ para toda $\alpha \in \Pi^+$. Tomando H' regular, concluimos que $\lambda_\alpha = \sigma_\alpha = 0$ para toda $\alpha \in \Pi^+$, e conseqüentemente $H = X$ também se anula. □

Corolário 3.21. *Mantendo as notações do Teorema 3.20, para cada $\alpha \in \Pi^+$ seja $\mathfrak{k}_\alpha$ a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por $\{X_\alpha, Y_\alpha, iH_\alpha\}$. Então, $\mathfrak{k}_\alpha$ é isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$.*

Demonstração. Sejam

$$X'_\alpha := \frac{\sqrt{2}}{|\alpha|}X_\alpha, \quad Y'_\alpha := \frac{\sqrt{2}}{|\alpha|}Y_\alpha, \quad Z'_\alpha := -\frac{1}{|\alpha|^2}(iH_\alpha).$$

Então, $\{X'_\alpha, Y'_\alpha, Z'_\alpha\}$ é uma base de $\mathfrak{k}_\alpha$. Por (3.4), as constantes de estrutura de $\mathfrak{k}_\alpha$ com respeito a esta base são dadas por

$$\begin{aligned}
[X'_\alpha, Y'_\alpha] &= \frac{2}{|\alpha|^2}[X_\alpha, Y_\alpha] = -\frac{1}{|\alpha|^2}(iH_\alpha) = Z'_\alpha \\
[Y'_\alpha, Z'_\alpha] &= -\frac{\sqrt{2}}{|\alpha|^3}[Y_\alpha, iH_\alpha] = -\frac{\sqrt{2}}{|\alpha|^3} i\alpha(iH_\alpha)X_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{|\alpha|^3}|\alpha|^2 X_\alpha = X'_\alpha \\
[Z'_\alpha, X'_\alpha] &= -\frac{\sqrt{2}}{|\alpha|^3}[iH_\alpha, X_\alpha] = -\frac{\sqrt{2}}{|\alpha|^3} i\alpha(iH_\alpha)Y_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{|\alpha|^3}|\alpha|^2 Y_\alpha = Y'_\alpha,
\end{aligned}$$

que coincidem com as constantes de estrutura de $\mathfrak{su}(2)$ com relação à sua base canônica

$$\begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i/2 & 0 \\ 0 & i/2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\mathfrak{k}_\alpha$ e $\mathfrak{su}(2)$ são isomorfas. □

Se $\mathfrak{g}$ é semi-simples, então $\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{k}_\alpha$, ou seja, $\mathfrak{g}$ é a soma de subálgebras isomorfas a $\mathfrak{su}(2)$. Deste modo, $\mathfrak{su}(2)$ é o “bloco básico” de construção de todas as álgebras de Lie semi-simples compactas, do mesmo modo que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ o é para as álgebras de Lie semi-simples complexas.

Para finalizar esta seção, vamos provar que todas as subálgebras de Cartan de uma álgebra de Lie compacta $\mathfrak{g}$ são conjugadas entre si, um fato que tem implicações profundas na estrutura dos grupos de Lie compactos.

Lema 3.22. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie compacta e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Se $H \in \mathfrak{h}$ é um elemento regular, então $Z_{\mathfrak{g}}(H) = \mathfrak{h}$.*

Demonstração. Como $\mathfrak{h}$ é abeliana e $H \in \mathfrak{h}$, então $\mathfrak{h} \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(H)$. Para a inclusão contrária, seja $X \in Z_{\mathfrak{g}}(H)$ e escrevamos, pelo Teorema 3.20,

$$X = H' + \sum_{\alpha \in \Pi^+} \lambda_\alpha X_\alpha + \sigma_\alpha Y_\alpha, \quad \lambda_\alpha, \sigma_\alpha \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
0 = [H, X] &= \sum_{\alpha \in \Pi^+} \lambda_\alpha [H, X_\alpha] + \sigma_\alpha [H, Y_\alpha] \\
&= \sum_{\alpha \in \Pi^+} \lambda_\alpha i\alpha(H) Y_\alpha - \sigma_\alpha i\alpha(H) X_\alpha,
\end{aligned}$$

de modo que $\lambda_\alpha i\alpha(H) = 0$ e $\sigma_\alpha i\alpha(H) = 0$ para toda $\alpha \in \Pi^+$. Como H é regular, então $\lambda_\alpha = \sigma_\alpha = 0$ para toda $\alpha \in \Pi^+$ e $X = H' \in \mathfrak{h}$. □

Proposição 3.23. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie compacta e $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ subálgebras de Cartan. Então, existe um automorfismo interno $\phi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ tal que $\phi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.*

Demonstração. Seja $\langle\ ,\ \rangle$ um produto interno invariante em $\mathfrak{g}$ e tomemos $H_1 \in \mathfrak{h}_1$, $H_2 \in \mathfrak{h}_2$ elementos regulares de $\mathfrak{g}$. Como $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é um grupo de Lie compacto, então a função

$$\phi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \longmapsto \langle \phi H_1, H_2 \rangle \in \mathbb{R}$$

é diferenciável e atinge valor máximo (e mínimo). Seja $\phi_0 \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ um ponto de máximo. Fixado $X \in \mathfrak{g}$, a função

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \langle e^{t\mathrm{ad}(X)} \phi_0 H_1, H_2 \rangle \in \mathbb{R}$$

é diferenciável e tem em $t = 0$ um ponto de máximo. Logo,

$$0 = \frac{d}{dt} \langle e^{t\mathrm{ad}(X)} \phi_0 H_1, H_2 \rangle \bigg|_{t=0} = \langle [X, \phi_0 H_1], H_2 \rangle = \langle X, [\phi_0 H_1, H_2] \rangle.$$

Como X é qualquer, então $[\phi_0 H_1, H_2] = 0$, isto é, $\phi_0 H_1 \in Z_{\mathfrak{g}}(H_2) = \mathfrak{h}_2$. Portanto,

$$\mathfrak{h}_2 \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\phi_0 H_1) = \phi_0(Z_{\mathfrak{g}}(H_1)) = \phi_0(\mathfrak{h}_1),$$

e uma vez que $\mathfrak{h}_2$ é abeliana maximal temos $\mathfrak{h}_2 = \phi_0(\mathfrak{h}_1)$. □

Corolário 3.24. *Seja G um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dadas as subálgebras de Cartan $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ de $\mathfrak{g}$, sejam T_1 e T_2 os subgrupos de Lie conexos de G cujas álgebras de Lie são, $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$, respectivamente. Então, T_1 e T_2 são conjugados em G, isto é, existe $x \in G$ tal que $T_2 = xT_1x^{-1}$.*

Demonstração. Seja $\phi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ tal que $\mathfrak{h}_2 = \phi(\mathfrak{h}_1)$. Como $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Ad}(G)$, então $\phi = \mathrm{Ad}(x)$ para algum $x \in G$. Então, $xT_1x^{-1} = T_2$, pois xT_1x^{-1} é um subgrupo de Lie conexo de G cuja álgebra de Lie é $\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{h}_1 = \phi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$. □

3.3 Toros Maximais

Um **toro** é um grupo de Lie obtido fazendo-se o produto direto de uma quantidade finita de cópias de $\mathbb{S}^1$. Todo toro é um grupo de Lie compacto, conexo e abeliano, e reciprocamente todo grupo de Lie com estas propriedades é (isomorfo a) um toro. Se G é um grupo de Lie compacto, podemos procurar entre os subgrupos de Lie de G aqueles que são toros. (Todo grupo de Lie compacto admite toros entre os seus subgrupos: basta tomar o fecho de um subgrupo a 1-parâmetro qualquer.) Particularmente importantes são aqueles que são **maximais**, isto é, não estão contidos propriamente em nenhum outro toro de G. A importância dos toros maximais está ligada ao fato deles serem os análogos das subálgebras de Cartan no nível do grupo.

Proposição 3.25. *Seja G um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Um subgrupo de Lie conexo $T \subseteq G$ é um toro maximal se, e somente se, a álgebra de Lie de T é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de T. Suponhamos que T é um toro maximal e tomemos $X \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$. Então, $\mathfrak{t}' := \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{t}$ é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}$ que contém $\mathfrak{t}$, de modo que T', o subgrupo de Lie conexo de G com álgebra de Lie $\mathfrak{t}'$, é abeliano e contém T. Tomando $\overline{T'}$ o fecho de T' em G, temos que $\overline{T'}$ é um toro que contém T. Como T é maximal, então $T = \overline{T'}$. Logo, $T = T'$ e portanto $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$. Portanto, $X \in \mathfrak{t}$ e $\mathfrak{t}$ é uma subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{g}$. Pela Proposição 3.11, $\mathfrak{t}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Suponhamos agora que $\mathfrak{t}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, isto é, $\mathfrak{t}$ é abeliana maximal. Primeiramente, T é um toro, pois T é claramente abeliano e, como $\mathfrak{t}$ é abeliana maximal, então T não pode estar contido propriamente em nenhum subgrupo de Lie conexo e abeliano de G, como o fecho de T por exemplo. Logo, T é fechado, e portanto compacto. Ainda temos, pelo mesmo motivo, que nenhum toro de G pode conter T propriamente, e concluimos que T é um toro maximal. □

Se G é um grupo de Lie compacto e $T \subseteq G$ é um toro maximal com álgebra de Lie $\mathfrak{t}$, então $\exp : \mathfrak{t} \to T$ é sobrejetiva.(Como sabemos da teoria geral dos grupos de Lie, neste caso exp é um homomorfismo de recobrimento.) Logo, $T \subseteq \exp(\mathfrak{g})$. Reciprocamente, se $x \in \exp(\mathfrak{g})$, então $x = \exp X$ para algum $X \in \mathfrak{g}$. Sendo $\mathfrak{t}$ a subálgebra de Lie abeliana maximal de $\mathfrak{g}$ que contém X e T o toro maximal associado a $\mathfrak{t}$, então $x \in T$. Com isso,

$$\exp(\mathfrak{g}) = \bigcup \{T \subseteq G : T \text{ é toro maximal}\}.$$

Por outro lado, se $T_0 \subseteq G$ é um toro maximal fixado, então pelo Corolário 3.24 temos

$$\bigcup \{T \subseteq G : T \text{ é toro maximal}\} = \bigcup_{x \in G} x T_0 x^{-1},$$

e portanto

$$\exp(\mathfrak{g}) = \bigcup_{x \in G} x T_0 x^{-1}.$$

Isso implica que, para conhecer a imagem da aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ (questão importante para qualquer grupo de Lie) quando G é compacto e conexo, é suficiente analisar os toros maximais. Neste sentido temos o seguinte resultado.

Teorema 3.26. *Seja G um grupo de Lie compacto e conexo e $T \subseteq G$ um toro maximal. Então, todo $x \in G$ é conjugado em G a um elemento de T. Em particular, a aplicação exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *é sobrejetiva.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G e $\mathfrak{t}$, a de T. Dados subconjuntos $A, B \subseteq G$ não-vazios, vamos denotar por A^B o conjunto $\bigcup_{x \in B} xAx^{-1}$ e por $A^\times$ o conjunto $A \backslash Z_G$. Nosso objetivo é provar que $G = T^G$, o que faremos por indução sobre

$\dim G$. Se $\dim G = 0$, nada há a provar. Suponhamos, então, que $\dim G \geq 1$ e que o Teorema está provado para todos os grupos de Lie compactos e conexos de dimensão $< \dim G$.

Primeiramente, vamos verificar que é suficiente considerar o caso em que G é semi-simples. Pela Proposição 3.10, podemos escrever $G = (Z_G)_0 G'$, em que G' é o subgrupo de Lie conexo de G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}'$, e $\mathfrak{t} = Z_{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{t}'$, em que $\mathfrak{t}'$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}'$. Seja T' o toro maximal de G' associado a $\mathfrak{t}'$. (Lembramos que G' é compacto.) Claramente, $T' \subseteq T$. Supondo que o caso semi-simples está provado, então $G' = (T')^{G'}$, de modo que

$$G = (Z_G)_0 G' = (Z_G)_0 (T')^{G'} = ((Z_G)_0 T')^{G'} \subseteq T^G.$$

Suponhamos, então, que G é semi-simples. Como $\dim G \geq 1$ e não existem grupos de Lie semi-simples de dimensão 1 ou 2, então $\dim G \geq 3$. Em particular, o subconjunto $G^\times$ é aberto, conexo e denso em G. Provaremos a seguir que $(T^\times)^G$ é aberto e fechado em $G^\times$. Uma vez que $(T^\times)^G$ é não-vazio, isto implica que $(T^\times)^G = G^\times$. Afirmamos que esta igualdade garante o Teorema. De fato, neste caso temos, por um lado, que $G^\times \subseteq T^G$ e, por outro, que T^G é fechado em G, pois T^G é a imagem da aplicação contínua com domínio compacto

$$(x, y) \in G \times T \longmapsto xyx^{-1} \in G.$$

Portanto, $G = \overline{G^\times} \subseteq T^G$.

Para ver que $(T^\times)^G$ é fechado em $G^\times$, basta notar que $(T^\times)^G = (T^G)^\times = T^G \cap G^\times$ e lembrar que T^G é fechado em G. Para verificar que $(T^\times)^G$ é aberto em $G^\times$, é suficiente mostrar que todo $x_0 \in T^\times$ é ponto interior de $G^\times$ uma vez que conjugações em G são homeomorfismos. Seja $x_0 \in T^\times$ e façamos $K := (Z_G(x_0))_0$. Como $Z_G(x_0)$ é um subgrupo fechado de G, então K é um subgrupo de Lie conexo e compacto de G que contém T. Além disso, como $x_0 \notin Z_G$, então $K \neq G$, e portanto $\dim K < \dim G$. Como T é um toro maximal de K, então, pela hipótese de indução, $T^K = K$. Ademais, temos $K^\times = (T^K)^\times = (T^\times)^K$. Em particular, $(T^\times)^G = (K^\times)^G$. Com isso, para provar que existe um aberto $U \ni x_0$ de G contido em $(T^\times)^G$, mostraremos, na verdade, que existe um aberto $V \ni x_0$ de $K^\times$ tal que V^G é aberto em G.

Seja $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de K. Então,

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{Ad}(x_0)X = X\} = \ker(\mathrm{Ad}(x_0) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}). \tag{3.5}$$

Como $K \neq G$, então $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{g}$. Logo, denotando por $\mathfrak{h}$ o complemento ortogonal de $\mathfrak{k}$ com respeito a um produto interno invariante $\langle\ ,\ \rangle$ de $\mathfrak{g}$, temos que $\mathfrak{h} \neq 0$. Além disso, como $\mathfrak{k}$ é invariante por $\mathrm{Ad}(x)$, $x \in K$, e $\mathrm{Ad}(x)$ é um operador ortogonal com relação a $\langle\ ,\ \rangle$, então $\mathfrak{h}$ também é invariante por $\mathrm{Ad}(x)$. Seja

$$V = \{x \in K : \det(\mathrm{Ad}(x)|_{\mathfrak{h}} - \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}) \neq 0\}.$$

Então, V é um aberto simétrico de $K^\times$, e (3.5) implica que $x_0 \in V$. Provaremos que V^G é um aberto de G.

Seja $\psi : G \times V \to G$ definida por $\psi(x,y) = xyx^{-1}$. Então, V^G coincide com a imagem de ψ, e provaremos que V^G é aberto em G mostrando que ψ é uma aplicação aberta. Para tanto, é suficiente mostrar que ψ é uma submersão. Primeiro, precisamos de uma expressão explícita para a diferencial de ψ. Tomemos $x \in G$ e $y \in V$. Dado $X \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned}
d\psi_{(x,y)}(X_x, 0) &= \frac{d}{dt}\,\psi(x\exp(tX), y)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\,x\exp(tX)y\exp(-tX)x^{-1}\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\,(xyx^{-1})(xy^{-1}\exp(tX)yx^{-1})(x\exp(-tX)x^{-1})\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\,\psi(x,y)\exp(t\mathrm{Ad}(xy^{-1})X)\exp(-t\mathrm{Ad}(x)X)\bigg|_{t=0} \\
&= d(L_{\psi(x,y)})_1\left[\mathrm{Ad}(x)(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})X\right]_1,
\end{aligned}$$

e, dado $Y \in \mathfrak{k}$, temos

$$\begin{aligned}
d\psi_{(x,y)}(0, Y_y) &= \frac{d}{dt}\,\psi(x, y\exp(tY))\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\,xy\exp(tY)x^{-1}\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\,(xyx^{-1})(x\exp(tY)x^{-1})\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\,\psi(x,y)\exp(t\mathrm{Ad}(x)Y)\bigg|_{t=0} \\
&= d(L_{\psi(x,y)})_1\left[\mathrm{Ad}(x)Y\right]_1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$d\psi_{(x,y)}(X_x, Y_y) = d(L_{\psi(x,y)})_1\left\{\mathrm{Ad}(x)\left[(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})X + Y\right]\right\}_1. \tag{3.6}$$

Por fim, se $y \in V$, então $y^{-1} \in V$ e $(\mathrm{Ad}(y^{-1})|_{\mathfrak{h}} - \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ é invertível. Logo, a imagem de $(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})$ contém $\mathfrak{h}$. Conseqüentemente, o conjunto dos vetores da forma $(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})X + Y$, com $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{k}$, coincide com $\mathfrak{g}$ uma vez que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$, e portanto $d\psi_{(x,y)}$ é sobrejetiva. □

Corolário 3.27. *Se G é um grupo de Lie compacto e conexo, então todo elemento de G pertence a algum toro maximal de G.*

Corolário 3.28. *Se G é um grupo de Lie compacto e conexo, então o centro de G está contido em cada toro maximal de G.*

Demonstração. Seja $T \subseteq G$ um toro maximal e $x \in Z_G$. Então, pelo Teorema 3.26 existe $y \in G$ tal que $x = yxy^{-1} \in T$. □

Vale a pena observar que, apesar de Z_G estar contido em qualquer toro maximal T de G, a igualdade $Z_G = T$ só ocorre quando G é abeliano. (Neste caso, $T = G = Z_G$ é o único toro maximal.) De fato, se $Z_G = T$ então $\mathfrak{t} = Z_{\mathfrak{g}}$ e necessariamente $\mathfrak{g}' = \{0\}$, fazendo com que $\mathfrak{g}$, e portanto G, seja abeliana.

Os resultados a seguir serão utilizados na próxima seção, onde discutiremos o grupo de Weyl.

Lema 3.29. *Seja A um grupo de Lie compacto e abeliano tal que A/A_0 é finito e cíclico, com A_0 sendo a componente conexa do elemento neutro. Então, existe $a \in A$ tal que $\{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em A.*

Demonstração. Seja $N \geq 1$ a ordem do grupo A/A_0 e $bA_0 \in A$ um gerador de A/A_0, com $b \in A$. Então, $b^N A_0 = (bA_0)^N = A_0$, isto é, $b^N \in A_0$. Como A_0 é um toro, pelo Teorema de Kronecker existe $a_0 \in A_0$ tal que $\{a_0^n : n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em A_0. Consideremos o elemento $b^N a_0^{-1} \in A_0$. Denotando por $\mathfrak{a}$ a álgebra de Lie de A, uma vez que $\exp : \mathfrak{a} \to A_0$ é sobrejetiva então existe $c \in A_0$ tal que $c^N = b^N a_0^{-1}$, isto é, $(bc^{-1})^N = a_0$. (Basta escrever $b^N a_0^{-1} = \exp X$ para algum $X \in \mathfrak{a}$ e tomar $c = \exp(X/N)$.) Fazendo $a := bc^{-1} \in bA_0$, temos que $\overline{\{a^n : n \in \mathbb{Z}\}}$ é um subgrupo de A que contém A_0, pois $\{a_0^n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$, e contém ao menos um elemento de cada classe lateral de A_0, pois $a^n \in b^n A_0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\overline{\{a^n : n \in \mathbb{Z}\}} = A$. □

Proposição 3.30. *Seja G um grupo de Lie compacto e conexo, $T \subseteq G$ um toro e $x \in Z_G(T)$. Então, existe um toro $S \subseteq G$ que contém T e x.*

Demonstração. Seja A o fecho do subgrupo de G gerado por T e x, que é abeliano uma vez que x comuta com os elementos de T. Além disso, essa condição de centralização também implica que o subgrupo de G gerado por T e x é $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} x^n T$. Como $T \subseteq A$ é conexo e contém o elemento neutro, então $T \subseteq A_0$, e portanto

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} x^n T \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} x^n A_0,$$

este último conjunto coincidindo com o subgrupo de G gerado por A_0 e x.

Como A_0 é aberto em A, então $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} x^n A_0$ é um subgrupo aberto (e fechado) de A. Logo, $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} x^n A_0 = A$ e A/A_0 é um grupo cíclico gerado por xA_0. Pela compacidade de A o elemento neutro é ponto de acumulação da seqüência $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, e portanto existe um número natural $n \geq 1$ tal que $x^n \in A_0$. Se $N \geq 1$ é o menor número com esta propriedade, então xA_0 possui ordem N e A/A_0 é finito de ordem N. Com isso, pelo Lema 3.29 existe $a \in A$ tal que $\overline{\{a^n : n \in \mathbb{Z}\}} = A$.

Sendo $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G, pelo Teorema 3.26 temos $\exp : \mathfrak{g} \to G$ sobrejetiva e podemos escrever $a = \exp(X)$ para algum $X \in \mathfrak{g}$. Seja $S = \overline{\{\exp(tX) : t \in \mathbb{R}\}}$. Então, S é um toro de G que contém A, e portanto contém T e x. □

Corolário 3.31. *Se G é um grupo de Lie compacto e conexo e $T \subseteq G$ é um toro, então o centralizador de T em G é um subgrupo de Lie conexo de G.*

Demonstração. Pela Proposição 3.30, $Z_G(T)$ coincide com a união dos toros de G que contêm T. Todos estes toros são, por definição, conexos e se intersectam no elemento neutro do grupo. Logo, $Z_G(T)$ é conexo. □

Corolário 3.32. *Se G é um grupo de Lie compacto e conexo e $T \subseteq G$ é um toro maximal, então $Z_G(T) = T$.*

Demonstração. Está claro que $T \subseteq Z_G(T)$. Agora, se $x \in Z_G(T)$, então pela Proposição 3.30 existe um toro S que contém ambos T e x. Como T é maximal, temos $S = T$, e portanto $x \in T$. □

3.4 O Grupo de Weyl

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie compacta, $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ as complexificações e Π o sistema de raízes de $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Seja $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ a forma real de $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ na qual as raízes $\alpha \in \Pi$ assumem valores reais e $\langle\ ,\ \rangle$ o produto interno em $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$ proveniente da forma bilinear B. Para cada raiz $\alpha \in \Pi$, definimos o operador linear $r_\alpha : \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^* \to \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$ por

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2\langle \lambda, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha.$$

Geometricamente, r_α é a reflexão ortogonal em torno do hiperplano $\alpha^\perp$. Além disso, $r_\alpha(\Pi) = \Pi$. Uma vez que $(iZ_{\mathfrak{g}})^* \subseteq \alpha^\perp$ para toda raiz α, então r_α age como a identidade em $(iZ_{\mathfrak{g}})^*$.[3]

O **grupo de Weyl** de Π, denotado por $W(\Pi)$, é o subgrupo de $GL(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*)$ gerado pelas reflexões r_α, $\alpha \in \Pi$. Este grupo é finito. Com efeito, se denotarmos por $\mathrm{Bij}(\Pi)$ o grupo das permutações de Π, então a aplicação $\phi : w \in W(\Pi) \mapsto w|_\Pi \in \mathrm{Bij}(\Pi)$ é um homomorfismo de grupos. Como $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^* = (iZ_{\mathfrak{g}})^* \oplus V$ e todo elemento $w \in W(\Pi)$ age como a identidade em $(iZ_{\mathfrak{g}})^*$, então um elemento $w \in W(\Pi)$ que age como a identidade em Π — e, portanto, age como a identidade em V — deve ser a própria identidade. Portanto, ϕ é injetivo e $W(\Pi)$ é isomorfo a um subgrupo de um grupo finito.

