Gisele C. Ducati

Operadores diferenciais quaterniônicos e aplicações em Física

Orientador: Prof. Dr. Stefano de Leo
Departamento de Matemática Aplicada - UNICAMP - Brasil

Co-orientador: Prof. Dr. Pietro Rotelli
Departamento de Física - Universidade de Lecce - Itália

Campinas 2002

Operadores diferenciais quaterniônicos e aplicações em Física

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Gisele C. Ducati e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 03 de abril de 2002.

Prof. Stefano De Leo

Prof. Pietro Rotelli

Banca examinadora:
Prof. Dr. Stefano De Leo (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Marcos Duarte Maia (IF-UnB)
Prof. Dr. Esmerindo de Sousa Bernardes (IF-USP São Carlos)
Prof. Dr. Nir Cohen (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Adolfo Maia Jr.(IMECC-UNICAMP)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos pré-requisitos para obtenção do título de doutor em Matemática Aplicada.

Dedico esta tese aos meus pais, Névio e Diná, exemplos de determinação, coragem e amor.

Agradecimentos

Agradeço os professores Stefano De Leo e Pietro Rotelli por terem estimulado e acompanhado o meu trabalho de pesquisa durante o doutorado. Em particular, agradeço o meu orientador pela dedicação, paciência, seriedade e integridade sempre presentes.

Agradeço o Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná pela concessão do afastamento e ao Departamento de Matemática Aplicada, da Universidade Estadual de Campinas pelo apoio e suporte. Em particular, agradeço a Fátima pela disponibilidade e eficiência demonstrados sempre que necessário.

Agradeço a CAPES, a FAEP, a FUNPAR e o INFN pelo auxílio financeiro.

Finalmente agradeço os meus familiares e amigos pela compreensão, estímulo constante e por acreditarem no meu trabalho.

Resumo

Nesta tese, estudamos estruturas matemáticas quaterniônicas e aplicações em Física, em particular, mecânica quântica não relativística. Apresentamos o problema de autovalores para operadores lineares sobre $\mathbb{H}$ e $\mathbb{C}$. Para operadores lineares sobre $\mathbb{R}$ o problema de autovalores não é escrito na forma usual mas como um sistema de equações. Discutimos um caso particular de operadores diferenciais quaterniônicos a fim de resolver equações diferenciais ordinárias, de segunda ordem, com coeficientes quaterniônicos constantes, lineares sobre $\mathbb{H}, \mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$. As equações diferenciais lineares sobre $\mathbb{H}$ podem ser resolvidas através da equação quadrática associada. Um método mais geral, que permite a resolução de equações lineares sobre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$, consiste em reescrever a equação diferencial de segunda ordem dada inicialmente, como uma equação diferencial ordinária de primeria ordem na forma matricial cuja solução é obtida com a resolução do problema de autovalores associado à matriz dos coeficientes. Uma aplicação das equações diferenciais lineares sobre $\mathbb{C}$ é estudo da equação de Schrödinger com potenciais quaterniônicos. Exibimos a solução analítica para o degrau de potencial quaterniônico inclusive discutindo os coeficientes de transmissão e reflexão mostrando como se reobtém o caso limite complexo e apresentamos a fenomenologia completa das barreiras de potenciais discutindo os casos de barreiras invariantes com relação à reversão temporal e que violam a invariância com relação à reversão temporal. Finalmente, discutimos geometria complexa mostrando que as reformulações da equação de Dirac feitas por Conway, em 1937, e por Hestenes, em 1966, são equivalentes.

Abstract

In this thesis we study quaternionic mathematical structures and applications in physics, in particular, non relativistic quantum mechanics. We present the eigenvalue problem for $\mathbb{H}$ and $\mathbb{C}$ linear operators. The eigenvalue problem for $\mathbb{R}$ linear operators is not written in the usual way but like a system of equations. In order to solve ordinary differential equations of second order with constant coefficients we study a particular class of differential operators. $\mathbb{H}$ linear differential equation can be solved through its quadratic equation. A more general way to solve a second order differential equation consists in solve the eigenvalue problem associated to the coefficient matrix obtained from the first order matricial equation. As an application we solve the Schrödinger equation with a quaternionic potential. The analytical solution for the step potential is given as well as its transmission and reflection coefficients from where we can obtain the complex limit case. A complete phenomenology of the barrier potential is presented discussing two representative quaternionic potentials: those which violate and do not violate time-reversal. Finally, we discuss complex geometry by showing the equivalence between the Dirac equation reformulated by Conway, in 1937, and by Hestenes, in 1966.

Conteúdo

Notação

$\mathbb{H}$	corpo dos quatérnions
$\mathbb{C}$	corpo dos complexos
$\mathbb{R}$	corpo dos reais
$\mathbb{X}$	$\mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$
m, n	índices que variam de 1 a 3
μ, ν	índices que variam de 0 a 3
e_m	unidades imaginárias
$\mathbb{C}(1, e_m)$	corpo complexo cuja unidade imaginária é e_m
$\boldsymbol{e}$	(e_1, e_2, e_3)
q	número quaterniônico
q_0	parte real de um número quaterniônico
q_m	coeficientes reais da parte imaginária de um quatérnion
$\boldsymbol{q}$	(q_1, q_2, q_3)
$\mathcal{I}$	$(\boldsymbol{e}.\boldsymbol{q})/\lvert\boldsymbol{q}\rvert$
$\overline{q}$	conjugado de q
$N(q)$	norma de q
q^{-1}	inverso de q
V, W	módulos à direita sobre $\mathbb{H}$
$\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$	operador quaterniônico, linear à direita, sobre $\mathbb{X}$
L_μ	operador representando, respectivamente, a ação à esquerda das unidades 1 e $\boldsymbol{e}$
R_μ	operador representando, respectivamente, a ação à direita das unidades 1 e $\boldsymbol{e}$.
$\boldsymbol{L}$	(L_1, L_2, L_3)
$\boldsymbol{R}$	(R_1, R_2, R_3)
$\mathcal{Q}_{\mathbb{X}}$	operador linear sobre $\mathbb{X}$
$\mathcal{M}_{\mathbb{X}}[n]$	operador matricial n-dimensional, linear sobre $\mathbb{X}$
$M_m[\mathbb{X}]$	matriz de ordem m representando a contrapartida (em $\mathbb{X}$) do operador matricial $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}[n]$
$W(x)$	Wronskiano quaterniônico
φ, ψ	funções de onda

1

Introdução

...it's not because Nature is really similar; its because the physicists have only been able to think the same damn thing, over and over again

Richard Feynman, from QED

Um dos mais fascinantes desafios na história da matemática foi o cálculo da raiz quadrada de um número negativo.

O primeiro sinal dos números complexos remonta a 1545, quando Geronimo Cardano (1501-1576), escrevendo *Ars magna*, estudou a solução algébrica das equações cúbicas e quárticas. A sugestão para solucionar equações cúbicas foi dada por Nicolo Tartaglia (1500-1557) e a solução da equação quártica foi descoberta por Ludovico Ferrari (1522-1565). Cardano usou soluções de polinômios que levavam a raízes quadradas de quantidades negativas, mas ele concluiu que seu resultado deveria ser abandonado.

Em 1777, Euler introduziu a notação i e $-i$ para as duas raízes quadradas de -1, provavelmente referindo-se à expressão números imaginários, introduzida por Renè Descartes (1596-1650). Euler visualizou números complexos como um ponto no plano com coordenadas retangulares x, y. Introduzindo coordenadas polares r, φ, ele escreveu $x+iy = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ e representou as raízes da equação $z^n = 1$, $n \geq 3$ como vértices de um polígono regular no plano (x, y).

Depois de Cardano, muitos matemáticos importantes deram suas notáveis contribuições em diferentes tópicos da matemática, entre eles, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) que construiu uma rigorosa teoria para funções complexas. Cauchy mostrou que uma função analítica de uma variável complexa pode ser expandida em torno de um ponto como uma série de potências na vizinhança da singularidade. Deste então, o uso da série infinita se tornou parte essencial da teoria de funções de variáveis reais e complexas. Cauchy também formulou a álgebra dos números complexos baseado na geometria do plano complexo [6, 56].

Em 1833, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) mostrou que pares de números reais com uma multiplicação apropriadamente definida formam um sistema numérico, e que o misterioso i de Euler poderia simplesmente ser interpretado como um destes pares. Hamilton percebeu que seus pares ordenados podiam ser entendidos como entidades no plano e tentou estender a idéia a três dimensões indo dos números complexos, $a + ib$, para ternas ordenadas, $a + ib + jc$. O problema era, uma vez conhecida a regra para multiplicar os números complexos, encontrar uma regra para multiplicar ternas. Por mais de uma década, esta pergunta aborreceu Hamilton que escreveu para seu filho [38]:

> *"Every morning in the early part of the above-cited month [Oct. 1843] on my coming down to breakfast, your brother William Edwin and yourself used to ask me: Well, Papa, can you multiply triplets? Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: No, I can only add and subtract them."*

Finalmente, em 1843, em um ensolarado dia de outubro, Hamilton teve uma idéia brilhante: usar quatro números, que ele chamou quatérnions, e renunciar à lei comutativa da multiplicação. Sir William Rowan Hamilton descobre os quatérnions.

Esta é uma das poucas grandes descobertas matemáticas que está muito bem localizada no tempo e circunstâncias. Hamilton, enquanto caminhava ao longo do Canal Royal, repentinamente parou sob a Ponte de Brougham, tirou seu canivete, e arranhou a fórmula fundamental:

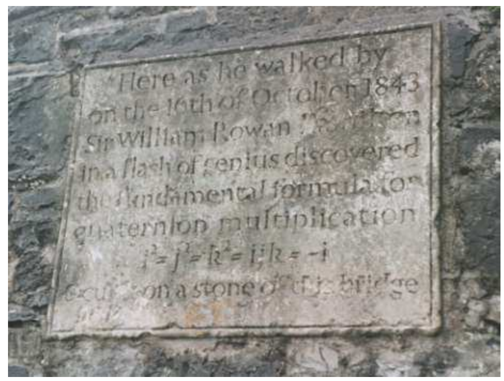


Figure 1.1: *Placa erguida em honra a descoberta de Hamilton.*

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

em uma pedra. O dia era o 16 de outubro de 1843. Nenhum sinal disto pode ser encontrado hoje, mas em 1956 uma placa foi erguida no local, comemorando a descoberta e exibindo a fórmula.

Hamilton sempre considerou a descoberta dos quatérnions sua maior realização. Talvez pudéssemos dizer que o grande feito foi proporcionar a tremenda liberdade que os matemáticos poderiam gozar ao construir álgebras que não precisassem satisfazer as restrições impostas pelas leis fundamentais, que até aquele momento tinham sido invocadas sem exceção.

Hamilton sentiu que esta descoberta revolucionaria a física matemática e ele passou o resto de seu vida trabalhando com quatérnions [35]. Hamilton escreveu vários textos promovendo o uso de quatérnions em física. Em *Lectures on Quaternions* [37] Hamilton apresentou uma detalhada teoria de um sistema não comutativo algébrico.

Percebendo a relação de quatérnions com o espaço tridimensional e tendo interpretado o quatérnion como a razão entre dois vetores, ele pensou na interpretação física da parte escalar. Em uma carta para Humprey Lloyd, amigo e colega de Hamilton, ele afirmou:

> *"i, j, k terms of the quaternion probably represent the three dimensions of space while the real term represents time."*

Mais tarde, depois da morte de Hamilton, seu filho, William Edwin Hamilton, publicaria o famoso *Elements of Quaternions* [36]. Hamilton morreu em setembro de 1865 deixando seu trabalho sobre quatérnions inacabado.

A perda da propriedade comutativa da multiplicação para sistemas numéricos foi de particular importância para as sucessivas investigações. Em 1843, Graves encontrou uma álgebra não associativa com 8 elementos de base, a álgebra das oitavas ou octonions. Seu trabalho foi publicado em 1848 [34]. Os octonions foram redescobertos por Arthur Cayley em 1845 [9, 10]. Por causa disto os octonions também são conhecidos como números de Cayley.

O célebre físico James Clerk Maxwell (1831-1879) também esteve interessado no uso dos quatérnions. Em 1864, ele descobriu as equações do eletromagnetismo. As correspondências de Maxwell com Peter Guthrie Tait (1831-1901) deram a primeira indicação da sua intenção em escrever um tratado em eletricidade e magnetismo. Tait era um devoto de Hamiton. Algumas de sua contribuições são *Elementary Treatise on Quaternions* [55] e *Introduction to Quaternions*. Neste mesmo período, Maxwell trocou correspondências com William Thomson. As cartas para Thomson, em 1868-69, eram densas contendo discussões de eletrostática e magnetismo enquanto a correspondência com Tait, especialmente depois de novembro de 1870, enfocavam especialmente métodos matemáticos. Tait era um perito em harmônicos esféricos e quatérnions que eram de muito interesse para Maxwell que buscou aplicar esta matemática em seu tratado. Em novembro de 1870, Maxwell escreveu para Tait sinalizando um forte interesse nos quatérnions. Na carta de 14 de novembro de 1870 Maxwell escreveu [48]:

> *"With regard to my dabbling in Hamilton I want to leaven my book with Hamiltonian ideas without casting the operations into a Hamiltonian form for which neither I nor, I think, the public are ripe.*
>
> *Now the value of Hamilton idea of a Vector is unspeakable and so are those of the addition and multiplication of vectors"*

Embora Maxwell fosse um simpatizante dos quatérnions, Bartholomew Price, secretário da Clarendon Press, Oxford, não o encorajava a usá-los. Em uma carta para Maxwell ele argumentou que os quatérnions estavam começando a ser utilizados e o uso exclusivo destes em seu livro comprometeria sua utilidade e reconhecimento.

Maxwell continuou a corresponder-se com Tait discutindo quatérnions e dinâmica Lagrangiana. Seu livro foi publicado em março seguinte. No prefácio do livro [47], no §10, Maxwell escreve:

> *"The introduction of coordinate axes into geometry by Descartes was one of the greatest steps in mathematical progress...*
>
> *...But for many purposes of physical reasoning, as distinguished from calculation, it is desirable to avoid explicitly introducing the Cartesian coordinates, and to fix the mind at once on a point of space instead of its three coordinates, and on the magnitude and direction of a force instead of its three components. This mode of contemplating geometrical and physical quantities is more primitive and more natural than the other, although the ideas connected with it did not receive their full development till Hamilton made the next great step in dealing with space, by the invention of his Calculus of Quaternions.*
>
> *As the methods of Descartes are still most familiar to students of science, and as they are really the most useful for purposes of calculation, we shall express all*

> *our results in the Cartesian form. I am convinced, however, that the introduction of the ideas, as distinguished from the operations and methods of Quaternions will be of great use to us in the study of all parts of our subject, and especially in electrodynamics where we have to deal with a number of physical quantities, the relations of which to each other can be expressed far more simply by a few expressions of Hamilton's, than by the ordinary equations."*

Na década seguinte, Gibbs introduziu a análise vetorial [33] e Heaviside desenvolveu o cálculo vetorial promovendo sua aplicação em Física [39], ao reescrever as equações de Maxwell utilizando este formalismo. O cálculo vetorial foi muito bem aceito na comunidade científica e, desta forma, os quatérnions foram sendo deixados de lado.

A teoria da relatividade especial revelou-se uma aplicação natural dos biquatérnions, ou quatérnions complexificados, introduzidos previamente por Clifford. Mais tarde, este formalismo foi revisado, expandido e usado por F.Klein, Lanczoz, Wigner, entre outros. Embora discretamente, os quatérnions estavam reaparecendo na Física.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦

O objetivo deste trabalho é aprimorar e aprofundar o estudo de estruturas quaterniônicas em teoria de matrizes e equações diferenciais e analisar possíveis aplicações em mecânica quântica quaterniônica, mais especificamente, na equação de Schrödinger verificando se existem diferenças entre a mecânica quântica quaterniônica e a usual.

A parte central desta tese, capítulos 4 e 5, concentra-se na resolução de equações diferenciais quaterniônicas de segunda ordem com coeficientes constantes e na aplicação à equação de Schrödinger com potenciais quaterniônicos.

Quando iniciamos este trabalho, nosso estudo estava concentrado na teoria de grupos quaterniônicos. Nossa tarefa era classificar grupos quaterniônicos, superando as dificuldades nas definições de traço e transposta de uma matriz quaterniônica, e obter suas respectivas contrapartidas reais ou complexas [25]. Depois de tal classificação nosso objetivo passou da teoria de grupos ao estudo de potenciais quaterniônicos na mecânica quântica. No trabalho de Davies e McKellar [13], os autores introduzem um potencial quaterniônico constante na equação de Schrödinger e resolvem a equação resultante separando-a em duas equações complexas acopladas. A idéia de introduzir tais potenciais na equação de Schrödinger era original e bastante interessante, porém o método apresentado para se resolver a equação quaterniônica precisava ser aprimorado. A tradução simplética, embora possa dar resultados imediatos, não enfatiza quais das características do formalismo usual são mais gerais do que outras e, conseqüentemente, não traz informações sobre generalizações quaterniônicas de teoremas e técnicas de resolução. Seria possível resolver a "nova" equação de Schrödinger diretamente em $\mathbb{H}$ aplicando as técnicas de resolução usuais? Até então, equações diferenciais quaterniônicas era um assunto não explorado. Trabalhando neste tópico verificamos que existem diferentes maneiras de resolver uma equação diferencial quaterniônica. A primeira delas é resolver a equação característica quaterniônica associada à equação diferencial em questão. Outra maneira é reescrever a equação diferencial na forma matricial e resolver o problema de autovalores associado à matriz dos coeficientes.

Antes de nos atermos a maiores explicações sobre os métodos citados, gostaríamos de esclarecer quais são os tipos de equações diferencias a serem enfrentados. Dizemos que uma equação diferencial quaterniônica é linear sobre $\mathbb{H}$ quando seus coeficientes são quatérnions agindo somente à esquerda da função. Se além dos quatérnions agindo à esquerda temos apenas uma unidade imaginária, qualquer que seja esta unidade, agindo à direita então esta equação será linear sobre $\mathbb{C}$. Enfim, quando as unidades imaginárias estão agindo livremente seja à esquerda, seja à direita dizemos que esta equação é linear sobre $\mathbb{R}$.

As técnicas de resolução para equações deste tipo encontram aplicação imediata em mecânica quântica não relativística permitindo a resolução da equação de Schrödinger em presença de potenciais quaterniônicos constantes. Potenciais quaterniônicos que possuem seja a parte em j, seja a parte em k violam a invariância com relação à reversão temporal (T) e, conseqüentemente, representam candidatos naturais para descrever sistemas que violam conjugação de carga e paridade (CP), como o sistema de kaons, assumindo que o teorema CPT seja válido em teoria quaterniônica de campos. Tais investigações podem ser estendidas à mecânica quântica relativística, estudando a equação de Klein-Gordon e Dirac em presença de potenciais quaterniônicos.

Esta tese está dividida da seguinte maneira: no capítulo 2 apresentamos os conceitos básicos e notações a serem usados, discutimos as representações matriciais dos operadores quaterniônicos, dadas no apêndice A, e mostramos que, diferentemente do que se pensava até 1996 [20], as transformações de Lorentz podem ser escritas em termos de quatérnions reais. Finalizando o capítulo, discutimos brevemente os grupos quaterniônicos e exibimos tabelas com seus correspondentes grupos complexos ou reais.

O capítulo 3 é baseado essencialmente no artigo [26], exceto a discussão sobre operadores lineares sobre $\mathbb{R}$. Apresentamos o problema de autovalores resolvido para operadores lineares sobre $\mathbb{H}$ e $\mathbb{C}$. Para operadores lineares sobre $\mathbb{R}$ o problema de autovalores não é escrito da maneira usual e sim como um sistema de equações [28]. Apresentamos aqui os primeiros passos na tentativa de solucionar este problema. Este assunto ainda está sendo investigado.

No capítulo 4 resolvemos as equações diferenciais ordinárias, de segunda ordem, lineares sobre $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ [27,29] com coeficientes constantes. No início do capítulo apresentamos uma discussão sobre o Wronskiano generalizando os resultados da teoria usual. O apêndice B contém regras de derivação bem como o método de variação dos parâmetros e redução da ordem.

O capítulo 5 apresenta uma aplicação da teoria de equações diferenciais quaterniônicas lineares sobre $\mathbb{C}$. Apresentamos a resolução da equação de Schödinger na presença de um potencial quaterniônico constante [30]. Damos a solução analítica do degrau de potencial quaterniônico incluindo coeficientes de transmissão e reflexão mostrando como se obtém o caso limite complexo. Apresentamos a fenomenologia completa de barreiras de potenciais quaterniônicos discutindo casos de barreiras invariantes com relação à reversão temporal e que violam a invariância com relação à reversão temporal. Interessantes características de efeitos de perturbação quaterniônica surgem nos coeficientes de reflexão e transmissão. Tabelas com os coeficientes de transmissão, calculados para diferentes casos, e gráficos mostrando como as medidas da mecânica quântica são afetadas pela presença do potencial quaterniônico são apresentados, respectivamente, nos apêndices C e D.

Dedicaremos a este capítulo alguns comentários adicionais. A análise da barreira de potencial foi feita por Davies e McKellar [13,14] embora sua abordagem seja completamente diferente da nossa. Até onde sabemos o primeiro artigo sobre este assunto foi publicado em 1979, por Peres [51]. Neste artigo, Peres propõe um teste para distinguir mecânica quântica complexa da quaterniônica usando interferometria de nêutrons. Em 1984, a experiência foi realizada por Kaiser, George e Werner [43]. A função de onda do nêutron atravessando placas de dois materiais diferentes (titânio e alumínio) deveria revelar a não comutatividade da variação das fases quando a ordem das barreiras fosse invertida. O resultado experimental mostrou que a variação das fases comutam melhor que uma parte em 3×10^4. Para explicar este resultado nulo, Klein postulou [45] que os potenciais quaterniônicos agem somente para algumas das forças fundamentais e propôs uma experiência testando possíveis violações da equação de Schrödinger permutando a ordem na qual os potenciais nucleares, magnéticos e gravitacionais agem nos nêutrons que estão em um interferômetro.

A primeira análise teórica de duas barreiras de potenciais quaterniônicos foi desenvolvida por Davies e McKellar [13, 14]. Em seu artigo, traduzindo a equação de Schrödinger quaterniônica em um par de equações complexas acopladas e resolvendo o sistema complexo correspondente por métodos numéricos, Davies e McKellar mostraram que, apesar da presença de fases complexas *ao invés* de fases quaterniônicas, as predições da mecânica quântica quaterniônica diferiam daquelas da teoria usual. Em particular, eles mostraram que diferentemente das predições da mecânica quântica complexa, onde as amplitudes de transmissão à direita ou à esquerda, t_L e t_R, são iguais em magnitude e em fase, na mecânica quântica quaterniônica apenas o valor absoluto delas, $|t_L|$ e $|t_R|$, são iguais. Então, a medida de uma variação de fase deveria ser um indicador de efeitos quaterniônico e de potenciais de fases que dependem do espaço. Porém, esta conclusão leva a uma embaraçosa pergunta: por que não existia nenhuma mudança de fase na experiência proposta por Peres e realizada por Kaiser, George e Werner? Para reconciliar as predições teóricas com as observações experimentais, Davies e McKellar reiteraram a conclusão de Klein e sugeriram sujeitar um feixe de nêutrons a diferentes interações na ordem inversa. No último capítulo do livro de Adler [5], encontramos uma intrigante pergunta. Será que os experimentos propostos por Kayser e colegas realmente testam efeitos quaterniônico residuais? De acordo com a teoria quaterniônica de espalhamento quaterniônica não relativístico desenvolvida por Adler [5] a resposta é claramente não. Os experimentos para detectar uma variação de fase são equivalentes àqueles para descobrir violação de reversão temporal, que até agora não tem sido detectável em experimentos ópticos com nêutrons.

O capítulo 6 é completamente independente dos demais. Ele é dedicado ao polêmico tema que discute a escolha das amplitudes de probabilidade em álgebras de Clifford. Quando definimos produto escalar entre números ou funções quaterniônicas precisamos explicitar qual é a imagem deste funcional. Este produto pode ser um número real, complexo ou quaterniônico [5]. Dependendo da escolha , caracterizamos as amplitudes de probabilidade do espaço de Hilbert chamadas, respectivamente, geometria real, complexa ou quaterniônica [53]. Vale observar que trabalhando com quatérnions complexificados a escolha da unidade imaginária não é única, portanto, existem dois tipos de geometria complexa. A discussão sobre geometria complexa e as diferentes representações quaterniônicas das matrizes de Dirac será apresentada no capítulo 6. As formulações da teoria quântica relativística baseadas nas representações quaterniônicas da álgebra de Dirac usando as duas diferentes geometrias complexas conduzem às equações de Conway [12] e Hestenes [40].

2

Operadores quaterniônicos

Neste capítulo, depois de uma breve introdução à algebra quaterniônica, discutiremos as diferentes representações matriciais para operadores quaterniônicos lineares à direita sobre $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$. Como aplicações, examinaremos as transformações de Lorentz e daremos uma representação quaterniônica unidimensional para os geradores do grupo $O(1,3)$.

2.1 Álgebra quaterniônica

Um *quatérnion* q é usualmente definido em termos de quatro números reais $q_\mu \in \mathbb{R}$ $(\mu = 0, \ldots, 3)$ e três unidades imaginárias e_m $(m = 1, 2, 3)$,

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1\, e_2\, e_3 = -1 \ , \tag{2.1}$$

como segue

$$q = q_0 + e_1 q_1 + e_2 q_2 + e_3 q_3 = q_0 + \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{q} \in \mathbb{H} \ , \tag{2.2}$$

onde $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ e $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Os quatérnions são adicionados e multiplicados de acordo com as leis usuais da aritmética, com exceção da lei comutativa de multiplicação. A não comutatividade é implícita na eq.(2.1). De fato, usufruindo a propriedade associativa, obtemos

$$e_m e_n = -e_n e_m \ , \quad m \neq n \ . \tag{2.3}$$

O *conjugado* de um quatérnion $q \in \mathbb{H}$ é definido por

$$\overline{q} = q_0 - e_1\, q_1 - e_2\, q_2 - e_3\, q_3 \ . \tag{2.4}$$

Todavia, existem outras conjugações possíveis. Tais conjugações são obtidas através de transformações de semelhança sobre $\overline{q}$ e q, isto é

$$-e_m\, \overline{q}\, e_m \quad \text{e} \quad -e_m\, q\, e_m \ . \tag{2.5}$$

Observe que as conjugações obtidas em $\overline{q}$ têm a mesma propriedade de $\overline{q}$ com respeito à conjugação de um produto, isto é, a conjugação de um produto de dois quatérnions é o produto dos conjugados destes quatérnions em ordem contrária. As conjugações obtidas em q não invertem a ordem do produto dos conjugados quaterniônicos. Usando o conjugado de um quatérnion, $\overline{q}$, definimos a *norma* de q por

$$N(q) = |q|^2 = q\overline{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

Quando $q \neq 0$, temos

$$q^{-1} = \overline{q}/N(q) \ ,$$

então, podemos dizer que os quatérnions formam um anel de divisão.

Assim como no caso complexo, podemos introduzir a *forma polar* de um quatérnion, dada por

$$q = |q| \, e^{\mathcal{I}\theta} \ , \tag{2.6}$$

onde $\mathcal{I} = (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{q})/|\boldsymbol{q}|$ e $\operatorname{tg}\theta = |\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{q}|/q_0$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Esta fórmula será utilizada na dedução das regras de derivação para funções quaterniônicas apresentadas no apêndice B.

Um quatérnion admite ainda uma outra formulação. Entende-se por *forma simplética* de um quatérnion a expressão

$$q = z + e_2 w \ , \tag{2.7}$$

onde $z = q_0 + e_1 q_1$ e $w = q_2 - e_1 q_3$. Esta maneira de escrever um quatérnion será de fundamental importância na discussão de representações matricias complexas de operadores quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{H}$ e $\mathbb{C}$.

2.2 Operadores lineares

Sejam V e W módulos à direita sobre $\mathbb{H}$. Uma *transformação linear à direita* $\mathcal{T}$ de V em W é uma correspondência que atribui para todo vetor $\varphi \in V$ um vetor $\mathcal{T}(\varphi) \in W$ de modo que

$$\mathcal{T}(\varphi p + \psi q) = \mathcal{T}(\varphi)p + \mathcal{T}(\psi)q \ , \tag{2.8}$$

para todos os vetores φ, ψ e escalares p, q.

Uma transformação linear à direita de V em V é chamada *operador linear à direita*. Devido à não comutatividade quaterniônica, devemos distinguir três tipos de operadores lineares à direita, a saber

$$\begin{array}{cl} \mathcal{O}_{\mathbb{H}} & \text{operador quaterniônico linear sobre } \mathbb{H} \ , \\ \mathcal{O}_{\mathbb{C}} & \text{operador quaterniônico linear sobre } \mathbb{C} \ , \\ \mathcal{O}_{\mathbb{R}} & \text{operador quaterniônico linear sobre } \mathbb{R} \ . \end{array}$$

Um *operador quaterniônico linear sobre* $\mathbb{H}$ associa a todo $\varphi \in V$ um vetor $\mathcal{O}_{\mathbb{H}}\varphi \in V$ de maneira que esta correspondência seja linear à direita sobre $\mathbb{H}$, isto é,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{H}} \left[\varphi q + \psi p \right] \ = \ \left[\mathcal{O}_{\mathbb{H}}\varphi \right] q + \left[\mathcal{O}_{\mathbb{H}}\psi \right] p \ , \quad p, q \in \mathbb{H}.$$

Um *operador quaterniônico linear sobre* $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, associa a todo $\varphi \in V$ um vetor $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}\varphi$ ou $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}\varphi \in V$ de modo que estas correspondências sejam lineares à direita sobre $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, isto é, satisfaçam, respectivamente, as equações

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \left[\varphi z + \psi w \right] &= \left[\mathcal{O}_{\mathbb{C}}\varphi \right] z + \left[\mathcal{O}_{\mathbb{C}}\psi \right] w \ , \quad z, w \in \mathbb{C} \ , \\ \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \left[\varphi a + \psi b \right] &= \left[\mathcal{O}_{\mathbb{R}}\varphi \right] a + \left[\mathcal{O}_{\mathbb{R}}\psi \right] b \ , \quad a, b \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

Os operadores quaterniônicos mais simples que podemos imaginar são representados pela ação das unidades imaginárias quaterniônicas seja à direita, seja à esquerda. Sendo assim, definimos

$$\boldsymbol{L} = (L_1, L_2, L_3) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{R} = (R_1, R_2, R_3) \tag{2.9}$$

indicando, respectivamente, a ação à direita e à esquerda das unidades imaginárias quaterniônicas

$$\boldsymbol{L}\,\varphi = \boldsymbol{e}\,\varphi \quad \text{e} \quad \boldsymbol{R}\,\varphi = \varphi\,\boldsymbol{e}\ .$$

A álgebra destes operadores é dada por

$$L_1^2 = L_2^2 = L_3^2 = L_1 L_2 L_3 = R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = R_3 R_2 R_1 = -1 \tag{2.10}$$

e pelas relações de comutação

$$[L_m\ ,\ R_n] = 0\ , \quad m, n = 1, 2, 3\ . \tag{2.11}$$

Objetivando introduzir formas gerais de operadores quaterniônicos unidimensionais definimos

$$L_\mu = (L_0, \boldsymbol{L}) \quad \text{e} \quad R_\mu = (R_0, \boldsymbol{R})\ , \tag{2.12}$$

onde $L_0 = R_0 = \mathbb{1}$. Observe que os operadores lineares unidimensionais sobre $\mathbb{R}$ são gerados por L_μ, R_μ e as multiplicações entre eles, totalizando 16 diferentes possibilidades. Para operadores lineares sobre $\mathbb{C}$ temos L_μ e $(1, R_1)$ resultando 8 operadores e, finalmente, para operadores lineares sobre $\mathbb{H}$ temos 4 possibilidades dadas por L_μ. Tais operadores serão denotados por $\mathcal{Q}_{\mathbb{X}}$, onde $\mathbb{X} = \mathbb{H}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$. Em termos de L_μ e R_ν temos

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{R}} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} q_{\mu\nu}\, L_\mu R_\nu\ , \qquad q_{\mu\nu} \in \mathbb{R}\ , \tag{2.13}$$

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{C}} = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{m=0}^{1} q_{\mu m}\, L_\mu R_m\ , \qquad q_{\mu m} \in \mathbb{R}\ , \tag{2.14}$$

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{H}} = \sum_{\mu=0}^{3} q_{\mu 0}\, L_\mu := \sum_{\mu=0}^{3} q_\mu\, L_\mu\ , \qquad q_{\mu 0} \in \mathbb{R}\ . \tag{2.15}$$

Obviamente, para operadores lineares sobre $\mathbb{C}$ temos três escolhas diversas, porém equivalentes. Estas escolhas são representadas pela ação à direita das unidades imaginárias e_1, e_2 ou e_3. Os operadores quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ podem ser expressos em termos de operadores quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{H}$, além da ação das unidades imaginárias à direita. Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mathbb{R}} &= \mathcal{Q}_{\mathbb{H}}^0 + \mathcal{Q}_{\mathbb{H}}^1 R_1 + \mathcal{Q}_{\mathbb{H}}^2 R_2 + \mathcal{Q}_{\mathbb{H}}^3 R_3\ , \\ \mathcal{Q}_{\mathbb{C}} &= \mathcal{Q}_{\mathbb{H}}^0 + \mathcal{Q}_{\mathbb{H}}^1 R_1\ . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Aqui e subseqüentemente $\mathbb{C} = \mathbb{C}(1, e_1)$.

2.3 Representação matricial

É notório que um quatérnion pode ser representado por uma matriz real 4×4

$$\begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} . \tag{2.17}$$

Usando esta representação matricial, podemos reescrever produtos entre quatérnions em termos de produtos matriciais. Por exemplo,

$$\begin{aligned} e_1 q\, e_2 \quad &\leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} q_3 & q_2 & q_1 & -q_0 \\ -q_2 & q_3 & -q_0 & -q_1 \\ -q_1 & q_0 & q_3 & q_2 \\ q_0 & q_1 & -q_2 & q_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \; q_3 - e_1 q_2 - e_2 q_1 + e_3 q_0 \; . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Contudo, existe uma outra interessante possibilidade. Representando um quatérnion q por um vetor-coluna 4×1,

$$q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} , \tag{2.19}$$

é fácil verificar que a ação da unidade imaginária e_1 à esquerda e da unidade imaginária e_2 à direita pode ser expressa pela seguinte matriz real

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Explicitamente

$$e_1 q\, e_2 \;\leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_3 \\ -q_2 \\ -q_1 \\ q_0 \end{pmatrix} \;\leftrightarrow\; q_3 - e_1 q_2 - e_2 q_1 + e_3 q_0 \; .$$

Isto sugere que a soma de matrizes agindo à esquerda e à direita na representação (2.17) possa ser substituída por uma única matriz agindo no vetor-coluna. Temos uma representação isométrica dos quatérnions como uma sub álgebra de $M_4[\mathbb{R}]$.

Agora, utilizando a forma simplética de um quatérnion q verificamos que ele também pode ser representado por uma matriz complexa 2×2 dada por

$$\begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} . \tag{2.20}$$

Neste ponto, vale enfatizar que dadas quaisquer matrizes reais ou complexas nem sempre encontramos números quaterniônicos associados a estas matrizes [16]. De fato, oito números reais são necessários para se definir uma matriz complexa de ordem 2 e dezesseis para uma matriz real de ordem 4 enquanto somente quatro números reais são necessários para se definir um quatérnion. Em particular, considerando que todo quatérnion (não-nulo) tem um inverso, podemos afirmar que apenas uma subclasse de matrizes invertíveis são identificáveis aos quatérnions. Vejamos como os operadores quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{C}$ completam a correspondência entre as matrizes 2×2 e os quatérnions. O operador quaterniônico, R_1, aumenta os graus de liberdade acrescentando quatro novos operadores que são os seguintes

$$R_1 \ , \ L_1R_1 \ , \ L_2R_1 \ , \ L_3R_1 \ ,$$

dando assim a possibilidade de se obter um conjunto de regras para traduzir matrizes complexas 2×2 em operadores quaterniônicos unidimensionais lineares sobre $\mathbb{C}$. Já os operadores, R_2 ou R_3, aumentam ainda mais os graus de liberdade porém violam a linearidade sobre $\mathbb{C}$. Com estes operadores, podemos traduzir matrizes reais 4×4 em operadores quaterniônicos unidimensionais lineares sobre $\mathbb{R}$. Os dezesseis graus da liberdade são agora completados por

$$R_2 \ , \ R_3 \ , \ L_1R_2 \ , \ L_2R_2 \ , \ L_3R_2 \ , \ L_1R_3 \ , \ L_2R_3 \ , \ L_3R_3 \ .$$

2.3.1 Operadores lineares sobre $\mathbb{R}$

Seja $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ um operador quaterniônico linear sobre $\mathbb{H}$ agindo num estado quaterniônico φ cuja base sobre $\mathbb{R}$ é $\{1, e_1, e_2, e_3\}$. Então, a matriz que representa o operador linear para a base mencionada acima é formada por quatro colunas e cada coluna é a matriz de coordenadas de um vetor em $\mathbb{H}$. É fácil ver que a representação matricial do operador identidade é a matriz identidade. Vejamos qual é a representação matricial para os operadores L_1, L_2, R_1 e R_2. A função φ pode ser escrita em termos de números reais, isto é, em termos da base $\{1, e_1, e_2, e_3\}$. A ação do operador L_1 é dada por

$$L_1\, \varphi = e_1\, \varphi = e_1\, \varphi_0 - \varphi_1 + e_3\varphi_2 - e_2\varphi_3 \ ,$$

o que significa

$$\begin{aligned} L_1(1) &= \ \ e_1 = & 0 \cdot 1 + 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \ , \\ L_1(e_1) &= -1 = & -1 \cdot 1 + 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \ , \\ L_1(e_2) &= \ \ e_3 = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \ , \\ L_1(e_3) &= -e_2 = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \ . \end{aligned}$$

Então, a representação matricial para L_1 é dada pela matriz

$$L_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.21}$$

De maneira análoga, para R_1 temos

$$R_1\,\varphi = \varphi\, e_1 = e_1\,\varphi_0 - \varphi_1 - e_3\varphi_2 + e_2\varphi_3 \ ,$$

ou, aplicando R_1 a cada elemento da base, verificamos que

$$\begin{array}{rcrcl} R_1(1) &=& e_1 &=& 0\cdot 1 + 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3 \ , \\ R_1(e_1) &=& -1 &=& -1\cdot 1 + 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3 \ , \\ R_1(e_2) &=& -e_3 &=& 0\cdot 1 + 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 - 1\cdot e_3 \ , \\ R_1(e_3) &=& e_2 &=& 0\cdot 1 + 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3 \ . \end{array}$$

Assim, a representação matricial do operador linear R_1 é escrita como

$$R_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{2.22}$$

Da mesma forma, as representações matriciais reais dos operadores L_2 e R_2 são dadas, respectivamente, por

$$L_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{2.23}$$

Usando a álgebra (2.10), é possível completar a tradução matricial dos operadores quaterniônicos (unidimensionais) lineares sobre $\mathbb{R}$. As 16 diferentes representações matriciais são dadas explicitamente no apêndice A.

2.3.2 Operadores lineares sobre $\mathbb{C}$

Repetindo o procedimento dado na seção precedente, porém utilizando a forma simplética de φ cuja base sobre $\mathbb{C}$ é $\{1, e_2\}$, encontramos

$$L_1\varphi = e_1\,\varphi = e_1\varphi_z - e_2(e_1\varphi_w)$$

ou, explicitamente,

$$\begin{array}{rcrcl} L_1(1) &=& e_1 &=& e_1\cdot 1 + 0\cdot e_2 \ , \\ L_1(e_2) &=& e_3 &=& 0\cdot 1 - e_1\cdot e_2 \ , \end{array}$$

resultando na representação matricial

$$L_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & -e_1 \end{pmatrix} \ . \tag{2.24}$$

Analogamente, para R_1 temos

$$R_1\varphi = \varphi\, e_1 = \varphi_z e_1 + e_2\, e_1\varphi_w$$

ou

$$\begin{aligned} R_1(1) &= \ e_1 = \ e_1 \cdot 1 + 0 \cdot e_2 \ , \\ R_1(e_2) &= \text{-}e_3 = \ 0 \cdot 1 + e_1 \cdot e_2 \ . \end{aligned}$$

Assim, a representação matricial é dada por

$$R_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix} . \tag{2.25}$$

Finalmente, para L_2 obtemos

$$L_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.26}$$

É evidente que o operador R_2 não é um operador linear sobre $\mathbb{C}$ visto que

$$R_2(\varphi\, z) = \varphi\, e_2\, \overline{z} \qquad z \in \mathbb{C} \ .$$

Multiplicando as representações matriciais correspondentes aos operadores L_m e R_1, obtemos os oito casos possíveis dados no apêndice A.

Um dado interessante e que vale ser mencionado é que utilizando as matrizes de Pauli, σ_m, obtemos as seguintes equivalências

$$L_1 = e_1\sigma_3 \qquad L_2 = -e_1\sigma_2 \quad \text{e} \quad L_3 = -e_1\sigma_1 \ . \tag{2.27}$$

2.4 Transformação de Lorentz

Sendo os quatérnions caracterizados por quatro números reais, parece natural representar um ponto no espaço-tempo por

$$x = x_0 + \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{x} \qquad (x_0 = ct) \ .$$

Contudo, posto que o espaço-tempo não é Euclidiano, acreditava-se que esta tarefa não poderia ser realizada. Penrose afirma [52]:

"*No such trick works to relate full four-vector* (t, x, y, z) *with real quaternions.*"

Uma maneira encontrada para superar este obstáculo foi abandonar os quatérnions reais e utilizar os quatérnions complexificados, isto é, introduzir uma nova unidade imaginária cujo quadrado é -1 e que comuta com as unidades imaginárias quaterniônicas conhecidas. Desta maneira, estabeleceu-se uma correspondência entre os quatérnions complexificados e o espaço-tempo.

Em 1996, mostrou-se que as ações de quatérnions à direita e à esquerda permitem a correspondência entre quatérnions reais e o espaço-tempo através das transformações de Lorentz [20]. Nosso objetivo nesta seção é mostrar como a relatividade especial pode ser formulada usando quatérnions reais.

