Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Contribuições em Controle Ótimo Distribuido via Formalismo de Dubovitskii e Milyutin. Aspectos Teóricos, Numérico e Aplicados

Autor: Rogério de Aguiar

Orientador: Marko Antonio Rojas Medar

Contribuições em Controle Ótimo Distribuido via Formalismo de Dubovitskii e Milyutin. Aspectos Teóricos, Numéricos e Aplicados

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Rogério de Aguiar e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas,11 de Março de 2002.

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar
Orientador

Banca Examinadora
1.Marko Antonio Roja Medar
2.José Luiz Boldrini
3.Antonio Carlos Moretti
4.Gustavo Perla Menzala
5.Adilson José Vieira Brandão

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Aguiar, Rogério de

Ag93c Contribuições em controle ótimo distribuído via formalismo de Dubovitskii e Milyutin. Aspectos teóricos, aplicados e numéricos. / Rogério de Aguiar -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Marko Antonio Rojas Medar

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Fluídos. 3. Navier-Stokes, Equações de. 4. Esterilização. I. Rojas Medar, Marko Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 11 de março de 2002 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR

Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Antonio Moretti

Prof (a). Dr (a). ANTONIO CARLOS MORETTI

Gustavo Perla Menzala

Prof (a). Dr (a). GUSTAVO ALBERTO PERLA MENZALA

Prof (a). Dr (a). ADILSON JOSÉ VIEIRA BRANDÃO

Dedico este trabalho a minha esposa,
Rosana Aguiar, companheira nos momentos
difíceis e minha maior incentivadora

Agradecimentos

Meu síncero reconhecimento

Ao Professor

Doutor Marko Antonio Rojas Medar, pela orientação dedicada e competente deste trabalho

Aos Professores Doutores

Petrônio Pulino (IMECC), Pilar Rodriguez de Massaguer (FEA), Mario Duran Toro (DIM-UCHILLE), pelos valiosos momentos de discussão e esclarecimento durante a eleboração da parte numérica deste trabalho.

A CAPES

Pela concessão da bolsa.

Ao IMECC-UNICAMP

E em especial a Sra Cidinha pelo amparo e suporte.

A UDESC

E em especial ao Departamento de Matemática da UDESC-JOINVILLE pela concessão do meu afastamento.

À minha Mãe

Pelo apoio e incentivo e ao meu pai (in memorian)

Aos amigos

Elin Guilhon, João Paulo e Dirceu pela amizade, apoio e incentivo.

A todos

Que colaboraram comigo durante a eleboração deste trabalho.

A Deus

Pela oportunidade de participar da escola da vida.

Resumo

Neste trabalho apresentamos algumas aplicações do formalismo de Dubovitskii e Milyutin a problemas de controle distribuido. Apresentamos um problema de controle relacionado ao processo de esterilização de comida enlatada e fornecemos uma demonstração rigorosa do programa de controle adotado para este processo. Uma simulação numérica deste processo é feita utilizando-se parâmetros reais obtendo-se o perfil da temperatura de controle e visualizando-se a evoluçao da temperatura no interior da lata e o decaimento das concentrações de microorganismos e nutrientes. Aproveitamos um problema de controle já estudado em fluxo bioconvectivo clássico e com o uso do formalismo de Dubovitskii e Milyutin obtemos as mesmas condições necessárias de otimalidade de uma maneira mais eficiente e mais rápida mostrando a praticidade do Formalismo. Um problema de controle em fluxo biocovectivo generalizado é apresentado e são obtidas as condições necessárias para este problema mostrando-se que as condições obtidas para este problema generalizam as condições necessárias obtidas no caso de fluxo bioconvectivo clássico.

Abstract

In this work we present some applications of Dubovitskii and Milyutin's formalism to distributed control problems. We analyse a control problem related to the process of esterilization in canned food and give a rigorous proof of the control program performed using real parameters and the control temperature profile is obtained. We obtain the evolution of the temperature in the can and the concentration decreasing of microorganisms and nutrients. We use a control problem in bioconvective flow already studied to make an application of the Dubovitskii and Milyutin formalism to obtain the same necessary conditions of optimality in more quick and efficient way showing that the theory is useful. A control problem in generalized bioconvective flow is presented and we get the necessary conditions for this problem showing that the conditions we obtain for this problem generalize the necessary conditions obtained in the bioconvective flow case

Sumário

Introdução xii
1. Preliminares 1
2. O Formalismo de Dubovitskii e Milyutin 3
Introdução 3
A equação de Euler Lagrange 4
Cálculo dos cones 6
Cálculo dos cones duais 10
Condições suficientes 11
3. Esterilização de Comida Enlatada 12
Introdução 12
Preliminares 13
Modelo matemático 15
Espaços funcionais 21
Operadores 21
Problema de controle 23
Análise do funcional 24
Análise das restrições de igualdade 26
Análise das restrições de controle 32
Equação de Euler-Lagrange 32
Equações Adjuntas 33
Simulação numérica 41
Introdução 41
Coordenadas Cilíndricas e Adimensionalizações 42
Problema de controle 47
Parâmetros reais 49
Parâmetros adimensionais 49
Soluções numéricas 50
A equação para a temperatura de controle 51
Discretização pelo método de diferenças finitas centradas 52
Discretização 1 - Problema estacionário para a temperatura 54
Discretização 2 - Evolução no tempo para a Temperatura 56
Discretização 3 - Evolução no tempo para as Concentrações 56
Resultados 59
4. Fluxo Bioconvectivo Clássico 67
Introdução 67
Resultados de Existência e Unicidade 68
Um Problema de Controle 73
Aplicação do Formalismo de Dubovitskii-Milyutin 83
Análise do funcional 85
Análise das restrições de controle 85

Análise das restrições de igualdade 86
Equações de Euler Lagrange 87
Equações adjuntas 87
Condições Necessárias de optimalidade 88
5. Fluxo Bioconvectivo Generalizado 94
Introdução 94
Preliminares 95
Resultados 98
Equações de Fluxo Bioconvectivo Generalizado 100
Problema Estacionário 101
Solução Fraca 101
Um problema de controle 110
Aplicação do Formalismo de Dubovitskii-Milyutin 117
Análise do funcional 119
Análise das restrições de controle 120
Análise das restrições de igualdade 120
Equações de Euler Lagrange 122
Equações Adjuntas 123
Condições necessárias de optimalidade 124
Conclusão 130
6. Conclusões 131
Bibliografia 132

Lista de Símbolos

Notações Gerais

$(\cdot,\cdot)$ produto interno em $L^2(\Omega)$.

$\|\cdot\|_2$ norma no espaço $L^2(\Omega)$.

$\nabla c = (\frac{\partial c}{\partial x_1}, \frac{\partial c}{\partial x_2}, \frac{\partial c}{\partial x_3})$ gradiente de c.

$\nabla \mathbf{u}$ matriz gradiente.

$D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t)$ tensor taxa de deformação.

$\Delta c = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2}$ laplaciano de c.

$(A : B)$ produto interno das matrizes A e B.

$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}}$ derivada normal exterior.

Espaços Funcionais

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto (um domínio).

$\partial\Omega$ fronteira de Ω.

S, Γ partes disjuntas da fronteira de Ω.

$L^\infty(\Omega) = \{u \text{ mensurável em } \Omega \text{ e existe } C \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ q.t.p em } \Omega\}$.

$C^k(\Omega)$ funções k continuamente diferenciáveis em Ω $(k \geq 0)$.

$C^k(\overline{\Omega})$ funções de classe $C^k(\Omega)$ tais que para cada multi-índice α , com $|\alpha| \leq k$ a aplicação $x \in \Omega \to D^\alpha u(x)$ se estende continuidade a $\overline{\Omega}$.

$C^\infty(\overline{\Omega}) = \cap_{k\geq 0} C^k(\overline{\Omega})$.

$L^P(\Omega) = \left\{u \text{ mensurável em } \Omega \text{ e } \int_\Omega |u|^p\, dx < \infty, 1 \leq p < \infty\right\}$.

$\mathbf{L}^P(\Omega) = (L^P(\Omega))^3$.

$W^{m,p}(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$ espaços de Sobolev.

$V = \{\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^3 \,|div\, \mathbf{v} = 0\}$.

$H_{0,S}^1 = \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \left|\mathbf{u}_{|S} = 0,\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0\right.\right\}$.

$\widetilde{L^2}$ espaço das funções de $L^2(\Omega)$ que tem média zero.

$\widetilde{H^1}$ espaço das funções de $H^1(\Omega)$ que tem média zero.

$L^q(0,T,B)$ espaço das funcões com valores em B definidas em $(0,T)$ que são integráveis no sentido de Bochner.

$\overset{\bullet}{J}(\Omega) = \left\{\mathbf{u} \in \left(C^\infty(\overline{\Omega})\right)^3 \left|\mathbf{u}_{|S} = 0,\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0,\ div\, \mathbf{u} = 0\right.\right\}$.

$J_0(\Omega)$ o fecho de $\overset{\bullet}{J}(\Omega)$ na norma $\|\mathbf{u}\|_{H_{0,S}^1} = \|\nabla \mathbf{u}\|_2$.

$X = L^\infty(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

$H = (L^2(\Omega))^4$.

$X^* = (L^\infty(\Omega))^* \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

$W(T) = \left\{x \in L^2(0,b;X) \left|\overset{\bullet}{x} \in L^2(0,b;X^*)\right.\right\}$.

$K \subset [0,+\infty)$ é um intervalo fechado, não degenerado e não vazio.

$X_0 = V \times \widetilde{H^1}$.

$Y_0 = V \times \mathbb{R}$.

$M_0 = V \times K$.

$Z = J_0 \times \widetilde{H^1}(\Omega)$.

$Y = \widetilde{H^1}(\Omega) \times J_0 \times \mathbb{R}$.

$M = \widetilde{H^1}(\Omega) \times J_0 \times K$.

Notações do Capítulo 3

T = temperatura, ^0K.

T_I = temperatura inicial,^0K.

T_R = temperatura da autoclave, ^0K.

t = tempo, min

L = altura do cilindro (lata) em cm.

R_l = raio do cilindro em cm.

T_f = tempo final do processo, min.

c_m = concentração de microoganismos, $esporos/ml$ or UFC/gr onde UFC significa (unidades formadoras de colônia).

c_{Im} = concentração inicial de microorganismos.

c_n = concentração de nutrientes.

c_{In} = concentração inicial de nutrientes.

C_1 = concentração média final de microorganismos desejável dentro da lata, $10^{-5} \leq C_1 \leq 10^{-10}$.

K_i = fator pre-exponencial , para i=m,n $1/min$.

E_i =energia de ativação para destruição de espécies i, $i = m, n$, $Kj/mole$, $(J/mole = 0,239.cal/mole)$.

R = contante da lei do gás, $1,987\ cal/^0K.mole$.

α = difusividade térmica, cm^2/min.

Observe que estamos usando o sistema de unidades MKS-^0K .

Notações dos Capítulos 4 e 5

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado, com froteira $\partial\Omega$, representando a região de escoamento do fluido.

$\mathbf{u}(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)) \in \mathbb{R}^3$ denota a velocidade do fluido em um ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ e instante $t \in [0, T]$, onde $0 < T \leq +\infty$.

$p(x,t)$ é a pressão hidrostática no ponto x e instante t.

$c(x,t)$ representa a concentração de microorganismos no ponto $x \in \Omega$ e instante t.

$\upsilon(.) > 0$ é a viscosidade fluido.

θ é a constante que indica a taxa de difusão dos microorganismos.

g é a intensidade da aceleração da gravidade (suposta constante).

$\mathbf{f}$ representa uma força externa dada.

$\mathbf{i}_3 = (0,0,1)$ é o vetor unitário na direção vertical.

U denota a velocidade média de natação dos microorganismos, na direção vertical.

γ é uma constante positiva, dada por $\gamma = \frac{\rho_0}{\rho_m} - 1$, onde ρ_0 e ρ_m são a densidade de um organismo e a densidade da cultura em fluido, respéctivamente.

Introdução

Devido ao avanço tecnológico ve-se nos dias atuais um interesse cada vez maior em problemas de controle e a necessidade de se resolver problemas cada vez mais complicados. Descobriu-se que apesar da grande diversidade desses problemas eles podem ser atacados por uma visão analítico funcional inicialmente sugerida (criada) por A. Ya. Dubovitskii e A. A. Milyutin. Este enfoque abstrato de tratar os problemas de otimização foi divulgado na excelente monografia de Igor Vladimirovich Girsanov [1]. É interessante observar que na monografia mencionada existem aplicações a dois problemas clássicos de otimização, a saber: condições necessárias de otimalidade nos problemas de dimensão finita (regra de Karush-Kunht-Tucker) e problemas de controle ótimo onde a dinâmica vem dada por equações diferenciais ordinárias (Princípio de otimalidade de Pontryagin). Desta forma, se mostra claramente um fato importante: os dois princípios de otimalidade de condições necessárias podem ser deduzidos do mesmo princípio abstrato. Naquela monografia nada foi dito quanto a possibilidade de se usar este forma-lismo em problemas de controle nos quais a evolução do sistema são dadas por equações diferenciais parciais. O primeiro trabalho que temos conhecimento onde é aplicado a teoria de Dubovitskii e Milyutin à probelmas de controle distribuido foi o artigo de Papageorgiu e Papageorgiu ([30]) surgido no ano de 1990. Neste trabalho é usado o formalismo para obter condições necessárias e suficientes para um problema de controle abstrato onde o sistema envolve parâmetros distribuidos não lineares e também apresentam um exemplo envolvendo o operador diferencial parcial de segunda ordem.

Nos últimos anos algumas extensões do formalismo de Dubovitskii e Milyutin vem aparecendo na literatura científica, veja por exemplo, teoria de Dubovitskii e Milyutin de segunda ordem [3]. Em [2] podemos encontrar uma outra versão do Teorema de Dubovitskii e Milyutin onde as restrições de igualdade são consideradas separadamente e considera-se cada restrição de igualdade gerando um conjunto ao invés de se considerar um único conjunto englobando todas as restrições de igualdade. Apesar das duas versões serem equivalentes na prática a diferença é notada no momento em que se calculam os cones e cones duais associados as restrições de igualdade. Dependendo dos operadores envolvidos os cálculos são facilitados em uma determinada versão e é por esse motivo que usaremos essa nova versão em nosso trabalho no capítulo 3. Nos trabalhos de Avakov [7], [8], são abordadas questões relativas aos chamados problemas anormais, onde o multiplicador associado ao funcional objetivo é zero. Quando o multiplicador associado ao funcional objetivo é zero, a regra dos multiplicadores não tem sentido já que o funcional objetivo não está presente. Neste caso, necessitamos de outras ferramentas que nos permitam resolver o problema. Citamos também vários outros trabalhos interessantes que envolvem o formalismo de Dubovitskii e Milyutin: [4], [5], [6]. Estes trabalhos ainda não têm sido aplicados ao controle distribuido mas acreditamos que eles poderiam clarificar os chamados problemas de controle singular.

Um estudo detalhado da monografia de Girsanov foi feito em [11] e de alguns trabalhos de Avakov em [10]. Queremos salientar também, que outros trabalhos de aplicações do formalismo de Dubovitskii e Milyutin são [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18]. |Os trabalhos [15], [16] e [17] referem-se a aplicação do formalismo de Dubovitskii e Milyutin ao processo de esterilização de comida enlatada e o trabalho [17] envolve questões numéricas referentes a esse processo de esterilização. Todos os detalhes destes trabalhos citados são encontrados no capítulo 3 do trabalho que ora expomos.

Nosso intuito neste trabalho é apresentar aplicações do formalismo de Dubovitskii e Milyutin a três problemas que envolvem parâmetros distribuidos. No Capítulo 1 apresentamos os espaços de Sobolev, além disso introduzimos o espaço de média zero $\widetilde{L^2}$, $\widetilde{H^1}$ e algumas notações que serão usadas ao longo de todo o nosso trabalho. Este primeiro capítulo tem um caráter mais geral e é bem sucinto, pois, devido a grande diferença entre os trabalhos que serão apresentados no capítulo 3 e nos capítulos 4 e 5 iremos apresentar em cada capítulo as preliminares que se fizerem necessárias para que o leitor identifique o que será abordado. No Capítulo 2 é fornecida uma breve descrição do formalismo de Dubovitskii e Milyutin onde definimos cone, cone dual, direções de decrescimento, direções factíveis e direções tangentes, sendo estes conceitos fundamentais para a compreensão do formalismo. Apresentamos o teorema de Dubovitskii e Milyutin e uma versão do Teorema de Dubovitskii e Milyutin devido a Urszula Ledzewicz-Kowalewska. Fornecemos também alguns resultados sobre o cálculo de cones e cones duais sem as demonstrações correspondentes; sendo que o leitor desejoso de maiores detalhes sobre este capítulo deve consultar a monografia de I. V. Girsanov ([1]). No Capítulo 3, aplicamos o Formalismo a um problema de controle envolvendo o processo de esterilização de comida enlatada cujo objetivo é maximizar a retenção de nutrientes para obter uma determinada concentração de microorganismos no final do processo, e no mesmo capítulo apresentamos uma simulação numérica envolvendo este processo. Aproveitamos o modelo fornecido em [20] para aplicar o formalismo mencionado e fornecer uma demonstração rigorosa do programa de controle do tipo Bang-Bang, o mesmo tipo de controle por eles obtido através da minimização do Hamiltoniano associado ao problema de minimização. No trabalho de Manoj e Nadkarni ([20]) observa-se que uma maior ênfase foi dada a simulação numérica do processo de esterilização sendo que a parte matemática formal é muito insipiente e além disso, eles fazem hipóteses adicionais sobre o Hamiltoniano que não são necessárias quando se faz uso do formalismo de Dubovitskii e Milyutin. Sem nenhuma hipótese adicional mostramos com todo o rigor matemático que o programa de controle é do tipo Bang-Bang concordando com o programa de controle obtido por Manoj e Nadkarni. Usamos também no capítulo as idéias contidas em [30] sendo que todas as demonstrações nele contidas são de nossa autoria, pois, no caso específico do problema de esterilização de comida enlatada os operadores obtidos não satisfazem as hipóteses contidas em [30]. Sem a pretensão de sermos originais apresentamos uma simulação numérica do processo de esterilização obtendo a temperatura controle para a esterilização de carne de porco enlatada. Para esta parte assumimos que o controle é tipo Bang-Bang com um único tempo comutador, pois este tipo de controle é mais realista e nos fornece uma boa idéia do comportamento da temperatura e do decrescimento dos nutrientres e microorganismos no interior da lata. Em [20] foram feitas várias simulações numéricas mas naquele trabalho eles não especificam que método usaram para obter seus resultados, e agora, com programas mais modernos e computadores mais rápidos, lançamos uma nova luz sobre este problema que continua sendo atual. No Capítulo 4 aplicamos o formalismo a um problema de controle em fluxo bioconvectivo clássico cujo objetivo é encontrar os valores médios da concentração que irão nos fornecer um determinado campo de concentração dado. Neste caso nosso objetivo é mostrar como o formalismo de Dubovitskii e Milyutin é uma ferramenta eficaz e bastante prática para a resolução do problema. Usamos as idéias contidas no trabalho de A. Căpătină, R. Stavre, ([23]), onde eles provam a existência de um controle ótimo e obtém as condições necessárias de otimalidade para o problema de controle através de um outro método. Aproveitamos os resultados obtidos e aprofundamos os detalhes das demonstrações efetuadas para um melhor entendimento do trabalho. Nossa contribuição neste capítulo foi o uso de uma nova ferramenta para a resolução do mesmo problema. Nossa ferramenta mostrou-se mais prática e igualmente eficaz na resolução daqule problema, obtendo-se as mesmas condições necessárias que eles obtiveram.

No Capítulo 5, estudamos um problema de controle, similar ao problema de controle em fluxo bioconvectivo clássico, envolvendo as equações de fluxo bioconvectivo generalizado (a viscosidade depende da concentração de microorganismos) que foram estudadas em [26] onde mostrou-se a existência de soluções fortes e fracas nos casos estacionário e de evolução. Neste sentido apresentamos as equações de fluxo bioconvectivo generalizado, o problema de controle e mostramos que as condições necessárias aqui obtidas generalizam as condições necessárias obtidas no Capítulo 4. Com excessão do teorema 5.1, todas as demais demonstrações efetuadas neste capítulo são inéditas e de nossa autoria, mostando que a contribuição foi significativa. Em relação a isto observa-se que a não linearidade causada pela viscosidade não constante impôs um maior trabalho em relação aos cálculos dos cones tangentes. Neste sentido nossa ferramenta mostrou-se bastante útil e essa dificuldade pode ser superada de uma maneira bastante rápida e eficiente. Queremos deixar neste momento nossos agradecimentos ao Prof. Jaime Ortega da Universidade de Bio-Bio (Concepcion, Chile) pelas valiosas sugestões neste capítulo. Finalmente colocaremos alguns problemas em aberto que nos parecem interessantes de serem estudados no futuro entre os quais podemos citar o problema de controle no caso de evolução que será objeto de nosso próximo trabalho.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Vamos supor que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado de classe C^3.

Denotaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de funções Lebesgue p integráveis com as normas usuais

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty \\ \|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup_{x \in \Omega} ess \, |f(x)| \end{aligned}$$

para $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável com o produto interno $(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$

Para o caso de funções vetoriais denotaremos $\mathbf{L}^P(\Omega) = (L^p(\Omega))^3$.

No caso $p = 2$, $\mathbf{L}^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável com o produto interno

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{u}(x)\mathbf{v}(x)dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i(x)v_i(x)dx.$$

Por simplicidade usaremos a notação $\|\cdot\|_2$ para $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ ou $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$.

Para $m \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$ consideraremos os espaços de Sobolev:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \, | D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \, |\alpha| \leq m\},$$

com a norma

$$\|u\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right]^{1/p}$$

O fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{m,p}$ é denotado por $W_0^{m,p}(\Omega)$ e para o caso $p = 2$ utilizaremos a notação padrão $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$. Usaremos a notação padrão $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ e também denotamos por $H^{-m}(\Omega)$ o dual de $H_0^m(\Omega)$. Também definimos neste caso $\mathbf{H}^m(\Omega) = (H^m(\Omega))^3$.

Denotaremos por $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ o espaço de traços sobre $\partial\Omega$, correspondente a $W^{1,p}(\Omega)$. Tal espaço será equipado com a norma

$$\|\gamma\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} = \inf \left\{ \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \, \middle| v \in W^{1,p}(\Omega), v = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega \right\}.$$

No caso $p = 2$, denotaremos $H^{1/2}(\partial\Omega) = W^{1/2,2}(\partial\Omega)$(Adams[29])

$\widetilde{L^2}$ denotará o subespaço fechado de $L^2(\Omega)$ formado pelas funções ortogonais as constantes, isto é,

$$\widetilde{L^2} = \left\{ r \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega r dx = 0 \right\}$$

e $\widetilde{H^1}(\Omega)$ denotará o espaço de Hilbert

$$\widetilde{H^1}(\Omega) = \widetilde{L^2} \cap H^1 = \left\{ r \in H^1(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega r dx = 0 \right\}$$

munido do produto escalar $a(c, r) = (c, r)_{\widetilde{H^1}} = \int_\Omega \nabla c \cdot \nabla r dx$ e respectiva norma associada

$$\|c\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} = \left((c, r)_{\widetilde{H^1}}\right)^{1/2} = \left(\int_\Omega |\nabla c|^2 \, dx\right)^{1/2} = \|\nabla c\|_2 \, .$$

Temos a seguinte estimativa

$$\|c\|_2 \leq \widetilde{C} \, \|c\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} \, , \quad \forall c \in \widetilde{H^1}(\Omega).$$

Quando nada for mencionado a notação "$\rightarrow$" indicará convergência forte e "$\rightharpoonup$" indicará convergência fraca.

LEMA 1.1. (Lax-Milgram) Seja H um espaço de Hilbert, $a(u, v)$ uma forma bilinear contínua e coerciva sobre $H \times H$. Então para todo $\varphi \in H^*$ existe um único $u \in H$ tal que $a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle_{H^* \times H}$, $\forall v \in H$.

Além dos fatos acima mencionados utilizaremos constantemente as imersões de Sobolev (ver [29]).

CAPÍTULO 2

O FORMALISMO DE DUBOVITSKII E MILYUTIN

2.1 Introdução

No últimos anos um avanço vertiginoso tem acontecido em duas grandes áreas da matemática: optimização e teoria de controle envolvendo derivadas parciais. Em um primeiro momento estas duas áreas tem percorrido caminhos um pouco diferentes e os métodos e técnicas desenvolvidas por cada uma delas têm conseguido responder muitas perguntas teóricas e resolver muitos problemas reais mas a intersecção entre elas ainda está um pouco tênue.

Queremos ressaltar neste momento, como as técnicas de programação matemática em dimensão infinita enriquecem a teoria de controle envolvendo derivadas parciais e clarificam algumas condições colocadas nestes problemas.

Daremos agora uma breve introdução ao formalismo de Dubovitskii e Milyutin, que são técnicas de programação matemática em dimensão infinita onde através do uso de cones e cones duais obtém-se a regra dos multiplicadores de Lagrange em uma versão funcional. Devido a seu carater eminentemente abstrato esta teoria pode ser aplicada a uma ampla gama de problemas de extremos, que nada mais são que os problemas de minimização e maximização de um funcional sujeito ou não a restrições. Os problemas de extremos foram objeto de pesquisa matemática desde os primeiros estágios de desenvolvimento da matemática. Os primeiros resultados foram então sistematizados e conseguidos através do cálculo de variações, com suas inúmeras aplicações em física e mecânica. Uma atenção especial foi devotada principalmente a análise de funções suaves e funcionais definidos sobre o espaço inteiro ou alguma variedade suave. Independente do cálculo de variações a teoria de aproximação foi desenvolvida e os métodos pertinentes a esta teoria tem um caráter próprio.

O progresso tecnológico apresentou o cálculo de variações com um novo tipo de problema: o controle de objetos cujos parâmetros de controle são variáveis em algum conjunto fechado com fronteira. Problemas de vários tipos envolvendo este tipo de condição foram investigados por Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze e Mishchenko, que estabeleram as condições necessárias para um extremo - o assim chamado Princípio do Máximo de Pontryagin.

Abordaremos aquí a teoria desenvolvida por Dubovitsskii e Milyutin para a determinação de condições necessárias de extremos para o problema

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f_0(x) \\ & \\ & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \text{sujeito a} & F(x) = 0, \\ & x \in C. \end{array}\right\} \quad (PM)$$

Nesse sentido, damos algumas definições preliminares, seguidas de alguns resultados sobre os cones de direções de descida de f, direções factíveis e de direções tangentes. Logo depois, apresentamos o Teorema de Dubovitskii e Milyutin, que nada mais é do que a regra dos multiplicadores de Lagrange em uma versão funcional, e também apresentamos uma outra versão do teorema de Dubovitskii e Milyutin de autoria de Urszula Ledzewicz-Kowalewska. Para que possamos utlizá-los na prática, seguimos com o desenvolvimento dos cálculos dos cones e de seus duais. Os detalhes a respeito de assunto podem ser encontrados na monografia de I. V. Girsanov ([1]).

2.2 A equação de Euler-Lagrange

Nesta seção, $F(x)$ será um funcional definido sobre uma vizinhança $\mathcal{V}$ de $x_0 \in E$, sendo E um espaço de Banach. Consideraremos também dois tipos de conjuntos que restringirão a variável x, a saber, Q_i, $i = 1, ...n$, que serão conjuntos de interior não vazio, e Q_{n+1}, que será um conjunto sem pontos interiores.

Em geral, Q_i, $i = 1, ...n$, serão determinados por restrições de desigualdade, e Q_{n+1} por restrições de igualdade. Considerando $Q = \bigcap_{i=1}^{n+1} Q_i$, nosso problema será encontrar $x_0 \in Q$ tal que

$$F(x_0) = \min_{x \in Q \cap \mathcal{V}} F(x).$$

Seguiremos agora com um conjunto de definições que são a base do formalismo de Dubovitskii e Milyutin.

Definição 2.1. Seja E um espaço normado e f um funcional definido sobre E

(1) *Um vetor h é dito uma **direção de descida** do funcional $f(x)$ no ponto x_0, se existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de h, um número estritamente negativo $\alpha = \alpha(F, x_0, h)$ e um número $\varepsilon_0 > 0$ tais que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e qualquer $\overline{h} \in \mathcal{V}$ verifica-se a desigualdade*

$$f(x_0 + \varepsilon\overline{h}) \leq f(x_0) + \varepsilon\alpha.$$

(2) *Dizemos que o funcional f é **regularmente de descida** se suas direções de descidas no ponto x_0 formam um conjunto convexo.*

(3) *Sendo Q dado por restrições de desigualdade, dizemos que o vetor h é uma* ***direção factível*** *para Q no ponto x_0, se existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ do vetor h e um número $\varepsilon_0 > 0$ tais que, para quaisquer $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $\overline{h} \in \mathcal{V}$, se verifica $x_0 + \varepsilon\overline{h} \in Q$*

(4) *Uma restrição de desigualdade Q é dita* ***regular*** *no ponto x_0 se o conjunto das direções factíveis para Q em x_0 é convexo.*

(5) *Dizemos que o vetor h é uma* ***direção tangente*** *a Q no ponto x_0 se existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ existe um ponto $x(\varepsilon) \in Q$ de modo que se colocarmos $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon)$ então o vetor $r(\varepsilon) \in E$ é tal que, para qualquer vizinhança $\mathcal{V}$ de zero, $\frac{1}{\epsilon} r(\varepsilon) \in \mathcal{V}$ para qualquer $\varepsilon > 0$ suficentemente pequeno, ou equivalentemente*

$$||r(\varepsilon)|| = o(\varepsilon).$$

(6) *Uma restrição de igualdade Q é* ***regular*** *no ponto x_0 se o conjunto das direções tangentes a Q em x_0 é convexo.*

NOTA 2.1 **:** A definição 2.1, 1), é de caráter geral e é válida para qualquer funcional, mas na teoria de Dubovitskii e Myliutin ela será aplicada mais constantemente ao funcional objetivo. Se Q for dado por restrições de igualdade a definição 2.1, 3), acima não tem sentido, por isto, precisamos da definição 2.1,5).

*NOTA 2.2***.** N definição 2.1, 5), definimos vetor direção tangente e quando o conjunto dos vetores tangentes é um subespaço ele é chamado **espaço tangente.**

Definição 2.2. Um conjunto $\mathcal{K}$ é dito um cone se $\lambda x \in \mathcal{K}$ para qualquer $\lambda > 0$ e $x \in \mathcal{K}$.

*PROPOSIÇÃO 2.1***.** *Temos*

(i) *As direções de descida geram um cone aberto com vértice em* 0.

(ii) *As direções factíveis geram um cone aberto com vértice em* 0.

(iii) *As direções tangentes geram um cone com vértice em* 0.

*Definição 2.3***.** Seja $\mathcal{K}$ um cone em E, seu cone dual $\mathcal{K}^*$ é o seguinte conjunto dado por

$$\mathcal{K}^* = \{f \in E^* \,|\, f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathcal{K}\}.$$

*NOTA 2.3***.** O uso da notação $\mathcal{K}^*$ para o cone dual não parece próprio, pois se $\mathcal{K} = E$, então $\mathcal{K}^* = \{0\} \neq E^*$. Contudo, isto é usual na literatura, não devendo, portanto, causar confusão.

Agora o resultado principal.

TEOREMA 2.1(**Dubovitskii e Milyutin**). *Suponha que o funcional $F(x)$ assume um mínimo local sobre $Q = \bigcap_{i=1}^{n+1} Q_i$ no ponto $x_0 \in Q$. Suponha ainda que $F(x)$ é regularmente de descida em x_0, com direções de descida $\mathcal{K}_0$, as restrições de desigualdade Q_i, $i = 1, ..., n$, são regulares em x_0, com direções factíveis $\mathcal{K}_i$, a restrição de igualdade Q_{n+1} é também regular em x_0, com direções tangentes $\mathcal{K}_{n+1}$. Então, existem funcionais lineares contínuos f_i, $i = 0, 1, ..., n+1$, não simultaneamente nulos, tais que, $f_i \in \mathcal{K}_i^*$, $i = 0, 1, ..., n+1$, os quais satisfazem* a **equação de Euler-Lagrange**

$$f_0 + f_1 + ... + f_n + f_{n+1} = 0.$$

O Teorema seguinte é uma nova versão do Teorema 2.1 e foi mostrado por Ledzewicz-Kowalewska [2].

TEOREMA 2.2. Suponhamos que:

(1) O funcional $F(x)$ atinge seu mínimo local no ponto $x_0 \in M = \bigcap_{i=1}^{n+m} M_i$.

(2) $F(x)$ é um funcional regularmente de descida no ponto x_0 com cone de direções de descida C_0.

(3) As restrições de desigualdade M_i para $i = 1, 2, ..., n$ são regulares no ponto x_0 com cone de direções factíveis C_i, $i = 1, 2, ..., n$.

(4) As restrições de igualdade são da forma $M_i = \{x \in X \,|P_i(x) = 0\}$ onde $P_i : X \to Y_i$ são operadores estritamente diferenciáveis em alguma vizinhança do ponto $x_0 \in M$, mas não todos os operadores P_i são regulares neste ponto; o operador $P : X \to \prod_{i=n+1}^{n+m} Y_i$ dado pela fórmula $P(x) = (P_{n+1}(x), ..., P_{n+m}(x))$ satisfaz a condição que $\mathrm{Im}(P'(x_0))$ é um subespaço fechado de $\prod_{i=n+1}^{n+m} Y_i$.

Então existem formas lineares contínuas $f_i \in C_i^*$ para $i = 0, 1, 2, ..., n$ e $\lambda_i \in Y_i^*$, $i = n+1, ..., n+m$, não nulas simultaneamente e tais que

$$f_0 + f_1 + ... + f_n + f_{n+1} + ... + f_{n+m} = 0$$

onde $f_{i=}(P_i')^*(x_0)\lambda_i$ para $i = n+1, ..., n+m$.

NOTA 2.4. Do Teorema acima vemos que, para obtermos uma caracterização analítica das condições de otimalidade, devemos conseguir calcular os cones associados às diferentes restrições do problema dado e, posteriormente, devemos saber calcular os cones duais associados. No Teorema 1 a dificuldade reside em se calcular o cone dual do cone de direções tangentes (usando o Teorema de Lyusternik [1]). No Teorema 2 a dificuldade está em se provar que $\mathrm{Im}(P'(x_0))$ é um subespaço fechado.

2.2.1 Cálculo dos Cones

Apresentamos nesta seção alguns resultados e definições que são necessários aos cálculos de cones e cones duais. Todos os resultados desta seção, bem como suas demonstrações são encontrados na referência ([1]).