Se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de um grupo de Lie compacto e conexo G, então o grupo de Weyl $W(\Pi)$ pode ser visto agindo sobre qualquer toro maximal de G, como mostraremos a seguir.

Seja G um grupo de Lie compacto e conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e tomemos $T \subseteq G$ um toro maximal. Lembramos que o **normalizador** de T em G é o subconjunto

$$\begin{aligned} N_G(T) &:= \{x \in G : xTx^{-1} \subseteq T\} \\ &= \{x \in G : xTx^{-1} = T\}. \end{aligned}$$

Claramente, $N_G(T)$ é um subgrupo fechado de G e T é um subgrupo normal de $N_G(T)$. Em particular, $N_G(T)$ é um grupo de Lie compacto (em geral desconexo). Podemos descrever $N_G(T)$ em termos da álgebra de Lie $\mathfrak{t}$ de T:

$$\begin{aligned} N_G(T) &= \{x \in G : \mathrm{Ad}(x)\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{t}\} \\ &= \{x \in G : \mathrm{Ad}(x)\mathfrak{t} = \mathfrak{t}\}. \end{aligned}$$

Com efeito, se $x \in N_G(T)$ e $X \in \mathfrak{t}$, então $\exp(t\mathrm{Ad}(x)X) = x\exp(tX)x^{-1} \in T$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de modo que $\mathrm{Ad}(x)X \in \mathfrak{t}$. Reciprocamente, se $x \in G$ é tal que $\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{t}$,

[3]Lembramos que $(iZ_{\mathfrak{g}})^*$ é a imagem de $iZ_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ pelo isomorfismo linear $H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \mapsto B(\,\cdot\,, H) \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$. Ver a Proposição 3.17.

então dado $h \in T$ podemos escrever $h = \exp(H)$, $H \in \mathfrak{t}$. Logo, $\mathrm{Ad}(x)H \in \mathfrak{t}$, e portanto $xhx^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(x)H) \in T$.

Lema 3.33. *Nas notações acima, a álgebra de Lie de $N_G(T)$ é $\mathfrak{t}$. Em particular, $N_G(T)_0 = T$ e o quociente $N_G(T)/T$ é finito.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de $N_G(T)$. Como $T \subseteq N_G(T)$, então $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{h}$. Agora, se $H \in \mathfrak{h}$, então $\exp(tH) \in N_G(T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que significa que $e^{t\mathrm{ad}(H)}\mathfrak{t} = \mathrm{Ad}(\exp(tH))\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{t}$. Dado $X \in \mathfrak{t}$ qualquer, temos $e^{t\mathrm{ad}(H)}X \in \mathfrak{t}$ para $t \in \mathbb{R}$, de modo que

$$[H, X] = \frac{d}{dt}e^{t\mathrm{ad}(H)}X\bigg|_{t=0} \in \mathfrak{t}.$$

Isto significa que $H \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$. Portanto, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{t}$ e a igualdade segue. □

O quociente $N_G(T)/T$ é o **grupo de Weyl analítico** associado ao toro maximal T e denotado por $W(T, G)$. Como $\mathrm{Ad}(x)\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{t}$ para cada $x \in N_G(T)$, temos a representação

$$\Phi : x \in N_G(T) \mapsto \mathrm{Ad}(x)|_{\mathfrak{t}} \in GL(\mathfrak{t}).$$

Lema 3.34. $\ker(\Phi) = T$.

Demonstração. Como T é um grupo de Lie abeliano, então $\mathrm{Ad}(x)|_{\mathfrak{t}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{t}}$ para todo $x \in T$. Logo, $T \subseteq \ker(\Phi)$. Reciprocamente, seja $x \in \ker(\Phi)$. Como $\mathrm{Ad}(x)H = H$ para todo $H \in \mathfrak{t}$, então $x\exp(H)x^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(x)H) = \exp(H)$ para todo $H \in \mathfrak{t}$. Isto significa que $xhx^{-1} = h$ para todo $h \in T$, ou seja, que $x \in Z_G(T) = T$. ($Z_G(T) = T$ pois T é um toro maximal.) □

Com isso, Φ induz um homomorfismo injetivo $\overline{\Phi} : W(T, G) \to GL(\mathfrak{t})$. Por causa do isomorfismo $H \in \mathfrak{t} \mapsto iH \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$, podemos considerar os operadores lineares $\overline{\Phi}(w)$, $w \in W(T, G)$, agindo sobre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$. Seja $\phi : W(T, G) \to GL(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*)$ o homomorfismo definido por

$$\phi(w)\lambda = S\overline{\Phi}(w)S^{-1},$$

em que $S : \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$ é o isomorfismo linear definido por $S(H) = B(\,\cdot\,, H)$. Vale a pena observar que se $x \in N_G(T)$ é tal que $w = xT$, então

$$(\phi(w)\lambda)(H) = B(H, \mathrm{Ad}(x)H_\lambda) = B(\mathrm{Ad}(x)^{-1}H, H_\lambda) = \lambda(\mathrm{Ad}(x^{-1})H)$$

para $\lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$ e $H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$; ou seja, $\phi(w)$ é o operador transposto de $\mathrm{Ad}(x^{-1})$. Além disso, está claro que ϕ é um isomorfismo de $W(T, G)$ sobre a sua imagem.

Teorema 3.35. *Mantendo as notações acima, temos* $\mathrm{Im}(\phi) = W(\Pi)$.

Demonstração. Começamos provando que $W(\Pi) \subseteq \mathrm{Im}(\phi)$. É suficiente provar que $r_\alpha \in \mathrm{Im}(\phi)$ para $\alpha \in \Pi^+$. Seja

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} (\mathbb{R}X_\alpha \oplus \mathbb{R}Y_\alpha)$$

a decomposição de $\mathfrak{g}$ dada pelo Teorema 3.20. Pelo mesmo Teorema temos ainda que

$$[X_\alpha, H] = -i\alpha(H)Y_\alpha, \quad [X_\alpha, Y_\alpha] = -\frac{1}{2}(iH_\alpha)$$

para todo $H \in \mathfrak{t}$. Em particular,

$$[X_\alpha, [X_\alpha, H]] = -\frac{1}{2}\alpha(H)H_\alpha, \quad H \in \mathfrak{t}_\mathbb{R}.$$

Usando esta relação para $H = H_\alpha$, temos

$$\mathrm{ad}(X_\alpha)^2 H_\alpha = -\frac{|\alpha|^2}{2}H_\alpha, \tag{3.7}$$

pois $\alpha(H_\alpha) = |\alpha|^2$.

Seja $x_t := \exp(tX_\alpha) \in G$, $t \in \mathbb{R}$. Provaremos que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_{t_0} \in N_G(T)$ e $\phi(x_{t_0}T) = r_\alpha$. Vamos calcular $\mathrm{Ad}(x_t)|_{\mathfrak{t}_\mathbb{R}}$. Como $\mathfrak{t}_\mathbb{R} = \mathbb{R}H_\alpha \oplus H_\alpha^\perp$, para isso é suficiente analisar a ação de $\mathrm{Ad}(x_t)$ em cada um desses dois subespaços. Dado $H \in \mathfrak{t}_\mathbb{R}$, temos

$$\mathrm{Ad}(x_t)H = e^{\mathrm{ad}(tX_\alpha)}H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathrm{ad}(X_\alpha)^k H.$$

Se $H \in H_\alpha^\perp$, então

$$\mathrm{ad}(X_\alpha)H = -i\alpha(H)Y_\alpha = -i\langle H_\alpha, H\rangle Y_\alpha = 0,$$

e portanto $\mathrm{Ad}(x_t)H = H$. Com isso, $\mathrm{Ad}(x_t)$ age como a identidade em $H_\alpha^\perp$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(x_t)H_\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathrm{ad}(X_\alpha)^k H_\alpha \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\mathrm{ad}(X_\alpha)^{2k} H_\alpha + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathrm{ad}(X_\alpha)^{2k+1} H_\alpha.
\end{aligned}$$

Por (3.7), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\mathrm{ad}(X_\alpha)^{2k} H_\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{(-1)^k|\alpha|^{2k}}{2^k} H_\alpha \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{t|\alpha|}{\sqrt{2}}\right)^{2k} H_\alpha \\
&= \cos\left(\tfrac{t|\alpha|}{\sqrt{2}}\right) H_\alpha
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathrm{ad}(X_\alpha)^{2k+1}H_\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\frac{(-1)^k|\alpha|^{2k}}{2^k}[X_\alpha,H_\alpha]\\ &= \frac{\sqrt{2}}{|\alpha|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{t|\alpha|}{\sqrt{2}}\right)^{2k+1}[X_\alpha,H_\alpha]\\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{|\alpha|}\cdot\mathrm{sen}\left(\tfrac{t|\alpha|}{\sqrt{2}}\right)[X_\alpha,H_\alpha].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{Ad}(x_t)H_\alpha=\cos\left(\frac{t|\alpha|}{\sqrt{2}}\right)H_\alpha+\frac{\sqrt{2}}{|\alpha|}\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{t|\alpha|}{\sqrt{2}}\right)[X_\alpha,H_\alpha]. \tag{3.8}$$

Tomando $t_0=\frac{\sqrt{2}\pi}{|\alpha|}$, temos $\frac{t_0|\alpha|}{\sqrt{2}}=\pi$ e $\mathrm{Ad}(x_{t_0})H_\alpha=-H_\alpha$. Portanto, $\mathrm{Ad}(x_{t_0})|_{\mathfrak{t}_\mathbb{R}}$ é a reflexão ortogonal relativa a $H_\alpha^\perp$:

$$\mathrm{Ad}(x_{t_0})H=H-\frac{2B(H,H_\alpha)}{B(H_\alpha,H_\alpha)}H_\alpha.$$

Em particular, $\mathrm{Ad}(x_{t_0})\mathfrak{t}\subseteq\mathfrak{t}$, e $x_{t_0}\in N_G(T)$. Além disso, tomando $w=x_{t_0}T\in W(T,G)$, temos

$$\begin{aligned}\phi(w)\lambda &= S\mathrm{Ad}(x_{t_0})S^{-1}\lambda=S\mathrm{Ad}(x_{t_0})H_\lambda\\ &= S\left(H_\lambda-\frac{2B(H_\lambda,H_\alpha)}{B(H_\alpha,H_\alpha)}H_\alpha\right)\\ &= S\left(H_\lambda-\frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{|\alpha|^2}H_\alpha\right)\\ &= \lambda-\frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{|\alpha|^2}\alpha\end{aligned}$$

para todo $\lambda\in\mathfrak{t}_\mathbb{R}^*$. Logo, $\phi(w)=r_\alpha$.

Para provar que $\mathrm{Im}(\phi)\subseteq W(\Pi)$, seja $w\in W(T,G)$. Primeiramente, verificaremos que $\phi(w)\Pi=\Pi$. Seja $x\in N_G(T)$ tal que $w=xT$. Dada uma raiz $\alpha\in\Pi$ e um autovetor $E_\alpha\in(\mathfrak{g}^\mathbb{C})_\alpha$, temos

$$\begin{aligned}[H,\mathrm{Ad}(x)E_\alpha] &= \mathrm{Ad}(x)[\mathrm{Ad}(x)^{-1}H,E_\alpha]=\mathrm{Ad}(x)\left(\alpha(\mathrm{Ad}(x)^{-1}H)E_\alpha\right)\\ &= \alpha(\mathrm{Ad}(x)^{-1}H)\mathrm{Ad}(x)E_\alpha=(\phi(w)\alpha)(H)\mathrm{Ad}(x)E_\alpha\end{aligned}$$

para todo $H\in\mathfrak{t}^\mathbb{C}$. Isto significa que $\phi(w)\alpha\in\Pi$. Logo, $\phi(w)\Pi\subseteq\Pi$ e, como Π é finito, vale a igualdade. (Observe que com esse argumento também provamos que $\mathrm{Ad}(x)(\mathfrak{g}^\mathbb{C})_\alpha=(\mathfrak{g}^\mathbb{C})_{\phi(xT)\alpha}$ para todo $x\in N_G(T)$.)

Segundamente, seja $\Sigma\subseteq\Pi$ o sistema simples determinado por alguma ordem lexicográfica em V. Pelo que já provamos acima, $\phi(w)\Pi=\Pi$, de modo que $\phi(w)\Sigma$ é um outro sistema simples para Π. Por um resultado geral da teoria das álgebras de

Lie, existe exatamente um elemento $z \in W(\Pi)$ tal que $z\phi(w)\Sigma = \Sigma$. Afirmamos que $z\phi(w) = \mathrm{id}_{\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}}$. Provada esta afirmação, teremos $\phi(w) = z^{-1} \in W(\Pi)$ e a demonstração do Teorema estará concluída. Uma vez que $W(\Pi) \subseteq \mathrm{Im}(\phi)$, podemos escolher $w' \in W(T, G)$ tal que $\phi(w') = z$. Então, $\phi(w'w)\Sigma = \Sigma$. Escolhendo $x' \in N_G(T)$ tal que $w' = x'T$, nosso objetivo é provar que $x'x \in T$, pois neste caso $\mathrm{Ad}(x'x)$ age como a identidade em $\mathfrak{t}$ e $\phi(w'w) = S\mathrm{Ad}(x'x)S^{-1}$, como a identidade em $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$.

Seja Π^+ o conjunto das raízes positivas com respeito a Σ e $\delta := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Pi^+}\alpha$. Como $\phi(w'w)\Sigma = \Sigma$, então $\phi(w'w)\Pi^+ = \Pi^+$, de modo que $\phi(w'w)\delta = \delta$. Logo, $\mathrm{Ad}(x'x)H_\delta = H_\delta$. Denotando por T' o fecho de $\{\exp(tiH_\delta) : t \in \mathbb{R}\}$ em G, temos que $T' \subseteq T$ é um toro em G e que $x'x \in Z_G(T')$. Então, para provar que $x'x \in T$ é suficiente mostrar que $Z_G(T') = T$. Como $Z_G(T')$ é conexo pelo Corolário 3.31, para fazer isto provaremos, na verdade, que a álgebra de Lie de $Z_G(T')$ coincide com $\mathfrak{t}$. Se $\mathfrak{s}$ é a álgebra de Lie de T', então $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{t}$ e a álgebra de Lie de $Z_G(T')$ é $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$. Está claro que $\mathfrak{t} \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$. Para ver que $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) \subseteq \mathfrak{t}$, observamos que, como $iH_\delta \in \mathfrak{s}$, então $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(iH_\delta)$. Com isso, é suficiente verificar que $Z_{\mathfrak{g}}(iH_\delta) = \mathfrak{t}$. Uma vez que $iH_\delta \in \mathfrak{t}$, pelo Lema 3.22 basta provar que iH_δ é um elemento regular de $\mathfrak{g}$.

Escrevamos $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ e tomemos $\alpha_j \in \Sigma$. Sabemos da teoria geral que r_{α_j} manda α_j em $-\alpha_j$ e permuta o restante das raízes positivas. Então,

$$
\begin{aligned}
r_{\alpha_j}(2\delta) &= r_{\alpha_j}\left(\sum_{\alpha\in\Pi^+}\alpha\right) = r_{\alpha_j}\left(\alpha_j + \sum_{\substack{\alpha\in\Pi^+\\ \alpha\neq\alpha_j}}\alpha\right) \\
&= -\alpha_j + \sum_{\substack{\alpha\in\Pi^+\\ \alpha\neq\alpha_j}}\alpha = 2\delta - 2\alpha_j,
\end{aligned}
$$

e portanto $r_{\alpha_j}(\delta) = \delta - \alpha_j$. Logo, $\frac{2\langle\delta,\alpha_j\rangle}{|\alpha_j|^2} = 1$. Isto implica que $\langle\delta, \alpha_j\rangle > 0$ para toda raiz simples $\alpha_j \in \Sigma$. Se $\alpha \in \Pi^+$, então $\alpha = \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i$, com $n_1, \ldots, n_l \geq 0$ inteiros e algum $n_i > 0$, de modo que

$$
\langle\delta, \alpha\rangle = \sum_{i=1}^{l} n_i\langle\delta, \alpha_i\rangle > 0.
$$

Com isso, se $\alpha \in \Pi$ então $\alpha(H_\delta) \neq 0$, pois ou α é positiva e $\alpha(H_\delta) = \langle\delta, \alpha\rangle > 0$ ou α é negativa e $\alpha(H_\delta) = -\langle\delta, -\alpha\rangle < 0$. Portanto, H_δ é regular, assim como iH_δ. $\square$

O grupo de Weyl associado ao toro maximal de um grupo de Lie compacto e conexo, seja na sua forma analítica ou algébrica, é usado extensivamente no desenvolvimento da teoria. A seguir, vemos uma de suas aplicações.

Dado um grupo de Lie compacto e conexo e T um toro maximal de G, existe uma ação natural de $W(T, G)$ em T; a saber, a aplicação $\tau : W(T, G) \times T \to T$ definida por $\tau(xT, y) = xyx^{-1}$.

Proposição 3.36. *Dois elementos de T são conjugados por um elemento de G se, e somente se, eles estão na mesma órbita da ação τ. Mais precisamente, se $x_1, x_2 \in T$ e $y \in G$ satisfazem $x_1 = yx_2y^{-1}$, então existe $z \in Z_G(x_1)_0$ tal que $zy \in N_G(T)$ e $x_1 = (zy)x_2(zy)^{-1}$.*

Demonstração. $Z_G(x_1)$ é um subgrupo fechado de G com álgebra de Lie

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{Ad}(x_1)X = X\}.$$

Então, $Z_G(x_1)_0$ é um grupo de Lie compacto e conexo cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{k}$ e que contém T, de modo que $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{k}$. Afirmamos que $\mathrm{Ad}(y)\mathfrak{t}$ também está contida em $\mathfrak{k}$. Com efeito, se $H \in \mathfrak{t}$, então

$$\mathrm{Ad}(x_1)\mathrm{Ad}(y)H = \mathrm{Ad}(x_1y)H = \mathrm{Ad}(yx_2)H = \mathrm{Ad}(y)\mathrm{Ad}(x_2)H = \mathrm{Ad}(y)H$$

pois $\mathrm{Ad}(x_2)$ age como a identidade em $\mathfrak{t}$. Uma vez que ambas $\mathfrak{t}$ e $\mathrm{Ad}(y)\mathfrak{t}$ são subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{t}$ e $\mathrm{Ad}(y)\mathfrak{t}$ são subálgebras de Cartan de $\mathfrak{k}$, e portanto existe $z \in Z_G(x_1)_0$ tal que $\mathrm{Ad}(zy)\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$ uma vez que $\mathfrak{k}$ é uma álgebra de Lie compacta. Segue que $zy \in N_G(T)$ e que

$$(zy)x_2(zy)^{-1} = z(yx_2y^{-1})z^{-1} = zx_1z^{-1} = x_1. \quad \square$$

Corolário 3.37. *As interseções das classes de conjungação de um grupo de Lie compacto e conexo G com um toro maximal $T \subseteq G$ coincidem com as órbitas de τ. Se $T/W(T,G)$ denota o espaço das órbitas desta ação, então o conjunto das classes de conjugação de G é parametrizado por $T/W(T,G)$.*

Corolário 3.38. *Seja T um toro maximal do grupo de Lie compacto e conexo G. Sejam também $x, y \in T$ dois elementos que estão na mesma classe de conjugação de G. Então, existe $w \in W(\Pi)$ tal que*

$$\xi_\alpha(x) = \xi_{w(\alpha)}(y)$$

para toda raiz $\alpha \in \Pi$. Em outras palavras, os autovalores de $\mathrm{Ad}(x)$ são obtidos através de uma permutação dos autovalores de $\mathrm{Ad}(y)$ e esta permutação é dada por um elemento do grupo de Weyl de Π.

Demonstração. Pela Proposição 3.36, existe $z \in N_G(T)$ tal que $x = zyz^{-1}$. Seja $w := \phi(z^{-1}T)$. Na demonstração do Teorema 3.35, provamos que se $E_\alpha \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha$ então $\mathrm{Ad}(z^{-1})E_\alpha \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{w(\alpha)}$. Logo,

$$\begin{aligned} \xi_\alpha(x)E_\alpha &= \xi_\alpha(zyz^{-1})E_\alpha = \mathrm{Ad}(z)\mathrm{Ad}(y)\mathrm{Ad}(z^{-1})E_\alpha \\ &= \mathrm{Ad}(z)\xi_{w(\alpha)}(y)\mathrm{Ad}(z^{-1})E_\alpha = \xi_{w(\alpha)}(y)E_\alpha. \quad \square \end{aligned}$$

Como vimos no Capítulo 2, os caracteres de uma representação de G a determinam a menos de isomorfismo. Portanto, para se conhecer as representações de G, torna-se necessário fazer um estudo cuidadoso dos seus caracteres e, conseqüentemente, pelo Teorema de Peter & Weyl, das suas funções de classes. Neste sentido, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.39. *A restrição de uma função de classes contínua $F : G \to \mathbb{C}$ a um toro maximal T é constante nas órbitas de τ. Reciprocamente, toda função contínua $f : T \to \mathbb{C}$ que é constante nas órbitas de τ estende-se a uma função de classes contínua $F : G \to \mathbb{C}$.*

Demonstração. A primeira parte é conseqüência imediata do Corolário 3.37. Para a recíproca, definimos $F : G \to \mathbb{C}$ da seguinte maneira: dado $x \in G$, seja $y \in G$ tal que $yxy^{-1} \in T$ e façamos $F(x) := f(yxy^{-1})$. A Proposição 3.36 garante que F está bem-definida e que é de classes. Falta verificar a continuidade de F. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de pontos de G que converge para $x \in G$ e provemos que $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $F(x)$. Tomemos $(F(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ uma subseqüência qualquer de $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Vamos provar que $(F(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ admite uma subseqüência que converge para $F(x)$. Um resultado básico de Topologia Geral garante, então, que $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $F(x)$. Sejam $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ seqüências em G e T, respectivamente, tais que $x_{n_k} = y_k z_k y_k^{-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como G e T são compactos, então podemos escolher subseqüências $(y_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ e $(z_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ que convergem para $y \in G$ e $z \in T$, respectivamente. Então, $x = yzy^{-1}$ e

$$\lim_{l\to\infty} F(x_{n_{k_l}}) = \lim_{l\to\infty} f(z_{k_l}) = f(z) = F(x). \quad \square$$

3.5 O Grupo Fundamental

O grupo fundamental de um grupo de Lie é umas das estruturas mais importantes associadas a ele. Seu estudo fornece informações importantes sobre a geometria do grupo de Lie, recobrimentos, representações, propriedades dos seus espaços homogêneos, entre outras. Nosso objetivo nesta seção é analisar dois resultados particularmente importantes acerca da estrutura do grupo fundamental de um grupo de Lie compacto.

Proposição 3.40. *O grupo fundamental de um grupo topológico conexo por caminhos é abeliano.*

Demonstração. Primeiramente, consideremos γ um laço em G baseado em 1. Definimos duas novas curvas $\widetilde{\gamma}, \widehat{\gamma} : [0,1] \to G$ da seguite maneira:

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}(t) &:= \begin{cases} 1 & , \quad \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1) & , \quad \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ \widehat{\gamma}(t) &:= \begin{cases} \gamma(2t) & , \quad \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & , \quad \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} . \end{aligned}$$

Claramente, ambas $\widetilde{\gamma}$ e $\widehat{\gamma}$ são fechadas, contínuas e $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{\gamma}(1) = \widehat{\gamma}(0) = \widehat{\gamma}(1) = 1$.

Afirmação: $\widetilde{\gamma}$ e $\widehat{\gamma}$ são equivalentes a γ por um par de homotopias que fixam o elemento neutro de G. Em particular, $\widetilde{\gamma}$ e $\widehat{\gamma}$ são homotópicas.