Rotações tridimensionais podem ser discutidas em termos do grupo de transformações das coordenadas que deixa a norma do vetor $\boldsymbol{x}$ invariante. Na teoria da relatividade especial as transformações de Lorentz das coordenadas quadridimensionais $(x_0, \boldsymbol{x})$ seguem da invariância de

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \ . \tag{2.28}$$

A fim de formular a relatividade especial com quatérnions introduzimos a forma invariante

$$\mathrm{Re}[xy] = x_0 y_0 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \ , \quad x, y \in \mathbb{H} \ . \tag{2.29}$$

Queremos encontrar um conjunto de transformações

$$x' = \mathcal{L}_{\mathbb{R}} x$$

tal que

$$\mathrm{Re}[x' \, y'] = \mathrm{Re}[x \, y] \ . \tag{2.30}$$

Reescrevamos a transformação $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ em termos de seus geradores $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = e^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} \ . \tag{2.31}$$

Para transformações infinitesimais , temos

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}} \approx 1 + \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \ , \tag{2.32}$$

então, substituindo (2.32) em (2.30) obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[xy] = \mathrm{Re}[(\mathcal{L}_{\mathbb{R}} x) \, (\mathcal{L}_{\mathbb{R}} y)] \ &\approx \ \mathrm{Re}[(x + \mathcal{A}_{\mathbb{R}} x)(y + \mathcal{A}_{\mathbb{R}} y)] \\ &\approx \ \mathrm{Re}[xy + (\mathcal{A}_{\mathbb{R}} x) y + x (\mathcal{A}_{\mathbb{R}} y)] \ . \end{aligned} \tag{2.33}$$

Conseqüentemente

$$\mathrm{Re}[(\mathcal{A}_{\mathbb{R}} x) y + x (\mathcal{A}_{\mathbb{R}} y)] = 0 \ , \tag{2.34}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[(\mathcal{A}_{\mathbb{R}} x) y + x (\mathcal{A}_{\mathbb{R}} y)] \ &= \ \mathrm{Re}\left[\left(\sum_{\mu,\nu=0}^{3} a_{\mu\nu} R_\mu L_\nu x \right) y + x \left(\sum_{\mu,\nu=0}^{3} a_{\mu\nu} R_\mu L_\nu y \right) \right] = \\ &= \ \mathrm{Re}[x a_{00} y + x a_{01} R_1 y + x a_{02} R_2 y + x a_{03} R_3 y + \\ &\quad\ x a_{10} L_1 y + x a_{11} L_1 R_1 y + x a_{12} L_1 R_2 y + x a_{13} L_1 R_3 y + \\ &\quad\ x a_{20} L_2 y + x a_{21} L_2 R_1 y + x a_{22} L_2 R_2 y + x a_{23} L_2 R_3 y + \\ &\quad\ x a_{30} L_3 y + x a_{31} L_3 R_1 y + x a_{32} L_3 R_2 y + x a_{33} L_3 R_3 y + \\ &\quad\ a_{00} x y + a_{01} (R_1 x) y + a_{02} (R_2 x) y + a_{03} (R_3 x) y + \\ &\quad\ a_{10} (L_1 x) y + a_{11} (L_1 R_1 x) y + a_{12} (L_1 R_2 x) y + a_{13} (L_1 R_3 x) y + \\ &\quad\ a_{20} (L_2 x) y + a_{21} (L_2 R_1 x) y + a_{22} (L_2 R_2 x) y + a_{23} (L_2 R_3 x) y + \\ &\quad\ a_{30} (L_3 x) y + a_{31} (L_3 R_1 x) y + a_{32} (L_3 R_2 x) y + a_{33} (L_3 R_3 x) y \,] \\ &= \ \mathrm{Re}[a_{00} x y + x a_{01} y e_1 + x a_{02} y e_2 + x a_{03} y e_3 + \\ &\quad\ x a_{10} e_1 y + x a_{11} e_1 y e_1 + x a_{12} e_1 y e_2 + x a_{13} e_1 y e_3 + \\ &\quad\ x a_{20} e_2 y + x a_{21} e_2 y e_1 + x a_{22} e_2 y e_2 + x a_{23} e_2 y e_3 + \\ &\quad\ x a_{30} e_3 y + x a_{31} e_3 y e_1 + x a_{32} e_3 y e_2 + x a_{33} e_3 y e_3 + \\ &\quad\ a_{00} x y + a_{01} x e_1 y + a_{02} x e_2 y + a_{03} x e_3 y + \\ &\quad\ a_{10} e_1 x y + a_{11} e_1 x e_1 y + a_{12} e_1 x e_2 y + a_{13} e_1 x e_3 y + \\ &\quad\ a_{20} e_2 x y + a_{21} e_2 x e_1 y + a_{22} e_2 x e_2 y + a_{23} e_2 x e_3 y + \\ &\quad\ a_{30} e_3 x y + a_{31} e_3 x e_1 y + a_{32} e_3 x e_2 y + a_{33} e_3 x e_3 y \,] \ . \end{aligned}$$

Utilizando as igualdades

$$\mathrm{Re}[xyz] = \mathrm{Re}[yzx] = \mathrm{Re}[zxy] \ , \quad x, y, z \in \mathbb{H} \ ,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&2\,[a_{00}\mathrm{Re}[xy] + a_{11}\mathrm{Re}(e_1\,x\,e_1 y) + a_{22}\mathrm{Re}(e_2\,x\,e_2 y) + a_{33}\mathrm{Re}(e_3\,x\,e_3 y)] + \\
&(a_{01} + a_{10})[\mathrm{Re}[x(y\,e_1 + e_1\,y)] + (a_{02} + a_{20})[\mathrm{Re}[x(y\,e_2 + e_2\,y)] + \\
&(a_{03} + a_{30})[\mathrm{Re}[x(y\,e_3 + e_3\,y)] + (a_{12} + a_{21})\mathrm{Re}[(e_1\,x\,e_2 - e_2\,x\,e_1)y] + \\
&(a_{13} + a_{31})\mathrm{Re}[(e_3\,x\,e_1 - e_1\,x\,e_3)y] + (a_{23} + a_{32})\mathrm{Re}[(e_2\,x\,e_3 + e_3\,x\,e_2)y] = 0 \ .
\end{aligned}$$

que implica

$$a_{\mu\mu} = 0 \quad \mathrm{e} \quad a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu} \quad \mu \neq \nu \ . \tag{2.35}$$

Então

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = a_{m0}\,(L_m - R_m) + a_{mn}\,(L_m R_n - L_n R_m) \ .$$

Indicaremos por $\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3)$ os três geradores do grupo de Lorentz homogêneo para rotações e por $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ os três geradores do grupo de Lorentz homogêneo para "boosts" e assim

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{B} \tag{2.36}$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\theta}$ são os parâmetros das transformações. A representação quaterniônica unidimensional para rotações e "boosts" é, então, dada por

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \tfrac{1}{2}\,(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{R}) \\
\boldsymbol{B} &= \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{R} \ .
\end{aligned} \tag{2.37}$$

A presença do fator 1/2 é justificada pelo fato que o grupo $Sp(1)$ é o grupo de recobrimento universal do grupo de rotação $O(3)$. Os geradores anti-hermitianos associados às rotações espaciais e os geradores hermitianos dos "boosts" satisfazem as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned}
[S_l, S_m] &= \epsilon_{lmn} S_n \\
[S_l, B_m] &= \epsilon_{lmn} B_n \ , \qquad l, m, n = 1, 2, 3 \ , \\
[B_l, B_m] &= -\epsilon_{lmn} S_n
\end{aligned}$$

A fim de escrever as transformações de "boost" finitas consideramos $\boldsymbol{\alpha} = 0$ e $\boldsymbol{\theta} = \theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Então, $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{B} = \theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{B}$. Observando que $(\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{B})^3 = \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{B}$ temos

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = e^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} = e^{\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{B}} = 1 - (\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{B})^2 + (\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{B})^2 \cosh\theta + (\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{B})\mathrm{senh}\,\theta \ . \tag{2.38}$$

Considere [42]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\beta}|} = \hat{\boldsymbol{\beta}} \ ,$$

onde $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{\beta}$ é a velocidade entre os referenciais. Note que esta definição implica $0 \leq |\boldsymbol{\beta}| \leq 1$ e também temos que $0 \leq \mathrm{tgh}\,\theta \leq 1$ induzindo a parametrização

$$|\boldsymbol{\beta}| = \mathrm{tgh}\,\theta \ .$$

Definindo

$$\gamma = \cosh\theta \qquad \text{e} \qquad \gamma|\boldsymbol{\beta}| = \operatorname{senh}\theta \tag{2.39}$$

podemos reescrever o eq.(2.38) na forma

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = e^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} = e^{\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{B}} = 1 - (\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{B})^2 + \gamma(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{B})^2 + \gamma|\boldsymbol{\beta}|(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{B}) \ . \tag{2.40}$$

Introduzindo o operador

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sum_{m,n=1}^{3} b_{mn} L_m R_n \ ,$$

onde $b_{mn} = \beta_m\beta_n/|\boldsymbol{\beta}|^2$, o operador de "boost" pode ser escrito como

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \gamma\left[\frac{1-\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}{2} - \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\beta}\left(g + \frac{1+\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}{2}\right)\right] + \frac{1+\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}{2} \ , \tag{2.41}$$

onde

$$g = -\frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3} L_\mu R_\mu \ . \tag{2.42}$$

Através de simples cálculos podemos verificar que

$$\begin{aligned}
\frac{1-\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}{2} &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{B})^2 && \text{seleciona a parte } (ct, x_{\parallel}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \ , \\
\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{\beta}}\left(g + \frac{1+\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}{2}\right) &= (\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{B}) && \text{seleciona a parte } (ct, x_{\parallel}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \to (x_{\parallel}, ct\hat{\boldsymbol{\beta}}) \ , \\
\frac{1+\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}{2} &= 1 - (\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{B})^2 && \text{seleciona a parte independente do } x_{\perp} \ .
\end{aligned}$$

Como caso particular, $|\boldsymbol{\beta}|e_1$, isto é, um "boost" de Lorentz onde a velocidade $\boldsymbol{u}$ está na direção de x, obtemos

$$\begin{aligned}
x' = \quad & ct' + e_1\,x' + e_2\,y' + e_3\,z' = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(ct + e_1\,x + e_2\,y + e_3\,z) \\
&= \gamma(ct - \beta x) + e_1\,\gamma(x - |\boldsymbol{\beta}|ct) + e_2\,y + e_3\,z
\end{aligned} \tag{2.43}$$

2.4.1 Tradução matricial

Os geradores quaterniônicos unidimensionais para o grupo de Lorentz, dados na seção anterior, podem ser imediatamente obtidos usando a tradução matricial real. Os elementos do grupo de Lorentz $O(1,3)$ satisfazem a relação

$$M^t G M = G \ , \tag{2.44}$$

onde

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \tag{2.45}$$

Considerando as transformações infinitesimais, $M = \mathbb{1} + A$, e introduzindo-as em (2.44) encontramos

$$(\mathbb{1} + A^t)\, G\, (\mathbb{1} + A) = G + A^t G + GA + A^t GA = G \ .$$

Desprezando a expressão de segunda ordem na expressão anterior obtemos

$$A + G\, A^t\, G = 0 \ . \tag{2.46}$$

Logo, verifica-se que a matriz que satisfaz relação (2.46) é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} ,$$

e, conseqüentemente, os geradores de $O(1,3)$ são

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.48}$$

Traduzindo as matrizes acima em operadores obtemos

$$\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{R})$$

e

$$\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{R}) \ .$$

A tradução da eq.(2.46) é

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} + g\, \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{\dagger}\, g = 0 \tag{2.49}$$

onde g é dada em (2.42) e

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{\dagger} = \sum_{\mu=0}^{3} a_{\mu\nu} L_{\mu}^{\dagger} R_{\mu}^{\dagger} \ , \tag{2.50}$$

com $\boldsymbol{L}^{\dagger} = -\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{R}^{\dagger} = -\boldsymbol{R}$. O grupo cujos geradores são obtidos de (2.49) é o grupo quaterniônico unitário linear sobre $\mathbb{R}$ denotado por $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}^{13}(1)$ e isomorfo ao grupo de Lorentz $O(1,3)$.

2.5 Grupos

O desenvolvimento da teoria de grupos quaterniônicos é motivado pela presença marcante da teoria de grupos em Física abrangendo desde a mecânica clássica até a mecânica quântica, incluindo teorias de gauge, grupos de unificação e teoria de cordas. Nesta seção, daremos um breve resumo do uso de operadores à esquerda e à direita na teoria de grupos.

Um dos primeiros problemas a ser enfrentado refere-se à definição de traço. Naturalmente, em se tratando de matrizes quaterniônicas, a definição usual não é válida porém queremos uma definição que obedeça as propriedades básicas de traço. Uma discussão detalhada pode ser encontrada no artigo [25]. Comecemos com grupos unidimensionais.

Os grupos clássicos que ocupam um lugar central na teoria de representação de grupos e têm muitas aplicações em vários ramos da Matemática e Física são os grupos unitários, especiais unitários e grupos ortogonais. A fim de introduzir grupos especiais, precisamos definir um traço apropriado para as nossas matrizes. Com operadores quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{C}$, temos a possibilidade de dar uma nova definição de traço complexo, Tr_c,

$$\mathrm{Tr}_c\,\mathcal{A}_{\mathbb{C}} = a_{00} + e_1 a_{01} \ , \tag{2.51}$$

uma vez que a matriz associada ao operador mais geral $\mathcal{Q}_{\mathbb{C}}$ é

$$\begin{pmatrix} a_{00} - a_{11} + e_1(a_{01} + a_{10}) & -a_{20} + a_{31} - e_1(a_{30} + a_{21}) \\ a_{20} + a_{31} - e_1(a_{30} - a_{21}) & a_{00} + a_{11} + e_1(a_{01} - a_{10}) \end{pmatrix} .$$

Agora, a propriedade $\mathrm{Tr}_c(\mathcal{Q}_{\mathbb{C}}\,\mathcal{P}_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Tr}_c(\mathcal{P}_{\mathbb{C}}\,\mathcal{Q}_{\mathbb{C}})$ é válida. Para operadores lineares sobre $\mathbb{R}$ o traço é dado por

$$\mathrm{Tr}_r\,\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = a_{00} \ . \tag{2.52}$$

Defina

$$g^{22} = -L_2 R_2 \tag{2.53}$$

e considere $g = g^{13}$, onde g é dada em (2.42). Os índices 22 e 13 servem apenas para lembrar que tipo de métrica está sendo usada e elas são, respectivamente, $(+,-,+,-)$ e $(+,-,-,-)$. No caso em que os geradores são dados pela relação $\mathcal{A}_{\mathbb{X}} + \mathcal{A}_{\mathbb{X}}^{\dagger} = 0$, onde $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, dizemos que a métrica é dada por $g^{40} = \mathbb{1}$ e o grupo associado é $\mathcal{U}_{\mathbb{X}}^{40}(N)$. Nestes casos, os índices serão omitidos.

Os geradores para grupos unidimensionais com operadores quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ são dados na tabela seguinte:

Grupos quaterniônicos unidimensionais

Grupos	Álgebra de Lie associada	Geradores
$\mathcal{U}_{\mathbb{H}}[1]$	$\mathcal{A}_{\mathbb{H}} + \mathcal{A}_{\mathbb{H}}{}^{\dagger} = 0$	$\boldsymbol{L}$
$\mathcal{U}_{\mathbb{H}}^{22}[1]$	$\mathcal{A}_{\mathbb{H}} + g^{22}\,\mathcal{A}_{\mathbb{H}}{}^{\dagger}\,g^{22} = 0$	L_2
$\mathcal{U}_{\mathbb{C}}[1]$	$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} + \mathcal{A}_{\mathbb{C}}{}^{\dagger} = 0$	$\boldsymbol{L}\,,\ R_1$
$\mathcal{SU}_{\mathbb{C}}[1]$	$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} + \mathcal{A}_{\mathbb{C}}{}^{\dagger} = 0,\ \ \mathrm{Tr}_c\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}} = 0$	$\boldsymbol{L}$
$\mathcal{U}_{\mathbb{C}}^{22}[1]$	$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} + g^{22}\,\mathcal{A}_{\mathbb{C}}{}^{\dagger}\,g^{22} = 0$	$L_2\,,\ L_2R_1$
$\mathcal{U}_{\mathbb{R}}[1]$	$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} + \mathcal{A}_{\mathbb{R}}{}^{\dagger} = 0$	$\boldsymbol{L}\,,\ \boldsymbol{R}$
$\mathcal{U}_{\mathbb{R}}^{22}[1]$	$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} + g^{22}\,\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{\dagger}\,g^{22} = 0$	$L_2\,,\ L_2R_1\,,\ L_2R_3\,,\ R_2\,,\ L_1R_2\,,\ L_3R_2$
$\mathcal{U}_{\mathbb{R}}^{13}[1]$	$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} + g^{13}\,\mathcal{A}_{\mathbb{R}}{}^{\dagger}\,g^{13} = 0$	$\boldsymbol{L} - \boldsymbol{R}\,,\ \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{R}$

Até então, temos trabalhado com operadores unidimensionais, $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$, agindo em estados unidimensionais. Agora, vamos supor que ψ seja um vetor-coluna n-dimensional. O operador que age em ψ é expresso por uma matriz n-dimensional, denotada por $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}[n]$, cujos elementos são operadores quaterniônicos unidimensionais lineares sobre $\mathbb{X}$. As representações matriciais do operador matricial $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}[n]$ serão denotadas por $M_n[\mathbb{X}]$, onde n denota a ordem da matriz quadrada M e $\mathbb{X}$ representa o corpo que contém os elementos desta matriz.

Se $\mathbb{X} = \mathbb{H}$, temos três possíveis representações matriciais para $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}[n]$:

$$\begin{array}{rcl} M_n[\mathbb{H}] & - & \text{uma matriz quaterniônica } n\text{-dimensional ,} \\ M_{2n}[\mathbb{C}] & - & \text{uma matriz complexa } 2n\text{-dimensional ,} \\ M_{4n}[\mathbb{R}] & - & \text{uma matriz real } 4n\text{-dimensional .} \end{array}$$

Se $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, temos apenas duas possibilidades, isto é, $M_{2n}[\mathbb{C}]$ ou $M_{4n}[\mathbb{R}]$. Finalmente, quando $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ a única possibilidade é dada por $M_{4n}[\mathbb{R}]$.

Vejamos alguns exemplos. Considere

$$\begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ L_3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{H}}[2] \ .$$

As três possibilidades são listadas abaixo

$$\begin{pmatrix} 1 & e_1 \\ e_3 & 0 \end{pmatrix} \in M_2[\mathbb{H}] \quad \text{e} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} \ ,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -e_1 \\ 0 & -e_1 & 0 & 0 \\ -e_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4[\mathbb{C}] \quad \text{e} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_z \\ \psi_w \\ \varphi_z \\ \varphi_w \end{pmatrix} \ ,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_8[\mathbb{R}] \quad \text{e} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \ .$$

Agora, considere o operador linear sobre $\mathbb{C}$, agindo em ψ, dado por

$$\begin{pmatrix} R_1 & L_1 - L_2 R_1 \\ L_3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{H}}[2] \ .$$

Podemos escolher duas possibilidades, a saber

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & e_1 & e_1 \\ 0 & e_1 & -e_1 & -e_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2[\mathbb{C}] \quad \text{e} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_z \\ \psi_w \end{pmatrix} \ ,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4[\mathbb{R}] \quad \text{e} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} .$$

Finalmente, para um operador linear sobre $\mathbb{R}$ fixamos

$$\begin{pmatrix} R_2 & L_1 R_3 \\ 1 & L_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}[2] \quad \text{e} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} .$$

A única possibilidade é dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_8[\mathbb{R}] \quad \text{e} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} .$$

Concluímos nossa discussão dando a tabela que contém os grupos quaterniônicos n-dimensionais, o número de seus geradores e suas contrapartidas complexas ou reais.

Grupos quaterniônicos n-dimensionais

$\mathcal{U}_{\mathbb{H}}[n]$	$\leftrightarrow$	$USp_{2n}[\mathbb{C}]$	$n(2n+1)$
$\mathcal{U}_{\mathbb{C}}[n]$	$\leftrightarrow$	$U_{2n}[\mathbb{C}]$	$4n^2$
$\mathcal{U}_{\mathbb{R}}[n]$	$\leftrightarrow$	$O_{4n}[\mathbb{R}]$	$2n(4n-1)$
$\mathcal{SU}_{\mathbb{H}}[n]$	$\equiv$	$\mathcal{U}_{\mathbb{H}}[n]$	
$\mathcal{SU}_{\mathbb{C}}[n]$	$\leftrightarrow$	$SU_{2n}[\mathbb{C}]$	$4n^2-1$
$\mathcal{SU}_{\mathbb{R}}[n]$	$\equiv$	$\mathcal{U}_{\mathbb{R}}[n]$	
$\mathcal{U}^{22}_{\mathbb{H}}[n]$	$\leftrightarrow$	$SO^{*}_{2n}[\mathbb{C}]$	$n(2n-1)$
$\mathcal{U}^{22}_{\mathbb{C}}[n]$	$\leftrightarrow$	$O_{2n}[\mathbb{C}]$	$2n(2n-1)$
$\mathcal{U}^{22}_{\mathbb{R}}[n]$	$\leftrightarrow$	$O_{2n,2n}[\mathbb{R}]$	$2n(4n-1)$
$\mathcal{U}^{13}_{\mathbb{R}}[n]$	$\leftrightarrow$	$O_{n,3n}[\mathbb{R}]$	$2n(4n-1)$

3

Problema de autovalores

O objetivo principal deste capítulo é o estudo da equação de autovalores no corpo quaterniônico. Devido à não comutatividade podemos introduzir diferentes equações de autovalores. O problema de autovalores para matrizes quaterniônicas tem sido objeto de estudo há anos [8, 31, 44, 46]. Todavia, os trabalhos presentes na literatura discutem principalmente o problema de autovalores para operadores quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{H}$. Parte deste capítulo será dedicada à extensão para operadores lineares sobre $\mathbb{C}$ [26] e $\mathbb{R}$ [28]. Diagonalização e forma de Jordan de operadores matriciais quaterniônicos desempenharão um papel importante na resolução de equações diferenciais.

3.1 Considerações gerais

Muitos problemas em matemática aplicada envolvem o estudo das transformações que analisam dados obtidos a partir do fornecimento de outros dados, isto é, os dados de entrada. Um tipo especial e particularmente interessante de transformação é a transformação linear.

Em algumas aplicações de teoria de matrizes, especialmente do problema de autovalores, uma estratégia útil para solucionar problemas é tentar quebrar um grande sistema modelando-o em uma coleção de subsistemas menores que podem ser estudados mais facilmente, isto é, procuram-se variáveis ou combinações de variáveis cujos valores, depois de serem transformados, podem ser expressos somente em termos daquelas variáveis ou suas combinações. Algebricamente, isto corresponde a encontrar um subespaço, V_0, de V, de dimensão menor tal que, se $\mathcal{O}(x) = Ax$ então Ax também está neste subespaço sempre que x está em V_0. Tal subespaço é chamado *subespaço invariante* de $\mathcal{O}$.

O exemplo mais simples de um subespaço invariante é um subespaço cuja dimensão é um, tal que V_0 seja gerado por um único vetor $x \neq 0$. Para que Ax também esteja em V_0 exige-se que Ax seja um múltiplo de x, isto é, $Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda \mathbb{1})x = 0$ para algum escalar λ, enquanto $x \neq 0$. Então, $A - \lambda \mathbb{1}$ deve ser singular. Uma vez que $Ax = \lambda x$ é encontrado, λ é chamado um *autovalor* de A e $x \neq 0$ é o *autovetor* associado a A.

O mesmo raciocínio, quando estamos lidando com quatérnions, exige muito cuidado. Considere o operador quaterniônico linear sobre $\mathbb{X}$, denotado por $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$, que age na função de onda ψ. A procura por um subespaço invariante para $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$ nos leva a dois casos possíveis

$$\mathcal{O}_{\mathbb{X}}\psi = q\,\psi \quad \text{ou} \quad \mathcal{O}_{\mathbb{X}}\psi = \psi\,q\ ,$$

ou ainda, considerando o operador matricial $\mathcal{M}_{\mathbb{X}}$, temos

$$\mathcal{M}_{\mathbb{X}}\psi = q\,\psi \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{M}_{\mathbb{X}}\psi = \psi\,q\ , \quad q \in \mathbb{H}$$

chamados, respectivamente, problema de autovalores à direita e à esquerda. O problema de autovalores à esquerda apresenta resultados inesperados, então analisaremos este tópico posteriormente. Consideremos o problema de autovalores à direita

$$\mathcal{M}_{\mathbb{X}}\,\psi = \psi\,q\ , \quad q \in \mathbb{H}\ .$$

Para o caso linear sobre $\mathbb{H}$ é fácil ver que, sem perda de generalidade, podemos considerar um autovalor complexo no lugar de um quaterniônico. De fato, usando uma apropriada transformação de semelhança obtemos

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}}\,\psi u = \psi u\,\overline{u}qu\ ,$$

onde $\overline{u}qu = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Para o caso linear sobre $\mathbb{C}$, a operação acima não pode ser feita visto que a unidade imaginária e_1 está agindo à direita. Agora, multiplicando a equação

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}}\,\psi = \psi\,q$$

pela matriz de semelhança, denotada por $S_{\mathbb{C}}$, e utilizando a associatividade da multiplicação de operadores lineares sobre $\mathbb{C}$ obtemos

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}\,\mathcal{M}_{\mathbb{C}}\,\psi = \mathcal{S}_{\mathbb{C}}\,\mathcal{M}_{\mathbb{C}}\,\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{-1}\,\mathcal{S}_{\mathbb{C}}\psi\ .$$

Todavia, devido à ação da unidade imaginária e_1, presente no operador $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$, à direita e à presença do autovalor quaterniônico q temos

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}\,[\psi q] \neq [\mathcal{S}_{\mathbb{C}}\psi]\,q\ .$$

A fim de recuperar a associatividade impomos que q seja um número complexo, isto é, $q \to \lambda \in \mathbb{C}$. Logo,

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}\,[\psi q] = [\mathcal{S}_{\mathbb{C}}\psi]\,q\ .$$

Deste modo, ambos os casos são reduzidos a um problema com autovalores complexos

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}/\mathbb{C}}\,\psi = \psi\,\lambda\ , \quad \lambda \in \mathbb{C}\ . \tag{3.1}$$

Para operadores lineares sobre $\mathbb{R}$, a ação das unidades imaginárias e_2 e e_3 à direita, nos força a considerar autovalores reais, isto é, $q \to r \in \mathbb{R}$. Assim, a equação de autovalores é dada por

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}\psi = \psi r\ , \quad r \in \mathbb{R}\ . \tag{3.2}$$

As representações matriciais complexas dos operadores lineares sobre $\mathbb{H}$ e $\mathbb{C}$, n-dimensionais, são matrizes complexas de ordem $2n$ e o problema (3.1) é traduzido para

$$M_{2n}[\mathbb{C}]\,\psi = \lambda\psi = (a + e_1 b)\psi\ ,$$

onde ψ agora representa um vetor-coluna complexo de dimensão $2n$. Deste modo, o autovalor complexo λ pode ser determinado resolvendo-se a equação de autovalores para $M_{2n}[\mathbb{C}]$. Esta tradução é baseada, essencialmente, na representação do operador R_1 dada por

$$R_1 \leftrightarrow e_1 \mathbb{1}_n \ .$$

Para operadores lineares sobre $\mathbb{R}$, o problema de autovalores é traduzido para

$$M_{4n}[\mathbb{R}]\psi = r\,\psi \ , \quad r \in \mathbb{R} \ .$$

Note que, em geral, a matriz $M_{4n}[\mathbb{R}]$ admite autovalores complexos. A representação matricial real do operador R_1 é

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_n \ ,$$

portanto, o problema de autovalores associado à $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}[n]$ resultará em um sistema de equações matriciais acopladas.

A discussão do problema de autovalores para operadores lineares sobre $\mathbb{C}$ baseia-se, principalmente, no artigo [26]. Uma breve análise do problema de autovalores para operadores lineares sobre $\mathbb{R}$ será apresentada no final do capítulo.

3.2 Problema de autovalores quaterniônicos à direita

Dividimos esta seção em três partes: operadores lineares sobre os quatérnions, complexos e reais. As primeiras duas seções contêm uma regra prática para a diagonalização. Note que o tratamento para operadores lineares sobre $\mathbb{R}$ é bastante diferente daquele usado para operadores lineares sobre $\mathbb{H}$ e $\mathbb{C}$.

3.2.1 Operadores lineares sobre $\mathbb{H}$

A seção anterior mostrou que a equação de autovalores à direita para operadores quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{H}$ é dada por

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}}\psi = \psi\, q \ , \qquad q \in \mathbb{H} \ .$$

Aplicando uma transformação de semelhança unitária u na equação acima observamos que a equação resultante é uma equação de autovalores complexos à direita, isto é,

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}}\psi u = \psi u\, \overline{u} q u = \psi u \lambda \ , \qquad \operatorname{Im}\lambda \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Se os autovalores são reais então temos um único espectro de autovalores dado por

$$\{q_1 \ , \ \cdots \ , \ q_s\} \ .$$

Porém, note que existem infinitas transformações de semelhança possíveis de serem usadas, portanto, os operadores quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{H}$ admitem infinitos espectros de autovalores, a saber

$$\{\overline{u}_1 q_1 u_1 \ , \ \ldots \ , \overline{u}_s q_s u_s\}$$

onde u_s são quatérnions unitários. O conjunto de autovetores

$$\Big\{\psi \ , \ \psi u_1 \ , \ \ldots \ , \ \psi u_s\Big\}$$

representa um raio. Note que podemos caracterizar o espectro escolhendo um raio representativo, por exemplo ψu_λ, de forma que o autovalor correspondente $\lambda = \bar{u}_\lambda q u_\lambda$ seja complexo.

A fim de introduzir o método geral de diagonalização de matrizes quaterniônicas, vamos discutir equações unidimensionais de autovalores complexos. Neste caso, podemos considerar $\mathcal{M}_{\mathbb{H}} = \mathcal{Q}_{\mathbb{H}}$. Temos

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{H}}\psi = \psi\lambda \ . \tag{3.3}$$

Usando as regras de tradução dadas no apêndice A, podemos gerar a álgebra quaterniônica a partir da álgebra complexa comutativa. A contrapartida complexa da eq.(3.3) é

$$\begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ , \tag{3.4}$$

$$z = q_0 + e_1 q_1 \ , \quad w = q_2 - e_1 q_3 \in \mathbb{C} \ .$$

A eq.(3.4) é a equação de autovalores para uma matriz complexa cuja equação característica tem coeficientes reais. Por esta razão o operador complexo traduzido admite λ e $\overline{\lambda}$ como autovalores.

Uma vez encontrado o autovetor correspondente ao autovalor λ, o autovetor associado ao autovalor $\overline{\lambda}$ poderá ser obtido imediatamente. Para isto basta considerar o complexo conjugado da eq.(3.4) e aplicar a matriz de semelhança dada por

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

à equação obtida. Deste modo, temos

$$\begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\overline{y} \\ \overline{x} \end{pmatrix} = \overline{\lambda} \begin{pmatrix} -\overline{y} \\ \overline{x} \end{pmatrix} . \tag{3.5}$$

Então, para $\lambda \neq \overline{\lambda} \in \mathbb{C}$, encontramos o espectro de autovalores $\{\lambda \, , \overline{\lambda}\}$ com autovetores

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -\overline{y} \\ \overline{x} \end{pmatrix} \ . \tag{3.6}$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, o espectro de autovalores é determinado por dois autovalores iguais λ. Para mostrar isto, observamos que os autovetores (3.6) associados ao mesmo autovalor λ, são linearmente independentes em $\mathbb{C}$. De fato,

$$\begin{Vmatrix} x & -\overline{y} \\ y & \overline{x} \end{Vmatrix} = |x|^2 + |y|^2 = 0 \qquad \text{se, e somente se,} \ \ x = y = 0 \ .$$

Então, concluindo a discussão do problema de autovalores para operadores unidimensionais, podemos dizer que no formalismo quaterniônico, utilizando a tradução, encontramos dois autovalores complexos, a saber, λ e $\overline{\lambda}$, associados, respectivamente, aos seguintes autovetores quaterniônicos

$$\psi \quad \text{e} \quad \psi e_2 \ .$$

Os infinitos espectros de autovalores quaterniônicos podem ser caracterizados pelo autovalor complexo λ e o raio representativo será ψ. Baseados neste método, estudaremos o próximo caso que consiste em discutir equações de autovalores em espaços vetoriais quaterniônicos n-dimensionais. Enunciaremos dois teoremas [26] sobre o espectro de autovalores para operadores quaterniônicos e mostraremos que os operadores quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{H}$ são diagonalizáveis se, e somente se, as representações matriciais complexas são diagonalizáveis.

Teorema 1 - *Seja $M \in M_{2n}[\mathbb{C}]$ a representação matricial complexa de um operador matricial quaterniônico, de ordem n, linear sobre $\mathbb{H}$, $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}[n]$. Seus autovalores aparecem em pares conjugados.*

Seja

$$M\,\phi_\lambda = \lambda\,\phi_\lambda \tag{3.7}$$

a equação de autovalores para M, onde

$$\phi_\lambda = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n} \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{C} \ .$$

Tomando o complexo conjugado da eq.(3.7),

$$\overline{M}\,\overline{\phi}_\lambda = \overline{\lambda}\,\overline{\phi}_\lambda \ ,$$

e aplicando a transformação de semelhança

$$S = \mathbb{1}_n \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

na matriz M, obtemos

$$S\,\overline{M}\,S^{-1} S\,\overline{\phi}_\lambda = \overline{\lambda}\,S\,\overline{\phi}_\lambda. \tag{3.8}$$

Da estrutura de blocos da matriz complexa M verifica-se facilmente que

$$S\overline{M}S^{-1} = M,$$

e, conseqüentemente, a eq.(3.8) é reescrita como

$$M\,\phi_{\bar{\lambda}} = \overline{\lambda}\,\phi_{\bar{\lambda}} \ , \tag{3.9}$$

onde

$$\phi_{\bar{\lambda}} = S\,\overline{\phi}_\lambda = \begin{pmatrix} -\overline{y}_1 \\ \overline{x}_1 \\ \vdots \\ -\overline{y}_n \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} \ .$$

Para mostrar que os autovalores aparecem em pares conjugados (isto implica em multiplicidade dupla para autovalores reais), precisamos provar que ϕ_λ e $\phi_{\overline{\lambda}}$ são linearmente independentes em $\mathbb{C}$. Se $\lambda \neq \overline{\lambda}$ a demonstração é trivial. O caso $\lambda = \overline{\lambda}$ requer

$$\det \begin{pmatrix} x_i & -\overline{y}_i \\ y_i & \overline{x}_i \end{pmatrix} = |x_i|^2 + |y_i|^2 = 0 \quad i = 1, ..., n ,$$

que é verificado somente para autovetores nulos. Logo, a independência linear de ϕ_λ e $\phi_{\overline{\lambda}}$ assegura uma multiplicidade par para autovalores reais. ■

Usaremos os resultados do primeiro teorema para obter informações sobre o espectro complexo de autovalores à direita de $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$. A definição de determinante para matrizes quaterniônicas que temos não é apropriada para o estudo de autovalores e, conseqüentemente, não conseguimos definir o correspondente polinômio característico $P(\lambda)$ para $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$. Enunciaremos o teorema a seguir porém sua demonstração [26] será omitida.

Teorema 2 - $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}[n]$ *admite n autovetores linearmente independente em $\mathbb{H}$ se, e somente se sua representação matricial complexa, M, admite $2n$ autovetores linearmente independente em $\mathbb{C}$.*

Deste modo, o espectro de autovalores complexos de $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ é obtido retirando-se o espectro reduzido n-dimensional

$$\{\lambda_1 \ , \ ... \ , \ \lambda_n\} \ ,$$

do espectro $2n$-dimensional de autovalores de M

$$\{\lambda_1 \ , \ \overline{\lambda}_1 \ , \ ... \ , \ \lambda_n \ , \ \overline{\lambda}_n\}. \tag{3.10}$$

Destacamos o fato que, a escolha da parte imaginária positiva, ao invés da negativa, é uma simples convenção. De fato, do conjunto de autovetores quaterniônicos

$$\left\{ \psi_{\lambda_1} \ , \ \psi_{\overline{\lambda}_1} \ , \ ... \ , \psi_{\lambda_n} \ , \ \psi_{\overline{\lambda}_n} \right\}. \tag{3.11}$$

podemos extrair diferentes conjuntos de autovalores quaterniônicos linearmente independentes

$$\left\{ \left[\psi_{\lambda_1} \text{ ou } \psi_{\overline{\lambda}_1}\right] \ , \ ... \ , \ \left[\psi_{\lambda_n} \text{ ou } \psi_{\overline{\lambda}_n}\right] \right\} ,$$

e, conseqüentemente, temos uma livre escolha para caracterizar o espectro n-dimensional de autovalores de $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$. Uma conseqüência direta dos teoremas anteriores, é o seguinte corolário:

Corolário *Dois autovetores quaterniônicos de $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ com autovalores complexos, λ_1 e λ_2, com $\lambda_2 \neq \lambda_1 \neq \overline{\lambda}_2$, são linearmente independentes em $\mathbb{H}$.*

Agora, vamos mostrar como relacionar operadores Hermitianos e anti-Hermitianos em mecânica quântica quaterniônica. Uma diferença importante entre a estrutura de um operador anti-Hermitiano em mecânica quântica complexa e quaterniônica está no fato que na primeira, sempre é possível, de maneira trivial, relacionar um operador anti-Hermitiano, $\mathcal{A}$, com um operador Hermitiano, $\mathcal{H}$, removendo um fator e_1

$$\mathcal{A} = e_1 \, \mathcal{H} \ .$$

Em mecânica quântica quaterniônica, isto não é possível. Por exemplo,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -e_1 & 3e_2 \\ 3e_2 & e_1 \end{pmatrix} , \tag{3.12}$$

é um operador anti-Hermitiano, todavia, $e_1\mathcal{A}$ não representa um operador Hermitiano. A razão é simples: dado qualquer conjunto de autovetores, v_s, de $\mathcal{A}$, independentes sobre $\mathbb{H}$ e normalizados, com autovalores puramente complexos λ_s,

$$\mathcal{A} = \sum_s v_s \, |\lambda_s| e_1 \, \overline{v}_s \ ,$$

o operador Hermitiano correspondente $\mathcal{H}$ é logo obtido por

$$\mathcal{H} = \sum_s v_s \, |\lambda_s| \, \overline{v}_s \ ,$$

desde que ambos os fatores sejam independentes da escolha de v_s. Devido à não comutatividade de v_s, não podemos extrair a unidade imaginária complexa e_1. Esta abordagem para equações de autovalores quaterniônicos contém um método prático para encontrar autovetores v_s e autovalores λ_s e, conseqüentemente, resolve o problema para se determinar um operador Hermitiano quando um operador quaterniônico anti-Hermitiano é conhecido. Um simples cálculo mostra que

$$\{e_1|\lambda_1| \, , \, e_1|\lambda_2|\} = \{2e_1 \, , \, 4e_1\} \qquad \text{e} \qquad \{v_1 \, , \, v_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} , \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e_3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Assim, o operador Hermitiano correspondente ao operador anti-Hermitiano da eq.(3.12) é

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 3 & e_3 \\ -e_3 & 3 \end{pmatrix} . \tag{3.13}$$

Diagonalização

Daqui por diante, denotaremos a forma diagonal de um operador matricial por Δ ao invés de $\mathcal{D}$. A forma caligráfica é deixada para denotar os operadores diferenciais usados no capítulo 4. Sabemos que operadores complexos $2n$-dimensionais, são diagonalizáveis se, e somente se, eles admitirem $2n$ autovalores linearmente independente. É fácil demonstrar que $M \in M_{2n}[\mathbb{C}]$ é semelhante a uma matriz diagonal D e a matriz de semelhança é dada por

$$S = \texttt{Inverso} \left[\begin{pmatrix} x_1^{(\lambda_1)} & x_1^{(\bar{\lambda}_1)} & \ldots & x_1^{(\lambda_n)} & x_1^{(\bar{\lambda}_n)} \\ y_1^{(\lambda_1)} & y_1^{(\bar{\lambda}_1)} & \ldots & y_1^{(\lambda_n)} & y_1^{(\bar{\lambda}_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{(\lambda_1)} & x_n^{(\bar{\lambda}_1)} & \ldots & x_n^{(\lambda_n)} & x_n^{(\bar{\lambda}_n)} \\ y_n^{(\lambda_1)} & y_n^{(\bar{\lambda}_1)} & \ldots & y_n^{(\lambda_n)} & y_n^{(\bar{\lambda}_n)} \end{pmatrix} \right] . \tag{3.14}$$

Esta matriz está no mesmo subconjunto de M, isto é, $S \in M_{2n}(\mathbb{C})$. De fato, recordando a relação entre ϕ_λ e $\phi_{\overline{\lambda}}$, podemos reescrevê-la na forma

$$S = \texttt{Inverso} \left[\begin{pmatrix} x_1^{(\lambda_1)} & -\overline{y}_1^{(\lambda_1)} & \dots & x_1^{(\lambda_n)} & -\overline{y}_1^{(\lambda_n)} \\ y_1^{(\lambda_1)} & \overline{x}_1^{(\lambda_1)} & \dots & y_1^{(\lambda_n)} & \overline{x}_1^{(\lambda_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{(\lambda_1)} & -\overline{y}_n^{(\lambda_1)} & \dots & x_n^{(\lambda_n)} & -\overline{y}_n^{(\lambda_n)} \\ y_n^{(\lambda_1)} & \overline{x}_n^{(\lambda_1)} & \dots & y_n^{(\lambda_n)} & \overline{x}_n^{(\lambda_n)} \end{pmatrix} \right] . \tag{3.15}$$

A independência linear dos $2n$ autovetores complexos de M garante a existência de S^{-1} e o isomorfismo entre o grupo das matrizes quaterniônicas invertíveis de ordem n, $\mathsf{GL}(n, \mathbb{H})$ e o grupo formado pela contrapartida complexa destas matrizes, o grupo $\mathsf{GL}(2n, \mathbb{C})$, assegura $S^{-1} \in M_{2n}(\mathbb{C})$. Então, a matriz quaterniônica n-dimensional que diagonaliza $\mathcal{M}_\mathbb{H}$,

$$\mathcal{S}_\mathbb{H} \, \mathcal{M}_\mathbb{H} \, \mathcal{S}_\mathbb{H}^{-1} = \Delta_\mathbb{H} \ ,$$

pode ser obtida diretamente traduzindo a eq.(3.15) em

$$\mathcal{S}_\mathbb{H} = \texttt{Inverso} \left[\begin{pmatrix} x_1^{(\lambda_1)} + L_2 \, y_1^{(\lambda_1)} & \dots & x_1^{(\lambda_n)} + L_2 \, y_1^{(\lambda_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(\lambda_1)} + L_2 \, y_n^{(\lambda_1)} & \dots & x_n^{(\lambda_n)} + L_2 \, y_n^{(\lambda_n)} \end{pmatrix} \right] . \tag{3.16}$$

Esta matriz de diagonalização quaterniônica está estritamente relacionada à escolha de um conjunto particular de autovetores quaterniônicos linearmente independente

$$\left\{ \psi_{\lambda_1} \ , \ \dots \ , \ \psi_{\lambda_n} \right\}$$

e a matriz quaterniônica diagonalizada é

$$\Delta_\mathbb{H} = \text{diag} \ \{ \lambda_1 \ , \ \dots \ , \ \lambda_n \} \ .$$

Para autovalores não reais, a escolha de um conjunto de autovetores quaterniônicos diferentes

$$\left\{ \left[\psi_{\lambda_1} \text{ or } \psi_{\overline{\lambda}_2} \right] \ , \ \dots \ , \ \left[\psi_{\lambda_n} \text{ or } \psi_{\overline{\lambda}_n} \right] \right\} \ ,$$

resultará numa matriz de diagonalização diferente e, conseqüentemente, uma matriz diagonal quaterniônica diferente

$$\Delta_\mathbb{H} = \text{diag} \ \left\{ [\lambda_1 \text{ or } \overline{\lambda}_1] \ , \ \dots \ , \ [\lambda_n \text{ or } \overline{\lambda}_n] \right\} \ .$$

Concluindo,

$$\mathcal{M}_\mathbb{H} \quad \text{diagonalizável} \quad \Leftrightarrow \quad M \quad \text{diagonalizável} \ ,$$

e a matriz de diagonalização quaterniônica pode ser facilmente obtida do conjunto de autovetores quaterniônicos.

3.2.2 Operadores lineares sobre $\mathbb{C}$

Resolvendo o problema de autovalores complexo encontramos $2n$ autovalores e não temos nenhuma possibilidade de classificar ou caracterizar tal espectro. Neste caso

$$\psi \qquad \text{e} \qquad \psi\, e_2$$

representam vetores ortogonais e ψe_2 não pode ser eliminado. Então, para matrizes quaterniônicas n-dimensionais, $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$, devemos considerar o espectro *completo* de autovalores

$$\left\{ \lambda_1 \ , \ \dots \ , \ \lambda_{2n} \right\} \ , \tag{3.17}$$

e assim, o conjunto de autovetores quaterniônicos correspondente é dado por

$$\left\{ \psi_{\lambda_1} \ , \ \dots \ , \ \psi_{\lambda_n} \right\} \ . \tag{3.18}$$

Matrizes complexas $2n$-dimensionais, M, são diagonalizáveis se, e somente se, admitem $2n$ autovetores linearmente independentes. A matriz diagonalizável pode ser escrita em termos dos autovalores de M como segue

$$S = \texttt{Inverso} \left[\begin{pmatrix} x_1^{(\lambda_1)} & x_1^{(\lambda_2)} & \dots & x_1^{(\lambda_{2n-1})} & x_1^{(\lambda_{2n})} \\ y_1^{(\lambda_1)} & y_1^{(\lambda_2)} & \dots & y_1^{(\lambda_{2n-1})} & y_1^{(\lambda_{2n})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{(\lambda_1)} & x_n^{(\lambda_2)} & \dots & x_n^{(\lambda_{2n-1})} & x_n^{(\lambda_{2n})} \\ y_n^{(\lambda_1)} & y_n^{(\lambda_2)} & \dots & y_n^{(\lambda_{2n-1})} & y_n^{(\lambda_{2n})} \end{pmatrix} \right] \ . \tag{3.19}$$

Esta matriz admite uma representação quaterniônica [16, 23] dada por operadores quaterniônicos lineares sobre os complexos

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \texttt{Inverso} \left[\begin{pmatrix} q_1^{[1,2]} + p_1^{[1,2]} R_1 & \dots & q_1^{[2n-1,2n]} + p_1^{[2n-1,2n]} R_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^{[1,2]} + p_n^{[1,2]} R_1 & \dots & q_n^{[2n-1,2n]} + p_n^{[2n-1,2n]} R_1 \end{pmatrix} \right] \ , \tag{3.20}$$

onde

$$q_l^{[m,n]} = \frac{x_l^{(\lambda_m)} + \overline{(y_l^{\lambda_n})}}{2} + L_2\, \frac{y_l^{(\lambda_m)} - \overline{(x_l^{\lambda_n})}}{2} \ ,$$

e

$$p_l^{[m,n]} = -\frac{x_l^{(\lambda_m)} - \overline{(y_l^{\lambda_n})}}{2} L_1 + \frac{y_l^{(\lambda_m)} + \overline{(x_l^{\lambda_n})}}{2} L_3 \ .$$

A tradução quaterniônica da matriz complexa

$$D = \text{diag}\ \{\lambda_1 \ , \ \dots \ , \ \lambda_{2n}\}$$

resulta na matriz quaterniônica diagonalizada

$$\Delta_{\mathbb{C}} = \text{diag} \left\{ \frac{\lambda_1 + \overline{\lambda}_2}{2} - \frac{\lambda_1 - \overline{\lambda}_2}{2}\, L_1 R_1 \ , \ \dots \ , \ \frac{\lambda_{2n-1} + \overline{\lambda}_{2n}}{2} - \frac{\lambda_{2n-1} - \overline{\lambda}_{2n}}{2}\, L_1 R_1 \right\} \ . \tag{3.21}$$

3.2.3 Operadores lineares sobre $\mathbb{R}$

Antes de introduzir o problema de autovalores para operadores lineares sobre $\mathbb{R}$, gostaríamos de ressaltar que tal estudo ainda está em andamento e os resultados aqui apresentados são as primeiras tentativas de solucionar o problema.