O teorema 2.3 abaixo nos fornecerá uma maneira prática de calcular o cone de direções de decrescimento de um funcional $F(x)$. Antes de enunciar o teorema convém introduzir a seguinte definição:

Definição 2.4. Um funcional $F(x)$ em um espaço normado se diz que tem uma **derivada** *$F'(x_0, h)$ no ponto x_0 e na direção h se*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{F(x_0 + \epsilon h) - F(x_0)}{\epsilon} = F'(x_0, h)$$

Observe que esta aplicação pode não ser linear. A aplicação $h \to F'(x_0, h)$ é chamada **derivada direcional** *de F no ponto x_0.*

(1) **Cálculo do cone de direções de descida :**

TEOREMA 2.3. Seja E um espaço de Banach. Suponha que $F(x)$ é Lipschitziana numa vizinhança do ponto $x_0 \in E$, e que F possui derivada direcional em x_0, em qualquer direção h. Se $F'(x_0, h)$ é convexa como função de h, então $F(x)$ é regularmente de descida em x_0, e seu cone de direções de descida, $\mathcal{K}$, vem dado por

$$\mathcal{K} = \{h \;/\; F'(x_0, h) < 0\}.$$

COROLÁRIO 2.1 Seja E um espaço de Banach, então:

(i) *Se $F(x)$ é um funcional convexo contínuo, então $F(x)$ é regularmente de descida em qualquer ponto e*

$$\mathcal{K} = \{h \;/\; F'(x_0, h) < 0\}.$$

(ii) *Se $F(x)$ é Fréchet-diferenciável, então F é regularmente de descida em x_0 e*

$$\mathcal{K} = \{h \;/\; < F'(x_0), h >< 0\}.$$

(2) **Cálculo do cone de direções factíveis :**

Denotaremos por $\mathcal{K}_b$ o cone de direções factíveis de um conjunto Q no ponto x_0. Observamos que se $x_0 \in \text{ int } Q$, então $\mathcal{K}_b = E$, assim os "pontos interessantes" são os pontos da fronteira de Q. Vamos supor que Q tem pontos interiores, pois, caso contrário $\mathcal{K}_b = \phi$.

Vamos nos dedicar ao caso específico onde Q é definido por um funcional $F(x)$, isto é,

$$Q = \{x \;/\; F(x) \leq F(x_0)\}.$$

Se $F(x)$ é contínuo não faz sentido estudar o caso mais geral

$$Q = \{x \;/\; F(x) \leq \lambda\},\ \lambda \neq F(x_0)\}.$$

pois se $F(x_0) < \lambda$ então $x_0 \in \text{ int } Q$ e se $F(x_0) > \lambda$ então $x_0 \notin Q$, ou seja, x_0 não é um ponto factível.

Vamos denotar por $\mathcal{K}_y$ o cone direções de descida do funcional $F(x)$, que determina o conjunto Q acima, no ponto x_0.

NOTA 2.5. A definição de cone de direções de descida vale para qualquer funcional e em particular podemos calcular o cone de direções de descida do funcional que define o conjunto Q acima.

Sempre vale $\mathcal{K}_y \subset \mathcal{K}_b$ pois se $h \in \mathcal{K}_y$ existem uma vizinhança $\mathcal{V}$ de h, $\epsilon_0 > 0$ e $\alpha < 0$ tais que $F(x_0 + \epsilon\overline{h}) \leq F(x_0) + \epsilon\alpha$ para todo $\overline{h} \in \mathcal{V}$, mas $\alpha < 0$ implica que $F(x_0 + \epsilon\overline{h}) \leq F(x_0)$ o que nos diz que $x_0 + \epsilon\overline{h} \in Q$ pela definição de Q. Portanto da definição de direção factível vem que h é uma direção factível de Q no ponto x_0, ou seja, $h \in \mathcal{K}_b$.

A questão que se coloca é : quando $\mathcal{K}_b \subset \mathcal{K}_y$?. Para isto temos o teorema:

TEOREMA 2.4. Suponha que $F(x)$ é diferenciável em x_0 em qualquer direção, $F'(x_0, h)$ convexo em h. Se existe $\widetilde{h}$ tal que $F'(x_0, \widetilde{h}) < 0$, então

$$\mathcal{K}_b \subset \{h \;/\; F'(x_0, h) < 0\}.$$

NOTA 2.6. Observe que a condição $F'(x_0, \widetilde{h}) < 0$ para algum $\widetilde{h}$ é equivalente a dizer que $\mathcal{K}_y \neq \phi$.

COROLÁRIO 2.2. Suponha que qualquer das seguintes condições se satisfaz :

(i) *E é um espaço de Banach, $F(x)$ satisfaz uma condição de Lipschitz numa vizinhança do ponto x_0 e é diferenciável no ponto x_0 em qualquer direção, $F'(x_0, h)$ é convexa em h, e existe $\widetilde{h}$ tal que $F'(x_0, \widetilde{h}) < 0$;*

(ii) *$F(x)$ é um funcional convexo contínuo e existe $\widetilde{x}$ tal que $F(\widetilde{x}) < F(x)$;*

(iii) *E é um espaço de Banach, $F(x)$ é Fréchet-diferenciável em x_0, $F'(x_0) \neq 0$.*

Então

$$\mathcal{K}_b = \mathcal{K}_y = \{h \;/\; F'(x_0, h) < 0\}.$$

PROPOSIÇÃO 2.2. Se Q é um conjunto convexo, seu cone de direções factíveis vem dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_b &= \{\lambda(\text{ int } Q - x_0) \;/\; \lambda > 0\} \\ \mathcal{K}_b &= \{h \;/\; h = \lambda(x - x_0), x \in \text{ int } Q, \lambda > 0\}. \end{aligned}$$

(3) **Cálculo do cone de direções tangentes**

Definição 2.5. Sejam X, Y espaços de Banach. $P : X \to Y$ é chamada **estritamente diferenciável** *em x_0 se existe um operador $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que,* *para todo* $\epsilon > 0$, *existe um* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x_1, x_2 \in X$ *com* $\|x_1 - x_0\| < \delta$ e $\|x_1 - x_0\| < \delta$ *tem-se,*

$$\|Px_1 - Px_2 - \Lambda(x_1 - x_2)\| \leq \epsilon \|x_1 - x_2\|$$

NOTA 2.7. As seguintes conclusões são satisfeitas :

(i) *Se* P *é estritamente diferenciável em* x_0, *então* P *é Fréchet-diferenciável em* x_0 *e* $\Lambda = P'(x_0)$.

(ii) *Se* P *é estritamente diferenciável em* x_0, *então existe uma vizinhança de* x_0 *onde* P *é contínua, de fato, é Lipschitz contínua.*

(iii) P *pode ser Fréchet-diferenciável em* x_0 *e não ser estritamente diferenciável em* x_0. *Considere, por exemplo,* $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* .;

$$P(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \in \mathbb{Q}, \\ \\ 0 \text{ se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

P *é Fréchet-diferenciável em* $x_0 = 0$, *com* $P'(0) = 0$. *Mas ela não é estritamente diferenciável, pois* P *só é contínua em* $x_0 = 0$.

(iv) *Se* P *é de classe* C^1, *então ela é estritamente diferenciável.*

TEOREMA 2.5. (Lyusternik) Sejam X, Z *espaços de Banach,* $\mathcal{V}$ *uma vizinhança do ponto* $x_0 \in X$, $P : \mathcal{V} \to Z$ *tal que* $P(x_0) = 0$. *Se* P *é estritamente diferenciável no ponto* x_0 *e* $P'(x_0)X = Z$ *(*P' *é um epimorfismo), então o conjunto*

$$M = \{x \;/\; P(x) = 0\}$$

possui no ponto x_0 *um espaço tangente*

$$T_{x_0}(M) = \ker P'(x_0) = \{h \;/\; P'(x_0)h = 0\}.$$

NOTA 2.8. Do Teorema de Lyusternik se deduz que o cone de direções tangentes K ao conjunto $M = \{x \;/\; P(x) = 0\}$ no ponto x_0 é o subespaço $K = \{h \;/\; P'(x_0)h = 0\}$.

NOTA 2.9. Observamos que o Teorema de Lyusternik é uma ferramenta poderosa para se obter o cone de direções tangentes, o qual é feito basicamente, pelo cálculo da derivada estrita do funcional associado. Porém, não é possível utilizá-lo no caso em que o operador associado não é estritamente diferenciável, ou quando a sua derivada não é sobrejetora. Na prática, a dificuldade se concentra na condição de sobrejetividade do operador derivada. Na terminologia de otimização, esta é uma condição de regularidade.

2.2.2 Cálculo dos cones duais

TEOREMA 2.6. Suponha que o cone $\mathcal{K}$ é um subespaço do espaço normado E. Então

$$\mathcal{K}^* = \{f \in E^* \ / \ f(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathcal{K}\}.$$

NOTA 2.10. Deste Teorema deduzimos que se o cone de direções tangentes é dado por $K = \{h \ / \ P'(x_0)h = 0\}$ onde P satisfaz as hipóteses do Teorema de Lyusternik então $K^* = \{f \in E^* \ / \ f(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathcal{K}\} = K^0$ (o anulador de K).

TEOREMA 2.7. Sejam $f \in E^*$, e $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$ definidos por

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1 &= \{x \ / \ f(x) = 0\}, \\
\mathcal{K}_2 &= \{x \ / \ f(x) \geq 0\}, \\
\mathcal{K}_3 &= \{x \ / \ f(x) > 0\}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1^* &= \{\lambda f \ / \ -\infty < \lambda < +\infty\}, \\
\mathcal{K}_2^* &= \{\lambda f \ / \ 0 \leq \lambda < \infty\},
\end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_3^* = \begin{cases} E^* \text{ se } f = 0, \\ \\ \mathcal{K}_2^* \text{ se } f \neq 0. \end{cases}$$

Definição 2.6. Um funcional suporte para um conjunto $A \subset E$ em $x_0 \in A$ é uma forma linear contínua $f \in E^*$, não nula, tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in A$.

Sejam $Q \subset E, x_0 \in Q, \mathcal{K}_b$ o cone de direções fatíveis para Q em $x_0, \mathcal{K}_T$ o cone das direções tangentes a Q em x_0 e Q^* o cone dos funcionais lineares suportes para Q em x_0, isto é,

$$Q^* = \{f \in E^* \ / \ f(x) \geq f(x_0) \text{ para todo } x \in Q\}.$$

TEOREMA 2.8. Se Q é um convexo fechado, então

$$\mathcal{K}_T^* = Q^*.$$

Se além disso, int $Q \neq \phi$, então

$$\mathcal{K}_b^* = Q^*.$$

2.2.3 Condições suficientes

TEOREMA 2.9. Seja $F(x)$ uma função convexa contínua, $Q_1, ..., Q_{n+1}$ conjuntos convexos, e suponha que exista um ponto $\widetilde{x}$ tal que $\widetilde{x} \in \operatorname{int} Q_i$, $i = 1, ...n, \widetilde{x} \in Q_{n+1}$. Seja $x_0 \in Q = \bigcap_{i=1}^{n+1} Q_i$; seja $\mathcal{K}_0$ o cone de descida de $F(x)$ em x_0, $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, ..., \mathcal{K}_n$ os cones de direções factíveis para $Q_1, ..., Q_n$, $\mathcal{K}_{n+1}$ o cone tangente para Q_{n+1}. Então x_0 é um ponto de mínimo para $F(x)$ sobre Q se e somente se existem $f_i \in \mathcal{K}_i^*$, $i = 0, 1, ..., n+1$ não todos nulos, tal que

$$f_0 + f_1 + ... + f_{n+1} = 0.$$

CAPÍTULO 3

ESTERILIZAÇÃO DE COMIDA ENLATADA

3.1 Introdução

O método mais básico para a preservação de comida enlatada é o uso de calor para destruir bactérias que são frequentemente capazes de destruir o produto alimentício enlatado pois bactérias prejudiciais são prontamente destruidas pela ação do calor. Como exemplo prático deste fato a temperatura de pasteurização para o leite é em torno de 143 ^oF por 30 minutos, ou 161 ^oF por 15 segundos.

Para todos os propósitos práticos, pode-se considerar que quando a comida é herméticamente fechada em uma lata também estarão presentes microorganismos que não sendo posteriormente destruidos se aproveitarão das condições ambientais para danificarem o alimento. A destruição pelo calor de organismos naturalmente presentes no recipiente selado é a operação fundamental de preservação de alimentos enlatados. A operação é conhecida como processamento para esterilização comercial. A combinação de tempo e temperatura na qual o produto é aquecido é conhecido como processo. O processo é determinado a partir do estudo da taxa de penetração do calor para o produto e do estudo da resistência térmica de esporos significantes. Um processo teórico é então calculado e testado através da inoculação de um esporo conhecido no produto.

O objetivo do processo de esterilização é produzir uma condição de "esterilidade comercial" em comidas enlatadas. "Esterilidade comercial" de comidas significa que as condições alcançadas pela aplicação de calor fornecem um alimento livre de microogasnismos prejudiciais e não prejudiciais à saúde pública, capaz de se reproduzirem no alimento sob condições normais de não refrigeração, armazenagem e distribuição. O processo recomendável de esterilização não são desenhados para matar todos os microorganismos no alimento enlatado. Em outras palavras, alimentos enlatados são "comercialmente estéreis", mas não "bacteriologicamente estéreis".

Na esterilização de comida enlatada o principal interesse da indústria de enlatados está em prevenir o crescimento do *Clostridium botulinum,* a bactéria danosa à comida capaz de produzir a toxima de maior letalidade. *Clostridium botulinum* é altamente resistente ao calor. Um processo de esterilização que assegura a destruição do *Cl. botulinum* também mata todos os outros microorganismos capazes de produzir destruição de comida enlatada sob condições normais de manejo e armazenamento. O mesmo também acontece com o Bacillus Stearothermophilus que também é altamente resistente ao calor.

Atualmente o perfil de temperatura utilizado pelas indústrias de enlatados ainda continua sendo o perfil de temperatura constante. Neste processo eleva-se a temperatura rapidamente até um certo nível de temperatura que é mantida constante durante um certo tempo e depois de decorrido este tempo de processo o enlatado é resfriado rapidamente de modo a que sejam preservadas as características de sabor, aparência, odor e também nutricional do alimento. Esse pérfil de temperatura amplamente testado e consagrado pelas indústrias tem como desvantagem uma destruição de nutrientes um pouco maior que a necessária. Outra desvantagem é que não se tira vantagem de calor latente ao final do processo pois quando ocorre o resfriamento o centro da lata ainda continua sendo aquecido.

Nosso propósito neste capítulo é obter o programa de controle ótimo para a maximização da retenção de nutrientes para uma dada redução na concentração de microorganismos dentro da lata durante o processo de esterilização. Resolveremos este problema utilizando o formalismo de Dubovitskii e Milyutin aproveitando o modelo de Nadkarni e Hatton ([20]) onde é utilizado o modelo Arremius para a taxa de destruição de microorganismos e nutrientes e a temperatura é variável obedecendo a equação de condução do calor em meios sólidos. Naquele trabalho eles resolvem o probelma de minimização através da minimização do Hamiltoniano associado ao problema obtendo o programa de controle do tipo Bang-Bang. Observa-se naquele trabalho que uma maior enfase é dada a parte numérica onde são determinados os programas de controles nos casos unidimensional e tridimensional. Nossa contribuição aqui é no sentido de se resolver o mesmo problema com a utilização do formalismo de Dubovitskii e Milyutin mostrando que essa ferramenta é bastante prática para a resolução deste problema. Usamos de todo rigor matemático para resolver o problema, apresentando os espaços adequados e fornecendo todas as demonstrações necessáriasa dentro do formalismo Dubovitskii e Milyutin. Após a parte teórica fazemos um experimento numérico de modo a obter numericamente o tempo de comutação que nos fornecerá a temperatura controle. Nesta parte apresentamos as discretizações em diferenças finitas centradas utilizando geometria cilíndrica e a simetria radial do problema bem como fornecemos todos os parâmetros reais que utilizamos. Verificamos que os resultados obtidos são bem realistas e de interesse prático.

3.2 Preliminares

Quando B é um espaço de Banach $L^q(0,T;B)$ e $1 \leq q < +\infty$ denotará o espaço das funções definidas em $(0,T)$ com valores em B, que são L^q- integráveis no sentido de Bochner com as normas usuais

$$\|u\|_{L^q(0,T;B)} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_B^q \, dt\right]^{1/q}, 1 \leq q < \infty.$$

Se $q = +\infty$, $L^\infty(0,T;B)$ denotará o espaço das funções definidas em $(0,T)$

com valores em B tais que para cada $t \in (0,T)$ a função $u(t) \in B$ é essencialmente limitada com a norma

$$\|u\|_{L\infty(0,T;B)} = \sup_{t\in(0,T)} ess\, \|u(t)\|_B .$$

Quando B é reflexivo tem-se o dual topológico,

$$(L^q(0,T;B))' = L^p(0,T,B')$$

onde B' é o dual topológico de B e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Se B é um espaço de Hilbert então $L^q(0,T;B)$ é reflexivo para $1<q<+\infty$

LEMA 3.1. (Gronwall) Seja $f(t)$ uma função absolutamente contínua, não negativa em $[0,T]$, que satisfaz, para quase todo t, a seguinte desigualdade diferencial

$$f'(t) \leq \phi(t)f(t) + \psi(t)$$

onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções integráveis, não negativas em $[0,T]$. Então,

$$f(t) \leq \exp\int_0^t \phi(s)ds)[f(0) + \int_0^t \psi(s)ds]$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Em qualquer ponto dentro da lata a taxa de destruição dos nutrientes e dos microorganismos são dadas por equações da forma

$$\frac{dC_i}{dt} = -K_iC_i\exp(\frac{-E_i}{RT}) \tag{3.1}$$

Aqui, E_i é a energia de ativação para a reação de degradação para espécies i, T é a temperatura dentro da lata, K_i é um fator pré-exponencial para a velocidade de reação constante para as espécies i, R é a constante da lei do gás. Valores para E_i e K_i foram listados por Lund (1975, [19]) e Thompson (1982, [21]) para um número de diferentes microorganismos e nutrientes. A energia de ativação (E_i) para os nutrientes são geralmente mais altas do que para microorganismos e é por esta razão que a esterilização térmica de alimentos enlatados é possível. Existem outras equações que podem ser usadas para descrever a taxa de destruição dos nutrientes e dos microorganismos mas independente da equação usada é necessário saber as variações de temperatura com o tempo em todos os pontos dentro da lata se a concentração de microorganismnos e nutrientes no fim do processo deve ser determinada. Esta informação pode ser obtida considerando a condução de calor dentro da lata que é governada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \alpha \triangle T & (3.2)\\
T &= T_I(y) \qquad \text{em} \qquad t = 0 & (3.3)\\
T &= T_R(t) \qquad\qquad \forall y \in S = \partial\Omega & (3.4)\\
\mathbf{n}.\bigtriangledown T &= 0, \qquad \forall y \in P,\ \text{plano de simetria de } \Omega & (3.5)
\end{aligned}$$

onde (3.2) é a equação do calor , (3.3) é a condição inicial, (3.4) a condição de fronteira e (3.5) é uma condição de simetria. Como notação usual adotaremos Ω como sendo o domínio em $\mathbb{R}^n$ onde $n = 1, 2, 3$ (no caso $n = 3$, Ω é a lata), $S = \partial\Omega$ (a fronteira de Ω), P é o plano de simetria de Ω (plano de simetria da lata), $\mathbf{n}$ é o vetor unitário externo e α condutividade térmica. Note que na equação (3.4) supõe-se que resistências de transferência de calor externo são desprezíveis, o que não pode ser realista durante a fase de resfriamento onde resistências de tranferência finita são frequentemente encontradas. Desprezar esta resistência não afeta, contudo, a análise geral e conclusões apresentadas neste artigo, e de fato, tais efeitos são prontamente acomodados no modelo se necessário.

3.3 Modelo Matemático

A temperatura de resposta $T_R(t)$, que é a variável a ser controlada afeta o comportamento do sistema somente através da condição de fronteira (eq.(3.4)). Aqui, contudo, é mais conveniente transferir o controle da fronteira para o domínio do sistema pela introdução de uma nova variável,

$$\Upsilon(y,t) \quad = \quad T(y,t) - T_R(t)$$

com isso temos

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial t} = \frac{\partial T}{dt} - \frac{\partial T_R(t)}{\partial t} = \alpha \triangle T - \frac{dT_R}{dt} = \alpha \triangle \Upsilon - \frac{dT_R}{dt}$$

com a condição de fronteira,

$$\Upsilon(y,t) = T(y,t) - T_R(t) = T_R(t) - T_R(t) = 0 \qquad\qquad \forall y \in S$$

com a condição no plano de simetria,

$$0 = n. \bigtriangledown T = n. \bigtriangledown (\Upsilon + T_R(t)) = n.(\bigtriangledown\Upsilon + \bigtriangledown T_R(t)) = n. \bigtriangledown \Upsilon \qquad \forall y \in P$$

com a condição inicial

$$\Upsilon(y) = \Upsilon(0,y) = T(0,y) - T_R(0) = T_I(y) - T_R(0).$$

Resumindo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Upsilon}{\partial t} &= \alpha \triangle \Upsilon - \frac{dT_R}{dt} \\
\Upsilon(y,t) &= 0 \qquad \forall y \in S \\
n. \bigtriangledown \Upsilon &= 0 \qquad \forall y \in P \\
\Upsilon(y) &= T_I(y) - T_R(0) \qquad , t = 0.
\end{aligned}$$

Note que a variável de controle aparece como um termo com dependência uniforme do tempo no domínio e é a taxa de variação da temperatura de resposta ao invés da própria temperatura de resposta. Portanto as equações dinâmicas do sistemas tomam a forma:

$$\frac{dC_N}{dt} = -K_N C_N \exp\left(\frac{-E_N}{R(\Upsilon - T_R)}\right) \tag{3.6}$$

$$\frac{dC_M}{dt} = -K_M C_M \exp\left(\frac{-E_M}{R(\Upsilon - T_R)}\right) \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Upsilon}{\partial t} &= \alpha \triangle \Upsilon - \frac{dT_R}{dt} \\
\Upsilon(y,t) &= 0 \qquad \forall y \in S \\
n. \bigtriangledown \Upsilon &= 0 \qquad \forall y \in P \\
\Upsilon(y) &= T_I(y) - T_R(0) \qquad , t = 0
\end{aligned}$$

Nas equações (3.6) e (3.7), $C_N = C_N\ (y,t)$ denota a concentração de nutrientes e $C_M = C_M\ (y,t)$ denota a concentração de microorgasnismos dentro da lata, ou seja, para $y \in \Omega$.

É conveniente colocar estas equações diferenciais em uma forma adimensional usando variáveis escaladas e parâmetros. Faremos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned}
&\tau = \tfrac{\alpha t}{L^2} \quad , \quad \eta = \tfrac{y}{L} \\
&x_1 = \tfrac{T_R - T_I}{T_I} \quad , \quad x_2 = \tfrac{\Upsilon}{T_I} \quad , \quad x_3 = \tfrac{C_N}{C_{No}} \quad , \quad x_4 = \tfrac{C_M}{C_{Mo}} \\
&u = \tfrac{dx_1}{d\tau} \\
&a_1 = \tfrac{K_N L^2}{\alpha} \quad , \quad a_2 = \tfrac{K_M}{\alpha} \quad , \quad \beta = \tfrac{E_M}{E_N} \quad , \quad E = \tfrac{E_N}{RT_I},
\end{aligned}$$

com $C_{N_0} = C_N\ (y,0)$ e $C_{M_0} = C_M\ (y,0)$.

Vamos agora obter a equação do calor nas novas variáveis : Na equação

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial t} = \alpha \triangle \Upsilon - \frac{dT_R}{dt}$$

fazendo $\tau = \frac{\alpha t}{L^2}$ e $\eta = \frac{y}{L}$ temos,

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial \tau} = \frac{\partial \Upsilon}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \tau} = \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\frac{L^2}{\alpha}$$

$$\frac{dT_R}{d\tau} = \frac{dT_R}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{dT_R}{dt}\frac{L^2}{\alpha}$$

$$\triangle_\eta \Upsilon(\eta,\tau) = L^2 \triangle_y \Upsilon(y,t)$$

logo a equação fica do seguinte modo nas novas variáveis independentes,

$$\frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial \Upsilon}{\partial \tau} = \alpha\frac{1}{L^2} \triangle \Upsilon - \frac{\alpha}{L^2}\frac{dT_R}{d\tau}$$

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial \tau} = \triangle \Upsilon - \frac{dT_R}{d\tau}.$$

Uma nova mudança de variáveis

$$x_1 = \frac{T_R(\tau) - T_I}{T_I}$$

$$x_2 = \frac{\Upsilon(\eta,\tau)}{T_I}$$

onde T_I é constante temos,

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{1}{T_I}\frac{dT_R}{d\tau}$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = \frac{1}{T_I}\frac{d\Upsilon_R}{d\tau} = \frac{1}{T_I}\left(\triangle \Upsilon - \frac{dT_R}{d\tau}\right) = \frac{1}{T_I}\triangle \Upsilon - \frac{1}{T_I}\frac{dT_R}{d\tau} = \triangle x_2 - \frac{dx_1}{d\tau}.$$

Portanto ficamos assim,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= u \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \triangle x_2 - u \end{aligned}$$

com as condições iniciais ($\tau = \frac{\alpha t}{L^2} \Longrightarrow \tau = 0$ se $t = 0$):

$$x_1(\eta, 0) = \frac{T_R(0) - T_I(\eta)}{T_I(\eta)} = x_{10}$$

$$\frac{\Upsilon(\eta, 0)}{T_I} = \frac{T_I(\eta) - T_R(0)}{T_I} = -\frac{T_R(0) - T_I(\eta)}{T_I(\eta)}$$

$$x_2(\eta, 0) = -x_{10}.$$

Portanto temos as equacões modificadas para a equação do calor

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{d\tau} &= u \\
\frac{dx_2}{d\tau} &= \triangle x_2 - u \\
x_1(\eta, 0) &= x_{10} \\
x_2(\eta, 0) &= -x_{10} \\
x_2(\eta, \tau) &= 0, \quad \forall \eta \in S \\
n.\nabla x_2 &= 0, \quad \forall \eta \in P.
\end{aligned}$$

Devemos modificar também as equações das concentrações através da mudança de variável $x_3 = C_N / C_{No}$ e $x_4 = C_M / C_{Mo}$ onde $C_N(y, 0) = C_{No}$ e $C_M(y, 0) = C_{Mo}$ são as concentrações iniciais de nutrientes e microorganismos, respectivamente. Com isso temos,

$$\begin{aligned}
\frac{dx_3}{d\tau} &= \frac{1}{C_{No}} \frac{dC_N}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{C_{No}} \frac{dC_N}{dt} \frac{L^2}{\alpha} = \frac{1}{C_{No}} \frac{L^2}{\alpha} (-K_N) C_N \exp(\frac{-E_N}{R(\Upsilon - T_R)}) \\
&= -\frac{K_N L^2}{\alpha} x_3 \exp(\frac{-E_N}{R(\Upsilon - T_R)}) \\
&= -a_1 x_3 \exp(\frac{-E_N}{R(\Upsilon - T_R)}).
\end{aligned}$$

Analogamente, vemos que,

$$\frac{dx_4}{d\tau} = -a_2 x_3 \exp(\frac{-E_M}{RT})$$

onde $a_1 = \frac{K_N L^2}{\alpha}$ e $a_2 = \frac{K_M L^2}{\alpha}$. Como $x_1 + x_2 + 1 = \frac{T + T_R}{T_I}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dx_3}{d\tau} &= -a_1 x_3 \exp(\frac{-E_N}{RT_I(x_1 + x_2 + 1)}) \\
\frac{dx_4}{d\tau} &= -a_2 x_4 \exp(\frac{-E_M}{RT_I(x_1 + x_2 + 1)})
\end{aligned}$$

fazendo $\beta = \frac{E_M}{E_N}$ e $E = \frac{E_N}{RT_I}$ temos finalmente as equações

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{d\tau} &= -a_1 x_3 \exp(\frac{-E}{(x_1 + x_2 + 1)}) \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= -a_2 x_4 \exp(\frac{-\beta E}{(x_1 + x_2 + 1)}) \end{aligned}$$

com as condições iniciais

$$x_3(\eta, 0) = 1 \quad , \quad x_4(\eta, 0) = 1.$$

Resumindo, as equações dinâmicas do sistemas são

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= u \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} &= \triangle x_2 - u \\ \frac{\partial x_3}{\partial \tau} &= -a_1 x_3 \exp(\frac{-E}{(x_1 + x_2 + 1)}) \\ \frac{\partial x_4}{\partial \tau} &= -a_2 x_4 \exp(\frac{-\beta E}{(x_1 + x_2 + 1)}) \end{aligned}$$

com condições iniciais em $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} \\ x_2 &= -x_{10} \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

e condições de fronteira,

$$\begin{aligned} x_2(\eta, \tau) &= 0, \quad \forall \eta \in S \\ n.\nabla x_2 &= 0, \quad \forall \eta \in P. \end{aligned}$$

O sistema é autônomo, isto é, não depende explicitamente de τ e pode ser representado sucintamente da forma $\frac{\partial x}{\partial \tau} = f(x(\eta, \tau), u(\tau))$, onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Maximizar a retenção de nutrientes sobre toda a lata durante a esterilização para uma dada concentração de microorganismos pode ser estabelecida matematicamente requerendo que a função objetivo,

$$J = \int_0^{\tau_f} \int_\Omega (-\dot{x}_3) d\eta d\tau = \int_0^{\tau_f} \int_\Omega a_1 x_3 \exp(\frac{-E}{(x_1 + x_2 + 1)}) d\eta d\tau$$

seja minimizada através de uma conveniente escolha do controle $u(\tau)$ sujeito a restrição

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega x_4(\eta, \tau_F) d\eta = C_1$$

sobre a média final da concentração de microorganismos dentro da lata, onde os valores típicos de C_1 estão no intervalo 10^{-5} a 10^{-10}. Na prática o controle u deve permanecer entre certos limites.

Vamos agora descrever o procedimento que adotaremos no enfoque do problema acima colocado. Para a resolução do problema de minimização usaremos o formalismo de Dubovitskii-Myliutin ([1]), para obtermos o princípio do máximo de Pontryagin para o nosso problema em particular. Nesta seção colocaremos os espaços funcionais, os operadores e faremos a formulação variacional da equação dinâmica do sistema antes de aplicarmos o formalismo mencionado. As soluções dos sistemas serão consideradas no sentido fraco. Mudaremos um pouco a notação para facilitar a leitura. Daqui por diante usaremos o seguinte: $b = \tau_F$ e voltamos agora para a notação anterior fazendo $t = \tau$ e $z = \eta$. Assim $x = x(z,t) = (x_1(t), x_2(z,t), x_3(z,t), x_4(z,t))$ e $u = u(t)$ e o nosso problema fica do seguinte modo:

$$Minimizar \qquad J(x) = \int_0^b \int_\Omega a_1 x_3(z,t) \exp(\tfrac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}) dz dt$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= u \\
\frac{\partial x_2}{\partial t} &= \triangle x_2 - u \\
\frac{\partial x_3}{\partial t} &= -a_1 x_3 \exp(\frac{-E}{(x_1 + x_2 + 1)}) \\
\frac{\partial x_4}{\partial t} &= -a_2 x_4 \exp(\frac{-\beta E}{(x_1 + x_2 + 1)})
\end{aligned}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{10} \\
x_2 &= -x_{10} \\
x_3 &= 1 \\
x_4 &= 1
\end{aligned}$$

com condições de fronteira

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, \quad \forall z \in S \\ n.\nabla x_2 &= 0, \quad \forall z \in P \end{aligned}$$

e as restrições

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega x_4(z,b)dz = C_1$$

$$u(t) \in I = [u_{\min}, u_{\max}]$$

3.3.1 Espaços funcionais

Vamos considerar os seguintes espaços:
$L^2(0,b) = \left\{ u : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; \int_0^b |u(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$
$X = L^\infty(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$
$H = (L^2(\Omega))^4$
$X^* = (L^\infty(\Omega))^* \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$
$W(T) = \left\{ x \in L^2(0,b;X) \;\middle|\; \dot{x} \in L^2(0,b;X^*) \right\}$ com a norma:

$$\begin{aligned} \|x\|_{W(T)} &= \left(\|x\|^2_{L^2(0,b;X)} + \left\|\dot{x}\right\|^2_{L^2(0,b;X^*)} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^b \left\|x(t)\right\|^2_X dx + \int_0^b \left\|\dot{x}(t)\right\|^2_{X^*} dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Nota 3.1. Se $x \in W(t)$ então $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$ onde $x_1(t) \in L^\infty(\Omega)$, $x_2(t) \in H_0^1(\Omega)$, $x_3(t) \in L^2(\Omega)$ e $x_4(t) \in L^2(\Omega)$. Assim $x_i(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ com $x_i(t)(z) = x_i(z,t)$, $i = 1,2,3,4$ e $x_2(z,t) = 0 \; \forall\, z \in S$. Analogamente $\dot{x}_1(t) \in L^\infty(\Omega)$, $\dot{x}_2(t) \in H^{-1}(\Omega)$, $\dot{x}_3(t) \in L^2(\Omega)$ e $\dot{x}_4(t) \in L^2(\Omega)$

3.3.2 Operadores

Funcional objetivo:

$$\begin{aligned} J \;:\; & W(T) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow J(x) \end{aligned}$$

$$J(x) = \int_0^b \int_\Omega a_1 x_3(z,t) \exp\left(\frac{-E}{x_1(z,t) + x_2(z,t) + 1}\right) dz dt.$$

Equações dinâmicas do sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}(z,t) &= u(t) \\
\frac{\partial x_2}{\partial t}(z,t) - \triangle x_2(z,t) &= -u(t) \\
\frac{\partial x_3}{\partial t}(z,t) + a_1 x_3(z,t)\exp(\frac{-E}{(x_1(z,t)+x_2(z,t)+1)}) &= 0 \\
\frac{\partial x_4}{\partial t}(z,t) + a_2 x_4 \exp(\frac{-\beta E}{(x_1(z,t)+x_2(z,t)+1)}) &= 0.
\end{aligned}$$

Podemos escrever este sistema na forma $\overset{\bullet}{x}(t) + A(x(t)) = B(u(t))$ em X^* , ou seja

$$\overset{\bullet}{x}(t)y + A(x(t))y = B(u(t))y \quad \forall y \in X$$

Como $\overset{\bullet}{x}(t) \in X^* = L^\infty(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ temos $\overset{\bullet}{x}(t) = (\overset{\bullet}{x}_1(t), \overset{\bullet}{x}_2(t), \overset{\bullet}{x}_3(t), \overset{\bullet}{x}_4(t))$ e como $y \in X = L^\infty(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ temos $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ então $\overset{\bullet}{x}(t)y = \langle \overset{\bullet}{x}_1(t), y_1 \rangle_{(L^\infty(\Omega))^* \times L^\infty(\Omega)} + \langle \overset{\bullet}{x}_2(t), y_2 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + (\overset{\bullet}{x}_2(t), y_3)_{L^2(\Omega)} + (\overset{\bullet}{x}_4(t), y_4)_{L^2(\Omega)}$.