De fato, sejam $\widetilde{H}, \widehat{H} : [0,1] \times [0,1] \to G$ definidas por

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(t,s) &:= \begin{cases} 1 & , \quad \text{se } t \in [0, \frac{s}{2}] \\ \gamma\left(\frac{2t-s}{2-s}\right) & , \quad \text{se } t \in [\frac{s}{2}, 1] \end{cases} \\ \widehat{H}(t,s) &:= \begin{cases} \gamma\left(\frac{2t}{2-s}\right) & , \quad \text{se } t \in [0, \frac{2-s}{2}] \\ 1 & , \quad \text{se } t \in [\frac{2-s}{2}, 1] \end{cases} . \end{aligned}$$

É imediato que $\widetilde{H}, \widehat{H}$ são contínuas, e uma após uma rápida inspeção nestas duas definições vemos que

$$\widetilde{H}(t,0) = \widehat{H}(t,0) = \gamma(t), \ \widetilde{H}(t,1) = \widetilde{\gamma}(t), \ \widehat{H}(t,1) = \widehat{\gamma}(t),$$
$$\widetilde{H}(0,s) = \widetilde{H}(1,s) = \widehat{H}(0,s) = \widehat{H}(1,s) = 1.$$

Para ver que $\pi_1(G;1)$ é abeliano, tomemos γ_1, γ_2 dois laços baseados em 1. Consideremos também os laços $\widetilde{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \widehat{\gamma}_2$ como definidos acima. Então,

$$\widehat{\gamma}_1(t)\widetilde{\gamma}_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & , \quad \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & , \quad \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

e

$$\widetilde{\gamma}_1(t)\widehat{\gamma}_2(t) = \begin{cases} \gamma_2(2t) & , \quad \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_1(2t-1) & , \quad \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Denotando por $*$ a operação de concatenação de curvas, as relações acima implicam que $\widehat{\gamma}_1\widetilde{\gamma}_2$ é homotópico a $\gamma_1 * \gamma_2$ e $\widetilde{\gamma}_1\widehat{\gamma}_2$, a $\gamma_2 * \gamma_1$. Por outro lado, não é difícil de ver que $\widehat{\gamma}_1\widetilde{\gamma}_2$ é homotópico a $\widetilde{\gamma}_1\widehat{\gamma}_2$. (Sendo H_1 uma homotopia que deforma $\widehat{\gamma}_1$ em $\widetilde{\gamma}_1$ e H_2 uma que deforma $\widetilde{\gamma}_2$ em $\widehat{\gamma}_2$, o produto pontual $H_1 H_2$ é uma homotopia que deforma $\widehat{\gamma}_1\widetilde{\gamma}_2$ em $\widetilde{\gamma}_1\widehat{\gamma}_2$.) Portanto, $\gamma_1 * \gamma_2$ e $\gamma_2 * \gamma_1$ são laços homotópicos. □

Teorema 3.41. *O grupo fundamental de um grupo de Lie compacto e conexo é abeliano finitamente gerado.*

Antes da demonstração do Teorema 3.41, algumas observações. Sejam G um grupo de Lie conexo e $\widetilde{G}$ o seu recobrimento universal. Pela teoria geral dos grupos de Lie, a aplicação de recobrimento $p : \widetilde{G} \to G$ é um homomorfismo e o seu núcleo, que denotaremos por D, é um subgrupo discreto e central de $\widetilde{G}$. Dado um ponto qualquer de G, digamos o elemento neutro 1, o grupo D age livremente e transitivamente sobre $p^{-1}(1)$ por translações à direita. Logo, por um resultado geral da teoria dos espaços de recobrimento, $D \cong \pi_1(G;1)$. Isto significa que, na demonstração do Teorema 3.41, podemos substituir $\pi_1(G,1)$ por D.

Lema 3.42. *Sejam G um grupo de Lie compacto e conexo, $\widetilde{G}$ o seu recobrimento universal e $D \subseteq \widetilde{G}$ o núcleo do homomorfismo de recobrimento. Então, existe um aberto pré-compacto $U \subseteq \widetilde{G}$ tal que $\widetilde{G} = UD$. Além disso, U pode ser escolhido de modo que $\widetilde{1} \in U$ e $U^{-1} = U$.*[4]

[4]Para distinguir os elementos neutros de G e $\widetilde{G}$, denotaremos o do último por $\widetilde{1}$.

Demonstração. Para cada $x \in G$, seja $N_x \subseteq G$ uma vizinhança distinguida de x com respeito a p. Com isto queremos dizer que N_x é aberta, conexa e a restrição de p a cada componente conexa de $p^{-1}(N_x)$ é um homeomorfismo entre esta componente e N_x. Fixemos M_x uma componente conexa qualquer de $p^{-1}(N_x)$. Para cada $x \in G$, seja também N'_x uma vizinhança aberta e conexa de x tal que $\overline{N'_x} \subseteq N_x$, e façamos $M'_x = (p|_{M_x})^{-1}(N'_x)$.

Como G é compacto, existem $x_1, \ldots, x_n \in G$ tais que $G = N'_{x_1} \cup \cdots \cup N'_{x_n}$. Tomemos $U := M'_{x_1} \cup \cdots \cup M'_{x_n} \subseteq \widetilde{G}$. Claramente, U é um subconjunto aberto de $\widetilde{G}$, e provaremos que U satisfaz as condições do enunciado.

Primeiramente, como $\overline{N'_x} \subseteq N_x$ é compacto, então $M''_x := (p|_{M_x})^{-1}(\overline{N'_x})$ é um compacto que contém M'_x. Logo, $M''_{x_1} \cup \cdots \cup M''_{x_n} \subseteq \widetilde{G}$ é um compacto que contém U, e portanto $\overline{U}$ é compacto. Segundamente, dado $\widetilde{x} \in \widetilde{G}$, seja $x := p(\widetilde{x}) \in G$ e escolhamos $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in N'_{x_i}$. Como D age transitivamente sobre $p^{-1}(x)$ por translações à direita, existe $z \in D$ tal que $\widetilde{x}z \in M'_{x_i} \cap p^{-1}(x) \subseteq U$. Portanto, $\widetilde{x} \in Uz^{-1} \subseteq UD$ e concluimos que $\widetilde{G} = UD$. Caso U não contenha $\widetilde{1}$ ou não seja simétrica, basta unir a U o conjunto U^{-1} (que também é aberto e pré-compacto) e uma vizinhança aberta, pré-compacta e simétrica de $\widetilde{1}$. □

Demonstração do Teorema 3.41. Seja U um aberto de $\widetilde{G}$ como no Lema 3.42 e façamos $K := \overline{U}$. A igualdade $\widetilde{G} = UD$ implica que $\{Uz : z \in D\}$ é uma cobertura de $\widetilde{G}$ por abertos, e uma vez que KK^{-1} é compacto existem $z_1, \ldots, z_n \in D$ tais que $KK^{-1} \subseteq Uz_1 \cup \cdots \cup Uz_n$. Seja D_1 o subgrupo de D gerado por $\{z_1, \ldots, z_n\}$. Claramente, D_1 é um subgrupo discreto e central de $\widetilde{G}$.

Afirmamos que, para provar o Teorema, é suficiente mostrar que $\widetilde{G} = KD_1$. De fato, se isto for verdade podemos escrever, para cada $z \in D$, $z = kz'$, com $k \in K$ e $z' \in D_1$. Como $D_1 \subseteq D$, então $k = zz'^{-1} \in K \cap D$, isto é, $z \in (K \cap D)D_1$. Isto significa que $D = (K \cap D)D_1$, ou seja, que D é gerado pelo conjunto $\{kz_i : k \in K,\ i = 1, \ldots, n\}$, que é finito uma vez que $K \cap D$ é um subconjunto fechado e discreto de K.

Seja $q : \widetilde{G} \to \widetilde{G}/D_1$ o homomorfismo canônico, que também é uma aplicação de recobrimento. Como $KD_1 = q^{-1}(q(K))$, então para provar que $\widetilde{G} = KD_1$ é suficiente mostrar que $q(K) = \widetilde{G}/D_1$. Primeiramente, observamos que $q(K)$ contém o neutro de $\widetilde{G}/D_1$ pois $\widetilde{1} \in U \subseteq K$. Além disso,

$$q(K)q(K)^{-1} = q(KK^{-1}) \subseteq q(z_1U) \cup \cdots \cup q(z_nU) = q(U) \subseteq q(K).$$

Logo, $q(K)$ é um subgrupo de $\widetilde{G}/D_1$. Segundamente, como q é uma aplicação aberta e o interior de K é não-vazio, então $q(K)$ é um subgrupo de $\widetilde{G}/D_1$ de interior não-vazio. Sendo $\widetilde{G}/D_1$ conexo, obtemos $q(K) = \widetilde{G}/D_1$. □

Parte II

O Teorema de Weyl

Capítulo 4

A Geometria de um Grupo de Lie Compacto

4.1 Métricas Riemannianas Invariantes

Seja G um grupo de Lie. Uma métrica riemanniana g em G é **invariante à direita** se $(R_x)^*g = g$ para todo $x \in G$, e **invariante à esquerda** se $(L_x)^*g = g$ para todo $x \in G$. Se g satisfaz ambas as condições, dizemos que g é **bi-invariante**. Equivalentemente, g é invariante à direita quando as translações à direita $R_x : y \mapsto yx$ são isometrias com respeito a g, e invariante à esquerda quando as translações à esquerda $L_x : y \mapsto xy$ são isometrias. Se g é bi-invariante, então as conjugações $C_x : y \mapsto xyx^{-1}$ também são isometrias g. Neste seção, nos preocuparemos em encontrar condições para que G admita uma métrica riemanniana bi-invariante e analisaremos a influência de uma tal métrica na estrutura do grupo.

Proposição 4.1. *Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie dos campos vetoriais invariantes à esquerda sobre G. Então, para cada produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ em $\mathfrak{g}$ existe uma única métrica riemanniana g sobre G que é invariante à esquerda e que satisfaz $g(X,Y) = \langle X,Y\rangle$ para todos $X,Y \in \mathfrak{g}$. Reciprocamente, toda métrica riemanniana invariante à esquerda g em G define um produto interno em $\mathfrak{g}$ pela equação $\langle X,Y\rangle = g(X,Y)$.*

Demonstração. Seja $\langle\ ,\ \rangle$ um produto interno em $\mathfrak{g}$ e provemos que existe uma única métrica riemanniana em G que possui as propriedades descritas no enunciado. Para a unicidade, sejam g_1 e g_2 métricas riemannianas invariantes à esquerda em G tais que $g_1(X,Y) = g_2(X,Y) = \langle X,Y\rangle$ para todos $X,Y \in \mathfrak{g}$. Para cada $x \in G$ e $u,v \in T_xG$, sejam $U,V \in \mathfrak{g}$ tais que $U_x = u$ e $V_x = v$.[1] Então,

$$(g_1)_x(u,v) = (g_1)_x(U_x,V_x) = (g_1(U,V))(x) = \langle U,V\rangle \tag{4.1}$$

[1] Para ver que U e V existem, basta definí-los por $U_y = (L_{yx^{-1}})_*u$ e $V_y = (L_{yx^{-1}})_*v$ para todo $y \in G$. Além disso, como o valor de um campo invariante num ponto caracteriza o campo, vemos que U e V são únicos.

e analogamente $(g_2)_x(u,v) = \langle U, V\rangle$. Logo, $(g_1)_x(u,v) = (g_2)_x(u,v)$. Como x, u, v são quaisquer, então $g_1 = g_2$.

Agora, provemos a existência. Motivados por (4.1), definimos g por

$$g_x(u,v) = \langle U, V\rangle,$$

em que $x \in G$, $u, v \in T_xG$ e $U, V \in \mathfrak{g}$ satisfazem $U_x = u$ e $V_x = v$. Está claro que g_x é um produto interno em T_xG para todo $x \in G$ e que $g(X,Y) = \langle X, Y\rangle$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Ainda precisamos verificar que g é diferenciável e invariante à esquerda. Seja $(E_1, \ldots, E_n)$ uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\langle\ ,\ \rangle$. Então, $(E_1, \ldots, E_n)$ é um referencial móvel de G e, dados índices $i, j = 1, \ldots, n$, temos que $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$, e portanto g é diferenciável. Para ver que g é invariante à esquerda de g, tomemos $x, y \in G$, $u, v \in T_yG$ e $U, V \in \mathfrak{g}$ tais que $U_y = u$ e $V_y = v$. Então,

$$\begin{aligned}
((L_x)^*g)_y(u,v) &= g_{xy}((L_x)_*u, (L_x)_*v) \\
&= g_{xy}((L_x)_*U_y, (L_x)_*V_y) \\
&= g_{xy}(U_{xy}, V_{xy}) = \langle U, V\rangle \\
&= g_y(u,v).
\end{aligned}$$

Como y, u, v são quaisquer, então $(L_x)^*g = g$ e $\mathfrak{g}$ é invariante à esquerda.

Agora, seja g uma métrica riemanniana invariante à esquerda em G e definamos

$$\langle X, Y\rangle = g_1(X_1, Y_1), \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Como a aplicação $X \in \mathfrak{g} \mapsto X_1 \in T_1G$ é um isomorfismo linear, então $\langle\ ,\ \rangle$ é um produto interno em $\mathfrak{g}$. Além disso, se $X, Y \in \mathfrak{g}$, então

$$g(X,Y)(x) = g_x(X_x, Y_x) = ((L_x)_*g)_1(X_1, Y_1) = g_1(X_1, Y_1) = \langle X, Y\rangle$$

para todo $x \in G$, e portanto $g(X,Y) = \langle X, Y\rangle$. $\square$

Substituindo $\mathfrak{g}$ pela álgebra de Lie dos campos invariantes à direita sobre G, podemos reformular a Proposição 4.1 e obter um resultado similar sobre as métricas riemannianas invariantes à direita em G. O leitor é convidado a preencher os detalhes. Em particular, todo grupo de Lie admite métricas riemannianas invariantes à esquerda e métricas riemannianas invariantes à direita. Isto significa que o estudo das métricas riemannianas invariantes à esquerda ou à direita separadamente oferece poucas informações sobre as peculiaridades deste ou aquele grupo de Lie. No entanto, ao considerarmos métricas riemannianas bi-invariantes, a situação muda completamente.

Teorema 4.2. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\langle\ ,\ \rangle$ um produto interno em $\mathfrak{g}$ que determina a métrica riemanniana invariante à esquerda g sobre G. Então, g é bi-invariante se, e somente se, $\langle\ ,\ \rangle$ é invariante pela representação adjunta de G.*

Demonstração. Se g é bi-invariante, então dados $x \in G$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$ temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{Ad}(x)X, \mathrm{Ad}(x)Y \rangle &= \langle (L_x)_*(R_{x^{-1}})_*X, (L_x)_*(R_{x^{-1}})_*Y \rangle \\
&= g_1\big((L_x)_*(R_{x^{-1}})_*X_1, (L_x)_*(R_{x^{-1}})_*Y_1\big) \\
&= \big((L_x)^*(R_{x^{-1}})^*g\big)_1(X_1, Y_1) \\
&= g_1(X_1, Y_1) = \langle X, Y \rangle.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que $\langle\ ,\ \rangle$ é invariante por Ad e provemos que g é invariante à direita. Dados $x, y \in G$ e $u, v \in T_yG$, sejam $U, V \in \mathfrak{g}$ tais que $U_y = u$ e $V_y = v$. Então,

$$\begin{aligned}
((R_x)^*g)_y(u, v) &= g_{yx}((R_x)_*U_y, (R_x)_*V_y) = g_{yx}\big(((R_x)_*U)_{yx}, ((R_x)_*V)_{yx}\big) \\
&= \langle (R_x)_*U, (R_x)_*V \rangle = \langle (R_x)_*(L_{x^{-1}})_*U, (R_x)_*(L_{x^{-1}})_*V \rangle \\
&= \langle \mathrm{Ad}(x^{-1})U, \mathrm{Ad}(x^{-1})V \rangle = \langle U, V \rangle \\
&= g_y(u, v).
\end{aligned}$$

Como y, u, v são quaisquer, então $(R_x)^*g = g$, e portanto g é bi-invariante. □

Corolário 4.3. *Se G é um grupo de Lie compacto, então G admite uma métrica riemanniana bi-invariante.*

Demonstração. Como G é compacto, então a representação adjunta de G é unitária pela Proposição 2.4. □

Corolário 4.4. *Se g é uma métrica riemanniana bi-invariante em um grupo de Lie G, então o produto interno de $\mathfrak{g}$ associado a g é invariante pela representação adjunta de $\mathfrak{g}$. Em particular, se um grupo de Lie admite uma métrica riemanniana bi-invariante, então a sua álgebra de Lie é compacta.*

Demonstração. Seja $\langle\ ,\ \rangle$ o produto interno em $\mathfrak{g}$ associado à metrica riemanniana bi-invariante de G. Como $\langle\ ,\ \rangle$ é invariante por $\mathrm{Ad}(G)$ pelo Teorema 4.2, então $\langle\ ,\ \rangle$ é invariante por $\mathrm{Ad}(G)_0 = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, e o cálculo apresentado na demonstração da Proposição 3.4 mostra que $\langle\ ,\ \rangle$ é invariante pela representação adjunta de $\mathfrak{g}$. □

Corolário 4.5. *Seja G um grupo de Lie conexo cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite um produto interno invariante $\langle\ ,\ \rangle$. Então, a métrica riemanniana de G associada a $\langle\ ,\ \rangle$ é bi-invariante.*

Demonstração. Pelo argumento apresentado na demonstração do Corolário 3.9, $\langle\ ,\ \rangle$ é invariante pela representação canônica de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ em $\mathfrak{g}$. Por outro lado, como G é conexo, então $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ad}(G)$, e portanto $\langle\ ,\ \rangle$ é invariante pela representação adjunta de G. Com isso, a métrica riemanniana em G associada a $\langle\ ,\ \rangle$ é bi-invariante pelo Teorema 4.2. □

4.2 Curvatura

Nesta seção, consideramos um grupo de Lie G munido de uma métrica riemanniana bi-invariante g. Nosso objetivo é descrever as grandezas geométricas normalmente associadas a uma métrica riemanniana, tais como a conexão de Levi-Civita e as diferentes noções de curvatura.

Como vimos na seção anterior, g determina, de maneira única, um produto interno na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dos campos vetoriais invariantes à esquerda de G, que denotamos por $\langle\ ,\ \rangle$. Vale a relação

$$g(X,Y) = \langle X,Y\rangle, \quad \text{para todos} \ \ X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Em particular, se Z é um campo vetorial qualquer em G, então

$$Zg(X,Y) = 0, \quad \text{para todos} \ \ X,Y \in \mathfrak{g}. \tag{4.2}$$

O produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ também satisfaz

$$\langle [X,Y],Z\rangle = \langle X,[Y,Z]\rangle, \quad \text{para todos} \ \ X,Y,Z \in \mathfrak{g} \tag{4.3}$$

pelo Corolário 4.4. Lembramos ainda o seguinte fato básico da Geometria Riemanniana: se M é uma variedade riemanniana com métrica g, ∇ é a conexão de Levi-Civita de M com respeito a g e X,Y,Z são campos vetoriais diferenciáveis sobre M, então

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) \ &= \ \frac{1}{2}\big\{Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - \\ &\quad - g(Y,[X,Z]) - g(Z,[Y,X]) + g(X,[Z,Y])\big\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Esta relação é conseqüência da compatibilidade de ∇ com g e da simetria de ∇. (Ver (LEE, 1997), p.69.)

Proposição 4.6. *Seja ∇ a conexão de Levi-Civita de G com respeito a g. Então,*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y], \quad \textit{para todos} \ \ X,Y \in \mathfrak{g}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(E_1,\ldots,E_n)$ uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\langle\ ,\ \rangle$. Então, $(E_1,\ldots,E_n)$ é um referencial móvel em G ortonormal com respeito a g. Para cada $i,j = 1,\ldots,n$, escrevamos

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k E_k,$$

em que $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(G)$ são os símbolos de Christoffel de ∇ com respeito a $(E_1,\ldots,E_n)$. Por (4.2), (4.3) e (4.4), temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k \ &= \ g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) \\ &= \ \frac{1}{2}\big(E_i\langle E_j,E_k\rangle + E_j\langle E_k,E_i\rangle - E_k\langle E_i,E_j\rangle - \\ &\quad - \langle E_j,[E_i,E_k]\rangle - \langle E_k,[E_j,E_i]\rangle + \langle E_i,[E_k,E_j]\rangle\big) \\ &= \ \frac{1}{2}\langle [E_i,E_j],E_k\rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla_{E_i} E_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \langle [E_i, E_j], E_k \rangle E_k = \frac{1}{2} [E_i, E_j],$$

e o resultado segue da $\mathbb{R}$-bilinearidade de ∇. □

Corolário 4.7. *As geodésicas de G com respeito a ∇ são exatamente as curvas integrais dos campos invariantes à esquerda. Em particular, todo grupo de Lie munido de uma métrica riemanniana bi-invariante é uma variedade riemanniana completa.*

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{g}$ e tomemos $\gamma : \mathbb{R} \to G$ uma curva integral de X. Como $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então

$$D_t(\dot{\gamma}(t)) = D_t(X_{\gamma(t)}) = (\nabla_X X)_{\gamma(t)} = \frac{1}{2}[X, X]_{\gamma(t)} = 0,$$

em que D_t denota o operador de derivação covariante sobre γ induzido por ∇. Logo, γ é uma geodésica. Reciprocamente, se γ é uma geodésica em G com respeito a ∇, seja $u = \dot{\gamma}(0)$ e tomemos $U \in \mathfrak{g}$ tal que $U_{\gamma(0)} = u$. Se σ é a curva integral de U tal que $\sigma(0) = \gamma(0)$, então, pelo que provamos anteriormente, σ é uma geodésica que satisfaz $\dot{\sigma}(0) = \dot{\gamma}(0)$. Uma vez que qualquer geodésica é determina pelas suas condições iniciais, temos $\gamma = \sigma$. □

Seja R o endomorfismo de curvatura de G com respeito a g, definido por

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

para X, Y, Z campos vetoriais diferenciáveis sobre G. Pela Proposição 4.6, temos para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \frac{1}{4}[X, [Y, Z]] - \frac{1}{4}[Y, [X, Z]] - \frac{1}{2}[[X, Y], Z] \\ &= -\frac{1}{4}\big([[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X]\big) - \frac{1}{4}[[X, Y], Z] \\ &= -\frac{1}{4}[[X, Y], Z]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Em particular, $R(X, Y)Z \in \mathfrak{g}$ sempre que $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Seja Rm o tensor de curvatura de G com respeito a g, definido por

$$Rm(X, Y, Z, W) := g(R(X, Y)Z, W)$$

para X, Y, Z, W campos vetoriais diferenciáveis sobre G. Então, para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{g}$ temos

$$\begin{aligned} Rm(X, Y, Z, W) &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\frac{1}{4}\langle [[X, Y], Z], W \rangle \\ &= -\frac{1}{4}\langle [X, Y], [Z, W] \rangle. \end{aligned}$$

Por fim, denotemos por K a curvatura seccional de G com respeito a g, definida por

$$K_x(u,v) := \frac{Rm(U,V,V,U)_x}{g_x(u,u)g_x(v,v) - g_x(u,v)^2},$$

em que $x \in G$, $u, v \in T_xG$ são linearmente independentes e U, V são campos vetoriais diferenciáveis sobre G tais que $U_x = u$ e $V_x = v$. Claramente, podemos escolher U, V em $\mathfrak{g}$, de modo que

$$K_x(u,v) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\langle [U,V],[V,U]\rangle}{||U||^2||V||^2 - \langle U,V\rangle^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{||[U,V]||^2}{||U||^2||V||^2 - \langle U,V\rangle^2}.$$

Isto significa que as curvaturas seccionais de G não dependem do ponto escolhido, apenas dos campos vetoriais invariantes à esquerda. Com isso, podemos denotar $K_x(u,v)$ por $K(U,V)$. Supondo, adicionalmente, que $\{U,V\}$ é ortonormal, temos

$$K(U,V) = \frac{1}{4}||[U,V]||^2.$$

As relações acima também nos permitem calcular a curvatura de Ricci de G em termos do colchete de Lie de $\mathfrak{g}$. Lembramos que, dados $x \in G$ e $u, v \in T_xG$, definimos $Rc_x(u,v)$ como sendo o traço da aplicação linear $T : T_xG \to T_xG$, $T(w) = [R(W,U)V]_x$, em que U, V, W são campos vetoriais diferenciáveis sobre G tais que $U_x = u, V_x = v, W_x = w$. Uma vez que podemos tomar esses campos em $\mathfrak{g}$, então por (4.5) temos

$$T(w) = -\frac{1}{4}[[W,U],V]_x.$$

Escolhendo uma base ortonormal $(E_1, \ldots, E_n)$ de $\mathfrak{g}$, então $((E_1)_x, \ldots, (E_n)_x)$ é uma base ortonormal de T_xG, de modo que

$$\begin{aligned} Rc_x(u,v) &= \sum_{i=1}^n g_x(T(E_i)_x, (E_i)_x) = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \langle [[E_i,U],V], E_i\rangle \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \langle [U,E_i],[V,E_i]\rangle. \end{aligned}$$

Uma vez que esta expressão não depende de x, podemos definir Rc para elementos de $\mathfrak{g}$:

$$Rc(X,Y) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \langle [X,E_i],[Y,E_i]\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{4.6}$$

A aplicação $Rc : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ assim definida é bilinear e simétrica, e a forma quadrática associada é dada por

$$Rc(X,X) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n ||[X,E_i]||^2 \geq 0, \quad X \in \mathfrak{g}. \tag{4.7}$$

4.3 A Primeira Demonstração

A seguir provamos o Teorema de Weyl utilizando as ferramentas geométricas desenvolvidas previamente neste capítulo. Antes, lembramos o seguinte resultado geral de Geometria Riemanniana:

Teorema 4.8 (Teorema de Myers)**.** *Seja M uma variedade riemanniana com métrica g, conexa, completa e com $\dim M \geq 2$. Suponhamos que existe um número real $R > 0$ tal que*

$$Rc(u,u) \geq \frac{\dim M - 1}{R^2}\, g(u,u)$$

para todo $u \in TM$. Então, M é compacta, seu grupo fundamental é finito e seu diâmetro não ultrapassa πR.