Na seção (3.1), vimos que o problema de autovalores para operadores lineares sobre $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}\psi = \psi r \ , \quad r \in \mathbb{R} \ , \tag{3.22}$$

requer autovalores reais como solução. Todavia, sabemos que a contrapartida real do operador $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}[n]$ é uma matriz real de ordem $4n$, $M_{4n}[\mathbb{R}]$, que admite, em geral, autovalores complexos. Desta forma, os autovetores também serão complexos e falha a regra de tradução para ψ. Sendo assim, seguimos o procedimento de tradução inversa, isto é, considere a equação de autovalores

$$M_{4n}[\mathbb{R}]\psi = \lambda\psi \ , \quad \lambda \in \mathbb{C} \ . \tag{3.23}$$

Considerando $\psi = \xi + e_1\eta$ onde $\xi, \eta : \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{4n}$ e $\lambda = a + e_1 b$, $a, b \in \mathbb{R}$ e introduzindo-as na equação (3.23), depois de separar a parte real da parte complexa, obtemos um sistema de equações matriciais reais escrito como

$$\begin{aligned} M_{4n}[\mathbb{R}]\xi &= a\xi - b\eta \ , \\ M_{4n}[\mathbb{R}]\eta &= a\eta + b\xi \ . \end{aligned} \tag{3.24}$$

Assim, conjecturamos que o problema de autovalores para operadores lineares sobre $\mathbb{H}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ não seja inicialmente formulado da maneira usual, isto é, como na equação (3.22), mas como um sistema de equações da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathbb{X}}\psi &= a\psi - b\varphi \ , \\ \mathcal{M}_{\mathbb{X}}\varphi &= a\varphi + b\psi \ . \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde, $\mathbb{X} = \mathbb{H}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$ e ψ e φ são funções quaterniônicas de uma variável real. No caso dos operadores lineares sobre $\mathbb{H}$ e $\mathbb{C}$, o sistema se reduz a um problema de autovalores pois $\psi = \varphi e_1$ que introduzida no sistema (3.25) resulta em duas equações equivalentes dadas por

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}/\mathbb{C}}\psi = \psi\lambda \ .$$

Ilustremos o caso linear sobre $\mathbb{R}$ com o seguinte exemplo. Seja

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} L_1R_2 & L_2 \\ R_1 & L_3R_3 \end{pmatrix} \ . \tag{3.26}$$

Sua tradução é uma matriz real 8×8 dada por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_8[\mathbb{R}] \tag{3.27}$$

cujo espectro de autovalores é

$$\{-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 1+e_1, 1-e_1, -1+e_1, -1-e_1\} \ .$$

Os respectivos autovetores são dados pelas colunas da seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1+\sqrt{2} & 0 & 1-\sqrt{2} & e_1 & -e_1 & 0 & 0 \\ 1-\sqrt{2} & 0 & 1+\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -e_1 & e_1 \\ -1+\sqrt{2} & 0 & -1-\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -e_1 & e_1 \\ 0 & -1-\sqrt{2} & 0 & -1+\sqrt{2} & e_1 & -e_1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \tag{3.28}$$

De (3.24), é fácil ver que para autovalores reais, isto é, quando $b = 0$, os autovetores quaterniônicos são obtidos imediatamente da contrapartida real. O procedimento consiste em considerar o vetor-coluna real 8×1 e traduzi-lo em um vetor-coluna quaterniônico 2×1. Por exemplo, o vetor-coluna $(0, 1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, 0, -1, 0, 0, 1)^t$ é traduzido para $\big((1-\sqrt{2})(e_1 - e_2), -1+e_3\big)^t$. Logo, temos

$$\begin{array}{ccc} \textsf{autovalores} & & \textsf{autovetores} \\ -\sqrt{2} & \Longrightarrow & \begin{bmatrix} (1-\sqrt{2})(e_1+e_2) \\ -1+e_3 \end{bmatrix} , \\ -\sqrt{2} & \Longrightarrow & \begin{bmatrix} (1+\sqrt{2})(1+e_3) \\ -e_1+e_2 \end{bmatrix} , \\ \sqrt{2} & \Longrightarrow & \begin{bmatrix} (1+\sqrt{2})(e_1-e_2) \\ -1+e_3 \end{bmatrix} , \\ \sqrt{2} & \Longrightarrow & \begin{bmatrix} (1-\sqrt{2})(1-e_3) \\ -e_1+e_2 \end{bmatrix} . \end{array}$$

Para autovetores complexos o procedimento é diferente. Por exemplo, para o autovalor $-1-e_1$ temos $a = -1$ e $b = -1$. As equações (3.25) são escritas como

$$\begin{pmatrix} L_1R_2 & L_2 \\ R_1 & L_3R_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

e

$$\begin{pmatrix} L_1R_2 & L_2 \\ R_1 & L_3R_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} . \tag{3.30}$$

O autovetor complexo associado ao autovalor $-1-e_1$ é

$$\begin{bmatrix} 0\\ e_1\\ e_1\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 1 \end{bmatrix} + e_1 \begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} . \tag{3.31}$$

Traduzindo os vetores reais obtemos

$$\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0\\ 1+e_3 \end{bmatrix} = \xi \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} e_1+e_2\\ 0 \end{bmatrix} = \eta \,. \tag{3.32}$$

Então. apenas para verificação temos

$$\begin{pmatrix} L_1R_2 & L_2\\ R_1 & L_3R_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0\\ 1+e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1+e_2\\ -1-e_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0\\ 1+e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1+e_2\\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

e

$$\begin{pmatrix} L_1R_2 & L_2\\ R_1 & L_3R_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e_1+e_2\\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_1-e_2\\ -1-e_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e_1+e_2\\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0\\ 1+e_3 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

3.3 Problema de autovalores quaterniônicos à esquerda

Na tentativa de solucionar o problema de autovalores à esquerda

$$\mathcal{M}_{\mathbb{X}}\psi = q\,\psi \qquad q \in \mathbb{H}$$

onde $\mathbb{X} = \mathbb{H}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, observa-se que não temos um caminho sistemático para enfrentar o problema. Além disso, diferentemente do caso complexo, podemos encontrar matrizes semelhantes cujos espectros de autovalores não estão relacionados. Suponha que os operadores matriciais são digonalizados por uma matriz $\mathcal{S}_{\mathbb{X}}$ como segue

$$\mathcal{S}_{\mathbb{X}}\,\mathcal{M}_{\mathbb{X}}\,\mathcal{S}_{\mathbb{X}}^{-1} = \Delta_{\mathbb{X}} \,.$$

A equação de autovalores torna-se

$$\Delta_{\mathbb{X}}\mathcal{S}_{\mathbb{X}}\,\psi = \mathcal{S}_{\mathbb{X}}q\mathcal{S}_{\mathbb{X}}^{-1}\,\mathcal{S}_{\mathbb{X}}\,\psi$$

e devido à natureza não comutativa de q,

$$\mathcal{S}_{\mathbb{X}}\, q\, \mathcal{S}_{\mathbb{X}}^{-1} \neq q \ ,$$

então perdemos a equação de autovalores inicial. Na seção (3.4) apresentaremos duas matrizes quaterniônicas com o mesmo espectro de autovalores porém não relacionadas através de uma transformação de semelhança.

Vamos agora analisar outra dificuldade em resolver equação de autovalores à esquerda. Operadores Hermitianos quaterniônicos lineares satisfazem

$$\varphi^{\dagger}\mathcal{M}_{\mathbb{X}}\psi = (\mathcal{M}_{\mathbb{X}}\varphi)^{\dagger}\psi \ .$$

Pondo $\varphi = \psi$ na equação anterior obtemos

$$\psi^{\dagger}\, q\, \psi = (q\, \psi)^{\dagger}\psi \ .$$

Desta equação não podemos extrair a conclusão que q deve ser real, $q = q^{\dagger}$. De fato,

$$\psi^{\dagger}(q - q^{\dagger})\psi = 0$$

admite soluções quaterniônicas para q, veja exemplo na seção (3.4). Assim, outro resultado inesperado é a possibilidade de se encontrar operadores Hermitianos com autovalores quaterniônicos. Observe que escolhendo operadores anti-Hermitianos temos

$$\varphi^{\dagger}\mathcal{A}_{\mathbb{X}}\psi \ = -(\mathcal{A}_{\mathbb{X}}\varphi)^{\dagger}\, \psi \ ,$$

e, para $\varphi = \psi$,

$$\psi^{\dagger}(q + q^{\dagger})\, \psi = 0 \ . \tag{3.35}$$

Neste caso, a quantidade real, $q\, + q^{\dagger}$, comuta com ψ, e portanto q é da forma

$$q = e_1\alpha + e_2 w \ ,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ e $w \in \mathbb{C}$.

3.4 Exemplos

O objetivo desta seção é elucidar o método de diagonalização descrito anteriormente.

• Problema de autovalores à direita

Nesta subseção estamos lidando com espaços vetoriais quaterniônicos bidimensionais. Seja

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_1 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

a representação matricial quaterniônica associada a um operador quaterniônico linear sobre $\mathbb{H}$ num espaço vetorial quaterniônico bidimensional. Sua contrapartida complexa é

$$M = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -e_1 & 1 & 0 \\ 0 & -e_1 & e_1 & 0 \\ -e_1 & 0 & 0 & -e_1 \end{pmatrix} \ .$$

A fim de resolver o problema de autovalores à direita

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}}\psi = \psi\lambda \ , \qquad \lambda \in \mathbb{C} \ ,$$

vamos determinar o espectro de autovalores de M. A equação

$$\det\left[M - \lambda \mathbb{1}_4\right] = 0 \ ,$$

nos dá as seguintes soluções

$$\left\{\lambda_1 \ , \ \overline{\lambda}_1 \ , \ \lambda_2 \ , \ \overline{\lambda}_2\right\} = \left\{2^{\frac{1}{4}}e^{e_1\frac{3}{8}\pi} \ , \ 2^{\frac{1}{4}}e^{-e_1\frac{3}{8}\pi} \ , -2^{\frac{1}{4}}e^{-e_1\frac{3}{8}\pi} \ , -2^{\frac{1}{4}}e^{e_1\frac{3}{8}\pi}\right\} ,$$

e o conjunto de autovetores de M é dado por

$$\left\{\begin{pmatrix} -1+e_1\lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ -1-e_1\overline{\lambda}_1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1-e_1\overline{\lambda}_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1-e_1\lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} .$$

O espectro de autovalores de $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ é obtido daquele de M. Por exemplo, adotando a convenção da parte imaginária positiva encontramos

$$\left\{\lambda_1 \ , \ \lambda_2\right\} = \left\{2^{\frac{1}{4}}e^{e_1\frac{3}{8}\pi} \ , \ -2^{\frac{1}{4}}e^{-e_1\frac{3}{8}\pi}\right\} , \tag{3.37}$$

e o conjunto de autovetores quaterniônicos correspondente, definidos a menos de uma fase complexa à direita, é

$$\left\{\begin{pmatrix} -1+e_1\lambda_1 \\ e_2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} e_2(1-e_1\overline{\lambda}_1) \\ 1 \end{pmatrix}\right\} . \tag{3.38}$$

Assim, a matriz quaterniônica que diagonaliza $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbb{H}} &= \texttt{Inverse}\left[\begin{pmatrix} -1+L_1\lambda_1 & L_2(1-L_1\overline{\lambda}_1) \\ L_2 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= -\frac{1}{2\left|\lambda_1\right|^2}\begin{pmatrix} L_1\overline{\lambda}_1 & L_2\left[L_1\lambda_1+|\lambda_1|^2\right] \\ L_3\overline{\lambda}_1 & L_1\lambda_1-|\lambda_1|^2 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{3.39}$$

Como já foi observado, temos infinitas possibilidades de diagonalização dadas por

$$\left\{\overline{u}_1\lambda_1 u_1 \ , \ \overline{u}_2\lambda_2 u_2\right\} .$$

Matrizes diagonalizadas equivalentes podem ser obtidas de

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \text{diag}\left\{\lambda_1 \ , \ \lambda_2\right\}$$

através de uma transformação de semelhança

$$\mathcal{U}_{\mathbb{H}}^{-1}\Delta_{\mathbb{H}}\mathcal{U}_{\mathbb{H}} = \mathcal{U}_{\mathbb{H}}^{\dagger}\Delta_{\mathbb{H}}\mathcal{U}_{\mathbb{H}} \ ,$$

onde

$$\mathcal{U}_{\mathbb{H}} = \text{diag}\left\{u_1 \ , \ u_2\right\} .$$

Então, a matriz de diagonalização dada na eq.(3.39) torna-se

$$S_{\mathbb{H}} \ \rightarrow \ \mathcal{U}_{\mathbb{H}}^{\dagger}S_{\mathbb{H}} \ .$$

Façamos um segundo exemplo. Considere

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} -L_1R_1 + L_2 & -L_3R_1 + 1 \\ -L_3R_1 - 1 & L_1R_1 + L_2 \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

a representação matricial quaterniônica associada a um operador linear complexo em um espaço vetorial quaterniônico bidimensional. Sua contrapartida complexa é

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

O espectro de autovalores de M é

$$\left\{\lambda_1 \ , \ \lambda_2 \ , \ \lambda_3 \ , \ \lambda_4\right\} = \left\{2 \ , \ -2 \ , \ 2e_1 \ , \ -2e_1\right\} . \tag{3.41}$$

Tais autovalores também determinam o espectro de autovalores de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$. A tradução do conjunto de autovetores complexos de M

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ -e_1 \\ e_1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -e_1 \\ 1 \\ -1 \\ -e_1 \end{pmatrix}\right\} ,$$

fornece o conjunto de autovetores de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ dado por

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -e_2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} e_2 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 + e_3 \\ e_1 + e_2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} e_2 - e_1 \\ e_3 - 1 \end{pmatrix}\right\} . \tag{3.42}$$

A matriz quaterniônica que diagonaliza $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ é

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \texttt{Inverse}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 + L_3 \\ -L_2 & L_1 + L_2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ \frac{1-L_3}{2} & -\frac{L_1+L_2}{2} \end{pmatrix} , \tag{3.43}$$

e a matriz diagonal é dada por

$$\Delta_{\mathbb{C}} = 2\begin{pmatrix} -L_1R_1 & 0 \\ 0 & L_1 \end{pmatrix} . \tag{3.44}$$

Esta matriz pode ser diretamente obtida do espectro de autovalores de $M/\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ traduzindo a matriz

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2e_1 \end{pmatrix}$$

em formalismo quaterniônico. É interessante notar que as matrizes diagonalizadas equivalentes podem ser obtidas de $\Delta_{\mathbb{C}}$, eq.(3.44), pela transformação de semelhança

$$\mathcal{U}_{\mathbb{C}}^{\dagger}\, \Delta_{\mathbb{C}}\, \mathcal{U}_{\mathbb{C}} \ .$$

Por exemplo, escolhendo

$$\mathcal{U}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} -L_2 & 0 \\ 0 & \frac{1+L_3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \ ,$$

encontramos

$$\Delta_{\mathbb{C}} \ \rightarrow \ 2 \begin{pmatrix} L_1 R_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix} \ . \tag{3.45}$$

• Problema de autovalores à esquerda

Analisemos as equações quaterniônicas de autovalores à esquerda bidimensionais para operadores quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{H}$. Começamos com operadores Hermitianos. Seja

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & L_3 \\ -L_3 & 0 \end{pmatrix}$$

um operador Hermitiano quaterniônico linear sobre $\mathbb{H}$. A equação de autovalores à esquerda é dada por

$$\mathcal{H}\psi = q\,\psi \ , \tag{3.46}$$

e pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} e_3\,\psi_2 &= q\,\psi_1 \ , \\ -e_3\,\psi_1 &= q\,\psi_2 \ , \end{aligned}$$

cuja solução é

$$q = z + e_2\beta \ ,$$

onde

$$z \in \mathbb{C} \ , \quad \beta \in \mathbb{R} \ , \quad |z|^2 + \beta^2 = 1 \ .$$

Logo, o conjunto de autovetores de $\mathcal{H}$ é dado por

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ -e_3(z + e_2\beta)\psi_1 \end{pmatrix} \ .$$

É fácil verificar que, neste caso,

$$\psi^{\dagger}(q - q^{\dagger})\psi = 0$$

é satisfeita para autovalores quaterniônicos $q \neq q^{\dagger}$.

Agora, vamos analisar operadores anti-Hermitianos. Seja

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} L_2 & L_1 \\ L_1 & L_3 \end{pmatrix}$$

um operador quaterniônico anti-Hermitiano linear sobre $\mathbb{H}$. Seu espectro complexo à direita é dado por

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} = \left\{ e_1\sqrt{2-\sqrt{2}}\ ,\ e_1\sqrt{2+\sqrt{2}} \right\} \ .$$

Considerando a equação quaterniônica de autovalores à esquerda

$$\mathcal{A}\psi = q\psi \ , \tag{3.47}$$

onde

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^2 \ , \quad q \in \mathbb{H} \ ,$$

e resolvendo o seguinte sistema quaterniônico

$$\begin{array}{c} e_2\,\psi_1 + e_1\,\psi_2 = q\,\psi_1 \ , \\ e_1\,\psi_1 + e_3\,\psi_2 = q\,\psi_2 \ , \end{array}$$

associado a este problema, encontramos

$$\{q_1\ ,\ q_2\} = \left\{ \frac{e_1}{\sqrt{2}} + \frac{e_2+e_3}{2}\ ,\ \frac{-e_1}{\sqrt{2}} + \frac{e_2+e_3}{2} \right\} ,$$

e

$$\left\{ \begin{pmatrix} \psi_1 \\ (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{e_2+e_3}{2})\psi_1 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} \psi_1 \\ (\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{e_2+e_3}{2})\psi_1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Observe que

$$\left\{ |\overline{u}_1\lambda_1 u_1| = \sqrt{2-\sqrt{2}}\ ,\ |\overline{u}_2\lambda_2 u_2| = \sqrt{2+\sqrt{2}} \right\}$$

e

$$\left\{ |q_1| = 1\ ,\ |q_2| = 1 \right\} .$$

Portanto, uma diferença importante entre equação de autovalores à esquerda e à direita para operadores anti-Hermitianos é que os autovalores à esquerda e à direita podem ter valores absolutos diferentes e, portanto, não podem representar a mesma quantidade física.

A fim de completar este capítulo, vamos discutir a equação quaterniônica de autovalores à esquerda para o operador linear sobre $\mathbb{H}$ dado em eq.(3.36). O sistema quaterniônico obtido da representação matricial da eq.(3.36) é o seguinte

$$\begin{array}{c} e_1\,\psi_1 + e_2\,\psi_2 = q\,\psi_1 \ , \\ e_3\,\psi_1 + e_1\,\psi_2 = q\,\psi_2 \ . \end{array}$$

O espectro de autovalores quaterniônicos é dado por

$$\{q_1, q_2\} = \left\{ e_1 + \frac{e_2+e_3}{\sqrt{2}}, e_1 - \frac{e_2+e_3}{\sqrt{2}} \right\} \ , \tag{3.48}$$

e os autovetores são, respectivamente,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-e_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \; , \; \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{e_1-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\} \; . \tag{3.49}$$

Agora, considere o seguinte operador quaterniônico linear sobre $\mathbb{H}$

$$\mathcal{N}_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} L_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(L_2 + L_3) & 0 \\ 0 & L_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(L_2 + L_3) \end{pmatrix} \; . \tag{3.50}$$

Este operador representa um operador diagonal e tem o mesmo espectro de autovalores quaterniônicos à esquerda de $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$, dada na equação (3.36), todavia tal operador não é equivalente a $\Delta_{\mathbb{H}}$. De fato, a contrapartida complexa de $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}$ é caracterizada pelo seguinte espectro de autovalores

$$\{e_1\sqrt{2} \; , \; -e_1\sqrt{2} \; , \; e_1\sqrt{2} \; , \; -e_1\sqrt{2}\} \; ,$$

diferente do espectro de autovalores da contrapartida complexa de $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$. Deste modo, não existe uma transformação de semelhança que relaciona estes dois operadores no formalismo complexo e, conseqüentemente, por tradução, não existe uma matriz quaterniônica que relaciona $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}$ a $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$. Então, no formalismo quaterniônico, podemos ter operadores quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{H}$ cujo espectro de autovalores quaterniônicos à esquerda é idêntico porém sem nenhuma transformação de semelhança que os relacione.

4

Operadores diferenciais

Neste capítulo, discutiremos operadores diferenciais quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$. Inicialmente, definiremos o Wronskiano quaterniônico e mostraremos que, também neste caso, ele está diretamente relacionado à dependência e independência linear das soluções. O foco de nossa discussão está na resolução de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes quaterniônicos constantes. Diferentes métodos podem ser usados para a resolução de tais equações e, em particular, para operadores diferenciais lineares sobre $\mathbb{H}$ podemos, de maneira análoga ao caso complexo, resolver a equação característica proveniente da solução exponencial. Enfrentaremos os problemas provenientes da perda do teorema fundamental da álgebra para quatérnions e apresentaremos um método prático para resolver equações diferenciais de segunda ordem lineares sobre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$. Algumas regras de derivação, além de uma descrição sucinta do método de variação dos parâmetros e redução da ordem serão dadas no apêndice B.

4.1 Wronskiano

Considere o operador diferencial quaterniônico de segunda ordem linear sobre $\mathbb{H}$,

$$\mathcal{D}_{\mathbb{H}} = \partial_{xx} - a_{\mathbb{H}}\, \partial_x - b_{\mathbb{H}} \ .$$

onde $a_{\mathbb{H}}$ e $b_{\mathbb{H}}$ são funções quaterniônicas de variável real x. Seguindo a teoria de equações diferenciais usual impomos que as soluções da equação

$$\mathcal{D}_{\mathbb{H}}\, \varphi(x) = 0 \tag{4.1}$$

são da forma

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) q_1 + \varphi_2(x) q_2 \ , \tag{4.2}$$

com φ_1 e φ_2 linearmente independentes. Duas soluções quaterniônicas são chamadas *linearmente independente* se

$$\varphi_1(x) q_1 + \varphi_2(x) q_2 = 0$$

é satisfeita para todo x somente quando $q_1 = q_2 = 0$. Obviamente, φ_1 ou φ_2 não podem ser soluções triviais. Se as soluções são linearmente dependente temos que

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x)q \ , \quad q \in \mathbb{H} \ . \tag{4.3}$$

Considerando a eq.(4.3) e derivando-a em relação a variável x encontramos

$$\varphi_2'(x) = \varphi_1'(x)q \ . \tag{4.4}$$

Omitindo a variável x, de (4.3) e (4.4) temos

$$q = \varphi_1^{-1}\varphi_2 = [\varphi_1']^{-1}\varphi_2'$$

então

$$\varphi_2' = \varphi_1'\varphi_1^{-1}\varphi_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2' - \varphi_1'\varphi_1^{-1}\varphi_2 = 0 \ .$$

Definimos o Wronskiano de φ_1 e φ_2 como

$$W = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1\varphi_1'\varphi_1^{-1}\varphi_2 \ . \tag{4.5}$$

Uma propriedade notável do Wronskiano é que ou ele é identicamente nulo, ou nunca se anula. Para mostrar tal propriedade derivamos (4.5) obtendo

$$W' = \varphi_1'\varphi_2' + \varphi_1\varphi_2'' - [\varphi_1']^2\varphi_1^{-1}\varphi_2 - \varphi_1\varphi_1''\varphi_1^{-1}\varphi_2 + \varphi_1\varphi_1'\varphi_1^{-1}\varphi_1'\varphi_1^{-1}\varphi_2 - \varphi_1\varphi_1'\varphi_1^{-1}\varphi_2' \ . \tag{4.6}$$

Lembramos que φ_1 e φ_2 são soluções de eq.(4.1), isto é,

$$\varphi_1'' - a_{\mathbb{H}}\varphi_1' - b_{\mathbb{H}}\varphi_1 = 0 \ , \tag{4.7}$$

$$\varphi_2'' - a_{\mathbb{H}}\varphi_2' - b_{\mathbb{H}}\varphi_2 = 0 \ . \tag{4.8}$$

Multiplicando a primeira equação por φ_1 à esquerda e $\varphi_1^{-1}\varphi_2$ à direita, encontramos

$$\varphi_1\varphi_1''\varphi_1^{-1}\varphi_2 - \varphi_1 a_{\mathbb{H}}\varphi_1'\varphi_1^{-1}\varphi_2 - \varphi_1 b_{\mathbb{H}}\varphi_2 = 0 \ , \tag{4.9}$$

já, a multiplicação da segunda equação por φ_1 à esquerda nos dá

$$\varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1 a_{\mathbb{H}}\varphi_2' - \varphi_1 b_{\mathbb{H}}\varphi_2 = 0 \ . \tag{4.10}$$

Subtraindo (4.9) de (4.10) obtemos

$$\varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1\varphi_1''\varphi_1^{-1}\varphi_2 - \varphi_1 a_{\mathbb{H}}\varphi_2' + \varphi_1 a_{\mathbb{H}}\varphi_1'\varphi_1^{-1}\varphi_2 = 0$$

ou

$$\varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1\varphi_1''\varphi_1^{-1}\varphi_2 = \varphi_1 a_{\mathbb{H}}\left[\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_1^{-1}\varphi_2\right] \ . \tag{4.11}$$

Combinando as equações (4.6) e (4.11) temos a seguinte equação diferencial

$$W' = \left[\varphi_1' - \varphi_1\varphi_1'\varphi_1^{-1} + \varphi_1 a_{\mathbb{H}}\varphi_1^{-1}\right] W \tag{4.12}$$

Definindo

$$\Psi = \varphi_1' - \varphi_1\varphi_1'\varphi_1^{-1} + \varphi_1 a_{\mathbb{H}}\varphi_1^{-1}$$

a eq.(4.12) pode ser reescrita como

$$W' - \Psi\, W = 0\ . \tag{4.13}$$

Esta equação exige algum cuidado visto que as funções envolvidas são quaterniônicas. Diferentemente do caso complexo, sua solução não é uma função exponencial. As equações (4.7) e (4.8) podem ser reescritas na forma

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{\mathbb{H}} & a_{\mathbb{H}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

Usando o isomorfismo entre $\mathbb{H}$ e uma subclasse de matrizes complexas de ordem dois, isto é, fazendo a tradução complexa, a equação (4.14) pode ser escrita como

$$W_4'[\mathbb{C}] = M_4[\mathbb{C}]\, W_4[\mathbb{C}] \tag{4.15}$$

Na teoria de equações diferenciais ordinárias usual tem um teorema que afirma: *se os elementos da matriz $M_4[\mathbb{C}]$ são contínuos em um dado intervalo, I, e $W_4[\mathbb{C}]$ é uma matriz de funções em I satisfazendo (4.15) então* $\det W_4[\mathbb{C}]$ *satisfaz a seguinte equação de primeira ordem em I*

$$[\det W_4[\mathbb{C}]]' = (tr\, M_4[\mathbb{C}]) \det W_4[\mathbb{C}] \tag{4.16}$$

e, desta forma, para $x_0, x \in I$

$$\det W_4[\mathbb{C}](x) = \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} tr\, M_4[\mathbb{C}](s) ds \right\} \det W_4[\mathbb{C}](x_0)$$

onde $\det W_4[\mathbb{C}](x_0)$ *é uma constante.* Assim, como a função exponencial é sempre não nula, concluímos que $\det W_4[\mathbb{C}]$ é igual a zero, se $\det W_4[\mathbb{C}](x_0) = 0$, ou então nunca se anula, se $\det W_4[\mathbb{C}](x_0) \neq 0$. O isomorfismo existente entre as matrizes complexas e os operadores lineares sobre $\mathbb{H}$ permite a extensão desta propriedade para a equação (4.14). Portanto, utilizando a definição de determinante quaterniônico dada em [11] temos que

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} = |\varphi_1||\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_1^{-1}\varphi_2| = |W|\ ,$$

logo, podemos dizer que se $W(x) \neq 0$ então φ_1 e φ_2 são linearmente independentes, ou se $W(x) = 0$ então φ_1 e φ_2 são linearmente dependentes.

4.2 Equação diferencial linear sobre $\mathbb{H}$

Nesta seção, damos um método para resolver as equações diferenciais com coeficientes constantes determinadas pelo operador diferencial linear sobre $\mathbb{H}$

$$\mathcal{D}_{\mathbb{H}} = \partial_{xx} + a_{\mathbb{H}}\, \partial_x + b_{\mathbb{H}}\ .$$

Estamos interessados em encontrar as soluções da equação diferencial linear quaterniônica

$$\mathcal{D}_{\mathbb{H}}\, \varphi(x) = 0\ . \tag{4.17}$$

Em analogia ao caso complexo, procuramos por soluções da forma exponencial

$$\varphi(x) = \exp[qx] \ ,$$

onde $q \in \mathbb{H}$ e $x \in \mathbb{R}$. Para satisfazer a equação (4.17), a constante q tem que ser uma solução da equação quadrática quaterniônica dada por

$$q^2 + aq + b = 0 \ . \tag{4.18}$$

4.2.1 Equação quadrática quaterniônica

Nesta subseção, vamos mostrar como se resolve uma equação quadrática com coeficientes quaterniônicos [7, 32, 49, 50]. Para simplificar nossa discussão, é conveniente modificar a equação (4.18) removendo a constante real a_0. Para fazer isto, introduzimos uma nova constante quaterniônica p definida por $p = q + a_0/2$. Então a equação quadrática (4.18) é reescrita como

$$p^2 + \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{a}\, p + c = 0 \ , \tag{4.19}$$

onde $c_0 = b_0 - a_0^2/4$ e $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - (a_0/2)\, \boldsymbol{a}$. Devemos dar a solução da equação (4.19) em termos da constante real c_0 e dos vetores reais $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$. Vamos analisar os seguintes casos:

- $\boldsymbol{a} \neq 0,\ \boldsymbol{c} \neq 0$: **(i)** $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = 0$, **(ii)** $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 0$, **(iii)** $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \neq 0 \neq \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$;
- $\boldsymbol{a} = 0,\ \boldsymbol{c} \neq 0$;
- $\boldsymbol{a} \neq 0,\ \boldsymbol{c} = 0$;
- $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} = 0$.

• **(i)** $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = 0$. Neste caso $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$ são vetores paralelos, então a equação (4.19) pode ser facilmente reduzida a uma equação complexa. De fato, introduzindo a unidade imaginária $\mathcal{I} = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ e observando que $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{c} = \mathcal{I}\, \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos

$$p^2 + \mathcal{I}\, |\boldsymbol{a}|\, p + c_0 + \mathcal{I}\, \alpha = 0 \ ,$$

cujas soluções *complexas* são imediatamente encontradas.

• **(ii)** $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 0$. Observando que $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ são vetores ortogonais, podemos rearranjar a parte imaginária de p, dada por $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{p}$, em termos da nova base $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$, isto é

$$p = p_0 + \boldsymbol{e} \cdot (x\, \boldsymbol{a} + y\, \boldsymbol{c} + z\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \ . \tag{4.20}$$

Substituindo (4.20) na equação (4.19), obtemos o seguinte sistema de equações para as variáveis reais p_0, x, y e z,

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{R}: & p_0^2 - (x^2 + x)\, |\boldsymbol{a}|^2 - y^2\, |\boldsymbol{c}|^2 - z^2\, |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{c}|^2 + c_0 = 0 \ , \\
\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{a}: & p_0\, (1 + 2\, x) = 0 \ , \\
\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{c}: & 1 + 2\, p_0\, y - z\, |\boldsymbol{a}|^2 = 0 \ , \\
\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}: & y + 2\, p_0\, z = 0 \ .
\end{array}$$

A segunda equação, $p_0\, (1 + 2\, x) = 0$, implica $p_0 = 0$ e/ou $x = -1/2$. Para $p_0 = 0$, é possível mostrar que a solução da equação (4.19), em termos de p_0, x, y e z, é dada por

$$p_0 = 0 \ , \quad x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\Delta} \ , \quad y = 0 \ , \quad z = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2} \ , \tag{4.21}$$

onde

$$\Delta = \frac{1}{4} + \frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2}\left(c_0 - \frac{|\boldsymbol{c}|^2}{|\boldsymbol{a}|^2}\right) \geq 0 \ .$$

Para $x = -1/2$, temos

$$y = -\frac{2\,p_0}{4\,p_0^2 + |\boldsymbol{a}|^2} \ , \quad z = \frac{1}{4\,p_0^2 + |\boldsymbol{a}|^2} \ , \tag{4.22}$$

e

$$p_0^2 = \tfrac{1}{4}\left[\pm 2\sqrt{c_0^2 + |\boldsymbol{c}|^2} - 2\,c_0 - |\boldsymbol{a}|^2\right] \ .$$

Verifica-se facilmente que

$$\Delta \leq 0 \ \Rightarrow \ \sqrt{c_0^2 + |\boldsymbol{c}|^2} - c_0 \geq \frac{|\boldsymbol{a}|^2}{2} \ ,$$

assim

$$p_0 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2\left(\sqrt{c_0^2 + |\boldsymbol{c}|^2} - c_0\right) - |\boldsymbol{a}|^2} \ . \tag{4.23}$$

Resumindo, para $\Delta \neq 0$, temos duas soluções quaterniônicas, $p_1 \neq p_2$,

$$\Delta > 0 \ : \qquad \begin{aligned} p_0 &= 0 \ , \\ x &= -1/2 \pm \sqrt{\Delta} \ , \\ y &= 0 \ , \\ z &= 1/|a|^2 \ ; \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\Delta < 0 \ : \qquad \begin{aligned} p_0 &= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2\left(\sqrt{c_0^2 + |\boldsymbol{c}|^2} - c_0\right) - |\boldsymbol{a}|^2} \ , \\ x &= -1/2 \ , \\ y &= -\tfrac{2\,p_0}{4\,p_0^2 + |\boldsymbol{a}|^2} \ , \\ z &= \tfrac{1}{4\,p_0^2 + |\boldsymbol{a}|^2} \ . \end{aligned} \tag{4.25}$$

Para $\Delta = 0$, estas soluções são coincidentes, $p_1 = p_2$, e a solução é dada por

$$\Delta = 0 \ : \quad p_0 = 0 \ , \quad x = -1/2 \ , \quad y = 0 \ , \quad z = 1/|\boldsymbol{a}|^2 \tag{4.26}$$

• **(iii)** $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \neq 0 \neq \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$. Na discussão deste caso, introduzimos o vetor $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{c} - d_0\,\boldsymbol{a}$, $d_0 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}/|\boldsymbol{a}|^2$ e a parte imaginária de p em termos dos vetores ortogonais $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d}$,

$$p = p_0 + \boldsymbol{e} \cdot (x\,\boldsymbol{a} + y\,\boldsymbol{d} + z\,\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d}) \ . \tag{4.27}$$

Usando esta decomposição, obtemos o seguinte sistema de equações reais

$$
\begin{array}{ll}
\mathbb{R}: & p_0^2 - (x^2+x)\,|\boldsymbol{a}|^2 - y^2\,|\boldsymbol{d}|^2 - z^2\,|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{d}|^2 + c_0 = 0 \;\;, \\
\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}: & p_0\,(1+2\,x) + d_0 = 0 \;, \\
\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{d}\;; & 1 + 2\,p_0\,y - z\,|\boldsymbol{a}|^2 = 0 \;, \\
\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}: & y + 2\,p_0\,z = 0 \;.
\end{array}
$$

A segunda equação deste sistema, $p_0\,(1+2\,x) + d_0 = 0$, implica $p_0 \neq 0$ já que $d_0 \neq 0$. Portanto, temos

$$
x = -\frac{p_0 + d_0}{2p_0} \;, \quad y = -\frac{2p_0}{4p_0^2 + |\boldsymbol{a}|^2} \;, \quad z = \frac{1}{4p_0^2 + |\boldsymbol{a}|^2} \;, \tag{4.28}
$$

e

$$
16\,w^3 + 8\,[|\boldsymbol{a}|^2 + 2c_0]\,w^2 + 4\left[|\boldsymbol{a}|^2(c_0 - d_0^2) + \frac{|\boldsymbol{a}|^4}{4} - |\boldsymbol{d}|^2\right]w - d_0^2\,|\boldsymbol{a}|^4 = 0 \;, \tag{4.29}
$$

onde $w = p_0^2$. A equação (4.29) tem somente uma solução real positiva [49], $w = \alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Isto implica $p_0 = \pm\,\alpha$. Deste modo, também encontramos duas soluções quaterniônicas.

• $\boldsymbol{a} = 0$ e $\boldsymbol{c} \neq 0$. Introduzindo a unidade imaginária *complexa* $\mathcal{I} = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}/|\boldsymbol{c}|$, podemos reduzir a equação (4.19) à seguinte equação *complexa*

$$
p^2 + c_0 + \mathcal{I}\,|\boldsymbol{c}| = 0 \;.
$$

• $\boldsymbol{a} \neq 0$ e $\boldsymbol{c} = 0$. Este caso é similar ao anterior. Introduzimos a unidade imaginária *complexa* $\mathcal{I} = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ e reduzimos a equação (4.19) à equação *complexa*

$$
p^2 + \mathcal{I}\,|\boldsymbol{a}|\,p + c_0 = 0 \;.
$$

• $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} = 0$. A equação (4.19) torna-se

$$
p^2 + c_0 = 0 \;.
$$

Para $c_0 = -\alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, encontramos duas soluções reais. Para $c_0 = \alpha^2$, obtemos um número *infinito* de soluções quaterniônicas, isto é, $p = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}$, onde $|\boldsymbol{p}| = |\alpha|$.

Resumindo nossa discussão sobre equações quadráticas lineares sobre $\mathbb{H}$ temos: para $\boldsymbol{a} = 0$ e/ou $\boldsymbol{c} = 0$ e para $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} = 0$, podemos reduzir a equação quadrática linear sobre $\mathbb{H}$ à equações *complexas*. Para vetores não nulos satisfazendo $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = 0$ ou $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} \neq 0 \neq \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ temos, efetivamente, equações quadráticas quaterniônicas. Nestes casos, sempre encontramos duas soluções quaterniônicas, (4.24), (4.25) e (4.28-4.29). Para $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = 0$ e $\Delta = 0$, estas soluções são coincidentes (4.26). Finalmente, o teorema fundamental da álgebra é perdido para uma classe restrita de equações quadráticas lineares sobre $\mathbb{H}$, a saber

$$
q^2 + \alpha^2 = 0 \;, \quad \alpha \in \mathbb{R} \;.
$$

Exemplos

Daremos alguns exemplos de equações quadráticas, veja os casos **(i)-(iii)**, e encontraremos suas soluções.

• **(i)**: $p^2 + \sqrt{2}\,(e_1 + e_2)\,p - 1 - 2\,\sqrt{2}\,(e_1 + e_2) = 0.$

Resolvendo esta equação observamos que $\boldsymbol{a} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ e $\boldsymbol{c} = -(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$ são vetores paralelos, isto é, $\boldsymbol{c} = -2\,\boldsymbol{a}$. Conseqüentemente, introduzindo as unidades imaginárias *complexas* $\mathcal{I} = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$, podemos reduzir a equação quadrática quaterniônica à seguinte equação *complexa*,

$$p^2 + 2\,\mathcal{I}\,p - 1 - 4\,\mathcal{I} = 0 \ ,$$

cujas soluções são $p_{1,2} = -\mathcal{I} \pm 2\sqrt{\mathcal{I}}$. Portanto, as soluções quaterniônicas da equação original são dadas por

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{2} - \left(1 \mp \sqrt{2}\right) \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \ .$$

- **(ii)**: $p^2 + e_1\,p + \frac{1}{2}\,e_3 = 0$, caso $\Delta = 0$.

Note que $\boldsymbol{a} = (1, 0, 0)$ e $\boldsymbol{c} = (0, 0, 1/2)$ são vetores ortogonais e $\Delta = 0$. Então, encontramos duas soluções quaterniônicas coincidentes dadas por

$$p = -\tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = -\frac{e_1 + e_2}{2} \ .$$

- **(ii)**: $p^2 + e_2\,p + 1 - e_3 = 0$, caso $\Delta > 0$.

Neste caso, $\boldsymbol{a} = (0, 1, 0)$ e $\boldsymbol{c} = (0, 0, -1)$ também são vetores ortogonais, $c_0 = 1$, porém $\Delta = 1/4$. Então,

$$p_0 = 0 \ , \quad x = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \ , \quad y = 0 \ , \quad z = 1 \ .$$

Observando que

$$\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{a} = e_2 \ , \quad \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{c} = -e_3 \ , \quad \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = -e_1 \ ,$$

encontramos as seguintes soluções quaterniônicas

$$p_1 = -e_1 \qquad \text{e} \qquad p_2 = -(e_1 + e_2) \ .$$

- **(ii)**: $p^2 + e_3\,p + e_2 = 0$, caso $\Delta < 0$.

Temos $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{c} = (0, 1, 0)$ e $c_0 = 0$. Então $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 0$ e $\Delta = -3/4$. Assim,

$$p_0 = \pm\tfrac{1}{2} \ , \quad x = -\tfrac{1}{2} \ , \quad y = \mp\tfrac{1}{2} \ , \quad z = \tfrac{1}{2} \ .$$

Como,

$$\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{a} = e_3 \ , \quad \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{c} = e_2 \ , \quad \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = -e_1 \ ,$$

temos que, as soluções são dadas por

$$p_{1,2} = \tfrac{1}{2}\,\left(\pm 1 - e_1 \mp e_2 - e_3\right) \ .$$

- **(iii)**: $p^2 + e_1\,p + 1 + e_1 + e_3 = 0$.

Aqui $\boldsymbol{a} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{c} = (1,0,1)$ e $c_0 = 1$. Neste caso $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \neq 0$, então introduzimos o quatérnion $d_0 + \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{d} = 1 + e_3$, cuja parte vetorial $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{c} - d_0\boldsymbol{a} = (0,0,1)$ é ortogonal a $\boldsymbol{a}$. A parte imaginária da nossa solução será dada em termos dos quatérnions imaginários

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a} = e_1 \ , \quad \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{d} = e_3 \ , \quad \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d} = -e_2 \ .$$

A parte real de p é determinada resolvendo-se a equação

$$16\,p_0^6 + 24\,p_0^4 - 3\,p_0^2 - 1 = 0 \ ,$$

cuja solução real positiva é dada por $p_0^2 = \frac{1}{4}$. Conseqüentemente,

$$p_0 = \pm\tfrac{1}{2} \ , \quad x = -\tfrac{1}{2} \mp 1 \ , \quad y = \mp\tfrac{1}{2} \ , \quad z = \tfrac{1}{2} \ .$$

Assim, as soluções quaterniônicas são

$$p_1 = \tfrac{1}{2}\,(1 - 3e_1 - e_2 - e_3) \qquad \text{e} \qquad p_2 = -\tfrac{1}{2}\,(1 - e_1 + e_2 - e_3) \ .$$

4.2.2 Equações diferenciais de segunda ordem: coeficientes constantes

Na seção (4.1), vimos que duas soluções quaterniônicas

$$\varphi_{1,2}(x) = \exp[\,q_{1,2}\,x\,] = \exp[\,\left(p_{1,2} - \tfrac{a_0}{2}\right)\,x\,]$$

são linearmente independente em $\mathbb{H}$ se, e somente se, $W(x) \neq 0$. Neste caso,

$$W(x) = \exp[q_1 x]\,(p_1 - p_2)\,\exp[q_2 x] \ .$$

Para $p_1 \neq p_2$, a solução da equação (4.17) é dada por

$$\varphi(x) = \exp[-\tfrac{a_0}{2}\,x]\,\{\exp[p_1\,x]\,c_1 + \exp[p_2\,x]\,c_2\} \ . \tag{4.30}$$

Agora, observamos que o teorema fundamental da álgebra é perdido para uma classe restrita de equações quadráticas, isto é, $p^2 + \alpha^2 = 0$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Para estas equações encontramos infinitas soluções, $p = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ com $|\boldsymbol{\alpha}|^2 = \alpha^2$. Todavia, a solução geral da equação diferencial de segunda ordem

$$\varphi''(x) + \alpha^2\,\varphi(x) = 0 \ , \tag{4.31}$$

também é expressa em termos de *duas* soluções exponenciais linearmente independente.

$$\varphi(x) = \exp[e_1\,\alpha\,x]\,c_1 + \exp[-e_1\,\alpha\,x]\,c_2 \ . \tag{4.32}$$

Note que qualquer outra solução exponencial, $\exp[\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\alpha}\,x]$, pode ser escrita em termos de $\exp[e_1\,\alpha\,x]$ e $\exp[-e_1\,\alpha\,x]$, como segue

$$\exp[\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\alpha}\,x] = \tfrac{1}{2\alpha}\,\{\exp[e_1\,\alpha\,x]\,\left(\alpha - e_1\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right) + \exp[-e_1\,\alpha\,x]\,\left(\alpha + e_1\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)\} \ .$$

Conseqüentemente, a perda do teorema fundamental da álgebra para quatérnions *não* representa um obstáculo na resolução de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, com coeficientes constantes, lineares sobre $\mathbb{H}$. Para completar nossa discussão, precisamos examinar o caso $p_1 = p_2$. A primeira solução da equação diferencial (4.17) é dada por

$$\xi(x) = \exp\left\{\left[\boldsymbol{e}\cdot\left(\tfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2} - \tfrac{\boldsymbol{a}}{2}\right) - \tfrac{a_0}{2}\right] x\right\} .$$

Para $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = 0$, podemos imediatamente obter a segunda solução linearmente independente através da multiplicação de $\exp[-\frac{a}{2}\,x]$ por x, $\eta(x) = x\,\xi(x)$. Para $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \neq 0$, a segunda solução linearmente independente toma uma forma mais complicada, isto é,

$$\eta(x) = \left(x + \tfrac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\right)\xi(x) = \left(x + \tfrac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\right) e^{q\,x} . \tag{4.33}$$

É facilmente demonstrado que $\eta(x)$ é solução da equação (4.17),

$$\begin{aligned}
\eta''(x) + a\,\eta'(x) + b\,\eta(x) &= \left[x\;(q^2 + a\,q + b) + 2\,q + a + \tfrac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\;(q^2 + a\,q) + b\,\tfrac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\right]\xi(x)\\
&= \left(2\,q + a + \left[b\,,\;\tfrac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\right]\right)\xi(x)\\
&= \left(2\,\boldsymbol{e}\cdot\tfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2} + \left[\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{b}\,,\;\tfrac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\right]\right)\xi(x)\\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

Assim, para $p_1 = p_2 = p = \boldsymbol{e}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2} - \frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)$, a solução geral da equação diferencial (4.17), é dada por

$$\varphi(x) = \exp[-\tfrac{a_0}{2}\,x]\left\{\exp[p\,x]\,c_1 + \left(x + \tfrac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\right)\exp[p\,x]\,c_2\right\} . \tag{4.34}$$

Exemplos

Vamos resolver as equações diferenciais cujas equações cacterísticas foram dadas nos itens **(i)-(iii)** da subseção 4.2.1.

- **(i)**: $\varphi''(x) + \sqrt{2}\,(\,L_1 + L_2\,)\,\varphi'(x) - \left[\,1 + 2\sqrt{2}\,(\,L_1 + L_2\,)\,\right]\,\varphi(x) = 0\ ,$
  $\varphi(0) = e_1\ ,\quad \varphi'(0) = (1 + e_3)/\sqrt{2}\ .$

A exponencial $\exp[\,p\,x\,]$ é solução da equação precedente se, e somente se, o quatérnion p satisfaz a seguinte equação

$$p^2 + \sqrt{2}\,(e_1 + e_2)\,p - 1 - 2\,\sqrt{2}\,(e_1 + e_2) = 0\ ,$$

cujas soluções são dadas por

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{2} - \left(1 \mp \sqrt{2}\right)\,\frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}\ .$$

Então,

$$\varphi(x) \;=\; \exp\left\{\left[\,\sqrt{2} - \left(1 - \sqrt{2}\right)\,\frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}\,\right]\,x\,\right\}\,c_1 + \exp\left\{\left[\,-\sqrt{2} - \left(1 + \sqrt{2}\right)\,\frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}\,\right]\,x\,\right\}\,c_2\ .$$

Utilizando as condições iniciais, obtemos

$$\varphi(x) = \exp\left[-\frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}\, x \right] \cosh\left[\left(\sqrt{2} + \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \right) x \right] e_1 \ .$$

• **(ii)**: $\varphi''(x) + (\, 1 + L_1\,)\, \varphi'(x) + \frac{1}{4}\,(2 + L_1 + L_3)\ \varphi(x) = 0 \ ,$
$\varphi(0) = 0 \ , \quad \varphi'(0) = \, -\,(1 + e_1 + e_2)/2 \ .$

Procuramos soluções exponenciais da forma $\varphi(x) = \exp[\, q\, x\,] = \exp[\,(\, p - \frac{1}{2}\,)\, x\,]$. A equação característica é dada por

$$p^2 + e_1\, p + \tfrac{1}{2}\, e_3 = 0 \ ,$$

com soluções

$$p_1 = p_2 = -\,\frac{e_1 + e_2}{2} \ .$$

Logo,

$$\varphi_1(x) = \exp\left[-\,\frac{1 + e_1 + e_2}{2}\, x \right] \ .$$

A segunda solução linearmente independente é dada por

$$\varphi_2(x) = (\, x + e_1\,) \exp\left[-\,\frac{1 + e_1 + e_2}{2}\, x \right] \ .$$

As condições iniciais determinam a solução

$$\varphi(x) = \{\, \exp[\, q\, x\,] + (\, x + e_1\,)\ \exp[\, q\, x\,]\, e_1\,\}\ \left[\, 1 + q^{-1}\,(\, 1 + e_1\, q\,)\, e_1\,\right]^{-1} \ ,$$

onde $q = \, -\,(\, 1 + e_1 + e_2\,)\, /\, 2$.