Considere o operador A,

$$\begin{aligned}
A \ : \ & X \longrightarrow X^* \\
& x \longrightarrow A(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(x) \ : \ & X \longrightarrow \mathbb{R} \\
& y \longrightarrow A(x)y = A_1(x)y_1 + A_2(x)y_2 + A_3(x)y_3 + A_4(x)y_4
\end{aligned}$$

onde

$$A_1(x)y_1 = 0$$

$$A_2(x)y_2 = (\nabla x_2, \nabla y_2)_{L^2(\Omega)}$$

$$A_3(x)y_2 = (a_1 x_3 \exp(\frac{-E}{(x_1 + x_2 + 1)}), y_3)_{L^2(\Omega)}$$

$$A_4(x)y_4 = (a_2 x_4 \exp(\frac{-\beta E}{(x_1 + x_2 + 1)}), y_4)_{L^2(\Omega)}.$$

Também o operador B,

$$\begin{aligned} B \;:\; & \mathbb{R} \longrightarrow X^* \\ & u \longrightarrow Bu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Bu \;:\; & X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & y \longrightarrow Bu(y) = B_1u(y_1) + B_2u(y_2) + B_3u(y_3) + B_4u(y_4) \end{aligned}$$

$$B_1u(y_1) = u\int_\Omega y_1(z)dz$$

$$B_2u(y_2) = -u\int_\Omega y_2(z)dz$$

$$B_3u(y_3) = 0$$

$$B_4u(y_4) = 0.$$

Logo

$$Bu(y) = u\int_\Omega (y_1(z) - y_2(z))dz.$$

Fazendo $I = [u_{\min,}u_{\max}] \subset \mathbb{R}$ vemos que se $u(t) \in I$ então $u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}$.
Seja

$$\begin{aligned} G \;:\; & W(T) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow G(x) \end{aligned}$$

$$G(x) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega x_4(z,b)dz - C_1.$$

3.4 Problema de Controle

Agora nosso problema pode ser colocado na forma abstrata.
Encontrar $x \in W(T)$, $u \in L^2(0,b)$ que seja solução do problema :

$$\min \quad J(x) \tag{P}$$

onde

$$J \;:\; W(T) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$J(x) = \int_0^b \int_\Omega a_1 x_3(z,t)\exp(\frac{-E}{x_1(z,t) + x_2(z,t) + 1})dzdt$$

sujeito a

$$\overset{\bullet}{x}(t) + A(x(t)) = B(u(t)) \quad em \quad X^*$$

$$
\begin{aligned}
x(0) &= X_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ -x_{10} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
u(t) &\in I \\
G(x) &= 0.
\end{aligned}
$$

3.4.1 Análise do funcional

LEMA 3.1. O funcional J é Frechet diferenciável e sua derivada é

$$
\begin{aligned}
J'(x)h &= \int_0^b \int_\Omega a_1 h_3(z,t) \exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}) + \\
&+ a_1 x_3(z,t) \exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}).\frac{E}{(x_1(z,t)+x_2(z,t)+1)^2}. \\
&.(h_1(z,t)+h_2(z,t))dzdt.
\end{aligned}
$$

Prova: Considere as aplicações:

$$
\begin{aligned}
f:\ & X \longrightarrow L^2(\Omega) \\
& x \longrightarrow a_1 x_1 \exp\left(\tfrac{-E}{x_1+x_2+1}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I:\ & L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\
& y \longrightarrow I(y) = \textstyle\int_\Omega y(z)dz,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}:\ & W(T) \longrightarrow L^2(0,b) \\
& x \longrightarrow \mathcal{N}(x),
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{N}(x)(t) = (I \circ f)(x(t))
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}:\ & L^2(0,b) \longrightarrow \mathbb{R} \\
& g \longrightarrow \mathcal{I}(g) = \textstyle\int_0^b g(t)dt.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
J(x) = (\mathcal{I} \circ \mathcal{N})(x)
$$

É fácil ver que $\mathcal{I}$ e I são lineares e contínuas. Como o operador $\mathcal{N}$ é o operador de Nemitsky basta vermos que f é classe C^1 e usarmos derivação da função composta. Como as derivadas parciais de Frechet $d_1 f$ e $d_2 f$ dadas por,

$$\begin{aligned} d_1 f(x)h_1 &= a_1 h_1 \exp\left(\frac{-E}{x_1+x_2+1}\right) \\ &\quad + a_1 x_1 \exp\left(\frac{-E}{x_1+x_2+1}\right)\frac{E}{(x_1+x_2+1)^2}h_1 \end{aligned}$$

$$d_2 f(x)h_2 = a_1 x_1 \exp\left(\frac{-E}{x_1+x_2+1}\right)\frac{E}{(x_1+x_2+1)^2}h_2$$

são contínuas vemos que f é de classe C^1. Assim

$$\begin{aligned} J'(x)h &= (\mathcal{I}'(\mathcal{N}(x)) \circ \mathcal{N}'(x))h \\ &= (\mathcal{I} \circ \mathcal{N}'(x))\, h \\ &= \int_0^b \mathcal{N}'(x)h(t)dt. \end{aligned}$$

Mas

$$\mathcal{N}'(x)h(t) = (I \circ f)'(x(t))h(t)$$

já que f é de classe C^1. Novamente usando regra da cadeia temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}'(x)h(t) &= I'(f(x(t)) \circ f'(x(t))h(t) \\ &= (I \circ f'(x(t)))\, h(t) \\ &= \int_\Omega f'(x(t))h(t)zdz. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} J'(x) &= \int_0^b \int_\Omega f'(x(t))h(t)zdzdt \\ &= \int_0^b \int_\Omega a_1 h_3(z,t)\exp\left(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}\right) + \\ &\quad + a_1 x_3(z,t)\exp\left(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}\right).\frac{E}{(x_1(z,t)+x_2(z,t)+1)^2}. \\ &\quad .(h_1(z,t)+h_2(z,t))dzdt. \end{aligned}$$

Com isso temos,

$$\begin{aligned} K_d &= \{h \mid J'(x)h < 0\}, && \text{(cone de direções de decrescimento)} \\ K_d &= \{h \mid -J'(x)h > 0\} \\ K_d^* &= \{-\lambda_0 J'(x) \mid 0 \le \lambda_0 < \infty\}, && \text{(cone dual).} \end{aligned}$$

3.4.2 Análise das restrições de igualdade

Considere o operador

$$\begin{aligned} P \ : \ W(T) \times L^2(0,b) &\longrightarrow L^2(0,b;X^*) \times X \times \mathbb{R} \\ (x,u) &\longrightarrow \quad P(x,u) = (P_1, P_2, P_3), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} P_1 \ : \ W(T) \times L^2(0,b) &\longrightarrow L^2(0,b;X^*) \\ (x,u) &\longrightarrow \quad P_1(x,u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(x,u) \ : \ [0,b] &\longrightarrow X^* \\ t \quad &\longrightarrow P_1(x,u)(t) = \overset{\bullet}{x}(t) + A(x(t)) - B(u(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 \ : \ W(T) \times L^2(0,b) &\longrightarrow X \\ (x,u) &\longrightarrow \quad P_2(x,u) = x(0) - x_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_3 \ : \ W(T) \times L^2(0,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,u) &\longrightarrow \quad P_3(x,u) = G(x). \end{aligned}$$

Portanto podemos escrever

$$P(x,u)(t) = (\overset{\bullet}{x}(t) + A(x(t)) - B(u(t)), x(0) - x_0, G(x)).$$

Logo as restrições de igualdade são da forma

$$M_i = \left\{(x,u) \ \in W(T) \times L^2(0,b) \mid P_i(x,u) = 0 \ , i = 1,2,3\right\}.$$

Portanto, vamos utilizar o Teorema 2.2 do Capítulo 2 devido a U. Ledzewicz-Kowalewska ([2]) e para isso devemos mostrar que P_i é de classe C^1 para i=1,2,3 e Im $P'(x,u)$ é um subespaço fechado de $L^2(0,b;X^*) \times X \times \mathbb{R}$.

LEMA 3.2: *P_1 é de classe C^1 e*

$$P_1'(x,u)(h,v)(t) = \overset{\bullet}{h}(t) + A'(x(t))h(t) + B(v(t)).$$

Prova: Considere $D : W(T) \longrightarrow L^2(0,b,X^*)$, $Dx(t) = \overset{\bullet}{x}(t)$. Pode ser facilmente provado que D é linear e como

$$\|Dx\|_{L^2(0,b,X^*)} = \left\|\overset{\bullet}{x}(t)\right\|_{L^2(0,b;X^*)} \leq \|x\|_{W(T)}$$

temos que D é contínua, logo $D'(x)h(t) = Dh(t) = \overset{\bullet}{h}(t)$. Claramente D' é contínua portanto D é de classe C^1. Seja $R : L^2(0,b) \longrightarrow L^2(0,b;X^*)$, $R(u)(t) = B(u(t))$, claramente $R'(u)v(t) = B(v(t))$ pois B é linear e contínua e como $R'(u)$ não depende de u temos que R' é contínua e portanto R é de classe C^1.

Seja $F : W(T) \longrightarrow L^2(0,b;X^*)$, $F(x)(t) = A(x(t))$. Se A é derivável então $F'(x)h(t) = A'(x(t))h(t)$. Vamos agora provar que se $x_i \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1,2,3,4$, então A é de classe C^1. De fato,

$$\begin{aligned} A: \quad & X \longrightarrow X^* \\ & x \longrightarrow A(x) = (0, A_2(x), A_3(x), A_4(x)) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A_2(x) &= -\Delta x_2 \\ A_3(x) &= a_1 x_3 \exp(\frac{-E}{x_1+x_2+1}) \\ A_4(x) &= a_2 x_4 \exp(\frac{-\beta E}{x_1+x_2+1}) \end{aligned}$$

portanto

$$A'(x) = (0, A_2'(x), A_3'(x), A_4'(x))$$

com

$$\begin{aligned} A_2'(x)h &= -\Delta h_2 \\ A_3'(x)h &= a_1 h_3 \exp(\frac{-E}{x_1+x_2+1}) \\ &\quad + a_1 x_3 (h_1+h_2) \exp(\frac{-E}{x_1+x_2+1}) \frac{E}{(x_1+x_2+1)^2} \\ A_4'(x)h &= a_2 h_4 \exp(\frac{-\beta E}{x_1+x_2+1}) \\ &\quad + a_2 x_4 (h_1+h_2) \exp(\frac{-\beta E}{x_1+x_2+1}) \frac{\beta E}{(x_1+x_2+1)^2}. \end{aligned}$$

Observe que:
$A'(x(t))h(t) : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} A'(x(t))h(t) \quad : \quad & X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \longrightarrow A'(x(t))h(t)y \end{aligned}$$

$A'(x(t))h(t)y = A_2(h(t))\ y_2 + (A_3'(x(t))h(t), y_3)_{L^2(\Omega)} + (A_4'(x(t))h(t), y_4)_{L^2(\Omega)}$

Sejam $f_1, f_2, g_1, g_2 : X \longrightarrow L^2(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= a_1 \exp(\frac{-E}{x_1+x_2+1}) \\
f_2(x) &= a_1 x_3 \exp(\frac{-E}{x_1+x_2+1}) \frac{E}{(x_1+x_2+1)^2} \\
g_1(x) &= a_2 \exp(\frac{-\beta E}{x_1+x_2+1}) \\
g_2(x) &= a_2 x_4 \exp(\frac{-\beta E}{x_1+x_2+1}) \frac{\beta E}{(x_1+x_2+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Assim podemos escrever,

$$
\begin{aligned}
A_3'(x)h &= f_1(x)h_3 + f_2(x)(h_1+h_2) \\
A_4'(x)h &= g_1(x)h_4 + g_2(x)(h_1+h_2)
\end{aligned}
$$

Que $A'(x)$ é linear está claro, vamos mostrar que $A'(x)$ é contínua:

$$
\begin{aligned}
\|A'(x)h\|_{X^*} &= \sup_{\|y\|_X=1} |A'(x)hy| \\
|A'(x)hy| &\leq \left|(-\Delta h_2, y_2)_{L^2(\Omega)}\right| + |(f_1(x)h_3 + f_2(x)(h_1+h_2), y_3)| \\
&\quad + |(g_1(x)h_4 + g_2(x)(h_1+h_2), y_4)| \\
&\leq \|h_2\|_{H_0^1} \|y_2\|_{H_0^1} + \|f_1(x)h_3 + f_2(x)(h_1+h_2)\|_{L^2(\Omega)} \|y_3\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|g_1(x)h_4 + g_2(x)(h_1+h_2)\|_{L^2(\Omega)} \|y_4\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\|A'(x)h\|_{X^*} &\leq \|h_2\|_{H_0^1} + \|f_1(x)h_3 + f_2(x)(h_1+h_2)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|g_1(x)h_4 + g_2(x)(h_1+h_2)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|f_1(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \|h_3\|_{L^2(\Omega)} + \|f_2(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \|h_1+h_2\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|g_1(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \|h_4\|_{L^2(\Omega)} + \|g_2(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \|h_1+h_2\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq c\|h\|_X.
\end{aligned}
$$

Veremos agora que A' é contínua. Sabemos que $A' : X \longrightarrow \pounds(X, X^*)$. Seja $x_n \to x$ em X.

$$
\begin{aligned}
\|A'(x_n) - A'(x)\|_{\pounds(X,X^*)} &\leq \sup_{\|h\|_X=1} \|A'(x_n)h - A'(x)h\|_{X^*} \\
\|A'(x_n)h - A'(x)h\|_{X^*} &= \sup_{\|y\|_X=1} |(A'(x_n)h - A'(x)h)y|
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}|(A'(x_n)h - A'(x))hy| &\le |(f_1(x_n) - f_1(x), h_3y_3)| \\ &\quad + |(f_2(x_n) - f_2(x), y_3(h_1 + h_2))| \\ &\quad + |(g_1(x_n) - g_1(x), h_4y_4)| \\ &\quad + |(g_2(x_n) - g_2(x), y_4(h_1 + h_2))| \,.\end{aligned}$$

Se $x_n \to x$ em X então $f_1(x_n) \to f_1(x)$ em $L^2(\Omega)$ e também $f_1(x_n) \rightharpoonup f_1(x)$ em $L^2(\Omega)$ e isto implica que $(f_1(x_n) - f_1(x), h_3y_3) \to 0$. De modo análogo os outros termos a direita da desigualdade acima convergem a zero. Logo $\|A'(x_n) - A'(x)\|_{\mathcal{L}(X,X^*)} \to 0$ e portanto A' é contínua e com isso F é classe C^1.

Como

$$\begin{aligned}P_1'(x,u)(h,v)(t) &= D'(x)h(t) + F'(x)h(t) + R'(u)v(t) \\ &= \dot{h}(t) + A'(x(t))h(t) + B(v(t))\end{aligned}$$

temos que P_1 é de classe C^1.

LEMA 3.3. P_2, P_3 são de classe C^1 e

$$P_2'(x,u)(h,v) = h(0),$$

$$P_3'(x,u)(h,v) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega h_4(z,b)dz.$$

Prova: É fácil ver que as derivadas de Gateaux de P_2, P_3 são

$$\begin{aligned}P_2'(x,u)(h,v) &= h(0) \\ P_3'(x,u)(h,v) &= \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega h_4(z,b)dz\end{aligned}$$

Como P_2', P_3' não dependem de (x,u) então P_2', P_3' são contínuas (basta ver que $P_2'(x_n,u_n)(h,v)-$ $P_2'(x,u)(h,v) = h(0) - h(0) = 0$). Assim P_2, P_3 são continuamente Gateaux diferenciável e portanto são de classe C^1.

LEMA 3.4. Im($P'(x,u)$) é um subespaço fechado de $L^2(0,b;X^*) \times X \times \mathbb{R}$.

Prova: Seja $\theta_n \to \theta$ em $L^2(0,b;X^*) \times X \times \mathbb{R}$ com $\theta_n = (w_n,k_n,l_n) \in \mathrm{Im}(P'(x,u))$ e $\theta = (w,k,l)$. Logo

$w_n \to w$ em $L^2(0,b;X^*)$, $k_n \to k$ em X, $l_n \to l$ em $\mathbb{R}$. Para provarmos que $\theta \in \mathrm{Im}(P'(x,u))$ precisamos das estimativas:

a) $|(A'(x(t)h(t),h(t))| \le c(t)\,\|h(t)\|_X^2$

b) $|B(v(t)h(t)| \le c\,|v(t)|\,\|h(t)\|_X$

Vamos agora provar a estimativa a),

$$\begin{aligned}
|(A'(x(t)h(t),h(t))| &\leq \left|(\nabla h_2(t),\nabla h_2(t))_{L^2(\Omega)}\right| \\
&\quad + \left|(f_1(x(t))h_3(t)+f_2(x(t))(h_1(t)+h_2(t)),h_3(t))_{L^2(\Omega)}\right| \\
&\quad + |(g_1(x(t))h_4+g_2(x(t))(h_1(t)+h_2(t)),h_4(t))| \\
&\leq \|h_2(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|f_1(x(t))\|_{L^\infty(\Omega)}\|h_3(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|f_2(x(t))\|_{L^\infty(\Omega)}\|h_1(t)\|_{L^2(\Omega)}\|h_3(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|f_2(x(t))\|_{L^\infty(\Omega)}\|h_2(t)\|_{L^2(\Omega)}\|h_3(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|g_1(x(t))\|_{L^\infty(\Omega)}\|h_4(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|g_2(x(t))\|_{L^\infty(\Omega)}\|h_1(t)\|_{L^2(\Omega)}\|h_4(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|g_2(x(t))\|_{L^\infty(\Omega)}\|h_2(t)\|_{L^2(\Omega)}\|h_4(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|h(t)\|^2_X + \|f_1(x(t))\|_{L^\infty(\Omega)}\|h(t)\|^2_X \\
&\quad + \|g_1(x(t))\|_{L^\infty(\Omega)}\|h(t)\|^2_X \\
&\quad +2\|f_2(x(t))\|_{L^\infty(\Omega)}\|h(t)\|^2_X + \\
&\quad +2\|g_2(x(t))\|_{L^\infty(\Omega)}\|h(t)\|^2_X \\
&\leq (1+\|f_1(x(t))\|_{L^\infty(\Omega)}+\|g_1(x(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\quad +2\|f_2(x(t))\|_{L^\infty(\Omega)}+2\|g_2(x(t))\|_{L^\infty(\Omega)})\|h(t)\|^2_X \\
&\leq c(t)\|h(t)\|^2_X .
\end{aligned}$$

Agora a estimativa b),

$$\begin{aligned}
|B(v(t)h(t)| &= \left|v(t)\int_\Omega (h_1(t)z-h_2(t)z)dz\right| \\
&\leq |v(t)|\left(\int_\Omega |(h_1(t)z|\,dz + \int_\Omega |h_2(t)z|\,dz\right) \\
&\leq |v(t)|\,|\Omega|^2\left(\|h_1(t)\|_{L^2(\Omega)}+\|h_2(t)\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq c\,|v(t)|\,\|h(t)\|_X .
\end{aligned}$$

Como $w_n(t)\in \mathrm{Im}(P'(x,u))$ temos que existem $h_n\in W(T)$ e $v_n\in L^2(\Omega)$ tais que

$$\overset{\bullet}{h}_n(t)+A'(x(t))h_n(t)-B(v_n(t))=w_n(t).$$

Assim

$$\left|\langle \overset{\bullet}{h}_n(t),h_n(t)\rangle\right| = |\langle B(v_n(t)),h_n(t)\rangle - \langle A'(x(t))h_n(t),h_n(t)\rangle + \langle w_n(t),h_n(t)\rangle|\,,$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|h_n(t)\|_X^2 &\leq |\langle B(v_n(t)), h_n(t)\rangle| + |\langle A'(x(t))h_n(t), h_n(t)\rangle| \\ &\quad + |\langle w_n(t), h_n(t)\rangle| \\ &\leq c\,|v_n(t)|\,\|h_n(t)\|_X + c(t)\,\|h_n(t)\|_X^2 + \|w_n(t)\|_X\,\|h_n(t)\|_X \\ &\leq \frac{c}{2}|v_n(t)|^2 + \frac{1}{2}\|h_n(t)\|_X^2 + c(t)\,\|h_n(t)\|_X^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\|w_n(t)\|_{X^*}^2 + \frac{1}{2}\|h_n(t)\|_X^2 \\ &\leq (1+c(t))\,\|h_n(t)\|_X^2 + \frac{c}{2}|v_n(t)|^2 + \frac{1}{2}\|w_n(t)\|_{X^*}^2 .\end{aligned}$$

Usando o fato que $u(t) \in [u_{\min}, u_{\max}]$ e que $v_n(t)$ pertence a uma vizinhança de $u(t)$ temos que $|v_n(t)| \leq C_v$, onde C_v é uma constante. Logo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|h_n(t)\|_X^2 &\leq \frac{ck^2}{2} + (1+c(t))\,\|h_n(t)\|_X^2 + \frac{1}{2}\|w_n(t)\|_{X^*}^2 \\ &\leq c(t)\,\|h_n(t)\|_X^2 + c\,\|w_n(t)\|_{X^*}^2 + c_1\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gronwall temos que

$$\begin{aligned}\|h_n(t)\|_X^2 &\leq e^{\int_0^t c(s)ds}\left[\|h_n(0)\|_X^2 + \int_0^t c\,\|w_n(t)\|_{X^*}^2 + c_1\right] \\ &\leq e^{\int_0^t c(s)ds}\left[\|k_n\|_X^2 + \int_0^t c\,\|w_n(t)\|_{X^*}^2 + c_1\right]\end{aligned}$$

Como $k_n \to k$ em X temos que $\|k_n\|_X^2 \leq c_2$. Como $w_n \to w$ em $L^2(0, b, X^*)$ temos que $\|w_n\|_{L^2(0.b,X^*)} \leq c_3$ o que nos dá $\int_0^b \|w_n(t)\|_{X^*}^2\,dt \leq c_4$. Com isso concluimos que

$$\|h_n(t)\|_X \leq c.$$

Portanto existe uma subsequência $h_{n_k}(t) \rightharpoonup h(t)$ em X. Como $|v_{n_k}(t)| \leq k$ existe subsequência $v_{n_{k_j}}(t) \to v(t)$. Também $h_{n_{k_j}}(t) \rightharpoonup h(t)$. Como $A'(x(t))$ e B são contínuas temos que

$$\begin{aligned}A'(x(t))h_{n_{k_j}}(t) &\to A'(x(t))h(t) \\ B(v_{n_{k_j}}(t)) &\to B(v(t))\end{aligned}$$

e por hipótese $w_n(t) \to w(t)$, logo

$$\overset{\bullet}{h}_{n_{k_j}}(t) \to B(v(t)) - A'(x(t))h(t) + w(t).$$

Mas $\overset{\bullet}{h}_{n_{k_j}}(t) \to \overset{\bullet}{h}(t)$ e assim temos que

$$\overset{\bullet}{h}(t) + A'(x(t))h(t) - B(v(t)) = w(t).$$

Também $h_{n_{k_j}}(0) \to h(0)$ implica que $k_{n_{k_j}} \to h(0)$. Mas $k_{n_{k_j}} \to k$, logo $k = h(0)$. Analogamente concluimos que $l = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega h_4(z,b)dz$. Mas isto quer dizer que $\theta = (w,k,l) \in$Im$(P'(x,u))$ e assim Im$(P'(x,u))$ é fechada.

3.4.3 Análise das restrições de controle

$$Q_2 = \left\{ u \in L^2(0,b) \mid u(t) \in U(t) = I \right\}.$$

É fácil ver que Q_2 é convexo (já que I é convexo) e fechado. Logo (Teorema 10.5 [1]) temos que o cone dual do cone de direções factíveis de Q_2 em u^* vem dado por:

$$Q_2^* = \left\{ f \in L^2(0,b;Y) \ \mid f(w) \geq f(u^*) \ \ \forall w \in Q_2 \right\}.$$

3.4.4 Equação de Euler Lagrange

Daqui por diante consideramos (x^*, u^*) a solução do problema de minimização

Aplicando o Teorema 2.2 (Cap. 2) ao nosso problema, existem funcionais lineares contínuos $F_0 \in K_d^*$, $F_1 \in Q_2^*$, $\lambda \in L^2(0,b,X^*)^*$, $\eta \in X^*, \nu \in$$\mathbb{R}^*$ não todos nulos tais que

$$F_0(h,v) + F_1(h,v) + F_2(h,v) + F_3(h,v) + F_4(h,v) = 0$$

$\forall (h,v) \in W(T) \times L^2(0,b;Y)$ onde:

$$\begin{aligned} F_0(u,v) &= -\lambda_0 J'(x^*)h \\ F_2 &= (P_1')^*(x^*,u^*)\lambda \\ F_3 &= (P_2')^*(x^*,u^*)\eta \\ F_4 &= (P_3')^*(x^*,u^*)\nu. \end{aligned}$$

Dado $v \in L^2(0,b;\mathbb{R})$ escolhemos h como sendo a solução do problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{h}(t) + A'(x^*(t))h(t) &= B(v(t)) \\ h(0) &= 0. \end{aligned}$$

Então temos que para o par (h,v) assim escolhido vale $F_2(h,v) = 0$ e $F_3(h,v) = 0$.

Agora

$$\begin{aligned} F_4(h,v) &= (P_3')^*(x^*,u^*)\nu(h,v) \\ &= \langle \nu, P_3'(x^*,u^*)\nu(h,v)\rangle \\ &= \nu\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega h_4(z,b)dz. \end{aligned}$$

Logo

$$-\lambda_0 J'(x^*)h + \nu\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega h_4(z,b)dz + F_1(h,v) = 0.$$

Se $\lambda_0 = 0$ então $v\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega h_4(z,b)dz + F_1(h,v) = 0$. Se $v = 0$ então $\nu = 0$. Como v é arbitrário, se $\nu = 0$ então $F_1(v) = 0$. Concluimos assim que $F_1(h,v) = 0$ e $\nu = 0$ o que contradiz o Teorema de Dubovitskii-Milyutin . Sendo assim podemos tomar $\lambda_0 = 1$, ou seja, o problema é normal. Assim

$$F_1(v) = J'(x^*)h - \nu\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega h_4(z,b)dz,$$

$$F_1(v) = \int_0^b L'(x^*(t))h(t)dt - \nu\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega h_4(z,b)dz,$$

onde $L = I \circ f$.

3.4.5 Equações adjuntas

Consideremos o problema de Cauchy com $L = I \circ f$

$$\begin{aligned} -\dot{p}(t) + A'^*(x^*(t))p(t) &= L'(x^*(t)),\ em\ X^* \\ p(b) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\nu}{|\Omega|} \end{bmatrix} \\ p_2(z,t) &= 0 \qquad \forall z \in S. \end{aligned}$$

Usando o estado adjunto p temos que

$$\begin{aligned} \int_0^b L'(x^*(t))h(t)dt &= \int_0^b \langle -\dot{p}(t) + A'^*(x^*(t))p(t), h(t)\rangle dt \\ &= \int_0^b \langle -\dot{p}(t), h(t)\rangle dt + \int_0^b \langle A'^*(x^*(t))p(t), h(t)\rangle dt. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}\int_0^b \langle \overset{\bullet}{p}(t), h(t)\rangle &= \int_0^b \frac{d}{dt}\langle p(t), h(t)\rangle - \langle p(t), \overset{\bullet}{h}(t)\rangle \\ &= \langle p(b), h(b)\rangle - \langle p(0), h(0)\rangle - \int_0^b \langle p(t), \overset{\bullet}{h}(t)\rangle dt \\ &= \langle p(b), h(b)\rangle - \int_0^b \langle p(t), \overset{\bullet}{h}(t)\rangle dt,\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\int_0^b L'(x^*(t))h(t)dt &= -\langle p(b), h(b)\rangle + \int_0^b \langle p(t), \overset{\bullet}{h}(t)\rangle dt \\ &\quad + \int_0^b \langle A'^*(x^*(t))p(t), h(t)\rangle dt \\ &= -\langle p(b), h(b)\rangle + \int_0^b \langle p(t), \overset{\bullet}{h}(t) + A'(x(t))h(t)\rangle dt.\end{aligned}$$

Relembrando a escolha de h temos

$$\int_0^b L'(x^*(t))h(t)dt = \int_0^b \langle p(t), B(v(t))\rangle - \langle p(b), h(b)\rangle.$$

Agora uma pequena observação: Sabemos que $p(b) \in H^*$:

$$\begin{aligned} p(b) \ : \ & H \longrightarrow \mathbb{R} \\ & h(b) \longrightarrow \langle p(b), h(b)\rangle.\end{aligned}$$

Como $H = (L^2(\Omega))^4$ então $H^* = (L^2(\Omega))^4$ e temos $p(b) \in H$. Conclusão:

$$\begin{aligned}\langle p(b), h(b)\rangle &= \sum_{i=1}^{4} (p_i(b), h_i(b))_{L^2(\Omega)} \\ &= (-\frac{\upsilon}{|\Omega|}, h_4(b))_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_\Omega \frac{-\upsilon}{|\Omega|} h_4(z,b)dz \\ &= -\frac{\upsilon}{|\Omega|}\int_\Omega h_4(z,b)dz.\end{aligned}$$

Usando estes fatos chegamos a

$$
\begin{aligned}
F_1(v) &= \int_0^b \langle p(t), B(v(t))\rangle dt \\
&= \int_0^b \langle B^*(p(t)), v(t)\rangle dt.
\end{aligned}
$$

Recordando que F_1 suporta Q_2 em u^* vemos que $F_1(v) \geq F_1(u^*)$ e isto quer dizer que

$$\int_0^b \langle B^*(p(t)), v(t) - u^*(t)\rangle dt \ \geq 0 \qquad \forall v \in Q_2.$$

Suponha que para algum $E \subset [0, b]$ com medida positiva temos

$$\inf_{t \in E} \langle B^*(p(t)), v(t) - u^*(t)\rangle < 0$$

Considere a multifunção

$$\mathcal{V} : E \to 2^{\mathbb{R}} \ \backslash\{0\}$$

$$\mathcal{V}(t) = \{v \in I \,|\langle B^*(p(t)), v - u^*(t)\rangle < 0$$

e seja

$$r(t, v) = \langle B^*(p(t)), v - u^*(t).$$

A função r é mensurável já que o operador B não depende de t e é contínuo em v pois se $v_n \to v$ em $\mathbb{R}$ então de

$$|\langle B^*(p(t)), v_n - v\rangle| \leq |B^*(p(t))|\,|v_n - v|$$

vem que $r(t, v_n) \to r(t, v)$. Assim r é mensurável em (t, v) e portanto $Gr(\mathcal{V}) \in (E) \times (\mathbb{R})$ onde

$$Gr(\mathcal{V}) = \{(t, v) \in E \times \mathbb{R} \ \mid r(t, v) < 0\} \cap [0, b] \times I.$$

Usando o teorema de seleção de Aumam (Teorema 5.8, pag 873, [32]) obtemos v_1 mensurável (v_1 é uma seleção mensurável q.t.p.) tal que $v_1(t) \in \mathcal{V}(t)$ para $t \in E$.

Seja,

$$v : E \to \mathbb{R}$$

$$v(t) = \begin{cases} v_1(t) & se \quad t \in E \\ u(t) & se \quad t \in [0, b] \backslash E \end{cases}$$

É claro que $v \in Q_2$ e além disso

$$\int_0^b \langle B^*(p(t)), v(t) - u^*(t)\rangle_{\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}}\, dt < 0$$

o que é uma contradição. Logo

$$\inf_{v\in I}\langle B^*(p(t)), v(t) - u^*(t)\rangle \geq 0 \qquad q.t.p.\ em\ [0,b]$$

Mas

$$\begin{aligned} B^*(p(t))(v(t) - u^*(t) &= B(v(t) - u^*(t)p(t) \\ &= (v(t) - u^*(t)) \int_V p_1(z,t) - p_2(z,t)dz \end{aligned}$$

e assim temos o princípio de mínimo

$$\begin{aligned} B^*(p(t))v &\geq B^*(p(t))u^*(t), \qquad \forall v \in I, \\ B(u^*(t))p(t) &\leq B(v)p(t), \qquad \forall v \in I, \\ \min_{v\in I} B(v)p(t) &= B(u^*(t))p(t). \end{aligned}$$

Assim devemos encontrar o mínimo de $B(v)p(t) = v\int_V p_1(z,t) - p_2(z,t)dz$. Mas B é linear em v e isso implica que B atingirá mínimo nos extremos do intervalo I. Logo o programa de controle é dado por:

$$u = \begin{cases} u_{\min,} & se \quad I(t) > 0 \\ u_{\max} & se \quad I(t) < 0 \end{cases}$$

onde $I(t) = \int_V p_1(z,t) - p_2(z,t)dz$.