Demonstração. Ver (LEE, 1997), pp. 201-202. □

Corolário 4.9. *Seja G um grupo de Lie conexo que admite uma métrica riemanniana bi-invariante g e cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semi-simples. Então, G é compacto e seu grupo fundamental é finito.*

Demonstração. Uma vez que a métrica bi-invariante de G o torna uma variedade riemanniana completa pelo Corolário 4.7, é suficiente provar que existe $K > 0$ tal que

$$Rc(u,u) \geq K$$

para todo $u \in TM$ com $g(u,u) = 1$. De fato, neste caso o número real $R := \sqrt{\frac{\dim G - 1}{K}}$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Myers. (Lembrando que $\dim G \geq 3$ pois $\mathfrak{g}$ é semi-simples.) Agora, como g é bi-invariante, então a curvatura de Ricci depende apenas dos campos invariantes $X \in \mathfrak{g}$, e deste modo precisamos apenas provar que existe $K > 0$ tal que $Rc(X,X) \geq K$ para $X \in \mathfrak{g}$ satisfazendo $||X|| = 1$.

Seja $\mathbb{S} := \{X \in \mathfrak{g} : ||X|| = 1\}$ a esfera unitária. Como $f : X \in \mathfrak{g} \mapsto Rc(X,X)$ é uma forma quadrática, então f é contínua, e o fato de $\mathbb{S}$ ser compacto implica que $f|_{\mathbb{S}}$ admite um valor mínimo. Tomemos $X_0 \in \mathbb{S}$ um ponto de mínimo de $f|_{\mathbb{S}}$ e façamos $K := f(X_0) = Rc(X_0, X_0)$. Para provar que $K > 0$, suponhamos, por absurdo, que $K \leq 0$. Dada uma base ortonormal $(E_1, \ldots, E_n)$ de $\mathfrak{g}$, por (4.7) temos

$$\sum_{i=1}^{n} ||[X_0, E_i]||^2 \leq 0 \;\Rightarrow\; [X_0, E_i] = 0, \text{ para todo } i = 1, \ldots, n,$$

o que significa que $X_0 \in Z_{\mathfrak{g}}$. Como $X_0 \in \mathbb{S}$, então $X_0 \neq 0$, o que contradiz o fato de $\mathfrak{g}$ ser semi-simples. Portanto, $K > 0$. □

Vale observar que, na demonstração do Corolário 4.9, podemos substituir a hipótese de semi-simplicidade de $\mathfrak{g}$ por $Z_{\mathfrak{g}} = \{0\}$. No entanto, a existência de uma métrica riemanniana bi-invariante em G implica que $\mathfrak{g}$ é compacta, e portanto redutível. Neste caso, a condição $Z_{\mathfrak{g}} = \{0\}$ é equivalente a $\mathfrak{g}$ ser semi-simples.

Corolário 4.10 (Teorema de Weyl)**.** *Se G é um grupo de Lie compacto e conexo cuja álgebra de Lie é semi-simples, então seu grupo fundamental é finito. Em particular, o recobrimento universal de G é compacto.*

Demonstração. A compacidade de G garante que G admite uma métrica riemanniana bi-invariante, e a semi-simplicidade de $\mathfrak{g}$ implica, pelo Corolário 4.9, que o grupo fundamental de G é finito. $\square$

Outra conclusão que obtemos a partir do Corolário 4.9 é que se G é um grupo de Lie conexo e não-compacto cuja álgebra de Lie é semi-simples então G não admite uma métrica riemanniana bi-invariante. Em particular, $SL(n, \mathbb{R})$ não admite uma tal métrica para $n \geq 2$ e, conseqüentemente, $GL(n, \mathbb{R})$ também não.

Capítulo 5

Extensões de Homomorfismos

Este capítulo é dedicado a uma demonstração essencialmente analítica do Teorema de Weyl, envolvendo extensões de homomorfismos. As ferramentas básicas para este capítulo são os resultados sobre medidas de Haar apresentados no Capítulo 1.

5.1 A Segunda Demonstração

Seja G um grupo de Lie compacto e conexo. Como provamos no Teorema 3.41, o grupo fundamental de G é abeliano e finitamente gerado. Logo, pelo Teorema Fundamental sobre grupos abelianos finitamente gerados, $\pi_1(G)$ é isomorfo a um grupo da forma $A \times \mathbb{Z}^n$, em que A é um grupo abeliano finito e $n \geq 0$ é um número natural. A componente A neste produto direto é chamada de **parte de torção** e $\mathbb{Z}^n$, de **parte livre**. Para provar o Teorema de Weyl, precisamos mostrar que a parte livre de $\pi_1(G)$ é trivial.

Lema 5.1. *Seja D um grupo abeliano finitamente gerado. Então, D é finito se, e somente se, o único homomorfismo de D no grupo multiplicativo dos números reais positivos é o trivial.*

Demonstração. Denotemos por $\mathbb{R}_+$ o grupo multiplicativo dos números reais positivos, e seja $\varphi : D \to \mathbb{R}_+$ um homomorfismo. Se existe algum número real x dentro da imagem de φ distinto de 1, então $\{x^k : k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto infinito contido em $\varphi(D)$, e neste caso D não pode ser finito. Logo, se D é finito, devemos ter $\varphi \equiv 1$. Reciprocamente, suponhamos que D é infinito e escrevamos $D \cong A \times \mathbb{Z}^n$, com A um grupo abeliano finito e $n \geq 1$ um número natural. Definimos $\varphi : A \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}_+$ por $\varphi(a, (k_1, \ldots, k_n)) = e^{k_1}$. Esta função claramente é um homomorfismo não-trivial de $A \times \mathbb{Z}^n$ em $\mathbb{R}_+$, e compondo-o com o isomorfismo entre $D \cong A \times \mathbb{Z}^n$ obtemos um homomorfismo não-trivial de D em $\mathbb{R}_+$. $\square$

Teorema 5.2. *Sejam G um grupo de Lie compacto e conexo, $\widetilde{G}$ o seu recobrimento universal, $p : \widetilde{G} \to G$ o homomorfismo de recobrimento e D o núcleo de p. (Lembramos* *que D é discreto e central.) Então, todo homomorfismo $\varphi : D \to \mathbb{R}_+$ estende-se a um homomorfismo contínuo $\Phi : \widetilde{G} \to \mathbb{R}_+$.*

Antes de provarmos o Teorema 5.2, vejamos como ele implica o Teorema de Weyl. Mantendo a notação fixada no enunciado do Teorema 5.2, suponhamos que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G é semi-simples. Para provar que $D \cong \pi_1(G)$ é finito, consideramos um homomorfismo $\varphi : D \to \mathbb{R}_+$ e mostremos que φ é trivial. Pelo Teorema 5.2, φ estende-se a um homomorfismo contínuo $\Phi : \widetilde{G} \to \mathbb{R}_+$. Como $\widetilde{G}$ e $\mathbb{R}_+$ são grupos de Lie, então Φ é diferenciável, e portanto Φ induz um homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$. Como $\mathfrak{g}$ é semi-simples e $\mathbb{R}$ é abeliana, então $\phi \equiv 0$, e portanto $\Phi \equiv 1$. Logo, $\varphi = \Phi|_D \equiv 1$.

Demonstração do Teorema 5.2. Fixemos um homomorfismo $\varphi : D \to \mathbb{R}_+$ e tomemos $K \subseteq \widetilde{G}$ um subconjunto compacto e simétrico tal que $\widetilde{G} = KD$ (Lema 3.42).

Afirmação 1: Existe uma função contínua $h : \widetilde{G} \to \mathbb{R}_+$ cuja restrição a D coincide com φ e tal que $h(\widetilde{x}z) = h(\widetilde{x})\varphi(z)$ para $\widetilde{x} \in \widetilde{G}$ e $z \in D$. Em particular, $h(\widetilde{1}) = 1$.

Para verificar esta afirmação, primeiramente consideramos $g : \widetilde{G} \to [0, +\infty)$ uma função contínua de suporte compacto tal que $g|_K \equiv 1$ (g existe pelo Lema de Urysohn), e definimos $h_1 : \widetilde{G} \to \mathbb{R}$ por

$$h_1(\widetilde{x}) = \sum_{z \in D} g(\widetilde{x}z)\varphi(z)^{-1}.$$

Dado $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{G}$, seja L uma vizinhança compacta de $\widetilde{x}_0$. Se $\widetilde{x} \in L$, então uma parcela $g(\widetilde{x}z)\varphi(z)^{-1}$ do somatório que define $h_1(\widetilde{x})$ é nula exceto quando $\widetilde{x}z \in \mathrm{supp}(g)$, isto é, quando $z \in \widetilde{x}^{-1}\mathrm{supp}(g) \subseteq L^{-1}\mathrm{supp}(g)$. Deste modo, para todo $\widetilde{x} \in L$ temos

$$h_1(\widetilde{x}) = \sum_{z \in D \cap [L^{-1}\mathrm{supp}(g)]} g(\widetilde{x}z)\varphi(z)^{-1}. \tag{5.1}$$

Como D é um subgrupo fechado e discreto de $\widetilde{G}$ e $L^{-1}\mathrm{supp}(g)$ é compacto, então $D \cap [L^{-1}\mathrm{supp}(g)]$ é finito e o somatório em (5.1) define uma função contínua numa vizinhança de $\widetilde{x}_0$. Como $\widetilde{x}_0$ é qualquer, então h_1 é contínua. Além disso, escrevendo $\widetilde{x}_0 = kz$, com $z \in D$ e $k \in K$, obtemos

$$h_1(\widetilde{x}_0) \geq g(\widetilde{x}_0 z^{-1})\varphi(z^{-1})^{-1} = g(k)\varphi(z) = \varphi(z) > 0,$$

e portanto $\mathrm{Im}(h_1) \subseteq \mathbb{R}^+$. Definimos, agora, $h(\widetilde{x}) := h_1(\widetilde{1})^{-1}h_1(\widetilde{x})$, $\widetilde{x} \in \widetilde{G}$. Se $\widetilde{x} \in \widetilde{G}$ e $z \in D$, então

$$\begin{aligned} h(\widetilde{x}z) &= h_1(\widetilde{1})^{-1} \sum_{z' \in D} g(\widetilde{x}zz')\varphi(z')^{-1} = h_1(\widetilde{1})^{-1} \sum_{z' \in D} g(\widetilde{x}z')\varphi(z^{-1}z')^{-1} \\ &= h_1(\widetilde{1})^{-1} \sum_{z' \in D} g(\widetilde{x}z')\varphi(z')^{-1}\varphi(z) = h(\widetilde{x})\varphi(z). \end{aligned}$$

Se $z \in D$, então

$$h(z) = h(\widetilde{1}z) = h(\widetilde{1})\varphi(z) = h_1(\widetilde{1})^{-1}h_1(\widetilde{1})\varphi(z) = \varphi(z),$$

e a afirmação está provada.

Consideremos a função $H : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \log h(\widetilde{x}\widetilde{y}) - \log h(\widetilde{x}) - \log h(\widetilde{y}).$$

Claramente H é contínua, e $h(\widetilde{1}) = 1$ implica que $H(\widetilde{1}, \widetilde{1}) = 0$.

Afirmação 2: A função H é constante em cada uma das classes laterais de $D \times D$ em $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$, de modo que $\overline{H} : G \times G \to \mathbb{R}$ definida por $\overline{H}(x, y) = H(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, com $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ e $\widetilde{y} \in p^{-1}(y)$, está bem-definida e é contínua. Além disso, $\overline{H}$ satisfaz

$$\overline{H}(xy, z) + \overline{H}(x, y) = \overline{H}(x, yz) + \overline{H}(y, z)$$

para todos $x, y, z \in G$.

Com efeito, sejam $\widetilde{x}, \widetilde{x}', \widetilde{y}, \widetilde{y}' \in \widetilde{G}$ e suponhamos que $p(\widetilde{x}) = p(\widetilde{x}')$ e $p(\widetilde{y}) = p(\widetilde{y}')$. Então, podemos escrever $\widetilde{x}' = \widetilde{x}z$ e $\widetilde{y}' = \widetilde{y}w$, com $z, w \in D$, de modo que

$$\begin{aligned}
H(\widetilde{x}', \widetilde{y}') &= \log h(\widetilde{x}'\widetilde{y}') - \log h(\widetilde{x}') - \log h(\widetilde{y}') \\
&= \log h(\widetilde{x}z\widetilde{y}w) - \log h(\widetilde{x}z) - \log h(\widetilde{y}w) \\
&= \log h(\widetilde{x}\widetilde{y}zw) - \log h(\widetilde{x}z) - \log h(\widetilde{y}w) \\
&= \log h(\widetilde{x}\widetilde{y})\varphi(zw) - \log h(\widetilde{x})\varphi(z) - \log h(\widetilde{y})\varphi(w) \\
&= [\log h(\widetilde{x}\widetilde{y}) - \log h(\widetilde{x}) - \log h(\widetilde{y})] + [\log \varphi(zw) - \log \varphi(z) - \log \varphi(w)] \\
&= H(\widetilde{x}, \widetilde{y}),
\end{aligned}$$

e isso prova a primeira parte da afirmação. (Na terceira igualdade usamos que D é central.) Para verificar a segunda parte, tomemos $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z} \in \widetilde{G}$. Então,

$$\begin{aligned}
H(\widetilde{x}\widetilde{y}, \widetilde{z}) + H(\widetilde{x}, \widetilde{y}) &= \log h(\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{z}) - \log h(\widetilde{x}\widetilde{y}) - \log h(\widetilde{z}) + \\
&\quad + \log h(\widetilde{x}\widetilde{y}) - \log h(\widetilde{x}) - \log h(\widetilde{y}) \\
&= \log h(\widetilde{x}\widetilde{y}\widetilde{z}) - \log h(\widetilde{x}) - \log h(\widetilde{y}\widetilde{z}) \\
&\quad + \log h(\widetilde{y}\widetilde{z}) - \log h(\widetilde{y}) - \log h(\widetilde{z}) \\
&= H(\widetilde{x}, \widetilde{y}\widetilde{z}) + H(\widetilde{y}, \widetilde{z}).
\end{aligned}$$

Com isso, a igualdade desejada decorre da definição de $\overline{H}$.

Definimos $a : G \to \mathbb{R}$ por

$$a(x) = -\int_G \overline{H}(x, y)dy.$$

Como $\overline{H}(1,1) = 0$, então $a(1) = 0$. Além disso, como $G \times G$ é um grupo compacto e $\overline{H}$ é contínua, então $\overline{H}$ é uniformemente contínua, e portanto a também é uniformemente contínua. Para ver isso, seja $\epsilon > 0$ e tomemos $U \subseteq G \times G$ uma vizinhança de $(1,1)$ tal que

$$(x,y),(z,w) \in G \;\text{ e }\; (z^{-1}x, w^{-1}y) \in U \Rightarrow |\overline{H}(x,y) - \overline{H}(z,w)| \leq \epsilon.$$

Se $V \subseteq G$ é uma vizinhança de 1 tal que $V \times V \subseteq U$ e $x, y \in G$ são tais que $y^{-1}x \in V$, então para todo $z \in G$ temos $(y^{-1}x, z^{-1}z) \in U$, de modo que

$$|a(x) - a(y)| \leq \int_G |\overline{H}(x,z) - \overline{H}(y,z)| dz \leq \epsilon.$$

Em particular, a é contínua. Além disso, a identidade que provamos na Afirmação 2 implica

$$\begin{aligned} a(xy) &= -\int_G \overline{H}(xy,z)dz \\ &= -\int_G [\overline{H}(x,yz) + \overline{H}(y,z) - \overline{H}(x,y)]dz \\ &= a(x) + a(y) + \overline{H}(x,y) \end{aligned}$$

para todos $x, y \in G$.

Por fim, definimos $\Phi : \widetilde{G} \to \mathbb{R}_+$ por $\Phi(\widetilde{x}) = h(\widetilde{x})e^{-a(p(\widetilde{x}))}$. Claramente, Φ é contínua. Como $a(1) = 0$, então $\Phi(z) = h(z)e^{-a(1)} = \varphi(z)$ para $z \in D$. Resta provar que Φ é um homomorfismo. De fato, sejam $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{G}$ e façamos $x := p(\widetilde{x})$, $y := p(\widetilde{y})$. Então,

$$\begin{aligned} \Phi(\widetilde{x}\widetilde{y}) &= h(\widetilde{x}\widetilde{y})e^{-a(xy)} = h(\widetilde{x}\widetilde{y})e^{-a(x)-a(y)-\overline{H}(x,y)} \\ &= h(\widetilde{x}\widetilde{y})e^{-H(\widetilde{x},\widetilde{y})}e^{-a(x)}e^{-a(y)} \\ &= h(\widetilde{x}\widetilde{y})e^{-\log h(\widetilde{x}\widetilde{y})+\log h(\widetilde{x})+\log h(\widetilde{y})}e^{-a(x)}e^{-a(y)} \\ &= h(\widetilde{x})h(\widetilde{y})e^{-a(x)}e^{-a(y)} \\ &= \Phi(\widetilde{x})\Phi(\widetilde{y}), \end{aligned}$$

concluindo a demonstração do Teorema. $\square$

Capítulo 6

Funcionais Inteiros

Neste capítulo, analisaremos uma demonstração do Teorema de Weyl que possui forte relação com a teoria de representações de grupos e álgebras de Lie.

6.1 Funcionais Inteiros

Sejam G um grupo de Lie compacto e conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $T \subseteq G$ um toro maximal e $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie. Também consideraremos Π o sistema de raízes de $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Como vimos na demonstração da Proposição 3.15, cada raiz $\alpha \in \Pi$ determina um homomorfismo contínuo $\xi_\alpha : T \to \mathbb{S}^1$ satisfazendo $\xi_\alpha(\exp(H)) = e^{\alpha(H)}$ para todo $H \in \mathfrak{t}$, isto é, α é a diferencial de ξ_α em 1. Um funcional linear $\lambda : \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ para o qual existe um homomorfismo contínuo $\xi_\lambda : T \to \mathbb{S}^1$ cuja diferencial em 1 coincide com λ é chamado de **analiticamente inteiro**. Está claro desta definição que λ só pode ser analiticamente inteiro se $\mathrm{Im}(\lambda) \subseteq i\mathbb{R}$. Com isso, podemos considerar os funcionais analiticamente inteiros como elementos de $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$.

O fato de um funcional linear $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$ ser analiticamente inteiro ou não depende apenas do toro maximal T. No entanto, como todos os toros maximais de G são conjugados, então a dependência é na verdade com relação a G. Deste modo, denotaremos o conjunto dos funcionais analiticamente inteiros de $\mathfrak{t}$ por $\mathrm{An}(G)$.

Lema 6.1. *$\mathrm{An}(G)$ é um $\mathbb{Z}$-submódulo de $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$.*

Demonstração. $\mathrm{An}(G) \neq \emptyset$ pois $\Pi \subseteq \mathrm{An}(G)$. Dados $\lambda, \sigma \in \mathrm{An}(G)$, para ver que $-\lambda, \lambda + \sigma \in \mathrm{An}(G)$ basta tomar $\xi_{-\lambda}(z) = \overline{\xi_\lambda(z)}$ e $\xi_{\lambda+\sigma}(z) = \xi_\lambda(z)\xi_\sigma(z)$. Como T e $\mathbb{S}^1$ são grupos abelianos, então $\xi_{-\lambda}$ e $\xi_{\lambda+\sigma}$ são homomorfismos (obviamente contínuos), e um cálculo direto mostra que $d(\xi_{-\lambda})_1 = -\lambda$ e $d(\xi_{\lambda+\sigma})_1 = \lambda + \sigma$. □

Vamos denotar por $[\Pi]$ o $\mathbb{Z}$-submódulo de $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$ gerado pelo sistema de raízes. Pelo Lema 6.1, temos $[\Pi] \subseteq \mathrm{An}(G)$. O seguinte resultado fornece um critério alternativo muito útil para determinar quando um funcional linear é analiticamente inteiro.

Proposição 6.2. *Um funcional $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$ é analiticamente inteiro se, e somente se, $\lambda(H) \in i2\pi\mathbb{Z}$ para todo $H \in \mathfrak{t}$ tal que $\exp(H) = 1$.*

Demonstração. Se λ é analiticamente inteiro e $H \in \mathfrak{t}$ é tal que $\exp(H) = 1$, então

$$e^{\alpha(H)} = \xi_\lambda(\exp(H)) = \xi_\lambda(1) = 1,$$

e portanto $\alpha(H) \in i2\pi\mathbb{Z}$. Para a recíproca, primeiro observamos que o fato de T ser um grupo de Lie abeliano e conexo implica que $\exp : \mathfrak{t} \to T$ é um homomorfismo de recobrimento. Dado $\lambda \in \mathfrak{t}^*_\mathbb{R}$ que satisfaz $\lambda(H) \in i2\pi\mathbb{Z}$ para todo $H \in \ker(\exp)$, definimos $\phi_\lambda : \mathfrak{t} \to \mathbb{S}^1$ por $\phi_\lambda(H) = e^{\lambda(H)}$. Como ϕ_λ é um homomorfismo contínuo cujo núcleo contém $\ker(\exp)$, então ϕ_λ induz um homomorfismo contínuo $\xi_\lambda : T \to \mathbb{S}^1$ satisfazendo $\xi_\lambda(\exp(H)) = \phi_\lambda(H) = e^{\lambda(H)}$. Logo, $\lambda \in \mathrm{An}(G)$. □

Consideremos agora um outro grupo de Lie compacto e conexo $\widetilde{G}$ para o qual existe um homomorfismo de recobrimento $\Phi : \widetilde{G} \to G$ com $\ker(\Phi)$ finito. Precisamos estabelecer uma relação entre $\mathrm{An}(G)$ e $\mathrm{An}(\widetilde{G})$. Antes, algumas considerações acerca de grupos abelianos compactos são necessárias. Seja A um tal grupo e definamos $\widehat{A}$ como o conjunto dos homomorfismos contínuos $\phi : A \to \mathbb{S}^1$, chamado de **dual** de A. Como $\mathbb{S}^1$ é um grupo abeliano, então $\widehat{A}$ é um grupo com a operação

$$(\phi_1\phi_2)(a) := \phi_1(a)\phi_2(a), \quad \phi_1, \phi_2 \in \widehat{A},\ a \in A.$$

Pelo Corolário 2.6, $\widehat{A}$ coincide com o conjunto das representações irredutíveis de A, de modo que $\widehat{A}$ é uma base de Schauder de $C(A)$ (com respeito à norma do supremo) pelo Teorema de Peter & Weyl. Em particular, $\widehat{A}$ separa pontos de A. Caso A seja finito, temos $\dim C(A) = |A|$, pois as funções características dos pontos de A formam uma base de $C(A)$. Neste caso, $|\widehat{A}| = |A|$.