• **(ii)**: $\varphi''(x) + (\, 2 + L_2\,)\, \varphi'(x) + (\, 2 + L_2 - L_3\,)\ \varphi(x) = 0 \ , \quad \varphi(0) = \, (1 - e_1)/2 \ , \quad \varphi'(0) = e_2 \ .$

A solução exponencial $\varphi(x) = \exp[\, q\, x\,] = \exp[\,(\, p - 1\,)\, x\,]$ leva à equação característica

$$p^2 + e_2\, p + 1 - e_3 = 0 \ ,$$

cujas soluções são

$$p_1 = -e_1 \qquad \text{e} \qquad p_2 = -(e_1 + e_2) \ .$$

Conseqüentemente,

$$\varphi(x) = \exp[\, -\, x\,]\ \{\, \exp[\, -\, e_1\, x\,]\, c_1 + \exp[\, -\,(\, e_1 + e_2\,)\, x\,]\, c_2\,\} \ .$$

Introduzindo as condições iniciais na equação anterior obtemos

$$\varphi(x) = \exp[\, -\, x\,]\ \left\{ \exp[\, -\, e_1\, x\,]\, \tfrac{3 - e_1 - 2 e_2}{2} + \exp[\, -\,(\, e_1 + e_2\,)\, x\,]\,(\, e_2 - 1\,) \right\} \ .$$

• **(ii)**: $\varphi''(x) + L_3\, \varphi'(x) + L_2\, \varphi(x) = 0 \ , \quad \varphi(0) = e_1 + e_3 \ , \quad \varphi'(0) = 1 \ .$

Neste caso, a equação característica é dada por

$$p^2 + e_3\, p + e_2 = 0 \ ,$$

e suas soluções são

$$p_{1,2} = \tfrac{1}{2}\ (\pm 1 - e_1 \mp e_2 - e_3)\ \ .$$

Logo, a solução geral da equação diferencial é

$$\varphi(x) = \exp[\, \tfrac{1-e_1-e_2-e_3}{2}\ x\,]\, c_1 + \exp[-\ \tfrac{1+e_1-e_2+e_3}{2}\ x\,]\, c_2\ .$$

As constantes são fixadas pelas condições iniciais determinando a solução

$$\varphi(x) = \left\{ \exp[\, \tfrac{1-e_1-e_2-e_3}{2}\ x\,] + \exp[-\ \tfrac{1+e_1-e_2+e_3}{2}\ x\,] \right\}\ \tfrac{e_1+e_3}{2}\ .$$

• **(iii)**: $\varphi''(x) + (\,L_1 - 2\,)\ \varphi'(x) + (\,2 + L_3\,)\ \varphi(x) = 0\ , \quad \varphi(0) = 0\ , \quad \varphi'(0) = e_2\ .$

Substituindo $\varphi(x) = \exp[\,q\,x\,] = \exp[\,(\,p+1\,)\,x\,]$ na equação anterior, encontramos

$$p^2 + e_1\, p + 1 + e_1 + e_3 = 0\ .$$

As soluções desta equação quadrática são

$$p_1 = \tfrac{1}{2}\ (1 - 3e_1 - e_2 - e_3) \qquad \text{e} \qquad p_2 = -\tfrac{1}{2}\ (1 - e_1 + e_2 - e_3)\ \ .$$

Introduzindo as condições iniciais na solução geral da equação diferencial obtemos

$$\varphi(x) = \left\{ \exp[\, \tfrac{1-3e_1-e_2-e_3}{2}\ x\,] - \exp[-\ \tfrac{1-e_1+e_2-e_3}{2}\ x\,] \right\}\ \tfrac{e_2-e_1+2e_3}{6}\ .$$

4.2.3 Diagonalização e forma de Jordan

Para encontrar as soluções gerais de equações diferenciais lineares outros métodos podem ser usados tais como equações de autovalores, diagonalização e forma de Jordan . A equação diferencial quaterniônica linear sobre $\mathbb{H}$, explicitamente (4.17), pode ser escrita na forma matricial como segue

$$\Phi'(x) = \mathcal{M}_{\mathbb{H}}\, \Phi(x)\ , \tag{4.35}$$

onde

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{\mathbb{H}} & a_{\mathbb{H}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{bmatrix}\ .$$

A solução formal da equação matricial (4.35) é dada por

$$\Phi(x) = \exp[\mathcal{M}_{\mathbb{H}}\,(x - x_0)]\ \Phi(x_0)\ , \tag{4.36}$$

onde $\Phi(x_0)$ representa um vetor-coluna quaterniônico constante determinado pelas condições iniciais $\varphi(x_0)$ e $\varphi'(x_0)$. Os operadores matriciais de ordem dois, lineares sobre $\mathbb{H}$, satisfazem a equação de autovalores à direita

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}}\, \Phi = \Phi\, q\ . \tag{4.37}$$

Já vimos que, sem perda de generalidade, podemos trabalhar com equações de autovalores *complexas*. Considerando $\Psi = \Phi u$, da equação precedente, temos

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}}\,\Psi = \mathcal{M}_{\mathbb{H}}\,\Phi u = \Phi\, q\, u = \Phi u\, \overline{u} q u = \Psi\, z \ , \tag{4.38}$$

onde $z \in \mathbb{C}$ e u é um quatérnion unitário. No capítulo 3, mostramos que a representação matricial complexa da matriz $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ tem um espectro de autovalores caracterizado por autovalores que aparecem em pares conjugados $\{z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2\}$. Seja Ψ_1 e Ψ_2 os autovetores quaterniônicos correspondendo aos autovalores complexos z_1 e z_2 de modo que

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}}\,\Psi_1 = \Psi_1\, z_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_{\mathbb{H}}\,\Psi_2 = \Psi_2\, z_2 \ .$$

Podemos mostrar que para $|z_1| \neq |z_2|$, os autovetores Ψ_1 e Ψ_2 são linearmente independentes em $\mathbb{H}$ e, conseqüentemente, existe uma matriz quaterniônica 2×2, dada por $\mathcal{S}_{\mathbb{H}} = [\,\Psi_1\,\Psi_2\,]$, que diagonaliza $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$,

$$\exp[\mathcal{M}_{\mathbb{H}}\, x] \quad = \quad \mathcal{S}_{\mathbb{H}}\, \exp\left[\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} x\right] \mathcal{S}_{\mathbb{H}}^{-1} = \mathcal{S}_{\mathbb{H}} \begin{pmatrix} \exp[z_1 x] & 0 \\ 0 & \exp[z_2 x] \end{pmatrix} \mathcal{S}_{\mathbb{H}}^{-1} \ .$$

Neste caso, a solução quaterniônica geral da equação diferencial pode ser escrita em termos dos elementos das matrizes $\mathcal{S}_{\mathbb{H}}$ e $\mathcal{S}_{\mathbb{H}}^{-1}$ e dos autovalores complexos z_1 e z_2,

$$\begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{\mathbb{H}11}\, \exp[z_1 x] & \mathcal{S}_{\mathbb{H}12}\, \exp[z_2 x] \\ \mathcal{S}_{\mathbb{H}21}\, \exp[z_1 x] & \mathcal{S}_{\mathbb{H}22}\, \exp[z_2 x] \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}11}\, \varphi(0) + \mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}12}\, \varphi'(0) \\ \mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}21}\, \varphi(0) + \mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}22}\, \varphi'(0) \end{bmatrix} \ .$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \varphi(x) \quad &= \quad \mathcal{S}_{\mathbb{H}11}\, \exp[z_1\, x]\, \left[\mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}11}\, \varphi(0) + \mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}12}\, \varphi'(0)\right] + \\ &\quad\quad \mathcal{S}_{\mathbb{H}12}\, \exp[z_2\, x]\, \left[\mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}21}\, \varphi(0) + \mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}22}\, \varphi'(0)\right] \\ &= \quad \exp\left[\mathcal{S}_{\mathbb{H}11}\, z_1\, \left(\mathcal{S}_{\mathbb{H}11}\right)^{-1} x\right] \mathcal{S}_{\mathbb{H}11}\, \left[\mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}11}\, \varphi(0) + \mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}12}\, \varphi'(0)\right] + \\ &\quad\quad \exp\left[\mathcal{S}_{\mathbb{H}12}\, z_2\, \left(\mathcal{S}_{\mathbb{H}12}\right)^{-1} x\right] \mathcal{S}_{\mathbb{H}12}\, \left[\mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}21}\, \varphi(0) + \mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}22}\, \varphi'(0)\right] \\ &= \quad \exp\left[\mathcal{S}_{\mathbb{H}21}\, \left(\mathcal{S}_{\mathbb{H}11}\right)^{-1} x\right] \mathcal{S}_{\mathbb{H}11}\, \left[\mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}11}\, \varphi(0) + \mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}12}\, \varphi'(0)\right] + \\ &\quad\quad \exp\left[\mathcal{S}_{\mathbb{H}22}\, \left(\mathcal{S}_{\mathbb{H}12}\right)^{-1} x\right] \mathcal{S}_{\mathbb{H}12}\, \left[\mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}21}\, \varphi(0) + \mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{H}22}\, \varphi'(0)\right] \ . \end{aligned} \tag{4.39}$$

Observamos que a diferente escolha do espectro de autovalores *não* modifica a solução (4.39). De fato, considere o seguinte espectro de autovalores quaterniônicos

$$\{\, q_1 \,,\, q_2 \,\} = \{\, \overline{u}_1 z_1 u_1 \,,\, \overline{u}_2 z_2 u_2 \,\} \qquad |q_1| \neq |q_2| \ . \tag{4.40}$$

Note que os correspondentes autovetores linearmente independente são dados por

$$\{\, \Phi_1 = \Psi_1 u_1 \,,\, \Phi_2 = \Psi_2 u_2 \,\} \ , \tag{4.41}$$

então obtemos

$$\begin{aligned} M \quad &= \quad [\,\Phi_1 \;\, \Phi_2\,]\, \operatorname{diag}\{q_1, q_2\}\, [\,\Phi_1 \;\, \Phi_2\,]^{-1} \\ &= \quad [\,\Psi_1 u_1 \;\, \Psi_2 u_2\,]\, \operatorname{diag}\{\overline{u}_1 z_1 u_1, \overline{u}_2 z_2 u_2\}\, [\,\Psi_1 u_1 \;\, \Psi_2 u_2\,]^{-1} \\ &= \quad [\,\Psi_1 \;\, \Psi_2\,]\, \operatorname{diag}\{z_1, z_2\}\, [\,\Psi_1 \;\, \Psi_2\,]^{-1} \ . \end{aligned}$$

Vamos agora discutir o caso $|z_1| = |z_2|$. Se o autovetores $\{\Psi_1, \Psi_2\}$, correspondentes ao espectro de autovalores $\{z, z\}$, são linearmente independentes em $\mathbb{H}$, obviamente podemos repetir a discussão anterior e diagonalizar o operador matricial $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ através da matriz quaterniônica de ordem dois dada por $\mathcal{U} = [\Psi_1 \ \Psi_2]$. Assim, encontramos

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \exp\left[\mathcal{U}_{\mathbb{H}11}\, z\, (\mathcal{U}_{\mathbb{H}11})^{-1}\, x\right] \mathcal{U}_{\mathbb{H}11}\, \left[\mathcal{U}^{-1}_{\mathbb{H}11}\, \varphi(0) + \mathcal{U}^{-1}_{\mathbb{H}12}\, \varphi'(0)\right] + \\
&\quad \exp\left[\mathcal{U}_{\mathbb{H}12}\, z\, (\mathcal{U}_{\mathbb{H}12})^{-1}\, x\right] \mathcal{U}_{\mathbb{H}12}\, \left[\mathcal{U}^{-1}_{\mathbb{H}21}\, \varphi(0) + \mathcal{U}^{-1}_{\mathbb{H}22}\, \varphi'(0)\right] \\
&= \exp\left[\mathcal{U}_{\mathbb{H}21}\, (\mathcal{U}_{\mathbb{H}11})^{-1}\, x\right] \mathcal{U}_{\mathbb{H}11}\, \left[\mathcal{U}^{-1}_{\mathbb{H}11}\, \varphi(0) + \mathcal{U}^{-1}_{\mathbb{H}12}\, \varphi'(0)\right] + \\
&\quad \exp\left[\mathcal{U}_{\mathbb{H}22}\, (\mathcal{U}_{\mathbb{H}12})^{-1}\, x\right] \mathcal{U}_{\mathbb{H}12}\, \left[\mathcal{U}^{-1}_{\mathbb{H}21}\, \varphi(0) + \mathcal{U}^{-1}_{\mathbb{H}22}\, \varphi'(0)\right] \ . \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

Para autovetores linearmente dependentes não podemos construir uma matriz que diagonaliza o operador matricial $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$. No entanto, podemos reduzir o operador matricial $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ à forma de Jordan

$$
\mathcal{M}_{\mathbb{H}} = \mathcal{J}_{\mathbb{H}} \begin{pmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{pmatrix} \mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}} \ . \qquad (4.43)
$$

Segue que a solução da equação diferencial quaterniônica é escrita como

$$
\begin{aligned}
\Phi(x) &= \mathcal{J}_{\mathbb{H}} \exp\left[\begin{pmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{pmatrix} x\right] \mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}}\, \Phi(0) \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{\mathbb{H}11} & x\,\mathcal{J}_{\mathbb{H}11} + \mathcal{J}_{\mathbb{H}12} \\ \mathcal{J}_{\mathbb{H}21} & x\,\mathcal{J}_{\mathbb{H}21} + \mathcal{J}_{\mathbb{H}22} \end{pmatrix} \exp[zx] \begin{bmatrix} \mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}11}\, \varphi(0) + \mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}12}\, \varphi'(0) \\ \mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}21}\, \varphi(0) + \mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}22}\, \varphi'(0) \end{bmatrix} .
\end{aligned}
$$

Deste modo,

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \mathcal{J}_{\mathbb{H}11}\, \exp[z\,x]\, \left[\mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}11}\, \varphi(0) + \mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}12}\, \varphi'(0)\right] + \\
&\quad (x\,\mathcal{J}_{\mathbb{H}11} + \mathcal{J}_{\mathbb{H}12})\, \exp[z\,x]\, \left[\mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}21}\, \varphi(0) + \mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}22}\, \varphi'(0)\right] \\
&= \exp\left[\mathcal{J}_{\mathbb{H}11}\, z\, (\mathcal{J}_{\mathbb{H}11})^{-1}\, x\right] \mathcal{J}_{\mathbb{H}11}\, \left[\mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}11}\, \varphi(0) + \mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}12}\, \varphi'(0)\right] + \\
&\quad \left[x + \mathcal{J}_{\mathbb{H}12}\, (\mathcal{J}_{\mathbb{H}11})^{-1}\right] \exp\left[\mathcal{J}_{\mathbb{H}11}\, z\, (\mathcal{J}_{\mathbb{H}11})^{-1}\, x\right] \times \\
&\quad \mathcal{J}_{\mathbb{H}11}\, \left[\mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}21}\, \varphi(0) + \mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}22}\, \varphi'(0)\right] \\
&= \exp\left[\mathcal{J}_{\mathbb{H}21}\, (\mathcal{J}_{\mathbb{H}11})^{-1}\, x\right] \mathcal{J}_{\mathbb{H}11}\, \left[\mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}11}\, \varphi(0) + \mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}12}\, \varphi'(0)\right] + \\
&\quad \left[x + \mathcal{J}_{\mathbb{H}12}\, (\mathcal{J}_{\mathbb{H}11})^{-1}\right] \exp\left[\mathcal{J}_{\mathbb{H}21}\, (\mathcal{J}_{\mathbb{H}11})^{-1}\, x\right] \times \\
&\quad \mathcal{J}_{\mathbb{H}11}\, \left[\mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}21}\, \varphi(0) + \mathcal{J}^{-1}_{\mathbb{H}22}\, \varphi'(0)\right] \ . \qquad (4.44)
\end{aligned}
$$

Finalmente, a solução geral da equação diferencial quaterniônica (4.17) pode ser dada resolvendo-se o correspondente problema de autovalores. Concluímos esta seção, observando que a solução exponencial quaterniônica $\exp[q\,x]$ também pode ser escrita como $u\,\exp[z\,x]\,u^{-1}$, onde $q = u\,z\,u^{-1}$. As matrizes de semelhança $\mathcal{S}_{\mathbb{H}}$, $\mathcal{U}_{\mathbb{H}}$ ou $\mathcal{J}_{\mathbb{H}}$ e o espectro de autovalor complexo de $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ determinam o quatérnion u e o número complexo z. Esta forma, para soluções exponenciais, será muito útil na resolução de equações diferenciais com coeficientes constantes lineares sobre $\mathbb{C}$. De fato, devido à presença do operador R_1, não podemos usar soluções exponenciais quaterniônicas para equações diferenciais lineares sobre os complexos.

Exemplo

Usando a discussão sobre equação quadrática quaterniônica, pode ser mostrado imediatamente que a solução da seguinte equação de segunda ordem

$$\varphi''(x) + (L_3 - L_1)\,\varphi'(x) - L_2\,\varphi(x) = 0 \ ,$$

com condições iniciais

$$\varphi(0) = e_3/2 \ , \quad \varphi'(0) = 1 + e_2/2 \ ,$$

é dada por

$$\varphi(x) = \left(x + \tfrac{e_3}{2}\right) \exp[\, e_1\, x] \ .$$

Vamos resolver esta equação diferencial usando sua forma matricial (4.35), onde

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L_2 & L_1 - L_3 \end{pmatrix} \ .$$

Esta matriz quaterniônica pode ser reduzida à forma de Jordan

$$\mathcal{M}_{\mathbb{H}} = \mathcal{J}_{\mathbb{H}} \begin{pmatrix} L_1 & 1 \\ 0 & L_1 \end{pmatrix} \mathcal{J}_{\mathbb{H}}^{-1} \ .$$

através da matriz

$$\mathcal{J}_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_3}{2} \\ L_1 & 1 + \frac{L_2}{2} \end{pmatrix} \ , \quad \mathcal{J}_{\mathbb{H}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3+L_2}{4} & -\frac{L_1+L_3}{4} \\ -\frac{L_1+L_3}{2} & \frac{1-L_2}{2} \end{pmatrix}$$

A solução quaterniônica da equação diferencial linear sobre $\mathbb{H}$ é então dada por

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \mathcal{J}_{\mathbb{H}11} \exp[\, e_1\, x] \left[\mathcal{J}_{\mathbb{H}11}^{-1}\, \varphi(0) + \mathcal{J}_{\mathbb{H}12}^{-1}\, \varphi'(0)\right] + \\ &\quad (x\,\mathcal{J}_{\mathbb{H}11} + \mathcal{J}_{\mathbb{H}12}) \exp[\, e_1\, x] \left[\mathcal{J}_{\mathbb{H}21}^{-1}\, \varphi(0) + \mathcal{J}_{\mathbb{H}22}^{-1}\, \varphi'(0)\right] \\ &= (x\,\mathcal{J}_{\mathbb{H}11} + \mathcal{J}_{\mathbb{H}12}) \exp[\, e_1\, x] \\ &= \left(x + \tfrac{e_3}{2}\right) \exp[\, e_1\, x] \ . \end{aligned}$$

4.3 Equações diferenciais lineares sobre $\mathbb{C}$

Considere agora o operador quaterniônico diferencial de segunda ordem linear sobre $\mathbb{C}$

$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \partial_{xx} - a_{\mathbb{C}}\, \partial_x - b_{\mathbb{C}} \tag{4.45}$$

com coeficientes constantes. Queremos encontrar as soluções da equação diferencial quaterniônica linear sobre $\mathbb{C}$

$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}}\, \varphi(x) = 0 \ . \tag{4.46}$$

Como observado na seção anterior, a solução geral da equação (4.46) não pode ser dada em termos de exponenciais quaterniônicas. Em forma matricial, a equação (4.46) é escrita como

$$\Phi'(x) = \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\, \Phi(x) \ , \tag{4.47}$$

onde

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{\mathbb{C}} & a_{\mathbb{C}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{bmatrix} \ .$$

A representação matricial complexa do operador matricial linear sobre $\mathbb{C}$ tem um espectro de autovalores caracterizado por quatro autovalores complexos $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Vimos que $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ é diagonalizável se, e somente se, sua representação matricial complexa é diagonalizável. Para operador matriciais diagonalizáveis $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$, podemos encontrar uma matriz de semelhança quaterniônica $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$, linear sobre $\mathbb{C}$, que reduz o operador matricial $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ à forma diagonal [26]

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \mathcal{S}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} \frac{z_1+\bar{z}_2}{2} - \frac{z_1-\bar{z}_2}{2}\, L_1\, R_1 & 0 \\ 0 & \frac{z_3+\bar{z}_4}{2} - \frac{z_3-\bar{z}_4}{2}\, L_1\, R_1 \end{pmatrix} \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{-1} \ .$$

É imediato verificar que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} e_2 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix} \right\}$$

são autovetores do operador matricial diagonal

$$\begin{pmatrix} \frac{z_1+\bar{z}_2}{2} - \frac{z_1-\bar{z}_2}{2}\, L_1 R_1 & 0 \\ 0 & \frac{z_3+\bar{z}_4}{2} - \frac{z_3-\bar{z}_4}{2}\, L_1 R_1 \end{pmatrix}$$

com autovalores complexos à direita z_1, z_2, z_3 e z_4. A solução geral da equação diferencial (4.46) pode ser dada em termos destes autovalores complexos,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \mathcal{S}_{\mathbb{C}\,11} \exp\left[\left(\tfrac{z_1+\bar{z}_2}{2} - \tfrac{z_1-\bar{z}_2}{2}\, L_1 R_1\right) x\right] \left[\mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{C}\,11}\, \varphi(0) + \mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{C}\,12}\, \varphi'(0)\right] + \\ &\quad\ \mathcal{S}_{\mathbb{C}\,12} \exp\left[\left(\tfrac{z_3+\bar{z}_4}{2} - \tfrac{z_3-\bar{z}_4}{2}\, L_1 R_1\right)\right] \left[\mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{C}\,21}\, \varphi(0) + \mathcal{S}^{-1}_{\mathbb{C}\,22}\, \varphi'(0)\right] \\ &= u_1 \exp[z_1\, x]\, k_1 + u_2 \exp[z_2\, x]\, k_2 + \\ &\quad\ u_3 \exp[z_3\, x]\, k_3 + u_4 \exp[z_4\, x]\, k_4 \ , \end{aligned} \tag{4.48}$$

onde $k_n, n = 1, \cdots, 4$ são coeficientes complexos determinados pelas condições iniciais. Esta solução é válida para operadores matriciais diagonalizáveis $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$. Para operadores matriciais não diagonalizáveis precisamos encontrar a matriz de semelhança $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$ que reduz $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ à forma de Jordan. Por exemplo, para autovalores iguais pode ser mostrado que a solução geral da equação diferencial (4.46) é

$$\varphi(x) = u \exp[z\, x]\, k_1 + (u\, x + \tilde{u}) \exp[z\, x]\, k_2 + u_3 \exp[z_3\, x]\, k_3 + u_4 \exp[z_4\, x]\, k_4 \ . \tag{4.49}$$

Exemplo

Vamos considerar a equação diferencial quaterniônica linear sobre os complexos

$$\varphi''(x) - L_2\, R_1\, \varphi(x) = 0 \ ,$$

com condições iniciais

$$\varphi(0) = e_2 \;, \quad \varphi'(0) = e_3 \;.$$

Para encontrar soluções particulares impomos que $\varphi(x) = q \exp[\,z\,x]$. Consequëntemente,

$$q\,z^2 - e_2\,q\,e_1 = 0 \;.$$

A solução da equação diferencial de segunda ordem é

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\,\left[(e_1 + e_2)\,\exp[-e_1 x] + (e_2 - e_1)\,\cosh x + (e_3 - 1)\,\text{senh}x\right] \;.$$

Esta solução pode ser obtida utilizando a matriz

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L_2\,R_1 & 0 \end{pmatrix} \;,$$

e sua forma diagonal

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \mathcal{S}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} -L_1\,R_1 & 0 \\ 0 & L_1 \end{pmatrix} \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{-1} \;,$$

onde

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1-L_1-L_2-L_3}{2} + \frac{1-L_1+L_2+L_3}{2}\,R_1 & \frac{1+L_1-L_2+L_3}{2} - \frac{1+L_1+L_2-L_3}{2}\,R_1 \\ \frac{1+L_1+L_2-L_3}{2} - \frac{1+L_1-L_2+L_3}{2}\,R_1 & -\frac{1-L_1-L_2-L_3}{2} + \frac{1-L_1+L_2+L_3}{2}\,R_1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1+L_1+L_2+L_3}{2} - \frac{1+L_1-L_2-L_3}{2}\,R_1 & \frac{1-L_1-L_2+L_3}{2} + \frac{1-L_1+L_2-L_3}{2}\,R_1 \\ \frac{1-L_1+L_2-L_3}{2} + \frac{1-L_1-L_2+L_3}{2}\,R_1 & -\frac{1+L_1+L_2+L_3}{2} - \frac{1+L_1-L_2-L_3}{2}\,R_1 \end{pmatrix} \;.$$

Assim, a solução da equação diferencial é dada por

$$\begin{aligned} \varphi(x) \;&=\; \mathcal{S}_{\mathbb{C}\,11}\,\exp[\,-L_1\,R_1\,x\,]\,\left[\mathcal{S}_{\mathbb{C}\,11}^{-1}\,\varphi(0) + \mathcal{S}_{\mathbb{C}\,12}^{-1}\,\varphi'(0)\right] + \\ &\quad\; \mathcal{S}_{\mathbb{C}\,12}\,\exp[\,L_1\,x\,]\,\left[\mathcal{S}_{\mathbb{C}\,21}^{-1}\,\varphi(0) + \mathcal{S}_{\mathbb{C}\,22}^{-1}\,\varphi'(0)\right] \\ &=\; \tfrac{1}{4}\,\{(1 - e_1 + e_2 - e_3)\,\exp[-x] - (1 + e_1 - e_2 - e_3)\,\exp[x]\} + \\ &\quad\; \tfrac{e_1+e_2}{2}\,\exp[-e_1 x] \;. \end{aligned}$$

4.4 Equação diferencial quaterniônica linear sobre $\mathbb{R}$

Este tópico exige um tratamento ligeiramente diferente. Quando traduzimos um operador quaterniônico linear sobre $\mathbb{R}$ para sua contrapartida real obtemos uma matriz real cuja dimensão é quatro vezes maior. Uma matriz real admite, em geral, autovalores complexos e, conseqüentemente, seus autovetores tem elementos em $\mathbb{C}$. Então, a matriz de semelhança que leva $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ a sua forma de Jordan é complexa e, desta forma, não sabemos como voltar na forma quaterniônica. Além do problema de autovalores para solucionar este tipo de equação diferencial, utilizaremos transformações de semelhança de maneira que as matrizes finais sejam reais. permitindo a tradução para operadores lineares sobre $\mathbb{R}$.

Considere a equação

$$\mathcal{D}_{\mathbb{R}}\,\varphi(x) = 0 \;, \tag{4.50}$$

onde

$$\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = \partial_{xx} \, - a_{\mathbb{R}}\,\partial_x - b_{\mathbb{R}} \;.$$

Sabemos que a eq.(4.50) pode ser reescrita como

$$\Phi'(x) = \mathcal{M}_{\mathbb{R}}\, \Phi(x) \ , \tag{4.51}$$

onde

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{\mathbb{R}} & a_{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{bmatrix} \ ,$$

Lembramos que as matrizes traduzidas podem ser reais ou complexas. Assim, seja $J_8[\mathbb{C}]$ a forma de Jordan complexa da matriz $M_8[\mathbb{R}]$,

$$J_8[\mathbb{C}] = R_{2m} \oplus Z_n \oplus \bar{Z}_n \ , \quad m+n=4 \ , \tag{4.52}$$

onde R_{2m} e Z_n representam a matriz de Jordan a blocos contendo, respectivamente, os autovalores reais e complexos de $M_8[\mathbb{R}]$. Usando uma matriz de semelhança apropriada

$$S_8[\mathbb{C}] = \begin{pmatrix} S^{(1)}_{2m\times 2m}[\mathbb{R}] & S^{(4)}_{2m\times n}[\mathbb{C}] & \bar{S}^{(4)}_{2m\times n}[\mathbb{C}] \\ S^{(2)}_{n\times 2m}\ [\mathbb{R}] & S^{(5)}_{n\times n}\ [\mathbb{C}] & \bar{S}^{(5)}_{n\times n}\ [\mathbb{C}] \\ S^{(3)}_{n\times 2m}\ [\mathbb{R}] & S^{(6)}_{n\times n}\ [\mathbb{C}] & \bar{S}^{(6)}_{n\times n}\ [\mathbb{C}] \end{pmatrix} \ , \tag{4.53}$$

podemos reescrever $M_8[\mathbb{R}]$ como produto de três matrizes complexas, isto é, $S_8[\mathbb{C}]J_8[\mathbb{C}]S_8^{-1}[\mathbb{C}]$. Agora o problema está na impossibilidade de traduzir cada termo do produto de matrizes precedente por matrizes quaterniônicas lineares sobre $\mathbb{R}$. Para superar esta dificuldade introduzimos a matriz

$$W_8[\mathbb{C}] = \mathbf{1}_{2m} \oplus \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e_1 \\ 1 & -e_1 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_n \right] \ . \tag{4.54}$$

É possível mostrar que

$$M_8[\mathbb{R}] = T_8[\mathbb{R}]\, J_8[\mathbb{R}]\, T_8^{-1}[\mathbb{R}]$$

onde

$$T_8[\mathbb{R}] = S_8[\mathbb{C}]\, W_8[\mathbb{C}] = \begin{pmatrix} S^{(1)}_{2m\times 2m}[\mathbb{R}] & \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left\{S^{(4)}_{2m\times n}[\mathbb{C}]\right\} & -\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{S^{(4)}_{2m\times n}[\mathbb{C}]\right\} \\ S^{(2)}_{n\times 2m}\ [\mathbb{R}] & \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left\{S^{(5)}_{n\times n}\ [\mathbb{C}]\right\} & -\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{S^{(5)}_{n\times n}\ [\mathbb{C}]\right\} \\ S^{(3)}_{n\times 2m}\ [\mathbb{R}] & \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left\{S^{(6)}_{n\times n}\ [\mathbb{C}]\right\} & -\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{S^{(6)}_{n\times n}\ [\mathbb{C}]\right\} \end{pmatrix} \ , \tag{4.55}$$

e

$$J_8[\mathbb{R}] = W_8^{-1}[\mathbb{C}]\, J_8[\mathbb{C}]\, W_8[\mathbb{C}] = R_{2m} \oplus \begin{pmatrix} \mathrm{Re}[Z_n] & -\mathrm{Im}[Z_n] \\ \mathrm{Im}[Z_n] & \mathrm{Re}[Z_n] \end{pmatrix} \ . \tag{4.56}$$

A forma de Jordan canônica real $J_8[\mathbb{R}]$ pode ser decomposta na soma de três matrizes reais que comutam, isto é, a matriz diagonal

$$D_8[\mathbb{R}] \quad = \quad \mathrm{Diag}\left\{\lambda_1\,,\,\dots\,,\,\lambda_m\,,\,\tilde{\lambda}_1\,,\,\dots\,,\,\tilde{\lambda}_m\,,\,\mathrm{Re}\,[z_1]\,,\,\dots,\,\mathrm{Re}\,[z_n]\,,\,\mathrm{Re}\,[z_1]\,,\,\dots\,,\,\mathrm{Re}\,[z_n]\right\} \ ,$$

a matriz anti-simétrica

$$A_8[\mathbb{R}] \quad = \quad \mathbf{0}_{2m} \oplus \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathrm{Diag}\,\left\{\mathrm{Im}\,[z_1]\,,\,\dots\,,\,\mathrm{Im}\,[z_n]\right\} \right] \ ,$$

e a matriz nilpotente $N_8[\mathbb{R}]$. A forma de Jordan real $J_8[\mathbb{R}] = D_8[\mathbb{R}] + A_8[\mathbb{R}] + N_8[\mathbb{R}]$ e a transformação de semelhança $T_8[\mathbb{R}]$ podem ser traduzidas para as suas contrapartidas quaterniônicas $\mathcal{J}_\mathbb{R} = \mathbf{\Lambda}_\mathbb{R} + \mathcal{A}_\mathbb{R} + \mathcal{N}_\mathbb{R}$ e $\mathcal{T}_\mathbb{R}$. A solução matricial da eq.(4.51) é dada por

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \exp[\mathcal{M}_\mathbb{R}\,(x-x_0)]\Phi(x_0) \\ &= \mathcal{T}_\mathbb{R}\,\exp[\mathcal{J}_\mathbb{R}\,(x-x_0)]\,\mathcal{T}_\mathbb{R}^{-1}\,\Phi(x_0) \\ &= \mathcal{T}_\mathbb{R}\,\exp[\mathbf{\Lambda}_\mathbb{R}\,(x-x_0)]\,\exp[\mathcal{A}_\mathbb{R}\,(x-x_0)]\,\exp[\mathcal{N}_\mathbb{R}\,(x-x_0)]\,\mathcal{T}_\mathbb{R}^{-1}\,\Phi(x_0)\ . \end{aligned} \quad (4.57)$$

No caso de uma matriz nilpotente nula, é possível verificar, por cálculos diretos, que a solução geral da equação diferencial quaterniônica com coeficientes constantes é

$$\begin{aligned} \varphi(x) \;=\; & \sum_{r=1}^{m} \left\{ u_r\,\exp[\lambda_r\,x]\,\alpha_r + \tilde{u}_r\,\exp[\tilde{\lambda}_r\,x]\,\beta_r \right\} + \\ & \sum_{p=1}^{n} \{v_p\,\cos[b_p\,x] - \tilde{v}_p\,\mathrm{sen}\,[b_p\,x]\}\,\exp[a_p\,x]\,\gamma_p + \\ & \sum_{p=1}^{n} \{\tilde{v}_p\,\cos[b_p\,x] + v_p\,\mathrm{sen}\,[b_p\,x]\}\,\exp[a_p\,x]\,\delta_p\ , \quad m+n=4\ , \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde $a_p = \mathrm{Re}\,[z_p]$, $b_p = \mathrm{Im}\,[z_p]$ e $u_r, \tilde{u}_r, v_p, \tilde{v}_p \in \mathbb{H}$. As oito constantes reais α_r, β_r, γ_p e δ_p são fixadas pelas condições iniciais $\varphi(x_0) = \alpha$ e $\varphi'(x_0) = \beta$. O ponto importante a ser notado aqui é que as soluções particulares correspondentes ao autovalor complexo $z = a + e_1 b$ são dadas por uma combinação quaterniônica de $\cos[b\,x]\,\exp[a\,x]$ e $\mathrm{sen}\,[b\,x]\,\exp[a\,x]$, a saber

$$\{v\,\cos[b\,x] - \tilde{v}\,\mathrm{sen}\,[b\,x]\}\exp[a\,x] \quad \text{e} \quad \{\tilde{v}\,\cos[b\,x] + v\,\mathrm{sen}\,[b\,x]\}\exp[a\,x]\ .$$

Para operadores diferenciais quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{C}$, a solução geral dada por (4.58) é reduzida a

$$\varphi(x) = \sum_{r=1}^{m} u_r\,\exp[\lambda_r\,x]\,c_r + \sum_{p=1}^{n} v_p\,\exp[z_p\,x]\,d_p\ , \quad c_r\,,\,d_p \in \mathbb{C}\ . \quad (4.59)$$

Exemplos

Nesta subseção damos alguns exemplos com matrizes nilpotentes nulas e não nulas. No último exemplo, embora o operador seja linear sobre $\mathbb{C}$, a solução é feita utilizando o método acima.

Caso Diagonalizável

Vamos resolver a equação

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - L_1 R_2\,\frac{d}{dx} - L_2 R_1\right]\varphi(x) = 0\ , \quad (4.60)$$

com condições iniciais $\varphi(0) = e_2$ e $\varphi'(0) = e_3$. O operador matricial correspondente a esta equação é

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L_2R_1 & L_1R_2 \end{pmatrix} . \tag{4.61}$$

Utilizando a matriz $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{T}_{\mathbb{R}}\}_{11} &= \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}\,(L_1 + L_3R_2 - L_1R_3 - L_3R_1) - \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}\,(1 - L_2R_2 + L_2R_1 - R_3)\ ,\\
\{\mathcal{T}_{\mathbb{R}}\}_{12} &= \tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,(1 + L_1R_1 - L_2R_1 - L_3) - \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\,(L_1 + R_1 + L_2 + L_3R_1)\ ,\\
\{\mathcal{T}_{\mathbb{R}}\}_{21} &= \tfrac{1}{2}\,(L_1R_1 + L_3R_3 - L_2R_3 + R_1 - L_2 + R_2 + L_3 + L_1R_2)\ ,\\
\{\mathcal{T}_{\mathbb{R}}\}_{22} &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\,(L_2R_3 - L_3R_2 - L_1R_3 + R_2)\ ,
\end{aligned}$$

e sua inversa

$$\begin{aligned}
\{(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})^{-1}\}_{11} &= \tfrac{1}{4\sqrt{5}}\,(1 - L_2R_2 + L_3R_2 - L_1 - L_3R_1 - L_1R_3 + L_2R_1 + R_3)\ ,\\
\{(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})^{-1}\}_{12} &= \tfrac{5+\sqrt{5}}{40}\,(L_1R_1 + L_3R_3 + L_1R_2 - L_3) + \tfrac{5-\sqrt{5}}{40}\,(L_2 - R_2 - L_2R_3 - R_1)\ ,\\
\{(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})^{-1}\}_{21} &= \tfrac{1}{2\sqrt{6}}\,(1 + L_1R_1 - L_2R_1 + L_3)\ ,\\
\{(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})^{-1}\}_{22} &= \tfrac{1}{4\sqrt{6}}\,(L_2R_2 - L_3R_3 + L_1R_2 + R_3) + \tfrac{1}{4\sqrt{2}}\,(L_3R_2 - L_2R_3 + L_1R_3 + R_2)\ ,
\end{aligned}$$

podemos reescrever $M_{\mathbb{R}}$ em termos de

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{R}} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} L_1R_1 + \sqrt{5}\,L_3R_3 & 0 \\ 0 & L_2R_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} .$$

Utilizando a eq.(4.57) obtemos a seguinte solução

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \{\mathcal{T}_{\mathbb{R}}\}_{11}\ \exp\left[\tfrac{L_1R_1+\sqrt{5}\,L_3R_3}{2}\,x\right]\ \left[\{(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})^{-1}\}_{11}\ e_2 + \{(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})^{-1}\}_{12}\ e_3\right] +\\
&\quad \{\mathcal{T}_{\mathbb{R}}\}_{12}\ \exp\left[\tfrac{L_2R_2+\sqrt{3}\,R_2}{2}\,x\right]\ \left[\{(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})^{-1}\}_{21}\ e_2 + \{(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})^{-1}\}_{22}\ e_3\right]\\
&= \left\{\tfrac{e_1-e_2}{2\sqrt{5}}\left(\text{senh}\left[\tfrac{\sqrt{5}}{2}\,x\right] - \sqrt{5}\,\cosh\left[\tfrac{\sqrt{5}}{2}\,x\right]\right) + \tfrac{1+e_3}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\left[\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x\right]\right\}\,\exp\left[x/2\right] +\\
&\quad \left\{\tfrac{e_3-1}{\sqrt{5}}\,\text{senh}\left[\tfrac{\sqrt{5}}{2}\,x\right] + \tfrac{e_1+e_2}{2}\left(\cos\left[\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x\right] + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\left[\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)\right\}\,\exp\left[-x/2\right]\ .
\end{aligned} \tag{4.62}$$

No caso da matriz nilpotente nula, a solução geral da equação diferencial quaterniônica linear pode ser escrita em termos do espectro de autovalores de $M_8[\mathbb{R}]$, representação matricial de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Neste caso particular, o espectro de autovalores é

$$\left\{\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,,\ -\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\ -\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,,\ \tfrac{1+e_1\sqrt{3}}{2}\,,\ -\tfrac{1-e_1\sqrt{3}}{2}\,,\ \tfrac{1-e_1\sqrt{3}}{2}\,,\ -\tfrac{1+e_1\sqrt{3}}{2}\right\} .$$

Conseqüentemente, a eq.(4.58) torna-se

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= u_1\ \exp\left[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,x\right]\ \alpha_1 + u_2\ \exp\left[\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,x\right]\ \alpha_2 + \tilde{u}_1\ \exp\left[-\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,x\right]\ \beta_1 +\\
&\quad \tilde{u}_2\ \exp\left[-\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,x\right]\ \beta_2 + \left\{v_1\ \cos\left[\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x\right] - \tilde{v}_1\,\text{sen}\left[\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x\right]\right\}\,\exp\left[x/2\right]\ \gamma_1 +\\
&\quad \left\{\tilde{v}_1\ \cos\left[\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x\right] + v_1\,\text{sen}\left[\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x\right]\right\}\,\exp\left[x/2\right]\ \delta_1 +\\
&\quad \left\{v_2\ \cos\left[\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x\right] - \tilde{v}_2\,\text{sen}\left[\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x\right]\right\}\,\exp\left[-x/2\right]\ \gamma_2 +\\
&\quad \left\{\tilde{v}_2\ \cos\left[\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x\right] + v_2\,\text{sen}\left[\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x\right]\right\}\,\exp\left[-x/2\right]\ \delta_2\ .
\end{aligned}$$

Os coeficientes quaterniônicos $u_{1,2}$, $\tilde{u}_{1,2}$, $v_{1,2}$ e $\tilde{v}_{1,2}$ podem ser determinados diretamente. Encontramos

$$\begin{array}{lcl} u_1 = e_1 - e_2 & , & \tilde{u}_1 = 1 - e_3 \ , \\ u_2 = e_1 - e_2 & , & \tilde{u}_2 = 1 - e_3 \ , \\ v_1 = 1 + e_3 & , & \tilde{v}_1 = 0 \ , \\ v_2 = e_1 + e_3 & , & \tilde{v}_2 = 0 \ . \end{array}$$

A solução particular correspondente aos autovalores complexos de $M_8[\mathbb{R}]$ é dada por

$$z_1 = \tfrac{1+e_1\sqrt{3}}{2} \ , \ \bar{z}_1 \ : \quad (1+e_3)\ \exp\left[x/2\right] \times \left\{ \begin{array}{l} \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right] \\ \\ \operatorname{sen}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right] \end{array} \right. \ ,$$

e

$$z_2 = -\ \tfrac{1-e_1\sqrt{3}}{2} \ , \ \bar{z}_2 \ : \quad (e_1+e_2)\ \exp\left[-\,x/2\right] \times \left\{ \begin{array}{l} \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ \\ \operatorname{sen}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \end{array} \right. \ ,$$

Finalmente, as condições inicias $\varphi(0) = e_2$ e $\varphi'(0) = e_3$ determinam completamente a solução que é dada por

$$\begin{array}{lclclclclclclclcl} \alpha_1 & = & \frac{1-\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} & , & \beta_1 & = & \frac{1}{2\sqrt{5}} & , & \gamma_1 & = & 0 & , & \delta_1 & = & \frac{1}{\sqrt{3}} & , \\ \alpha_2 & = & -\frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} & , & \beta_2 & = & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & , & \gamma_2 & = & \frac{1}{2} & , & \delta_2 & = & \frac{1}{2\sqrt{3}} & . \end{array}$$

Agora, considere a equação

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - (L_1R_1 + L_2R_2)\ \frac{d}{dx} + R_3 - L_3 \right] \varphi(x) = 0 \ . \tag{4.63}$$

O espectro de autovalores da representação matricial real de

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ L_3 - R_3 & L_1R_1 + L_2R_2 \end{array} \right) \tag{4.64}$$

é

$$\{2\,,\ -2\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 1+e_1\,,\ -(1-e_1)\,,\ 1-e_1\,,\ -(1+e_1)\,\} \ .$$

Neste caso, $v_1 \cos x\ \exp[x]$ e $v_2 \cos x\ \exp[-x]$ não representam soluções particulares. De fato, a fim de satisfazer a eq. (4.63) temos que impor as seguintes restrições para $v_{1,2}$

$$\begin{array}{rcl} [L_1R_1 + L_2R_2 - 2]\ v_1 = 0 & \Rightarrow & v_1 = e_1\,\beta + e_2\,\gamma \ , \\ [L_1R_1 + L_2R_2 + L_3 - R_3]\ v_1 = 0 & \Rightarrow & v_1 = 0 \ , \\ [L_1R_1 + L_2R_2 + 2]\ v_2 = 0 & \Rightarrow & v_2 = \alpha + e_2\,\delta \ , \\ [L_1R_1 + L_2R_2 - L_3 + R_3]\ v_2 = 0 & \Rightarrow & v_2 = 0 \ . \end{array}$$

As soluções particulares, não triviais, correspondentes aos autovalores complexos $z_1 = 1 + e_1$ e $z_2 = -(1+e_1)$ são

$$z_1\ ,\ \bar{z}_1 \ : \quad \exp\left[x\right] \times \left\{ \begin{array}{l} e_2\ \cos\left[x\right] - e_1 \operatorname{sen}\left[x\right] \\ \\ e_1\ \cos\left[x\right] + e_2 \operatorname{sen}\left[x\right] \end{array} \right. \ ,$$

e

$$z_2\,,\;\bar{z}_2\quad:\qquad \exp\left[-x\right]\times\left\{\begin{array}{l} e_2\;\cos\left[x\right]+e_1\,\mathrm{sen}\left[x\right]\\ \\ e_1\;\cos\left[x\right]-e_2\,\mathrm{sen}\left[x\right]\end{array}\right. .$$

A solução geral é dada por

$$\begin{array}{rcl}\varphi(x) & = & \exp\left[-\,2\,x\right]\;\alpha_1+k\;\exp\left[2\,x\right]\;\alpha_2+\beta_1+k\,\beta_2+\\ & & \left\{e_2\;\cos\left[x\right]-e_1\,\mathrm{sen}\left[x\right]\right\}\;\exp\left[x\right]\;\gamma_1+\left\{e_1\;\cos\left[x\right]+e_2\,\mathrm{sen}\left[x\right]\right\}\;\exp\left[x\right]\;\delta_1+\\ & & \left\{e_2\;\cos\left[x\right]+e_1\,\mathrm{sen}\left[x\right]\right\}\;\exp\left[-x\right]\;\gamma_2+\left\{e_1\;\cos\left[x\right]-e_2\,\mathrm{sen}\left[x\right]\right\}\;\exp\left[-x\right]\;\delta_2\;.\end{array}$$

Caso não diagonalizável

Como último exemplo vamos considerar a equação

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}-(L_1R_2+L_2R_1)\right]\varphi(x)=0\;. \tag{4.65}$$

O espectro de autovalores da representação matricial real de

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}=\left(\begin{array}{cc}0 & 1\\ L_1R_2+L_2R_1 & 0\end{array}\right) \tag{4.66}$$

é

$$\left\{0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,\sqrt{2}\,,\,-\sqrt{2}\,,\,e_1\sqrt{2}\,,\,-e_1\sqrt{2}\right\}\;.$$

Utilizando uma matriz $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ apropriada podemos reescrever $M_{\mathbb{R}}$ em termos de

$$\Lambda_{\mathbb{R}}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0 & L_2R_2+L_3R_3\end{array}\right)\;,\;\;\mathcal{A}_{\mathbb{R}}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0 & L_1-R_1\end{array}\right)$$

e

$$\mathcal{N}_{\mathbb{R}}=\tfrac{1}{2}\left(\begin{array}{cc}L_1-L_3R_2 & 0\\ 0 & 0\end{array}\right)\;,$$

com $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}=\mathcal{T}_{\mathbb{R}}\left(\Lambda_{\mathbb{R}}+\mathcal{A}_{\mathbb{R}}+\mathcal{N}_{\mathbb{R}}\right)(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})^{-1}$. Todavia, $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ representa uma matriz nilpotente. De fato, um simples cálculo mostra que $(\mathcal{N}_{\mathbb{R}})^2=0$. Isto implica a presença da variável x na solução geral. Explicitamente, temos

$$\begin{array}{rcl}\varphi(x) & = & \alpha_1+e_3\,\alpha_2+(\tilde{\alpha}_1+e_3\,\tilde{\alpha}_2)\;x+\\ & & (e_1-e_2)\;\left\{\exp\left[\sqrt{2}\,x\right]\;\beta_1+\exp\left[-\sqrt{2}\,x\right]\;\beta_2\right\}+\\ & & (e_1+e_2)\;\left\{\cos\left[\sqrt{2}\,x\right]\gamma_1+\mathrm{sen}\left[\sqrt{2}\,x\right]\;\delta_1\right\}\;.\end{array}$$

Para determinar tal solução vamos especificar, $\varphi(0)=e_2$ e $\varphi'(0)=e_3$,

$$\varphi(x)=e_3x+\tfrac{e_2-e_1}{2}\;\cosh\left[\sqrt{2}\,x\right]+\tfrac{e_1+e_2}{2}\;\cos\left[\sqrt{2}\,x\right]\;. \tag{4.67}$$

Trocando as condições iniciais para $\varphi(0)=e_3$ e $\varphi'(0)=e_2$, obtemos

$$\varphi(x)=e_3+\tfrac{e_2-e_1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\;\left[\sqrt{2}\,x\right]+\tfrac{e_1+e_2}{2\sqrt{2}}\;\mathrm{sen}\;\left[\sqrt{2}\,x\right]\;. \tag{4.68}$$

Caso linear sobre $\mathbb{C}$

Vamos determinar a solução de

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - L_2 R_1 \right] \varphi(x) = 0 \; . \tag{4.69}$$

O espectro de autovalores da contrapartida real da matriz

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L_2 R_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.70}$$

é

$$\{1\,,\,-1\,,\,1\,,\,-1\,,\,e_1\,,\,e_1\,,\,-e_1\,,\,-e_1\,\} \; .$$

Então, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} \varphi(x) \;\; = \;\; & u_1\,\exp[x]\;\alpha_1 + u_2\,\exp[-x]\;\alpha_2 + \tilde{u}_1\,\exp[x]\;\beta_1 + \tilde{u}_2\,\exp[-x]\;\beta_2 + \\ & \{v_1\,\cos[x] - \tilde{v}_1\,\mathrm{sen}\,[x]\}\;\gamma_1 + \{\tilde{v}_1\,\cos[x] + v_1\,\mathrm{sen}\,[x]\}\;\delta_1 + \\ & \{v_2\,\cos[x] - \tilde{v}_2\,\mathrm{sen}\,[x]\}\;\gamma_2 + \{\tilde{v}_2\,\cos[x] + v_2\,\mathrm{sen}\,[x]\}\;\delta_2 \; . \end{aligned} \tag{4.71}$$

Simples cálculos determinam

$$\begin{array}{lcl} u_1 = e_3 - 1 & , & \tilde{u}_1 = e_2 - e_1 \; , \\ u_2 = e_3 - 1 & , & \tilde{u}_2 = e_2 - e_1 \; , \\ v_1 = 1 + e_3 & , & \tilde{v}_1 = 0 \; , \\ v_2 = e_1 + e_2 & , & \tilde{v}_2 = 0 \; . \end{array}$$

Conseqüentemente, eq.(4.71) torna-se

$$\varphi(x) = (e_3 - 1)\;[\exp[x]\;c_1 + \exp[-x]\;c_2] + (1 + e_3)\;\{\exp[e_1 x]\;d_1 + \exp[-e_1 x]\;d_2\} \; . \tag{4.72}$$

As condições iniciais $\varphi(0) = e_2$ e $\varphi'(0) = e_3$ fixam a solução

$$\varphi(x) = \{(e_2 - e_1)\;\cosh x + (e_3 - 1)\,\mathrm{senh}\,x + (e_1 + e_2)\;\exp[-e_1 x]\}\,/2 \; . \tag{4.73}$$

4.5 Conclusão

É importante dizer que todo raciocínio que fizemos acima pode ser estendido para equações diferenciais de ordem n.