Esse desenvolvimento nos permite enunciar o seguinte teorema:

TEOREMA 3.1. Seja $(u^*, x^*) \in W(T) \times L^2(0,b)$ uma solução do problema (P). Então o par (u^*, x^*) satisfaz

$$\dot{x}^*(t) + A(x^*(t)) = B(u^*(t)) \quad em \quad X^*$$

$$\begin{aligned} x^*(0) &= X_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ -x_{10} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ u^*(t) &\in I \\ G(x^*) &= 0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

existe $p \in W(T)$ *satisfazendo as equações adjuntas*

$$\begin{array}{rcl} -\dot{p}(t) + A'^{*}(x^{*}(t))p(t) &=& L'(x^{*}(t)), \ \textit{em } X^{*} \\ p(b) &=& \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\nu}{|\Omega|} \end{bmatrix} \\ p_2(z,t) &=& 0 \qquad \forall z \in S \end{array} \tag{3.9}$$

e o controle u *é dado por*

$$u = \begin{cases} u_{\min,} & se \quad I(t) > 0 \\ u_{\max} & se \quad I(t) < 0 \end{cases}$$

onde $I(t) = \int_{\Omega} p_1(z,t) - p_2(z,t)dz.$

Equações Adjuntas

Veremos como ficam nossas equações adjuntas.

$$-\dot{p}(t) + A_x(x(t))p(t) = L_x(x(t)).$$

Note que:

$$\begin{array}{rcl} A_x(x(t)) &:& X \longrightarrow X^{*} \\ A_x^{*}(x(t)) &:& X \longrightarrow X^{*} \\ && v \longrightarrow A_x^{*}(x(t)v \\ A_x^{*}(x(t))v &:& X \longrightarrow \mathbb{R} \\ && y \longrightarrow [A_x^{*}(x(t))v](y) = \langle v, A_x(x(t))y\rangle_{X^{*}\times X}. \end{array}$$

Voltando as equações adjuntas para $\forall y \in X$ temos

$$\langle -\dot{p}(t), y\rangle_{X^{*}\times X} + \langle A_x^{*}(x(t))p(t), y\rangle_{X^{*}\times X} = \langle L_x(x(t)), y\rangle_{X^{*}\times X}$$

$$\langle -\dot{p}(t), y\rangle_{X^{*}\times X} + \langle p(t), A_x(x(t))y\rangle_{X^{*}\times X} = \langle L_x(x(t)), y\rangle_{X^{*}\times X}$$

Vamos agora desenvolver cada um dos termos dessa equação:

$$\begin{array}{rcl} \langle \dot{p}, y\rangle &=& (\dot{p}_1(t), y_1)_{L^2(\Omega)} + \langle \dot{p}_2(t), y_2\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + (\dot{p}_3(t), y_3)_{L^2(\Omega)} \\ && +(\dot{p}_4(t), y_4)_{L^2(\Omega)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \langle p(t), A_x(x(t))y\rangle &=& (p_1(t), A_x^1(x(t))y) + \langle p_2(t), A_x^2(x(t))y\rangle \\ && +(p_3(t), A_x^3(x(t))y) + (p_4(t), A_x^4(x(t))y) \end{array}$$

$$\begin{aligned}\langle L_x(x(t)), y\rangle &= \int_\Omega a_1 y_3(z)\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1})+\\ &+a_1 x_3(z,t)\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}).\\ &.\frac{E}{(x_1(z,t)+x_2(z,t)+1)^2}(y_1(z)+y_2(z))dz.\end{aligned}$$

Mas

$$(p_1(t), A_x^1(x(t))y) = (p_1(t), 0)$$

$$\begin{aligned}\langle p_2(t), A_x^2(x(t))y\rangle &= (A_2(y), p_2(t))_{L^2(\Omega)} = (\nabla y_2, \nabla p_2)_{L^2(\Omega)}\\ &= \int_\Omega \nabla y_2(z)\nabla p_2(z,t)dz\\ &= -\int_\Omega y_2(z)\triangle p_2(z,t) + \int_{\partial\Omega} y_2 \frac{\partial p_2}{\partial \upsilon} dS\\ &= -\int_\Omega y_2(z)\triangle p_2(z,t)dz = (-\triangle p_2, y_2)_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p_3(t), A_x^3(x(t))y) &= (a_1 x_3(z,t)\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}).\\ &.\frac{E}{(x_1(z,t)+x_2(z,t)+1)^2}(y_1+y_2)+\\ &+a_1\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1})y_3, p_3(t))_{L^2(\Omega)}\\ &= (a_1 x_3(z,t)\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}).\\ &.\frac{E}{(x_1(z,t)+x_2(z,t)+1)^2}p_3(t), y_1)_{L^2(\Omega)}+\\ &+(a_1 x_3(z,t)\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}).\\ &.\frac{E}{(x_1(z,t)+x_2(z,t)+1)^2}p_3(t), y_2)_{L^2(\Omega)}+\\ &+(a_1\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1})p_3(t), y_3)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}(p_4(t), A_x^4(x(t))y) \quad = \quad & (a_2 x_4(t)\exp(\frac{-\beta E}{x_1(t)+x_2(t)+1}). \\ & .\frac{\beta E}{(x_1(t)+x_2(t)+1)^2} p_4(t), y_1)_{L^2(\Omega)} + \\ & +(a_2 x_4(t)\exp(\frac{-\beta E}{x_1(t)+x_2(t)+1}). \\ & .\frac{\beta E}{(x_1(t)+x_2(t)+1)^2} p_4(t), y_2)_{L^2(\Omega)} + \\ & +(a_2 \exp(\frac{-\beta E}{x_1(t)+x_2(t)+1}) p_4(t), y_4)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Também temos o seguinte,

$$\begin{aligned}\langle L_x(x(t)), y\rangle \quad = \quad & (a_1 x_3(t)\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}). \\ & .\frac{E}{(x_1(z,t)+x_2(z,t)+1)^2}, y_1) + \\ & +(a_1 x_3(t)\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}). \\ & .\frac{E}{(x_1(z,t)+x_2(z,t)+1)^2}, y_2) + \\ & +(a_1 \exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}), y_3).\end{aligned}$$

Usando estes fatos obtemos,

$$\begin{aligned}\overset{\bullet}{p}_1(t) \quad = \quad & a_1 x_3(z,t)\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}). \\ & .\frac{E}{(x_1(z,t)+x_2(z,t)+1)^2} p_3(t) + \\ & a_2 x_4(t)\exp(\frac{-\beta E}{x_1(t)+x_2(t)+1}). \\ & .\frac{\beta E}{(x_1(t)+x_2(t)+1)^2} p_4(t) + \\ & -a_1 x_3(t)\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}). \\ & .\frac{E}{(x_1(z,t)+x_2(z,t)+1)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\bullet}{p}_2(t) &= -\triangle p_2(t) + a_1 x_3(t)\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}).\\
&.\frac{E}{(x_1(z,t)+x_2(z,t)+1)^2}p_3(t) +\\
&a_2 x_4(t)\exp(\frac{-\beta E}{x_1(t)+x_2(t)+1}).\\
&.\frac{\beta E}{(x_1(t)+x_2(t)+1)^2}p_4(t) +\\
&-a_1 x_3(t)\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1}).\\
&.\frac{E}{(x_1(z,t)+x_2(z,t)+1)^2},
\end{aligned}$$

$$\overset{\bullet}{p}_3(t) = a_1\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1})p_3(t) - a_1\exp(\frac{-E}{x_1(z,t)+x_2(z,t)+1})$$

$$\overset{\bullet}{p}_4(t) = a_2\exp(\frac{-\beta E}{x_1(t)+x_2(t)+1})p_4(t)$$

Agrupando alguns termos as adjuntas tomam a seguinte forma :

$$\begin{aligned}
\overset{\bullet}{p}_1 &= -(1-p_3)a_1 x_3(t)\exp(\frac{-E}{x_1+x_2+1}).\frac{E}{(x_1+x_2+1)^2} +\\
&+p_4 a_2 x_4(t)\exp(\frac{-\beta E}{x_1+x_2+1})\frac{\beta E}{(x_1+x_2+1)^2},\\
\overset{\bullet}{p}_2 &= -(1-p_3)a_1 x_3(t)\exp(\frac{-E}{x_1+x_2+1}).\frac{E}{(x_1+x_2+1)^2} +\\
&+p_4 a_2 x_4(t)\exp(\frac{-\beta E}{x_1+x_2+1})\frac{\beta E}{(x_1+x_2+1)^2} - -\triangle p_2,\\
\overset{\bullet}{p}_3 &= -(1-p_3)a_1 x_3(t)\exp(\frac{-E}{x_1+x_2+1}),\\
\overset{\bullet}{p}_4 &= a_2\exp(\frac{-\beta E}{x_1+x_2+1})p_4,
\end{aligned}$$

com as condições em $t = b$

$$\begin{aligned}
p_1 &= 0,\\
p_2 &= 0,\\
p_3 &= 0,\\
p_4 &= \frac{-\upsilon}{|\Omega|}
\end{aligned}$$

e p_2 satisfazendo as condições $\frac{\partial p_2}{\partial n} = 0 \quad \forall z \in P, \quad p_2 = 0 \quad \forall z \in S$

3.5 Simulação Numérica

3.5.1 Introdução

Vimos acima que o controle da taxa de variação da temperatura do equipamento deve ser do tipo Bang-Bang se desejamos maximizar a concentração de nutrientes para uma dada redução na concentração de microorganismos. Vimos também que o tempo de comutação entre as taxas máximas e mínimas de aquecimento dependem de uma integral envolvendo os estados adjuntos. Também nada foi dito quanto ao número de comutadores que também dependem dos estados adjuntos e para se estabelecer o número de comutadores e quais são estes comutadores deveríamos resolver o sistema completo formado pelas equações de estado (equações (3.8)) e equações adjuntas (equações (3.9)) e isso envolveria a resolução numérica de um problema de dois valores de contorno, assunto este que deixamos para um trabalho futuro. Devido ao controle do tipo Bang-Bang o que faremos no momento é assumir que há somente um comutador e vamos determinar numericamente qual é este comutador para um determinado tipo de nutriente e um determinado tipo de microorganismo. Neste caso não se torna necessário resolver as equações adjuntas e somente as equações de estado necessitam ser resolvidas.

Como já mencionamos antes, nosso propósito nesta seção não é sermos originais e sim desejamos ampliar as idéias abordadas em ([20]), onde os autores fazem vários experimentos numéricos. Naquele trabalho os autores fazem um experimento numérico em dimensão um, utilizando a equação de Arremius para a taxa de destruição dos microorganismos e nutrientes e fazem um experimento em dimensão três utilizando o modelo de Bigelow para a taxa de destruição dos microorganismos e nutrientes. Naquele artigo eles não especificam no primeiro caso com qual nutriente e microorganismo estão trabalhando, faltam detalhes a respeito de como foram resolvidas as equações e de como foi feita a pesquisa de mínimo do funcional. Eles limitam-se a apresentar os gráficos e a tecer alguns comentários sobre os resultados obtidos. Não queremos aqui questionar os resultados por eles obtidos mas queremos preencher as lacunas deixadas por aquele trabalho e nesse sentido apresentamos com detalhes todas as adimensionalizações efetuadas, mostramos as equações em coordenadas cilídricas e detalhamos as discretizações em diferenças finitas centradas tornando o assunto mais acessível. Os resultados que obtemos diferem um pouco dos obtidos no artigo de ([20]) e isso se deve aos seguintes fatos: Usamos a equação de Arremius para o caso tridimensional enquanto que eles utilizaram o modelo de Bigelow para o caso tridimensional, usamos uma taxa de variação de $11.8^0 C/\min$ e tempo final de processo de 20 minutos enquanto que eles utilizaram uma taxa de $3.87^0 C/\min$ e tempo final de processo é de 127 mi-nutos e além disso utilizamos uma adimensionalização diferente daquela que eles fizeram. De acordo com os profissionais especializados em processo de esterilização de comida enlatada nossos resultados são bastante realistas e o perfil de temperatura que obtemos pode ser implementado na prática.

3.5.2 Coordenadas Cilíndricas e Adimensionalizações

Nós consideramos o domínio $\Omega = \Omega \times [0, 2\pi)$ onde $\Omega = (0, R_l) \times (0, L)$ é um retângulo no plano $r \times z$ em coordenadas cilíndricas e as seguintes funções

$$c_m : \Omega \times [0, T_f] \to \mathbb{R} \ ,$$
$$c_n : \Omega \times [0, T_f] \to \mathbb{R} \ ,$$

e

$$T : \overline{\Omega} \times [0, T_f] \to \mathbb{R} \ ,$$

onde c_m é a concentração de microorganismos, c_n a concentração de nutrientes, T_f é o tempo final de processo com $0 < T_f \leq +\infty$ e T a temperatura. Como as funções não dependem do ângulo φ nós podemos escrever as equações que descrevem a destruição de microorganismos e nutrientes em função do tempo em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{array}{rcl} (c_m, c_n, T) & : & \Omega \times (0, T_f) \to \mathbb{R}^{\ 3} \\ & & (r, z, t) \to (c_m, c_n, T)(r, t, z) \end{array}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial t}(r, z, t) = -K_i c_i(r, z, t) \exp(\frac{-E_i}{RT(r, z, t)}), \ em \quad \Omega \times (0, T_f), \ i = m, n \qquad (3.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}(r, z, t) = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}(r, z, t) + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}(r, z, t) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(r, z, t) \right), \ em \quad \Omega \times (0, T_f)$$

com condições iniciais e de fronteira,

$$\begin{array}{rcl} c_i(r, z, 0) & = & c_{Ii}(r, z), \ em \quad \Omega, \ i = m, n \\ T(r, z, 0) & = & T_I(r, z), \ em \quad \Omega \\ T(r, z, t) & = & T_R(t), \ em \quad (\partial\Omega \backslash \Sigma) \times (0, T_f) \\ \dfrac{\partial T}{\partial r}(0, z, t) & = & 0, \ em \quad \Sigma \times (0, T_f). \end{array}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{array}{rcl} \theta(r, z, t) & = & T(r, t, z) - T_R(t) \\ T(r, t, z) & = & \theta(r, z, t) + T_R(t) \end{array}$$

nós conseguimos o problema de controle modificado:

$$\begin{aligned}(c_m, c_n, \theta) \quad : \quad & \Omega \times (0, T_f) \to \mathbb{R}^{\,3} \\ & (r, z, t) \to (c_m, c_n, T)(r, t, z)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial t}(r,z,t) = -K_i c_i(r,z,t)\exp\left(\frac{-E_i}{R(\theta(r,z,t)+T_R(t))}\right),\ em \quad \Omega \times (0,T_f),\ i = m,n$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(r,z,t) = \alpha\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}(r,z,t) + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}(r,z,t) + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}(r,z,t)\right) - \frac{dT_R}{dt},\ em \quad \Omega \times (0,T_f)$$

$$c_i(r,z,0) = c_{Ii}(r,z),\ em \quad \Omega,\ i = m,n \tag{PCM}$$

$$\theta(r,z,0) = T_I(r,z) - T_R(0),\ em \quad \Omega$$

$$\theta(r,z,t) = 0,\ sobre \quad (\partial\Omega \backslash \Sigma) \times (0,T_f)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}(0,z,t) = 0,\ sobre \quad \Sigma \times (0,T_f).$$

Agora procedemos o reescalamento das variáveis espaciais e do tempo de modo a obter o domínio como um quadrado unitário e o tempo variando no intervalo unitário $(0,1)$. Fazemos então a seguinte mudança de variáveis

$$\widetilde{r} = \frac{r}{R_l}, \qquad \widetilde{z} = \frac{z}{L}, \qquad \widetilde{t} = \frac{t}{T_f}.$$

Logo $(\widetilde{r}, \widetilde{z}) \in \widetilde{\Omega} = (0,1) \times (0,1)$ e $\widetilde{t} \in (0,1)$. Fica claro que temos as seguintes relações

$$r(\widetilde{r}) = R_l\widetilde{r}, \qquad z(\widetilde{z}) = L\widetilde{z}, \qquad t(\widetilde{t}) = T_f\widetilde{t}$$

e dai obtemos

$$\overline{c_i}(\widetilde{r}, \widetilde{z}, \widetilde{t}) = c_i(r(\widetilde{r}), z(\widetilde{z}), t(\widetilde{t})) = c_i(r,z,t),$$
$$\frac{\partial \overline{c_i}}{\partial \widetilde{t}} = \frac{\partial c_i}{\partial t}\frac{dt}{d\widetilde{t}} = \frac{\partial c_i}{\partial t}T_f.$$

Portanto

$$\frac{\partial \overline{c_i}}{\partial \widetilde{t}}(\widetilde{r}, \widetilde{z}, \widetilde{t}) = -K_i c_i(r,z,t)\exp\left(\frac{-E_i}{R(\theta(r,z,t)+T_R(t))}\right)T_f.$$

Fazendo $\overline{\theta}(\widetilde{r}, \widetilde{z}, \widetilde{t}) = \theta(r(\widetilde{r}), z(\widetilde{z}), t(\widetilde{t}))$ e $\overline{T_R}(\widetilde{t}) = T_R(t(\widetilde{t}))$ nós conseguimos

$$\frac{\partial \overline{c_i}}{\partial \widetilde{t}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) = -K_i\overline{c_i}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})\exp(\frac{-E_i}{R(\overline{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})+\overline{T_R}(\widetilde{t}))})T_f, \ em \quad \widetilde{\Omega}\times(0,1),\ i=m,n$$

e também

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\widetilde{t}} &= \frac{\partial\theta}{\partial t}T_f, \qquad \frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\widetilde{r}} = \frac{\partial\theta}{\partial r}R_l, \qquad \frac{\partial^2\overline{\theta}}{\partial\widetilde{r}^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}R_l^2,\\
\frac{\partial\overline{T}}{\partial\widetilde{z}} &= \frac{\partial T}{\partial z}L, \qquad \frac{\partial^2\overline{\theta}}{\partial\widetilde{z}^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}L^2, \qquad \frac{d\overline{T_R}}{d\widetilde{t}} = \frac{dT_R}{dt}T_f
\end{aligned}$$

e temos a nossa equação nas novas variáveis

$$\frac{1}{T_f}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\widetilde{t}} = \alpha\left(\frac{1}{R_l^2}\frac{\partial^2\overline{\theta}}{\partial\widetilde{r}^2}+\frac{1}{R_l^2}\frac{1}{\widetilde{r}}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\widetilde{r}}+\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2\overline{\theta}}{\partial\widetilde{z}^2}\right)-\frac{1}{T_f}\frac{d\overline{T_R}}{d\widetilde{t}},\ em \quad \widetilde{\Omega}\times(0,1).$$

Quando $t=0$ temos $\widetilde{t}=0$ então $\overline{c_i}(\widetilde{r},\widetilde{z},0)=c_i(r,z,0)$ e portanto $\overline{c_i}(\widetilde{r},\widetilde{z},0)=\overline{c_{Ii}}(\widetilde{r},\widetilde{z})$ em $\widetilde{\Omega}$ onde $\overline{c_{Ii}}(\widetilde{r},\widetilde{z})=c_{Ii}(r(\widetilde{r}),z(\widetilde{z}))$.

Nós temos também que $\overline{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},0)=\overline{T_I}(\widetilde{r},\widetilde{z})-\overline{T_R}(0)$ em $\widetilde{\Omega}$ onde $\overline{T_I}(\widetilde{r},\widetilde{z})=T_I(r(\widetilde{r}),z(\widetilde{z}))$ e $\overline{T_R}(0)=T_R(0)$. As condições de fronteira tornam-se $\overline{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})=0$ em $\widetilde{\Sigma}$ onde $\widetilde{\Sigma}=\frac{\Sigma}{L}$. Como $\frac{\partial\theta}{\partial r}(0,z,t)=\frac{1}{R_l}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\widetilde{r}}(0,\widetilde{z},\widetilde{t})$ nós conseguimos $\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\widetilde{r}}(0,\widetilde{z},\widetilde{t})=0$ em $\widetilde{\Sigma}\times(0,1)$.

Após esta mudanças podemos escrever o problema de controle nas novas variáveis:

$$\begin{aligned}
(\overline{c_m},\overline{c_n},\overline{\theta}) \ &: \ \widetilde{\Omega}\times(0,1)\to\mathbb{R}^{\,3}\\
&\quad (\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})\to(\overline{c_m},\overline{c_n},\overline{\theta})(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \overline{c_i}}{\partial \widetilde{t}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) = -T_fK_i\overline{c_i}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})\exp(\frac{-E_i}{R(\overline{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})+\overline{T_R}(\widetilde{t}))}),\ em \quad \widetilde{\Omega}\times(0,1),\ i=m,n$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\widetilde{t}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) \ &= \ \alpha T_f\left(\frac{1}{R_l^2}\frac{\partial^2\overline{\theta}}{\partial\widetilde{r}^2}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})+\frac{1}{R_l^2}\frac{1}{\widetilde{r}}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\widetilde{r}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})+\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2\overline{\theta}}{\partial\widetilde{z}^2}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})\right)\\
&\quad -\frac{d\overline{T_R}}{d\widetilde{t}}(\widetilde{t}),\ em \quad \widetilde{\Omega}\times(0,1)\\
&\quad \overline{c_i}(\widetilde{r},\widetilde{z},0)=\overline{c_{Ii}}(\widetilde{r},\widetilde{z}) \qquad em \quad \widetilde{\Omega},\ i=m,n \qquad\qquad \text{(PCMa)}\\
&\quad \overline{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},0)=\overline{T_I}(\widetilde{r},\widetilde{z})-\overline{T_R}(0) \qquad em \quad \widetilde{\Omega}\\
&\quad \overline{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})=0 \qquad sobre \quad (\partial\widetilde{\Omega}\backslash\widetilde{\Sigma})\times(0,1)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial \widetilde{r}}(0, \widetilde{z}, \widetilde{t}) = 0 \qquad sobre \quad \widetilde{\Sigma} \times (0,1)$$

onde

$$\widetilde{\Omega} = (1,0)^2, \quad \widetilde{\Sigma} = \tfrac{1}{L}\Sigma, \quad r = r(\widetilde{r}) = R_l \widetilde{r}, \quad z = z(\widetilde{z}) = L\widetilde{z}, \quad t = t(\widetilde{t}) = T_f \widetilde{t}$$

$$\begin{aligned}
\overline{c_i}(\widetilde{r}, \widetilde{z}, \widetilde{t}) &= c_i(r(\widetilde{r}), z(\widetilde{z}), t(\widetilde{t})) \\
\overline{\theta}(\widetilde{r}, \widetilde{z}, \widetilde{t}) &= \theta(r(\widetilde{r}), z(\widetilde{z}), t(\widetilde{t})) \\
\overline{T_I}(\widetilde{r}, \widetilde{z}) &= T_I(r(\widetilde{r}), z(\widetilde{z})) \\
\overline{T_R}(\widetilde{t}) &= T_R(\widetilde{t}) \\
\overline{c_{Ii}}(\widetilde{r}, \widetilde{z}) &= c_{Ii}(r(\widetilde{r}), z(\widetilde{z})).
\end{aligned}$$

É conveniente escrever as equações diferencias para a transferência de calor e processo de reação em forma adimensional usando variáveis dependentes escaladas. Para fazer isso, precisamos especificar as dimensões que aparecem no problema prático a ser resolvido como segue:

$$\begin{aligned}
T &= \text{temperatura, } {}^0K \\
T_I &= \text{temperatura inicial,}{}^0K \\
T_R &= \text{temperatura da autoclave, } {}^0K \\
t &= \text{tempo, } min \\
L &= \text{altura do cilindro (lata) em } cm \\
R_l &= \text{raio do cilindro em } cm \\
T_f &= \text{tempo final do processo, } min \\
c_m &= \text{concentração de microoganismos, } esporos/ml \text{ or } UFC/gr \\
& \text{ onde UFC significa (unidades formadoras de colônia)} \\
c_{\mathrm{Im}} &= \text{concentração inicial de microorganismos} \\
c_n &= \text{concentração de nutrientes} \\
c_{In} &= \text{concentração inicial de nutrientes} \\
C_1 &= \begin{array}{c}\text{concentração média final de microorganismos desejável dentro da lata} \\ 10^{-5} \leq C_1 \leq 10^{-10}\end{array} \\
K_i &= \text{fator pre-exponencial , para i=m,n } 1/min \\
E_i &= \begin{array}{c}\text{energia de ativação para destruição de espécies i, i=m,n, } Kj/mole \\ J/mole = 0,239.cal/mole\end{array} \\
R &= \text{contante da lei do gás, } 1,987\ cal/{}^0K.mole \\
\alpha &= \text{difusividade térmica, } cm^2/min.
\end{aligned}$$

Observe que estamos usando o sistema de unidades MKS-${}^0K$.

Fazemos agora a adimensionalização considerando a temperatura inicial T_I como uma constante. Portanto podemos escrever

$$\overline{T_I}(\widetilde{r},\widetilde{z}) = T_I$$

e

$$\begin{aligned}
\widetilde{c}_m(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) &= \frac{\overline{c_m}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})}{\overline{c_{Im}}(\widetilde{r},\widetilde{z})} \\
\widetilde{c}_n(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) &= \frac{\overline{c_n}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})}{\overline{c_{In}}(\widetilde{r},\widetilde{z})} \\
\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) &= \frac{\overline{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})}{T_I} \\
\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}) &= \frac{\overline{T_R}(\widetilde{t}) - T_I}{T_I}
\end{aligned}$$

$$\overline{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) + \overline{T_R}(\widetilde{t}) = (\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) + \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}) + 1)T_I$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{c}_m}{\partial \widetilde{t}} &= -T_f K_m \widetilde{c}_m(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) \exp\left(\frac{-E_m}{RT_I(\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) + \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}) + 1)}\right), \ em\ \widetilde{\Omega} \times (0,1), \\
\frac{\partial \widetilde{c}_n}{\partial \widetilde{t}} &= -T_f K_n \widetilde{c}_n(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) \exp\left(\frac{-E_n}{RT_I(\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) + \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}) + 1)}\right), \ em\ \widetilde{\Omega} \times (0,1)
\end{aligned}$$

fazendo

$$\begin{aligned}
a_m &= T_f K_m, \qquad a_n = T_f K_n, \qquad a_R = \frac{\alpha T_f}{R_l^2} \qquad a_L = \frac{\alpha T_f}{L^2} \\
E &= \frac{E_n}{RT_I}, \qquad \beta = \frac{E_m}{E_n}, \qquad \widetilde{u}(\widetilde{t}) = \frac{d\widetilde{\varphi}}{d\widetilde{t}}(\widetilde{t}), \qquad \widetilde{\theta}_0 = \frac{\overline{T_R}(0) - T_I}{T_I}
\end{aligned}$$

nós conseguimos

$$\frac{d\widetilde{\varphi}}{d\widetilde{t}}(\widetilde{t}) = \widetilde{u}(\widetilde{t})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{t}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) &= a_R \frac{\partial^2 \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{r}^2}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) + a_R \frac{1}{\widetilde{r}} \frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{r}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) \\
&\quad + a_L \frac{\partial^2 \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{z}^2}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) - \widetilde{u}(\widetilde{t}), \ em \quad \widetilde{\Omega} \times (0,1)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \widetilde{c}_n}{\partial \widetilde{t}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) = -a_n \widetilde{c}_n(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) \exp\left(\frac{-\beta E}{(\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) + \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}) + 1)}\right), \; em \quad \widetilde{\Omega} \times (0,1)$$

$$\frac{\partial \widetilde{c}_m}{\partial \widetilde{t}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) = -a_m \widetilde{c}_m(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) \exp\left(\frac{-E}{(\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) + \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}) + 1)}\right), \; em \quad \widetilde{\Omega} \times (0,1),$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(0) &= \widetilde{\theta}_0 \\
\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},0) &= -\widetilde{\theta}_0 \qquad em \quad \widetilde{\Omega} \\
\widetilde{c}_m(\widetilde{r},\widetilde{z},0) &= 1 \qquad em \quad \widetilde{\Omega} \\
\widetilde{c}_n(\widetilde{r},\widetilde{z},0) &= 1 \qquad em \quad \widetilde{\Omega}
\end{aligned}$$

e condições de fronteira

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) &= 0 \qquad sobre \quad (\partial\widetilde{\Omega} \backslash \widetilde{\Sigma}) \times (0,1) \\
\frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{r}}(0,\widetilde{z},\widetilde{t}) &= 0 \qquad sobre \quad \widetilde{\Sigma} \times (0,1).
\end{aligned}$$

3.5.3 Problema de Controle

O problema agora é encontrar um tempo de comutação t_c que irá nos assegurar que a retenção de nutrientes será maximizada de modo que uma redução desejada na concentração de microorganismos seja atingida no final do processo.

Assumimos que o controle é do tipo Bang-Bang com um único tempo comutador , mais especificamente:

$$\widetilde{u}(\widetilde{t},t_c) = \begin{cases} u_{\max}, \; se & 0 \le \widetilde{t} \le t_c \\ u_{\min}, \; se & t_c < \widetilde{t} \le 1 \end{cases}$$

então nosso problema de controle é:

$$\min_{0 \le t_c \le 1} J(t_c) = \int_0^1 \int_{\widetilde{\Omega}} -\frac{\partial \widetilde{c}_n}{\partial \widetilde{t}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t},t_c) d\widetilde{\Omega} d\widetilde{t}$$

sujeito as equações dinâmicas

$$\frac{d\widetilde{\varphi}}{dt}(\widetilde{t}) = \widetilde{u}(\widetilde{t})$$

$$\frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{t}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) = a_R \frac{\partial^2 \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{r}^2}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) + a_R \frac{1}{\widetilde{r}} \frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{r}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) + a_L \frac{\partial^2 \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{z}^2}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) - \widetilde{u}(\widetilde{t}), \; em \quad \widetilde{\Omega} \times (0,1)$$

$$\frac{\partial \widetilde{c}_n}{\partial \widetilde{t}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) = -a_n \widetilde{c}_n(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) \exp\left(\frac{-\beta E}{(\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) + \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}) + 1)}\right), \; em \quad \widetilde{\Omega} \times (0,1)$$

$$\frac{\partial \widetilde{c}_m}{\partial \widetilde{t}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) = -a_m \widetilde{c}_m(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) \exp\left(\frac{-E}{(\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) + \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}) + 1)}\right), \; em \quad \widetilde{\Omega} \times (0,1),$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(0) &= \widetilde{\theta}_0 \\
\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},0) &= -\widetilde{\theta}_0, \; em \quad \widetilde{\Omega} \\
\widetilde{c}_m(\widetilde{r},\widetilde{z},0) &= 1, \; em \quad \widetilde{\Omega} \\
\widetilde{c}_n(\widetilde{r},\widetilde{z},0) &= 1, \; em \quad \widetilde{\Omega}
\end{aligned}$$

e condições de fronteira

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) &= 0, \; sobre \quad (\partial\widetilde{\Omega} \backslash \widetilde{\Sigma}) \times (0,1) \\
\frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{r}}(0,\widetilde{z},\widetilde{t}) &= 0, \; sobre \quad \widetilde{\Sigma} \times (0,1)
\end{aligned}$$

e a restrição sobre a concentração final de microorganismos

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{c}_m(\widetilde{r},\widetilde{z},1) = C_1.$$

3.5.4 Parâmetros Reais

Dimensões da lata
Diâmentro: $8.7cm$.
Comprimento: $11.6cm$.
Produto: Purê de porco
Difusividade térmica do purê de porco.
$\alpha = 0.092266 \quad cm^2/\min$.
Nutriente: Tiamina (vitamina B-1)
Energia de ativação do nutriente ($T_{ref} = 121^0C$).
$E_n = 113 \quad Kj/mole = 27007 \quad cal/mole.$
Fator pre-exponencial ($T_{ref} = 121^0C$).
$K_n = 0.015 \quad \min^{-1}$.
Microorganismo: Bacillus Stearothermophilus
Energia de ativação do nutriente ($T_{ref} = 121^0C$).
$Em = 285 \quad Kj/mole = 68115 \quad cal/mole.$
Fator pre-exponencial ($T_{ref} = 121^0C$).
$K_m = 0.57575 \cong 0.6 \quad \min^{-1}$.
Tempos e Temperaturas
$T_R(0) = 105,4^0C = 378\,^0K.$
$T_I = 71^0C = 344^0K.$
$T_f = 20 \quad \min$.
Taxa de aquecimento
$\frac{dT_R}{dt} = 11.8^0C/\min$.
Redução desejada dos microorganismos
$C_1 = 10^{-5}$ (5 log cycles).
Constante da lei do gás
$R = 1.987 \quad cal/^0K.mole.$

3.5.5 Parâmetros Adimensionais

Cálculo de $\widetilde{\varphi}(\widetilde{t})$

$$\begin{aligned}
\frac{dT_R}{dt} &= 11,8\frac{^0K}{\min}, \\
\frac{d\overline{T_R}}{d\widetilde{t}} &= \frac{dT_R}{dt}\frac{dt}{d\widetilde{t}} = \frac{dT_R}{dt}T_f = 11,8\frac{^0K}{\min} * 20\min, \\
\frac{d\overline{T_R}}{d\widetilde{t}} &= 236^0K,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}) &= \frac{\overline{T_R}(\widetilde{t}) - T_I}{T_I}, \\
\frac{d\widetilde{\varphi}}{d\widetilde{t}} &= \frac{1}{T_I}\frac{d\overline{T_R}}{d\widetilde{t}} = \frac{1}{344^0 K} * 236\,^0 K \cong 0.686\,.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
u_{\max} &= 0.686 \\
u_{\min} &= -0.686
\end{aligned}
$$

$$
u(\widetilde{t}, t_c) = \begin{cases} 0.686, & 0 \leq \widetilde{t} \leq t_c \\ -0.686\,, & t_c < \widetilde{t} \leq 1 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
a_m &= T_f K_m = 20\,\text{min} * 0.6 \frac{1}{\text{min}} = 12.0 \\
a_n &= T_f K_n = 20\,\text{min} * 0.015 \frac{1}{\text{min}} = 0.3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_R &= \frac{0.09266 * 20}{(4.35)^2} = 9.\,7934 \times 10^{-2} \\
a_L &= \frac{0.09266 * 20}{(11.6)^2} = 1.\,3772 \times 10^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
E = \frac{27007}{1.987 * 350} = 3.\,8834 \times 10^{-2}
$$

$$
\beta = \frac{68115 \quad cal/mole}{27007 \quad cal/mole} = 2.\,5221
$$

$$
\widetilde{\theta}_0 = \frac{\overline{T_R}(0) - T_I}{T_I} = \frac{378 - 344}{344} = 9.8837 \times 10^{-2}.
$$

3.6 Soluções numéricas

Agora vamos empregar o método de diferenças finitas centradas para resolver numericamente as equações para a temperatura e concentrações. A equação mais simples nós resolvemos diretamante por uma simples integração

3.6.1 A equação para a temperatura de controle

$$\frac{d\widetilde{\varphi}}{d\widetilde{t}}(\widetilde{t}) = \widetilde{u}(\widetilde{t}),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial\widetilde{t}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) &= a_R\frac{\partial^2\widetilde{\theta}}{\partial\widetilde{r}^2}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) + a_R\frac{1}{\widetilde{r}}\frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial\widetilde{r}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}),\\ &+a_L\frac{\partial^2\widetilde{\theta}}{\partial\widetilde{z}^2}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) - \widetilde{u}(\widetilde{t}),\ em\quad \widetilde{\Omega}\times(0,1),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\widetilde{c}_n}{\partial\widetilde{t}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) = -a_n\widetilde{c}_n(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})\exp\left(\frac{-\beta E}{(\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})+\widetilde{\varphi}(\widetilde{t})+1)}\right),\ em\quad \widetilde{\Omega}\times(0,1),$$

$$\frac{\partial\widetilde{c}_m}{\partial\widetilde{t}}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) = -a_m\widetilde{c}_m(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})\exp\left(\frac{-E}{(\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t})+\widetilde{\varphi}(\widetilde{t})+1)}\right),\ em\quad \widetilde{\Omega}\times(0,1),$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(0) &= \widetilde{\theta}_0\\ \widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},0) &= -\widetilde{\theta}_0 \qquad em\quad \widetilde{\Omega}\\ \widetilde{c}_m(\widetilde{r},\widetilde{z},0) &= 1 \qquad em\quad \widetilde{\Omega}\\ \widetilde{c}_n(\widetilde{r},\widetilde{z},0) &= 1 \qquad em\quad \widetilde{\Omega}\end{aligned}$$

e condições de fronteira

$$\begin{aligned}\widetilde{\theta}(\widetilde{r},\widetilde{z},\widetilde{t}) &= 0 \qquad sobre\quad (\partial\widetilde{\Omega}\backslash\widetilde{\Sigma})\times(0,1)\\ \frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial\widetilde{r}}(0,\widetilde{z},\widetilde{t}) &= 0 \qquad sobre\quad \widetilde{\Sigma}\times(0,1).\end{aligned}$$

A solução da primeira equação nós conseguimos por integração

$$\widetilde{u}(\widetilde{t},t_c) = \begin{cases} u_{\max},\ se & 0\le\widetilde{t}\le t_c\\ u_{\min},\ se & t_c<\widetilde{t}\le 1\end{cases}$$