Lema 6.3. *Seja A um grupo abeliano compacto e $Z \subseteq A$ um subgrupo finito. Então, todo homomorfismo $Z \to \mathbb{S}^1$ estende-se a um homomorfismo contínuo $A \to \mathbb{S}^1$.*

Demonstração. Seja $\widehat{A}' \subseteq \widehat{Z}$ o conjunto formado pelas restrições a Z dos homomorfismos $\phi \in \widehat{A}$. Vamos provar que $\widehat{A}' = \widehat{Z}$, o que implica o resultado. Seja V o subespaço vetorial de $C(Z)$ gerado por $\widehat{A}'$. Na verdade, V é uma subálgebra de $C(Z)$ uma vez que $\widehat{A}'$ é um subgrupo de $\widehat{Z}$. Além disso, V contém as funções constantes e é fechado pela conjugação. Como $\widehat{A}$ separa pontos de A, então $\widehat{A}'$ separa pontos de Z, e portanto V faz o mesmo. Sendo Z um espaço métrico compacto (pois é finito e equipado com a topologia discreta), temos que V satisfaz as hipóiteses do Teorema de Stone-Weierstrass, e portanto V é denso em $C(Z)$. Como $C(Z)$ é de dimensão finita, isso significa que $V = C(Z)$, de modo que $\widehat{A}'$ é um conjunto gerador de $C(Z)$. Isso implica que $|\widehat{Z}| = |Z| = \dim C(Z) \leq |\widehat{A}'|$, ou seja, $|\widehat{Z}| = |\widehat{A}'|$. Como esses conjunto são finitos, concluimos que $\widehat{A}' = \widehat{Z}$. □

Proposição 6.4. *Matendo as notações acima, temos que* $\mathrm{An}(G)$ *é um* $\mathbb{Z}$*-submódulo de* $\mathrm{An}(\widetilde{G})$ *de índice* $|\ker(\Phi)|$.

Demonstração. Sejam $T \subseteq G$, $\widetilde{T} \subseteq \widetilde{G}$ os toros maximais associados a $\mathfrak{t}$, com $\Phi(\widetilde{T}) = T$. Dado $\lambda \in \mathrm{An}(G)$, definimos $\widetilde{\xi}_\lambda : \widetilde{T} \to \mathbb{S}^1$ por $\widetilde{\xi}_\lambda(\widetilde{x}) = \xi_\lambda(\Phi(x))$. Claramente, $\widetilde{\xi}_\lambda$ é um homomorfismo contínuo, e se $H \in \mathfrak{t}$ temos

$$\widetilde{\xi}_\lambda(\widetilde{\exp}(H)) = \xi_\lambda(\Phi(\widetilde{\exp}(H))) = \xi_\lambda(\exp(H)) = e^{\lambda(H)}.$$

Logo, $\lambda \in \mathrm{An}(\widetilde{G})$ e $\mathrm{An}(G) \subseteq \mathrm{An}(\widetilde{G})$. Para provar a afirmação sobre o índice, denotemos $Z = \ker\Phi$. Como Z é um subgrupo normal e finito de $\widetilde{G}$, então $Z \subseteq Z_{\widetilde{G}} \subseteq \widetilde{T}$, pois $\widetilde{T}$ é um toro maximal. Com isso, definimos $\phi : \mathrm{An}(\widetilde{G}) \to \widehat{Z}$ por $\phi(\lambda) = \widetilde{\xi}_\lambda|_Z$. Como todo homomorfismo contínuo $\varphi : \widetilde{T} \to \mathbb{S}^1$ é da forma $\varphi = \widetilde{\xi}_\lambda$ para algum $\lambda \in \mathrm{An}(\widetilde{G})$, então ϕ é sobrejetiva pelo Lema 6.3. Além disso, é fácil ver que ϕ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos, de modo que resta apenas provar que $\ker(\phi) = \mathrm{An}(G)$. Temos $\mathrm{An}(G) \subseteq \ker\phi$ uma vez que

$$\widetilde{\xi}_\lambda(z) = \xi_\lambda(\Phi(z)) = \xi_\lambda(1) = 1, \text{ para todos } \lambda \in \mathrm{An}(G) \text{ e } z \in Z.$$

Agora, se $\lambda \in \ker(\phi)$, então $\widetilde{\xi}_\lambda|_Z = 1$, e portanto $\widetilde{\xi}_\lambda$ induz um homomorfismo contínuo $\xi_\lambda : T = \widetilde{T}/Z \to \mathbb{S}^1$ cuja diferencial em 1 é λ. Logo, $\lambda \in \mathrm{An}(G)$. $\square$

A partir de agora, vamos supor que $\mathfrak{g}$ é semi-simples. Um funcional linear $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$ é chamado **algebricamente inteiro** se o número de Killing $\dfrac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{|\alpha|^2}$ é inteiro para toda raiz $\alpha \in \Pi$. Denotamos o conjunto de todos os funcionais algebricamente inteiros de $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$ por $\mathrm{Al}(\Pi)$. É um resultado clássico da teoria das álgebra de Lie que $\Pi \subseteq \mathrm{Al}(\Pi)$. Além disso, é imediato da definição que $\mathrm{Al}(\Pi)$ é um $\mathbb{Z}$-submódulo de $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$.

Proposição 6.5. *Todo funcional analiticamente inteiro é algebricamente inteiro.*

Demonstração. Primeiramente, consideremos a decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha\in\Pi^+} (\mathbb{R}X_\alpha \oplus \mathbb{R}Y_\alpha)$$

dada pelo Teorema 3.20. Pelo Corolário 3.21, a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por $\{X_\alpha, Y_\alpha, iH_\alpha\}$ é isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$ pela aplicação $\phi : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{g}$ definida por

$$\phi\begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{|\alpha|}X_\alpha, \quad \phi\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{|\alpha|}Y_\alpha, \quad \phi\begin{pmatrix} -i/2 & 0 \\ 0 & i/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{|\alpha|^2}(iH_\alpha). \tag{6.1}$$

Como $SU(2)$ é um grupo de Lie simplesmente conexo, então existe um homomorfismo contínuo $\Phi : SU(2) \to G$ tal que $d\Phi_1 = \phi$. Seja

$$X = \begin{pmatrix} 2\pi i & 0 \\ 0 & -2\pi i \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2).$$

Por (6.1), temos $\phi(X) = 2\pi i(2|\alpha|^{-2}H_\alpha)$. Isso e o fato de que $e^X = I_2$ implicam que

$$1 = \Phi(I_2) = \Phi(e^X) = \exp(\phi(X)) = \exp\big(2\pi i(2|\alpha|^{-2}H_\alpha)\big).$$

Se λ é analiticamente inteira, pela Proposição 6.2 temos $\lambda\big(2\pi i(2|\alpha|^{-2}H_\alpha)\big) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, isto é,

$$2|\alpha|^{-2}\lambda(H_\alpha) = \frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{|\alpha|^2} \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Uma vez que $\mathfrak{t}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, sabemos da teoria de representações das álgebras de Lie semi-simples que existe uma correspondência entre funcionais algebricamente inteiros de $\mathfrak{t}_\mathbb{R}^*$ e representações irredutíveis de $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ em espaços de dimensão finita; a saber, a que associa a cada $\lambda \in \mathrm{Al}(\Pi)$ uma representação de $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ que admite λ como peso máximo.

Proposição 6.6. *(a) Se G é simplesmente conexo, então* $\mathrm{An}(G) = \mathrm{Al}(\Pi)$.

(b) Se o centro de G é trivial, então $\mathrm{An}(G) = [\Pi]$.

Demonstração. (a) Se $\lambda \in \mathrm{Al}(\Pi)$, seja $\phi : \mathfrak{g}^\mathbb{C} \to \mathfrak{gl}_\mathbb{C}(V)$ uma representação irredutível que admite λ como peso máximo. Seja $v \in V$ um vetor não-nulo tal que $\phi(H)v = \lambda(H)v$ para todo $H \in \mathfrak{t}^\mathbb{C}$. Como G é simplesmente conexo, então existe um homomorfismo contínuo $\Phi : G \to GL_\mathbb{C}(V)$ tal que $d\Phi_1 = \phi|_\mathfrak{g}$. Como $\mathbb{C}v$ é invariante por $\phi(\mathfrak{t}^\mathbb{C})$, então $\mathbb{C}v$ também é invariante por $\Phi(T)$. De fato, dado $z \in T$, $z = \exp(H)$ para algum $H \in \mathfrak{t}$, temos

$$\Phi(z)v = \Phi(\exp(H))v = e^{\phi(H)}v = e^{\lambda(H)}v. \tag{6.2}$$

Com isso, a restrição de Φ a T determina um homomorfismo contínuo $\xi : T \to \mathbb{S}^1$ por $\Phi(z)v = \xi(z)v$. Além disso, (6.2) implica que $d\xi_1 = \lambda$, e portanto $\lambda \in \mathrm{An}(G)$.

(b) Seja $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ um sistema simples em Π. Para cada $j = 1, \ldots, l$ definimos o vetor $H_j \in \mathfrak{t}$ por

$$\alpha_j(H_j) = 2\pi i \;\text{ e }\; \alpha_k(H_j) = 0 \;\text{ se } k \neq j.$$

Afirmamos que $\exp(H_j) = 1$. Com efeito, $\mathrm{Ad}(\exp(H_j))|_\mathfrak{t} = \mathrm{id}_\mathfrak{t}$ e, se $\alpha \in \Pi$ e $E_\alpha \in (\mathfrak{g}^\mathbb{C})_\alpha$, escrevemos $\alpha = \sum_{k=1}^l n_k\alpha_k$, com $n_k \in \mathbb{Z}$ todos de mesmo sinal, obtendo

$$\mathrm{Ad}(\exp(H_j))E_\alpha = e^{\mathrm{ad}(H_j)}E_\alpha = e^{\alpha(H_j)}E_\alpha = e^{\sum_{k=1}^l n_k\alpha_k(H_j)}E_\alpha = e^{n_j 2\pi i}E_\alpha = E_\alpha.$$

Isto prova que $\exp(H_j) \in Z_G = \{1\}$. Agora, dado $\lambda \in \mathrm{An}(G)$, podemos escrever $\lambda = \sum_{k=1}^l c_k\alpha_k$, com $c_k \in \mathbb{R}$, pois sendo $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples então Σ é uma base de $\mathfrak{t}_\mathbb{R}^*$. Dado $j \in \{1, \ldots, l\}$, por um lado temos $\lambda(H_j) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, pois $\exp(H_j) = 1$ (Proposição 6.2), e por outro temos

$$\lambda(H_j) = \sum_{k=1}^l c_k\alpha_k(H_j) = c_j 2\pi i.$$

Portanto, cada c_k é inteiro e $\lambda = \sum_{k=1}^l c_k\alpha_k \in [\Pi]$. $\square$

Dado um sistema simples $\Sigma \subseteq \Pi$, $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, temos que Σ é uma $\mathbb{Z}$-base de $[\Pi]$, e com isso $[\Pi]$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre com $\dim_{\mathbb{Z}}[\Pi] = |\Sigma|$. Veremos agora que $\mathrm{Al}(\Pi)$ também é um $\mathbb{Z}$-módulo livre. Uma vez que $\mathrm{An}(G) \subseteq \mathrm{Al}(\Pi)$ e todo submódulo de um módulo livre também é livre, feito isso teremos que $\mathrm{An}(G)$ também é livre.

Proposição 6.7. *Um funcional $\lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$ é algebricamente inteiro se, e somente se, $\dfrac{2\langle \lambda, \alpha_k \rangle}{|\alpha_k|^2} \in \mathbb{Z}$ para toda raiz simples $\alpha_k \in \Sigma$.*

Demonstração. Se $\lambda \in \mathrm{Al}(\Pi)$, então é imediato da definição que $2\langle \lambda, \alpha_k \rangle / |\alpha_k|^2 \in \mathbb{Z}$ para α_k simples. Para a recíproca, suponhamos que $2\langle \lambda, \alpha_k \rangle / |\alpha_k|^2 \in \mathbb{Z}$ para α_k simples e provemos que $2\langle \lambda, \alpha \rangle / |\alpha|^2 \in \mathbb{Z}$ para $\alpha \in \Pi$ qualquer. É suficiente considerar $\alpha > 0$. Procedemos por indução sobre a altura de α.[1] Se altura de α é 1, então α é simples e a afirmação é verdadeira por hipótese. Vamos assumir, então, que α possui altura $n > 1$ e supor que $2\langle \lambda, \beta \rangle / |\beta|^2 \in \mathbb{Z}$ para toda raiz positiva β de altura $< n$. Escrevamos $\alpha = \sum_{k=1}^{l} n_k \alpha_k$, com $n_k \in \mathbb{N}$. (Vale a pena observar que $\{k : n_k > 0\}$ possui ao menos dois elementos, pois caso contrário α seria simples.) Como $\alpha \neq 0$, então

$$0 < |\alpha|^2 = \sum_{k=1}^{l} n_k \langle \alpha, \alpha_k \rangle,$$

o que significa que $\langle \alpha, \alpha_{k_0} \rangle > 0$ para algum k_0. Sendo $r_{\alpha_{k_0}}$ a reflexão ortogonal relativa a $\alpha_{k_0}^{\perp}$, temos

$$\begin{aligned} r_{\alpha_{k_0}}(\alpha) &= \alpha - \frac{2\langle \alpha, \alpha_{k_0} \rangle}{|\alpha_{k_0}|^2} \alpha_{k_0} = \sum_{k=1}^{l} n_k \alpha - \frac{2\langle \alpha, \alpha_{k_0} \rangle}{|\alpha_{k_0}|^2} \alpha_{k_0} \\ &= \left(n_{k_0} - \frac{2\langle \alpha, \alpha_{k_0} \rangle}{|\alpha_{k_0}|^2} \right) \alpha_{k_0} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{l} n_k \alpha_k, \end{aligned}$$

isto é, $\beta := r_{\alpha_{k_0}}(\alpha)$ é uma raiz positiva cuja altura é $< n$. Portanto,

$$\frac{2\langle \lambda, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} = \frac{2\langle r_{\alpha_{k_0}}(\lambda), r_{\alpha_{k_0}}(\alpha) \rangle}{|r_{\alpha_{k_0}}(\alpha)|^2} = \frac{2\langle r_{\alpha_{k_0}}(\lambda), \beta \rangle}{|\beta|^2} = \frac{2\langle \lambda, \beta \rangle}{|\beta|^2} - \frac{2\langle \lambda, \alpha_{k_0} \rangle}{|\alpha_{k_0}|^2} \cdot \frac{2\langle \alpha_{k_0}, \beta \rangle}{|\beta|^2} \in \mathbb{Z},$$

completando a demonstração. □

Corolário 6.8. $\mathrm{Al}(\Pi)$ *é um $\mathbb{Z}$-módulo livre e* $\dim_{\mathbb{Z}} \mathrm{Al}(\Pi) = |\Sigma|$.

Demonstração. Escrevamos $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Para cada $j = 1, \ldots, l$ seja $\lambda_j \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$ o funcional definido por

$$\lambda_j(H_{\alpha_j}) = |\alpha_j|^2/2 \ \text{ e } \ \lambda_j(H_{\alpha_k}) = 0 \ \text{ se } \ k \neq j.$$

[1] Se $\alpha \in \Pi^+$, então podemos escrever $\alpha = \sum_{k=1}^{l} n_k \alpha_k$ com todos os $n_k \geq 0$. A **altura** de α é o número $\sum_{k=1}^{l} n_k$.

Como

$$\frac{2\langle\lambda_j,\alpha_k\rangle}{|\alpha_k|^2}=\frac{2\lambda_j(H_{\alpha_k})}{|\alpha_k|^2}=\delta_{jk}\in\mathbb{Z}\ \text{ para }\ j,k=1,\ldots,l,$$

então pela Proposição 6.7 temos $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_l\}\subseteq \mathrm{Al}(\Pi)$. Afirmamos que $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_l\}$ é uma $\mathbb{Z}$-base de $\mathrm{Al}(\Pi)$. Primeiramente, como $\{H_{\alpha_1},\ldots,H_{\alpha_l}\}$ é uma base de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$, então $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_l\}$ é uma base de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$. Isto implica que $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_l\}$ é $\mathbb{Z}$-linearmente independente. Além disso, se $\lambda\in\mathrm{Al}(\Pi)$, então podemos escrever $\lambda=\sum_{j=1}^{l}c_j\lambda_j$, com $c_j\in\mathbb{R}$. Por um lado, $2\langle\lambda,\alpha_k\rangle/|\alpha_k|^2\in\mathbb{Z}$; por outro,

$$\frac{2\langle\lambda,\alpha_k\rangle}{|\alpha_k|^2}=\sum_{j=1}^{l}c_j\frac{2\langle\lambda_j,\alpha_k\rangle}{|\alpha_k|^2}=\sum_{j=1}^{l}c_j\delta_{jk}=c_k. \tag{6.3}$$

Portanto, $c_1,\ldots,c_l\in\mathbb{Z}$. □

Em particular, o Corolário 6.8 garante que $\dim_{\mathbb{Z}}\mathrm{Al}(\Pi)=\dim_{\mathbb{Z}}[\Pi]$. O que podemos esperar do quociente $\mathrm{Al}(\Pi)/[\Pi]$? A resposta a esta pergunta é dada pelo seguinte resultado.

Teorema 6.9. *Mantendo as notações acima, temos que* $\mathrm{Al}(\Pi)/[\Pi]$ *é finito e* $|\mathrm{Al}(\Pi)/[\Pi]|$ *coincide com o determinante da matriz de Cartan de um sistema simples* $\Sigma\subseteq\Pi$.

Antes de procedermos à demonstração deste Teorema, lembramos do seguinte resultado geral da teoria de matrizes sobre domínios principais. A demonstração pode ser vista em (JACOBSON, 2009), pp. 181-184.

Teorema 6.10. *Seja D um domínio principal e $A\in M_{m\times n}(D)$. Então, existem matrizes invertíveis $Q\in M_m(D)$ e $P\in M_n(D)$ tais que $Q^{-1}AP\in M_{m\times n}(D)$ é uma matriz diagonal $\Delta=\mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_r,0,\ldots,0)$ satisfazendo $d_j\neq 0$ e $d_j\backslash d_{j+1}$. Além disso, Δ é única a menos de multiplicação por elementos invertíveis de D ao longo da sua diagonal principal.*

Demonstração do Teorema 6.9. Seja $\Sigma=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ um sistema simples de Π e $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_l\}$ a base de $\mathrm{Al}(\Pi)$ construída na demonstração da Proposição 6.8. Escrevamos

$$\alpha_j=\sum_{k=1}^{l}a_{kj}\lambda_k,\ \ j=1,\ldots,l,$$

e formemos a matriz $A=(a_{kj})\in M_l(\mathbb{Z})$. Pelo Teorema 6.10, existem matrizes invertíveis $P,Q\in M_l(\mathbb{Z})$ tais que $Q^{-1}AP\in M_l(\mathbb{Z})$ é uma matriz diagonal $\Delta=\mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_r,0,\ldots,0)$ com $d_j\neq 0$ e $d_j\backslash d_{j+1}$. Escrevamos $Q=(q_{kj})$ e $P=(p_{kj})$ e formemos os vetores

$$\beta_j=\sum_{k=1}^{l}p_{kj}\alpha_k\ \text{ e }\ \sigma_j=\sum_{k=1}^{l}q_{kj}\lambda_k,\quad \text{para } j=1,\ldots,l.$$

Como P e Q são invertíveis, então $\{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$ é base de $[\Pi]$ e $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_l\}$ é base de $\mathrm{Al}(\Pi)$. Além disso,

$$\begin{aligned}\beta_j &= \sum_{k=1}^{l} p_{kj}\alpha_k = \sum_{k,m=1}^{l} p_{kj}a_{mk}\lambda_m = \sum_{m=1}^{l}(AP)_{mj}\lambda_m = \sum_{m=1}^{l}(Q\Delta)_{mj}\lambda_m \\ &= \sum_{m,k=1}^{l} q_{mk}\Delta_{kj}\lambda_m = \Delta_{jj}\sum_{m=1}^{l} q_{mj}\lambda_m = \Delta_{jj}\sigma_j,\end{aligned}$$

isto é,

$$\beta_j = \begin{cases} d_j\sigma_j & , \text{ se } 1 \leq j \leq r \\ 0 & , \text{ se } r < j \leq l. \end{cases}$$

Isto implica que $r = \dim_{\mathbb{Z}}[\Pi] = l$, isto é, $\Delta = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_l)$ e $\beta_j = d_j\sigma_j$ para $j = 1, \ldots, l$. Portanto,

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Al}(\Pi) &= \mathbb{Z}\sigma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\sigma_l \\ [\Pi] &= \mathbb{Z}d_1\sigma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}d_l\sigma_l\end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{\mathrm{Al}(\Pi)}{[\Pi]} \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_l}$$

e disso concluimos que

$$\left|\frac{\mathrm{Al}(\Pi)}{[\Pi]}\right| = |d_1| \cdots |d_l| = |\det(\Delta)|.$$

Como $\Delta = Q^{-1}AP$, então $|\det(\Delta)| = |\det(A)|$, pois o fato de P, Q serem matrizes inteiras invertíveis implica que $|\det(P)| = |\det(Q)| = 1$. Logo, $|\mathrm{Al}(\Pi)/[\Pi]| = |\det(A)|$. Por outro lado, (6.3) implica que

$$a_{kj} = \frac{2\langle\alpha_j, \alpha_k\rangle}{|\alpha_k|^2} = \frac{2\langle\alpha_k, \alpha_j\rangle}{|\alpha_k|^2},$$

ou seja, A é a matriz de Cartan do sistema simples Σ. Uma vez que o determinante de toda matriz de Cartan é > 0, o resultado segue. $\square$

6.2 A Terceira Demonstração

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie compacta e semi-simples e $\widetilde{G}$ o grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Provaremos que o centro de $\widetilde{G}$ é finito. Suponhamos, por absurdo, que $Z_{\widetilde{G}}$ é infinito. Como $Z_{\widetilde{G}}$ é abeliano e finitamente gerado, então $Z_{\widetilde{G}}$ é isomorfo a um produto direto da forma $A \times \mathbb{Z}$, em que A é um grupo abeliano finitamente gerado. Seja $Z \subseteq Z_{\widetilde{G}}$ o subgrupo cuja imagem por esse isomorfismo é $A \times dZ$, em que d é um número inteiro maior do que o determinante da matriz de Cartan de $\mathfrak{g}$, e formemos o grupo $G := \widetilde{G}/Z$. Está claro que $Z_{\widetilde{G}}/Z$ é finito de ordem d, e isto implica que G é um recobrimento finito de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ pois

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \cong \widetilde{G}/Z_{\widetilde{G}} \cong \frac{\widetilde{G}/Z}{Z_{\widetilde{G}}/Z} = \frac{G}{Z_{\widetilde{G}}/Z}.$$

Em particular, G é compacto. Deste modo, pelas Proposições 6.4 e 6.6, temos

$$\left|\frac{\mathrm{An}(G)}{[\Pi]}\right| = \left|\frac{\mathrm{An}(G)}{\mathrm{An}(\mathrm{Int}(\mathfrak{g}))}\right| = \left|Z_{\widetilde{G}}/Z\right| = d. \tag{6.4}$$

Por outro lado, como $\mathrm{An}(G) \subseteq \mathrm{Al}(\Pi)$ pela Proposição 6.5, então

$$\left|\frac{\mathrm{An}(G)}{[\Pi]}\right| \leq \left|\frac{\mathrm{Al}(\Pi)}{[\Pi]}\right|,$$

o que contradiz (6.4) pelo Teorema 6.9. Portanto, $Z_{\widetilde{G}}$ é finito. Em particular, $\widetilde{G}$ é compacto, pois $\widetilde{G}/Z_{\widetilde{G}} \cong \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$.