• Operadores lineares sobre $\mathbb{R}$

Devido à linearidade sobre $\mathbb{R}$, a solução geral de equações diferenciais ordinárias homogêneas de ordem n com coeficientes quaterniônicos constantes que agem seja à esquerda, seja à direita tem a forma

$$\varphi(x) = \sum_{s=1}^{4n} \varphi_s(x)\, r_s \; , \tag{4.74}$$

onde $\{\varphi_1(x)\,,\,\ldots\,,\,\varphi_{4n}(x)\}$ representa $4n$ soluções quaterniônicas particulares, linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, e r_s são constantes reais fixadas pelas Eqs. (4.77). A escolha de coeficientes quaterniônicos agindo à esquerda e exponenciais reais

$$\varphi_s(x) = u_s \exp\left[\,\lambda_s\, x\,\right]\,,$$

não representa uma resposta satisfatória. De fato, vimos que tais soluções particulares são, no máximo, válidas para a parte real do espectro de autovalor da matriz $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}[n]$.

• Operadores lineares sobre $\mathbb{C}$

A solução geral da equação diferencial ordinária homogênea de ordem n linear sobre $\mathbb{C}$

$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}}[n]\,\varphi(x) = 0\,, \tag{4.75}$$

onde

$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}}[n] = \frac{d^{\,n}}{dx^{n}} - \sum_{p=0}^{n-1} a_{\mathbb{C}}^{(p)}\,\frac{d^{\,p}}{dx^{p}} = \frac{d^{\,n}}{dx^{n}} - \sum_{p=0}^{n-1}\left[\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{1} a_{\mu\nu}^{(p)} L_\mu R_\nu\right]\frac{d^{\,p}}{dx^{p}}\,,\quad a_{\mu\nu}^{(p)}\in\mathbb{R}\,,$$

tem a forma

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{2n}\varphi_m(x)\,c_m\,, \tag{4.76}$$

onde $\{\varphi_1(x)\,,\,\ldots\,,\,\varphi_{2n}(x)\}$ representa $2n$ soluções quaterniônicas particulares linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$ e c_m são constantes complexas determinadas pelos valores iniciais da função $\varphi(x)$ e suas derivadas

$$\varphi(x_0) = \varphi_0\,,\quad \frac{d\varphi}{dx}(x_0) = \varphi_1\,,\;\ldots\,,\;\frac{d^{\,n-1}\varphi}{dx^{n-1}}(x_0) = \varphi_{n-1}\quad\in\mathbb{H}\,. \tag{4.77}$$

A solução de eq.(4.75) é dada por

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{p=1}^{n}\left\{\exp\left[\mathcal{M}_{\mathbb{C}}[n]\;(x-x_0)\right]\right\}_{1p}\,\varphi_{p-1}\\ &= \sum_{p=1}^{n}\left\{\mathcal{S}_{\mathbb{C}}[n]\,\exp\left[\mathcal{J}_{\mathbb{C}}[n]\;(x-x_0)\right](\mathcal{S}_{\mathbb{C}}[n])^{-1}\right\}_{1p}\,\varphi_{p-1}\,,\end{aligned} \tag{4.78}$$

onde

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}}[n] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1\\ a_{\mathbb{C}}^{(0)} & a_{\mathbb{C}}^{(1)} & a_{\mathbb{C}}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{\mathbb{C}}^{(n-1)}\end{pmatrix} \tag{4.79}$$

e $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}[n]$ representa a forma canônica de Jordan da matriz $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}[n]$. Note que $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}[n] = \mathbf{\Lambda}_{\mathbb{C}}[n] + \mathcal{N}_{\mathbb{C}}[n]$, onde $\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{C}}[n]$ é diagonal e $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}[n]$ é nilpotente. A matriz de Jordan $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}[n]$ pode ser determinada através da resolução do problema de autovalores complexos à direita [26] para $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}[n]$. Vale a pena ressaltar que da eq.(4.78) podemos recuperar a forma das soluções particulares $\varphi_m(x)$. Por exemplo, no caso de um matriz nilpotente nula, a solução geral (4.76) pode ser reescrita em termos da atuação à esquerda de coeficientes quaterniônicos (u_p e v_p), de exponenciais complexas ($\exp[\,z_p\,x\,]$ e $\exp[\,w_p\,x\,]$), e da atuação à direita de constantes complexas (c_p e $\tilde{c}_p$) determinadas pelas condições iniciais. Explicitamente, encontramos

$$\varphi(x) = \sum_{p=1}^{n} \{u_p\,\exp[\,z_p\,x\,]\,c_p + v_p\,\exp[\,w_p\,x\,]\,\tilde{c}_p\}\ , \tag{4.80}$$

onde os coeficientes complexos $\{z_1\,,\,w_1\,,\,\ldots\,,\,z_n\,,\,w_n\}$ representam autovalores à direita da matriz quaterniônica $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}[n]$. No caso de autovalores complexos iguais e coeficientes quaterniônicos iguais, as soluções particulares restantes são determinadas através do uso das matrizes nilpotentes $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}[n]$.

• Operadores lineares sobre $\mathbb{H}$

Para matrizes quaterniônicas lineares sobre $\mathbb{H}$, $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}[n]$, é possível mostrar que $v_p = u_p\,e_2$ e $w_p = \bar{z}_p$. Conseqüentemente, para operadores diferenciais quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{H}$, a solução geral (4.80) é reduzida a forma

$$\varphi(x) = \sum_{p=1}^{n} u_p\,\exp[\,z_p\,x\,]\,(c_p + e_2\tilde{c}_p) = \sum_{p=1}^{n} \exp[\,q_p\,x\,]\,h_p\ , \tag{4.81}$$

onde $q_p = u_p z_p u_p^{-1}$. As condições iniciais (4.77) devem fixar as n constantes quaterniônicas h_p.

Resumindo, neste capítulo, apresentamos o método de resolução de equações diferenciais ordinárias com coeficientes quaterniônicos constantes lineares sobre $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ [27,29]. Através do enfoque matricial, mostramos que soluções particulares de equações diferenciais com coeficientes quaterniônico constantes que aparecem tanto à esquerda quanto à direita podem ser escritos em termos de autovalores da matriz $M_{4n}[\mathbb{R}]$, representando a contrapartida real dos operadores quaterniônicos, $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}[n]$, associados às equações diferenciais quaterniônicas lineares sobre $\mathbb{R}$. Em correspondência ao autovalor $z = a + e_1 b$, encontramos as seguintes soluções particulares

$$\{q\,\cos[b\,x] - p\,\mathrm{sen}[b\,x]\}\exp[a\,x] \quad \text{e} \quad \{p\,\cos[b\,x] + q\,\mathrm{sen}[b\,x]\}\exp[a\,x]\ , \tag{4.82}$$

$q\,,\,p \in \mathbb{H}$. Quando $q = p$ ou $p = 0$ estas soluções se reduzem a

$$q\,\cos[b\,x]\,\exp[a\,x] \quad \text{e} \quad q\,\mathrm{sen}[b\,x]\,\exp[a\,x]\ .$$

Para operadores diferenciais lineares sobre $\mathbb{C}$, as soluções particulares (4.82) se unem resultando em

$$q\,\exp[(a + e_1 b)\,x]\ .$$

5

Equação de Schrödinger

Neste capítulo discutiremos a equação de Schrödinger na presença de potenciais quaterniônicos. Sempre que possível, os cálculos apresentados serão analíticos, caso contrário recorreremos a cálculos numéricos. Este capítulo tem por objetivo elucidar as propostas experimentais [43,45,51] e as discussões teóricas [13,14] referentes à formulação quaterniônica da equação de Schrödinger. Nesta discussão, faltam as interpretações físicas das soluções quaterniônicas, as quais representam uma questão delicada, o entendimento do papel que os potenciais quaterniônicos poderiam desempenhar na mecânica quântica e onde poderiam aparecer divergências entre a teoria quaterniônica e a teoria usual.

Começaremos este capítulo com uma discussão sobre operadores quaterniônicos anti-Hermitianos, estados estacionários e invariância com relação a reversão temporal. A seguir, estudaremos a fenomenologia dos potenciais quaterniônicos quadrados unidimensionais. A parte $e_{2,3}$ destes potenciais é tratada como uma perturbação do caso complexo. Mostraremos que existem divergências entre a teoria quaterniônica e a teoria usual [29]. Não obstante, em casos particulares, teremos que combater os efeitos quaterniônicos que minimizam estas divergências. Os resultados numéricos são exibidos nos apêndices C e D.

5.1 Equação de Schrödinger quaterniônica

Para simplicidade, vamos assumir uma descrição unidimensional da equação de Schrödinger. Na formulação da mecânica quântica não relativística, a função de onda complexa de uma partícula sem "spin", cuja energia potencial é $V(x,t)$, satisfaz a equação de Schrödinger

$$\partial_t \Phi(x,t) = \frac{e_1}{\hbar} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V(x,t) \right] \Phi(x,t) \ . \tag{5.1}$$

Na mecânica quântica quaterniônica [5], o operador anti-Hermitiano

$$\mathcal{A}^V(x,t) = \frac{e_1}{\hbar} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V(x,t) \right]$$

pode ser generalizado trocando $V(x,t)$ por $[V + \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{V}](x,t)$, onde $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3) \in \mathbb{R}^3$. A parte e_1 deste potencial quaterniônico viola a conservação da norma. De fato,

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi}\, \Phi \, \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tfrac{\hbar}{2m} \, \overline{\Phi} \, e_1 \, \partial_{xx} \Phi - \tfrac{\hbar}{2m} \left(\partial_{xx} \overline{\Phi} \right) \, e_1 \, \Phi - \tfrac{1}{\hbar} \, \overline{\Phi} \, \{ e_1, \boldsymbol{e} \} \cdot \boldsymbol{V} \Phi \right] \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{2}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi} \, V_1 \Phi \, \mathrm{d}x \ . \end{aligned}$$

Deste modo, consideramos $V_1 = 0$ e generalizamos o potencial real $V(x,t)$ introduzindo o potencial complexo

$$W(x,t) = |W(x,t)| \, \exp[e_1 \theta(x,t)] \ ,$$

e agora

$$\mathcal{A}^{V,W}(x,t) = \tfrac{e_1}{\hbar} \, \left[\tfrac{\hbar^2}{2m} \, \nabla^2 - V(x,t) \right] + \tfrac{e_2}{\hbar} \, W(x,t) \ .$$

A anti-Hermiticidade é exigida para garantir a conservação das probabilidades de transição no tempo. Como conseqüência desta generalização para o operador Hamiltoniano anti-Hermitiano, a função de onda quaterniônica $\Phi(x,t)$ satisfaz a seguinte equação

$$\partial_t \Phi(x,t) = \left\{ \tfrac{e_1}{\hbar} \, \left[\tfrac{\hbar^2}{2m} \, \nabla^2 - V(x,t) \right] + \tfrac{e_2}{\hbar} \, W(x,t) \right\} \, \Phi(x,t) \ . \tag{5.2}$$

Como na mecânica quântica complexa, podemos definir um densidade de corrente

$$\boldsymbol{J} = \tfrac{\hbar}{2m} \, \left[\left(\boldsymbol{\nabla} \overline{\Phi} \right) \, e_1 \, \Phi - \overline{\Phi} \, e_1 \, \boldsymbol{\nabla} \Phi \right]$$

e uma densidade de probabilidade

$$\rho = \overline{\Phi} \Phi \ .$$

Devido à não comutatividade dos quatérnions, a posição da unidade imaginária e_1 na densidade de corrente é fundamental para se obter a equação de continuidade

$$\partial_t \rho + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = 0 \ . \tag{5.3}$$

Vamos discutir brevemente a invariância com relação a reversão temporal na mecânica quântica quaterniônica. Em mecânica quântica complexa, considerando-se o complexo conjugado da equação de Schrödinger aliada a inversão temporal, isto é, $t \to -t$, verifica-se que a equação de Schrödinger complexa é invariante com relação a reversão temporal. Por outro lado, em mecânica quântica quaterniônica *não* existe um operador universal de reversão temporal [5]. A conjugação quaterniônica da eq.(5.2) no caso do potencial independente do tempo,

$$\partial_t \overline{\Phi}(x,t) = -\overline{\Phi}(x,t) \, \left\{ \tfrac{e_1}{\hbar} \, \left[\tfrac{\hbar^2}{2m} \, \nabla^2 - V(x) \right] + \tfrac{e_2}{\hbar} \, W(x) \right\} \ , \tag{5.4}$$

não resulta na equação de Schrödinger revertida no tempo

$$\partial_t \Phi_T(x,-t) = - \left\{ \tfrac{e_1}{\hbar} \, \left[\tfrac{\hbar^2}{2m} \, \nabla^2 - V(x) \right] + \tfrac{e_2}{\hbar} \, W(x) \right\} \, \Phi_T(x,-t) \ . \tag{5.5}$$

Para entender por que a violação da invariância com relação a reversão temporal é proporcional à parte $e_{2,3}$ do potencial quaterniônico, considere um potencial real W. Então, a equação de Schrödinger é invariante com relação a reversão temporal. Multiplicando a eq.(5.2), porém com potenciais independentes do tempo, por e_3 à esquerda, obtemos

$$\partial_t\, e_3\, \Phi(x,t) = -\left\{ \tfrac{e_1}{\hbar} \left[\tfrac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V(x) \right] + e_2\, W(x) \right\} e_3\, \Phi(x,t) \ , \quad W \in \mathbb{R} \ ,$$

que tem a mesma forma de eq.(5.5). Deste modo,

$$\Phi_T(x,-t) = e_3\, \Phi(x,t) \ .$$

Uma discussão análoga é válida para um potencial complexo puramente imaginário $W \in e_1\, \mathbb{R}$. Neste caso, encontramos

$$\Phi_T(x,-t) = e_2\, \Phi(x,t) \ .$$

Entretanto, quando $\{V_2, V_3\}$ é linearmente independente, esta construção não funciona, e a física quaterniônica viola a invariância com relação a reversão temporal. O sistema de kaons neutros [58] é o candidato natural para estudar a presença de potenciais quaterniônicos *efetivos* $V + \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{V}$. Estudando tal sistema, precisamos de V_1 e $V_{2,3}$ a fim de incluir as taxas de decaimento de K_S/K_L e a violação dos efeitos de conjugação de carga e paridade conjuntamente, chamados de violação de CP [1–4].

5.1.1 Estados quaterniônicos estacionários

A equação de Schrödinger quaterniônica, na presença de potenciais independentes do tempo

$$[\, V(x)\, ,\, |W(x)|\, ,\, \theta(x)\,]$$

é dada por

$$\partial_t \Phi(x,t) = \left\{ \tfrac{e_1}{\hbar} \left[\tfrac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V(x) \right] + \tfrac{e_2}{\hbar}\, W(x) \right\} \Phi(x,t) \ . \tag{5.6}$$

Procuramos por soluções da forma

$$\Phi(x,t) = \psi(x)\, \zeta(t) \ . \tag{5.7}$$

Observe que o método de separação de variáveis, introduzido pela eq.(5.7), funciona como na teoria usual de equações diferenciais. Assim, substituindo (5.7) na equação de Schrödinger quaterniônica, obtemos

$$\psi(x)\, \zeta'(t) = \tfrac{e_1}{\hbar} \left[\tfrac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - V(x) \right] \psi(x)\zeta(t) + \tfrac{e_2}{\hbar}\, W(x)\psi(x)\zeta(t) \ . \tag{5.8}$$

Multiplicando a equação acima por $\overline{\psi}(x)/|\psi(x)|^2$ à esquerda e por $\overline{\zeta}(t)/|\zeta(t)|^2$ à direita, encontramos

$$\zeta'(t)\, \overline{\zeta}(t) \,/\, |\zeta(t)|^2 = \overline{\psi}(x) \left[\tfrac{e_1}{\hbar} \tfrac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \tfrac{e_1}{\hbar} V(x) + \tfrac{e_2}{\hbar}\, W(x) \right] \psi(x) \,/\, |\psi(x)|^2 \ . \tag{5.9}$$

Nesta equação temos uma função de t à esquerda e um função de x à direita. Tal igualdade somente é possível se a eq.(5.9) for igual a λ, onde λ é uma constante quaterniônica. O operador de energia $\mathcal{A}^{V,W}(x)$ representa um operador anti-Hermitiano. Conseqüentemente, seus autovalores são quatérnions puramente imaginários, $q = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{E}$. Aplicando a transformação unitária u,

$$\overline{u}\; \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{E}\; u = -\, e_1\, E \;, \qquad E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2}\;,$$

e considerando que a eq.(5.9) é igual a λ encontramos

$$\overline{u}\zeta'(t)\, \overline{\zeta}(t) u \,/\, |\zeta(t)|^2 = \overline{u}\overline{\psi}(x) \left[\tfrac{e_1}{\hbar} \tfrac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \tfrac{e_1}{\hbar} V(x) + \tfrac{e_2}{\hbar}\, W(x) \right] \psi(x) u \,/\, |\psi(x)|^2 = -e_1 E \;. \tag{5.10}$$

A solução $\Phi(x,t)$ da equação de Schrödinger não é modificada por esta transformação de semelhança. De fato

$$\Phi(x,t) \to \psi(x)\, u\, \overline{u}\, \zeta(t) = \psi(x)\, \zeta(t) \;.$$

Observando que $|\Phi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2 |\zeta(t)|^2$, a conservação da norma implica que $|\zeta(t)|^2$ é constante. Sem perda de generalidade, podemos escolher $|\zeta(t)|^2 = 1$. Conseqüentemente, comparando o primeiro e o terceiro termo da eq.(5.10) e resolvendo a equação correspondente, encontramos

$$\zeta(t) = \exp[-e_1 E t/\hbar]\, \zeta(0) \;, \tag{5.11}$$

com $\zeta(0)$ quatérnion unitário. Note que a posição de $\zeta(0)$ na eq.(5.11) é muito importante. De fato, é fácil ver $\zeta(0) \exp[-e_1 E t/\hbar]$ não é solução da eq.(5.10). Finalmente, a fim de completar a solução da equação de Schrödinger quaterniônica, devemos determinar $\psi(x)$ resolvendo

$$\left[e_1 \, \frac{\hbar^2}{2m}\, \nabla^2 - e_1\, V(x) + e_2\, W(x) \right] \psi(x) + \psi(x)\, e_1\, E = 0 \;. \tag{5.12}$$

A eq.(5.12) é chamada equação de Schrödinger quaterniônica independente do tempo e ela representa uma equação de autovalores à direita no corpo dos quatérnions

$$\mathcal{A}_E^{V,W}(x)\, \psi(x) = -\, \psi(x)\, e_1 E \;.$$

As soluções para a eq.(5.12) existem somente para certos valores de energia. Tais valores são determinados pelos autovalores complexos à direita $\lambda = e_1\, E$ do operador anti-Hermitiano linear sobre $\mathbb{H}$, $\mathcal{A}_E^{V,W}(x)$. Os estados estacionários das funções de onda são soluções particulares da eq.(5.6). Soluções mais gerais podem ser construídas através das superposição destas soluções particulares. Somando sobre os vários valores que E pode assumir, obtemos

$$\Phi(x,t) = \sum_E \, \psi(x)\, \exp[-\, \tfrac{i}{\hbar}\, E\, t\,]\, q_E \;, \tag{5.13}$$

onde q_E são coeficientes quaterniônicos constantes. A adição implica numa integração se o espectro de energia de E for contínuo.

Suponha que o potencial é uma função constante, contínua por partes, isto é, a função assume valores constantes diferentes em cada uma das várias regiões adjacentes do eixo x. Temos que resolver (5.12) na região

$$[\, V \,;\, |W|\,,\, \theta\,] \;.$$

Do método descrito no capítulo 4, temos que a matriz associada à equação de Schrödinger para $\psi(x)$ é

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{\mathbb{C}} & 0 \end{pmatrix} \;,$$

onde $b_{\mathbb{C}} = \frac{2m}{\hbar^2}\,[V + L_3\,W + L_1 R_1 E]$, e representa um operador diagonalizável. Sabe-se que a solução da equação de Schrödinger independente do tempo é da forma qe^{zx}, então introduzindo-a na eq.(5.12) obtemos

$$q\,z^2 - \frac{2m}{\hbar^2}\,(V\,q + e_3\,W\,q + e_1\,E\,q\,e_1) = 0\ ,$$

onde $q = u + e_2\,v$. Esta equação pode ser escrita como duas equações complexas dadas por

$$z^2 u + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)u + \frac{2m}{\hbar^2}e_1\overline{W}v = z^2 v - \frac{2m}{\hbar^2}(E + V)v + \frac{2m}{\hbar^2}e_1 W u = 0\ .$$

Um simples cálculo mostra que z deve satisfazer

$$z^4 - \frac{2m}{\hbar^2}2\,V\,z^2 + \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 [V^2 + |W|^2 - E^2] = 0\ , \tag{5.14}$$

cujas raízes são $\pm z_{-}^{E,V,|W|}$ e $\pm z_{+}^{E,V,|W|}$ onde

$$z_{-}^{E;V,|W|} = \sqrt{\tfrac{2m}{\hbar^2}\quad V - \sqrt{E^2 - |W|^2}} \tag{5.15}$$

e

$$z_{+}^{E;V,|W|} = \sqrt{\tfrac{2m}{\hbar^2}\quad V + \sqrt{E^2 - |W|^2}}\quad , \tag{5.16}$$

e as constantes quaterniônicas são

$$u^{E;|W|,\theta} \;=\; 1 - e_3\,\tfrac{|W|\,\exp[e_1\theta]}{E+\sqrt{E^2-|W|^2}} \quad , \quad v^{E;|W|,\theta} \;=\; e_2 - \tfrac{e_1\,|W|\,\exp[-e_1\theta]}{E+\sqrt{E^2-|W|^2}} \quad \in \mathbb{H}\ .$$

A solução da equação diferencial de segunda ordem (5.12) é dada por [27]

$$\begin{aligned}\psi(x) \;=\;& u^{E;|W|,\theta}\,\left\{\exp\left[\,z_{-}^{E;V,|W|}\,x\,\right]\,c_1 + \exp\left[\,-\,z_{-}^{E;V,|W|}\,x\,\right]\,c_2\right\} + \\ & v^{E;|W|,\theta}\,\left\{\exp\left[\,z_{+}^{E;V,|W|}\,x\,\right]\,c_3 + \exp\left[\,-\,z_{+}^{E;V,|W|}\,x\,\right]\,c_4\right\}\ ,\end{aligned} \tag{5.17}$$

onde $c_{1,\ldots,4}$ são coeficientes complexos determinados pelas condições de contorno.

Se a partícula é livre, isto é, na região de potencial nulo, a solução reduz-se a

$$\psi(x) = \exp\left[\,e_1\,\tfrac{p}{\hbar}\,x\,\right]\,c_1 + \exp\left[\,-e_1\,\tfrac{p}{\hbar}\,x\,\right]\,c_2 + e_2\,\left\{\exp\left[\,\tfrac{p}{\hbar}\,x\,\right]\,c_3 + \exp\left[\,-\tfrac{p}{\hbar}\,x\,\right]\,c_4\right\}\ , \tag{5.18}$$

onde $p = \sqrt{2mE}$. Para problemas de espalhamento, nos quais a função de onda se propaga para a direita, com potenciais quaterniônicos temos

$$\psi_{-}(x) = \exp[\,e_1\,\tfrac{p}{\hbar}\,x\,] + r\,\exp[\,-e_1\,\tfrac{p}{\hbar}\,x\,] + e_2\,\tilde{r}\,\exp[\,\tfrac{p}{\hbar}\,x\,]\ , \tag{5.19}$$

onde $|r|^2$ é a probabilidade de reflexão e $|\tilde{r}\,\exp[\,\frac{p}{\hbar}\,x\,]|^2$ representa uma reflexão evanescente adicional.

Note que para potenciais reais, $W(x) = 0$, a eq.(5.12) torna-se

$$e_1\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\psi''(x) - e_1\,V(x)\,\psi(x) + \psi(x)\,i\,E = 0\ . \tag{5.20}$$

Usando que $\psi(x) = [\psi(x)]_{\mathbb{C}} - e_2\,[e_2\psi(x)]_{\mathbb{C}}$ temos

$$\left[\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_{xx} - V(x)\right]\,[\psi(x)]_{\mathbb{C}} = -[\psi(x)]_{\mathbb{C}}\,E\ ,$$

e

$$\left[\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_{xx} - V(x)\right]\,[e_2\psi(x)]_{\mathbb{C}} = [e_2\psi(x)]_{\mathbb{C}}\,E\ .$$

Resolvendo estas equações complexas, encontramos

$$\begin{aligned}\psi(x) \quad = \quad & \exp\left[\sqrt{\tfrac{2m}{\hbar^2}\,(V-E)}\,x\right]\,k_1 + \exp\left[-\sqrt{\tfrac{2m}{\hbar^2}\,(V-E)}\,x\right]\,k_2 + \\ & e_2\left\{x\exp\left[\sqrt{\tfrac{2m}{\hbar^2}\,(V+E)}\,x\right]\,k_3 + \exp\left[-\sqrt{\tfrac{2m}{\hbar^2}\,(V+E)}\,x\right]\,k_4\right\}\ ,\end{aligned}$$

onde k_n, $n = 1, \cdots, 4$, são coeficientes complexos determinados pelas condições de contorno. Observe que, na eq.(5.19) omitimos a solução exponencial complexa $\exp[\,-\frac{p}{\hbar}\,x\,]$ uma vez que a condição de contorno impõe que $\psi(x)$ seja finita quando $x \to -\infty$.

5.2 Potenciais quaterniônicos constantes

De todas as equações de Schrödinger, a mais simples matematicamente é aquela com potenciais constantes . A razão para nos concentrarmos no estudo da equação de Schrödinger com potenciais constantes é que as características qualitativas de um potencial físico podem ser freqüentemente aproximadas, de maneira razoável, por um potencial constante contínuo por partes.

5.2.1 Degrau de potencial

Vamos considerar o degrau de potencial quaterniônico,

$$V(x) + e_3\,W(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V + e_3\,W & x > 0 \end{cases}\ ,$$

onde V e W são constantes. Para problemas de espalhamento com uma função de onda que se propaga no sentido de x crescente no degrau potencial quaterniônico, a equação de Schrödinger linear sobre $\mathbb{C}$ tem solução

$$\psi(x) = \begin{cases} x < 0\ : & \\ \exp[\,e_1\,\frac{p}{\hbar}\,x\,] + r\,\exp[\,-e_1\,\frac{p}{\hbar}\,x\,] + e_2\,\tilde{r}\,\exp[\,\frac{p}{\hbar}\,x\,]\ ; & \\ & \\ x > 0\ : & \\ t\,\exp[z_-^{E,V,|W|}\,x] + \tilde{t}\,\exp[-\,z_+^{E,V,|W|}\,x] & [\,E > \sqrt{V^2 + |W|^2}\,]\ , \\ t\,\exp[-z_-^{E,V,|W|}\,x] + \tilde{t}\,\exp[-z_+^{E,V,|W|}\,x] & [\,E < \sqrt{V^2 + |W|^2}\,]\ . \end{cases} \tag{5.21}$$

onde r, $\tilde{r}$, t e $\tilde{t}$ são coeficientes complexos a serem determinados pelas condições de continuidade da função de onda $\psi(x)$ e sua inclinação na descontinuidade do potencial, isto é, em $x = 0$.

Para $E > \sqrt{V^2 + |W|^2}$, as soluções exponenciais complexas da equação de Schrödinger são caracterizadas por

$$z_-^{E,V,|W|} = e_1 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \quad \sqrt{E^2 - |W|^2} - V} \quad \in \; e_1 \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad z_+^{E,V,|W|} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \quad \sqrt{E^2 - |W|^2} + V} \quad \in \; \mathbb{R} \; .$$

As soluções complexas, linearmente independentes

$$u^{E;W,\theta} \exp[-z_-^{E,V,|W|} \, x] \quad \text{e} \quad v^{E;W,\theta} \exp[z_+^{E,V,|W|} \, x]$$

foram omitidas, $c_2 = c_3 = 0$ em (5.17), porque estamos considerando uma onda que se propaga para a direita e porque a segunda solução exponencial complexa, $\exp[z_+ \, x]$, não satisfaz as condições de contorno, isto é, $\psi(x)$ deve ser limitada quando $x \to \infty$. O resultado usual da mecânica quântica complexa é imediatamente recuperado quando consideramos $W = 0$ e tomamos a parte complexa da solução quaterniônica.

Para $E < \sqrt{V^2 + |W|^2}$, as soluções exponenciais complexas da equação de Schrödinger quaterniônica são caracterizadas por

$$z_-^{E,V,|W|} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \quad V - \sqrt{E^2 - |W|^2}} \qquad z_+^{E,V,|W|} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \quad V + \sqrt{E^2 - |W|^2}} \quad \in \; \mathbb{R} \quad [\, E > |W| \,] \; ,$$

$$z_\pm^{E,V,|W|} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \, (V^2 + |W|^2 - E^2)^{1/4} \, \exp[\pm \, e_1 \, \tfrac{\theta}{2}] \; , \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{|W|^2 - E^2}}{V} \quad \in \; \mathbb{C} \quad [\, E < |W| \,] \; .$$

Pelos mesmos motivos, as soluções complexas linearmente independentes

$$u^{E;W,\theta} \exp\left[z_-^{E,V,|W|} \, x\right] \quad \text{e} \quad v^{E;W,\theta} \exp\left[z_+^{E,V,|W|} \, x\right]$$

foram omitidas, $c_1 = c_3 = 0$ em (5.17), já que as condições de contorno exigem que $\psi(x)$ seja finita quando $x \to \infty$.

Uma relação entre os coeficientes complexos de reflexão e transmissão pode ser imediatamente obtida através da equação de continuidade. Para estados estacionários, é facilmente mostrado que a densidade de probabilidade de corrente

$$J(x,t) = \tfrac{\hbar}{2m} \, \overline{\zeta}(0) \, \exp[\, e_1 \, \tfrac{E}{\hbar} \, t \,] \left\{ \left[\partial_x \overline{\psi}(x)\right] \, e_1 \, \psi(x) - \overline{\psi}(x) \, e_1 \, \partial_x \psi(x) \right\} \exp\left[-e_1 \, \tfrac{E}{\hbar} \, t\right] \, \zeta(0) \; .$$

deve ser independente de x, $J(x,t) = f(t)$. Conseqüentemente,

$$\tfrac{\hbar}{2m} \, \left\{ \left[\partial_x \overline{\psi}(x)\right] \, e_1 \, \psi(x) - \overline{\psi}(x) \, e_1 \, \partial_x \psi(x) \right\} = \exp[\, -e_1 \, \tfrac{E}{\hbar} \, t \,] \, \zeta(0) \, f(t) \, \overline{\zeta}(0) \, \exp[\, e_1 \, \tfrac{E}{\hbar} \, t \,] = \alpha \; ,$$

onde α é uma constante real. Isto implica que a quantidade

$$\tilde{J} = \tfrac{\hbar}{2m} \, \left\{ \left[\partial_x \overline{\psi}(x)\right] \, e_1 \, \psi(x) - \overline{\psi}(x) \, e_1 \, \partial_x \psi(x) \right\}$$

tem o mesmo valor em todos os pontos x. Na região de potencial nulo, $x < 0$, obtemos

$$\tilde{J}_- = \tfrac{p}{m} \, (\, 1 - |r|^2 \,) \; .$$

Na região de potencial $x > 0$, temos

$$\tilde{J}_+ = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{m} \quad \sqrt{E^2 - |W|^2} - V} \; \left[1 - \left(\frac{|W|}{E + \sqrt{E^2 - |W|^2}} \right)^2 \right] \, |t|^2 & [\, E > \sqrt{V^2 + |W|^2} \,] \; , \\ 0 & [\, E < \sqrt{V^2 + |W|^2} \,] \; . \end{cases}$$

Finalmente, para estados estacionários, a equação de continuidade é

$$\begin{array}{lr} |r|^2 + \frac{\sqrt{E^2-|W|^2}-V}{E}\left[1-\left(\frac{|W|}{E+\sqrt{E^2-|W|^2}}\right)^2\right]|t|^2 = 1 & [\,E > \sqrt{V^2+|W|^2}\,]\;, \\ |r|^2 = 1 & [\,E < \sqrt{V^2+|W|^2}\,]\;. \end{array} \tag{5.22}$$

Deste modo, usando o conceito de probabilidade de corrente, podemos definir os seguintes coeficientes de transmissão e reflexão

$$\begin{array}{lr} R = |r|^2\;, \quad T = \frac{\sqrt{E^2-|W|^2}-V}{E}\left[1-\left(\frac{|W|}{E+\sqrt{E^2-|W|^2}}\right)^2\right]|t|^2 & [\,E > \sqrt{V^2+|W|^2}\,]\;, \\ R = |r|^2\;, \quad T = 0 & [\,E < \sqrt{V^2+|W|^2}\,]\;. \end{array}$$

Estes coeficientes dão a probabilidade para a partícula, chegando de $x = -\infty$, passar pelo degrau potencial em $x = 0$ ou voltar. Os coeficientes R e T dependem somente das relações E/V e $|W|/V$. As predições de mecânica quântica complexa são recuperadas quando fixamos $W = 0$.

5.2.2 Barreira de potencial retangular

Esta subseção é dividida em dois tipos diferentes de estudo. Primeiramente, vamos analisar a barreira de potencial invariante com relação a reversão temporal e, em seguida, estudaremos a barreira de potencial que viola a invariância com relação a reversão temporal.

• Barreira de potencial invariante com relação a reversão temporal (irt)

Vamos considerar o potencial de IRT

$$[\,V(x)\,;\,|W(x)|\,,\,\theta\,]\;.$$

Na eq.(5.12), a fase θ, independente do espaço, pode ser removida através da transformação

$$\psi(x) \to \exp\left[e_1\,\frac{\theta}{2}\right]\,\psi(x)\,\exp\left[-e_1\,\frac{\theta}{2}\right]\;. \tag{5.23}$$

que altera os coeficientes de modo que

$$u^{E;|W|,\theta} \to u^{E;|W|} \quad \text{e} \quad v^{E;|W|,\theta} \to v^{E;|W|}\,\exp[-e_1\,\theta]\;.$$

As probabilidades de reflexão e transmissão *não* mudam. Na verdade, a exponencial $\exp[-e_1\theta]$ pode ser incorporado aos coeficientes complexos $c_{3,4}$. Então, sem perda de generalidade, podemos discutir a equação de Schrödinger quaterniônica em presença do potencial quadrado

$$[\,V(x)\,;\,|W(x)|\,]$$

que tem a seguinte forma

Região I_-	Região II_-	Região III	Região II_+	Região I_+
$[\,0\,;\,0\,]$	$[\,V\,;\,0\,]$	$[\,V\,;\,W\,]$	$[\,V\,;\,0\,]$	$[\,0\,;\,0\,]$

$$-a \qquad -b \qquad +b \qquad +a$$

A partícula é livre para $x < -a$, onde a solução é dada por eq.(5.19), e para $x > a$, onde a solução é

$$\psi_+(x) = t\ \exp[\,e_1\,\tfrac{p}{\hbar}\,x\,] + e_2\,\tilde{t}\ \exp[\,-\,\tfrac{p}{\hbar}\,x\,]\ . \tag{5.24}$$

Nas equações (5.19) e (5.24), omitimos, respectivamente, as soluções exponenciais complexas $\exp[\,-\frac{p}{\hbar}\,x\,]$ e $\exp[\,\frac{p}{\hbar}\,x\,]$ pois elas estão em conflito com as condições de contorno que exigem que $\psi(x)$ seja limitada quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$. A fim de determinar as amplitudes complexas r, t, $\tilde{r}$ e $\tilde{t}$, combinamos as condições de continuidade da função de onda e sua inclinação nas descontinuidades do potencial. As condições de continuidade para a barreira de potencial IRT implicam

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r \\ \tilde{r} \\ \tilde{r} \end{pmatrix} = \mathcal{S}\,[a,b;E;V,|W|]\begin{pmatrix} t \\ t \\ \tilde{t} \\ \tilde{t} \end{pmatrix}\ , \tag{5.25}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}\,[a,b;E;V,|W|] \;=\;& \underbrace{D_-\,A_-}_{\mathrm{S}[\mathrm{I}_-]}\ \underbrace{M^V\,D^V_{b-a}\,[M^V]^{-1}}_{\mathrm{S}[\mathrm{II}]}\ \times \\
& \underbrace{Q^{|W|}\,M^{V,|W|}\,D^{V,|W|}_{-2b}\,[M^{V,|W|}]^{-1}\,[Q^{|W|}]^{-1}}_{\mathrm{S}[\mathrm{III}]}\ \times \\
& \underbrace{M^V\,D^V_{b-a}\,[M^V]^{-1}}_{\mathrm{S}[\mathrm{II}]}\ \underbrace{A_+\,D_+}_{\mathrm{S}[\mathrm{I}_+]}
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
D_- &= \mathrm{diag}\left\{ \exp\left[e_1 \tfrac{p}{\hbar}\, a \right] ,\, \exp\left[- e_1 \tfrac{p}{\hbar}\, a \right] ,\, \exp\left[\tfrac{p}{\hbar}\, a \right] ,\, \exp\left[\tfrac{p}{\hbar}\, a \right] \right\} \;, \\
A_- &= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -e_1 \frac{\hbar}{p} \\ 1 & e_1 \frac{\hbar}{p} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar}{p} \end{pmatrix} \;, \\
M^{V,|W|} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z_-^{E;V,|W|} & -z_-^{E;V,|W|} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z_+^{E;V,|W|} & -z_+^{E;V,|W|} \end{pmatrix} \;, \\
M^{V} &= M^{V,|W|\to 0} \;, \\
Q^{|W|,\theta} &= \begin{pmatrix} 1 & [v^{E;|W|,\theta}]_{\mathbb{C}} \\ [-e_2 u^{E;|W|,\theta}]_{\mathbb{C}} & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;, \\
Q^{|W|} &= Q^{|W|,\theta\to 0} \;, \\
D_\eta^{V,|W|} &= \mathrm{diag}\left\{ \exp\left[z_-^{E;V,|W|}\, \eta \right] ,\, \exp\left[- z_-^{E;V,|W|}\, \eta \right] ,\, \exp\left[z_+^{E;V,|W|}\, \eta \right] ,\, \exp\left[- z_+^{E;V,|W|}\, \eta \right] \right\} \;, \\
D_\eta^{V} &= D_\eta^{V,|W|\to 0} \;, \\
A_+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e_1 \frac{p}{\hbar} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{\hbar} \end{pmatrix} \;, \\
D_+ &= \mathrm{diag}\left\{ \exp\left[e_1 \tfrac{p}{\hbar}\, a \right] ,\, \exp\left[e_1 \tfrac{p}{\hbar}\, a \right] ,\, \exp\left[- \tfrac{p}{\hbar}\, a \right] ,\, \exp\left[- \tfrac{p}{\hbar}\, a \right] \right\} \;.
\end{aligned}
$$

O *limite complexo* é obtido quando consideramos $b = 0$. Neste caso ($\mathrm{S[III]} = \mathbf{1}$), a matriz $\mathcal{S}\,[a, b; E; V, W]$ é reduzida a

$$
\mathcal{S}\,[a; E; V] = D_-\, A_-\, M^V\, D_{-2a}^V\, [M^V]^{-1}\, A_+\, D_+ \;.
$$

Da álgebra matricial, calculamos facilmente os coeficientes de reflexão e transmissão

$$
\begin{aligned}
t &= \exp\; -2\, e_1\, \tfrac{p}{\hbar}\, a \;\; \left\{ \cosh\left[2\, z_-^{E;V}\, a \right] + \tfrac{e_1}{2}\, \chi_-\, \mathrm{senh}\left[2\, z_-^{E;V}\, a \right] \right\}^{-1} \;, \\
r &= -\tfrac{e_1}{2}\, \chi_+\, \mathrm{senh}\left[2\, z_-^{E;V}\, a \right]\, t \\
\tilde{t} &= 0 \;, \\
\tilde{r} &= 0 \;,
\end{aligned}
$$

onde $\chi_\pm = \frac{\hbar}{p}\, z_-^{E;V} \pm \left(\frac{\hbar}{p}\, z_-^{E;V} \right)^{-1}$.