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}) = \begin{cases} u_{\max}\widetilde{t}+\widetilde{\theta}_0 & ,\ \widetilde{t}\le t_c\\ u_{\max}(2t_c-\widetilde{t})+\widetilde{\theta}_0 & ,\ \widetilde{t}>t_c.\end{cases}$$

Cálculo da temperatura real T_R

$$\begin{aligned} T_R(t(\widetilde{t})) &= \overline{T}_R(\widetilde{t}) \\ &= T_I\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}) + T_I \\ &= T_I(\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}) + 1) \end{aligned}$$

$$t(\widetilde{t}) = T_f\widetilde{t}$$

$$\begin{aligned} T_R(T_f\widetilde{t}) &= T_I(\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}) + 1) \\ T_R(t, t_c) &= T_I(\widetilde{\varphi}(\frac{t}{12}, t_c) + 1). \end{aligned}$$

3.6.2 Discretização pelo método de diferenças finitas centradas

$$u(t, t_c) = \begin{cases} 0.686, & 0 \leq t \leq t_c \\ -0.686, & t_c < t \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = u(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial t}(r, z, t) &= a_R\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}(r, z, t) + a_R\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}(r, z, t) \\ &+ a_L\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}(r, z, t) - u(t),\ em \quad \Omega \times (0, 1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial c_n}{\partial t}(r, z, t) = -a_n c_n(r, z, t)\exp(\frac{-\beta E}{(\theta(r, z, t) + \varphi(t) + 1)}),\ em \quad \Omega \times (0, 1)$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial t}(r, z, t) = -a_m c_m(r, z, t)\exp(\frac{-E}{(\theta(r, z, t) + \varphi(t) + 1)}),\ em \quad \Omega \times (0, 1),$$

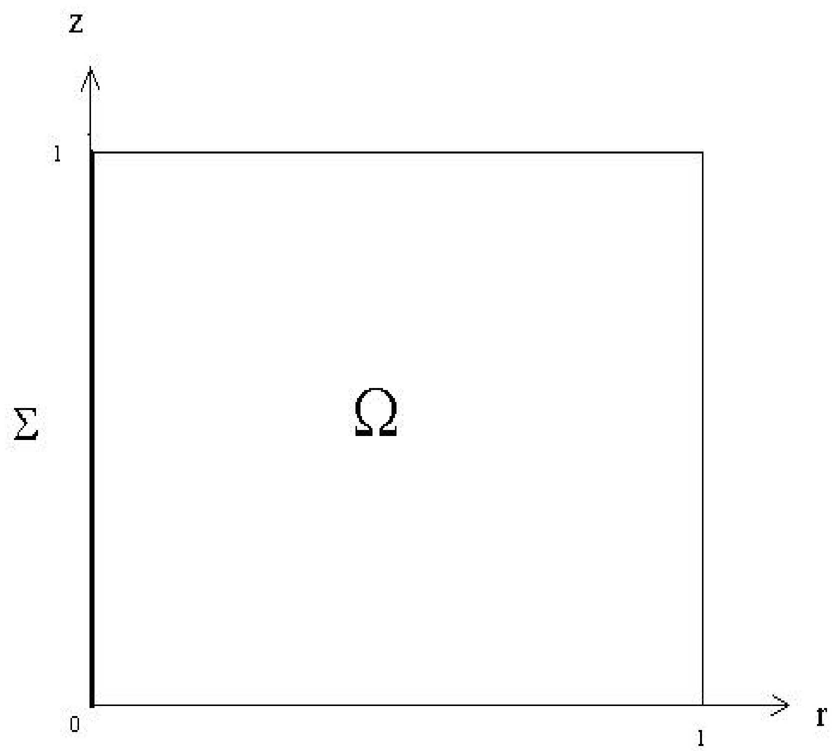
com condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \theta_0 \\ \theta(r, z, 0) &= -\theta_0 \qquad em \quad \Omega \\ c_m(r, z, 0) &= 1 \qquad em \quad \Omega \\ c_n(r, z, 0) &= 1 \qquad em \quad \Omega \end{aligned}$$

e condições de fronteira

$$\begin{aligned} \theta(r, z, t) &= 0 \qquad sobre \quad (\partial\Omega\backslash\Sigma) \times (0, 1) \\ \frac{\partial\theta}{\partial r}(0, z, t) &= 0 \qquad sobre \quad \Sigma \times (0, 1). \end{aligned}$$

Domínio:



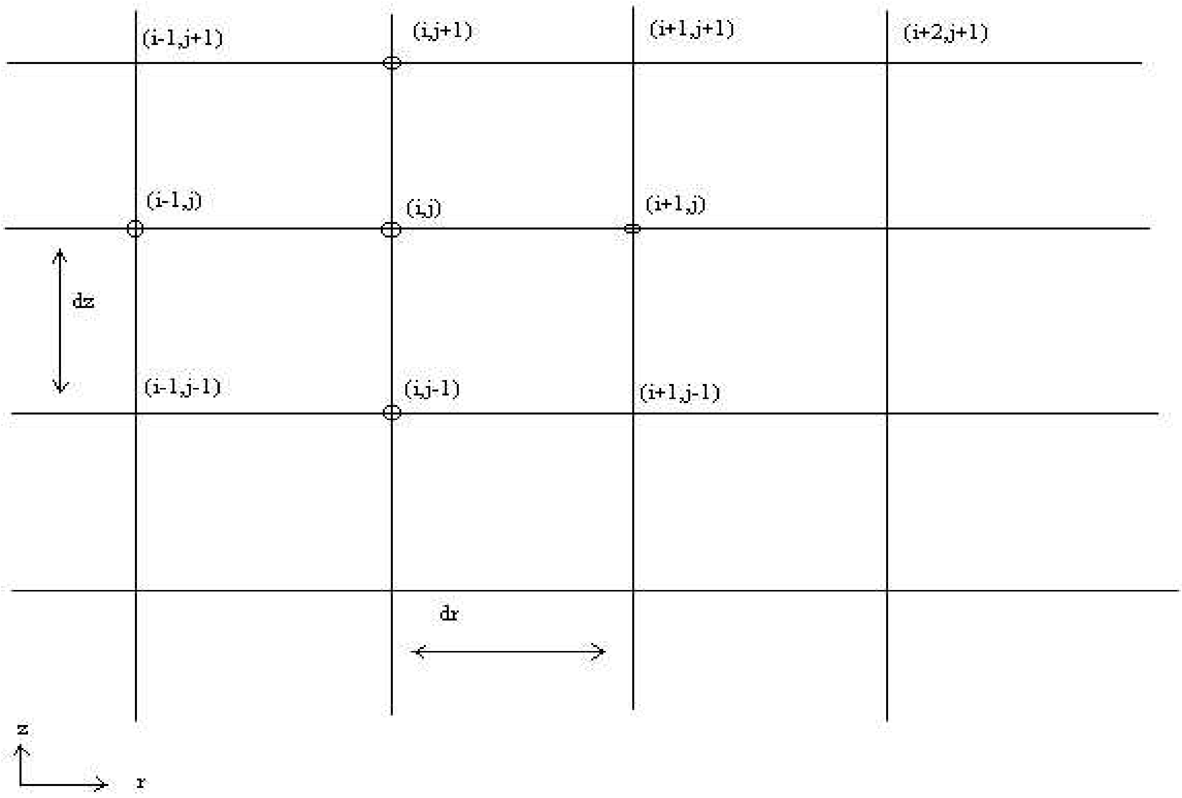
3.6.2.1 Discretização 1 - Problema estacionário para a temperatura

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= a_R \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + a_R \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \\ &\quad + a_L \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - u(t, t_c), \; em \quad \Omega \times (0, 1) \end{aligned}$$

No problema estacionário nós temos $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$ e $u(t, t_c)$ é uma constante. Portanto temos,

$$a_R \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + a_R \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + a_L \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0. \tag{3.11}$$

Malha:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} &= \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{\Delta r^2} \\
\frac{\partial\theta}{\partial r} &= \frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2\Delta r} \\
\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} &= \frac{1}{i\Delta r}\frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2\Delta r} = \frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2i\Delta r^2} \\
\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} &= \frac{\theta_{i,j+1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}}{\Delta z^2}.
\end{aligned}$$

A equação (3.8) pode ser reescrita na forma

$$\frac{a_R}{\Delta r^2}\left[\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}\right] + \frac{a_R}{\Delta r^2}\left[\frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2i}\right]$$
$$+\frac{a_L}{\Delta z^2}\left[\theta_{i,j+1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}\right] = u$$

$$\frac{a_R}{\Delta r^2}\left(1 - \frac{1}{2i}\right)\theta_{i-1,j} + \frac{a_L}{\Delta z^2}\theta_{i,j-1} - 2\left(\frac{a_R}{\Delta r^2} + \frac{a_L}{\Delta z^2}\right)\theta_{i,j}$$
$$\frac{a_L}{\Delta z^2}\theta_{i,j+1} + \frac{a_R}{\Delta r^2}\left(1 + \frac{1}{2i}\right)\theta_{i+1,j} = u.$$

Fazendo

$$\begin{aligned}
\alpha_1^i &= \frac{a_R}{\Delta r^2}\left(1 - \frac{1}{2i}\right) \\
\alpha_2 &= \frac{a_L}{\Delta z^2} \\
\alpha_3 &= -2\left(\frac{a_R}{\Delta r^2} + \frac{a_L}{\Delta z^2}\right) \\
\alpha_4 &= \frac{a_L}{\Delta z^2} \\
\alpha_5 &= \frac{a_R}{\Delta r^2}\left(1 + \frac{1}{2i}\right)
\end{aligned}$$

conseguimos

$$\alpha_1^i\theta_{i-1,j} + \alpha_2\theta_{i,j-1} + \alpha_3\theta_{i,j} + \alpha_4\theta_{i,j+1} + \alpha_5\theta_{i+1,j} = u.$$

Definindo

$$F\theta = \alpha_1^i\theta_{i-1,j} + \alpha_2\theta_{i,j-1} + \alpha_3\theta_{i,j} + \alpha_4\theta_{i,j+1} + \alpha_5\theta_{i+1,j}$$

nós escrevemos,

$$F\theta = u.$$

3.6.2.2 Discretização 2 - Evolução no tempo para a Temperatura

Usando as notações e operadores definidos na última seção nós podemos agora colocar nosso problema na forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + F\theta = u$$

Discretizando o tempo conseguimos,

$$\frac{\theta^{k+1} - \theta^k}{\Delta t} + \lambda F \theta^{k+1} + (1-\lambda) F \theta^k = u^{k+1} \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$(I + \lambda \Delta t F)\, \theta^{k+1} - (I - (1-\lambda)\Delta t F)\theta^k = u^{k+1}\Delta t$$

$$(I + \lambda \Delta t F)\, \theta^{k+1} = u^{k+1}\Delta t + (I - (1-\lambda)\Delta t F)\theta^k.$$

Assim necessitamos resolver o sistema

$$A\theta^{k+1} = u^{k+1}\Delta t + B\theta^k$$

onde $A = (I + \lambda \Delta t F)$, $B = (I - (1-\lambda)\Delta t F)$ e

$$\theta = (\theta_{1,1}, \theta_{2,1}, ..., \theta_{k_r,1}; \theta_{1,2}, ..., \theta_{k_r,2}; \theta_{1,3}, ..., \theta_{1,k_z}; ......; \theta_{k_r,k_z})^T.$$

3.6.2.3 Discretização 3 - Evolução no tempo para as Concentrações

Nós consideramos as funções

$$\begin{aligned} f_n(r,t,z) &= \exp\left[\frac{-\beta E}{\theta(r,t,z) + \varphi(t) + 1}\right] \\ f_m(r,t,z) &= \exp\left[\frac{-E}{\theta(r,t,z) + \varphi(t) + 1}\right] \\ f_i^k &= f_i(\cdot,\cdot,t_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c_n^{k+1} - c_n^k}{\Delta t} &= -a_n \lambda c_n^{k+1} f_n^{k+1} + (1-\lambda) c_n^k f_n^k \\ c_n^{k+1} &= c_n^k - a_n \lambda \Delta t c_n^{k+1} f_n^{k+1} + (1-\lambda)\Delta t c_n^k f_n^k \end{aligned}$$

$$\left(I + a_n \lambda \Delta t f_n^{k+1} I\right) * c_n^{k+1} = \left(I - a_n (1-\lambda)\Delta t f_n^k\right) * c_n^k.$$

E definimos as matrizes,

$$\begin{aligned} A_1(t_{k+1}) &= I + a_n \lambda \Delta t f_n^{k+1} \\ A_2(t_k) &= I - a_n (1-\lambda) \Delta t f_n^k \end{aligned}$$

onde $A_1(t_{k+1}), A_2(t_k)$ são vetores de mesmo comprimento que $c_n^k, c_n^{k+1}, f_n^k, f_n^{k+1}$.

$$A_2(t_{k+1}) * c_n^{k+1} = A_1(t_k) * c_n^k$$

onde $*$ representa o produto termo a termo de ambos os vetores na igualdade.

Analogamente

$$\begin{aligned} B_1(t_{k+1}) &= I + a_m \lambda \Delta t f_m^{k+1} \\ B_2(t_k) &= I - a_m (1-\lambda) \Delta t f_m^k \end{aligned}$$

$$B_2(t_{k+1}) * c_n^{k+1} = B_1(t_k) * c_n^k.$$

Condições de Fronteira

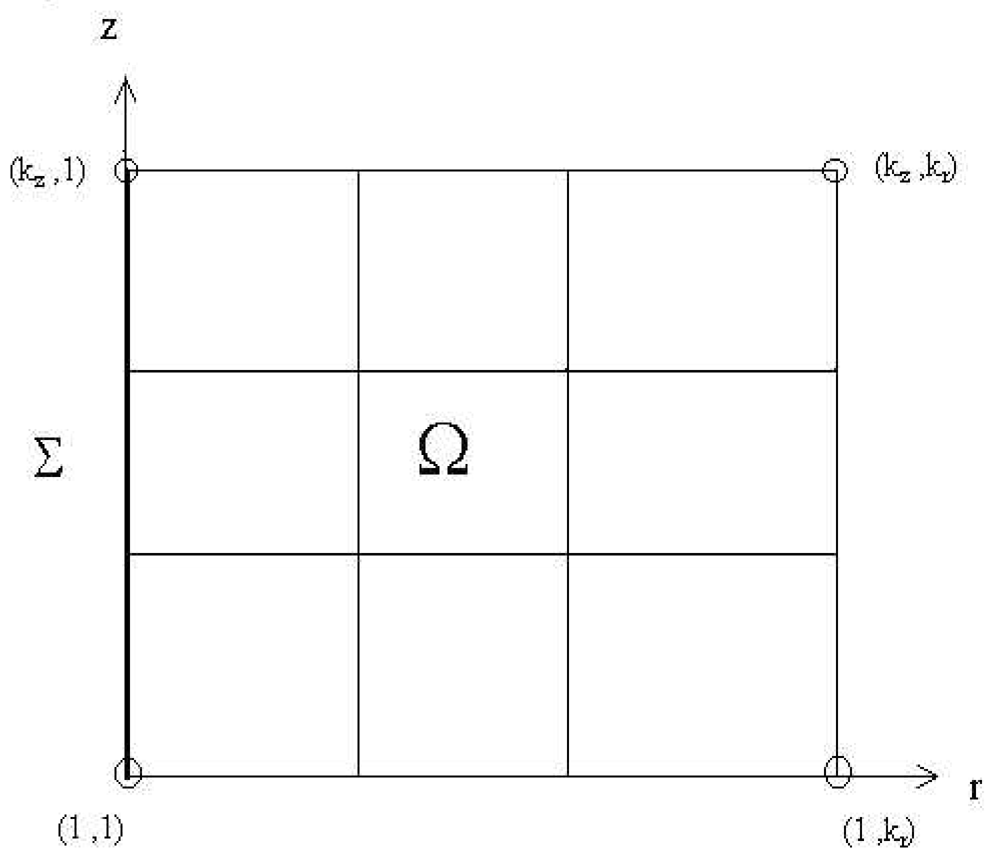
$$\theta(r, z, t) = 0 \qquad sobre \quad (\partial\Omega \backslash \Sigma) \times (0,1)$$

$$\theta_{i,j}^k = 0 \qquad para \qquad \begin{cases} i = 1 : k_r \;\; , \;\; j = 1 \\ i = k_r \;\; , \;\; j = 1 : k_z \;\; , k \geq 1 \\ i = 1 : k_r \;\; , \;\; j = k_z \end{cases}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r}(0, z, t) = 0 \qquad sobre \quad \Sigma \times (0,1)$$

$$\theta_{i+1,j}^k = \theta_{i,j}^k \qquad para \qquad i = 1, j = 1 : k_z, k \geq 1.$$

E na figura abaixo podemos visualizar os índices k_r, k_z :



3.6.3 Resultados

Em aplicações existe a restrição sobre as temperaturas máximas e mínimas do equipamento (autoclave) e para obtermos resultados mais realistas vamos impor restrições sobre a temperatura de autoclave T_R. Faremos a seguinte imposição: $20^0C \leq T_R \leq 130^0C$. Esta restrição alterará o perfil da temperatura T_R e levando esta mudança em consideração conseguimos a função

$$u(t,t_c) = \begin{cases} u_{\max}, & se \quad 0 \leq t \leq t_p \\ 0, & se \quad t_p \leq t \leq t_c \\ u_{\min}, & se \quad t_c < t \leq t_s \\ 0, & se \quad t_s < t \leq 1 \end{cases}$$

Utilizando esta nova função e o mesmos parâmetros citados acima temos os seguintes resultados:

Na Figura 1 podemos observar a integral de $J(t_c)$ e no seu gráfico está marcado o único ponto que satisfaz a restrição sobre a concentração final de microorgasnismos. Na Figura 2 é mostrada a integral $Int(t_c) = \int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{c}_m(t_c, \widetilde{r}, \widetilde{z}, 1)$ e confirma-se que apenas para o ponto $t_c = 0.42$ temos $Int(t_c) = 10^{-5}$. Na Figura3 podemos observar o perfil da temperatura real T_R e podemos notar que as restrições superiores e inferiores são satisfeitas. A Figura 4 mostra o decaimento das concentrações de microorganismos e nutrientes no ponto central da lata ($r = 0$ e $z = 0.5$) e podemos ver o rápido decaimento da concentração de microorganismos. Nas Figuras 5,6,7 vemos a evolução da temperatura no semiplano da lata nos tempos $t = 0.3$ (6 min), $t = 0.42$ (8.5 min) e $t = 0.7$ (14 min) respectivamente. Nesta parte numérica agradecemos ao Prof. Mario Duran Toro e ao doutorando Joaquim Mura (DIM-UCHILE) pela colaboração no programa fonte na implementação computacional.

FIGURA 1

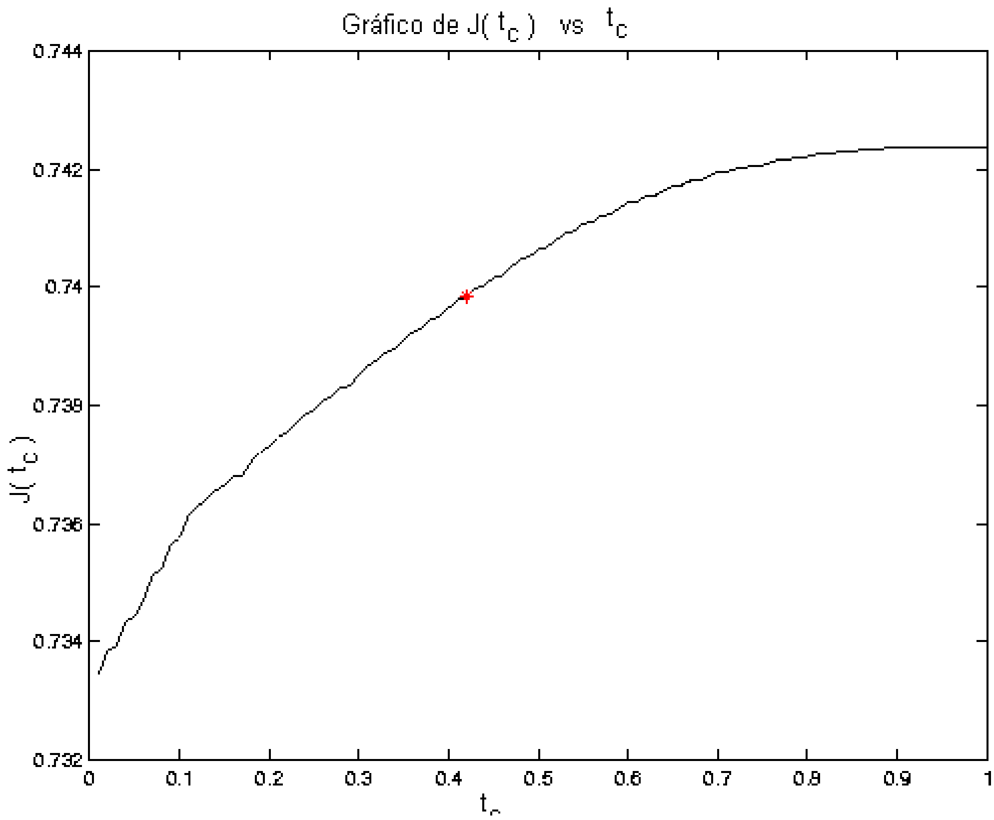


Gráfico de J(t_c) vs t_c
0.744
0.742
0.74
0.738
0.736
0.734
0.732
J(t_c)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
t_c

FIGURA 2

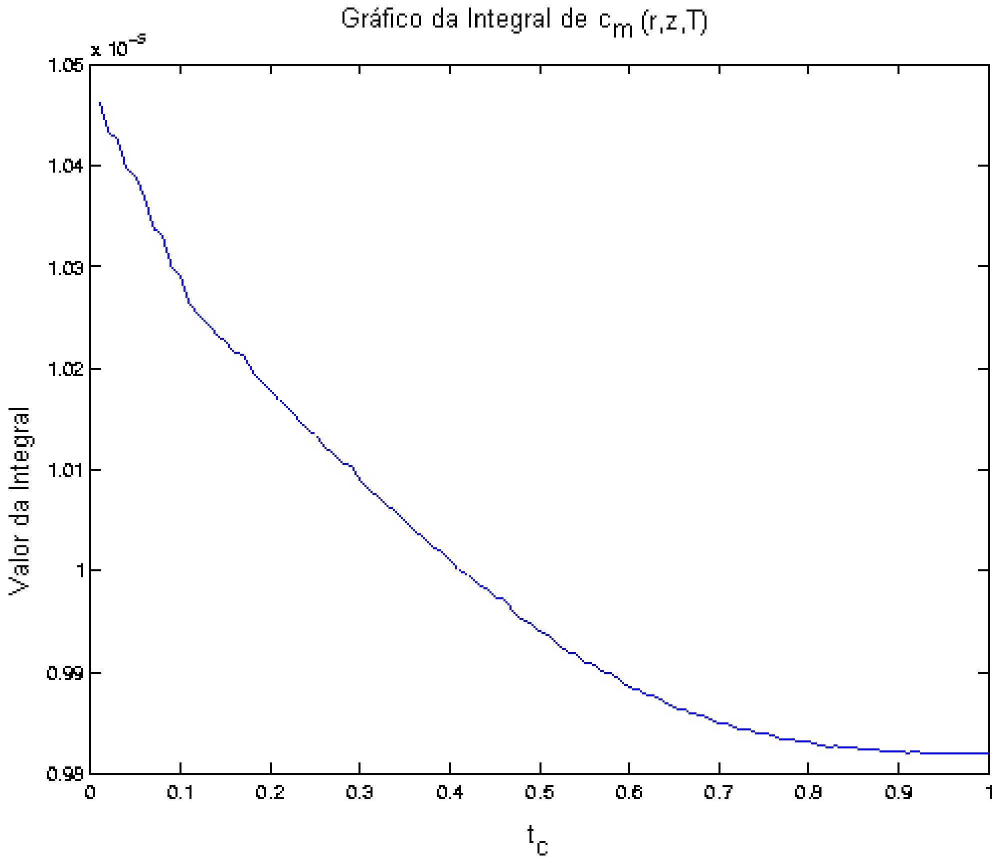


Gráfico da Integral de c_m (r,z,T)
x 10^-5
1.05
1.04
1.03
1.02
1.01
1
0.99
0.98
Valor da Integral
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
t_c

FIGURA 3

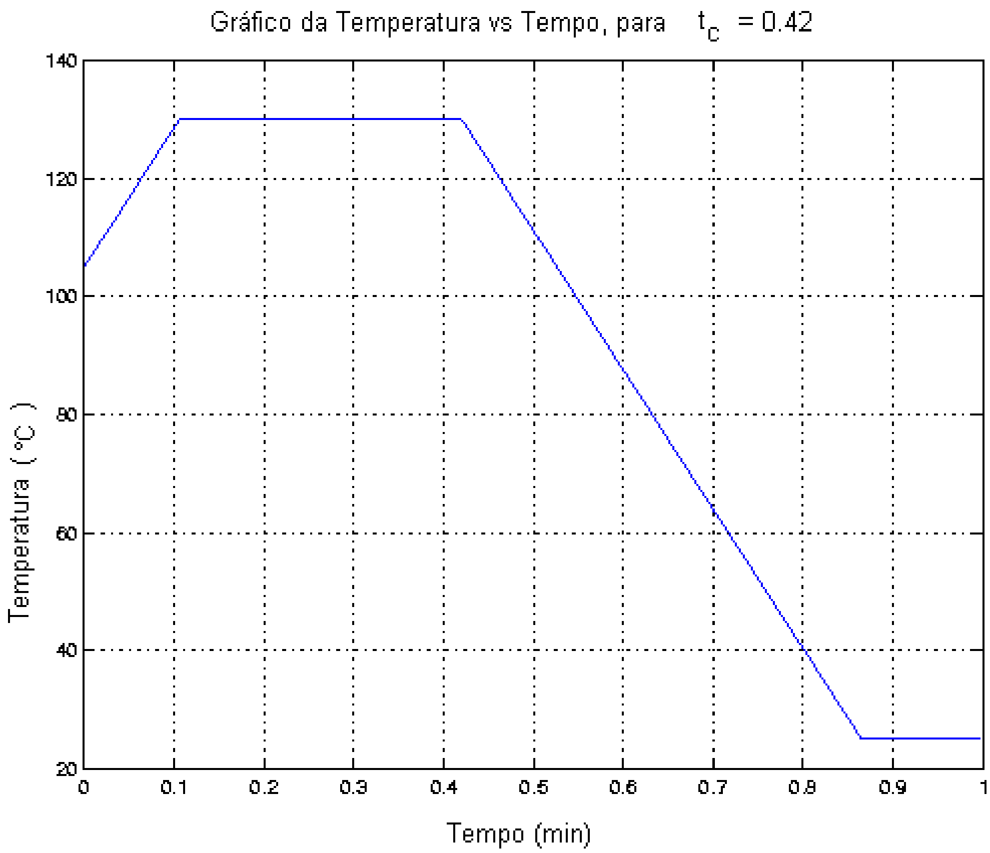


Gráfico da Temperatura vs Tempo, para t_c = 0.42
Temperatura (°C)
Tempo (min)
140
120
100
80
60
40
20
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

FIGURA 4

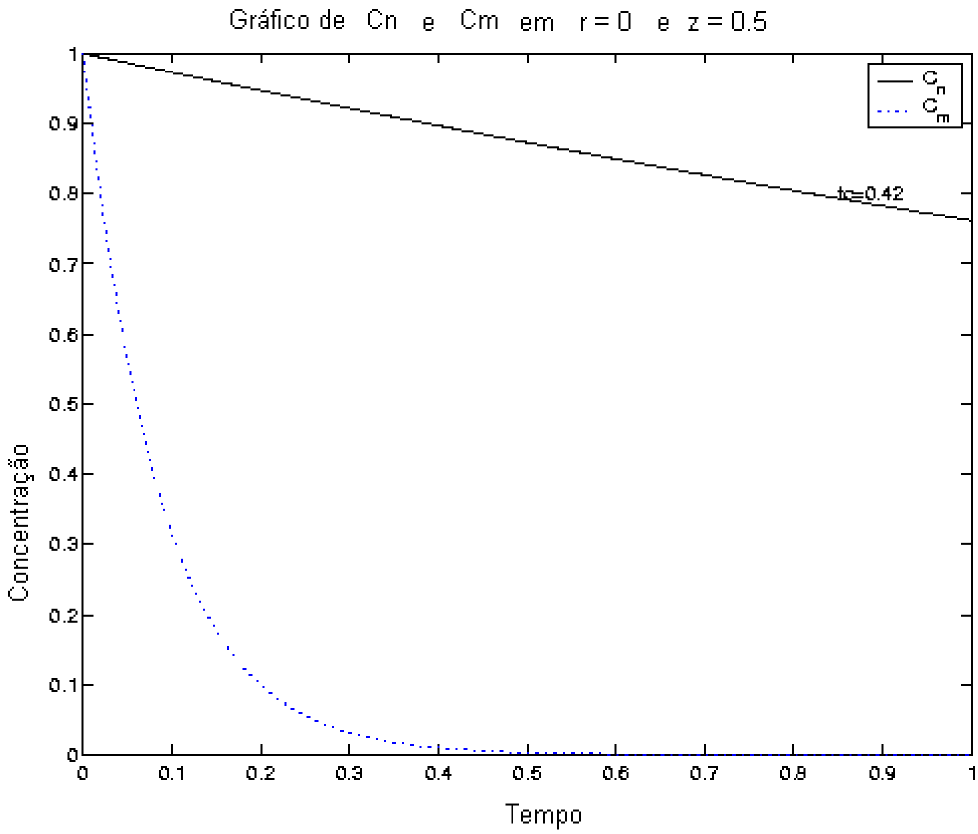


Gráfico de Cn e Cm em r = 0 e z = 0.5
Cn
Cm
tc=0.42
Concentração
Tempo
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

FIGURA 5

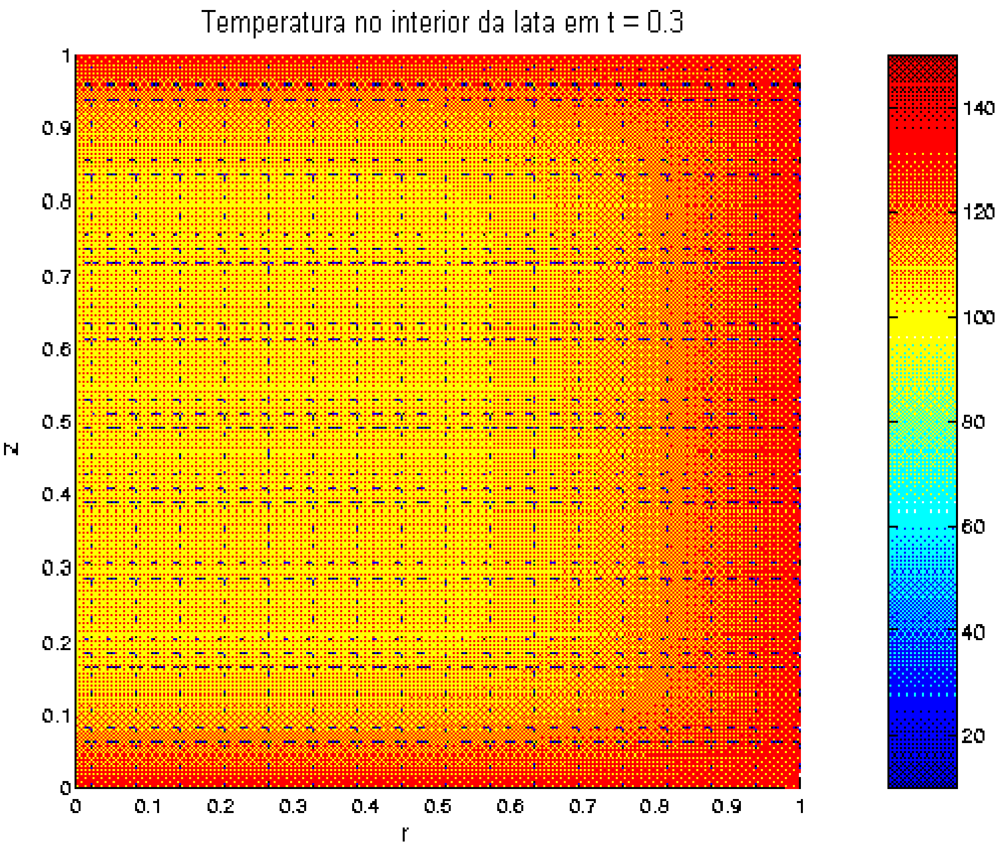

Temperatura no interior da lata em t = 0.3
z
r
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
20
40
60
80
100
120
140

FIGURA 6

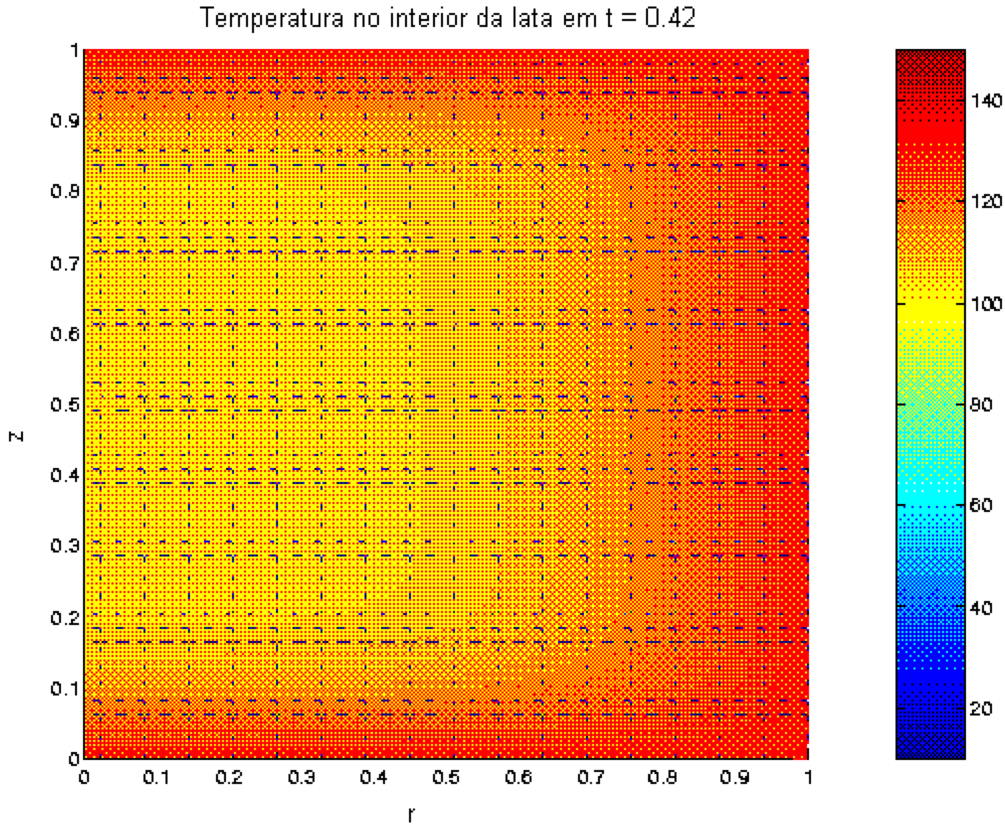
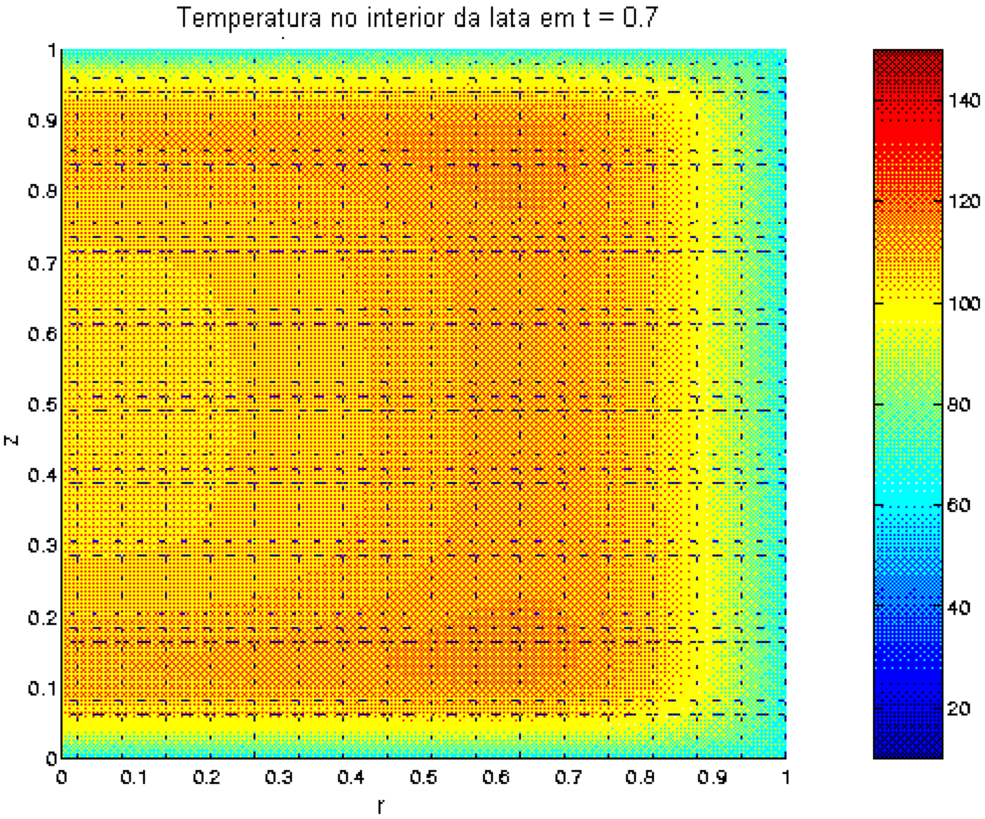

Temperatura no interior da lata em t = 0.42
z
r
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
20
40
60
80
100
120
140

FIGURA 7


Temperatura no interior da lata em t = 0.7
z
r
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
20
40
60
80
100
120
140

CAPÍTULO 4

FLUXO BIOCONVECTIVO CLÁSSICO

4.1 Introdução

Um importante problema biológico é o fluxo bioconvectivo sendo a "bioconvecção" causada pela concentração de microorganismos nadando na direção vertical em uma cultura em fluido. Um modelo para este problema foi introduzido em [24] e [25] independentemente e eles discutem aspectos físicos e biológicos relacionados a este problema.