Agora, se G é um outro grupo de Lie compacto e conexo cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$, então $G = \widetilde{G}/Z$ para algum subgrupo $Z \subseteq Z_{\widetilde{G}}$. Como Z é isomorfo a $\pi_1(G)$ e $Z_{\widetilde{G}}$ é finito, concluimos que $\pi_1(G)$ é finito e o Teorema de Weyl está provado.

Para encerrar o capítulo, vamos mostrar alguns resultados que decorrem do Teorema de Weyl e das proposições apresentadas acima.

Corolário 6.11. *Seja G um grupo de Lie compacto e conexo com álgebra de Lie semi-simples. Então, G é simplesmente conexo se, e somente se,* $\mathrm{An}(G) = \mathrm{Al}(\Pi)$, *em que* Π *é o sistema de raízes tomado com respeito a alguma subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{g}$.

Demonstração. Se G é simplesmente conexo já provamos que $\mathrm{An}(G) = \mathrm{Al}(\Pi)$ na Proposição 6.6. Reciprocamente, suponhamos que $\mathrm{An}(G) = \mathrm{Al}(\Pi)$ e tomemos $\widetilde{G}$ o recobrimento universal de G. Pelo Teorema de Weyl, $\widetilde{G}$ é compacto e $G = \widetilde{G}/Z$ para algum subgrupo central e finito $Z \subseteq \widetilde{G}$. Além disso,

$$|Z| = \left|\frac{\mathrm{An}(\widetilde{G})}{\mathrm{An}(G)}\right| = \left|\frac{\mathrm{Al}(\Pi)}{\mathrm{Al}(\Pi)}\right| = 1,$$

provando que $\widetilde{G} \cong G$. □

Corolário 6.12. *A ordem do centro de um grupo de Lie compacto e simplesmente conexo coincide com o determinante da matriz de Cartan da sua álgebra de Lie.*

Corolário 6.13. *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie compacta e semi-simples, então existe uma quantidade finita de classes de isomorfismo de grupos de Lie cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$ e todos esses grupos são compactos.*

Capítulo 7

Elementos Regulares e Classes de Homotopia

Neste capítulo, faremos uma demonstração geométrica/topológica do Teorema de Weyl trabalhando diretamente com classes de homotopia de curvas. Para tanto, é necessário antes explorarmos os conceitos de grupo de Weyl afim associado a um sistema de raízes e de elemento regular e singular no contexto dos grupos de Lie.

7.1 Elementos Regulares e Singulares

Um conceito de extrema importância na teoria das álgebras de Lie é o de elemento regular, que relembramos brevemente. (Uma discussão profunda sobre elementos regulares em álgebras de Lie pode ser vista em (SAN MARTIN, 1999), capítulo 4.) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Para cada $X \in \mathfrak{g}$, consideramos o operador linear $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ e definimos n_X como sendo a multiplicidade de zero como raiz do polinômio característico de $\mathrm{ad}(X)$ (que coincide com a dimensão do núcleo generalizado de $\mathrm{ad}(X)$). Com isto, forma-se o conjunto $\{n_X \in \mathbb{N} : X \in \mathfrak{g}\}$, cujo mínimo $r_\mathfrak{g}$ é chamado de **posto** de $\mathfrak{g}$. Se $X \in \mathfrak{g}$ é tal que $n_X = r_\mathfrak{g}$, dizemos que X é um **elemento regular** de $\mathfrak{g}$. A importância dos elementos regulares na teoria das álgebras de Lie reside no fato de que todas as subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ são da forma $\mathfrak{h} := \ker\left(\mathrm{ad}(X)^{r_\mathfrak{g}}\right)$ com X escolhido no conjunto dos elementos regulares de $\mathfrak{g}$. Além disso, cada subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ possui dimensão exatamente $r_\mathfrak{g}$.

No estudo dos grupos de Lie, a situação é análoga: dado um grupo de Lie G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, para cada $x \in G$ consideramos o operador linear $\mathrm{Ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ e definimos n_x como a multiplicidade algébrica de 1 como raiz do polinômio característico de $\mathrm{Ad}(x)$. Com isto, temos o conjunto $\{n_x \in \mathbb{N} : x \in G\}$, cujo mínimo r_G é chamado de **posto** de G. Se $x \in G$ é tal que $n_x = r_G$, dizemos que x é um **elemento regular** de G; caso contrário, x é um **elemento singular** de G. Denotaremos por G_r o conjunto dos elementos regulares de G e por G_s o dos elementos singulares. Claramente, $G_r \neq \emptyset$ e $G_s \supseteq Z_G$.

Proposição 7.1. *Seja G um grupo de Lie compacto e conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então,*

(a) $r_G = r_{\mathfrak{g}}$;

(b) G_r *é aberto em* G;

(c) se $x \in G$ *é regular e* $x = \exp(X)$ *para algum* $X \in \mathfrak{g}$, *então* X *é regular.*

Observação. A recíproca para o item (c) não é verdadeira em geral, pois se $X \in \mathfrak{g}$ é um elemento regular cujos autovalores não-nulos estão em $2\pi i\mathbb{Z}$ então $\exp(X) \in Z_G \subseteq G_s$.

Demonstração. (a) Dado $x \in G$, uma vez que G é compacto e conexo, podemos escrever $x = \exp(X)$ para algum $X \in \mathfrak{g}$. Deste modo, $\mathrm{Ad}(x) = e^{\mathrm{ad}(X)}$ e os autovalores de $\mathrm{Ad}(x)$ são as exponenciais dos autovalores de $\mathrm{ad}(X)$. Logo, $n_x \geq n_X \geq r_{\mathfrak{g}}$ para todo $x \in G$, e portanto $r_G \geq r_{\mathfrak{g}}$. Agora, para provar que $r_{\mathfrak{g}} \geq r_G$, seja $X \in \mathfrak{g}$ um elemento regular e tomemos um número real $t \neq 0$ tal que os autovalores de $\mathrm{ad}(tX)$ tenham valor absoluto menor do que 2π. Uma vez que os autovalores de $\mathrm{ad}(tX)$ são os autovalores de $\mathrm{ad}(X)$ multiplicados por t (tanto os reais quanto os complexos), isso significa que tX também é regular. Além disso, fazendo $x := \exp(tX)$, uma vez que os autovalores de $\mathrm{Ad}(x)$ são as exponenciais dos autovalores de $\mathrm{ad}(tX)$, então a multiplicidade de 1 como autovalor de $\mathrm{Ad}(x)$ coincide com a de zero como autovalor de $\mathrm{ad}(tX)$, pois pela escolha de t nenhum outro autovalor de $\mathrm{ad}(tX)$ possui exponencial igual a 1. Logo, $n_x = r_{\mathfrak{g}}$, e portanto $r_{\mathfrak{g}} \geq r_G$. A igualdade segue.

(b) Como $\mathrm{Ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é um operador linear semi-simples para todo $x \in G$ (pois G é compacto), então $n_x = \dim(\ker(\mathrm{Ad}(x) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}))$. Deste modo, $x \in G$ é regular exatamente quando $\mathrm{posto}(\mathrm{Ad}(x) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})$ é máximo. Uma vez que a função que a cada transformação linear associa o seu posto é semi-contínua superiormente, então cada $x_0 \in G_r$ admite uma vizinhança U em G tal que $\mathrm{posto}(\mathrm{Ad}(x) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) = \mathrm{posto}(\mathrm{Ad}(x_0) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})$ para todo $x \in U$. Logo, $U \subseteq G_r$ e G_r é aberto em G.

(c) Como os autovalores de $\mathrm{Ad}(x)$ são as exponenciais dos autovalores de $\mathrm{ad}(X)$, então a multiplicidade de zero como autovalor de $\mathrm{ad}(X)$ não pode ser maior do que r_G. Como $r_G = r_{\mathfrak{g}}$, então X é regular. □

A Proposição 7.1 também é válida para grupos não-compactos, mas as demonstrações que demos dos ítens (a) e (b), que dependem da compacidade de G, devem ser substituídas por outros argumentos. Os detalhes podem ser vistos em (KNAPP, 2002), p. 491.

Sejam G um grupo de Lie compacto e conexo e $T \subseteq G$ um toro maximal. Denotando por $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{t}$ as respectivas álgebras de Lie, façamos a decomposição de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ em espaços de raízes com respeito a $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$:

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha.$$

Conforme argumentamos na demonstração da Proposição 3.15, $\mathrm{Ad}: T \to GL_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ é uma representação que mantém invariantes os subespaços dessa decomposição. Sobre $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, a ação de T é a identidade, e sobre cada $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha$ é dada pelo homomorfismo contínuo $\xi_\alpha : T \to \mathbb{S}^1$. Com isso, a matriz de $\mathrm{Ad}(x)$ com respeito a uma base adaptada a essa decomposição é

$$\mathrm{diag}\big(1, \ldots, 1, \xi_{\alpha_1}(x), \ldots, \xi_{\alpha_n}(x)\big),$$

com $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Decorre que $x \in T$ é regular se, e somente se, $\xi_\alpha(x) \neq 1$ para toda raiz $\alpha \in \Pi$. Uma vez que os homomorfismos ξ_α ainda satisfazem

$$\xi_\alpha(\exp(H)) = e^{\alpha(H)} \text{ para todo } H \in \mathfrak{t},$$

então $\xi_{-\alpha} = \overline{\xi_\alpha}$, e portanto $x \in T$ é regular exatamente quando $\xi_\alpha(x) \neq 1$ para $\alpha \in \Pi^+$. Lembrando que todo elemento de G é conjugado a um elemento de T e observando que a regularidade é preservada por conjugações, analisar o conjunto T_r dos elementos regulares de T em geral é suficiente para se ter uma compreensão adequada acerca de G_r. O mesmo vale para G_s.

Proposição 7.2. *Seja $x \in T$ e consideremos a decomposição*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} (\mathbb{R}X_\alpha \oplus \mathbb{R}Y_\alpha)$$

dada no Teorema 3.20. Denotemos por R o conjunto formado pelas raízes $\alpha \in \Pi$ tal que $\xi_\alpha(x) = 1$. Então,

(a) R é simétrico, isto é, se $\alpha \in R$ então $-\alpha \in R$;

(b) se $\alpha, \beta \in R$ são tais que $\alpha + \beta \in \Pi$, então $\alpha + \beta \in R$;

(c) se $Z_{\mathfrak{g}}(x)$ denota o autoespaço de $\mathrm{Ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ associado ao autovalor 1, então

$$Z_{\mathfrak{g}}(x) = \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha \in R^+} (\mathbb{R}X_\alpha \oplus \mathbb{R}Y_\alpha),$$

em que $R^+ = \Pi^+ \cap R$. Em particular, $\dim\big(Z_{\mathfrak{g}}(x)\big) = \dim(\mathfrak{t}) + |R|$.

Demonstração. (a) e (b) decorrem das igualdades $\xi_{-\alpha} = \overline{\xi_\alpha}$ e $\xi_{\alpha+\beta} = \xi_\alpha \xi_\beta$ (produto pontual). Para (c), seja $X \in \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha \in R^+} (\mathbb{R}X_\alpha \oplus \mathbb{R}Y_\alpha)$ e escrevamos

$$X = H + \sum_{\alpha \in R^+} \lambda_\alpha X_\alpha + \sigma_\alpha Y_\alpha, \quad H \in \mathfrak{t}, \ \lambda_\alpha, \sigma_\alpha \in \mathbb{R}.$$

Lembrando que $X_\alpha = \frac{1}{2}(E_\alpha + \overline{E_\alpha})$ e $Y_\alpha = -\frac{i}{2}(E_\alpha - \overline{E_\alpha})$, em que $E_\alpha \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha$, temos

$$X = H + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} (\lambda_\alpha - i\sigma_\alpha) E_\alpha + (\lambda_\alpha + i\sigma_\alpha) \overline{E_\alpha},$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(x)X &= H + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R^+}(\lambda_\alpha - i\sigma_\alpha)\xi_\alpha(x)E_\alpha + (\lambda_\alpha + i\sigma_\alpha)\xi_{-\alpha}(x)\overline{E_\alpha} \\
&= H + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R^+}(\lambda_\alpha - i\sigma_\alpha)E_\alpha + (\lambda_\alpha + i\sigma_\alpha)\overline{E_\alpha} \\
&= X.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, seja $X \in Z_{\mathfrak{g}}(x)$ e escrevamos

$$X = H + \sum_{\alpha\in\Pi^+}\lambda_\alpha X_\alpha + \sigma_\alpha Y_\alpha, \quad H \in \mathfrak{t},\ \lambda_\alpha, \sigma_\alpha \in \mathbb{R}.$$

Precisamos provar que $\lambda_\alpha = \sigma_\alpha = 0$ se $\alpha \in \Pi^+\backslash R$. Procedendo de maneira análoga à feita acima, temos

$$\begin{aligned}
X &= H + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Pi^+}(\lambda_\alpha - i\sigma_\alpha)E_\alpha + (\lambda_\alpha + i\sigma_\alpha)\overline{E_\alpha} \\
\mathrm{Ad}(x)X &= H + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Pi^+}(\lambda_\alpha - i\sigma_\alpha)\xi_\alpha(x)E_\alpha + (\lambda_\alpha + i\sigma_\alpha)\xi_{-\alpha}(x)\overline{E_\alpha}.
\end{aligned}$$

Logo, $(\lambda_\alpha - i\sigma_\alpha)\xi_\alpha(x) = \lambda_\alpha - i\sigma_\alpha$ para toda $\alpha \in \Pi^+$, isto é, $(\lambda_\alpha - i\sigma_\alpha)(\xi_\alpha(x) - 1) = 0$. Se $\alpha \in \Pi^+\backslash R$, então $\xi_\alpha(x) \neq 1$, de modo que $\lambda_\alpha - i\sigma_\alpha = 0$ e $\lambda_\alpha = \sigma_\alpha = 0$. □

Corolário 7.3. *Sejam G um grupo de Lie compacto e conexo e $x \in G$ um elemento regular. Então, $Z_G(x)_0$ é um toro maximal de G e é o único que contém x.*

Demonstração. Seja $T \subseteq G$ um toro maximal que contém x, e seja $\mathfrak{t}$ a álgebra de Lie de T. A álgebra de Lie de $Z_G(x)$ é $Z_{\mathfrak{g}}(x)$, que pela Proposição 7.2 coincide com $\mathfrak{t}$. (Sendo x regular, então $\{\alpha \in \Pi : \xi_\alpha(x) = 1\} = \emptyset$.) Logo, $Z_G(x)_0 = T$. □

Para cada subconjunto $R \subseteq \Pi$ que sastisfaz as propriedades (a) e (b) da Proposição 7.2, denotamos

$$\mathfrak{p}_R := \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha\in R^+}(\mathbb{R}X_\alpha \oplus \mathbb{R}Y_\alpha).$$

Não é difícil mostrar que $\mathfrak{p}_R$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Se existe $x_0 \in T$ tal que $R = \{\alpha \in \Pi : \xi_\alpha(x_0) = 1\}$, então $\mathfrak{p}_R = Z_{\mathfrak{g}}(x_0)$ e podemos considerar os conjuntos

$$\begin{aligned}
T_R &:= \{x \in T : \xi_\alpha(x) = 1 \text{ para toda } \alpha \in R\} \\
T_R^\times &:= \{x \in T_R : \alpha \in \Pi\backslash R \Rightarrow \xi_\alpha(x) \neq 1\}.
\end{aligned}$$

Claramente, $x_0 \in T_r^\times \subseteq T_R$. (Nos casos extremais $R = \emptyset$ e $R = \Pi$, temos $T_\emptyset = T$, $T_\emptyset^\times = T_r$, $T_\Pi = Z_G \cap T = Z_G$ e $T_\Pi^\times = T_\Pi$.) Equivalentemente, $T_R = \bigcap_{\alpha\in R}\ker(\xi_\alpha)$, e com isso T_R é um subgrupo fechado de T. Em particular, T_R é um grupo de Lie compacto. Sua álgebra de Lie é $\mathfrak{t}_R := \bigcap_{\alpha \in R} \ker(\alpha|_{\mathfrak{t}})$, e portanto $\dim(T_R)$ coincide com a codimensão do subespaço de $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$ gerado por R. Em particular, se $R \neq \emptyset$, então $\dim(T_R) \leq \dim(T) - 1$.

Será importante adiante considerar o centralizador de T_R em G.

Corolário 7.4. *Mantendo as notações acima, temos que a álgebra de Lie de* $Z_G(T_R)$ *é* $\mathfrak{p}_R$. *Em particular, se* $R \neq \emptyset$ *temos* $\dim(Z_G(T_R)) \geq \dim(T) + 2$.

Demonstração. A álgebra de Lie de $Z_G(T_R)$ é o conjunto

$$\mathfrak{h} := \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{Ad}(x)X = X \text{ para todo } x \in T_R\} = \bigcap_{x \in T_R} Z_{\mathfrak{g}}(x).$$

Para cada $x \in T_R$, seja $R_x = \{\alpha \in \Pi : \xi_\alpha(x) = 1\}$. Então, $R_x \supseteq R$, de modo que

$$Z_{\mathfrak{g}}(x) = \mathfrak{p}_{R_x} \supseteq V$$

pela Proposição 7.2. Logo, $\mathfrak{h} \supseteq V$. Agora, se $x \in T_R^\times$, então $R_x = R$, e portanto $\mathfrak{h} \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(x) = V$. □

Corolário 7.5. *Se* $x \in T_R^\times$, *então* $Z_G(x)_0 \subseteq Z_G(T_R)$.

Na seção 7.3 faremos uma análise mais cuidadosa da estrutura dos conjuntos dos elementos regulares e dos singulares. No entanto, uma nova ferramenta é necessária, o grupo de Weyl afim, que apresentaremos na próxima seção.

7.2 O Grupo de Weyl Afim

Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e Π um sistema de raízes em V.[1] Fixada uma ordem lexicográfica em V com respeito a alguma base, seja Π^+ o conjunto dos elementos positivos de Π. Para cada $\alpha \in \Pi$ e cada número $k \in \mathbb{Z}$ consideramos o hiperplano afim

$$P_{\alpha,k} := \{\lambda \in V : \langle \lambda, \alpha \rangle = k\}.$$

É imediato desta definição que $P_{\alpha,k} = P_{-\alpha,-k}$ (de modo que, quando necessário, podemos restringir a nossa atenção às raízes positivas) e $P_{\alpha,0} = \alpha^\perp$. Na verdade, cada $P_{\alpha,k}$ é a translação de $\alpha^\perp$ pelo vetor $\frac{k}{2}\alpha^\vee$, em que

$$\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{|\alpha|^2}.$$

(Os vetores $\alpha^\vee$, $\alpha \in \Pi$, são as **co-raízes** associadas a Π e denotamos por $\Pi^\vee$ o conjunto formado por essas co-raízes.) Para cada $\alpha \in \Pi$ e $k \in \mathbb{Z}$ consideramos também a reflexão

[1] Adotamos a convenção de que todo sistema de raízes Π é reduzido, isto é, que os únicos múltiplos de uma raiz α que pertencem a Π são $\pm\alpha$.

ortogonal $r_{\alpha,k} : V \to V$ que fixa $P_{\alpha,k}$. Sendo r_α a reflexão ortogonal que fixa o subespaço $\alpha^\perp$, então $r_\alpha = r_{\alpha,0}$. Lembramos ainda que

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{|\alpha|^2}\alpha = \lambda - \langle\lambda,\alpha\rangle\alpha^\vee$$

e que $r_\alpha = r_{-\alpha}$ para toda $\alpha \in \Pi$. Para cada $\mu \in V$, vamos denotar por $t(\mu)$ a translação em V dada pelo vetor μ:

$$t(\mu)\lambda = \lambda + \mu, \quad \lambda \in V.$$

Vale observar que $t(\mu)^{-1} = t(-\mu)$. Com estas notações, percebemos geometricamente que

$$r_{\alpha,k} = t\left(\frac{k}{2}\alpha^\vee\right) \circ r_\alpha \circ t\left(\frac{k}{2}\alpha^\vee\right)^{-1}.$$

Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} r_{\alpha,k}(\lambda) &= \left(t\left(\frac{k}{2}\alpha^\vee\right) \circ r_\alpha\right)\left(\lambda - \frac{k}{2}\alpha^\vee\right) \\ &= t\left(\frac{k}{2}\alpha^\vee\right)\left(r_\alpha(\lambda) + \frac{k}{2}\alpha^\vee\right) \\ &= r_\alpha(\lambda) + k\alpha^\vee \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in V$, isto é, $r_{\alpha,k} = t(k\alpha^\vee) \circ r_\alpha$. Sendo r_α um operador linear de V, concluimos que cada $r_{\alpha,k}$ é uma transformação afim de V.

Seja $\mathrm{Af}(V)$ o conjunto das transformações afins de V, que é um grupo com a operação de composição. Definimos o **grupo de Weyl afim** de Π, denotado por $W_a(\Pi)$, como sendo o subgrupo de $\mathrm{Af}(V)$ gerado pelas reflexões $r_{\alpha,k}$ com $\alpha \in \Pi$ e $k \in \mathbb{Z}$. (Por simplicidade, a partir de agora denotaremos a composta de transformações afins por justaposição: $w \circ z = wz$ para $w, z \in \mathrm{Af}(V)$.) Vale a pena obervar que $W(\Pi)$ (o grupo de Weyl associado a Π) é um subgrupo de $W_a(\Pi)$, pois $W(\Pi)$ é gerados pelas reflexões $r_\alpha = r_{\alpha,0}$. Além disso, denotando por $[\Pi^\vee]$ o $\mathbb{Z}$-submódulo de V gerado pelas co-raízes associadas a Π e por $L[\Pi^\vee]$ o conjunto das translações $t(\mu)$ com $\mu \in [\Pi^\vee]$, temos que $L[\Pi]^\vee$ também é um subgrupo de $W_a(\Pi)$. De fato, $L[\Pi^\vee]$ é um subgrupo de $\mathrm{Af}(V)$, pois $t(\lambda)t(\mu) = t(\lambda+\mu)$ e $t(\mu)^{-1} = t(-\mu)$ para todos $\lambda, \mu \in [\Pi^\vee]$, e também $L[\Pi^\vee] \subseteq W_a(\Pi)$, pois se $\alpha^\vee \in \Pi^\vee$ então

$$t(\alpha^\vee) = t(\alpha^\vee)r_\alpha r_\alpha = r_{\alpha,1}r_\alpha \in W_a(\Pi).$$

Podemos concluir disso que $W_a(\Pi)$ é sempre um grupo infinito (contrastando com o fato de $W(\Pi)$ sempre ser finito).