Usando a equação de continuidade, podemos obter imediatamente a relação usual entre os coeficientes de transmissão e reflexão, t e r. De fato, eq.(5.3) implica que a densidade de corrente

$$
\tilde{J} = \tfrac{p}{2m}\; \left\{ \left[\partial_x \overline{\psi}(x) \right]\, e_1\, \psi(x) - \overline{\psi}(x)\, e_1\, \partial_x \psi(x) \right\}
$$

tem o mesmo valor para todos os pontos x. Nas regiões de potenciais nulos, as densidades de probabilidade de corrente são dadas por $\tilde{J}_- = \frac{p}{m}\, (\, 1 - |r|^2\,)$ e $\tilde{J}_+ = \frac{p}{m}\, |t|^2$. Conseqüentemente, encontramos

$$
|r|^2 + |t|^2 = 1 \;. \tag{5.26}
$$

Nas figs. 1 e 2, exibimos a probabilidade de transmissão $|t|^2$ como função de E[eV] para potenciais quaterniônicos de larguras e alturas diferentes (assumimos que a partícula incidente é um elétron). A presença de um potencial de perturbação quaterniônico modifica a forma da curva da probabilidade de transmissão (complexa). Temos uma redução da probabilidade de transmissão. A presença de um ponto de inflexão é evidente quando aumentamos a largura e a altura dos potenciais quaterniônicos. A fig.2 mostra a probabilidade de transmissão para o potencial quaterniônico

$$V + e_2\,|W| = (2.0 + e_2\,1.5)\text{ eV}$$

e a barreira complexa cuja altura é dada pelo módulo do potencial quaterniônico [13]

$$Z = \sqrt{V^2 + |W|^2} = 2.5\,\text{eV} .$$

Os números de onda para estes potenciais são

$$\begin{array}{lclcl}
\bullet \quad E > \sqrt{V^2+|W|^2} & : & z_-^Z = e_1 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\quad E - \sqrt{V^2+|W|^2}} & & \in e_1\,\mathbb{R}_+\\
 & & z_-^{V,W} = e_1 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\quad \sqrt{E^2-|W|^2} - V} & & \in e_1\,\mathbb{R}_+\\
 & & z_+^{V,W} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\quad \sqrt{E^2-|W|^2} + V} & & \in \mathbb{R}_+\\
\bullet \quad |W| < E < \sqrt{V^2+|W|^2} & : & z_-^Z = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\quad \sqrt{V^2+|W|^2} - E} & & \in \mathbb{R}_+\\
 & & z_\pm^{V,W} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\quad V \pm \sqrt{E^2-|W|^2}} & & \in \mathbb{R}_+\\
\bullet \quad E < |W| & : & z_-^Z = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\quad \sqrt{V^2+|W|^2} - E} & & \in \mathbb{R}_+\\
 & & z_\pm^{V,W} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\, \sqrt{V^2+|W|^2-E^2}\,\exp\left[\pm\, e_1\,\varphi\right]} & & \in \mathbb{C}
\end{array}$$

onde $\varphi = \text{arctg}\left[\sqrt{\left(|W|^2 - E^2\right)/V^2}\right]$. Para pequenas perturbações quaterniônicas, a barreira complexa com altura Z representa uma boa aproximação do potencial quaterniônico $V + e_2\,|W|$. Neste caso,

$$Z \sim V\left(1 + \tfrac{1}{2}\,\frac{|W|^2}{V^2}\right) \quad \text{e} \quad z_-^{V,W} \sim z_-^Z .$$

Os operadores anti-Hermitianos correspondentes ao potencial quaterniônico $V + e_2\,|W|$ e a barreira complexa Z são respectivamente

$$\mathcal{A}_E^{V,W} = e_1\,\left[\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 - V\,\right] + e_2\,W(x,t) \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_E^{Z} = e_1\,\left[\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 - \sqrt{V^2+|W|^2}\,\right] .$$

Usando estes operadores, podemos escrever duas equações de onda complexas

$$\left[\mathcal{A}_E^{V,W}\right]^2\,\psi(x) = -E^2\,\psi(x) \quad \text{e} \quad \left[\mathcal{A}_E^{Z}\right]^2\,\psi(x) = -E^2\,\psi(x) . \tag{5.27}$$

Os operadores complexos

$$\left[\mathcal{A}_E^{V,W}\right]^2 = -\left[\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 - V\,\right]^2 - |W|^2 = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\,\nabla^4 + 2\,V\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 - V^2 - |W|^2$$

e

$$\left[\mathcal{A}_E^{Z}\right]^2 = -\left[\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 - \sqrt{V^2+|W|^2}\,\right]^2 = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\,\nabla^4 + 2\,\sqrt{V^2+|W|^2}\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 - V^2 - |W|^2$$

podem agora ser facilmente comparados. A diferença é devida ao fator que multiplica ∇^2. Deste modo, as barreiras complexas cujas alturas são determinadas pelo módulo do potencial quaterniônico representam apenas uma primeira aproximação dos potenciais quaterniônicos. Em geral, temos que considerar os potenciais quaterniônicos puros, $e_2\,|W|$, como um efeito de perturbação na barreira complexa V.

Em mecânica quântica quaterniônica encontramos uma probabilidade de transmissão evanescente adicional, isto é, $|\tilde{t}|^2$. Esta probabilidade, como função de E[eV], é dada na fig.3 para diferentes valores de x.

Para concluir a discussão de potenciais quaterniônicos unidimensionais invariantes no tempo, analisaremos a probabilidade de transmissão $|t|^2$ como função da largura dos potenciais complexos e quaterniônicos. Na fig. 4, exibimos a probabilidade de transmissão para valores críticos de E. Para $E > \sqrt{V^2 + |W|^2}$, o valor mínimo da oscilação da transmissão de probabilidade decresce quando a perturbação quaterniônica aumenta. Na fig.5, comparamos potenciais complexos e quaterniônicos *puros* abrangendo a mesma área, $a\,V = b\,|W|$. Desvios da mecânica quântica complexa aparecem claramente.

• Barreira de potencial violando a invariância com relação a reversão temporal (VRT)

Vamos modificar a barreira de potencial anterior introduzindo uma fase dependente do espaço, $\theta(x)$, que viola a invariância com relação a reversão temporal. Devemos considerar, para os região III, os casos seguintes:

REGIÃO III_0	REGIÃO III_0	REGIÃO III_θ	REGIÃO III_θ
$[\,V\,;\,|W|\,,\,0\,]$	$[\,V\,;\,|W|\,,\,0\,]$	$[\,V\,;\,|W|\,,\,\theta\,]$	$[\,V\,;\,|W|\,,\,\theta\,]$
REGIÃO III_0	REGIÃO III_θ	REGIÃO III_θ	REGIÃO III_0
$[\,V\,;\,|W|\,,\,0\,]$	$[\,V\,;\,|W|\,,\,\theta\,]$	$[\,V\,;\,|W|\,,\,\theta\,]$	$[\,V\,;\,|W|\,,\,0\,]$
REGIÃO III_θ	REGIÃO III_θ	REGIÃO III_0	REGIÃO III_0
$[\,V\,;\,|W|\,,\,\theta\,]$	$[\,V\,;\,|W|\,,\,\theta\,]$	$[\,V\,;\,|W|\,,\,0\,]$	$[\,V\,;\,|W|\,,\,0\,]$

$-b \qquad -c \qquad 0 \qquad +c \qquad +b$

Como observado na introdução, divergências entre a mecânica quântica quaterniônica e complexa podem ser observadas considerando transmissões à direita e à esquerda através da mesma barreira de potencial quaterniônica. A transmissão à esquerda ($x < -a$) para o potencial quaterniônico de altura $|W|$ e fase

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & -b < x < 0 \\ \\ \theta & 0 < x < b \end{cases} \tag{5.28}$$

é obviamente equivalente a transmissão à direita ($x > a$) para o potencial quaterniônico de altura $|W|$ e fase

$$\theta(x) = \begin{cases} \theta & -b < x < 0 \\ \\ 0 & 0 < x < b \end{cases} . \tag{5.29}$$

Usando a transformação (5.23), podemos substituir a fase (5.29) por

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & -b < x < 0 \\ \\ -\theta & 0 < x < b \end{cases} \tag{5.30}$$

Deste modo, o gráfico do coeficiente de transmissão como uma função de $\theta[\pi]$ é um indicador válido das possíveis divergências da mecânica quântica complexa. Curvas simétricas (em torno do ponto $\theta[\pi] = 1$) *não* deverão implicar em nenhuma diferença entre transmissão à esquerda e à direita na mesma barreira de potencial quaterniônica. Neste caso, temos que a matriz $\mathcal{S}\,[a, b, c; E; V, |W|, \theta]$ é expressa como

$$\mathrm{S[III]} = \begin{cases} \mathrm{S[III}_{0\,0\,\theta\,\theta}] & : \quad S[0, -b] \times S[\theta, -b] \\ \\ \mathrm{S[III}_{0\,\theta\,\theta\,0}] & : \quad S[0, c-b] \times S[\theta, -2c] \times S[0, c-b] \\ \\ \mathrm{S[III}_{\theta\,\theta\,0\,0}] & : \quad S[\theta, -b] \times S[0, -b] \end{cases}$$

onde

$$S[\theta, \eta] \quad = \quad Q^{|W|,\theta}\, M^{V,|W|}\, D_{\eta}^{V,|W|}\, [M^{V,|W|}]^{-1}\, [Q^{|W|,\theta}]^{-1}\,.$$

Nas figuras 6, 7 e 8, damos a probabilidade de transmissão, $|t|^2$, e o valor absoluto do coeficiente de transmissão, $|Arg(t)|$, como uma função da fase $\theta[\pi]$. Divergências qualitativas da mecânica quântica complexa aparecem para potenciais *assimétricos* que violam a invariância com relação a reversão temporal. Também é interessante notar que aumentando a fase ($\theta[\pi] \to 1$), os efeitos de perturbação quaterniônica são *minimizados*. No apêndice C damos explicitamente a probabilidade de transmissão $|t|^2$ e o coeficiente de transmissão t para diferentes valores da fase θ do potencial e a energia de elétron E.

6

Geometria complexa

Como as medidas físicas devem ser limitadas à medidas de quantidades reais postulamos que as amplitudes de probabilidade, A, são elementos de uma álgebra, de dimensão finita, sobre $\mathbb{R}$ com elemento unidade. Para determinar as estruturas das álgebras permitidas, introduzimos algumas propriedades relativas à forma da função módulo, $N(A)$. As primeiras quatro propriedades são aquelas formuladas na teoria usual. A última condição sobre $N(A)$ é altamente não trivial e fisicamente motivada pelo princípio da superposição [5],

$$N(A_1 A_2) = N(A_1) N(A_2) \ .$$

As únicas álgebras sobre os reais com elemento unidade, satisfazendo estas propriedades para a função módulo são os reais, os números complexos, os quatérnions e os octonions. Observando que a lei associativa da multiplicação é necessária para a construção do espaço de Hilbert da mecânica quântica temos que excluir os números de Cayley [5].

A discussão apresentada contém uma nova e importante possibilidade na procura por uma formulação quaterniônica da mecânica quântica, isto é, funções de onda quaterniônicas com produtos escalares complexos. A projeção complexa do produto escalar entre duas funções de onda quaterniônicas sobre $\mathbb{C}$ é chamada *geometria complexa* [41]. Em [54], Rotelli desenvolveu uma equação relativística no corpo quaterniônico, linear nas derivadas. Sua função de onda quaterniônica possui somente duas componentes. Contudo, devido ao uso de uma geometria complexa, é possível mostrar que existem quatro soluções independentes (em $\mathbb{C}$) correspondendo àquelas da equação de Dirac. O enfoque de Rotelli e a introdução das regras de tradução [16] possibilitaram a reformulação da mecânica quântica com quatérnions. Em particular, o modelo eletrofraco de Salam-Weinberg é escrito em termos do grupo unidimensional $U(1,\mathbb{H}) \otimes U(1,\mathbb{C})$ contrapartida quaterniônica do grupo de Glashow, $SU(2) \otimes U(1)$ [15, 17–19, 21, 22, 24].

O ponto importante a ser notado aqui é que a geometria complexa desempenha um papel fundamental no desenvolvimento da mecânica quântica usando álgebras não comutativas. Todavia, a geometria complexa está freqüentemente escondida no uso das álgebras de Clifford em Física.

Neste capítulo, completamente independente dos demais, mostramos que a formulação através dos quatérnions complexificados da equação de Dirac dada por Hestenes em 1967 (a famosa equação de Dirac-Hestenes) é equivalente àquela dada por Conway em 1937. A única diferença é representada pela unidade imaginária onde a projeção é feita.

6.1 Álgebra dos quatérnions complexificados

Uma extensão natural de quatérnions reais são os quatérnions complexificados (álgebra de Clifford $Cl_{3,0}$)

$$q_c = z_0 + e_1 z_1 + e_2 z_2 + e_3 z_3 \ , \quad z_\mu \in \mathbb{C}(1, \eta) \ , \tag{6.1}$$

onde η é uma nova unidade imaginária cujo quadrado é -1 e comuta com e_1, e_2 e e_3. Agora, diferentes tipos de conjugações são permitidos. Combinando todas as possibilidades encontramos três casos. Deste modo, considerando $\overline{z}$ o complexo conjugado de z, o que significa $\eta \to -\eta$, definimos

$$q_c^\dagger = \overline{z}_0 - e_1 \overline{z}_1 - e_2 \overline{z}_2 - e_3 \overline{z}_3 \quad [\, \boldsymbol{e} \to -\boldsymbol{e} \ \ \eta \to -\eta \,] \ ,$$

$$q_c^* = \overline{z}_0 + e_1 \overline{z}_1 + e_2 \overline{z}_2 + e_3 \overline{z}_3 \quad [\, \boldsymbol{e} \to \boldsymbol{e} \ , \ \eta \to -\eta \,]$$

e, finalmente,

$$\tilde{q}_c = z_0 - e_1 z_1 - e_2 z_2 - e_3 z_{,3} \quad [\, \boldsymbol{e} \to -\boldsymbol{e} \ \ \eta \to \eta \,] \ .$$

É fácil verificar que

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{q_c \, p_c} & = & \tilde{p}_c \, \tilde{q}_c \ , \\ (q_c \, p_c)^* & = & q_c^* \, p_c^* \end{array}$$

e, imediatamente, obtemos

$$(q_c \, p_c)^\dagger = p_c^\dagger \, q_c^\dagger \ .$$

Uma consideração importante é que os quatérnions complexificados não são uma álgebra de divisão. O produto

$$(1 + \eta \, e_1) \, (1 - \eta \, e_1) = 0$$

garante a existência de divisores não nulos de zero.

Uma vez que os quatérnions complexificados não são uma álgebra de divisão eles não podem representar amplitudes de probabilidade.

6.2 Geometrias complexas diferentes

Observando que a álgebra dos quatérnions complexificados contém uma nova unidade imaginária, η, consideramos duas projeções complexas diferentes do produtos de escalar, explicitamente, geometrias η e e_1-complexas.

6.2.1 Geometria η-complexa

Considerando a geometria η-complexa, isto é, projeção do produto escalar em $\mathbb{C}(1, \eta)$, é possível ver que os estados ortogonais são dados pelo conjunto $\{1, e_1, e_2, e_3\}$. Então, a função de onda é escrita como segue

$$\Psi(x) = \psi_0(x) + e_1 \psi_1(x) + e_2 \psi_2(x) + e_3 \psi_3(x) \ , \quad \psi_{0,1,2,3} \in \mathbb{C}(1, \eta) \ . \tag{6.2}$$

A ortogonalidade de $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ permite representar a função Ψ pelo vetor coluna complexo

$$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \ , \quad \psi_m \in \mathbb{C} \equiv \mathbb{C}(1,i) \ .$$

Neste caso, a unidade imaginária η representará o papel da unidade imaginária complexa i. Resumindo as identificações anteriores temos

$\mathbb{C}$		$Cl_{3,0}$
$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$	$\longrightarrow$	$\psi_0 + e_1\psi_1 + e_2\psi_2 + e_3\psi_3$
$\psi_\mu \in \mathbb{C}(1,i)$		$\psi_\mu \in \mathbb{C}(1,\eta)$

Então, a fim de esclarecer o significado da geometria η-complexa e como as operações funcionam em cada espaço, vejamos um exemplo. Temos,

$$i \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \eta\psi_0 + e_1\eta\psi_1 + e_2\eta\psi_2 + e_3\eta\psi_3$$

isto é, a multiplicação de um vetor coluna por i em $\mathbb{C}$ equivale a multiplicação do quatérnion complexificado ψ por η à direita. Neste caso particular, como η e os componentes de ψ comutam, tanto faz usar a multiplicação à direita ou à esquerda. A correspondência entre $Gl(4,\mathbb{C})$ e os operadores quaterniônicos complexificados é completada pela tabela de tradução dada para L_m e R_m representando, respectivamente, as ações à esquerda e à direita da unidade imaginária e_m (veja apêndice E).

6.2.2 Geometria e_1-complexa

No caso da geometria e_1-complexa, os estados ortogonais não são mais os anteriores. Os estados ortogonais são dados pelo conjunto $\{1, e_2, \eta, \eta e_2\}$ ou $\{1, e_3, \eta, \eta e_3\}$. Escolhendo o primeiro conjunto temos que a função de onda é escrita como

$$\psi(x) \quad = \quad \psi_0(x) + e_2\psi_1(x) + \eta\,[\psi_2(x) + e_2\psi_3(x)] \ , \quad \psi_{0,1,2,3} \in \mathbb{C}(1,e_1) \ .$$

A relação entre a função de onda em $Cl_{3,0}$ e o vetor coluna é dada por

$\mathbb{C}$		$Cl_{3,0}$
$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$	$\longrightarrow$	$\psi_0 + e_2\psi_1 + \eta\psi_2 + \eta e_2\psi_3$
$\psi_\mu \in \mathbb{C}(1,i)$		$\psi_\mu \in \mathbb{C}(1,e_1)$

Neste caso a unidade imaginário i é identificada com a ação à direita da unidade imaginária quaterniônica e_1

$$i \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad (\psi_0 + e_1\psi_1 + \eta\psi_2 + \eta e_2\psi_3)\, e_1$$

A tabela de tradução dada em termos de L_m, R_1, η e a conjugação $*$ é dada no apêndice E.

6.2.3 Fases quaterniônicas

Dadas ψ e φ, funções de onda quaterniônicas complexificadas unidimensionais, definimos o seguinte produto escalar

$$(\psi, \varphi) = \int dx\, \psi^\dagger\, \varphi\ . \tag{6.3}$$

Vamos analisar o grupo de invariância para este produto interno.

Para produtos escalares quaterniônicos (reais), o grupo de invariância é $U \otimes V$, onde $U = \exp[\eta\, a]$ e $V = \exp[\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{b}]$

$$\psi \to U \otimes V\, \psi\ .$$

Considerando geometrias complexas encontramos

$$(\psi, \varphi)_{e_1} \quad : \quad \psi \to U \otimes V \psi \exp[e_1\, c_1] \tag{6.4}$$

e

$$(\psi, \varphi)_{\eta} \quad : \quad \psi \to U \otimes V \psi \exp[\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{c}]\ . \tag{6.5}$$

O grupo de invariância entre as duas formulações é diferente. No entanto, na Lagrangiana de Dirac os grupos anteriores reduzem-se ao grupo de gauge do eletromagnetismo, $U(1)$. Em particular, encontramos, para a geometria e_1-complexa (Hestenes), o grupo $\exp[e_1\, c_1]$ agindo à direita e para a geometria η-complexa (Conway), o grupo $\exp[\eta\, a]$.

6.3 Equação de Dirac

Nesta seção introduziremos a equação de Dirac formulada com quatérnions complexificados e analisaremos os diferentes enfoques apresentados por Conway e Hestenes.

6.3.1 Equação de Dirac-Hestenes

Hestenes usou geometria e_1-complexa. A tentativa (mais natural) de reescrever a equação de Dirac como

$$\partial_t \psi = \tilde{H}\, \psi = \eta\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\partial}\, \psi + m\, \psi\, e_1\ .$$

resulta no seguinte problema: quando aplicamos ∂_t duas vezes em ψ não encontramos a equação de Klein-Gordon. . Deste modo, a equação anterior foi modificada para

$$\partial_t \psi = \tilde{H}\, \psi = \eta\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\partial}\, \psi + m\, \psi^*\, e_1\ .$$

Agora, a equação de Klein-Gordon

$$\partial_t^2 \psi = [\, \nabla^2 - m^2 \,]\, \psi$$

é recuperada. A anti-hermiticidade de $\tilde{H}$ deve ser demonstrado. Temos

$$\tilde{H} = \eta\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\partial} + m\, \mathtt{C}\, R_1 \ ,$$

onde $\mathtt{C}$ denota a operação $*$, $\mathtt{C}\psi = \psi^*$, e temos que mostrar que $\tilde{H}$ satisfaz

$$(\varphi, \tilde{H}\, \psi)_{e_1} = \int_{e_1} dx\, \varphi^\dagger\, \tilde{H}\, \psi = -\int_{e_1} dx\, (\tilde{H}\, \varphi)^\dagger\, \psi = -(\tilde{H}\varphi, \psi)_{e_1} \tag{6.6}$$

Lembre que estamos usando geometria e_1-complexa, isto é os resultados das integrais devem ser projetados em $\mathbb{C}(1, e_1)$. Calculando o lado esquerdo da eq.(6.6) obtemos

$$\int_{e_1} dx\, \varphi^\dagger\, \tilde{H}\, \psi = \int_{e_1} dx\, [\, \varphi^\dagger\, \eta\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\partial}\psi + \varphi^\dagger m \psi^* e_1]$$

e para o lado direito temos

$$-\int_{e_1} dx\, (\tilde{H}\varphi)^\dagger\, \psi = \int_{e_1} dx\ \varphi^\dagger\, \eta\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\partial}\psi + \int_{e_1} dx,\, m\, e_1\, \varphi^{\dagger^*}\, \psi$$

Analisando o lado direito das equações acima podemos ver que o primeiro fator, em ambas as equações, são iguais. Agora, é necessário comparar o segundo

$$m \int_{e_1} dx\, \varphi^\dagger\, \psi^*\, e_1 \quad \text{e} \quad m\, e_1 \int_{e_1} dx\, \varphi^{\dagger^*}\, \psi \ .$$

Devido à geometria e_1-complexa a posição da unidade imaginária e_1 e a a conjugação $*$ são irrelevantes. Conseqüentemente, $\tilde{H}$ representa um operador anti-hermitiano.

A presença da ação à esquerda das unidades imaginárias $\boldsymbol{e}$ em $\tilde{H}$ elimina o grupo V enquanto a conjugação $*$ elimina o grupo U. Logo, o grupo eletromagnético é dado por

$$\psi \to \psi\, \exp[e_1\, c_1] \ .$$

6.3.2 Equação de Conway

A equação formulada por Conway [12, 21, 57] é baseada na geometria η-complexa,

$$\partial_t \psi = \tilde{H}\psi = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\partial}\psi\, e_1 + m\psi e_2 \ .$$

Procedendo de maneira análoga à seção anterior é fácil ver que $\tilde{H}$ ainda representa um operador anti-Hermitiano. Aplicando ∂_t duas vezes em ψ obtemos a equação de Klein-Gordon

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \psi &= \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\partial}\, [\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\partial}\psi\, e_1 + m\psi e_2]\, e_1 + m[\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\partial}\psi\, e_1 + m\psi e_2]\, e_2 \\ &= \nabla^2\psi + m\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\partial}\psi\, (e_2 e_1 + e_1 e_2) - m^2\psi \\ &= \nabla^2\psi - m^2\psi \ . \end{aligned} \tag{6.7}$$

A presença da ação à esquerda das unidades imaginárias $\boldsymbol{e}$ em $\tilde{H}$ elimina o grupo V enquanto a ação à direita das unidades imaginárias e_1 e e_2 elimina o grupo $\exp[\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{c}]$. Logo, o grupo de gauge do eletromagnetismo é dado por

$$\psi \to \exp[\eta\, a]\, \psi \ .$$

6.4 Matrizes de Dirac

Nesta seção, daremos as explícitas representações da álgebra de Dirac. Em particular, apresentaremos as representações matriciais usuais (4×4 em $\mathbb{C}$) e obteremos as correspondentes traduções unidimensionais em termos de operadores quaterniônicos lineares sobre $\mathbb{C}(1, \eta)$ e $\mathbb{C}(1, e_1)$. Mostraremos a equivalência das formulações de Conway e Hestenes.

6.4.1 Matrizes de Dirac: geometria η-complexa

• Representação de Dirac

Temos

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

com $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ onde σ_1 são as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Considere

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_2 \\ -\psi_1 \\ -\psi_0 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \psi_3 + e_1\psi_2 - e_2\psi_3 - e_3\psi_0 .$$

Multiplicar a função de onda, representada pelo vetor coluna, por γ_1 equivale a multiplicar a função de onda quaterniônica por $-e_3$ à esquerda

$$e_3 \, [\psi_0 + e_1\psi_1 + e_2\psi_2 + e_3\psi_3] = \psi_3 + e_1\psi_2 - e_2\psi_3 - e_3\psi_0 .$$

Procedendo de maneira análoga, encontramos os operadores para as outras matrizes, de modo que

$$\begin{array}{lcl} \gamma_0 & \to & -e_1 R_1 \\ \boldsymbol{\gamma} & \to & (-e_3, -\eta\, e_1 R_2, -e_2) . \end{array} \tag{6.9}$$

• Representação quiral

Neste caso, temos

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

Repetindo o procedimento usado para a representação de Dirac encontramos

$$\begin{array}{lcl} \gamma_0 & \to & -e_2 R_1 \\ \boldsymbol{\gamma} & \to & (-e_2 R_3, -\eta R_1, -e_3 R_3) . \end{array} \tag{6.11}$$

• Representação de Majorana

Finalmente, para representações de Majorana, as matrizes de Dirac são dadas por

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \,, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix} \,,$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix} \,. \tag{6.12}$$

Aqui, temos

$$\begin{array}{lcl} \gamma_0 & \rightarrow & \eta\, R_3 \\ \boldsymbol{\gamma} & \rightarrow & (-\eta\, e_2 R_2, \eta\, e_1 R_2, \eta\, e_3 R_2) \,. \end{array} \tag{6.13}$$

6.4.2 Matrizes de Dirac: geometria $\boldsymbol{e}_1$-complexa

• Representação de Dirac

Vamos começar com γ_0. Então,

$$\gamma_0 \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ -\psi_2 \\ -\psi_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \psi_0 + e_2\psi_1 - \eta\psi_2 - \eta e_2\psi_3 = \psi_0 + e_2\psi_1 - \eta\,[\psi_2 + e_2\psi_3] \,.$$

Note que a transformação que leva η em $-\eta$ e mantém e_1, e_2, e_3 é definida na seção (6.1) por $*$. Então, temos $\psi^* = \gamma_0\psi$. O mesmo procedimento nos leva aos operadores para as matrizes $\boldsymbol{\gamma}$. Assim,

$$\begin{array}{lcl} \gamma_0 & \rightarrow & * \\ \boldsymbol{\gamma} & \rightarrow & (-\eta\, e_3 R_1, -\eta\, e_2 R_1, \eta\, e_1 R_1) \,. \end{array} \tag{6.14}$$

• Representação Quiral

Neste caso, encontramos

$$\begin{array}{lcl} \gamma_0 & \rightarrow & *\eta\, e_3 R_1 \\ \boldsymbol{\gamma} & \rightarrow & -*(e_3, e_2, -e_1) R_1 \,. \end{array} \tag{6.15}$$

• Representação de Majorana

Finalmente, para a representação de Majorana obtemos

$$\begin{array}{lcl} \gamma_0 & \rightarrow & *\eta\, e_2 R_1 \\ \boldsymbol{\gamma} & \rightarrow & (e_1, \eta\, e_2 R_1, e_3) \,. \end{array} \tag{6.16}$$

7

Conclusão

Nesta tese foram apresentados os primeiros métodos de resolução de equações diferenciais quaterniônicas, em particular, foram discutidas as equações de segunda ordem com coeficientes quaterniônicos constantes lineares sobre $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$. Enfatizamos que a única equação quadrática envolvida no estudo de equações diferenciais quaterniônicas é aquela proveniente da equação linear sobre $\mathbb{H}$. Devido à ação à direita da unidade imaginária e_1 nas equações lineares sobre $\mathbb{C}$ não podemos fatorar a exponencial quaterniônica e mostramos que as soluções destas equações são da forma $q \exp[zx]$, onde $q \in \mathbb{H}$ e $z \in \mathbb{C}$. Investigações posteriores nos levaram à resolução de equações cujos operadores são lineares sobre $\mathbb{R}$. Através do enfoque matricial mostramos que soluções particulares de tais equações podem ser dadas em termos dos autovalores da matriz $M_{4n}[\mathbb{R}]$, representando a contrapartida real do operador quaterniônico $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}[n]$ associado à equação diferencial em questão. Nossa discussão pode ser vista como um passo preliminar na direção de um entendimento completo do papel que os quatérnions podem desempenhar em análise, álgebra linear e teoria de matrizes. Uma teoria completa de operadores diferenciais quaterniônicos, bem como o problema de autovalor quaterniônico está longe de ser conclusiva. Futuras investigações poderão ser feitas em muitas áreas da matemática, em particular, equações diferenciais cujos coeficientes da derivada segunda não são invertíveis, equações com coeficientes não constantes, equações de ordem superior, transformada de Fourier, analiticidade, cálculo variacional, etc.

No que concerne às aplicações em Física, acreditamos que o crescente interesse e o aprimoramento das estruturas matemáticas envolvidas na mecânica quântica quaterniônica podem resultar num rápido progresso sobre este assunto. A utilidade dos quatérnions e, mais geral, das álgebras de Clifford para unificar aspectos algébricos e teóricos na discussão da relatividade especial, equações de Maxwell e Dirac é universalmente reconhecida. Todavia, apesar da literatura substancial analisando teorias físicas quaterniônicas, falta uma forte motivação forçando o uso dos quatérnions ao invés dos complexos. Os experimentos propostos por Peres, a análise teórica feita por Davies e McKellar e o detalhado e sistemático desenvolvimento da mecânica quântica quaterniônica apresentado no livro de Adler representam um marco na procura de desvios da mecânica quântica complexa. Esperamos que os resultados apresentados nesta tese sejam importantes na busca de um avanço significante no *entendimento* dos potenciais quaterniônicos e na procura de uma evidência experimental.

Potenciais quaterniônicos violando a reversão temporal e perturbações quaterniônicas que minimizam os desvios da mecânica quântica complexa, poderiam desempenhar um importante papel na física que viola CP. Uma discussão teórica baseada no formalismo de pacotes de onda se faz necessária na análise dos testes experimentais baseados na regeneração de kaons.

Num futuro próximo, nossos objetivos serão

• finalizar a discussão do problema de autovalores para operadores lineares sobre $\mathbb{R}$;
• estudar as equações diferenciais com coeficientes não invertíveis;
• No âmbito da geometria quaterniônica, interpretar os potenciais quaterniônicos como desvios da mecânica quântica complexa, analisar estados ligados e desenvolver o formalismo com pacotes de onda;
• No âmbito da geometria complexa, discutir a equação de Dirac formulada por Hestenes e Conway no contexto de modelos eletrofracos de unificação;
• aplicações à teoria eletrofraca.

A

Representação Matricial

• Representação matricial real

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbb{1}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ R_1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ R_2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ R_3
$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ L_1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_1\,R_1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L_1\,R_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L_1\,R_3$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ L_2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L_2\,R_1$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_2\,R_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $L_2\,R_3$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ L_3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L_3\,R_1$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $L_3\,R_2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $L_3\,R_3$

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{H}} = q_\mu L_\mu = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

• Representação matricial complexa

$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} e_1 & 0 \\ 0 & -e_1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$
$\mathbb{1}$	L_1	L_2	L_3
$\begin{matrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -e_1 \\ e_1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & -e_1 \\ -e_1 & 0 \end{matrix}$
R_1	L_1R_1	L_2R_1	L_3R_1

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{H}} = q_\mu L_\mu = \begin{pmatrix} q_0 + e_1 q_1 & -q_2 - e_1 q_3 \\ q_2 - e_1 q_3 & q_0 - e_1 q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix}$$

B

Regras de derivação

Neste apêndice, vamos dar algumas regras de derivação e, em seguida, vamos descrever o método da variação dos parâmetros e redução da ordem para equações diferenciais quaterniônicas, lineares sobre $\mathbb{H}$, com coeficientes constantes.

Regras de derivação

Sejam ψ e ϕ funções quaterniônicas de uma variável real x. Utilizando a definição usual de derivada obtemos

$$[\psi(x)\varphi(x)]' = \psi'(x)\varphi(x) + \psi(x)\varphi'(x) \ .$$

Assim, mostra-se facilmente que

$$[\psi^{-1}(x)]' = -\psi^{-1}(x)\psi'(x)\psi^{-1}(x) \ .$$

Agora, considere uma função quaterniônica na forma

$$\psi(x) = f(x) + I(x)g(x)$$

onde

$$f(x) = \psi_0(x) \ , \quad g(x) = \sqrt{\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x) + \psi_3^2(x)}$$

são funções reais de x e

$$I(x) = \frac{e_1\psi_1(x) + e_2\psi_2(x) + e_3\psi_3(x)}{\sqrt{\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x) + \psi_3^2(x)}}$$

com $|I(x)|^2 = -1$. Uma característica muito interessante desta unidade imaginária é que

$$\{I(x), I'(x)\} = I(x)I'(x) + I'(x)I(x) = 0 \ . \tag{B.1}$$

Daqui por diante omitimos a variável x. Defina uma nova função, $\mathcal{F}' = f' + Ig'$. Então, temos

$$\psi = f + Ig$$

cuja derivada é

$$\psi' = f' + Ig' + I'g = \mathcal{F}' + I'g \ .$$

Vamos calcular a derivada para ψ^2. Utilizando as definições acima temos

$$\begin{aligned}
[\psi^2]' &= [\psi\psi]' = \psi'\psi + \psi\psi' \\
&= (\mathcal{F}' + I'g)(f + Ig) + (f + Ig)(\mathcal{F}' + I'g) \\
&= \mathcal{F}'(f + Ig) + I'g(f + Ig) + (f + Ig)\mathcal{F}' + (f + Ig)I'g \\
&= 2\mathcal{F}'(f + Ig) + I'g[(f + Ig) + (f - Ig)] \\
&= 2\mathcal{F}'\psi + I'2fg
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Note que no penúltimo passo fizemos uso da propriedade (B.1). Aplicando a regra de derivação repetidamente obtemos a derivada de uma função quaterniônica de ordem n dada por

$$[\psi^n]' = n\mathcal{F}'\psi^{n-1} + I'\sum_{k=0}^{n-1}\psi^{n-1-k}\bar{\psi}^k g$$

com $\bar{\psi} = f - Ig$.

A fim de reescrever a derivada acima de modo que o termo referente à derivada usual seja explícito usamos o seguinte artifício: adicionamos e subtraímos a expressão $nI'g\psi^{n-1}$ na equação anterior obtendo

$$[\psi^n]' = n\psi'\psi^{n-1} + I'\left\{n\psi^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1}\psi^{n-1-k}\bar{\psi}^k\right\}g \tag{B.3}$$

Considerando que

$$\psi^{-1} = \frac{f - Ig}{f^2 + g^2} \ ,$$

podemos dizer que a regra de derivaçõa para $[\psi^{-n}]'$ é

$$[\psi^{-n}]' = -n\mathcal{F}'\psi^{-n-1} - I'\sum_{k=0}^{n-1}\psi^{-(n-1)+k}(\bar{\psi})^{-k}\frac{g}{|\psi|^2} \ ,$$

e repetindo o artifício usado acima temos

$$[\psi^{-n}]' = -n\psi'\psi^{-n-1} + I'\left\{n\psi^{-n-1}|\psi|^2 - \sum_{k=0}^{n-1}\psi^{-(n-1)+k}(\bar{\psi})^{-k}\right\}g \ . \tag{B.4}$$

Agora, as ferramentas para encontrar a derivada da função exponencial são conhecidas. O desenvolvimento da função exponencial em série de potência é

$$e^{\psi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi^n}{n!} \ ,$$

e, derivando a expressão acima, temos

$$[e^{\psi}]' = \psi'\exp[\psi] - I'\left\{g\exp[\psi] - \exp[f]\mathrm{sen}\,[g]\right\} \ . \tag{B.5}$$

Variação dos parâmetros

Considere a equação diferencial de segunda ordem, não homogênea, linear sobre os quatérnions dada por

$$\varphi''(x) - a_{\mathbb{H}}\varphi'(x) - b_{\mathbb{H}}\varphi(x) = F(x)\ . \tag{B.6}$$

De maneira análoga ao caso complexo, podemos dizer que qualquer solução de (B.6) pode ser escrita como

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)q_1 + \varphi_2(x)q_2 + \psi(x)\ , \tag{B.7}$$

onde φ_1 e φ_2 são soluções linearmente independentes da equação homogênea correspondente $[F(x) = 0]$ e $\psi(x)$ é uma solução particular da equação não homogênea.

O método de *variação de parâmetros* consiste em descobrir uma solução particular da equação diferencial não homogênea, considerando que a solução da equação homogênea seja conhecida. Sendo assim, suponha que as soluções da equação homogênea, $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$, sejam conhecidas. Substitua as constantes q_1 e q_2 por funções de x, isto é, $q_1(x)$ e $q_2(x)$. Então,

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)q_1(x) + \varphi_2(x)q_2(x)\ . \tag{B.8}$$

Derivando a eq.(B.8) obtemos

$$\varphi'(x) = \varphi_1'(x)q_1(x) + \varphi_1(x)q_1'(x) + \varphi_2'(x)q_2(x) + \varphi_2(x)q_2'(x)\ , \tag{B.9}$$

onde impomos

$$\varphi_1(x)q_1'(x) + \varphi_2(x)q_2'(x) = 0\ . \tag{B.10}$$

Repetindo a derivação para eq.(B.9), encontramos

$$\varphi''(x) = \varphi_1''(x)q_1(x) + \varphi_1'(x)q_1'(x) + \varphi_2''(x)q_2(x) + \varphi_2'(x)q_2'(x)\ . \tag{B.11}$$

Substituindo φ e suas derivadas na equação (B.6) e levando-se em conta a condição (B.10), além do fato que φ_1 e φ_2 satisfazem a equação homogênea associada a eq.(B.6), temos

$$\varphi_1'(x)q_1'(x) + \varphi_2'(x)q_2'(x) = F(x)\ . \tag{B.12}$$

As equações (B.10) e (B.12) formam um sistema. Reescrevendo este sistema na forma matricial, omitindo a variável x, encontramos

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}\ , \tag{B.13}$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left[\varphi_1' - \varphi_2'\varphi_2^{-1}\varphi_1\right]^{-1} & \left[\varphi_1 - \varphi_2(\varphi_2')^{-1}\varphi_1'\right]^{-1} \\ \left[\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_1^{-1}\varphi_2\right]^{-1} & \left[\varphi_2 - \varphi_1(\varphi_1')^{-1}\varphi_2'\right]^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}\ . \tag{B.14}$$

Então,

$$q_1' = [\varphi_1' - \varphi_2'\varphi_2^{-1}\varphi_1]^{-1}F = -[\varphi_1^{-1}W\varphi_2^{-1}\varphi_1]^{-1}F = -\varphi_1^{-1}\varphi_2 W^{-1}\varphi_1 F \tag{B.15}$$

e

$$q_2' = [\varphi_2' - \varphi_1'(\varphi_1)^{-1}\varphi_2]^{-1}F = W^{-1}\varphi_1 F \qquad \text{(B.16)}$$

Note que

$$q_1' = -\varphi_1^{-1}\varphi_2 q_2' \ . \qquad \text{(B.17)}$$

Para encontrar q_1 e q_2 temos que integrar as equações acima e substituir em (B.8) obtendo a solução particular da equação não homogênea.

Exemplo

Considere a equação

$$\varphi''(x) + L_2\varphi'(x) + (1 - L_3)\varphi(x) = e_1 x \ . \qquad \text{(B.18)}$$

A solução da equação homogênea associada é

$$\varphi(x) = e^{-e_1 x}q_1 + e^{-(e_1+e_2)x}q_2 \ . \qquad \text{(B.19)}$$

Aplicando o método descrito acima, temos

$$\varphi(x) = e^{-e_1 x}q_1(x) + e^{-(e_1+e_2)x}q_2(x) \qquad \text{(B.20)}$$

e, calculando o Wronskiano das soluções obtemos

$$W = -e_2 e^{e_1 x}e^{-(e_1+e_2)x} \ ,$$

cujo inverso é dado por

$$W^{-1} = e^{(e_1+e_2)x}e^{-e_1 x}e_2 \ .$$

Primeiramente vamos calcular q_2. Usando a eq.(B.16) temos

$$q_2' = e^{(e_1+e_2)x}e^{-e_1 x}e_2 e^{-e_1 x}e_1 x = -e^{(e_1+e_2)x}x e_3 \ ,$$

cuja integração nos dá

$$q_2(x) = -\frac{1}{2}(1 - e_1 x - e_2 x)e^{(e_1+e_2)x}e_3 \ .$$

De relação (B.17),

$$q_1' = e^{e_1 x}x e_3 \ ,$$

então

$$q_1 = (1 - e_1 x)e^{e_1 x}e_3 \ .$$

Deste modo, substituindo q_1 e q_2 em (B.20) obtemos a solução da eq.(B.18), dada por

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left[(e_1 + e_2)x + e_3\right] \ .$$

Redução da ordem

Dada a equação diferencial de segunda ordem

$$\psi'' + b_{\mathbb{H}}\psi' + c_{\mathbb{H}}\psi = 0 \ , \tag{B.21}$$

suponha que a solução ψ_1 é conhecida, e que queiramos descobrir qual é a segunda solução utilizando a redução de ordem. Então, impomos

$$\psi_2 = \psi_1 v \ , \tag{B.22}$$

Substituindo (B.22) em (B.21) temos que

$$\psi_1 v'' + \left[2\psi_1^{-1}\psi_1' + \psi_1^{-1}b_{\mathbb{H}}\psi_1\right] v' = 0 \ ,$$

e introduzindo $u = \psi_1 v'$ encontramos

$$u' + \left[\psi_1'\psi_1^{-1} + b_{\mathbb{H}}\right] u = 0 \ .$$

Esta é uma equação de primeira ordem cujos coeficientes não são constantes, ou seja, esta é uma equação do tipo

$$u' - \alpha u = 0 \tag{B.23}$$

onde α é uma função quaterniônica de x e diferentemente do caso complexo,

$$u'u^{-1} = \alpha \quad \not\Longrightarrow \quad \ln u = \int \alpha\, dx \ .$$

Uma possibilidade de resolver este problema é analisar o sistema descrito a seguir. Considere $u = u_1 + e_2 u_2 \ , u_{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $\alpha = \alpha_1 + L_2\alpha_2 \ , \alpha_{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que introduzidos em (B.23), depois de separar a parte complexa da quaterniônica (com elementos e_2 e e_3) obtemos

$$\begin{aligned} u_1' &= \alpha_1 u_1 - \overline{\alpha}_2 u_2 \\ u_2' &= \overline{\alpha}_1 u_2 + \alpha_2 u_1 \end{aligned}$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\overline{\alpha}_2 \\ \alpha_2 & \overline{\alpha}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \ . \tag{B.24}$$

Esta é uma equação matricial complexa cuja solução é facilmente obtida quando a matriz quadrada é reduzida a sua forma de Jordan. A solução da equação (B.24) determina a função u. Sabendo que $u = \psi_1 v'$, nosso trabalho se resume em encontrar v'. Uma vez encontrada a função v temos a segunda solução da equação diferencial (B.21).

C

Coeficientes de transmissão

Tabela 1 [Fig. 6]: $E = 0.5$ **eV** ; $V = 2\,|W| = 2$ **eV** ; $a = 2\,b = 4\,c = 1\,\mathring{\mathbf{A}}$

$[\,E\,;\,V\,,\,|W|\,]$	θ	$|t|^2$	t
$[\,0.5\,;\,2\,,\,0\,]$	$[\,0\,,\,0\,;\,0\,,\,0\,]$	0.62596	$0.618647 - i\,0.493189$
$[\,0.5\,;\,2\,,\,1\,]$	$[\,0\,,\,0\,;\,0\,,\,0\,]$	0.612889	$0.605527 - i\,0.496212$
$[\,0.5\,;\,2\,,\,1\,]$	$0\,,\,0\,;\,\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{6}$ $0\,,\,\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{6}\,,\,0$ $\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{6}\,;\,0\,,\,0$	0.613720 0.613748 0.613720	$0.606559 - i\,0.495789$ $0.606389 - i\,0.496025$ $0.606159 - i\,0.496278$
$[\,0.5\,;\,2\,,\,1\,]$	$0\,,\,0\,;\,\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}$ $0\,,\,\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\,,\,0$ $\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\,;\,0\,,\,0$	0.614708 0.614769 0.614708	$0.60763 - i\,0.495473$ $0.607413 - i\,0.495800$ $0.607065 - i\,0.496165$
$[\,0.5\,;\,2\,,\,1\,]$	$0\,,\,0\,;\,\frac{\pi}{3}\,,\,\frac{\pi}{3}$ $0\,,\,\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\,,\,0$ $\frac{\pi}{3}\,,\,\frac{\pi}{3}\,;\,0\,,\,0$	0.615996 0.616100 0.615996	$0.608983 - i\,0.495113$ $0.608749 - i\,0.495504$ $0.608291 - i\,0.495962$
$[\,0.5\,;\,2\,,\,1\,]$	$0\,,\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}$ $0\,,\,\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\,,\,0$ $\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,;\,0\,,\,0$	0.619112 0.619321 0.619112	$0.612155 - i\,0.494347$ $0.611982 - i\,0.494772$ $0.611358 - i\,0.495332$
$[\,0.5\,;\,2\,,\,1\,]$	$[\,0\,,\,0\,;\,\pi\,,\,\pi\,]$ $[\,0\,,\,\pi\,;\,\pi\,,\,0\,]$ $[\,\pi\,,\,\pi\,;\,0\,,\,0\,]$	0.625369 0.625792 0.625369	$0.618021 - i\,0.493376$ $0.618478 - i\,0.493232$ $0.618021 - i\,0.493376$

Tabela 2 [Fig. 7]

$$E = 1.5 \text{ eV} \; ; \quad V = 2\,|W| = 2 \text{ eV} \; ; \quad a = 2\,b = 4\,c = 1\,\mathring{\text{A}}$$

$[\,E\,;\,V\,,\,\lvert W\rvert\,]$	θ	$\lvert t\rvert^2$	t
$[\,1.5\,;\,2\,,\,0\,]$	$[\,0\,,\,0\,;\,0\,,\,0\,]$	0.845474	$0.835936 - i\,0.382994$
$[\,1.5\,;\,2\,,\,1\,]$	$[\,0\,,\,0\,;\,0\,,\,0\,]$	0.840310	$0.830647 - i\,0.387733$
$[\,1.5\,;\,2\,,\,1\,]$	$\left[0\,,\,0\,;\,\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{6}\right]$ $\left[0\,,\,\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{6}\,,\,0\right]$ $\left[\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{6}\,;\,0\,,\,0\right]$	0.840637 0.840651 0.840637	$0.831080 - i\,0.387223$ $0.830996 - i\,0.387424$ $0.830877 - i\,0.387660$
$[\,1.5\,;\,2\,,\,1\,]$	$\left[0\,,\,0\,;\,\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\,,\,0\right]$ $\left[\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\,;\,0\,,\,0\right]$	0.841023 0.841055 0.841023	$0.831516 - i\,0.386787$ $0.831409 - i\,0.387058$ $0.831228 - i\,0.387406$
$[\,1.5\,;\,2\,,\,1\,]$	$\left[0\,,\,0\,;\,\frac{\pi}{3}\,,\,\frac{\pi}{3}\right]$ $\left[0\,,\,\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\,,\,0\right]$ $\left[\frac{\pi}{3}\,,\,\frac{\pi}{3}\,;\,0\,,\,0\right]$	0.841526 0.841581 0.841526	$0.832061 - i\,0.386266$ $0.831948 - i\,0.386580$ $0.831708 - i\,0.387024$
$[\,1.5\,;\,2\,,\,1\,]$	$\left[0\,,\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\,,\,0\right]$ $\left[\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,;\,0\,,\,0\right]$	0.842740 0.842850 0.842740	$0.833323 - i\,0.385115$ $0.833247 - i\,0.385421$ $0.832917 - i\,0.385991$
$[\,1.5\,;\,2\,,\,1\,]$	$[\,0\,,\,0\,;\,\pi\,,\,\pi\,]$ $[\,0\,,\,\pi\,;\,\pi\,,\,0\,]$ $[\,\pi\,,\,\pi\,;\,0\,,\,0\,]$	0.845158 0.845378 0.845158	$0.835583 - i\,0.383353$ $0.835836 - i\,0.383087$ $0.835583 - i\,0.383353$

Tabela 3 [Fig.8]

$$E = 3 \text{ eV} \; ; \quad V = 2\,|W| = 2 \text{ eV} \; ; \quad a = 2\,b = 4\,c = 1\,\overset{\circ}{\text{A}}$$

$[\,E\,;\,V\,,\,\lvert W\rvert\,]$	θ	$\lvert t\rvert^2$	t
$[\,3\,;\,2\,,\,0\,]$	$[\,0\,,\,0\,;\,0\,,\,0\,]$	0.925842	$0.915930 - i\,0.294811$
$[\,3\,;\,2\,,\,1\,]$	$[\,0\,,\,0\,;\,0\,,\,0\,]$	0.923710	$0.913674 - i\,0.298177$
$[\,3\,;\,2\,,\,1\,]$	$\left[0\,,\,0\,;\,\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{6}\right]$ $\left[0\,,\,\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{6}\,,\,0\right]$ $\left[\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{6}\,;\,0\,,\,0\right]$	0.923843 0.923850 0.923843	$0.913869 - i\,0.297802$ $0.913822 - i\,0.297959$ $0.913757 - i\,0.298147$
$[\,3\,;\,2\,,\,1\,]$	$\left[0\,,\,0\,;\,\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\,,\,0\right]$ $\left[\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\,;\,0\,,\,0\right]$	0.924000 0.924016 0.924000	$0.914057 - i\,0.297490$ $0.913998 - i\,0.297699$ $0.913898 - i\,0.297977$
$[\,3\,;\,2\,,\,1\,]$	$\left[0\,,\,0\,;\,\frac{\pi}{3}\,,\,\frac{\pi}{3}\right]$ $\left[0\,,\,\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\,,\,0\right]$ $\left[\frac{\pi}{3}\,,\,\frac{\pi}{3}\,;\,0\,,\,0\right]$	0.924205 0.924232 0.924205	$0.914289 - i\,0.297122$ $0.914226 - i\,0.297360$ $0.914095 - i\,0.297718$
$[\,3\,;\,2\,,\,1\,]$	$\left[0\,,\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\,,\,0\right]$ $\left[\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,;\,0\,,\,0\right]$	0.924699 0.924753 0.924699	$0.914820 - i\,0.296317$ $0.914776 - i\,0.296542$ $0.914596 - i\,0.297006$
$[\,3\,;\,2\,,\,1\,]$	$[\,0\,,\,0\,;\,\pi\,,\,\pi\,]$ $[\,0\,,\,\pi\,;\,\pi\,,\,0\,]$ $[\,\pi\,,\,\pi\,;\,0\,,\,0\,]$	0.925681 0.925789 0.925681	$0.915736 - i\,0.295142$ $0.915873 - i\,0.294900$ $0.915736 - i\,0.295142$

D

Figuras

Fig.1 Probabilidade de transmissão do elétron, $|t|^2$, como uma função de E[eV] para potenciais invariantes com relação a reversão temporal. A linha cheia indica os resultados para a barreira de potencial de largura $2a$[Å]= 1.0 e altura V[eV]= 2.0 da mecânica quântica complexa. As linhas tracejadas (desenhadas para diferentes valores da largura $2b$ e altura $|W|$ do potencial $e_2\,W$) mostra os efeitos da perturbação quaterniônica.