O modelo construido em [24] diz respeito ao padrão de formação da cultura em fluido pela natação de microorganismos no sentido vertical, considerados mais densos que o meio que os envolve. São feitas as seguintes hipóteses para obtenção do modelo matemático de fluxo bioconvectivo:

(a) As propriedades de um organismo individual não se alteram apreciavelmente durante os tempos de interesse (tempos de observação macroscópica dos microorganismos) e as diferenças entre os organismos individuais não influenciam o padrão de formação e, em particular, a densidade de um organismo individual é constante e maior que a densidade do meio.

(b) A principal força do meio sobre os organismos é o arrasto viscoso (ou Stokes) e um organismo que não está nadando se moverá com o fluido.

(c) A velocidade de natação relativa ao meio consiste de duas componentes: uma aleatória e uma força constante em direção vertical.

(d) A suspensão comporta-se como um fluido ordinário (Newtoniano) e os organismos modificam a dinâmica deste fluido somente através de sua influência sobre sua densidade.

(e) A suspensão é suficientemente diluida tais que as propriedades como velocidade de natação e viscosidade podem ser tratadas como constantes.

Este modelo, consistindo das equações para o movimento da cultura em fluido sendo o fluido viscoso e incompressível, para a concentração de microorganismos foi estudado de um ponto de vista matemático em [31]. Os autores provam a existência de uma solução e a positividade da concentração para o problema estacionário e também estudam o caso não estacionário.

Em [23] um problema de controle para o fluxo bioconvectivo é apresentado e é provado neste artigo a existência de um controle ótimo e obtida as condições necessárias de otimalidade. Nosso objetivo aqui é obter as mesmas condições de otimalidade obtidas em [23] utilizando o formalismo de Dubovitskii-Milyutin mostrando sua eficácia e sua praticidade. Apresentamos também alguns detalhes das demonstrações feitas em [23] para um melhor entendimento do trabalho.

A proposição 4.1, bem como sua demonstração são de autoria de A. Căpătină, R. Stavre e em relação a esta proposição nós apenas detalhamos sua demonstração. O mesmo acontece com as poposições 4.2, 4.3, 4.4 onde nós apenas detalhamos suas demonstrações. O Teorema 4.1 declara a existência de solução fraca para a equação de fluxo bioconvectivo clássico e uma primeira demonstração deste fato é feita no trabalho de Kan-On, K. Narukawa e Y.Teramoto ([31]) onde os autores além de provar a existência de solução fraca para o problema de fluxo bioconvectivo clássico provam também que esta solução tem uma melhor regularidade (mais especificamente regularidade H^2, ver Teor. 3.1, pag. 138, [31]) e além disso eles demonstram a positividade da concentração e trabalham também com o caso de evolução do fluxo bioconvectivo clássico. A hipótese adicional feita no teorema 4.1 para garantir a unicidade é uma característica típica das equações de Navier-Stokes. A demonstração do teorema 4.1 feita por A. Căpătină, R. Stavre difere sensivelmente daquela feita em ([31]) e a recomendamos para aqueles que estão iniciando o estudo de equações de fluxo bioconvectivo clássico. Enunciamos este teorema para que tenhamos garantida a existência de solução fraca e a partir desse fato possamos propor o problema de controle. O enunciado de teorema 4.2 é mesmo contido em ([23]) e a nossa contribuição foi exatamente a aplicação do forma-lismo de Dubovitskii-Milyutin para efetuar uma nova demonstração deste teorema, e com aplicação do formalismo de Dubovitskii-Milyutin vemos claramente de onde surgem as equações adjuntas fato este que não está claro na demonstração feita em ([23]). Salientamos aqui que nosso objetivo neste capítulo foi apresentar mais uma bonita aplicação do formalismo de Dubovitskii-Milyutin mostrando que esta ferramenta é bastante eficaz na resolução de problemas de controle distribuido.

4.2 Resultados de Existência e Unicidade

Apresentamos agora as equações de fluxo bioconvectivo clássico em sua forma original e após algumas mudanças de variávieis faremos a formulação variacional. Definiremos o que é uma solução fraca da equação de fluxo bioconvectivo clássico. quando o fluxo estacionário de uma cultura em fluido viscoso e incompressível é considerado.

Nós supomos que a região de fluxo é um domínio limitado em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira Lipschitz, $\partial\Omega$.

Procuramos uma função vetorial $\mathbf{u}$ representando a velocidade da cultura e duas funções escalares c e p representando a concentração de microorganismos e a pressão da cultura em fluído, respectivamente, que são definidas em Ω e satisfazem o seguinte sistema de equações e condições de fronteira:

$$
\begin{aligned}
-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= -g(1+\gamma c)\mathbf{i}_3 + \mathbf{f} && \text{em } \Omega, && (4.1)\\
div\mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega, && (4.2)\\
-\theta\Delta c + \mathbf{u}\cdot\nabla c + U\frac{\partial c}{\partial x_3} &= 0 && \text{em } \Omega, && (4.3)\\
\mathbf{u} &= 0 && \text{em } \partial\Omega, && (4.4)\\
\theta\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} - Ucn_3 &= 0 && \text{em } \partial\Omega, && (4.5)
\end{aligned}
$$

onde $\mathbf{f}$ é a força externa dada, g é a aceleração da gravidade, $\nu > 0$ é a viscosidade cinemática da cultura em fluído, $\theta > 0$ é taxa de difusão de microorganismos, $U > 0$ é a velocidade média da natação em direção a superfície do fluído dos microorganismos, $\gamma = \frac{\rho_0}{\rho_m} - 1 > 0$ onde ρ_0 é a densidade de um organismo individual e ρ_m é a densidade da cultura, $\mathbf{i}_3 = (0,0,1)$ o vetor unitário na direção vertical, $\mathbf{n}$ é o vetor unitário externo e $n_3 = \mathbf{n}.\ \mathbf{i}_3$ é a terceira componente do vertor normal.

Introduzimos a função $q = p + gx_3$ e temos que q satisfaz

$$
\begin{aligned}
\nabla q &= \nabla p + \nabla(gx_3)\\
&= \nabla p + (0,0,g)\\
&= \nabla p + g\cdot\mathbf{i}_3.
\end{aligned}
$$

Assim $\nabla p = \nabla q - g\cdot\mathbf{i}_3$.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla q - g.\mathbf{i}_3 &= -g(1+\gamma c)\mathbf{i}_3 + \mathbf{f}\\
-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla q &= -g\gamma c\mathbf{i}_3 + \mathbf{f}\\
-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla q &= -kc\mathbf{i}_3 + \mathbf{f}
\end{aligned}
$$

Deste modo (4.1)-(4.5) é equivalente a: Encontrar $\mathbf{u}$,q, c tais que,

$$
\begin{aligned}
-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla q &= -kc\mathbf{i}_3 + \mathbf{f} && \text{em } \Omega && (4.6)\\
div\mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega && (4.7)\\
-\theta\Delta c + \mathbf{u}\cdot\nabla c + U\frac{\partial c}{\partial x_3} &= 0 && \text{em } \Omega && (4.8)\\
\mathbf{u} &= 0 && \text{em } \partial\Omega && (4.9)\\
\theta\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} - Ucn_3 &= 0 && \text{em } \partial\Omega && (4.10)
\end{aligned}
$$

onde $k = g\gamma$.

A formulação variacional para (4.6)-(4.10) é a seguinte: Encontrar $\mathbf{u}, c$ tais que,

$$
\begin{array}{rcll}
(\mathbf{u}, c) \in V \times H^1(\Omega) & & & \\
\nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) & = & -k \int_\Omega c\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} + \langle \mathbf{f}, \mathbf{z} \rangle & \forall \mathbf{z} \in V \\
\theta a(c, r) + b(\mathbf{u}, c, r) - U \int_\Omega c \frac{\partial r}{\partial x_3} dx & = & 0 & \forall r \in H^1(\Omega)
\end{array}
\tag{4.11}
$$

onde

$$
\begin{array}{lcl}
a_0(\mathbf{u}, \mathbf{z}) & = & \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{z} dx, \\
b_0(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) & = & \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} dx, \\
a(c, r) & = & \int_\Omega \nabla c \cdot \nabla r dx, \\
b(\mathbf{u}, c, r) & = & \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla c) r dx,
\end{array}
\tag{4.12}
$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto de dualidade entre $(H^{-1}(\Omega))^3$ e $(H_0^1(\Omega))^3$ e V é o espaço de Hilbert separável

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^3 \, | div\, \mathbf{v} = 0 \right\}$$

munido do produto escalar $(\mathbf{v}, \mathbf{w})_V = a_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. A função conhecida $\mathbf{f}$ é tomada em $(H^{-1}(\Omega))^3$.

Definição 4.1. Um par $(\mathbf{u}, c) \in V \times H^1(\Omega)$ é chamado solução fraca das equações (4.1) a (4.5) se ele satisfaz a formulação variacional (4.11)

Notamos que $(\mathbf{u}_0, 0)$ é uma solução fraca de (4.11) onde $\mathbf{u}_0$ satisfaz o problema de Navier-Stokes para fluídos incompressíveis. Como esta solução não descreve o fluxo bioconvectivo, estudamos o seguinte problema: Encontrar $\mathbf{u}_\alpha, c_\alpha$ tais que,

$$
\begin{array}{rcll}
(\mathbf{u}_\alpha, c_\alpha) \in V \times H^1(\Omega) & & & \\
\nu a_0(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha, \mathbf{z}) & = & -k \int_\Omega c_\alpha \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} + \langle \mathbf{f}, \mathbf{z} \rangle, & \forall \mathbf{z} \in V \\
\theta a(c_\alpha, r) + b(\mathbf{u}_\alpha, c_\alpha, r) - U \int_\Omega c_\alpha \frac{\partial r}{\partial x_3} dx & = & 0\,, & \forall r \in H^1(\Omega) \\
\int_\Omega c_\alpha dx & = & \alpha &
\end{array}
\tag{4.13}
$$

onde α é uma constante positiva.

Na sequência provaremos (com algumas hipóteses sobre θ, U, ν e α) a existência e unicidade da solução de (4.13). Para isto definimos

$$\widetilde{c}_\alpha = c_\alpha - \frac{\alpha}{|\Omega|} \tag{4.14}$$

e obtemos o seguinte problema equivalente (4.13): Encontrar $\mathbf{u}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha$ tais que,

$$
\begin{array}{rcll}
(\mathbf{u}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha) \in V \times \widetilde{H^1}(\Omega) & & & \\
\nu a_0(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha, \mathbf{z}) & = & -k \int_\Omega \widetilde{c}_\alpha \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} dx + \langle \mathbf{f}, \mathbf{z} \rangle & \forall \mathbf{z} \in V \\
\theta a(\widetilde{c}_\alpha, r) + b(\mathbf{u}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha, r) - U \int_\Omega \widetilde{c}_\alpha \frac{\partial r}{\partial x_3} dx & = & \frac{U\alpha}{|\Omega|} \int_\Omega \frac{\partial r}{\partial x_3} dx & \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega)
\end{array}
\tag{4.15}
$$

onde $\widetilde{H^1}$ é o seguinte espaço de Hilbert:

$$\widetilde{H^1} = \left\{ r \in H^1(\Omega) \quad \Big| \int_\Omega r dx = 0 \right\}$$

munido do seguinte produto escalar $(c,r)_{\widetilde{H^1}} = a(c,r)$.

Para obter esta equivalência acima su-bstituimos (4.14) em $(4.13)_2$, notando que $\int_\Omega \widetilde{c}_\alpha dx = 0$, e obtemos diretamente $(4.15)_2$. Para obter $(4.15)_1$ basta substituir (4.14) na equação (4.6) e fazer novamente a formulação variacional. De fato:

$$\begin{aligned}
-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla q &= -k\widetilde{c}\mathbf{i}_3 + \mathbf{f} \\
-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla q &= -k\widetilde{c}_\alpha\mathbf{i}_3 + \frac{k\alpha}{|\Omega|}\mathbf{i}_3 + \mathbf{f} \\
-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla q - \frac{k\alpha}{|\Omega|}\mathbf{i}_3 &= -k\widetilde{c}_\alpha\mathbf{i}_3 + \mathbf{f} \\
-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla(q - \frac{k\alpha}{|\Omega|}x_3) &= -k\widetilde{c}_\alpha\mathbf{i}_3 + \mathbf{f}
\end{aligned}$$

Fazendo agora a formulação variacional com $\mathbf{z} \in V$ obtemos $(4.15)_2$.

No desenvolvimento deste trabalho vamos precisar das seguintes estimativas:

$$\begin{array}{lll}
\|\mathbf{v}\|_{(L^2(\Omega))^3} & \le & C\|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \\
\|c\|_{L^2(\Omega)} & \le & C\|c\|_{\widetilde{H^1}} \quad \forall c \in \widetilde{H^1}, \\
|b_0(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{z})| & \le & C_1\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{w}\|_V\|\mathbf{z}\|_V \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{z} \in V, \\
|b(\mathbf{u},c,r)| & \le & C_1\|\mathbf{u}\|_V\|c\|_{\widetilde{H^1}}\|r\|_{\widetilde{H^1}} \quad \forall \mathbf{u} \in V, \forall c,r \in \widetilde{H^1},
\end{array} \tag{4.16}$$

onde C, C_1 são constantes positivas dependendo somente de Ω.

Daqui por diante supomos sempre que (ver [31])

$$U < \frac{\theta}{C}. \tag{4.17}$$

PROPOSIÇÃO 4.1. Se $(\mathbf{u}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha)$ é uma solução de (4.15) então as seguintes estimativas são válidas

$$\|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H^1}} \le \frac{U\alpha}{|\Omega|^{1/2}(\theta - UC)}, \tag{4.18}$$

$$\|\mathbf{u}_\alpha\|_V \le \frac{1}{\nu}\left(\|\mathbf{f}\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} + \frac{kCU\alpha}{|\Omega|^{1/2}(\theta - UC)}\right). \tag{4.19}$$

Prova. Tomando $r = \widetilde{c}_\alpha$ em $(4.15)_1$ temos

$$\theta a(\widetilde{c}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha) + b(\mathbf{u}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha) - U \int_\Omega \widetilde{c}_\alpha \frac{\partial \widetilde{c}_\alpha}{\partial x_3} dx = \frac{U\alpha}{|\Omega|} \int_\Omega \frac{\partial \widetilde{c}_\alpha}{\partial x_3} dx$$

$$\begin{aligned}
(\widetilde{c}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha)_{\widetilde{H^1}} &= \frac{U}{\theta} \int_\Omega \widetilde{c}_\alpha \frac{\partial \widetilde{c}_\alpha}{\partial x_3} dx + \frac{U\alpha}{\theta\,|\Omega|} \int_\Omega \frac{\partial \widetilde{c}_\alpha}{\partial x_3} dx \\
\|\widetilde{c}_\alpha\|^2_{\widetilde{H^1}} &\leq \left| \frac{U}{\theta} \int_\Omega \widetilde{c}_\alpha \frac{\partial \widetilde{c}_\alpha}{\partial x_3} dx + \frac{U\alpha}{\theta\,|\Omega|} \int_\Omega \frac{\partial \widetilde{c}_\alpha}{\partial x_3} dx \right| \\
&\leq \frac{U}{\theta} \|\widetilde{c}_\alpha\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \widetilde{c}_\alpha}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{U\alpha}{\theta\,|\Omega|} \left\| \frac{\partial \widetilde{c}_\alpha}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{1/2} \\
&\leq \frac{UC}{\theta} \|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H^1}} \|\nabla \widetilde{c}_\alpha\|_{L^2(\Omega)} + \frac{U\alpha}{\theta\,|\Omega|^{1/2}} \|\nabla \widetilde{c}_\alpha\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{UC}{\theta} \|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H^1}} \|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H^1}} + \frac{U\alpha}{\theta\,|\Omega|^{1/2}} \|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H^1}} \\
&\leq \frac{UC}{\theta} \|\widetilde{c}_\alpha\|^2_{\widetilde{H^1}} + \frac{U\alpha}{\theta\,|\Omega|^{1/2}} \|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H^1}} \\
\|\widetilde{c}_\alpha\|^2_{\widetilde{H^1}} (1 - \frac{UC}{\theta}) &\leq \frac{U\alpha}{\theta\,|\Omega|^{1/2}} \|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H^1}} \\
\|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H^1}} &\leq \frac{U\alpha}{\theta\,|\Omega|^{1/2}} \frac{\theta}{(\theta - UC)} = \frac{U\alpha}{|\Omega|^{1/2} (\theta - UC)}
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $\mathbf{z} = \mathbf{u}_\alpha$ em $(4.15)_2$ temos,

$$\nu a_0(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha) + b_0(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}_\alpha) = -k \textstyle\int_\Omega \widetilde{c}_\alpha \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{u}_\alpha + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_{\boldsymbol{\alpha}} \rangle$$

$$
\begin{aligned}
\nu \left\| \mathbf{u}_\alpha \right\|_V^2 &= -k \int_\Omega \widetilde{c}_\alpha \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{u}_\alpha + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_{\boldsymbol{\alpha}} \rangle \\
&\leq \left| -k \int_\Omega \widetilde{c}_\alpha \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{u}_\alpha + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_{\boldsymbol{\alpha}} \rangle \right| \\
&\leq k \int_\Omega \left| \widetilde{c}_\alpha \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{u}_\alpha \right| + \left| \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_{\boldsymbol{\alpha}} \rangle \right| \\
&\leq k \left\| \widetilde{c}_\alpha \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \mathbf{u}_{\alpha_3} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \mathbf{f} \right\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} \left\| \mathbf{u}_\alpha \right\|_V \\
&\leq kC \left\| \widetilde{c}_\alpha \right\|_{\widetilde{H^1}} \left\| \mathbf{u}_\alpha \right\|_{(L^2(\Omega))^3} + \left\| \mathbf{f} \right\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} \left\| \mathbf{u}_\alpha \right\|_V \\
&\leq kC \left\| \widetilde{c}_\alpha \right\|_{\widetilde{H^1}} C \left\| \mathbf{u}_\alpha \right\|_V + \left\| \mathbf{f} \right\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} \left\| \mathbf{u}_\alpha \right\|_V \\
\nu \left\| \mathbf{u}_\alpha \right\|_V &\leq kC^2 \left\| \widetilde{c}_\alpha \right\|_{\widetilde{H^1}} + \left\| \mathbf{f} \right\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} \\
&\leq \frac{kC^2 U\alpha}{\left| \Omega \right|^{1/2} (\theta - UC)} + \left\| \mathbf{f} \right\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} \\
\left\| \mathbf{u}_\alpha \right\|_V &\leq \frac{1}{\nu} \left(\left\| \mathbf{f} \right\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} + \frac{kC^2 U\alpha}{\left| \Omega \right|^{1/2} (\theta - UC)} \right).
\end{aligned}
$$

■

TEOREMA 4.1. Para cada $\alpha \geq 0$, o problema (4.15) tem ao menos uma solução $(\mathbf{u}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha)$. Além disso, se a viscosidade ν satisfaz a condição

$$\nu^2 \geq C_1 \left\| \mathbf{f} \right\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} \tag{4.20}$$

então existe $\alpha' > 0$ tal que para cada $\alpha \in [0, \alpha']$, (4.15) tem uma única solução.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [23].

4.3 Um Problema de Controle

Nesta seção supomos que (4.17) é satisfeita

Nós consideramos o funcional

$$
\begin{aligned}
J: \ & K \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R} \\
& J(\alpha, c) = \tfrac{1}{2} \left\| c - c_d \right\|_2^2 + \tfrac{N}{2} \alpha^2
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

onde $K \subset [0, +\infty)$ é um intervalo fechado e não vazio, N é uma constante não negativa e $c_d \in L^2(\Omega)$ é uma função dada.

Nós formulamos o problema de controle ótimo como segue:

$$\min\{J(\alpha, c), \quad (\alpha, c) \in T\}, \tag{4.22}$$

onde T é o conjunto não vazio, fracamente fechado:

$$T = \{(\alpha, c) \in K \times H^1(\Omega) \quad | \, \exists \mathbf{u} \in V \text{ tal que } (\mathbf{u}, c) \text{ satisfaz } (2.14)\}. \tag{4.23}$$

O termo relevante em (4.21) é $\frac{1}{2}\|c - c_d\|_2^2$ que fornece uma estimativa da diferença entre a componente c de um elemento $(\mathbf{u}, c)$ satisfazendo (4.13) e uma dada configuração c_d de concentração.

Daqui em diante supomos que K é limitado ou $N > 0$.

O primeiro resultado a ser provado é a existência de solução de (4.22):

AFIRMAÇÃO 4.1. Se $\{(\alpha_n, c_n)\}_n \subset T$ é uma sequência minimizante de J então $\{(\alpha_n, c_n)\}_n$ é limitada

Prova: Seja $\{(\alpha_n, c_n)\}_n \subset T$ uma sequência minimizante de J, ou seja, $J(\alpha_n, c_n) \to \inf_{(\alpha,c)\in T} J(\alpha, c)$ em $\mathbb{R}$. Da convergência de $J(\alpha_n, c_n)$ vem que $J(\alpha_n, c_n)$ é limitada em $\mathbb{R}$ e portanto existe K_1 tal que $|J(\alpha_n, c_n)| \leq K_1$ assim,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\int_\Omega (c_n - c_d)^2 dx + \frac{N}{2}\alpha^2\right| &\leq K_1\\ \frac{1}{2}\|c_n - c_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{N}{2}\alpha_n^2 &\leq K_1\end{aligned}$$

Isto significa que $\alpha_n^2 \leq K_1$ e $\|c_n - c_d\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K_1$. Mas

$$\begin{aligned}\|c_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left(\|c_n - c_d\|_{L^2(\Omega)} + \|c_d\|_{L^2(\Omega)}\right)^2\\ &\leq 2^2\left(\|c_n - c_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|c_d\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\ &\leq 2^2\left(K_1 + \|c_d\|_{L^2(\Omega)}^2\right) = K_2.\end{aligned}$$

Como $\{(\alpha_n, c_n)\}_n \subset T$ sabemos que existe $\mathbf{u}_n \in V$ tal que $(\mathbf{u}_n, c_n)$ satisfaz (4.13) e portanto temos

$$\theta a(c_n, r) + b(\mathbf{u}_n, c_n, r) - U\int_\Omega c_n \tfrac{\partial r}{\partial x_3} dx \quad = 0.$$

Para cada n fixo seja $r = c_n$, assim:

$$\begin{aligned}\theta a(c_n, c_n) &= U\int_\Omega c_n \frac{\partial c_n}{\partial x_3} dx\\ \theta\|\nabla c_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq U\int_\Omega \left|c_n \frac{\partial c_n}{\partial x_3}\right| dx\\ &\leq U\|c_n\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial c_n}{\partial x_3}\right\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq U\|c_n\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla c_n\|_{L^2(\Omega)}\\ \|\nabla c_n\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{U}{\theta}\|c_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{U}{\theta}K_2.\end{aligned}$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\|c_n\|^2_{H^1} &= \|c_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla c_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq K_2 + \frac{U}{\theta}K_2 \\
\|c_n\|^2_{H^1} &\leq K_2(1+\frac{U}{\theta}).
\end{aligned}
$$

Com isso provamos que (α_n, c_n) é limitada já que $\left\|(\alpha_n, c_n)\right\|^2_{K\times H^1} = |\alpha_n|^2 + \|c_n\|^2_{H^1}$.■

AFIRMAÇÃO 4.2. O funcional J é fracamente semicontínuo inferiormente sobre $K \times H^1(\Omega)$.

Prova. Considere $M_\lambda = \{(\alpha, c) \in K \times H^1(\Omega) \,|\, J(\alpha, c) \leq \lambda\}$.. Seja $(\alpha_n, c_n) \rightharpoonup (\alpha^*, c^*)$, com $(\alpha_n, c_n) \in M_\lambda$. Logo $\alpha_n \to \alpha^*$ e $c_n \rightharpoonup c^*$. Também $c_n - c_d \rightharpoonup c^* - c_d$. Como $(\alpha_n, c_n) \in M_\lambda$ temos $\frac{1}{2}\|c_n - c_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2}\alpha_n^2 \leq \lambda$, portanto da semicontinuidade fraca da norma vem que

$$
\frac{1}{2}\|c^* - c_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2}(\alpha^*)^2 \leq \underline{\lim}\frac{1}{2}\|c_n - c_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2}\alpha_n^2 \leq \lambda
$$

e assim $J(\alpha^*, c^*) \leq \lambda$ o que implica $(\alpha^*, c^*) \in M_\lambda$. Portanto M_λ é fracamente fechado e J é fracamente semicontínuo inferiormente.■

AFIRMAÇÃO 4.3: *O conjunto T é fracamente fechado.*

Prova: Seja $(\alpha_n, c_n) \rightharpoonup (\alpha, c)$ em $\mathbb{R}\times H^1$, com $(\alpha_n, c_n) \in T$. Portanto temos $\alpha_n \to \alpha$, $c_n \rightharpoonup c$ em H^1 e também $c_n \rightharpoonup c$ em $L^2(\Omega)$. Como $(\alpha_n, c_n) \in T$, existe $\mathbf{u}_n \in V$ tal que $(\mathbf{u}_n, c_n)$ é solução de:

$$
\begin{array}{rcll}
(\mathbf{u}_n, c_n) \in V \times H^1(\Omega) &=& & \\
\nu a_0(\mathbf{u}_n, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{z}) &=& -k\int_\Omega c_n \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} dx + \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}\rangle & \forall \mathbf{z} \in V \\
\theta a(c_n, r) + b(\mathbf{u}_n, c_n, r) - U\int_\Omega c_n \frac{\partial r}{\partial x_3} dx &=& 0 & \forall r \in H^1(\Omega) \\
\int_\Omega c_n dx &=& \alpha_n. &
\end{array}
$$

Da convergência $\alpha_n \to \alpha$ vemos que $\{\alpha_n\}$ é limitada, e pela estimativa (4.19) $\{\mathbf{u}_n\}$ é limitada em V, portanto existe uma subsequência $\mathbf{u}_{n_k} \rightharpoonup \mathbf{u}$. Logo $a_0(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{z}) \to a_0(\mathbf{u}, \mathbf{z})$, já que $a_0(\cdot,\cdot)$ é um produto interno em V. Da imersão compacta $V \hookrightarrow (L^2(\Omega))^3$ vem que $b_0(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{z}) \to b_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{z})$ (ver página 165, Lema 1.5,ref. [[28]]). Claramente $\int_\Omega c_{n_k}\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} = \int_\Omega c_{n_k}\mathbf{z}_3 dx \to \int_\Omega c\mathbf{z}_3 = \int_\Omega c_{n_k}\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z}$. Tudo isso junto nos dá:

$$
\nu a_0(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{z}) + k\int_\Omega c_{n_k}\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} dx \to \nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) + k\int_\Omega c\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} dx.
$$

Dai

$$\nu a_0(\mathbf{u},\mathbf{z}) + b_0(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z}) + k\int_\Omega c\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{z}dx = \langle \mathbf{f},\mathbf{z}\rangle.$$

Do mesmo modo $a(c_{n_k},r)\to a(c,r)$ e $\int_\Omega c_{n_k}\frac{\partial r}{\partial x_3}dx \to \int_\Omega c\frac{\partial r}{\partial x_3}dx$, $\forall r\in H^1(\Omega)$. Vamos agora mostrar que $b(\mathbf{u}_{n_k},c_{n_k},r)\to b(\mathbf{u},c,r)$.

Como $\mathbf{u}_{n_k} \rightharpoonup \mathbf{u}$ em V e $V\subset\subset (L^2(\Omega))^3$ existe uma subsequência de $\mathbf{u}_{n_k}$ que também representamos por $\mathbf{u}_{n_k}$ tal que $\mathbf{u}_{n_k}\to\mathbf{u}$ em $(L^2(\Omega))^3$. Considere a subsequência c_{n_k}(mesmos índices que $\mathbf{u}_{n_k}$). Como $c_{n_k}\rightharpoonup c$ em H^1 e $H^1\subset\subset L^2(\Omega)$, existe subsequência de que continuamos representando por c_{n_k} tal que $c_{n_k}\to c$ em $L^2(\Omega)$. Logo $\mathbf{u}_{n_k}\rightharpoonup\mathbf{u}$ em V, $\mathbf{u}_{n_k}\to\mathbf{u}$ em $(L^2(\Omega))^3$ e $c_{n_k}\to c$ em $L^2(\Omega)$. Seja $r\in C^1(\overline{\Omega})$, então

$$\begin{aligned}
|b(\mathbf{u}_{n_k},r,c_{n_k}) - b(\mathbf{u},r,c)| &= \left|\int_\Omega (\mathbf{u}_{n_k}\cdot\nabla r)c_{n_k} - (\mathbf{u}\cdot\nabla r)c dx\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^3\int_\Omega \mathbf{u}^i_{n_k}\frac{\partial r}{\partial x_i}c_{n_k} - \mathbf{u}^i\frac{\partial r}{\partial x_i}c dx\right| \\
&\le \sum_{i=1}^3\int_\Omega\left|\mathbf{u}^i_{n_k}\frac{\partial r}{\partial x_i}c_{n_k} - \mathbf{u}^i\frac{\partial r}{\partial x_i}c\right|dx \\
&\le \sum_{i=1}^3\int_\Omega\left|\mathbf{u}^i_{n_k}\frac{\partial r}{\partial x_i}c_{n_k} - \mathbf{u}^i\frac{\partial r}{\partial x_i}c_{n_k}\right|dx \\
&\quad +\sum_{i=1}^3\int_\Omega\left|\mathbf{u}^i\frac{\partial r}{\partial x_i}c_{n_k} - \mathbf{u}^i\frac{\partial r}{\partial x_i}c\right|dx \\
&\le \sum_{i=1}^3\int_\Omega\left|\mathbf{u}^i_{n_k}-\mathbf{u}^i\right|\left|\frac{\partial r}{\partial x_i}\right||c_{n_k}| + \\
&\quad +\sum_{i=1}^3\int_\Omega|\mathbf{u}^i|\left|\frac{\partial r}{\partial x_i}\right||c_{n_k}-c|\,dx \\
&\le \sum_{i=1}^3\left\|\frac{\partial r}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\mathbf{u}^i_{n_k}-\mathbf{u}^i\right\|_{L^2(\Omega)}\|c_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad +\sum_{i=1}^3\left\|\frac{\partial r}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\|c_{n_k}-c\|_{L^2(\Omega)}\left\|\mathbf{u}^i\right\|_{L^2(\Omega)}).
\end{aligned}$$

Assim $|b(\mathbf{u}_{n_k},r,c_{n_k}) - b(\mathbf{u},r,c)|\to 0$ $\forall r\in C^1(\overline{\Omega})$,já que c_{n_k} é limitada em $H^1(\Omega)$ e portanto em $L^2(\Omega)$.

Pela continuidade de b e pela densidade de $C^1(\overline{\Omega})$ em $H^1(\Omega)$ temos que $b(\mathbf{u}_{n_k},r,c_{n_k})\to b(\mathbf{u},r,c)$ $\forall r\in H^1(\Omega)$. Mas $b(\mathbf{u}_{n_k},c_{n_k},r) = -b(\mathbf{u}_{n_k},r,c_{n_k}) \Rightarrow b(\mathbf{u}_{n_k},c_{n_k},r)\to b(\mathbf{u},c,r)$ $\forall r\in H^1(\Omega)$.