Proposição 7.6. *Mantendo as notações acima, temos que $L[\Pi^\vee]$ é um subgrupo normal de $W_a(\Pi)$ e que $W_a(\Pi)$ é o produto semi-direto de $L[\Pi^\vee]$ por $W(\Pi)$, no sentido que $W(\Pi)$ normaliza $L[\Pi^\vee]$, $L[\Pi^\vee] \cap W(\Pi) = \{\mathrm{id_V}\}$ e cada $z \in W_a(\Pi)$ pode ser escrito de maneira única da forma $z = t(\mu)w$ com $\mu \in [\Pi^\vee]$ e $w \in W(\Pi)$. Em particular, $W_a(\Pi)$ é um subgrupo fechado e discreto de $\mathrm{Af}(V)$.*

Demonstração. Primeiramente, observamos que se $\mu \in V$ e $x \in GL(V)$ então

$$\left(xt(\mu)x^{-1}\right)(\lambda) = x\left(x^{-1}(\lambda)+\mu\right) = \lambda + x(\mu) = \big(t(x(\mu))\big)(\lambda)$$

para todo $\lambda \in V$, isto é, $xt(\mu)x^{-1} = t(x(\mu))$. Com isso, para verificar que $L[\Pi^\vee]$ é normal em $W_a(\Pi)$ é suficiente mostrar que $r_{\alpha,k}(\beta^\vee) \in [\Pi^\vee]$ para $\alpha, \beta \in \Pi$ e $k \in \mathbb{Z}$. Como $r_{\alpha,k} = t(k\alpha^\vee)r_\alpha$, então

$$r_{\alpha,k}(\beta^\vee) = t(k\alpha^\vee)\big(\beta^\vee - \langle\beta^\vee,\alpha\rangle\alpha^\vee\big) = \beta^\vee - \big(\langle\beta^\vee,\alpha\rangle - k\big)\alpha^\vee,$$

este último vetor pertencendo a $[\Pi^\vee]$ pois $\langle\beta^\vee,\alpha\rangle = \frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{|\beta|^2} \in \mathbb{Z}$.

Agora, $L[\Pi^\vee] \cap W(\Pi) = \{\mathrm{id}_V\}$ pois o único elemento de $L[\Pi^\vee]$ que é um operador linear de V é id_V enquanto $W(\Pi) \subseteq GL(V)$. Por fim, seja W' o subconjunto de $W_a(\Pi)$ formado pelos produtos $t(\mu)w$ com $t(\mu) \in L[\Pi^\vee]$ e $w \in W(\Pi)$. Como ambos $W(\Pi)$, $L[\Pi^\vee]$ são subgrupos de $W_a(\Pi)$ e $L[\Pi^\vee]$ é normal, então W' é um subgrupo de $W_a(\Pi)$. Além disso, W' contém os geradores $r_{\alpha,k} = t(k\alpha^\vee)r_\alpha$, e portanto $W' = W_a(\Pi)$. □

Uma ferramenta importante para o estudo do grupo de Weyl $W(\Pi)$ são as câmaras de Weyl de V com respeito ao sistema de raízes Π, que são as componentes conexas do complementar de $\bigcup_{\alpha\in\Pi}\alpha^\perp$ em V. Isso é justificado pelo fato de que a ação natural de $W(\Pi)$ em V induz uma ação transitiva e livre no conjunto das câmaras de Weyl. Nosso objetivo para os próximos parágrafos é mostrar que algo semelhante ocorre para o grupo de Weyl afim $W_a(\Pi)$.

Seja P a união dos hiperplanos $P_{\alpha,k}$, com $\alpha \in \Pi$ e $k \in \mathbb{Z}$. Como $P_{\alpha,k} = P_{-\alpha,-k}$, podemos considerar apenas os hiperplanos $P_{\alpha,k}$ com $\alpha \in \Pi^+$.

Lema 7.7. *P é invariante pela ação natural de $W_a(\Pi)$ sobre V.*

Demonstração. Seja $r_{\alpha,k}$ um gerador de $W_a(\Pi)$ e tomemos $\lambda \in P$, digamos $\lambda \in P_{\beta,l}$. Fazendo $\gamma = r_\alpha(\beta)$, temos $\gamma \in \Pi$ e

$$\begin{aligned}
\langle r_{\alpha,k}(\lambda),\gamma\rangle &= \langle r_\alpha(\lambda),\gamma\rangle + k\langle\alpha^\vee,\gamma\rangle \\
&= \langle\lambda, r_\alpha(\gamma)\rangle + k\langle\alpha^\vee,\gamma\rangle \\
&= \langle\lambda,\beta\rangle + k\langle\alpha^\vee,\gamma\rangle \in \mathbb{Z}. \quad \square
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, o complementar $V\backslash P$ também é invariante pela ação de $W_a(\Pi)$. Esse complementar é aberto em V, pois se para cada $\alpha \in \Pi^+$ considerarmos o funcional linear $f_\alpha : \lambda \in V \mapsto \langle\lambda,\alpha\rangle \in \mathbb{R}$ então temos

$$P = \bigcup_{\alpha\in\Pi^+} f_\alpha^{-1}(\mathbb{Z})$$

e o conjunto da direita é fechado em V. Mais ainda, $V\backslash P$ é desconexo. Para ver isso, escrevemos $\Pi^+ = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ e definimos para cada $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$ o conjunto

$$A_{\mathbf{k}} = \{\lambda \in V : k_j < \langle\lambda,\alpha_j\rangle < k_j + 1 \text{ para todo } j = 1,\ldots,n\}.$$

Cada $A_{\mathbf{k}}$ é aberto em V, pois é o conjunto-solução de um sistema de inequações lineares estritas, e $A_{\mathbf{k}} \cap A_{\mathbf{k}'} = \emptyset$ sempre que $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$, pois neste caso um elemento de $A_{\mathbf{k}} \cap A_{\mathbf{k}'}$ é solução de um sistema incompatível. Além disso, se $\lambda \in V \backslash P$ então $\langle \lambda, \alpha_j \rangle \notin \mathbb{Z}$ para cada $j = 1, \ldots, n$, e as propriedades básicas de $\mathbb{R}$ implicam que $\lambda \in A_{\mathbf{k}}$ para algum $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$. Deste modo, $V \backslash P$ é a união disjunta de uma coleção de abertos de V, e portanto é desconexo. Os $A_{\mathbf{k}}$ não-vazios são as componente conexas de $V \backslash P$, pois, além de serem abertos e dois-a-dois disjuntos, cada $A_{\mathbf{k}}$ é conexo por ser um subconjunto convexo de V.

Os conjuntos $A_{\mathbf{k}}$ não-vazios são chamados de **alcovas** de V com respeito a Π, e o seu conjunto será denotado por $\mathcal{A}(\Pi)$.[2] Como a ação de $W_a(\Pi)$ preserva $V \backslash P$ e cada elemento de $W_a(\Pi)$ é um homeomorfismo de V, então $z(A) \in \mathcal{A}(\Pi)$ para todos $z \in W_a(\Pi)$ e $A \in \mathcal{A}(\Pi)$, isto é, $W_a(\Pi)$ age em $\mathcal{A}(\Pi)$ através de permutações.

Teorema 7.8. *A ação de $W_a(\Pi)$ sobre $\mathcal{A}(\Pi)$ é transitiva.*

A demonstração desse resultado é bastante envolvente e nos ocupará pelo restante da seção. Primeiramente, precisamos escolher uma alcova particular A_0 cuja órbita provaremos ser todo o $\mathcal{A}(\Pi)$. A escolha natural é

$$A_0 = \{\lambda \in V : 0 < \langle \lambda, \alpha \rangle < 1 \text{ para toda } \alpha \in \Pi^+\}.$$

Temos que A_0 é de fato uma alcova, pois tomando $\lambda \in V$ é tal que $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$ para toda $\alpha \in \Pi^+$, basta multiplicar λ por um escalar positivo suficientemente próximo de zero para que tenhamos um elemento de A_0. Chamaremos A_0 de **alcova principal** de Π.

Segundamente, por razões que ficarão claras adiante, provaremos que é suficiente considerar Π irredutível. Lembramos que um sistema de raízes Π em V é **redutível** se é possível escrever $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ com $\Pi_1, \Pi_2 \neq \emptyset$ e $\Pi_1 \perp \Pi_2$. (Em particular, $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$ pois $0 \notin \Pi$.) Observamos que Π_j, $j = 1, 2$, é um sistema de raízes no subespaço de V gerado por Π_j. Com isso, se Π é redutível, podemos escrever $\Pi = \Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_n$ com $\Pi_j \neq \emptyset$, $\Pi_i \perp \Pi_j$ sempre que $i \neq j$ e com cada Π_j irredutível em $V_j := \operatorname{span}(\Pi_j)$. É imediato que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ e que $V_i \perp V_j$ sempre que $i \neq j$. Se Π não é redutível, dizemos que Π é **irredutível**.

Seja, então, Π um sistema de raízes redutível em V e tomemos $\Pi_1, \ldots, \Pi_n, V_1, \ldots, V_n$ como acima.

Lema 7.9. *Mantendo as notações acima, seja $A \in \mathcal{A}(\Pi)$ e escrevamos*

$$A = \{\lambda \in V : k_\alpha < \langle \lambda, \alpha \rangle < k_\alpha + 1 \textit{ para toda } \alpha \in \Pi^+\}$$

para alguma escolha de números inteiros k_α, $\alpha \in \Pi^+$. Para cada $j = 1, \ldots, n$, definimos

$$A_j := \left\{\lambda \in V_j : k_\alpha < \langle \lambda, \alpha \rangle < k_\alpha + 1 \textit{ para toda } \alpha \in \Pi_j^+\right\},$$

[2] Nem todos os $A_{\mathbf{k}}$ são não-vazios. Por exemplo, se $\alpha_l \in \Pi^+$ pode ser escrita como $\alpha_l = \alpha_i + \alpha_j$ com $\alpha_i, \alpha_j \in \Pi^+$ e $\lambda \in V \backslash P$ satisfaz $k_i < \langle \lambda, \alpha_i \rangle < k_i + 1$ e $k_j < \langle \lambda, \alpha_j \rangle < k_j + 1$, então $k_i + k_j < \langle \lambda, \alpha_l \rangle < k_i + k_j + 2$, de modo que $k_l = k_i + k_j$ ou $k_l = k_i + k_j + 1$. Logo, tomando $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ tal que $k_l < k_i + k_j$, segue que $A_{\mathbf{k}} = \emptyset$. Aplicando esse argumento ao sistema simples Σ determinado por Π^+, vemos que sempre é possível produzir $A_{\mathbf{k}}$'s vazios.

em que $\Pi_j^+ := \Pi_j \cap \Pi^+$. *Então,* $A_j \in \mathcal{A}(\Pi_j)$ *e* $A = \sum_{j=1}^n A_j$. *Em outras palavras, cada alcova* $A \in \mathcal{A}(\Pi)$ *se decompõe como produto cartesiano de alcovas das parcelas irredutíveis de* Π.

Demonstração. Para provar que A_j é alcova de Π_j é suficiente provar que $A_j \neq \emptyset$. Seja $\lambda \in A$ e escrevamos $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, com $\lambda_i \in V_i$. Então, se $\alpha \in \Pi_j^+$, temos

$$\langle \lambda, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \lambda_i, \alpha \rangle = \langle \lambda_j, \alpha \rangle,$$

e portanto $\lambda_j \in A_j$. Este argumento também prova que $A \subseteq \sum_{j=1}^n A_j$. Agora, escolhemos $\lambda_j \in A_j$ para cada $j = 1, \ldots, n$ e tomemos $\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j \in V$. Dada uma raiz $\alpha \in \Pi^+$, temos que $\alpha \in \Pi_i^+$ para algum $i = 1, \ldots, n$, e portanto

$$\langle \lambda, \alpha \rangle = \langle \lambda_i, \alpha \rangle \in (k_\alpha, k_\alpha + 1).$$

Logo, $\lambda \in A$. $\square$

Seja $A \in \mathcal{A}(\Pi)$ e escrevamos $A = \sum_{j=1}^n A_j$ de acordo com o Lema 7.9. Denotemos por A_0^j a alcova principal de Π_j. Pelo Lema 7.9, temos $A_0 = \sum_{j=1}^n A_0^j$. Supondo que o Teorema 7.8 é válido para sistemas de raízes irredutíveis, temos que para cada $j = 1, \ldots, n$ existe $z_j \in W_a(\Pi_j)$ tal que $z_j(A_j) = A_0^j$. Escrevamos $z_j = t_j(\mu_j) w_j$, com $\mu_j \in [\Pi_j^\vee]$ e $w_j \in W(\Pi_j)$. Cada w_j pode ser estendido a V pondo $w_j(\lambda_i) = \lambda_i$ para $\lambda_i \in V_i$ $(i \neq j)$ e assim obtemos um operador linear ortogonal em V que também denotaremos por w_j. Na verdade, $w_j \in W(\Pi)$, pois esse processo de extensão aplicado às reflexões r_α, $\alpha \in \Pi_j$, fornece elementos de $W(\Pi)$. Sejam $w := w_1 \cdots w_n \in W(\Pi)$ e $\mu := \sum_{j=1}^n \mu_j \in [\Pi^\vee]$ e tomemos $z := t(\mu) w \in W_a(\Pi)$.

Afirmamos que $z(A) = A_0$. Para ver isso, é suficiente provar que $z(A) \cap A_0 \neq \emptyset$ uma vez que $z(A)$ e A_0 são componentes conexas de $V \backslash P$. Seja $\lambda \in A$ e escrevamos $\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j$, com $\lambda_j \in A_j$. Então,

$$\begin{aligned} z(\lambda) &= w(\lambda) + \mu = \sum_{j=1}^n w(\lambda_j) + \sum_{j=1}^n \mu_j \\ &= \sum_{j=1}^n (w_j(\lambda_j) + \mu_j) \\ &= \sum_{j=1}^n z_j(\lambda_j) \in \sum_{j=1}^n A_0^j = A_0. \end{aligned}$$

Terceiramente, lembramos que A_0 é o conjunto-solução do sistema de inequações lineares

$$0 < \langle \lambda, \alpha \rangle < 1, \quad \alpha \in \Pi^+$$

que pode admitir muitas inequações redundantes. Para provar o Teorema 7.8 (mesmo com a hipótese adicional de Π irredutível), ainda é necessário o trabalho preliminar de eliminar essas redundâncias.

Proposição 7.10. *Seja Π um sistema de raízes irredutível em V e fixemos um sistema simples $\Sigma \subseteq \Pi$. Então, existe $\widetilde{\alpha} \in \Pi^+$ tal que $\widetilde{\alpha} - \alpha$ é uma soma de raízes simples para toda $\alpha \in \Pi^+$. Além disso, $\widetilde{\alpha}$ é a única raiz com essa propriedade.*

Demonstração. Escrevamos $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Se tal raiz $\widetilde{\alpha}$ existe, então $\widetilde{\alpha} \geq \alpha$ para toda $\alpha \in \Pi^+$. Isso significa que $\widetilde{\alpha}$ é máxima em Π^+, e portanto é única. Para a existência, tomemos $\widetilde{\alpha}$ a raiz máxima de Π^+ e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples complexa de dimensão finita e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan tal que $\Pi = \Pi(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$. Então, $\widetilde{\alpha}$ é o peso máximo da representação adjunta de $\mathfrak{g}$. Além disso, como Π é irredutível, então $\mathfrak{g}$ é simples, ou seja, $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma representação irredutível. Portanto, todo peso de ad (que são as raízes $\alpha \in \Pi$) pode ser escrito na forma

$$\alpha = \widetilde{\alpha} - \sum_{j=1}^{l} n_j \alpha_j, \quad n_j \in \mathbb{N},$$

e $\widetilde{\alpha}$ satisfaz a propriedade desejada. □

Corolário 7.11. *Seja Π um sistema de raízes irredutível no espaço vetorial V, $\Sigma \subseteq \Pi$ um sistema simples e A_0 a alcova principal relativa a Π^+. Sendo $\widetilde{\alpha} \in \Pi^+$ a raiz máxima, temos*

$$A_0 = \{\lambda \in V : 0 < \langle \lambda, \alpha \rangle \text{ para toda } \alpha \in \Sigma \text{ e } \langle \lambda, \widetilde{\alpha} \rangle < 1\}.$$

Demonstração. Claramente, A_0 está contido no conjunto da direita. Reciprocamente, suponhamos que $\lambda \in V$ satisfaz $0 < \langle \lambda, \alpha \rangle$ para $\alpha \in \Sigma$ e $\langle \lambda, \widetilde{\alpha} \rangle < 1$. Uma vez que cada raiz $\alpha \in \Pi^+$ é soma de raízes simples, então a primeira coleção de desigualdades implica que $0 < \langle \lambda, \alpha \rangle$ para toda $\alpha \in \Pi^+$. Além disso, se $\alpha \in \Pi^+$, então $\widetilde{\alpha} - \alpha$ também é soma de raízes simples, de modo que $0 \leq \langle \lambda, \widetilde{\alpha} - \alpha \rangle$. Com isso,

$$\langle \lambda, \alpha \rangle \leq \langle \lambda, \widetilde{\alpha} \rangle < 1,$$

e portanto $\lambda \in A_0$. □

Mantendo a notação do Corolário 7.11, chamamos os hiperplanos $P_{\alpha,0}$, $\alpha \in \Sigma$, e $P_{\widetilde{\alpha},1}$ de **paredes** da alcova principal A_0.

Demonstração do Teorema 7.8. Seja $A \in \mathcal{A}(\Pi)$ e tomemos $\lambda \in A$, $\lambda_0 \in A_0$. Para mostrar que existe $z \in W_a(\Pi)$ tal que $z(A) = A_0$, é suficiente mostrar que existe $z \in W_a(\Pi)$ tal que $z(\lambda) \in A_0$. Para tanto, consideremos $\mathcal{O}(\lambda)$ a órbita de λ por $W_a(\Pi)$. Sendo $W_a(\Pi)$ um subgrupo discreto e fechado de $\mathrm{Af}(V)$, então $\mathcal{O}(\lambda)$ é um subconjunto discreto e fechado de V, e com isso existe $z \in W_a(\Pi)$ tal que a distância de $\gamma := z(\lambda)$ a λ_0 é mínima. Afirmamos que $\gamma \in A_0$. Caso contrário, uma das paredes de A_0 separa γ e λ_0. Seja P essa parede e $r \in W_a(\Pi)$ a reflexão ortogonal que fixa P. Seja C a curva poligonal com vétrices $\gamma, r(\gamma), \lambda_0, r(\lambda_0)$. Então, C é um trapézio cujos lados paralelos são os segmentos[3] $[\gamma, r(\gamma)]$ e $[\lambda_0, r(\lambda_0)]$ e cujos lados não-paralelos são

[3]Dados $\lambda, \mu \in V$, denotamos $[\lambda, \mu] := \{(1-t)\lambda + t\mu : t \in [0,1]\}$.

$[r(\gamma), \lambda_0]$ e $[r(\lambda_0), \gamma]$. Uma vez que r é uma isometria involutiva de V, então os lados não paralelos de C têm o mesmo comprimento, e portanto a diagonal $[\gamma, \lambda_0]$ possui comprimento maior do que esses dois lados, isto é,

$$d(\gamma, \lambda_0) > d(r(\gamma), \lambda_0).$$

(Este é um fato básico de Geometria Euclideana provada usando a Lei dos Cossenos.) Uma vez que $r(\gamma) \in \mathcal{O}(\lambda)$, essa conclusão contradiz a minimalidade de $d(\gamma, \lambda_0)$ e devemos ter $\gamma \in A_0$. $\square$

Ainda é possível provar que a ação de $W_a(\Pi)$ em $\mathcal{A}(\Pi)$ é livre, mas a demonstração desse fato foge aos objetivos deste trabalho. O leitor interessado pode encontrá-la em (HUMPHREYS, 1990), capítulo 4.

7.3 Elementos Regulares e Singulares Revisitados

Nosso primeiro objetivo nesta seção é determinar quais quais vetores $H \in \mathfrak{t}$ são enviados pela exponencial em T_r e relacioná-los com as alcovas do sistema de raízes Π. Pelo que discutimos na seção 7.1, $x := \exp(H)$ é regular exatamente quando $\xi_\alpha(x) = e^{\alpha(H)} \neq 1$ para toda $\alpha \in \Pi^+$, isto é, quando

$$\alpha(H) \notin 2\pi i\mathbb{Z} \text{ para toda } \alpha \in \Pi^+.$$

Seja $S : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$ o isomorfismo linear definido por $S(H) = \left\langle \cdot\, , \frac{-iH}{2\pi} \right\rangle \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$, em que $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto interno em $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ determinado pela forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$. Deste modo, $x \in T_r$ se, e somente se,

$$\langle S(H), \alpha \rangle = \left\langle \frac{-iH}{2\pi}, H_\alpha \right\rangle = \frac{-i\alpha(H)}{2\pi} \notin \mathbb{Z} \quad \text{para toda } \alpha \in \Pi^+,$$

e isso significa que $S(H)$ pertence a alguma alcova de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$ relativa a Π. Mantendo a notação introduzida na seção 7.2, seja A_0 a alcova principal de Π, $\mathfrak{t}_0$ a imagem de A_0 por S^{-1} e $T_0 := \exp(\mathfrak{t}_0)$. Temos

$$\mathfrak{t}_0 = \{H \in \mathfrak{t} : 0 < -i\alpha(H) < 2\pi \text{ para toda } \alpha \in \Pi^+\}$$

e, sendo $\exp : \mathfrak{t} \to T$ uma aplicação de recobrimento (e portanto aberta), T_0 é aberto em T.

Teorema 7.12. *Seja G um grupo de Lie compacto e conexo de centro trivial. Então, mantendo as notações acima, temos que:*

(a) $\exp : \mathfrak{t}_0 \to T_0$ *é um difeomorfismo;*

(b) se $x \in T_r$, então a classe de conjugação de x intersecta T_0 em exatamente um ponto;

(c) *a aplicação* $p : G/T \times T_0 \to G_r$ *definida por* $p(xT, y) = xyx^{-1}$ *é um recobrimento finito.*

Demonstração. (a) Uma vez que $\exp : \mathfrak{t}_0 \to T_0$ é diferenciável (C^∞), aberta e sobrejetiva, só resta provar que exp é injetiva para que seja difeomorfismo. Sejam $H_1, H_2 \in \mathfrak{t}_0$ tais que $\exp(H_1) = \exp(H_2)$. Isso implica que

$$e^{\alpha(H_1)} = \xi_\alpha(\exp(H_1)) = \xi_\alpha(\exp(H_2)) = e^{\alpha(H_1)}$$

para toda $\alpha \in \Pi^+$. Como $t \in (0, 2\pi) \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$ é injetiva, concluimos que $\alpha(H_1) = \alpha(H_2)$ para toda $\alpha \in \Pi^+$. Como $Z_G = \{1\}$, então $\mathfrak{g}$ é semi-simples e, portanto, Π gera $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$. Logo, $H_1 = H_2$.

(b) Sejam $z_1, z_2 \in N_G(T)$ tais que $x' := z_1 x z_1^{-1}$ e $x'' := z_2 x z_2^{-1}$ pertencem a T_0 e escrevamos $x' = \exp(H_1)$ e $x'' = \exp(H_2)$ com $H_1, H_2 \in \mathfrak{t}_0$. Seja $\phi : W(T, G) \to W(\Pi)$ o isomorfismo definido na seção 3.4 e tomemos $z := z_2 z_1^{-1} \in N_G(T)$. Então, $\phi(zT)A_0 = A_0$, pois $S(H_1) \in A_0$ e

$$\begin{aligned} \phi(zT)(S(H_1)) &= S(\mathrm{Ad}(z)H_1) = S(\exp^{-1}(\exp(\mathrm{Ad}(z)H_1))) \\ &= S(\exp^{-1}(z\exp(H_1)z^{-1})) = S(\exp^{-1}(zx'z^{-1})) \\ &= S(\exp^{-1}(x'')) = S(H_2) \in A_0. \end{aligned}$$

Com isso, $\phi(zT)$ fixa a câmara de Weyl associada a Π^+ (pois ela contém A_0), e portanto $\phi(zT) = \mathrm{id}_{\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*}$. Logo, $z \in T$ e $x'' = zx'z^{-1} = x'$. Isso prova que a interseção da classe de conjugação de x com T_0 contém no máximo um elemento.