Fig.2 O mesmo que o anterior mas agora a largura da barreira de potencial é a[Å]= 1.0 e a altura é V[eV]= 2.0. As linhas tracejadas (desenhada para uma largura fixa b[Å]= 1.0 e valores diferentes da altura $|W|$ do potencial $e_2\,W$) mostram os efeitos da perturbação quaterniônica e a transmissão de probabilidade para a barreira complexa comparativa $Z = \sqrt{V^2 + |W|^2}$.

Fig.3 Probabilidade adicional de transmissão, $|\tilde{t}|^2 \exp[-2px/\hbar]$, e reflexão, $|\tilde{r}|^2 \exp[2px/\hbar]$, do elétron como uma função de E[eV] para o potencial invariante com relação a reversão temporal de largura $a = b = 1.0$ Å e altura $V = |W| = 2.0\,\mathrm{eV}$. As curvas mostram a probabilidade de transmissão e reflexão adicionais para valores diferentes de x.

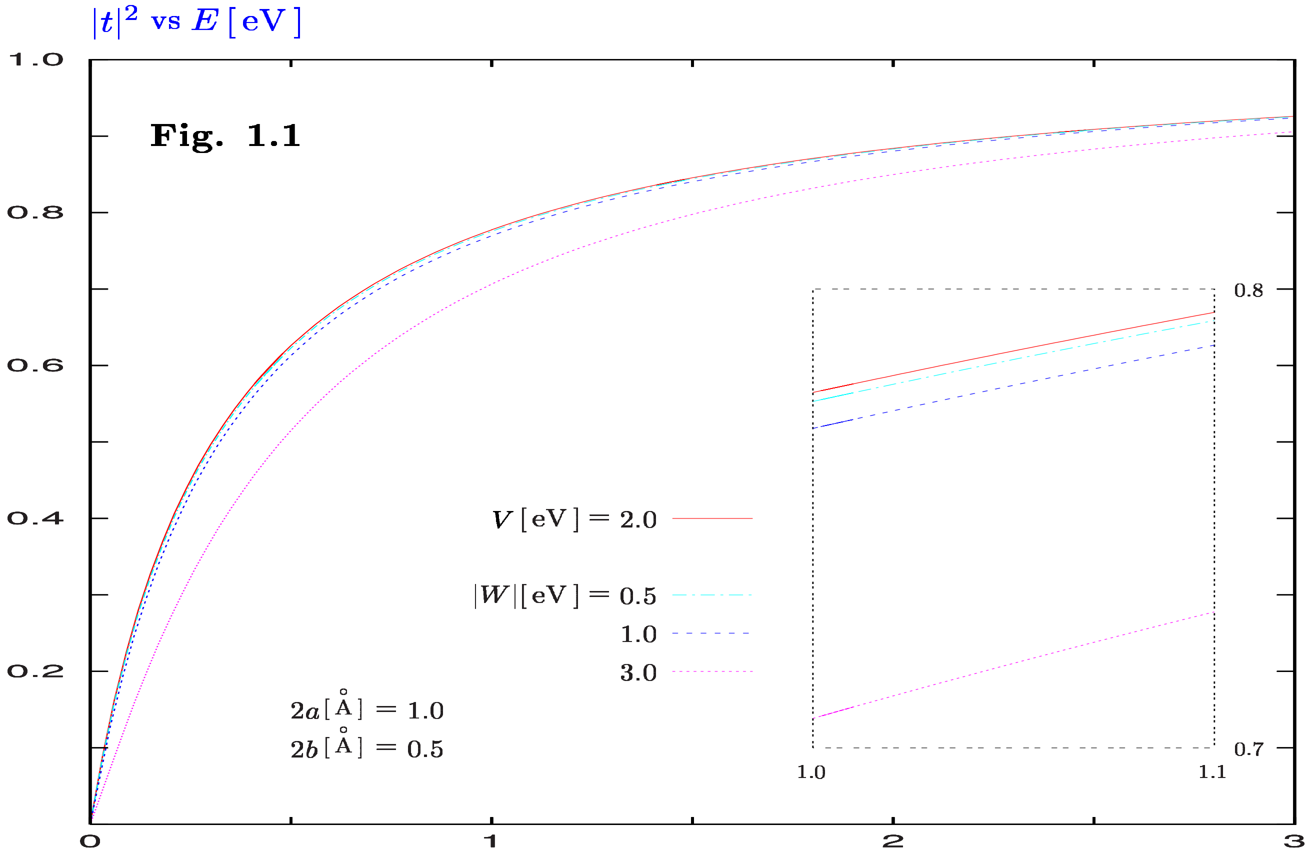
Fig.4 Probabilidade de transmissão do elétron, $|t|^2$, como uma função de a[Å] potenciais invariantes com relação a reversão temporal. As curvas (desenhadas para valores diferentes de E) mostram a probabilidade de transmissão para a barreira de potencial de mecânica quântica complexa de altura V[eV]= 2.0 e para potenciais complexos e quaterniônicos de mesma altura, respectivamente, $|W|$[eV]= 1.0 e 1.5.

Fig.5 Probabilidade de transmissão do elétron, $|t|^2$, como uma função de a[Å] para potenciais complexos e *puramente* quaterniônicos com a mesma largura e altura. As curvas mostram a probabilidade de transmissão para diferentes valores de E.

Fig.6 Probabilidade de transmissão do elétron, $|t|^2$, e valor absoluto do argumento do coeficiente de transmissão, $|Arg(t)|$, como a função do tempo violando a fase $\theta[\pi]$ para potenciais de altura $V = 2|W| = 2.0\,\mathrm{eV}$ e largura $a = 2b = 4c = 1.0$ Å. As curvas mostram que somente os potenciais quaterniônicos assimétricos que violam a invariância com relação a reversão temporal poderiam distinguir entre transmissão à direita e à esquerda. O valor da energia é fixado para $E = 0.5\,\mathrm{eV}$.

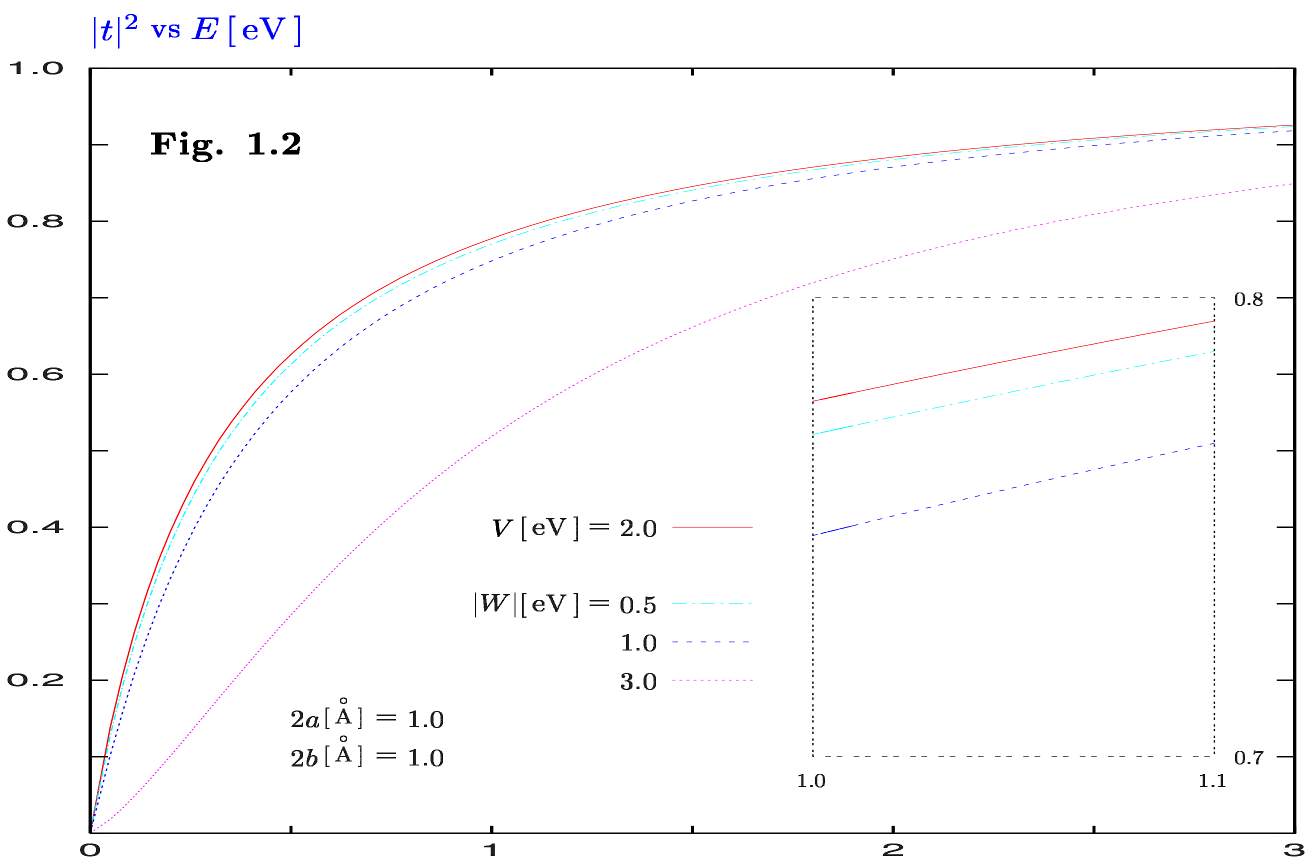
Fig.7 Estas figuras descrevem as mesmas características que a anterior mas agora o valor da energia é fixado para $E = 1.5\,\mathrm{eV}$.

Fig.8 Novamente, as últimas duas figuras são repetidas porém o valor da energia é fixado para $E = 3.0\,\mathrm{eV}$.



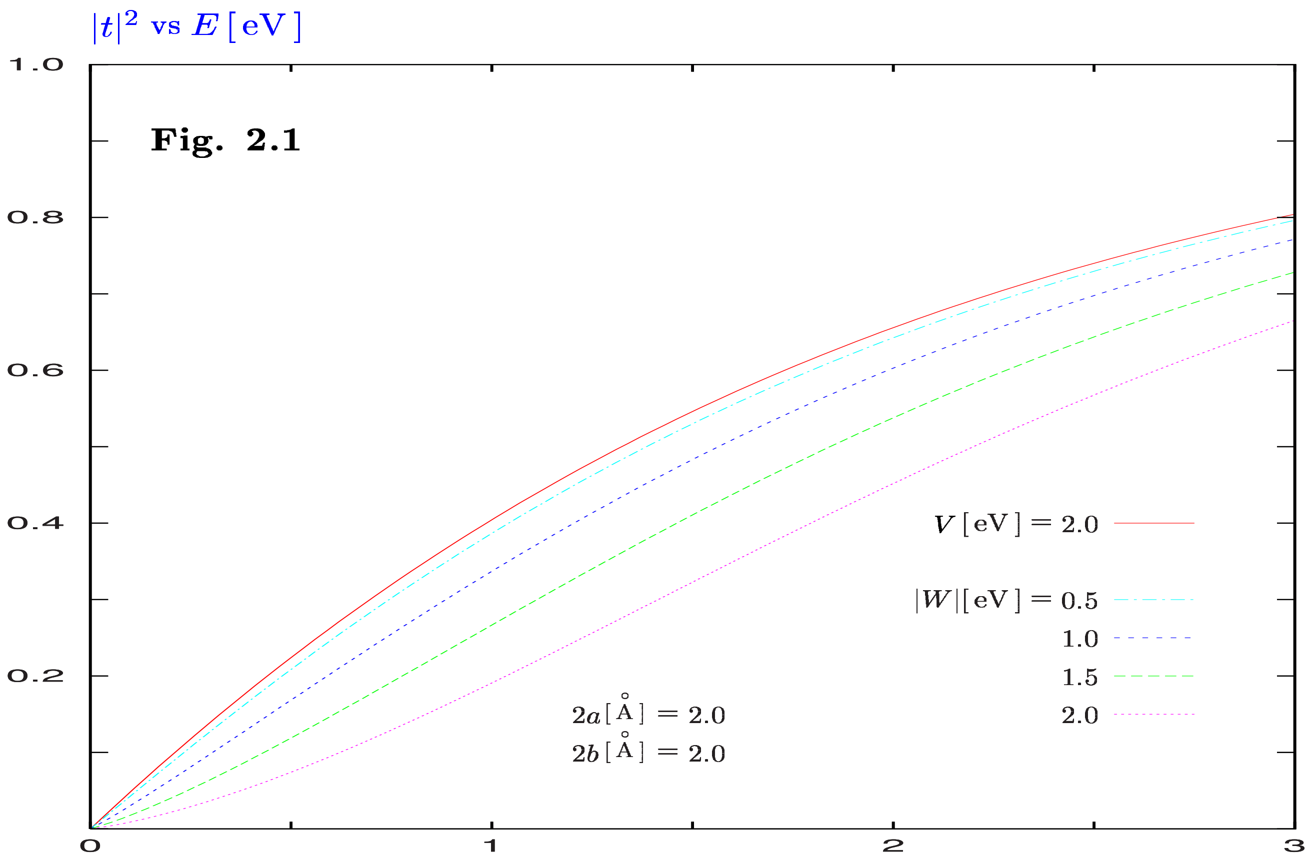
$|t|^2$ vs E [eV]
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
2
3
V [eV] = 2.0
$|W|$ [eV] = 0.5
1.0
3.0
$2a$ [Å] = 1.0
$2b$ [Å] = 0.5
0.8
0.7
1.0
1.1

Fig. 1.1



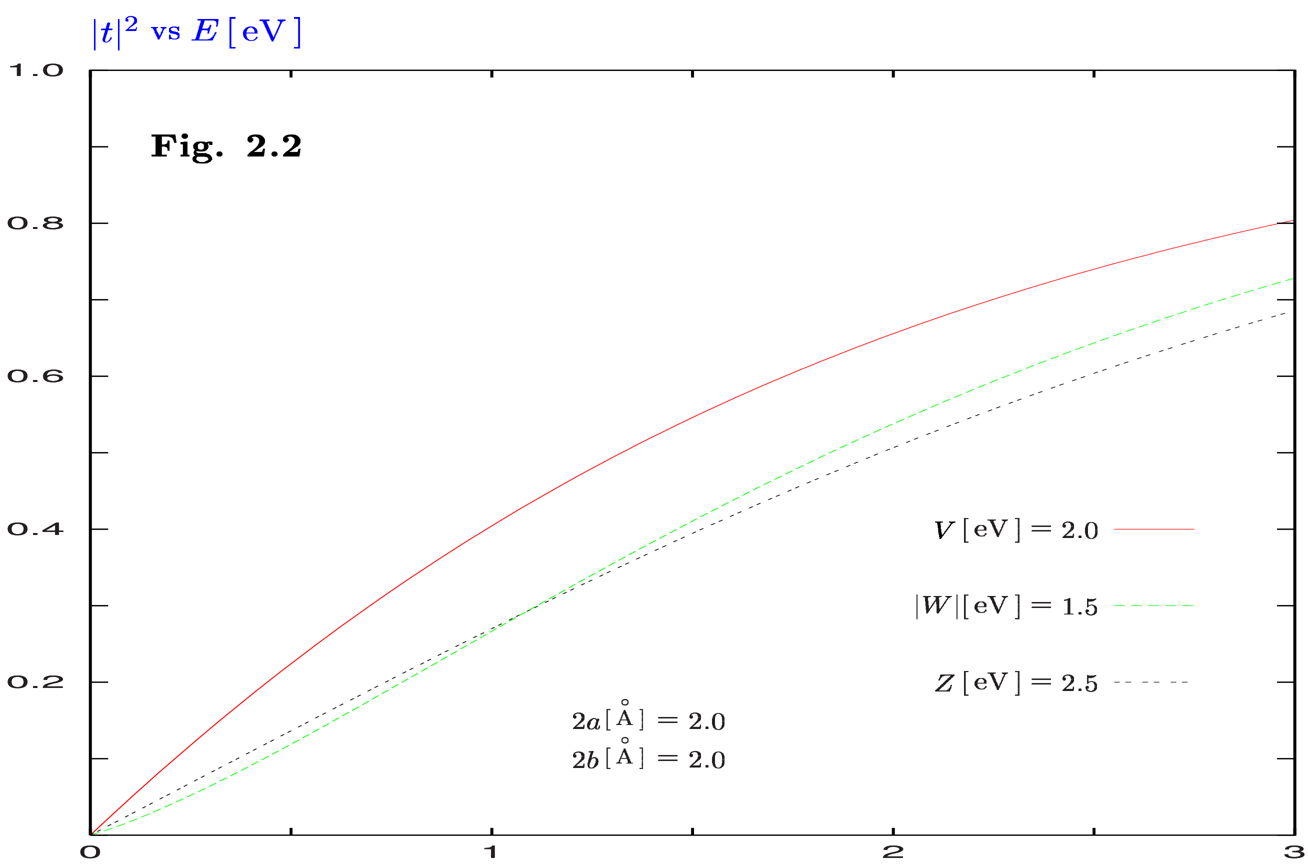
$|t|^2$ vs E [eV]
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
2
3
V [eV] = 2.0
$|W|$ [eV] = 0.5
1.0
3.0
$2a$ [Å] = 1.0
$2b$ [Å] = 1.0
0.8
0.7
1.0
1.1

Fig. 1.2



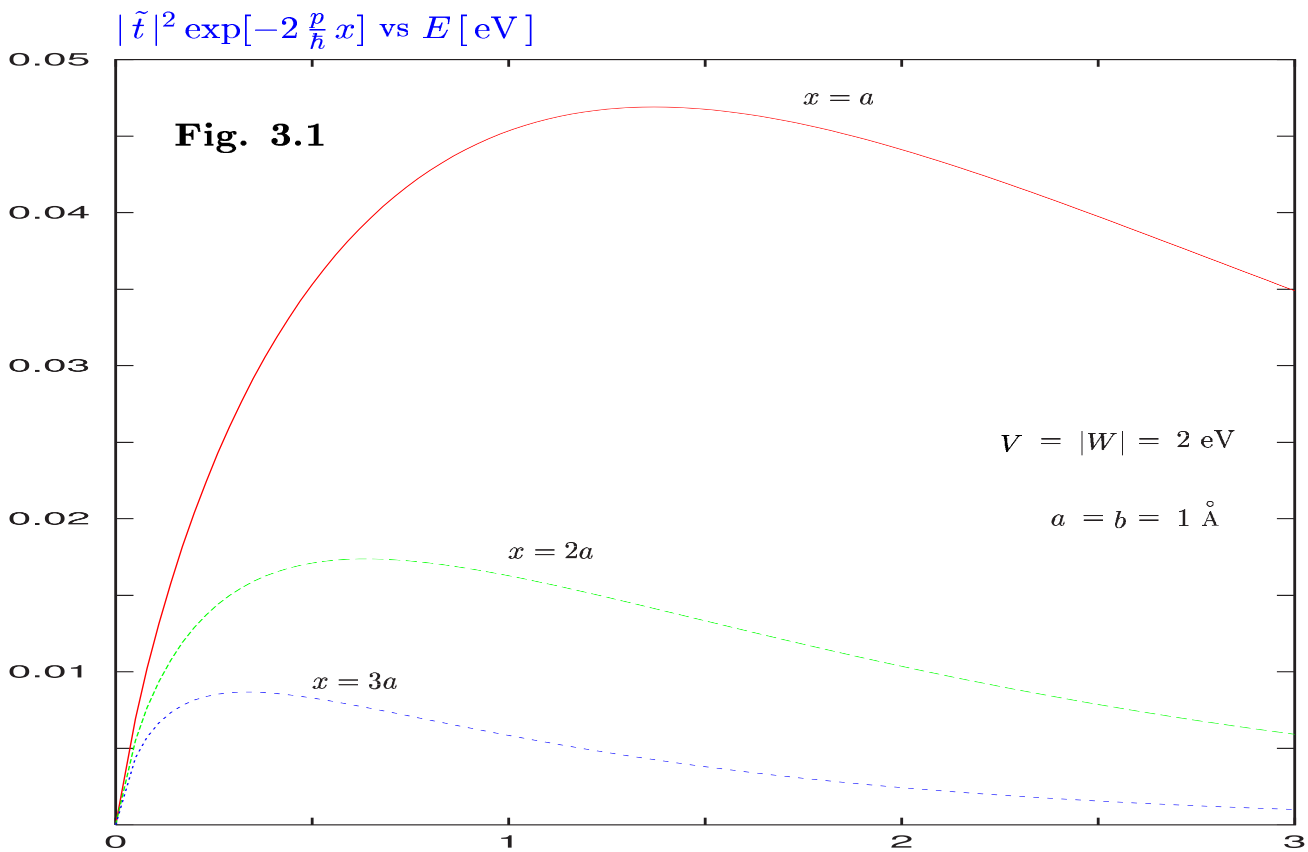
$|t|^2$ vs E [eV]
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
2
3
V [eV] = 2.0
$|W|$[eV] = 0.5
1.0
1.5
2.0
$2a$ [Å] = 2.0
$2b$ [Å] = 2.0

Fig. 2.1

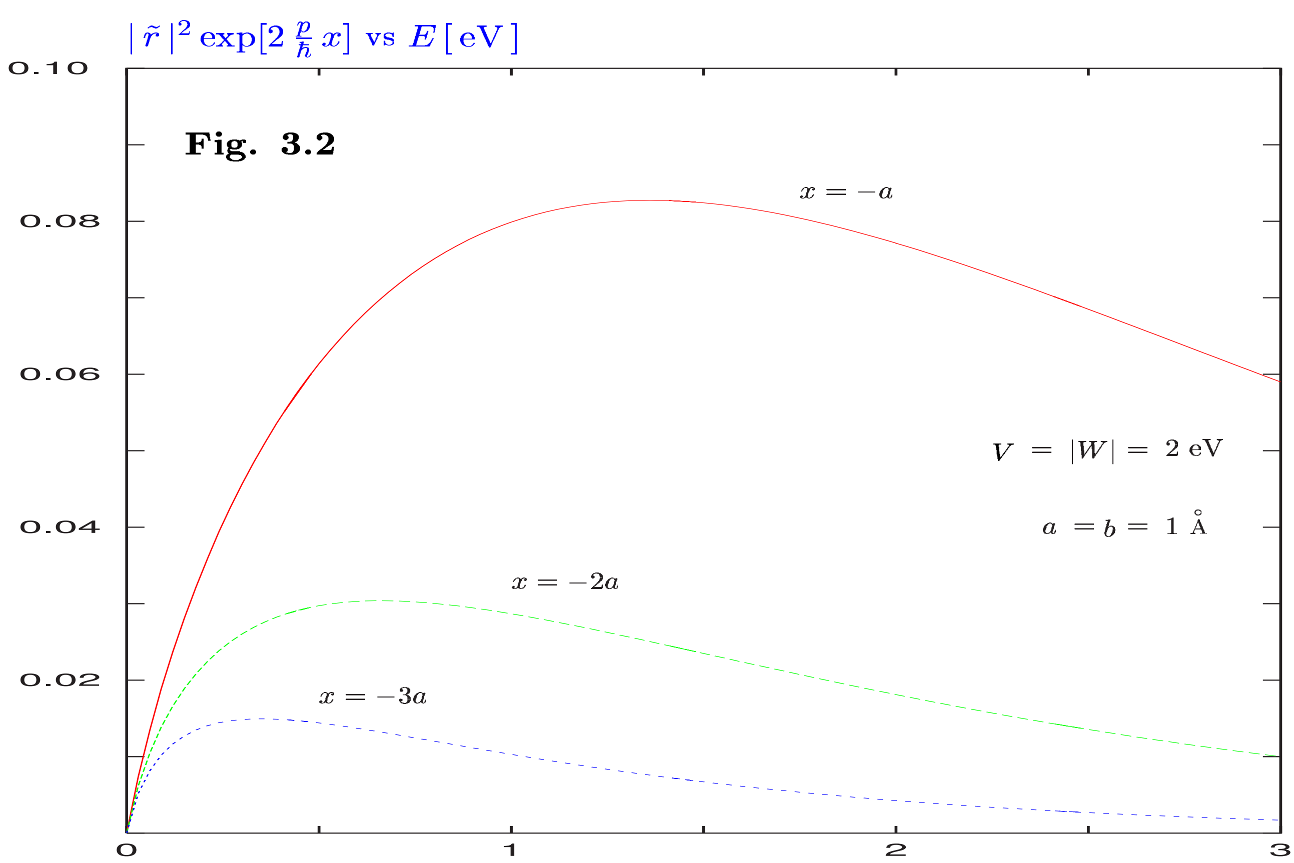


$|t|^2$ vs E [eV]
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
2
3
V [eV] = 2.0
$|W|$[eV] = 1.5
Z [eV] = 2.5
$2a$ [Å] = 2.0
$2b$ [Å] = 2.0

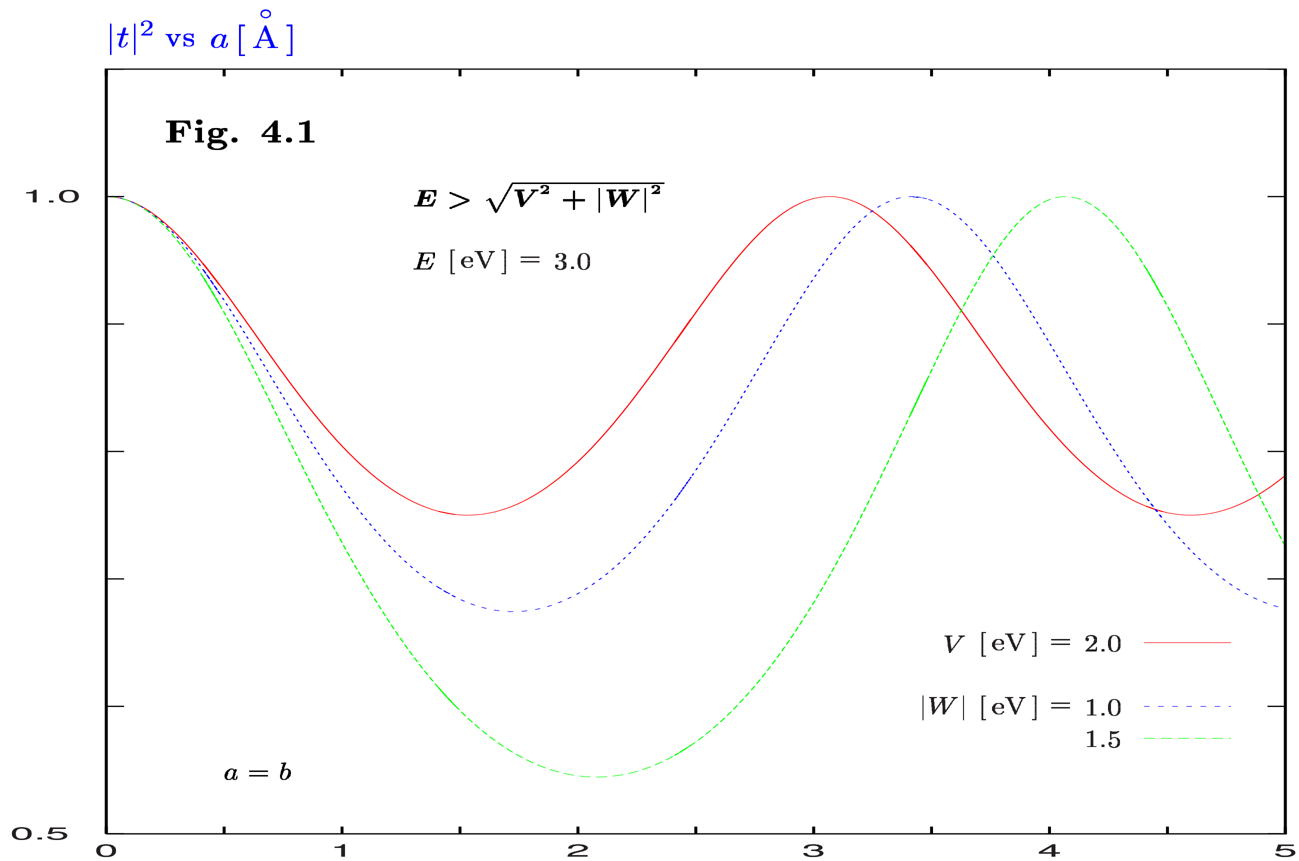
Fig. 2.2



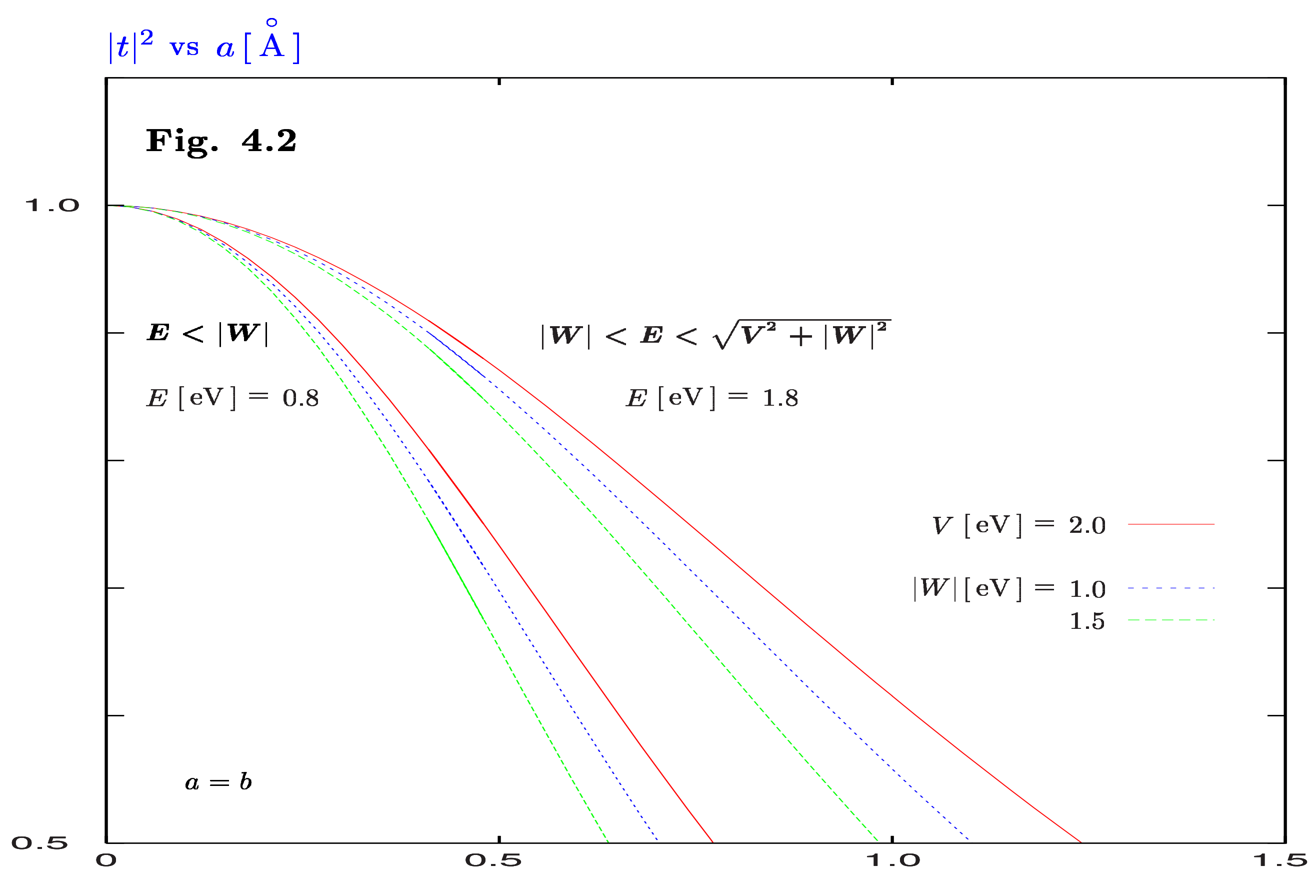
$|\tilde{t}|^2 \exp[-2\frac{p}{\hbar}x]$ vs E [eV]
Fig. 3.1
$x = a$
$x = 2a$
$x = 3a$
$V = |W| = 2$ eV
$a = b = 1$ Å
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
1
2
3



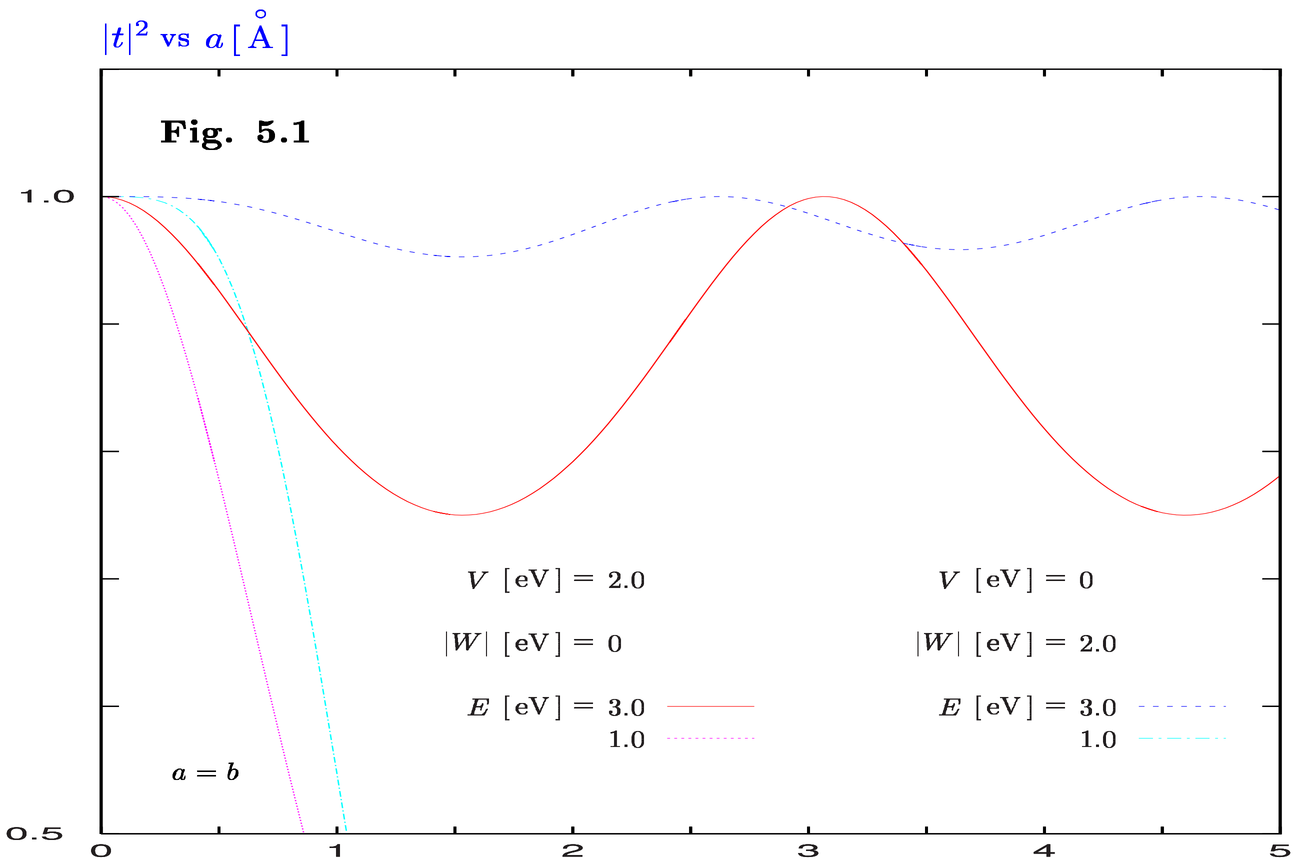
$|\tilde{r}|^2 \exp[2\frac{p}{\hbar}x]$ vs E [eV]
Fig. 3.2
$x = -a$
$x = -2a$
$x = -3a$
$V = |W| = 2$ eV
$a = b = 1$ Å
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0
1
2
3

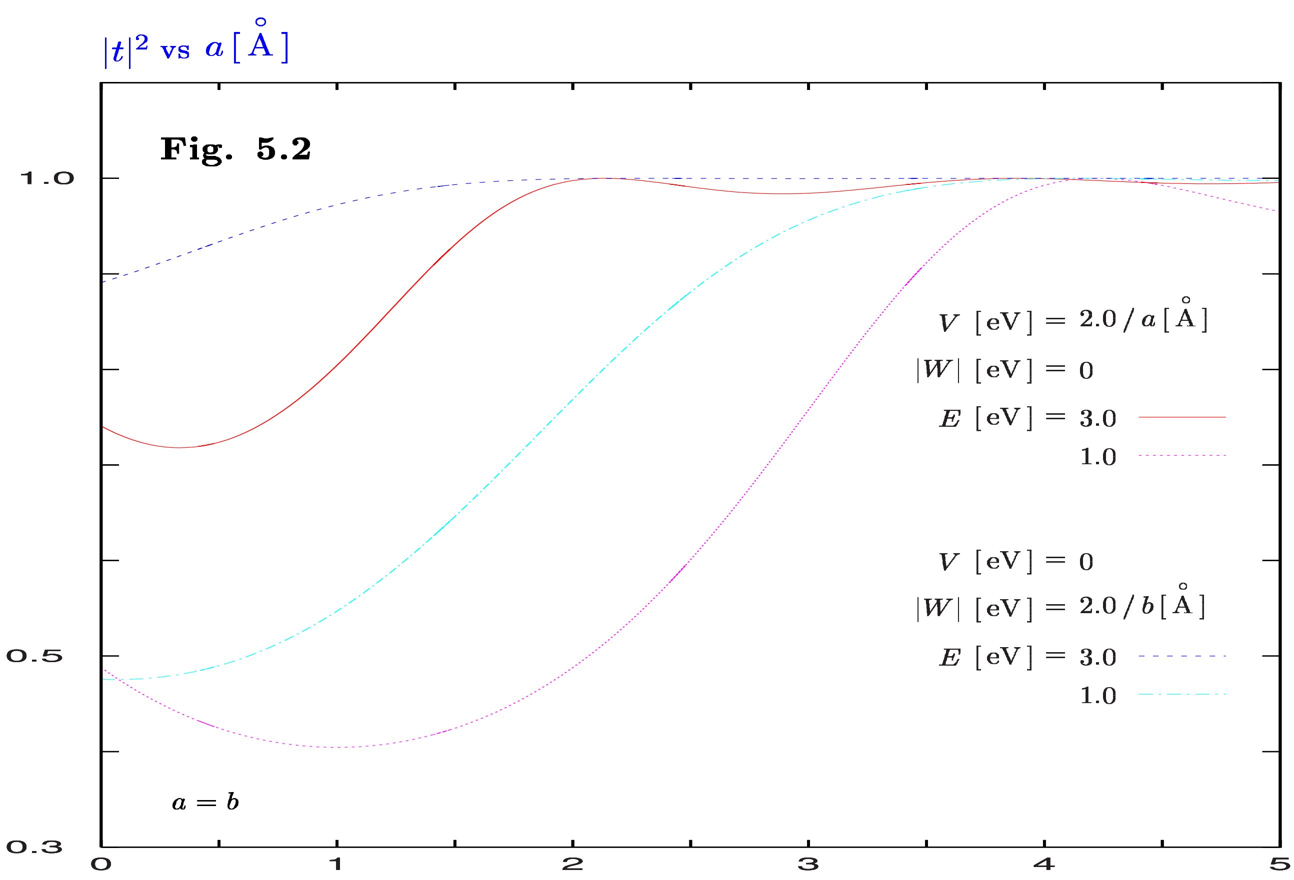


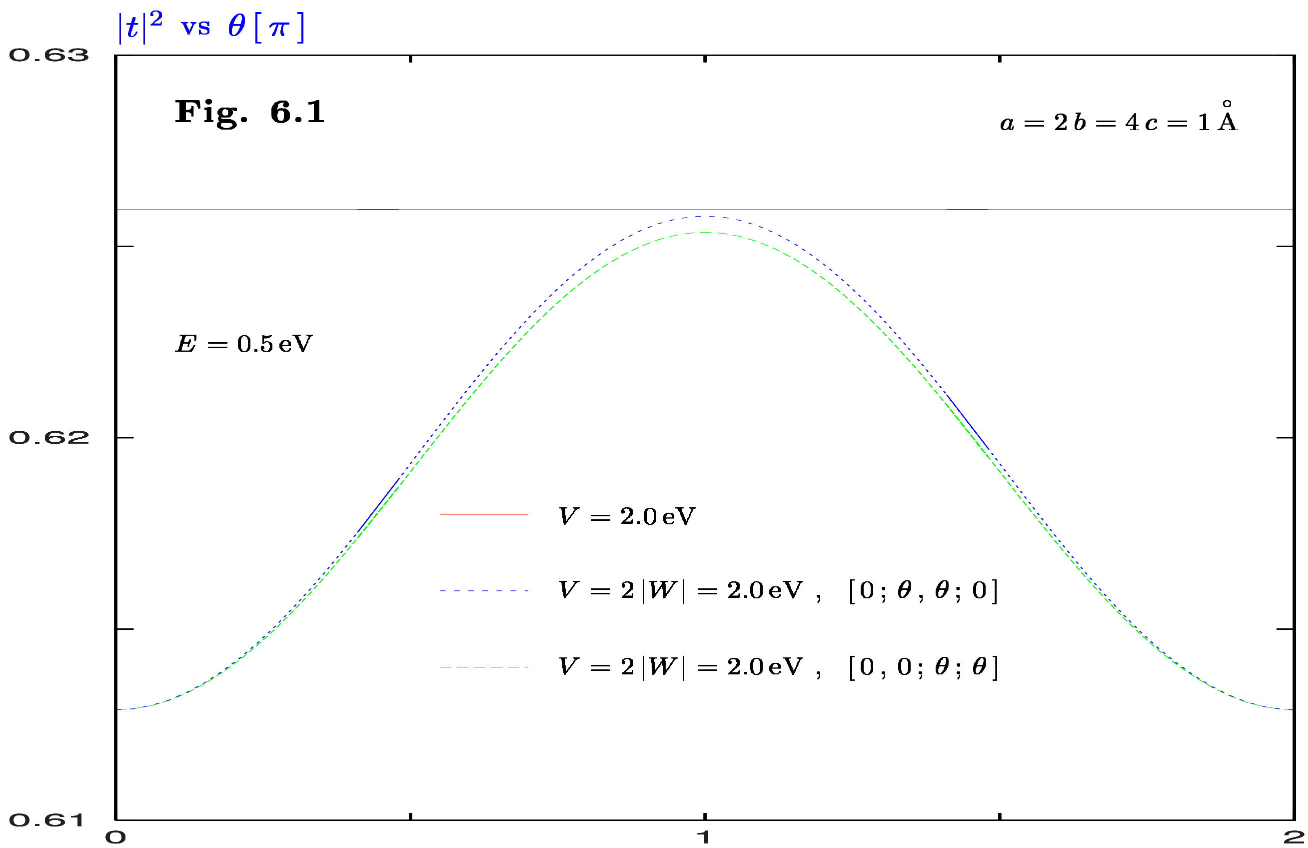
|t|^2 vs a [Å]
Fig. 4.1
1.0
0.5
E > √(V² + |W|²)
E [eV] = 3.0
V [eV] = 2.0
|W| [eV] = 1.0
1.5
a = b
0
1
2
3
4
5