Assim

$$\theta a(c_{n_k}, r) + b(\mathbf{u}_{n_k}, c_{n_k}, r) - U \int_\Omega c_{n_k} \frac{\partial r}{\partial x_3} dx \to \theta a(c, r) + b(\mathbf{u}, c, r) - U \int_\Omega c \frac{\partial r}{\partial x_3} dx.$$

E concluimos que

$$\theta a(c, r) + b(\mathbf{u}, c, r) - U \int_\Omega c \frac{\partial r}{\partial x_3} dx = 0, \qquad \forall r \in H^1(\Omega).$$

Falta agora mostrar que

$$\int_\Omega c dx = \alpha.$$

Mas $\alpha_{nk} = \int_\Omega c_{n_k} dx$ e

$$\left| \int_\Omega c_{n_k} dx - \int_\Omega c dx \right| \leq \int_\Omega |c_{n_k} - c| \, dx \leq |\Omega|^{1/2} \|c_{n_k} - c\|_{L^2(\Omega)} .$$

Portanto $\alpha_{nk} = \int_\Omega c_{n_k} dx \to \int_\Omega c dx$, mas $\alpha_{nk} \to \alpha \Rightarrow \int_\Omega c dx = \alpha$.

Juntando tudo o que foi feito acima concluimos que $\mathbf{u}, c$ satisfaz,

$$\begin{array}{rcll} (\mathbf{u}, c) \in V \times H^1(\Omega) & & & \\ \nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) & = & -k \int_\Omega c \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} dx + \langle \mathbf{f}, \mathbf{z} \rangle & \forall \mathbf{z} \in V \\ \theta a(c, r) + b(\mathbf{u}, c, r) - U \int_\Omega c \frac{\partial r}{\partial x_3} dx & = & 0 & \forall r \in H^1(\Omega) \\ \int_\Omega c dx & = & \alpha. & \end{array}$$

Mas isto quer dizer que $(\alpha, c) \in T$ e assim T é fracamente fechado.$\blacksquare$

PROPOSIÇÃO 4.2. Suponhamos que $U < \frac{\theta}{C}$, K é limitado ou $N > 0$. Seja J o funcional definido por (4.21) e T o conjunto definido por (4.23). Então o problema de controle ótimo (4.22) tem ao menos uma solução, ou seja, existe $(\alpha^*, c^*) \in K \times H^1(\Omega)$ tal que

$$J(\alpha^*, c^*) = \min_{(\alpha, c) \in T} J(\alpha, c).$$

Prova: Qualquer sequência minimizante $\{(\alpha_n, c_n)\}_n \subset T$ de J (ou seja, $J(\alpha_n, c_n) \to \inf_{(\alpha,c)\in T} J(\alpha, c)$) é limitada em $K \times H^1(\Omega)$. Além disso, J é fracamente contínuo sobre $K \times H^1(\Omega)$ e T é fracamente fechado. Como $\{(\alpha_n, c_n)\}_n$ é limitada e-xiste uma subsequência $(\alpha_{n_k}, c_{n_k}) \rightharpoonup (\alpha^*, c^*)$. Sendo T fracamente fechado temos que $(\alpha^*, c^*) \in T$. Da semicontinuidade fraca de J segue que $J(\alpha^*, c^*) \leq \underline{\lim} \, J(\alpha_{n_k}, c_{n_k})$ e da unicidade do limite (pois J é estritamente convexa) vem que

$$J(\alpha^*, c^*) = \inf_{(\alpha, c) \in T} J(\alpha, c).$$

Logo

$$J(\alpha^*, c^*) = \min_{(\alpha,c)\in T} J(\alpha, c).$$

Ou seja, o problema de controle ótimo tem uma solução.$\blacksquare$

Nós vemos que, em geral, se $(\alpha, c) \in T$, a correspondência $\alpha \to c$ é multivaluada, ou seja, para cada α fixado existem várias soluções $(\mathbf{u}_\alpha, c_\alpha)$ de (2.14), assim $c_\alpha = c(\alpha)$ é um conjunto. Portanto a obtenção das condições necessárias de otimalidade não é óbvia (pois teríamos que diferenciar a função $J(\alpha, c(\alpha))$ onde $c(\alpha)$ é uma multifunção).

De modo a obter estas condições nós aproximamos J (em um sentido que ficará preciso na Proposição 3.3) por uma família de funcionais $\{J_\epsilon\}_{\epsilon>0}$,

$$\begin{array}{l} J_\epsilon \quad V \times K \mapsto \mathbb{R} \\ J_\epsilon(\mathbf{w}, \alpha) = J(\alpha, c(\mathbf{w}, \alpha)) + \frac{1}{2\epsilon} \|\mathbf{u}(\mathbf{w}, \alpha) - \mathbf{w}\|_V^2 \end{array} \tag{4.24}$$

onde $(\mathbf{u}(\mathbf{w}, \alpha), c(\mathbf{w}, \alpha))$ é a única solução de:

$$\begin{array}{rcll} (\mathbf{u}, c) \in V \times H^1(\Omega) & & & \\ \nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) & = & -k \int_\Omega c\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} + \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}\rangle & \forall \mathbf{z} \in V \\ \theta a(c, r) + b(\mathbf{w}, c, r) - U \int_\Omega c \frac{\partial r}{\partial x_3} dx & = & 0 & \forall r \in H^1(\Omega) \\ \int_\Omega c dx & = & \alpha. & \end{array} \tag{4.25}$$

Provaremos que (4.25) tem única solução: Fazendo a mudança $\widetilde{c} = c - \frac{\alpha}{|\Omega|}$, o problema (4.25) é equivalente ao problema

$$\begin{array}{rcll} (\mathbf{u}, \widetilde{c}) \in V \times \widetilde{H^1}(\Omega) & & & \\ \nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) & = & -k \int_\Omega \widetilde{c}\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} dx + \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}\rangle & \forall \mathbf{z} \in V \\ \theta a(\widetilde{c}, r) + b(\mathbf{w}, \widetilde{c}, r) - U \int_\Omega \widetilde{c} \frac{\partial r}{\partial x_3} dx & = & \frac{U\alpha}{|\Omega|} \int_\Omega \frac{\partial r}{\partial x_3} dx & \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega). \end{array} \tag{4.26}$$

Sejam $(\mathbf{u}_1, \widetilde{c}_1)$ e $(\mathbf{u}_2, \widetilde{c}_2)$ soluções de (4.26). Subtraindo as equações correspondentes a essas soluções temos:

$$\begin{array}{rcl} \nu a_0(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{z}) & = & -k \int_\Omega (\widetilde{c}_1 - \widetilde{c}_2)\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} dx \\ \theta a(\widetilde{c}_1 - \widetilde{c}_2, r) + b(\mathbf{w}, \widetilde{c}_1 - \widetilde{c}_2, r) - U \int_\Omega (\widetilde{c}_1 - \widetilde{c}_2) \frac{\partial r}{\partial x_3} dx & = & 0. \end{array}$$

Fazendo $\mathbf{z} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ e $r = \widetilde{c}_1 - \widetilde{c}_2$ temos

$$\begin{array}{rcl} \nu \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 & = & -k \displaystyle\int_\Omega (\widetilde{c}_1 - \widetilde{c}_2)(\mathbf{u}_1^3 - \mathbf{u}_2^3) dx \\ \theta \|\widetilde{c}_1 - \widetilde{c}_2\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}^2 & = & U \displaystyle\int_\Omega (\widetilde{c}_1 - \widetilde{c}_2) \frac{\partial(\widetilde{c}_1 - \widetilde{c}_2)}{\partial x_3} dx. \end{array}$$

Da primeira equação acima temos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_V^2 &\le \frac{k}{\nu}\int_\Omega |\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2|\left|\mathbf{u}_1^3-\mathbf{u}_2^3\right| dx\\
&\le \frac{k}{\nu}\|\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2\|_{L^2(\Omega)}\left\|\mathbf{u}_1^3-\mathbf{u}_2^3\right\|_{L^2(\Omega)}\\
&\le \frac{k}{\nu}\|\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2\|_{L^2(\Omega)} C_1\left\|\mathbf{u}_1^3-\mathbf{u}_2^3\right\|_V\\
\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_V &\le \frac{kC_1}{\nu}\|\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2\|_{L^2(\Omega)}\\
\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_V &\le \frac{kC_1C}{\nu}\|\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Utilizando agora a segunda equação,

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}^2 &\le \frac{U}{\theta}\int_\Omega |\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2|\left|\frac{\partial(\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2)}{\partial x_3}\right| dx\\
&\le \frac{U}{\theta}\|\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial(\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2)}{\partial x_3}\right\|_{L^2(\Omega)}\\
&\le \frac{UC}{\theta}\|\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}\left\|\frac{\partial(\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2)}{\partial x_3}\right\|_{L^2(\Omega)}\\
\|\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} &\le \frac{UC}{\theta}\|\nabla(\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2)\|_{L^2(\Omega)}\\
\|\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} &\le \frac{UC}{\theta}\|\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $U<\frac{\theta}{C}\Rightarrow\frac{UC}{\theta}<1\Rightarrow\|\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}=0\Rightarrow\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_V=0$. Logo $\widetilde{c}_1=\widetilde{c}_2$ e $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$.

Vemos assim que a correspondência $(\mathbf{w},\alpha)\to(\mathbf{u}(\mathbf{w},\alpha),c(\mathbf{w},\alpha))$ é univaluada. Isso nos permite obter as condições necessárias de optimalidade para o seguinte problema de controle,

$$\min\{J_\epsilon(\mathbf{w},\alpha)\mid(w,\alpha)\in V\times K\} \tag{4.27}$$

e então fazendo $\epsilon\to0$ vamos obter as condições desejadas para uma solução do problema de controle (4.22).

PROPOSIÇÃO 4.3. Suponhamos que $U<\frac{\theta}{C}$, K é limitado ou $N>0$. Seja J_ϵ o funcional definido por (4.24). Então o problema de controle ótimo (4.27) tem ao menos uma solução, ou seja, existe $(\mathbf{w}_\epsilon^*,\alpha_\epsilon^*)\in V\times K$ tal que

$$J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon^*,\alpha_\epsilon^*)=\min_{(\mathbf{w}_\epsilon,\alpha_\epsilon)\in V\times K}J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon,\alpha_\epsilon).$$

Prova. Seja $\{\mathbf{w}_\epsilon^n, \alpha_\epsilon^n\}_n$ sequência minimizante de J_ϵ (ou seja, uma sequência tal que $J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon^n, \alpha_\epsilon^n) \to \inf_{(\mathbf{w}_\epsilon,\alpha_\epsilon)\in V\times K} J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon))$. Portanto $J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon^n, \alpha_\epsilon^n)$ é limitada e com isso $J(\alpha_\epsilon^n, c_\epsilon^n)$ também é limitada. Da definição de J vem que α_ϵ^n é limitada, c_ϵ^n é limitada em $L^2(\Omega)$ e também $\widetilde{c}_\epsilon^n = c_\epsilon^n - \frac{\alpha_\epsilon^n}{|\Omega|}$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Da unicidade de (4.25).

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_\epsilon^n\|_V &\leq \frac{kC_1}{\nu}\|\widetilde{c}_\epsilon^n\|_{L^2(\Omega)}\\
\|\mathbf{u}_\epsilon^n\|_V &\leq K_1.
\end{aligned}$$

De $|J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon^n, \alpha_\epsilon^n)| \leq K$ também implica que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_\epsilon^n - \mathbf{w}_\epsilon^n\|_V &\leq K\\
\|\mathbf{w}_\epsilon^n\|_V &\leq \|\mathbf{u}_\epsilon^n - \mathbf{w}_\epsilon^n\|_V + \|\mathbf{u}_\epsilon^n\|_V \leq K + K_1
\end{aligned}$$

que nos diz que $\{(\mathbf{w}_\epsilon^n, \alpha_\epsilon^n)\}$ é limitada. Logo existe $(\mathbf{w}_\epsilon^{n_k}, \alpha_\epsilon^{n_k}) \rightharpoonup (\mathbf{w}_\epsilon^*, \alpha_\epsilon^*)$.

$$J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon^*, \alpha_\epsilon^*) \leq \underline{\lim} J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon^{n_k}, \alpha_\epsilon^{n_k}) = \lim J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon^{n_k}, \alpha_\epsilon^{n_k}) = \inf_{(\mathbf{w}_\epsilon,\alpha_\epsilon)\in V\times K} J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon). \quad (4.28)$$

Como K é fechado temos que $(\mathbf{w}_\epsilon^*, \alpha_\epsilon^*) \in V \times K$. Logo

$$J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon^*, \alpha_\epsilon^*) = \min_{(\mathbf{w}_\epsilon,\alpha_\epsilon)\in V\times K} J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon)$$

Falta agora mostrar a semicontinuidade fraca inferior de J_ϵ usada em (4.28). Para provar que J_ϵ é fracamente semicontínua inferior devemos mostrar que os conjuntos de nível

$$M_\lambda = \{(\mathbf{w}, \alpha)\,|\,J_\epsilon(\mathbf{w}, \alpha) \leq \lambda\}$$

são fracamente fechados. Sejam $(\mathbf{w}_n, \alpha_n) \in M_\lambda$, com $(\mathbf{w}_n, \alpha_n) \rightharpoonup (\mathbf{w}, \alpha)$. Assim $\mathbf{w}_n \rightharpoonup \mathbf{w}$ em V e $\alpha_n \to \alpha$. De $J_\epsilon(\mathbf{w}_n, \alpha_n) \leq \lambda$ vem que

$$J(\mathbf{w}_n, \alpha_n) + \frac{1}{2\epsilon}\|\mathbf{u}_n - \mathbf{w}_n\|_V^2 \leq \lambda$$

onde $\mathbf{u}_n$ e c_n satisfazem (4.25).

Para $\mathbf{u}_n$ e $\widetilde{c}_n = c_n - \frac{\alpha_n}{|\Omega|}$ obtemos de (4.25) as mesmas estimativa (4.18) e (4.19) com $\alpha = \alpha_n$. Deste modo $\mathbf{u}_n$ e c_n são limitados e portanto existem $c_{n_k} \rightharpoonup c$ e $\mathbf{u}_{n_k} \rightharpoonup \mathbf{u}$ e assim $(\mathbf{u}, c) \in V \times H^1(\Omega)$ é solução de (4.25) com o w e α conhecidos acima (basta passar o limite nas equações em (4.25)). Como J é fracamente contínuo temos que $J(\mathbf{w}_{n_k}, \alpha_{n_k}) \to J(\mathbf{w}, c)$ e como a norma é fracamente semicontínua inferior (pois é convexa) temos também que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| \leq \underline{\lim}\,\|\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{w}_{n_k}\|_{Y_o}$$

já que $\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{w}_{n_k} \rightharpoonup \mathbf{u} - \mathbf{w}$. Portanto

$$J(\mathbf{w}, c) + \frac{1}{2\epsilon}\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|_V^2 \leq \underline{\lim} J(\mathbf{w}_{n_k}, \alpha_{n_k}) + \underline{\lim} \frac{1}{2\epsilon}\|\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{w}_{n_k}\|_V^2 \leq \lambda.$$

Como $(\mathbf{u}, c)$ é a única solução de (4.25) correspondente a $(\mathbf{w}, \alpha)$ temos que $J_\epsilon(\mathbf{w}, \alpha) \leq \lambda$ que implica $(\mathbf{w}, \alpha) \in M_\lambda$. Mas isto que dizer que M_λ é fracamente fechado e portanto J_ϵ é fracamente semicontínuo inferior.■

PROPOSIÇÃO 4.4. Suponhamos que $U < \frac{\theta}{C}$, K é limitado ou $N > 0$. Seja J_ϵ o funcional definido por (4.24) e para qualquer $\epsilon > 0$, seja $(\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon)$ um ponto de mínimo de J_ϵ. Então existe $(\alpha^*, c^*, \mathbf{u}^*) \in K \times H^1(\Omega) \times V$ *tal que sobre alguma subsequência nós temos, quando $p \to \infty$:*

$$\begin{array}{rcll} \alpha_{\epsilon_p} & \to & \alpha^*, & \\ c_{\epsilon_p} & \to & c^* & fracamente \quad em \quad H^1(\Omega), \\ \mathbf{u}_{\epsilon_p} & \to & \mathbf{u}^* & fracamente \quad em \quad V, \\ \mathbf{w}_{\epsilon_p} & \to & \mathbf{u}^* & fracamente \quad em \quad V, \end{array} \tag{4.29}$$

onde $(\mathbf{u}_{\epsilon_p}, c_{\epsilon_p}) = (\mathbf{u}(\mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p}), c(\mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p}))$. *Além disso, $(\mathbf{u}^*, c^*)$ é uma solução de (4.13) correspondente a $\alpha = \alpha^*$ e*

$$\lim_{\epsilon \to 0} J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon) = J(\alpha^*, c^*) = \min\{J(\alpha, c) \quad |(\alpha, c) \in T\}. \tag{4.30}$$

Prova. Para cada $(\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon)$ existe $(\mathbf{u}_\epsilon, c_\epsilon)$ satisfazendo (4.25) pela definição de J_ϵ. Primeiro vamos provar que $\{\alpha_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ é limitada. De fato isto é óbvio se K é limitado. Se K não é limitado, então nós temos

$$\frac{N}{2}\alpha_\epsilon^2 \leq J(\alpha_\epsilon, c_\epsilon) \leq J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon) \overset{(\star)}{\leq} J_\epsilon(\mathbf{u}_0, \alpha_0) = J(\alpha_0, c_0)$$

onde (α_0, c_0) é um controle ótimo para (4.22) e $(\mathbf{u}_0, c_0)$ verifica (4.13) para $\alpha = \alpha_0$ e $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}\ (\mathbf{u}_0, \alpha_0)$. Deste modo α_ϵ é limitada.

Observação 4.1: A desigualdade $(\star)$ vem da hipótese que $(\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon)$ é um ponto de mínimo de J_ϵ, ou seja $J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon) \leq J_\epsilon(\mathbf{w}, \alpha)\ \forall\ (\mathbf{w}, \alpha)$, e em particular $J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon) \leq J_\epsilon(\mathbf{u}_0, \alpha_0)$ tomando $\mathbf{w} = \mathbf{u}_0$ e $\alpha = \alpha_0$. Observe que $J(\alpha_0, c_0) \leq J(\alpha, c)$,$\forall J(\alpha, c) \in T$, e neste caso existe $\mathbf{u}_0 \in V$ tal que $(\mathbf{u}_0, c_0)$ satisfaz (4.13). Mas (4.13) é (4.25) com $\mathbf{w} = \mathbf{u}_0$, ou seja, faz sentido considerar $J_\epsilon(\mathbf{u}_0, \alpha_0)$ e com $\mathbf{w} = \mathbf{u}_0$ temos que $\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{w}\|_V^2 = 0$ e dai $J_\epsilon(\mathbf{u}_0, \alpha_0) = J(\alpha_0, c_0)$.

Para $\mathbf{u}_\epsilon$ e $c_\epsilon - \frac{\alpha_\epsilon}{|\Omega|}$ nós obtemos de (4.25) as mesmas estimativas (4.18) e (4.19), com $\alpha = \alpha_\epsilon$. Portanto a sequência $\{(\mathbf{u}_\epsilon, c_\epsilon)\}_{\epsilon > 0}$ é limitada em $V \times H^1(\Omega)$. Como desejamos $\epsilon \to 0^+$ vamos fixar $\delta > 0$ e tomar $\epsilon \leq \delta$ então temos,

$$\|\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon\|_V^2 \leq 2\epsilon J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon) \leq 2\epsilon J(\alpha_0, c_0) \leq 2\delta J(\alpha_0, c_0).$$

Das limitações acima temos que existem $(u^*, c^*) \in V \times H^1(\Omega)$ e $\alpha^* \in K$ tais que para alguma subsequência ϵ_p de ϵ obtemos,

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{\epsilon_p} & \rightarrow & \alpha^*, \\ c_{\epsilon_p} & \rightarrow & c^* \quad fracamente \quad em \quad H^1(\Omega), \\ \mathbf{u}_{\epsilon_p} & \rightarrow & \mathbf{u}^* \quad fracamente \quad em \quad V, \\ \mathbf{w}_{\epsilon_p} & \rightarrow & \mathbf{w}^* \quad fracamente \quad em \quad V. \end{array}$$

Como $(\mathbf{u}_{\epsilon_p} - \mathbf{w}_{\epsilon_p}) \rightarrow (\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^*)$ e a norma é fracamente semicontínua inferior temos

$$\begin{array}{rcl} \|\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^*\|_V^2 & \leq & \underline{\lim} \left\|\mathbf{u}_{\epsilon_p} - \mathbf{w}_{\epsilon_p}\right\|_V^2 \\ & \leq & \lim\limits_{\epsilon_p \rightarrow 0} \left\|\mathbf{u}_{\epsilon_p} - \mathbf{w}_{\epsilon_p}\right\|_V^2 \\ & \leq & \lim\limits_{\epsilon_p \rightarrow 0} 2\epsilon_p J(\alpha_0, c_0) = 0. \end{array}$$

Assim $\mathbf{u}^* = \mathbf{w}^*$. Logo $\mathbf{w}_{\epsilon_p} \rightharpoonup \mathbf{u}^*$ em V.

Tomando as equações (4.25) com $\alpha_{\epsilon_p}, c_{\epsilon_p}, \mathbf{u}_{\epsilon_p}$, (já que para $(\mathbf{w}, \alpha) = (\mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p})$ sabemos que $(\mathbf{u}_{\epsilon_p}, c_{\epsilon_p})$ é única solução de (4.25) e passando ao limite quando $p \rightarrow \infty$ temos que $(\mathbf{u}^*, c^*)$ satiafaz (4.13) para $\alpha = \alpha^*$ e portanto $(\alpha^*, c^*) \in T$.

Como J é fracamente contínuo, $\lim_{\epsilon_p \rightarrow 0} J(\alpha_{\epsilon_p}, c_{\epsilon_p}) = J(\alpha^*, c^*)$. Mas $J(\alpha_{\epsilon_p}, c_{\epsilon_p}) \leq J_{\epsilon_p}(\mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p}) \leq J(\alpha_0, c_0)$ implica $\lim_{\epsilon_p \rightarrow 0} J(\alpha_{\epsilon_p}, c_{\epsilon_p}) \leq J(\alpha_0, c_0)$ o que nos dá $J(\alpha^*, c^*) \leq J(\alpha_0, c_0)$.Por outro lado (α_0, c_0) é uma solução de (4.22) e $(\alpha^*, c^*) \in T$ fornecendo-nos $J(\alpha_0, c_0) \leq J(\alpha^*, c^*)$, portanto $J(\alpha^*, c^*) = J(\alpha_0, c_0)$.

Temos também que $\lim_{\epsilon_p \rightarrow 0} J_{\epsilon_p}(\mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p}) \leq J(\alpha^*, c^*)$ e da semicontinuidade inferior fraca de J_ϵ vem

$$J(\alpha^*, c^*) = J_{\epsilon_p}(\mathbf{u}^*, \alpha^*) \leq \underline{\lim}_{\epsilon_p \rightarrow 0} J_{\epsilon_p}(\mathbf{w}_{\epsilon_p},) \leq \lim_{\epsilon_p \rightarrow 0} J_{\epsilon_p}(\mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p})$$

e isso implica que

$$\lim_{\epsilon_p \rightarrow 0} J_{\epsilon_p}(\mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p}) = J(\alpha^*, c^*).$$

Como $\{J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon)\}$ tem um único ponto limite , pois é estritamente convexa, concluimos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_\epsilon(\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon) = J(\alpha^*, c^*) = \min \{J(\alpha, c) \,|(\alpha, c) \in T\}.$$

■

Para obter as condições necessárias de optimalidade para (4.27) vamos utilizar o formalismo de Dubovitskii-Milyutin.

4.4 Aplicação do Formalismo de Dubovitskii-Milyutin

Vamos agora aplicar o formalismo de Dubovitskii-Milyutin para encontrar as condições necessárias de otimalidade para o problema de controle (4.27). Neste caso de fluxo bioconvectivo utilizaremos o Teorema de Lyusternik e o Teorema 2.1 de Dubovitskii-Milyutin apresentados no capítulo 2, diferentemente do capítulo 3 onde foi utilizado o Teorema 2.2 do capítulo 2.

O Funcional J_ϵ está definido por

$$J_\epsilon \;:\; V \times K \to \mathbb{R}$$

$$J_\epsilon(\mathbf{w},\alpha) = J(\alpha, c(\mathbf{w},\alpha)) + \frac{1}{2\epsilon}\left\|\mathbf{u}(\mathbf{w},\alpha) - \mathbf{w}\right\|_V^2,$$

onde $(\mathbf{u}(\mathbf{w},\alpha), c(\mathbf{w},\alpha))$ é a única solução de

$$\begin{array}{rcll} (\mathbf{u}, c) \in V \times H^1(\Omega) & & & \\ \nu a_0(\mathbf{u},\mathbf{z}) + b_0(\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{z}) & = & -k(c\mathbf{i}_3,\mathbf{z}) + \langle \mathbf{f},\mathbf{z}\rangle & \forall \mathbf{z} \in V \\ \theta a(c,r) + b(\mathbf{w},c,r) - U(c,\frac{\partial r}{\partial x_3}) & = & 0 & \forall r \in H^1(\Omega) \\ (c,1) & = & \alpha & \end{array}$$

Fazendo a mudança

$$\widetilde{c} = c - \frac{\alpha}{|\Omega|}$$

obtemos o funcional J_ϵ definido agora por

$$J_\epsilon \;:\; V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$J_\epsilon(\mathbf{w},\alpha) = \frac{1}{2}\left\|\widetilde{c} + \frac{\alpha}{|\Omega|} - c_d\right\|_2^2 + \frac{N}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2\epsilon}\left\|\mathbf{u}(\mathbf{w},\alpha) - \mathbf{w}\right\|_V^2$$

onde $(\mathbf{u}, \widetilde{c})$ é a única solução de

$$\begin{array}{rcll} (\mathbf{u}, \widetilde{c}) \in V \times \widetilde{H^1}(\Omega) & & & \\ \nu a_0(\mathbf{u},\mathbf{z}) + b_0(\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{z}) & = & -k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3,\mathbf{z}) + \langle \mathbf{f},\mathbf{z}\rangle & \forall \mathbf{z} \in V \\ \theta a(\widetilde{c},r) + b(\mathbf{w},\widetilde{c},r) - U(\widetilde{c},\frac{\partial r}{\partial x_3}) & = & \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3},1) & \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega). \end{array} \tag{4.31}$$

Para aplicar o formalismo vamos definir adequadamente os espaços funcionais onde definiremos o funcional objetivo, as restrições de igualdade e a restrição de controle.

Definimos os espaços

$$\begin{aligned} X_0 &= V \times \widetilde{H^1} \\ Y_0 &= V \times \mathbb{R} \\ M_0 &= V \times K \end{aligned}$$

e consideramos $x = (\mathbf{u}, \widetilde{c}) \in X_0$ e $m = (\mathbf{w},\alpha) \in Y_0$.
Definimos os operadores

$$P_1 \quad : \quad X_0 \times Y_0 \rightarrow V^*$$

$$P_1(x,m)\mathbf{z} = \nu a_0(\mathbf{u},\mathbf{z}) + b_0(\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{z}) + k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3,\mathbf{z}) - \langle \mathbf{f},\mathbf{z}\rangle,$$

$$P_2 \quad : \quad X_0 \times Y_0 \rightarrow \widetilde{H^1}^*$$

$$P_1(x,m)r = \theta a(\widetilde{c},r) + b(\mathbf{w},\widetilde{c},r) - U(\widetilde{c},\frac{\partial r}{\partial x_3}) - \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3},1),$$

$$P \quad : \quad X_0 \times Y_0 \rightarrow V^* \times \widetilde{H^1}^*$$

$$P(x,m)(\mathbf{z},r) = (P_1(x,m)\mathbf{z},P_1(x,m)r).$$

Consideramos agora

$$J_\epsilon \quad : \quad X_0 \times Y_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$J_\epsilon(x,m) = \frac{1}{2}\left\|\widetilde{c} + \frac{\alpha}{|\Omega|} - c_d\right\|_2^2 + \frac{N}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2\epsilon}\left\|\mathbf{u}(\mathbf{w},\alpha) - \mathbf{w}\right\|_V^2 ..$$

O problema (4.27) pode agora ser escrito na seguinte forma abstrata

$$\left\{ \begin{array}{c} \min J_\epsilon(x,m) \\ s.a \\ P(x,m) = 0 \\ m \in M_0. \end{array} \right.$$

Vamos supor daqui por diante que $\epsilon > 0$ está fixado e que (x_ϵ, m_ϵ) é um ponto de mínimo do funcional J_ϵ

4.4.1 Análise do funcional

Sabemos que

$$\begin{aligned} x_\epsilon &= (\mathbf{u}_\epsilon, \widetilde{c}_\epsilon), \quad x = (\mathbf{u}, \widetilde{c}), \\ m_\epsilon &= (\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon), \quad m = (\mathbf{w}, \alpha), \\ c_\epsilon &= \widetilde{c}_\epsilon + \frac{\alpha_\epsilon}{|\Omega|}. \end{aligned}$$

O funcional J_ϵ é Frechet diferenciável e usando a regra da cadeia podemos calcular explicitamente sua derivada que é dada por

$$\begin{aligned} J'_\epsilon(x_\epsilon, m_\epsilon)(x,m) &= \frac{1}{\epsilon} a_0(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}) - \frac{1}{\epsilon} a_0(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{w}) \\ &+ (\widetilde{c}_\epsilon + \frac{\alpha_\epsilon}{|\Omega|} - c_d, \widetilde{c}) + (\widetilde{c}_\epsilon + \frac{\alpha_\epsilon}{|\Omega|} - c_d, \frac{\alpha}{|\Omega|}) \\ &+ N\alpha_\epsilon \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J'_\epsilon(x_\epsilon, m_\epsilon)(x,m) &= \frac{1}{\epsilon} a_0(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}) - \frac{1}{\epsilon} a_0(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{w}) \\ &+ (c_\epsilon - c_d, \widetilde{c}) + (c_\epsilon - c_d, 1)\frac{\alpha}{|\Omega|} \\ &+ N\alpha_\epsilon \alpha. \end{aligned}$$

O cone de direções de decrescimento de J_ϵ no ponto (x_ϵ, m_ϵ) é dado por

$$K_D = \{(x,m) \in X_0 \times Y_0 \,|\, J'_\epsilon(x_\epsilon, m_\epsilon)(x,m) < 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$K_D^* = \{-\lambda_0 J'(x_\epsilon, m_\epsilon) \in (X_0 \times Y_0)^* \,|0 \leq \lambda_0 < \infty\}.$$

4.4.2 Análise das restrições de controle

O conjunto

$$M_0 = \{(\mathbf{w}, \alpha) \in Y_0 \,|\alpha \in K\}$$

é convexo e fechado (pois K é fechado) e $int M_0 \neq \varnothing$ (pois K é não vazio) e portanto o conjunto $Q = X_0 \times M_0$ também é convexo e fechado e $int Q = X_0 \times int M_0 \neq \varnothing$. Seja K_F o cone de direções factíveis para o conjunto Q no ponto $h_\epsilon = (x_\epsilon, m_\epsilon)$, então se $f \in K_F^*$ (cone dual do cone de direções factíveis) segue que $f = (0, f_1)$ onde $f_1 \in Y_0^*$ é um funcional suporte para M_0 no ponto m_ϵ, ou seja,

$$f_1 \in M_0^* = \{f \in Y_0^* \mid f(m) \geq f(m_\epsilon), \forall m \in M_0\}.$$

4.4.3 Análise das restrições de igualdade

Os operadores P_1 e P_2 são Frechet diferenciáveis em (x_ϵ, m_ϵ) e assim P é Frechet diferenciável em (x_ϵ, m_ϵ).

As derivadas de P_1 e P_2 são dadas por

$$\begin{aligned} P_1'(x_\epsilon, m_\epsilon)(x,m)\mathbf{z} &= va_0(\mathbf{u},\mathbf{z}) + b_0(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{w}, \mathbf{z}) \\ &\quad + b_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{z}) + k(\widetilde{c}\mathbf{i}, \mathbf{z}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2'(x_\epsilon, m_\epsilon)(x,m)r &= \theta a(\widetilde{c}, r) + b(\mathbf{w}_\epsilon, \widetilde{c}, r) \\ &\quad + b(\mathbf{w}, \widetilde{c}_\epsilon, r) - U(\widetilde{c}, \frac{\partial r}{\partial x_3}) - \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1). \end{aligned}$$

Vamos agora utilizar o Teorema de Lyusternik, para encontrar o cone de direções tangentes associado a restrição de igualdade. Se (x_ϵ, m_ϵ) é ponto de mínimo do funcional J_ϵ então $P(x_\epsilon, m_\epsilon) = 0$ pela definição de J_ϵ e P é diferenciável em uma vizinhança de (x_ϵ, m_ϵ). Vamos agora provar que P é de classe C^1 :

Se $h_\epsilon^n \to h_\epsilon$ em $X_0 \times Y_0$ então $\|h_\epsilon^n - h_\epsilon\|_{X_0\times Y_0} \to 0$. Como,

$$\begin{aligned} \|P'(h_\epsilon^n) - P'(h_\epsilon)\|_{\pounds(X_0\times Y_0, X_0^*)} &= \|P_1'(h_\epsilon^n) - P_1'(h_\epsilon)\|_{\pounds(X_0\times Y_0, X_0^*)} \\ &\quad + \|P_2'(h_\epsilon^n) - P_2'(h_\epsilon)\|_{\pounds(X_0\times Y_0, \widetilde{H_1}^*)} \end{aligned}$$

das desigualdades,

$$\begin{aligned} |b_0(\mathbf{w}_\epsilon^n - \mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}, \mathbf{z})| &\le \|\mathbf{w}_\epsilon^n - \mathbf{w}_\epsilon\|_V \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{z}\|_V, \\ |b_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\epsilon^n - \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{z})| &\le \|\mathbf{w}\|_V \|\mathbf{u}_\epsilon^n - \mathbf{u}_\epsilon\|_V \|\mathbf{z}\|_V, \\ |b(\mathbf{w}_\epsilon^n - \mathbf{w}_\epsilon, \widetilde{c}, r)| &\le \|\mathbf{w}_\epsilon^n - \mathbf{w}_\epsilon\|_V \|\widetilde{c}\|_{\widetilde{H_1}} \|r\|_{\widetilde{H_1}}, \\ |b(\mathbf{w}, \widetilde{c}_\epsilon^n - \widetilde{c}_\epsilon, r)| &\le \|\mathbf{w}\|_V \|\widetilde{c}_\epsilon^n - \widetilde{c}_\epsilon\|_{\widetilde{H_1}} \|r\|_{\widetilde{H_1}}, \end{aligned}$$

vem que $\|P'(h_\epsilon^n) - P'(h_\epsilon)\|_{\pounds(X_0\times Y_0, X_0^*)} \to 0$ e assim P é de classe C^1.