Para provar que essa interseção é não-vazia, escrevamos $x = \exp(H)$ para algum $H \in \mathfrak{t}$ e tomemos $A \in \mathcal{A}(\Pi)$ tal que $S(H) \in A$. Seja $t(\mu)w \in W_a(\Pi)$ tal que $(t(\mu)w)A = A_0$, com $w \in W(\Pi)$ e $\mu \in [\Pi^\vee]$ (Teorema 7.8). Escrevendo $w = \phi(zT)$ para algum $z \in N_G(T)$, temos

$$\mathrm{Ad}(z)H + S^{-1}(\mu) = S^{-1}(wS(H) + \mu) = S^{-1}\big((t(\mu)w)S(H)\big) \in \mathfrak{t}_0,$$

e portanto

$$(zxz^{-1})\exp(S^{-1}(\mu)) = \exp(\mathrm{Ad}(z)H + S^{-1}(\mu)) \in T_0.$$

Com isso, resta mostrar que $\exp(S^{-1}(\mu)) = 1$ para todo $\mu \in [\Pi^\vee]$. De fato, se $\alpha \in \Pi$, então

$$\begin{aligned} \beta(S^{-1}(\alpha^\vee)) &= i\beta(-iS^{-1}(\alpha^\vee)) = i\langle H_\beta, -iS^{-1}(\alpha^\vee)\rangle \\ &= 2\pi i \left\langle H_\beta, \frac{-iS^{-1}(\alpha^\vee)}{2\pi} \right\rangle = 2\pi i \alpha^\vee(H_\beta) \\ &= 2\pi i \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in 2\pi i \mathbb{Z} \end{aligned}$$

para toda $\beta \in \Pi$. Logo,

$$\xi_\beta(\exp(S^{-1}(\alpha^\vee))) = e^{\beta(S^{-1}(\alpha^\vee))} = 1.$$

Isso significa que $\mathrm{Ad}(\exp(S^{-1}(\alpha^\vee))) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, e portanto $\exp(S^{-1}(\alpha^\vee)) \in Z_G = \{1\}$.

(c) Primeiramente, p está bem-definida, pois T é abeliano, e é sobrejetiva pelo Teorema 3.26 e pelo item (b) acima. Com isso, para provar que p é recobrimento, é suficiente mostrar (1) que p é um difeomorfismo local, o que faremos provando que a diferencial de p é um isomorfismo em cada ponto, e (2) que existe uma ação livre de um grupo finito ($W(T,G)$) sobre $G/T \times T_0$ cujas órbitas coincidem com as pré-imagens dos elementos de G_r por p.

Demonstração de (1). Uma vez que

$$\dim(G/T \times T_0) = (\dim(G) - \dim(T)) + \dim(T_0) = \dim(G) = \dim(G_r)$$

e p é obtida fatorando a aplicação $q : G \times T_0 \to G_r$, $q(x,y) = xyx^{-1}$, é suficiente provar que o núcleo da diferencial de q num ponto $(x,y) \in G \times T_0$ é composto por vetores da forma $(X_x, 0)$ com $X \in \mathfrak{t}$. A diferencial de q foi calculada na demonstração do Teorema 3.26:

$$dq_{(x,y)}(X_x, Y_y) = d(L_{q(x,y)})_1 \left\{\mathrm{Ad}(x)\left[(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})X + Y\right]\right\}_1, \quad X \in \mathfrak{g},\ Y \in \mathfrak{t}.$$

Deste modo, $dq_{(x,y)}(X_x, Y_y) = 0$ se, e somente se, $(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})X + Y = 0$. Como y é um elemento regular, então y^{-1} também é, pois os autovalores de $\mathrm{Ad}(y^{-1})$ são os inversos dos autovalores de $\mathrm{Ad}(y)$, de modo que $\ker(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{t}$ pela Proposição 7.2. Seja $\mathfrak{t}^{\perp}$ o complemento ortogonal de $\mathfrak{t}$ com respeito a algum produto interno invariante em $\mathfrak{g}$. Uma vez que $\mathfrak{t}$ é um subespaço invariante pela ação de $\mathrm{Ad}(y^{-1})$, então $\mathfrak{t}^{\perp}$ também é. Além disso, a restrição $\mathrm{Ad}(y^{-1})|_{\mathfrak{t}^{\perp}}$ é um operador linear que não admite 1 como autovalor, o que significa que $(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})|_{\mathfrak{t}^{\perp}}$ é injetivo. Escrevendo $X = X_{\mathfrak{t}} + X_{\mathfrak{t}^{\perp}}$, em que $X_{\mathfrak{t}} \in \mathfrak{t}$ e $X_{\mathfrak{t}^{\perp}} \in \mathfrak{t}^{\perp}$, temos

$$0 = (\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})X + Y = (\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})X_{\mathfrak{t}^{\perp}} + Y.$$

Uma vez que $(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})X_{\mathfrak{t}^{\perp}} \in \mathfrak{t}^{\perp}$ e $Y \in \mathfrak{t}$, então $(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})X_{\mathfrak{t}^{\perp}} = Y = 0$. Com isso, $X_{\mathfrak{t}^{\perp}} = 0$, e portanto $X = X_{\mathfrak{t}} \in \mathfrak{t}$.

Demonstração de (2). Seja $\tau : W(T,G) \times (G/T \times T_0) \to G/T \times T_0$ definida por

$$\tau(zT, (xT, y)) := (xz^{-1}T, zyz^{-1}).$$

As verificações de que τ está bem-definida e que é uma ação à esquerda são rotineiras e as omitimos. Para ver que τ é livre, seja $(xT, y) \in G/T \times T_0$ e tomemos $zT \in W(T,G)$ tal que $(xz^{-1}T, zyz^{-1}) = (xT, y)$. Logo, $xz^{-1}T = xT$, isto é, $z \in T$. Agora, sejam $(xT, y) \in G/T \times T_0$ e $zT \in W(T,G)$. Então,

$$p(xz^{-1}T, zyz^{-1}) = (xz^{-1})zyz^{-1}(xz^{-1})^{-1} = xyx^{-1} = p(xT, y).$$

Reciprocamente, sejam $(xT, y), (x'T, y') \in G/T \times T_0$ tais que $p(xT, y) = p(x'T, y')$. Isto significa que $xyx^{-1} = x'y'x'^{-1}$, ou seja, que $y' = (x'^{-1}x)y(x'^{-1}x)^{-1}$. Pela

Proposição 3.36, existe um elemento $z' \in Z_G(y')_0$ tal que $z := z'x'^{-1}x \in N_G(T)$ e $y' = zyz^{-1}$. Como y' é regular, então $Z_G(y')_0 = T$ pelo Corolário 7.3, e portanto

$$xz^{-1}T = x(x^{-1}x'z'^{-1})T = x'z'^{-1}T = x'T.$$

Logo, $(x'T, y') = \tau(zT, (xT, y))$. □

Na seção 7.4, utilizaremos o Teorema 7.12 para provar o Teorema de Weyl deformando continuamente laços baseados em um elemento regular fixado para que este laço esteja contido em G_r, e com isso utilizamos a propriedade de levantamento único de caminhos de p para fazer uma contagem das classes de homotopia. No entanto, para essa técnica funcionar, é necessário antesverificar que G_s é "pequeno" o suficiente.

Teorema 7.13. *Seja G um grupo de Lie compacto e conexo com centro trivial. Então, o conjunto G_s dos elementos singulares de G é uma união finita de subvariedades imersas de G, cada uma de dimensão menor ou igual a* $\dim(G) - 3$.

Demonstração. Seja $x_0 \in G_s$ e tomemos $x_0' \in T$ conjugado a x_0. Seja $R = \{\alpha \in \Pi : \xi_\alpha(x_0') = 1\}$ e, no espírito da demonstração do Teorema 7.12, consideremos a aplicação $p_R : G/Z_G(T_R) \times T_R^\times \to G$ definida por $p_R(xZ_G(T_R), y) = xyx^{-1}$. Claramente, p_R está bem definida e a sua imagem está contida em G_s. Além disso, p_R é diferenciável, pois é induzida pela aplicação $q_R : G \times T_R^\times \to G$, $q_R(x, y) = xyx^{-1}$, através de um quociente por um subgrupo fechado. Nosso objetivo é provar (1) que p_R é imersão e (2) que existe uma ação livre de um grupo finito sobre $G/Z_G(T_R) \times T_R^\times$ cujas órbitas são as pré-imagens dos elementos de $\mathrm{Im}(p_R)$ por p_R. Disso decorre o Teorema, pois (1) e (2) implicam que $\mathrm{Im}(p_R)$ é uma subvariedade imersa de G contida em G_s e que contém x_0. Além disso,

$$\begin{aligned}
\dim(\mathrm{Im}(p_R)) &= \dim(G/Z_G(T_R) \times T_R^\times) \\
&= \dim(G) - \dim(Z_G(T_R)) + \dim(T_R^\times) \\
&\leq \dim(G) - (\dim(T) + 2) + \dim(T) - 1 \\
&= \dim(G) - 3
\end{aligned}$$

pela Proposição 7.2 e comentários subseqüentes. Por fim, é imediato que cada elemento singular pertence a pelo menos uma dessas imagens, que são em quantidade finita uma vez que Π é finito.

Demonstração de (1). Como p_R é induzida por q_R através de um quociente por $Z_G(T_R)$, é suficiente provar que o núcleo da diferencial de q_R no ponto $(x, y) \in G \times T_R^\times$ consiste de vetores da forma $(X_x, 0)$ com X na álgebra de Lie de $Z_G(T_R)$, que coincide com $\mathfrak{p}_R$ pelo Corolário 7.4. É imediato que os vetores dessa forma pertencem ao núcleo de $d(q_R)_{(x,y)}$, de modo que precisamos apenas provar a inclusão contrária. Sejam $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{t}_R$ tais que $d(q_R)_{(x,y)}(X_x, Y_y) = 0$. Temos

$$d(q_R)_{(x,y)}(X_x, Y_y) = d(L_{q_R(x,y)})_1 \left\{\mathrm{Ad}(x)\left[(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})X + Y\right]\right\}_1,$$

o que significa que $(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})X + Y = 0$. O fato de y pertencer a $T_R^\times$ implica que $y^{-1} \in T_R^\times$, pois os autovalores de $\mathrm{Ad}(y^{-1})$ são os inversos dos autovalores de $\mathrm{Ad}(y)$. Então, $\mathfrak{p}_R$ é invariante por $\mathrm{Ad}(y^{-1})$, pois $\mathrm{Ad}(y^{-1})$ age como a identidade neste subespaço, e portanto o complemento ortogonal $\mathfrak{p}_R^\perp$ de $\mathfrak{p}_R$ com respeito a algum produto interno invariante em $\mathfrak{g}$ também é invariante por $\mathrm{Ad}(y^{-1})$. Uma vez que a multiplicidade de 1 como autovalor de $\mathrm{Ad}(y^{-1})$ é $\dim(T) + |R| = \dim \mathfrak{p}_R$ pela Proposição 7.2, então $\mathrm{Ad}(y^{-1})|_{\mathfrak{p}_R^\perp}$ não admite 1 como autovalor, isto é, $(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})|_{\mathfrak{p}_R^\perp}$ é injetivo. Deste modo, escrevendo $X = X_{\mathfrak{p}_R} + X_{\mathfrak{p}_R^\perp}$, em que $X_{\mathfrak{p}_R} \in \mathfrak{p}_R$ e $X_{\mathfrak{p}_R^\perp} \in \mathfrak{p}_R^\perp$, temos

$$0 = (\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})X + Y = (\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})X_{\mathfrak{p}_R^\perp} + Y.$$

Logo, $X_{\mathfrak{p}_R^\perp} = Y = 0$, pois $(\mathrm{Ad}(y^{-1}) - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})X_{\mathfrak{p}_R^\perp} \in \mathfrak{p}_R^\perp$ e $Y \in \mathfrak{t}_R \subseteq \mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{p}_R$, e portanto $X = X_{\mathfrak{p}_R} \in \mathfrak{p}_R$.

Demonstração de (2). Seja W_R o subgrupo de $W(\Pi)$ que estabiliza R, ou seja,

$$W_R := \{w \in W(\Pi) : w(R) \subseteq R\}.$$

Usando o isomorfismo $\phi : W(T,G) \to W(\Pi)$ definido na seção 3.4, podemos identificar W_R com o subgrupo de $W(T,G)$ formado pelas classes laterais zT com $z \in N_G(T) \cap N_G(T_R)$. Com efeito, seja $z \in N_G(T)$ tal que $\phi(zT)R \subseteq R$ e tomemos $y \in T_R$. Sendo R finito e ϕ um homomorfismo, então $\phi(z^{-1}T)R \subseteq R$ também. Dada uma raiz $\alpha \in R$ e um autovetor $E_\alpha \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\alpha$, temos $\mathrm{Ad}(z^{-1})E_\alpha \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\phi(z^{-1}T)\alpha}$ (isso foi provado na demonstração do Teorema 3.35), de modo que

$$\begin{aligned}
\xi_\alpha(zyz^{-1})E_\alpha &= \mathrm{Ad}(z)\mathrm{Ad}(y)\mathrm{Ad}(z^{-1})E_\alpha \\
&= \mathrm{Ad}(z)\xi_{\phi(z^{-1}T)\alpha}(y)\mathrm{Ad}(z^{-1})E_\alpha \\
&= \xi_{\phi(z^{-1}T)\alpha}(y)E_\alpha = E_\alpha
\end{aligned}$$

e portanto $\xi_\alpha(zyz^{-1}) = 1$. (Esse argumento também prova que $z \in N_G(T_R^\times)$ se $\phi(zT) \in W_R$.) Reciprocamente, se $zT \in N_G(T) \cap N_G(T_R)$, então dada $\alpha \in R$ temos

$$\begin{aligned}
\xi_{\phi(z^{-1}T)\alpha}(y)E_\alpha &= \mathrm{Ad}(z)\xi_{\phi(z^{-1}T)\alpha}(y)\mathrm{Ad}(z^{-1})E_\alpha \\
&= \mathrm{Ad}(z)\mathrm{Ad}(y)\mathrm{Ad}(z^{-1})E_\alpha \\
&= \xi_\alpha(zyz^{-1})E_\alpha = E_\alpha
\end{aligned}$$

para todo $y \in T_R$, e portanto $z^{-1}T \in W_R$.

Definimos $\tau : W_R \times (G/Z_G(T_R) \times T_R^\times) \to G/Z_G(T_R) \times T_R^\times$ por

$$\tau(zT, (xZ_G(T_R), y)) = (xz^{-1}Z_G(T_R), zyz^{-1}).$$

A discussão do parágrafo anterior e o fato de T estar contido em $Z_G(T_R)$ implicam que τ está bem-definida, e é imediata a verificação de que τ é uma ação à esquerda.

Primeiro, verifiquemos que as órbitas de τ são as pré-imagens dos elementos de $\mathrm{Im}(p_R)$ por p_R. Sejam $(xZ_G(T_R), y) \in G/Z_G(T_R) \times T_R^\times$ e $zT \in W_R$. Então,

$$p_R(xz^{-1}Z_G(T_R), zyz^{-1}) = (xz^{-1})zyz^{-1}(xz^{-1})^{-1} = xyx^{-1} = p_R(xZ_G(T_R), y),$$

provando que p_R é constante nas órbitas de τ. Reciprocamente, sejam

$$(xZ_G(T_R), y), (x'Z_G(T_R), y') \in G/Z_G(T_R) \times T_R^\times$$

tais que $p_R(xZ_G(T_R), y) = p_R(x'Z_G(T_R), y')$. Então, $xyx^{-1} = x'y'x'^{-1}$, ou seja,

$$y' = (x'^{-1}x)y(x'^{-1}x)^{-1}.$$

Pela Proposição 3.36, existe $z' \in Z_G(y')_0$ tal que $z := z'x'^{-1}x \in N_G(T)$ e $y' = zyz^{-1}$. Pelo Corolário 7.5, $z' \in Z_G(T_R)$, de modo que

$$xz^{-1}Z_G(T_R) = x(x^{-1}x'z'^{-1})Z_G(T_R) = x'Z_G(T_R).$$

Logo, $(x'Z_G(T_R), y') = (xz^{-1}Z_G(T_R), zyz^{-1})$. Além disso, $zT \in W_R$, pois se $\alpha \in R$ então

$$\xi_{\phi(zT)\alpha}(y') = \xi_\alpha(z^{-1}y'z) = \xi_\alpha(y) = 1,$$

o que implica $\phi(zT)\alpha \in R$ uma vez que $y \in T_R^\times$.

Infelizmente, τ nem sempre é livre. No entanto, provaremos a seguir que os subgrupos de isotropia de τ são todos iguais e que este subgrupo W_R' é normal em W_R. Com isso, τ induz uma ação livre de W_R/W_R' sobre $G/Z_G(T_R) \times T_R^\times$ que satisfaz as propriedades desejadas.

Seja W_R' o subconjunto de W_R formado pelas classes zT com $z \in N_G(T) \cap Z_G(T_R)$. Como $Z_G(T_R)$ é um subgrupo normal de $N_G(T_R)$, então $N_G(T) \cap Z_G(T_R)$ é normal em $Z_G(T) \cap N_G(T_R)$, e portanto W_R' é um subgrupo normal de W_R. Afirmamos que W_R' é o subgrupo de isotropia de um ponto $(xZ_G(T_R), y) \in G/Z_G(T_R) \times T_R^\times$. De fato, se $zT \in W_R$ é um elemento do subgrupo de isotropia de $(xZ_G(T_R), y)$, então

$$(xZ_G(T_R), y) = (xz^{-1}Z_G(T_R), zyz^{-1}),$$

ou seja, $z \in Z_G(T_R)$ pela igualdade na primeira coordenada. Reciprocamente, se $zT \in W_R'$, então $z \in Z_G(T_R)$ e

$$(xz^{-1}Z_G(T_R), zyz^{-1}) = (xZ_G(T_R), y).$$

Com isso, a demonstração do Teorema está concluída. □

7.4 A Quarta Demonstração

Nesta seção, vamos utilizar as ferramentas desenvolvidas neste capítulo para provar o Teorema de Weyl trabalhando diretamente com as classes de homotopia dos laços de G. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado.

Teorema 7.14. *Seja G um grupo de Lie conexo e compacto de centro trivial. Então, o grupo fundamental de G é finito.*

Se G é um grupo de Lie compacto e conexo cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semi-simples, então $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é um grupo de Lie que satisfaz às hipóteses do Teorema 7.14 e $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é um homomorfismo de recobrimento. Isto significa que G e $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ possuem o mesmo recobrimento universal $\widetilde{G}$, e portanto $G = \widetilde{G}/D$ e $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \widetilde{G}/E$, com D, E subgrupos discretos e centrais de $\widetilde{G}$. Como o centro de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ é trivial, então $E = Z_{\widetilde{G}}$. Logo, $D \subseteq E$. Deste modo, supondo que o Teorema 7.14 é verdadeiro, temos $E \cong \pi_1(\mathrm{Int}(\mathfrak{g}))$ finito, e portanto $\pi_1(G) \cong D \subseteq E$ é finito. Com isso, está provado o Teorema de Weyl.

Demonstração do Teorema 7.14. Fixemos $x_0 \in G$ um elemento regular. Se f é um laço em G baseado em x_0, então f é homotópico a um laço $\widehat{f}$ também baseado em x_0 mas que está contido em G_r. Isto ocorre devido ao fato de G_s ser a união finita de uma quantidade finita de subvariedades de G cada uma com dimensão menor ou igual a $\dim G - 3$ (Teorema 7.13). Deste modo, se f passa por algum ponto de G_s, podemos deformar f continuamente e evitar que isto ocorra. Para cada $[f] \in \pi_1(G, x_0)$, escolhamos um laço $f_r \in [f]$ contido em G_r.

Seja $p : G/T \times T \to G$ a aplicação definida por $p(zT, y) = zyz^{-1}$. Pelo Teorema 7.12, a restrição $p : G/T \times T_0 \to G_r$ é um recobrimento finito. Fixado $(z_0T, y_0) \in p^{-1}(x_0)$, definimos a função $\varphi : \pi_1(G, x_0) \to p^{-1}(x_0)$ da seguinte maneira: para cada classe de homotopia $[f] \in \pi_1(G, x_0)$, tomamos $\widetilde{f_r}$ o levantamento de f_r a $G/T \times T_0$ tal que $\widetilde{f_r}(0) = (z_0T, y_0)$ e definimos $\varphi([f]) = \widetilde{f_r}(1)$. Uma vez que $p^{-1}(x_0)$ é finito, para verificar que $\pi_1(G, x_0)$ é finito é suficiente mostrar que φ é injetiva.

Sejam f, g laços em G_r baseados em x_0 tais que $\widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$. Precisamos provar que $[f] = [g]$, isto é, que o laço $h := f * g^{-1}$ é homotópico a x_0. Como $\widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$, então o levantamento $\widetilde{h}$ de h a $G/T \times T_0$ que satisfaz $\widetilde{h}(0) = (z_0T, y_0)$ coincide com $\widetilde{f} * \widetilde{g}^{-1}$. Em particular, $\widetilde{h}$ é um laço em $G/T \times T_0$ baseado em (z_0T, y_0). Escrevamos $\widetilde{h}(t) = (u(t), \gamma(t))$, com $u(t) \in G/T$ e $\gamma(t) \in T_0$. Como T_0 é simplesmente conexo pela parte (a) do Teorema 7.12, então γ é homotópica a y_0, e portanto $\widetilde{h}$ é homotópica a $(u(t), y_0)$. Logo, h é homotópica a $\widehat{h}(t) = p(u(t), y_0)$. Seja $Y \in \mathfrak{t}_0$ tal que $\exp(Y) = y_0$ e definamos $H : [0,1] \times [0,1] \to G$ por

$$H(t, s) = p\big(u(t), \exp((1-s)Y)\big) \cdot p\big(u(0), \exp(sY)\big).$$

Claramente, H é contínua. Além disso,

$$\begin{aligned} H(t,0) &= p(u(t), y_0) \cdot p(u(0), 1) = \widehat{h}(t) \cdot 1 = \widehat{h}(t) \\ H(t,1) &= p(u(t), 1) \cdot p(u(0), y_0) = 1 \cdot p(z_0T, y_0) = x_0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H(0,s) &= p\big(u(0), \exp((1-s)Y)\big) \cdot p\big(u(0), \exp(sY)\big) \\
&= p\big(z_0T, \exp((1-s)Y)\big) \cdot p\big(z_0T, \exp(sY)\big) \\
&= \big(z_0 \exp((1-s)Y) z_0^{-1}\big) \cdot \big(z_0 \exp(sY) z_0^{-1}\big) \\
&= z_0 \exp(Y) z_0^{-1} = z_0 y_0 z_0^{-1} = x_0 \\
H(1,s) &= p\big(u(1), \exp((1-s)Y)\big) \cdot p\big(u(1), \exp(sY)\big) \\
&= p\big(z_0T, \exp((1-s)Y)\big) \cdot p\big(z_0T, \exp(sY)\big) \\
&= x_0,
\end{aligned}
$$

provando que H é uma homotopia que deforma $\widehat{h}$ em x_0. Portanto, h é homotópica a x_0 e o Teorema está provado. $\square$

Bibliografia

FOLLAND, Gerald B. **Real Analysis: Modern Techniques and their Applications**. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999.

HUMPHREYS, James. **Reflection Groups and Coxeter Groups**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990.

JACOBSON, Nathan. **Basic Algebra I**. 2. ed. [S.l.]: Dover Publications, Inc., 2009.

KNAPP, Anthony W. **Representation Theory of Semisimple Groups**. 1. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 1986.

KNAPP, Anthony W. **Lie Groups Beyond an Introduction**. 2. ed. [S.l.]: Birkhäuser, 2002.

KNAPP, Anthony W. **Basic Real Analysis**. 1. ed. [S.l.]: Birkhäuser, 2005.

LEE, John M. **Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature**. 1. ed. [S.l.]: Springer, 1997.

SAN MARTIN, Luiz Antonio Barrera. **Álgebras de Lie**. 1. ed. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 1999.

SAN MARTIN, Luiz Antonio Barrera. Grupos de lie. Notas de aula. 2006. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/ smartin/cursos/grupolie-2006/>.

ŽELOBENKO, Dmitriĭ Petrovich. **Compact Lie Groups and Their Representations**. 1. ed. [S.l.]: American Mathematical Society, 1973.