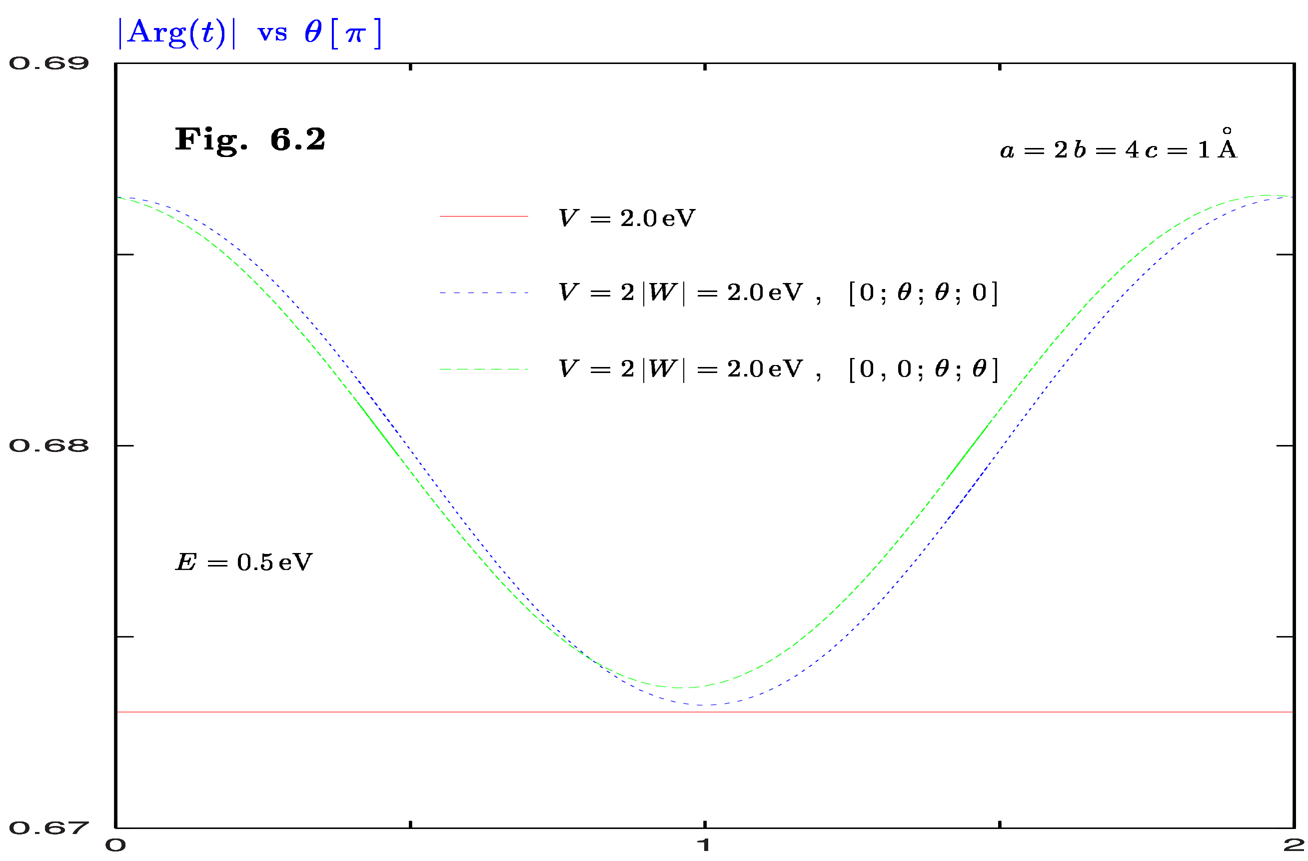
|t|^2 vs a [Å]
Fig. 4.2
1.0
0.5
E < |W|
E [eV] = 0.8
|W| < E < √(V² + |W|²)
E [eV] = 1.8
V [eV] = 2.0
|W| [eV] = 1.0
1.5
a = b
0
0.5
1.0
1.5


$|t|^2$ vs $a\,[\,\mathring{A}\,]$
Fig. 5.1
1.0
0.5
0
1
2
3
4
5
V [eV] = 2.0
$|W|$ [eV] = 0
E [eV] = 3.0
1.0
V [eV] = 0
$|W|$ [eV] = 2.0
E [eV] = 3.0
1.0
$a = b$

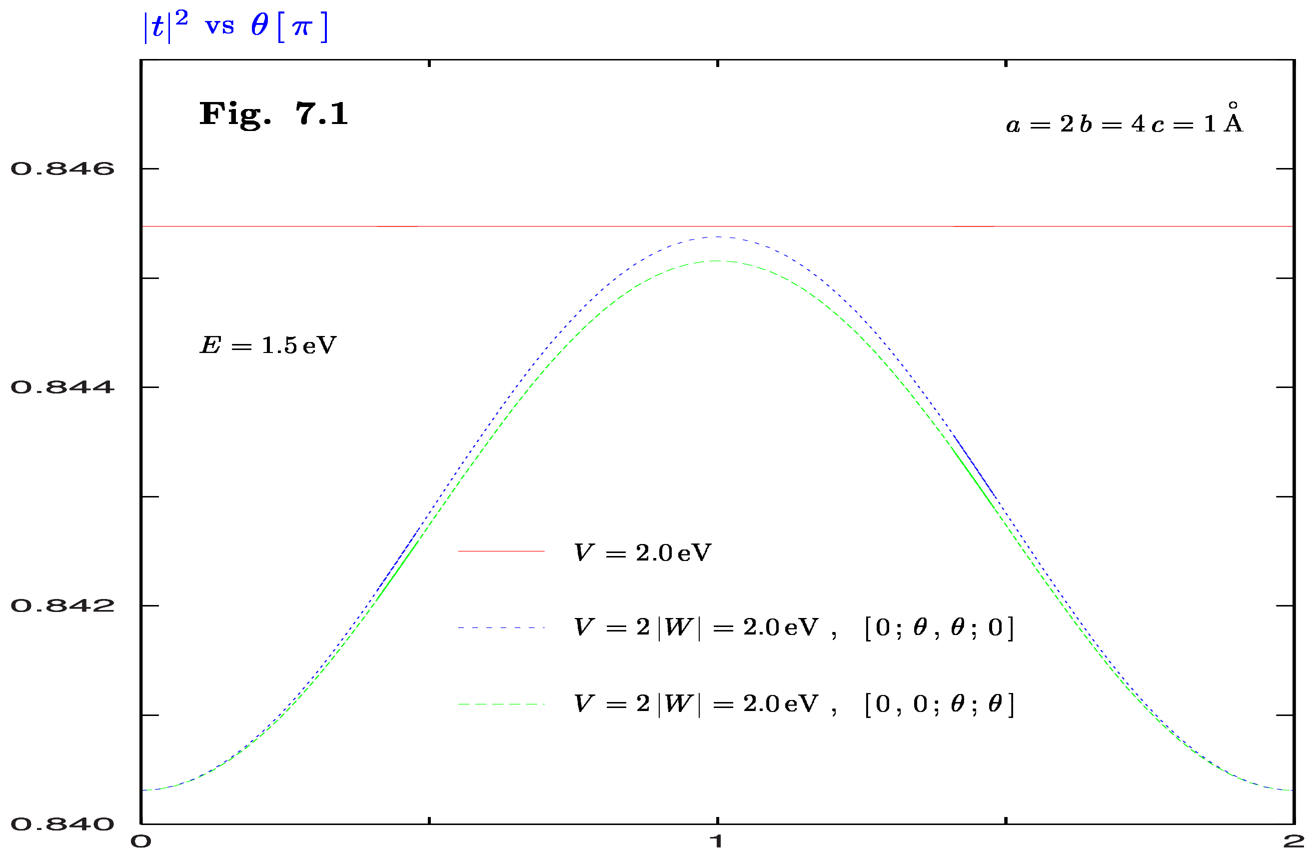

$|t|^2$ vs $a\,[\,\mathring{A}\,]$
Fig. 5.2
1.0
0.5
0.3
0
1
2
3
4
5
V [eV] = 2.0 / $a\,[\mathring{A}]$
$|W|$ [eV] = 0
E [eV] = 3.0
1.0
V [eV] = 0
$|W|$ [eV] = 2.0 / $b\,[\mathring{A}]$
E [eV] = 3.0
1.0
$a = b$

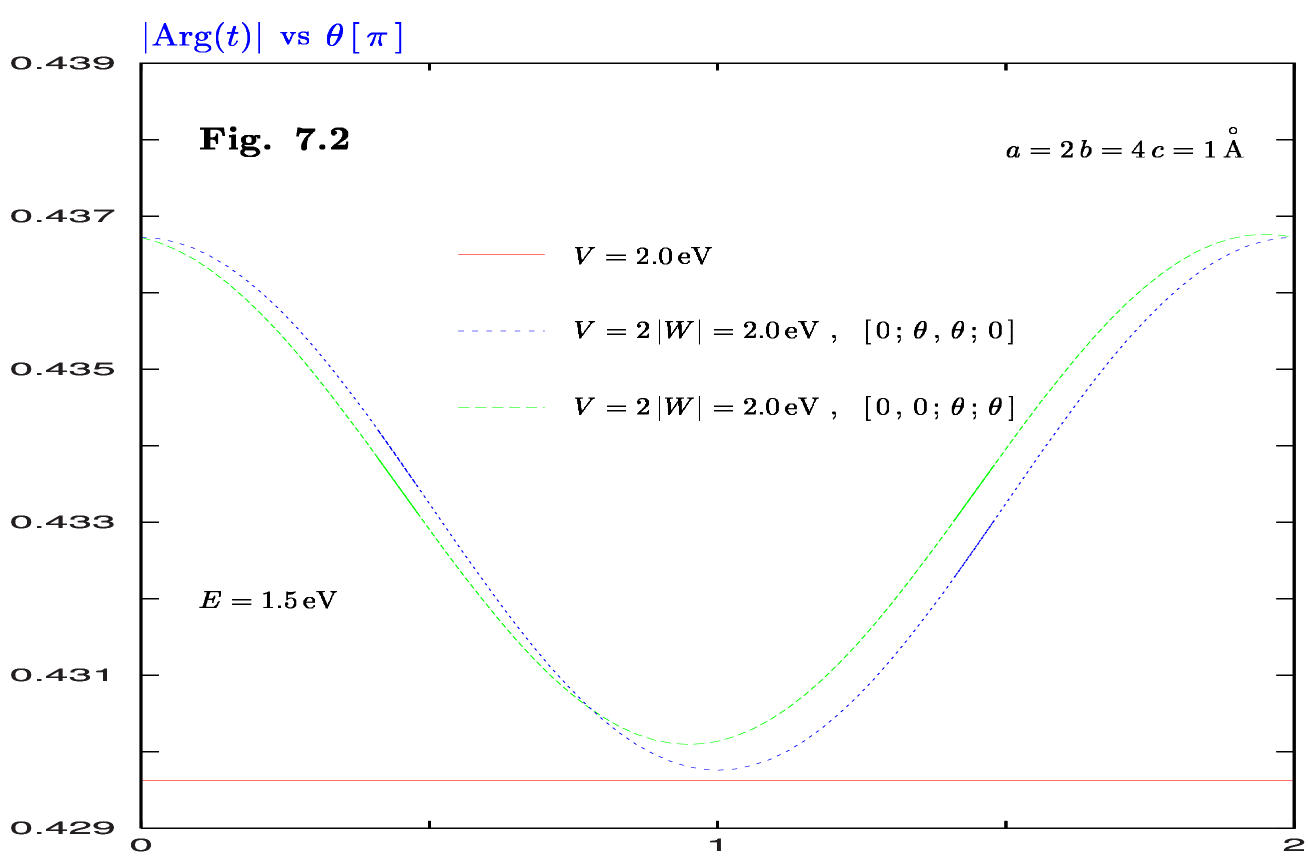


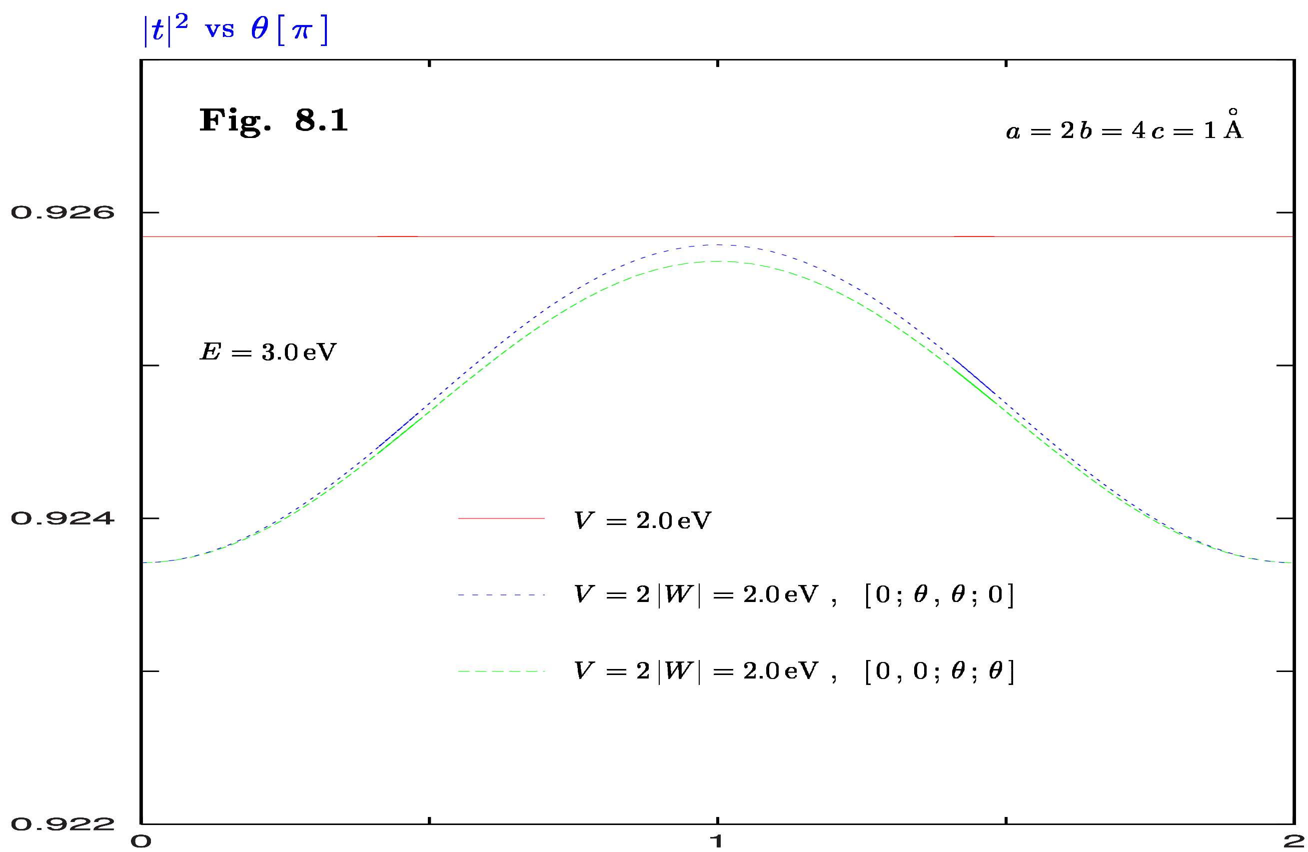
|t|² vs θ [π]
Fig. 6.1
a = 2b = 4c = 1 Å
E = 0.5 eV
V = 2.0 eV
V = 2|W| = 2.0 eV , [0 ; θ , θ ; 0]
V = 2|W| = 2.0 eV , [0 , 0 ; θ ; θ]
0.63
0.62
0.61
0
1
2



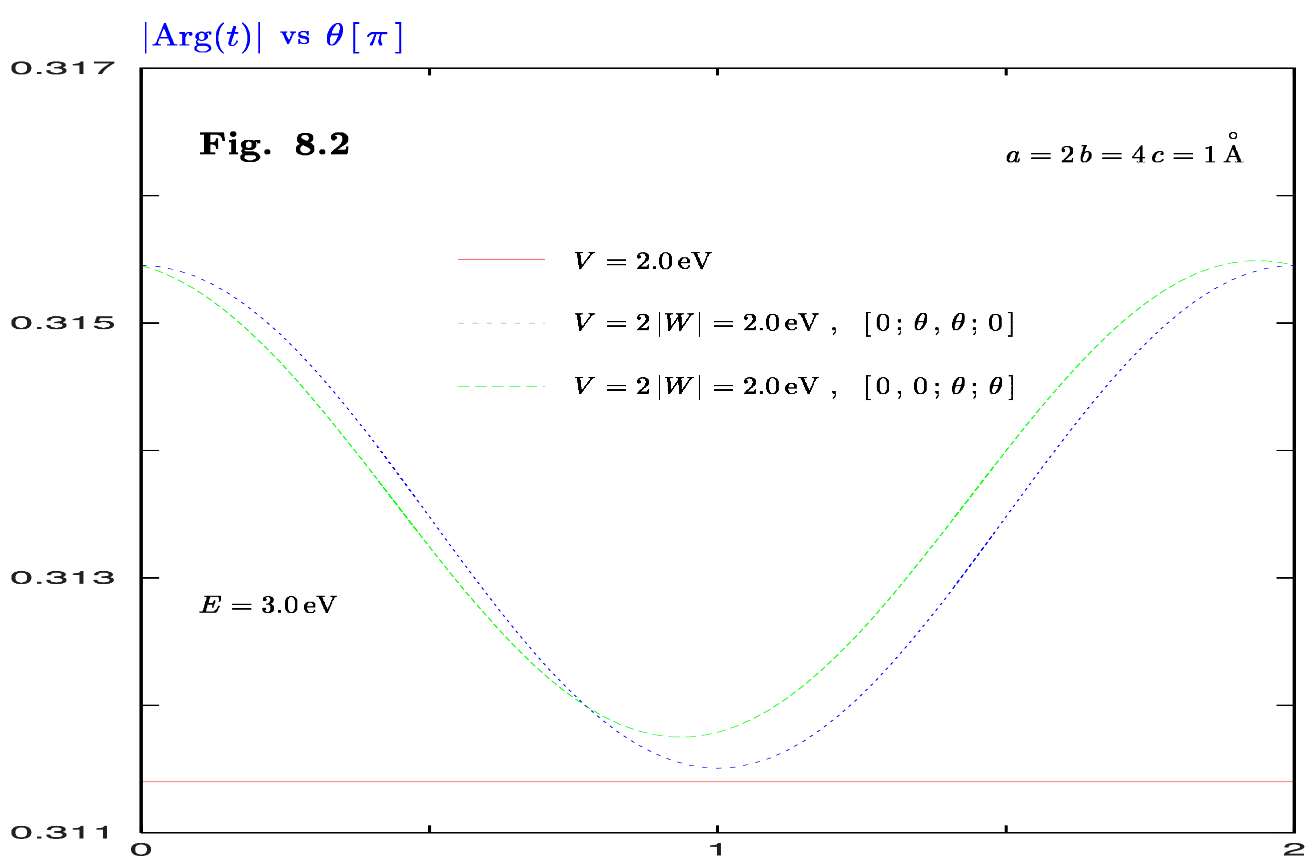
|Arg(t)| vs θ [π]
Fig. 6.2
a = 2b = 4c = 1 Å
V = 2.0 eV
V = 2|W| = 2.0 eV , [0 ; θ ; θ ; 0]
V = 2|W| = 2.0 eV , [0 , 0 ; θ ; θ]
E = 0.5 eV
0.69
0.68
0.67
0
1
2


$|t|^2$ vs $\theta\,[\,\pi\,]$
Fig. 7.1
$a = 2\,b = 4\,c = 1\,\text{Å}$
$E = 1.5\,\text{eV}$
$V = 2.0\,\text{eV}$
$V = 2\,|W| = 2.0\,\text{eV}\ ,\ \ [\,0\,;\,\theta\,,\,\theta\,;\,0\,]$
$V = 2\,|W| = 2.0\,\text{eV}\ ,\ \ [\,0\,,\,0\,;\,\theta\,;\,\theta\,]$
0.840
0.842
0.844
0.846
0
1
2


$|\text{Arg}(t)|$ vs $\theta\,[\,\pi\,]$
Fig. 7.2
$a = 2\,b = 4\,c = 1\,\text{Å}$
$E = 1.5\,\text{eV}$
$V = 2.0\,\text{eV}$
$V = 2\,|W| = 2.0\,\text{eV}\ ,\ \ [\,0\,;\,\theta\,,\,\theta\,;\,0\,]$
$V = 2\,|W| = 2.0\,\text{eV}\ ,\ \ [\,0\,,\,0\,;\,\theta\,;\,\theta\,]$
0.429
0.431
0.433
0.435
0.437
0.439
0
1
2



$|t|^2$ vs $\theta\,[\,\pi\,]$
Fig. 8.1
$a = 2\,b = 4\,c = 1\,\mathring{A}$
0.926
0.924
0.922
$E = 3.0\,\mathrm{eV}$
$V = 2.0\,\mathrm{eV}$
$V = 2\,|W| = 2.0\,\mathrm{eV}$, $[\,0\,;\,\theta\,,\,\theta\,;\,0\,]$
$V = 2\,|W| = 2.0\,\mathrm{eV}$, $[\,0\,,\,0\,;\,\theta\,;\,\theta\,]$
0
1
2



$|\mathrm{Arg}(t)|$ vs $\theta\,[\,\pi\,]$
Fig. 8.2
$a = 2\,b = 4\,c = 1\,\mathring{A}$
0.317
0.315
0.313
0.311
$V = 2.0\,\mathrm{eV}$
$V = 2\,|W| = 2.0\,\mathrm{eV}$, $[\,0\,;\,\theta\,,\,\theta\,;\,0\,]$
$V = 2\,|W| = 2.0\,\mathrm{eV}$, $[\,0\,,\,0\,;\,\theta\,;\,\theta\,]$
$E = 3.0\,\mathrm{eV}$
0
1
2

E

Tabela de tradução

Neste apêndice, daremos uma regra prática para traduzir qualquer operador linear sobre $\mathbb{H}$ em uma matriz real 4×4 ou vice-versa dependendo da geometria escolhida.

Geometria η-complexa

Daremos explicitamente 16 elementos que formam uma base para o conjunto de matrizes reais 4×4. Os elementos $+$ e $-$ que formam o a coluna da tabela representam os números $+1$ e -1. Deste modo, temos

	$\mathbb{1}$	L_1R_1	L_2R_2	L_3R_3
E_{00}	$+$	$-$	$-$	$-$
E_{11}	$+$	$-$	$+$	$+$
E_{22}	$+$	$+$	$-$	$+$
E_{33}	$+$	$+$	$+$	$-$
	L_1	R_1	L_2R_3	L_3R_2
E_{01}	$-$	$-$	$+$	$-$
E_{10}	$+$	$+$	$+$	$-$
E_{23}	$-$	$+$	$-$	$-$
E_{32}	$+$	$-$	$-$	$-$

	L_2	R_2	L_1R_3	L_3R_1
E_{02}	$-$	$-$	$-$	$+$
E_{20}	$+$	$+$	$-$	$+$
E_{13}	$+$	$-$	$-$	$-$
E_{31}	$-$	$+$	$-$	$-$
	L_3	R_3	L_1R_2	L_2R_1
E_{03}	$-$	$-$	$+$	$-$
E_{30}	$+$	$+$	$+$	$-$
E_{12}	$-$	$+$	$-$	$-$
E_{21}	$+$	$-$	$-$	$-$

Dependendo de nosso interesse mudamos a maneira de ler a tabela. Verticalmente, a tabela dá a matriz associada ao operador que aparece na primeira linha e horizontalmente, a matriz dá a combinação linear exata de operadores, multiplicado por quatro, correspondente a matriz que tem o número 1 na posição $\mu\nu$ especificada na primeira coluna. Então, olhando verticalmente, podemos dizer

$$\mathbb{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta é uma matriz muito bem conhecida. Vamos escrever a matriz associada ao operador L_1R_1. Olhando verticalmente temos $-1, -1, +1, +1$ para as posições $00, 11, 22, 33$ o que significa

$$L_1R_1 \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou, para L_3R_2 temos

$$L_3R_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e para L_2,

$$L_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mas se lermos a matriz horizontalmente, podemos ver como se escreve o elemento da base correspondente à posição relacionada ao operador quaterniônico. O operador final deve ser dividido por quatro. Por exemplo, para a matriz cujo único elemento não nulo é $a_{00} = 1$, a tabela mostra a linha $+, -, -, -$ então, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1 - L_1R_1 - L_2R_2 - L_3R_3}{4}$$

Outros exemplos são

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{-L_3 + R_3 - L_1R_2 - L_2R_1}{4}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{L_1 - R_1 - L_2R_3 - L_3R_2}{4}$$

Naturalmente, dada qualquer matriz, por exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos fazer as operações nas linhas correspondentes da tabela e encontrar o resultado, que neste caso é dado por

$$\frac{1-L_3R_3}{2}+\frac{3}{4}(L_3-R_3)-\frac{L_1R_2+L_2R_1}{4}+\frac{-L_2+R_2-L_1R_3-L_3R_1}{4}$$

Para fazer uma tradução completa devemos considerar matrizes complexas 4×4 e para isso introduzimos o elemento $i\in\mathbb{C}$. A base do espaço das matrizes complexas 4×4 tem 32 elementos, 16 elementos da parte real e para os 16 restantes, basta multiplicar as matrizes por i e a tradução correspondente em Cl_{30} será dada pela multiplicação por R_η. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\equiv\eta\frac{1-L_1R_1-L_2R_2-L_3R_3}{4}$$

ou,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\equiv\eta\frac{-L_3+R_3-L_1R_2-L_2R_1}{4}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 0\end{pmatrix}\equiv\eta\frac{L_1-R_1-L_2R_3-L_3R_2}{4}$$

Finalmente,

$$\begin{pmatrix} a_{00}+ib_{00} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\equiv\eta\frac{1-L_1R_1-L_2R_2-L_3R_3}{4}+\frac{1-L_1R_1-L_2R_2-L_3R_3}{4}$$

Geometria e_1-complexa

Agora, seguindo os mesmos passos da seção anterior iremos reconstruir os de 32 elementos que determinam a base canônica para as matrizes complexas de ordem 4, porém, usando geometria e_1-complexa, isto é, a função de onda é dada por

$$\varphi=\varphi_0+e_2\,\varphi_1+\eta\,\varphi_2+\eta\,e_2\,\varphi_3\ .$$

Utilizando o critério anterior temos a seguinte tabela:

	$\mathbb{1}$	L_1R_1	$*$	$*L_1R_1$
E_{00}	$+$	$-$	$+$	$-$
E_{11}	$+$	$+$	$+$	$+$
E_{22}	$+$	$-$	$-$	$+$
E_{33}	$+$	$+$	$-$	$-$
	L_2	L_3R_1	$*L_2$	$*L_3R_1$
E_{01}	$-$	$+$	$-$	$+$
E_{10}	$+$	$+$	$+$	$+$
E_{23}	$-$	$+$	$+$	$-$
E_{32}	$+$	$+$	$-$	$-$

	η	ηL_1R_1	$*\eta$	$*\eta L_1R_1$
E_{02}	$-$	$+$	$+$	$+$
E_{20}	$+$	$-$	$+$	$+$
E_{13}	$-$	$-$	$+$	$-$
E_{31}	$+$	$+$	$+$	$-$
	$L_2\eta$	ηL_3R_1	$*L_2\eta$	$*\eta L_3R_1$
E_{03}	$+$	$-$	$+$	$-$
E_{30}	$+$	$+$	$-$	$-$
E_{12}	$-$	$-$	$-$	$-$
E_{21}	$-$	$+$	$+$	$-$

Podemos escrever a matriz real associada ao operador L_1R_1 usando geometria e_1-complexa. Lendo a matriz verticalmente temos

$$L_1R_1 \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou, para $*L_3R_1$ temos

$$*L_3R_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e para $*\eta$,

$$*\eta \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lendo a matriz horizontalmente, lembre que a linha é multiplicada 4, podemos escrever os 32 elementos da base. Alguns exemplos são

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1 - L_1R_1 + * - *L_1R_1}{4}$$

ou,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{-L_2\eta - \eta L_3R_1 - *L_2\eta - *L_3\eta R_1}{4}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{L_2 + L_3R_1 + *L_2 + *L_3R_1}{4} \; .$$

F

Operador momento

Enfatizamos repetidamente a não comutatividade dos quatérnions. Novamente, a não comutatividade encoraja uma discussão importante [5]: a posição da unidade imaginária e_1 no operador momento. Baseado no caso clássico podemos escrever

$$\mathcal{P}_L = -L_1\,\hbar\,\boldsymbol{\partial} \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}_R = -R_1\,\hbar\,\boldsymbol{\partial}$$

onde o operador linear real anti-Hermitiano $\boldsymbol{\partial} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ representa o operador de translação espacial.

Na mecânica quântica clássica, as propriedades mais importantes do operador momento, $\mathcal{P}$, são
1) $\mathcal{P}$ é um operador Hermitiano,
2) $\mathcal{P}$ e $\mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é a Hamiltoniana do sistema, são compatíveis, isto é, $[\mathcal{P}, \mathcal{H}] = 0$

Agora, vamos analisar ambos os casos. Primeiramente consideraremos

$$\mathcal{P}_L = -L_1\,\hbar\,\boldsymbol{\partial}$$

e podemos ver que é um operador Hermitiano porque

$$(\psi, \mathcal{P}_L\varphi) = \int d^3r\;\; \overline{\psi}\,\mathcal{P}_L\varphi = -\hbar \int d^3r\;\; \overline{\psi}\,e_1\,\boldsymbol{\partial}\varphi$$

e

$$(\mathcal{P}_L\psi, \varphi) = \int d^3r\;\; \overline{\mathcal{P}_L\psi}\,\varphi = \int d^3r\;\; (\overline{-e_1\,\hbar\,\boldsymbol{\partial}\,\psi})\,\varphi = -\hbar \int d^3r\;\; \overline{\psi}\,e_1\,\boldsymbol{\partial}\varphi$$

são iguais[1]. Temos também

$$[x_m, -e_1\,\hbar\,\partial_n]\,\psi = e_1\,\hbar\,\delta_{mn}\,\psi\ .$$

Verificando se $\mathcal{P}_L$ e o hamiltoniano quaterniônico, $\mathcal{H}$, comutam encontramos que a posição à esquerda de e_1 não permite a compatibilidade desejada. Deste modo, abandonamos esta definição. Considerando a segunda possibilidade

$$\mathcal{P}_R = -R_1\,\hbar\,\boldsymbol{\partial}\ ,$$

[1]Note que fizemos integração por partes para obter a última expressão $(\mathcal{P}_L\psi, \varphi)$.

é fácil ver que

$$[\,\mathcal{P}_R, \mathcal{H}\,]\,\psi = \hbar\,[\,\mathcal{H}, \boldsymbol{\partial}\,]\,\psi\,e_1 = 0\ .$$

Calculando o comutador entre $\mathcal{P}_R$ e x encontramos

$$[x_m, -R_1\,\hbar\,\partial_n]\,\psi = \hbar\,\delta_{mn}\,\psi\,e_1\ .$$

Porém, analisando a hermiticidade de $\mathcal{P}_R$ vemos que este não é um operador quaterniônico hermitiano. Temos

$$(\psi, \mathcal{P}_R\varphi) = \int d^3r\ \ \overline{\psi}\,\mathcal{P}_R\varphi = -\hbar\int d^3r\ \ \overline{\psi}\,\boldsymbol{\partial}\varphi\,e_1$$

e

$$(\mathcal{P}_R\psi, \varphi) = \int d^3r\ \ \overline{\mathcal{P}_R\psi}\,\varphi = \int d^3r\ \ (\overline{-R_1\,\hbar\,\boldsymbol{\partial}\,\psi})\,\varphi = -\hbar\int d^3r\ \ \overline{\psi}\,\boldsymbol{\partial}\varphi\,e_1$$

ou, reescrevendo,

$$(\psi, \mathcal{P}_R\varphi) - (\mathcal{P}_R\psi, \varphi) = \hbar\,[e_1, (\psi, \partial\varphi)]\ ,$$

que, em geral, é não nulo. Mas, se adotarmos a geometria complexa encontramos

$$(\psi, \mathcal{P}_R\varphi) = (\mathcal{P}_R\psi, \varphi)$$

e então podemos dizer que $\mathcal{P}_R$ é um operador Hermitiano, satisfazendo nossas necessidades.

Bibliografia

[1] Adler S L , Time-dependent perturbation theory for quaternionic quantum mechanics, with applications to CP nonconservation in K-meson decays, *Phys. Rev.* D, **34**, 1871–1877 (1986).

[2] Adler S L , Superweak CP nonconservation arising from an underlying quaternionic quantum dynamics, *Phys. Rev. Lett*, **57**, 167–169 (1986).

[3] Adler S L and Du D , Predictions of quaternionic quantum mechanics for CP nonconservation in the B and D meson systems, *Phys. Rev.* D, **35**, 2252–2254 (1987).

[4] Adler S L , Scattering and decay theory for quaternionic quantum mechanics, and the structure of induced T nonconservation, *Phys. Rev.* D **37**, 3654–3662 (1988).

[5] Adler S L , *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields*, Oxford UP, New York (1995).

[6] Boyer C B and Merzbach U C , *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Singapore (1989).

[7] Brand L , The roots of a quaternion, *Amer. Math. Monthly* **49**, 519–520 (1942).

[8] Brenner J L , Matrices of quaternions, *Pacific J. Math.* **1**,329–335 (1951).

[9] Cayley A , On Algebraical Couples, *Phyl. Magazine* **XXVII**, 38–40 (1845).

[10] Cayley A , On the 8-square imaginaries, *Amer. J. Math.* **IV**, 293–296 (1881).

[11] Cohen N and De Leo S , The quaternionic determinant, *Elec. J. Lin. Alg.* **7**, 100–111 (2000).

[12] Conway A W , Quaternion treatment of the relativistic wave equation, *Proc. Roy. Soc.* A **162**, 145–154 (1937).

[13] Davies A J and McKellar B H , Nonrelativistic quaternionic quantum mechanics, *Phys. Rev.* A **40**, 4209–4214 (1989).

[14] Davies A J and McKellar B H , Observability of quaternionic quantum mechanics, *Phys. Rev.* A **46**, 3671–3675 (1992).

[15] De Leo S and Rotelli P , Quaternion scalar field, *Phys. Rev.* D **45**, 575–579 (1992).

[16] De Leo S and Rotelli P , Translations between Quaternion and Complex Quantum Mechanics, *Prog. Theor. Phys.* **92**, 917–926 (1994).

[17] De Leo S and Rotelli P , Representations of $U(1,\ q)$ and Constructive Quaternion Tensor Product, *N. Cimento* B **110**, 33–51 (1995).

[18] De Leo S and Rotelli P , Quaternion Higgs and the Electroweak Gauge Group, *Int. J. Mod. Phys.* A **10**, 4359–4370 (1995).

[19] De Leo S and Rotelli P , The Quaternionic Dirac Lagrangian, *Mod. Phys. Let.* A **11**, 357–366 (1996).

[20] De Leo S , Quaternions and special relativity, *J. Math. Phys.* **37**, 2955–2968 (1996).

[21] De Leo S , A One Component Dirac Equation, *Int. J. Mod. Phys.* A **11**, 3973–3985 (1996).

[22] De Leo S and Rotelli P , Quaternionic electroweak theory, *J. Phys.* G **22**, 1137–1150 (1996).

[23] De Leo S and Rotelli P , Odd Dimensional Translation Between Complex and Quaternionic Quantum Mechanics, *Prog. Theor. Phys.* **96**, 247–255 (1996).

[24] De Leo S , Quaternionic Electroweak Theory and CKM Matrix, *Int. J. Theor. Phys.* **36**, 1165–1177 (1997).

[25] De Leo S and Ducati G C , Quaternionic Groups in Physics, *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 2197–2220 (1999).

[26] De Leo S and Scolarici G , Right eigenvalue equation in quaternionic quantum mechanics, *Int. J. Phys.* A **33**, 2971–2995 (2000).

[27] De Leo S and Ducati G C , Quaternionic differential operators, *J. Math. Phys.* **42**, 2236–2265 (2001).

[28] De Leo S, Ducati G C , Scolarici G and Solombrino L , *em preparação*

[29] De Leo S and Ducati G C , Right linear quaternionic differential operators, *submetido à publicação*

[30] De Leo S , Ducati G C and Nishi C C , Violations of complex quantum mechanics, *submetido à publicação*

[31] Dray T and Manogue C A , The octonionic eigenvalue problem *Adv. Appl. Cliff. Alg.* **8** 341–364 (1998).

[32] Eilenberg S and Niven I , The fundamental theorem of algebra for quaternions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52**, 246–248 (1944).

[33] Gibbs J W , *Elements of Vector Analysis*, Dover, New York (1881).

[34] Graves J , Transaction of the Irish Academy 21, 338 (1848).

[35] Gürsey F and Tze C H , *On the Role of Division, Jordan and Related Algebras in Particle Physics*, World Scientific, Singapore (1996).

[36] Hamilton W R , *Elements of Quaternions*, Chelsea Publishing Co., New York (1969).

[37] Hamilton W R , *Lectures on Quaternions*, Dublin (1853).

[38] Hamilton W R , *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, Cambridge UP, Cambridge (1967).

[39] Heaviside O , *Eletromagnetis induction and its propagation*, London (1893).

[40] Hestenes D , Real Spinors Fields, *J. Math. Phys.* **8**, 798–808 (1967).

[41] Horwitz L P and Biedenharn L C , Quaternion quantum mechanics: second quantization and gauge field, *Ann. Phys.* **157**, 432–488 (1984).

[42] Jackson J D , *Classical Electrodynamics*, 3rd ed, John Wiley & Sons, Inc, New York (1998).

[43] Kaiser H, George E A and Werner S A , Neutron interferometric search for quaternions in quantum mechanics, *Phys. Rev.* A **29**, 2276–2279 (1984).

[44] Kaneno T , On a possible generalization of quantum mechanics, *Prog. Theor. Phys* **23**, 17–31 (1960).

[45] Klein A G , Schrödinger inviolate: neutron optical searches for violations of quantum mechanics, *Physica B* **151**, 44–49 (1988).

[46] Lee H C , Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternion coefficients, *Proc. Roy. Irish Acad.* Sect. A **52**, 253–260 (1949).

[47] Maxwell J C , *Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford UP, Oxford (1873).

[48] Maxwell, J C , *The Scientific letters and papers of James Clerk Maxwell*, ed. Paul Harman, Cambridge UP, Cambridge (1995).

[49] Niven I , Equations in quaternions, *Amer. Math. Monthly* **48**, 654–661 (1941).

[50] Niven I , The roots of a quaternion, *Amer. Math. Monthly* **49**, 386–388 (1942).

[51] Peres A , Proposed test for complex versus quaternionic quantum theory, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 683–686 (1979).

[52] Penrose R and Reidley W , *Spinor and space-time algebra*, Cambridge UP, New York (1984).

[53] Rembieliński J , Tensor product of the octonionic Hilbert spaces and colour confinement *J. Phys.* A **11** 2323–2331 (1978).

[54] Rotelli P , The Dirac equation on the quaternionic field *Mod. Phys. Lett.* A **4** 993–940 (1989).

[55] Tait P G , *Elementary Treatise of Quaternions*, Cambridge UP, Cambridge (1890).

[56] Waerden B L van der , *A History of Algebra*, Springer-Verlag, Berlin (1985).

[57] Vrbik J , Dirac equation and Clifford algebra, *J. Math. Phys.* **35** 2309–2314 (1994).

[58] Williams W S C , The neutral kaons and CP conservation, in *An introduction to elementary particle*, Academic Press, NY, 1954.

Bibliografia Complementar

[1] Adler S L , Quaternionic Quantum Field Theory, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 783–786 (1985).

[2] Adler S L , Algebraic and geometric aspects of generalized quantum dynamics, *Phys. Rev.* D **49**, 6705–6708 (1994).

[3] Adler S L , Generalized quantum dynamics *Nucl. Phys.* **B415** 195–243 (1994).

[4] Aslaksen H , Quaternionic Determinants, *Math. Intel.* **18**, 57–65 (1996).

[5] Baker A , Right eigenvalues for quaternionic matrices: A topological approach, *Lin. Alg. Appl.* **286**, 303–309 (1999).

[6] Birkhoff G and von Neumann J , The logic of quantum mechanics, *Ann. Math.* **37**, 823–843 (1936).

[7] Brauer R and Weyl H, Spinors in n dimensions, The roots of a *Amer. Math.* **57**, 425–449 (1932).

[8] Brenner J L , Applications of the Dieudonné determinant, *Lin. Alg. Appl.* **1**, 511–536 (1968).

[9] Cartan E , Les groups projectifs qui ne laissent invariant aucune multiplicité plane, Bull. Soc. Math. Fran. **41**, 53–96 (1913).

[10] Cartan E , *Leçons sur la théorie des spineurs*, Paris, Hermann (1938).

[11] Cayley A , On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions, *Phyl. Magazine* **XXVI**, 208–211 (1845).

[12] Cayley A , Recherches ultérieures sur les determinants gauches, *Crelle J. Math.* **50**, 312–313 (1885).

[13] Chen L X , Inverse matrix and properties of double determinant over quaternionc field, *Science in China* **34**, 528–540 (1991).

[14] Clifford W K , Preliminary Sketch of Biquaternions, *Proc. Lon. Math. Soc.* **4**, 381–395 (1873).

[15] Clifford W K , Applications of Grassmann's Extensive Algebra, *Amer. J. Math.* **1**, 350–358 (1878).

[16] Clifford W K , *Collected Mathematical Papers*, Chelsea (1882).

[17] Cohn P M , The similarity reduction of matrices over a skew field, *Math. Z.* **132**, 151–163 (1973).

[18] De Leo S , Duffin-Kemmer-Petiau Equation on the Quaternion Field, *Prog. Theor. Phys.* **94**, 1109–1120 (1995).

[19] De Leo S and Abdel-Khalek K , Octonionic Quantum Mechanics and Complex Geometry, *Prog. Theor. Phys.* **96**, 823–831 (1996).

[20] De Leo S and Abdel-Khalek K , Octonionic Dirac Equation, *Prog. Theor. Phys.* **96**, 833–845 (1996).

[21] De Leo S and Abdel-Khalek K , Octonionic Representations of GL(8,$\mathcal{R}$) and GL(4,$\mathcal{C}$), *J. Math. Phys.* **38**, 582–598 (1997).

[22] De Leo S and Rotelli P , A new definition of hypercomplex analiticity, funct-an/9701004 (1997).

[23] De Leo S and Rotelli P , Local hypercomplex analiticity, funct-an/9703002 (1997).

[24] De Leo S and Rodrigues W A Jr , Quaternionic Quantum Mechanics: From Complex to Complexified Quaternions, *Int. J. Theor. Phys.* **36**, 2725–2757 (1997).

[25] De Leo S and Rodrigues W A Jr , Quaternionic Electron Theory: Dirac's Equation, *Int. J. Theor. Phys.* **37**, 1511–1529 (1998).

[26] De Leo S and Rodrigues W A Jr , Quaternionic Electron Theory: Geometry, Algebra and Dirac's Spinors, *Int. J. Theor. Phys.* **37**, 1707–1720 (1998).

[27] De Leo S and Abdel–Khalek K , Towards an Octonionic World, *Int. J. Theor. Phys.* **37**, 1945–1985 (1998).

[28] De Leo S and Rotelli P , 1998, Neutrino Chiral Oscillations, *Int. J. Theor. Phys.* **37**, 2193–2206.

[29] De Leo S, Rodrigues W A Jr. and Vaz J Jr , Complex Geometry and Dirac Equation, *Int. J. Theor. Phys.* **37**, 2415–2431 (1998).

[30] De Leo S, Oziewicz Z, Rodrigues W A Jr. and Vaz J Jr , Dirac-Hestenes Lagrangian, *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 2349–2369 (1999).

[31] Dieudonné J , Les déterminants sur un corp non-commutatif, *Bull. Soc. Math. France* **71**, 27–45 (1943).

[32] Dirac P A M , The Quantum Theory of the Electron, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A **117**, 610–629 (1928).

[33] Dirac P A M , Applications of quaternions to Lorentz transformation, *Proc. Roy. I. Acad.* A **50**, 261–270 (1945).

[34] Dixon G M , *Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics*, Kluwer Academic Publushers, Boston (1994).

[35] Dray T and Manogue C A , Finding octonionic eigenvectors using mathematica *Comput. Phys. Comm.* **115** 536–547 (1998).

[36] Dray T and Manogue C A , The exponential Jordan eigenvalue problem *Int. J. Theor. Phys.* **38** 2901–2916 (1999).

[37] Evans M, Gürsey F and Ogievetsky V , From two-dimensional conformal to four-dimensional self-dual theories: Quaternionic Analyticity, *Phys. Rev.* D **47**, 3496–3508 (1993).

[38] Finkelstein D, Jauch J M, Schiminovich S and Speiser D , Foundations of Q Quaternion Quantum Mechanics, *J. Math. Phys.* **3**, 207–220 (1962).

[39] Finkelstein D, Jauch J M and Speiser D , Principle of General Q Covariance, *J. Math. Phys.* **4**, 788–796 (1963).

[40] Finkelstein D, Jauch J M and Speiser D , Quaternionic Representations of Compact Groups, *J. Math. Phys.* **4**,136–140 (1963).

[41] Finkelstein D, Jauch J M and Speiser D , *Notes on Quaternion Quantum Mechanics*, in Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics II, Hooker, Reider, Dordrecht, 367–421 (1979).

[42] Fueter R , *Comment. Math. Helv.* **7**, 307 (1935).

[43] Fueter R , *Comment. Math. Helv.* **8**, 371 (1936).

[44] Graves R P , *Life of Sir William Rowan Hamilton*, Hodges, Figgis & Co., Dublin (1882).

[45] Grassmann H G , *Die Lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig (1894).

[46] Hankel H , *Theorie der complexen Zahlensysteme*, Leipzig (1867).

[47] Hestenes D , Spin and Isospin, *J. Math. Phys.* **8**, 809–812 (1967).

[48] Horn R A and Johnson C R , *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge UP, Cambridge (1994).

[49] Johnson N W and Weiss A I , Quaternionic modular groups, *Lin. Alg. Appl.* **295**, 159–189 (1999).

[50] Lanczoz C , Die tensoranalytischen Beziehungen der Diracschen Gleichung, *Z. Phys* **57**, 447–473 (1929).

[51] Lipschitz R , *Untersuchungen uber die Summen von Quadraten*, Bonn (1884).

[52] Maxwell J C , *Proc. Lond. Math. Soc.* **13**, 531 (1864).

[53] Peres A , Quaternionic quantum interferometry, quant-ph/9605024.

[54] Rastall, P , Quaternions in relativity, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 820–832 (1964).

[55] Scolarici G and Solombrino L , Notes on Quaternionic Groups Representation, *Int. J. Theor. Phys.* **34**, 2491–2500 (1995).

[56] Scolarici G and Solombrino L , Quaternionic representation of magnetic groups, *J. Math. Phys.* **38**, 1147–1160 (1997).

[57] Study E , *Mathematical Papers from the Chicago Congress 1894*, New York, 376 (1896).

[58] Study E , Zur Theorie der linearen Gleichungen, *Acta Math.* **42**, 1–61 (1920).

[59] Wiegmann N A , Some theorems on matrices with real quaternion elements, *Canad. J. Math.* **7**, 191–201 (1955).

[60] Wolf L A , Similarity of matrices in which the elements are real quaternions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **42**, 737–743 (1936).

[61] Zhang F , Quaternions and matrices of quaternions, *Lin. Alg. Appl.* **251**, 21–57 (1997).

[62] Zumino B , Normal forms of complex matrices, *J. Math. Phys.* **3**, 1055–1057 (1962).

Índice