Para utilizarmos o Teorema de Lyusternik resta-nos provar que $P'(h_\epsilon)$ é sobrejetivo, mas isto segue do Lema de Lax-Milgram. Portanto pelo Teorema de Lyusternik o conjunto de direções tangentes K_T para o conjunto

$$Q_2 = \{h \in X_0 \times Y_0 \,|\, P(h) = 0\}$$

no ponto h_ϵ é dado por

$$K_T^* = (K_T)^0 = \{f \in (X_0 \times Y_0)^* \,|\, f(h) = 0, \forall h \in K_T\}.$$

4.4.4 Equações de Euler Lagrange

Pelo Teorema de Dubovitskii-Milyutin (Teorema 2.1, Capítulo 2) existem funcionais, não todos nulos, $f_0 \in K_D^*$, $\widetilde{f_1} \in K_F^*$, $f_2 \in K_T^*$ tais que $f_0 + \widetilde{f_1} + f_2 = 0$, ou seja,

$$f_0(h) + \widetilde{f_1}(h) + f_2(h) = 0.$$

Como $\widetilde{f_1}(h) = f_1(m)$ onde $f_1 \in M_0^*$ obtemos

$$f_0(x,m) + f_1(m) + f_2(x,m) = 0.$$

Para cada $m = (\mathbf{w},\alpha) \in M_0$ seja $x = (\mathbf{u},\widetilde{c})$ escolhido de forma que $P'(h_\epsilon)(x,m) = 0$. Dessa forma $f_2(x,m) = 0$ e a equação de Euler Lagrange fica,

$$f_0(x,m) + f_1(m) = 0$$

$$-\lambda_0 J'(x_\epsilon, m_\epsilon)(x,m) + f_1(m) = 0.$$

Se $\lambda_0 = 0$ então $f_1 = 0$ (o que é um absurdo). Logo o problema é normal e podemos tomar $\lambda_0 = 1$:

$$f_1(m) = J'(x_\epsilon, m_\epsilon)(x,m)$$

$$\begin{aligned} f_1(m) &= \frac{1}{\epsilon}a_0(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}) - \frac{1}{\epsilon}a_0(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{w}) \\ &\quad +(c_\epsilon - c_d, \widetilde{c}) + (c_\epsilon - c_d, 1)\frac{\alpha}{|\Omega|} \\ &\quad +N\alpha_\epsilon\alpha. \end{aligned}$$

4.4.5 Equações adjuntas

Seja $p_\epsilon \in V$, $q_\epsilon \in \widetilde{H^1}$ únicas soluções (pelo Lema de Lax-Milgram) de

$$\left\{ \begin{array}{c} \nu a_0(\mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{z}) - b_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{z}) = \frac{1}{\epsilon}a_0(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{z}), \\ \theta a(q_\epsilon, r) - b(\mathbf{w}_\epsilon, q_\epsilon, r) - U\int_\Omega r\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}dx = -k\int_\Omega r\mathbf{i}_3.\mathbf{p}_\epsilon dx + \int_\Omega r(c_\epsilon - c_d)dx \\ \forall \mathbf{z} \in V,\ \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega) \end{array} \right. \tag{EA}$$

Observação 4.2: Um esquema da demonstração de que o sistema acima tem uma única solução é a seguinte: Toma-se $B(\mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{z}) = \upsilon a_0(\mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{z}) - b_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{z})$ e $f(\mathbf{z}) = \frac{1}{\epsilon}a_0(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{z})$. É fácil ver que B é bilinear e contínua e também que f é contínua. Pelo Lema de Lax-Milgram existe uma única solução de $B(\mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{z}) = f(\mathbf{z}), \forall \mathbf{z} \in V$. Substitui-se este $\mathbf{p}_\epsilon$ na segunda equação acima e novamente pelo Lema de Lax-Milgram encontramos um único q_ϵ.

4.4.6 Condições Necessárias de optimalidade

Fazendo $\mathbf{z} = \mathbf{u}$ em $(\text{EA})_1$ obtemos:

$$va_0(\mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{u}) - b_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{u}) = \frac{1}{\epsilon} a_0(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}).$$

Fazendo $r = \widetilde{c}$ em $(\text{EA})_2$ obtemos:

$$\theta a(q_\epsilon, \widetilde{c}) - b(\mathbf{w}_\epsilon, q_\epsilon, \widetilde{c}) - U(\widetilde{c}, \frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}) + k(\widetilde{c}\mathbf{i}, \mathbf{p}_\epsilon) = (\widetilde{c}, c_\epsilon - c_d),\ \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega).$$

Relembrando a escolha de $h = (x, m)$ $(P'(h_\epsilon)(x, m) = 0)$ temos o sistema

$$\begin{cases} va_0(\mathbf{u}, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{z}) = -k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3, \mathbf{z}) \\ a(\widetilde{c}, r) + b(\mathbf{w}_\epsilon, \widetilde{c}, r) + b(\mathbf{w}, \widetilde{c}_\epsilon, r) - U(\widetilde{c}, \frac{\partial r}{\partial x_3}) = \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1). \end{cases} \tag{SA}$$

Fazendo $\mathbf{z} = \mathbf{p}_\epsilon$ em $(\text{SA})_1$ obtemos,

$$va_0(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\epsilon) + b_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}, \mathbf{p}_\epsilon) + b_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) = -k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3, \mathbf{p}_\epsilon).$$

Fazendo $r = q_\epsilon$ em $(\text{SA})_2$ temos

$$a(\widetilde{c}, q_\epsilon) + b(\mathbf{w}_\epsilon, \widetilde{c}, q_\epsilon) + b(\mathbf{w}, \widetilde{c}_\epsilon, q_\epsilon) - U(\widetilde{c}, \frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}) = \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}, 1).$$

Portanto podemos concluir dessas igualdades que:

$$\frac{1}{\epsilon} a_0(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}) = -b_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) - k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3, \mathbf{p}_\epsilon)$$

$$(\widetilde{c}, c_\epsilon - c_d) = k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3, \mathbf{p}_\epsilon) + b(\mathbf{w}_\epsilon, \widetilde{c}, q_\epsilon) + \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}, 1)$$

com isso temos,

$$\begin{aligned} f_1(m) \quad = \quad & -b_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) - k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3, \mathbf{p}_\epsilon) + k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3, \mathbf{p}_\epsilon) \\ & + b(\mathbf{w}, \widetilde{c}_\epsilon, q_\epsilon) + \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}, 1) - \frac{1}{\epsilon} a_0(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{w}) \\ & + (c_\epsilon - c_d, 1)\frac{\alpha}{|\Omega|} + N\alpha_\epsilon \alpha. \end{aligned}$$

Mas $f_1 \in M_0^*$ e isto quer dizer que

$$f_1(m) \geq f_1(m_\epsilon),\ \forall m \in M_0 \tag{CN}$$

ou seja, $f_1(\mathbf{w},\alpha) \geq f_1(\mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon)$ e podemos escrever :

$$
\begin{aligned}
&-b_0(\mathbf{w}-\mathbf{w}_\epsilon,\mathbf{u}_\epsilon,\mathbf{p}_\epsilon)+b(\mathbf{w}-\mathbf{w}_\epsilon,\widetilde{c}_\epsilon,q_\epsilon)\\
&+U(\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3},1)\frac{(\alpha-\alpha_\epsilon)}{|\Omega|}-\frac{1}{\epsilon}a_0(\mathbf{u}_\epsilon-\mathbf{w}_\epsilon,\mathbf{w}-\mathbf{w}_\epsilon)\\
&+(c_\epsilon-c_d,1)\frac{(\alpha-\alpha_\epsilon)}{|\Omega|}+N\alpha_\epsilon(\alpha-\alpha_\epsilon)\geq 0.
\end{aligned}
$$

Como $m=(\mathbf{w},\alpha),\forall\mathbf{w}\in V,\forall\alpha\in K$, podemos tomar $m=(\mathbf{w}_\epsilon,\alpha),\forall\alpha\in K$ para obter a seguintes condições necessárias de otimalidade

$$U(\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3},1)\frac{(\alpha-\alpha_\epsilon)}{|\Omega|}+(c_\epsilon-c_d,1)\frac{(\alpha-\alpha_\epsilon)}{|\Omega|}+N\alpha_\epsilon(\alpha-\alpha_\epsilon)\geq 0,$$

$$\left[U(\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3},1)+(c_\epsilon,1)-(c_d,1)+N\,|\Omega|\,\alpha_\epsilon\right](\alpha-\alpha_\epsilon)\geq 0.$$

Relembrando que $(c_\epsilon,1)=\alpha_\epsilon$ temos,

$$\left[U(\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3},1)-(c_d,1)+N\,|\Omega|\,\alpha_\epsilon+\alpha_\epsilon\right](\alpha-\alpha_\epsilon)\geq 0.$$

Em (CN) podemos tormar também $m=(\mathbf{w}+\mathbf{w}_\epsilon,\alpha_\epsilon)$ e $m=(-\mathbf{w}+\mathbf{w}_\epsilon,\alpha_\epsilon)$ e obter

$$\frac{1}{\epsilon}a_0(\mathbf{u}_\epsilon-\mathbf{w}_\epsilon,\mathbf{w})=b(\mathbf{w},\widetilde{c}_\epsilon,q_\epsilon)-b_0(\mathbf{w},\mathbf{u}_\epsilon,\mathbf{p}_\epsilon),\forall\mathbf{w}\in V.$$

Logo nossas equações adjuntas tornam-se

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\nu a_0(\mathbf{p}_\epsilon,\mathbf{z})-b_0(\mathbf{w}_\epsilon,\mathbf{p}_\epsilon,\mathbf{z})=b(\mathbf{z},\widetilde{c}_\epsilon,q_\epsilon)-b_0(\mathbf{z},\mathbf{u}_\epsilon,\mathbf{p}_\epsilon)\\
\theta a(q_\epsilon,r)-b(\mathbf{w}_\epsilon,q_\epsilon,r)-U\int_\Omega r\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}dx=-k\int_\Omega r\mathbf{i}_3.\mathbf{p}_\epsilon dx+\int_\Omega r(c_\epsilon-c_d)dx\\
\forall\mathbf{z}\in V,\ \forall r\in\widetilde{H^1}(\Omega).
\end{array}
\right.
$$

O desenvolvimento acima nos permite então enunciar o seguinte Teorema:

TEOREMA 4.2. Suponhamos que $U<\frac{\theta}{C}$, K *é limitado ou* $N>0$. *Seja* J_ϵ o funcional *definido por (4.24) e seja* $(\mathbf{w}_\epsilon,\alpha_\epsilon)$ *um controle ótimo para* (3.6). *Então existem únicos elementos* $(\mathbf{u}_\epsilon,c_\epsilon)\in V\times\widetilde{H^1}(\Omega)$ *que satisfazem:*

$$\nu a_0(\mathbf{u}_\epsilon,\mathbf{z})+b_0(\mathbf{w}_\epsilon,\mathbf{u}_\epsilon,\mathbf{z})=-k\int_\Omega c_\epsilon\mathbf{i}_3.\mathbf{z}dx+\langle\mathbf{f},\mathbf{z}\rangle\quad\forall\mathbf{z}\in V$$

$$\theta a(c_\epsilon,r)+b(\mathbf{w}_\epsilon,c_\epsilon,r)-U\int_\Omega c_\epsilon\frac{\partial r}{\partial x_3}dx=0\quad\forall r\in H^1(\Omega)\tag{4.32}$$

$$\int_\Omega c_\epsilon = \alpha_\epsilon$$

$$\nu a_0(\mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{z}) - b_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{z}, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) = b(\mathbf{z}, \mathbf{q}_\epsilon, \mathbf{c}_\epsilon) \quad \forall \mathbf{z} \in V \tag{4.33}$$

$$\theta a(q_\epsilon, r) - b(\mathbf{w}_\epsilon, q_\epsilon, r) - U \int_\Omega r \frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3} dx = -k \int_\Omega r \mathbf{i}_3 . \mathbf{p}_\epsilon dx + \int_\Omega r(c_\epsilon - c_d) dx \ \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega)$$

$$\left(U \int_\Omega \frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3} dx + (|\Omega| N + 1)\alpha_\epsilon - \int_\Omega c_d dx \right) (\alpha - \alpha_\epsilon) \geq 0 \qquad \forall \alpha \in K. \tag{4.34}$$

O Principal resultado desta seção é uma consequência do Teorema acima

COROLÁRIO 4.1..Suponhamos que $U < \frac{\theta}{C}$, *K é limitado ou* $N > 0$. *Seja J o funcional definido por (4.21) e T o conjunto definido por (4.23). Então existe um controle ótimo* (α^*, c^*) *para* (4.22) *e existem elementos* $\mathbf{u}^* \in V, (\mathbf{p}^*, q^*) \in V \times \widetilde{H^1}(\Omega)$ *e* $\lambda \in \{0, 1\}$ *tais que*:

$$\begin{array}{lcl} \nu a_0(\mathbf{u}^*, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{z}) & = & -k \int_\Omega c^* \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} dx + \langle \mathbf{f}, \mathbf{z} \rangle \quad \forall \mathbf{z} \in V \\ \theta a(c^*, r) + b(\mathbf{u}^*, c^*, r) - U \int_\Omega c^* \frac{\partial r}{\partial x_3} dx & = & 0 \qquad \forall r \in H^1(\Omega) \\ \int_\Omega c^* dx = \alpha^* & & \end{array} \tag{4.35}$$

$$\nu a_0(\mathbf{p}^*, \mathbf{z}) - b_0(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{z}, \mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*) \quad = \quad b(\mathbf{z}, q^*, c^*) \quad \forall \mathbf{z} \in V \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned} \theta a(q^*, r) - b(\mathbf{u}^*, q^*, r) - U \int_\Omega r \frac{\partial q^*}{\partial x_3} dx \quad &= \quad -k \int_\Omega r \mathbf{i}_3 . \mathbf{p}^* dx + \lambda \int_\Omega r(c^* - c_d) dx \\ & \qquad \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega) \end{aligned}$$

$$\left(U \int_\Omega \frac{\partial q^*}{\partial x_3} dx + \lambda(|\Omega|\, N + 1)\alpha^* - \int_\Omega c_d dx \right) (\alpha - \alpha^*) \geq 0 \qquad \forall \alpha \in K \tag{4.37}$$

$$\lambda + \|q^*\|_{\widetilde{H^1}} > 0. \tag{4.38}$$

Prova. É óbvio que (4.35) segue de (4.32) por passagem ao limite sobre subsequências obtidas na Proposição 4.3.

Se $\{\mathbf{p}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é limitada em $(L^2(\Omega))^3$ então de $(4.33)_2$ e da limitação de $\{c_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ em $H^1(\Omega)$ nós deduzimos que $\{q_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é limitada em $\widetilde{H^1}(\Omega)$. Mas $(4.33)_1$ e da desigualdade (ver [28])

$$\|\mathbf{p}_\epsilon\|^2_{(L^4(\Omega))^3} \leq 2 \|\mathbf{p}_\epsilon\|^{1/2}_{(L^2(\Omega))^3} \|\mathbf{p}_\epsilon\|^{3/2}_{(H^1(\Omega))^3}$$

a limitação de $\{\mathbf{p}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ em V segue. Provemos esta afirmação. Sabemos que de $(4.33)_1$

$$\nu a_0(\mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{z}) - b_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{z}) + b_0(\mathbf{z}, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) = b(\mathbf{z}, q_\epsilon, \mathbf{c}_\epsilon) \quad \forall \mathbf{z} \in V.$$

Fazendo $\mathbf{z} = \mathbf{p}_\epsilon$ temos:

$$\begin{aligned} \nu a_0(\mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) - b_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) + b_0(\mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) \quad &= \quad b(\mathbf{p}_\epsilon, q_\epsilon, \mathbf{c}_\epsilon) \\ \nu a_0(\mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) + b_0(\mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) \quad &= \quad b(\mathbf{p}_\epsilon, q_\epsilon, \mathbf{c}_\epsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{p}_\epsilon\|^2_V \quad &= \quad -b_0(\mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) + b(\mathbf{p}_\epsilon, q_\epsilon, \mathbf{c}_\epsilon) \\ \nu \|\mathbf{p}_\epsilon\|^2_V \quad &\leq \quad |b_0(\mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon)| + |b(\mathbf{p}_\epsilon, q_\epsilon, \mathbf{c}_\epsilon)|\,. \end{aligned}$$

Sabemos que (ver pag. 297, desig. 3.72, ref [28])

$$|b_0(\mathbf{p}_\epsilon, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon)| \leq C_2 \|\mathbf{p}_\epsilon\|_{(L^4(\Omega))^3} \|\mathbf{u}_\epsilon\|_V$$

$$|b(\mathbf{p}_\epsilon, q_\epsilon, \mathbf{c}_\epsilon)| \leq C_1 \|\mathbf{p}_\epsilon\|_V \|q_\epsilon\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} \|c_\epsilon\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\nu \|\mathbf{p}_\epsilon\|_V^2 &\leq C_2 \|\mathbf{p}_\epsilon\|_{(L^4(\Omega))^3} \|\mathbf{u}_\epsilon\|_V + C_1 \|\mathbf{p}_\epsilon\|_V \|q_\epsilon\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} \|c_\epsilon\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} \\
\nu \|\mathbf{p}_\epsilon\|_V^2 &\leq C_2 2 \|\mathbf{p}_\epsilon\|_{(L^2(\Omega))^3}^{1/2} \|\mathbf{p}_\epsilon\|_{(H^1(\Omega))^3}^{3/2} \|\mathbf{u}_\epsilon\|_V \\
&\quad + C_1 \|\mathbf{p}_\epsilon\|_V \|q_\epsilon\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} \|c_\epsilon\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $\{\mathbf{p}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é limitada em $(L^2(\Omega))^3$ temos $\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{(L^2(\Omega))^3}^{1/2} \leq k_5$ e $\|q_\epsilon\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} \leq k_6$. Também por um cálculo análogo ao da proposição 4.1 temos $\|\mathbf{u}_\epsilon\|_V \leq k_7$ e $\|c_\epsilon\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} \leq k_8$. Logo com constantes K e L independentes de ϵ conseguimos,

$$\nu \|\mathbf{p}_\epsilon\|_V^2 \leq K \|\mathbf{p}_\epsilon\|_{(H^1(\Omega))^3}^{3/2} + L \|\mathbf{p}_\epsilon\|_V.$$

Como $\mathbf{p}_\epsilon \in V$ implica $\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{(H^1(\Omega))^3} = \|\mathbf{p}_\epsilon\|_V$ e usando a desigualdade de Young com ϵ,

$$ab \leq C_\beta \|a\|^p + \beta \|b\|^{p'}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

temos

$$\begin{aligned}
\nu \|\mathbf{p}_\epsilon\|_V^2 &\leq C_\beta K^4 + \beta \|\mathbf{p}_\epsilon\|_V^2 + C_\delta L^2 + \delta \|\mathbf{p}_\epsilon\|_V^2 \\
(\nu - \beta - \delta) \|\mathbf{p}_\epsilon\|_V^2 &\leq C_\beta K^4 + C_\delta L^2.
\end{aligned}$$

Escolhendo β e δ tais que $\nu - \beta - \delta > 0$ vemos que $\{\mathbf{p}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é limitada em V.

Existem então os limites fracos de $\{(\mathbf{p}_\epsilon, q_\epsilon)\}_{\epsilon>0}$ em $V \times \widetilde{H^1}(\Omega)$ que denotaremos por $(\mathbf{p}^*, q^*)$. Da Proposição 4.3 sabemos que $c_{\epsilon_p} \rightharpoonup c^*$ em H^1, $\mathbf{u}_{\epsilon_p} \rightharpoonup \mathbf{u}^*$ e $\mathbf{w}_{\epsilon_p} \rightharpoonup \mathbf{u}^*$ em V, $\alpha_{\epsilon_p} \rightharpoonup \alpha^*$. Claramente $a_0(\mathbf{p}_{\epsilon_p}, \mathbf{z}) \to a_0(\mathbf{p}^*, \mathbf{z})$. Devido a injeção compacta de V em L^2 temos sobre uma subsequência ϵ_{p_j} que (ver pag. 165 ref [28])

$$\begin{aligned}
b_0(\mathbf{w}_{\epsilon_{p_j}}, \mathbf{p}_{\epsilon_{p_j}}, \mathbf{z}) &\to b_0(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{z}) \\
b_0(\mathbf{z}, \mathbf{u}_{\epsilon_{p_j}}, \mathbf{p}_{\epsilon_{p_j}},) &\to b_0(\mathbf{z}, \mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*).
\end{aligned}$$

Já provamos que $b(z, \mathbf{p}_{\epsilon_{p_j}}, c_{\epsilon_{p_j}}) \to b(\mathbf{z}, \mathbf{p}^*, c^*)$, também claramente $a(q_{\epsilon_{p_j}}, r) \to a(q^*, r)$ e $b(\mathbf{w}_{\epsilon_{p_j}}, q_{\epsilon_{p_j}}, r) \to b(\mathbf{u}^*, q^*, r)$. Como $q_{\epsilon_{p_j}} \rightharpoonup q^*$ em $\widetilde{H^1}(\Omega)$ então $q_{\epsilon_{p_j}} \rightharpoonup q^*$ em $L^2(\Omega)$ que por sua vez implica em $\int_\Omega r \frac{\partial q_{\epsilon_{p_j}}}{\partial x_3} dx \to \int_\Omega r \frac{\partial q^*}{\partial x_3} dx$.

Usando os fatos acima podemos passar o limite sobre subsequências em (4.32) e obter (4.35). Passando o limite em (4.33) obtemos (4.36) com $\lambda = 1$ e passando o limite em (4.34) obtemos (4.37) com $\lambda = 1$. Claramente (4.38) é verdadeiro com $\lambda = 1$.

Se $\{\mathbf{p}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ não é limitada definimos as seguintes sequências

$$\begin{aligned} \{\mathbf{P}_\epsilon\}_{\epsilon>0} &= \left\{ \frac{\mathbf{p}_\epsilon}{\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{(L^2(\Omega))^3}} \right\}_{\epsilon>0} \\ \{Q_\epsilon\}_{\epsilon>0} &= \left\{ \frac{q_\epsilon}{\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{(L^2(\Omega))^3}} \right\}_{\epsilon>0}. \end{aligned}$$

Dividindo (4.33)-(4.34) por $\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{(L^2(\Omega))^3}$nós obtemos como antes as limitações das sequências $\{(\mathbf{P}_\epsilon, Q_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ em $V \times \widetilde{H^1}(\Omega)$. Passando o limites nas equações divididas por $\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{(L^2(\Omega))^3}$ obtemos (4.36)-(4.37) com $\lambda = 0$. Observe que como $\{\mathbf{p}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ não é limitada então $\frac{1}{\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{(L^2(\Omega))^3}} \to 0$ e já que α_ϵ é limitada em $\mathbb{R}$ e c_ϵ é limitada em $\widetilde{H^1}(\Omega)$ vem que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{(L^2(\Omega))^3}} \int_\Omega r(c_\epsilon - c_d)dx &\to 0 \\ \frac{1}{\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{(L^2(\Omega))^3}} (|\Omega|\, N + 1)\alpha_\epsilon &\to 0 \end{aligned}$$

daí o motivo de $\lambda = 0$ em (4.36) e (4.37).

Finalmente (4.38) é uma consequência do fato que se $\|q^*\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} = 0$ então de (4.36) segue que $\mathbf{p}^* = 0$ que é uma contradição com o fato que $\|\mathbf{p}^*\|_{(L^2(\Omega))^3} = 1$.■

Em seguida fornecemos um resultado referente ao problema de controle (4.22) quando (4.20) é satisfeita (ou seja há unicidade de solução de (4.15)). Para qualquer $\alpha \in K = [0, \alpha']$, com o α' obtido no Teorema 4.1, o problema (4.13) tem uma única solução $(\mathbf{u}_\alpha, c_\alpha)$. Já que a correspondência $\alpha \to c_\alpha$ é univaluada, nós podemos escrever o funcional $J : K \to \mathbb{R}$ como segue:

$$J(\alpha) = \frac{1}{2} \int_\Omega r(c_\alpha - c_d)^2 dx + \frac{N}{2}\alpha^2 \tag{4.39}$$

e o problema de controle (4.22) torna-se

$$\min\{J(\alpha)\, |\alpha \in K\} \tag{4.40}$$

Neste caso, as condições necessárias de optimalidade, obtidas diretamente da diferenciabilidade de J sobre K, são fornecidas pela seguinte proposição:

Proposição 4.5. Seja $\alpha^* \in K$ um controle ótimo de (4.40). *Então existe um único par de elementos* $(\mathbf{u}^*, c^*)$, $(\mathbf{p}^*, q^*) \in V \times \widetilde{H^1}(\Omega)$ *tais que satisfazem o sistema* (4.35)-(4.38) *para* $\lambda = 1$.

CAPÍTULO 5

FLUXO BIOCONVECTIVO GENERALIZADO

5.1 Introdução

O propósito deste capítulo é estudar algumas questões matemáticas relacionadas as equações de fluxo bioconvectivo generalizado para posterior aproveitamento em uma aplicação do Formalismo de Dubovitskii e Milyutin ao problema de controle relacionado ao fluxo bioconvectivo generalizado.

No Capítulo 3 apresentamos as equações de fuxo bioconvectivo clássico e apresentamos um problema de controle relacionado a este fluxo. Nosso objetivo agora e apresentar as equações de fluxo bioconvectivo generalizado, propor um problema de controle, similar ao apresentado no Capítulo 3, e através do formalismo de Dubovitskii-Milyutin obter as condições necessárias de otimalidade para este problema. Veremos que as condições necessárias obtidas no Capítulo 3 são um caso particular das condições aqui obtidas. Analogamente ao caso do fluxo bioconvectivo clássico nosso objetivo é caracterizar os valores médios α da concentração que irão nos fornecer um dado campo de concentração c.

Para obter este modelo matemático modificamos apenas a hipótese (e) feita no modelo de fluxo bioconvectivo clássico pela hipótese:

(e') A suspensão é suficientemente diluida tal que a velocidade de natação é constante e a viscosidade depende da concentração dos microorganismos possuindo uma boa regularidade.

Este capítulo é a nossa maior contribuição e também a parte inédita de nosso trabalho. Obtemos aqui uma generalização das condições necessárias de uma maneira bem distinta daquelas obtidas no capítulo 3. Apresentamos o teorema 5.1 que é de autoria de M. D. Rojas-Medar ([26]) e apresentamos aqui sua demonstração para maior clareza do assunto.

Inicialmente fornecemos algumas notações e caracterizamos os espaços funcionais adequados a formulação variacional para as equações de fluxo bioconvectivo generallizado. Na seção seguinte apresentamos as equações de fluxo bioconvectivo generallizado no caso de evolução para que o leitor tome conhecimento destas equações mas enfatizamos que nos dedicaremos somente ao caso estacionário e deixaremos o estudo do probelma de controle associado ao caso de evolução para um trabalho futuro.Todos os resultados e demonstrações a partir da proposição 5.1 e principalmente o teorema 5.2 juntamente com o corolário 5.1 são de nossa autoria.

5.2 Preliminares

Vamos supor que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado de classe C^3. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ denotaremos por $(x,y)_{\mathbb{R}^3} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ o produto escalar de $\mathbb{R}^3$ e por $|\cdot|$ a norma euclidiana de x dada por $|x| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$ .Dado $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{nxn}$ a notação $|\cdot|$ indicará a norma de Frobenius da matriz A dada por $|A| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$. Definimos também o produto interno no espaço das matrizes como sendo $A : B = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$, onde $A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$. Vemos então que $|A| = (A : A)^{1/2}$.

Denotaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de funções Lebesgue integráveis com as normas usuais

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f(x)|^p\right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty \\ \|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup_{x \in \Omega} ess\, |f(x)| \end{aligned}$$

para $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hiltbert separável com o produto interno $(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$

Para o caso de funções vetoriais denotaremos $\mathbf{L}^P(\Omega) = (L^p(\Omega))^3$.

No caso $p = 2$, $\mathbf{L}^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável com o produto interno

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{u}(x)\mathbf{v}(x)dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i(x)v_i(x)dx.$$

Por simplicidade usaremos a notação $\|\cdot\|_2$ para $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ ou $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$.

Para $m \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$ consideraremos os espaços de Sobolev:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\, | D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\, |\alpha| \leq m\},$$

com a norma

$$\|u\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right]^{1/p}$$

O fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{m,p}$ é denotado por $W_0^{m,p}(\Omega)$ e para o caso $p = 2$ utilizaremos a notação padrão $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$. Usaremos a notação padrão $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ e também denotamos por $H^{-m}(\Omega)$ o dual de $H_0^m(\Omega)$. Também definimos neste caso $\mathbf{H}^m(\Omega) = (H^m(\Omega))^3$.

Denotaremos por $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ o espaço de traços sobre $\partial\Omega$, correspondente a $W^{1,p}(\Omega)$. Tal espaço será equipado com a norma

$$\|\gamma\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} = \inf\left\{\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \middle| v \in W^{1,p}(\Omega), v = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega\right\}.$$

No caso $p=2$, denotaremos $H^{1/2}(\partial\Omega)=W^{1/2,2}(\partial\Omega)$(Adams[29])

$\widetilde{L^2}$ denotará o subesfaço fechado de $L^2(\Omega)$ das funções ortogonais as constantes, isto é,

$$\widetilde{L^2}=\left\{r\in L^2(\Omega)\,\middle|\,\int_\Omega r dx=0\right\}$$

e $\widetilde{H^1}(\Omega)$ denotará o espaço de Hilbert

$$\widetilde{H^1}(\Omega)=\widetilde{L^2}\times H^1=\left\{r\in H^1(\Omega)\,\middle|\,\int_\Omega r dx=0\right\}$$

munido do produto escalar $a(c,r)=(c,r)_{\widetilde{H^1}}=\int_\Omega \nabla c\cdot\nabla r dx$ e respectiva norma associada

$$\|c\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}=\left((c,r)_{\widetilde{H^1}}\right)^{1/2}=\left(\int_\Omega |\nabla c|^2\,dx\right)^{1/2}=\|\nabla c\|_2\,.$$

Temos a seguinte estimativa

$$\|c\|_2\leq \widetilde{C}\,\|c\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}\,,\quad \forall c\in\widetilde{H^1}(\Omega).$$

Seja agora $\partial\Omega=S\cup\Gamma$ com S e Γ disjuntos. Supondo que S e Γ sejam suficientemente suaves, definimos o espaço,

$$H^1_{0,S}=\left\{\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1(\Omega)\,\middle|\,\mathbf{u}_{|S}=0,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma}=0\right\}$$

com o produto interno $(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_\Omega\nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v}dx$ e norma associada,

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1_{0,S}}=\left(\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx\right)^{1/2}=\|\nabla\mathbf{u}\|_2\,.$$

Quando nada for mencionado a notação "$\rightarrow$" indicará convergência forte e "$\rightharpoonup$" indicará convergência fraca.

Observação 5.1. Note que

$$\begin{aligned}(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \int_\Omega\nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v}dx\\ &= \int_\Omega\sum_{i,j=1}^3\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|_{H^1_{0,S}} &= \left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^3\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx\right)^{1/2}=\|\nabla\mathbf{u}\|_2\end{aligned}$$

onde

$$\nabla\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

é a matriz gradiente e $|\nabla\mathbf{u}|$ indica a norma de Frobenius da matriz $\nabla\mathbf{u}$. Observe que a coordenada $(\nabla\mathbf{u})_{i,j}$ é dada por $(\nabla\mathbf{u})_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. O espaço $H^1_{0,S}$ com a norma $\|\mathbf{u}\|_{H^1_{0,S}}$ é um espaço de Hilbert.

Definimos agora o espaço

$$\overset{\bullet}{G}(\Omega) = \left\{\mathbf{u} \in \left(C^\infty(\overline{\Omega})\right)^3 \left|\mathbf{u}_{|S} = 0,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma} = 0\right.\right\}.$$

Claramente $\overset{\bullet}{G}(\Omega) \subset H^1_{0,S}$. Considere $G(\Omega) = \overline{\overset{\bullet}{G}(\Omega)}^{\|\mathbf{u}\|_{H^1_{0,S}}}$, o fecho de $\overset{\bullet}{G}(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{H^1_{0,S}}$. $G(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma $\|\mathbf{u}\|_{G(\Omega)} = \|\mathbf{u}\|_{H^1_{0,S}} = \|\nabla\mathbf{u}\|_2$ (já que $G(\Omega)$ é um subespaço fechado do espaço $H^1_{0,S}$).

Definimos também o seguinte espaço

$$\begin{aligned}\overset{\bullet}{J}(\Omega) &= \left\{\mathbf{u} \in \overset{\bullet}{G}(\Omega) \mid div\,\mathbf{u} = 0\right\} \\ &= \left\{\mathbf{u} \in \left(C^\infty(\overline{\Omega})\right)^3 \left|\mathbf{u}_{|S} = 0,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma} = 0,\ div\,\mathbf{u} = 0\right.\right\}\end{aligned}$$

Também temos que $\overset{\bullet}{J}(\Omega) \subset H^1_{0,S}$ e consideramos $J_0(\Omega) = \overline{\overset{\bullet}{J}(\Omega)}^{\|\mathbf{u}\|_{H^1_{0,S}}}$, o fecho de $\overset{\bullet}{J}(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{H^1_{0,S}}$. Como $\overset{\bullet}{J}(\Omega) \subset \overset{\bullet}{G}(\Omega)$ então $\overline{\overset{\bullet}{J}(\Omega)} \subset \overline{\overset{\bullet}{G}(\Omega)}$, ou seja $J_0(\Omega) \subset G(\Omega)$ e $\|\mathbf{u}\|_{H(\Omega)}$ é uma norma em $J_0(\Omega)$ que o torna um espaço de Hilbert.

Dado $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ com a regularidade adequada, definimos o tensor taxa de deformação por,

$$D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^t\right)$$

$$D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Também definimos

$$
\begin{aligned}
(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v})) &= \int_\Omega D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|_{J_0} &= (D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v}))^{1/2} \\
&= \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_\Omega |D(\mathbf{u})|^2\right)^{1/2} \\
&= \|D(\mathbf{u})\|_2
\end{aligned}
$$

5.3 Resultados

Apresentamos alguns lemas que vão nos fornecer as estimativas que serão amplamente usadas ao longo deste trabalho. Não damos aqui mas demonstrações pois elas são facilmente encontradas na literatura de equações diferenciais parciais.

LEMA 5.1 (Desigualdade de Poincaré-Friedrichs). Seja $\Sigma \subseteq \partial\Omega$ uma parte da fronteira, tal que a medida superficial de Σ é estritamente positiva; então existe uma constante positiva C_Ω (que depende somente de Ω) tal que:

$$\|\mathbf{u}\|_2 \leq C_\Omega \|\mathbf{u}\|_{G(\Omega)}, \ \text{para todo} \quad \mathbf{u} \in G(\Omega), \ \text{com} \quad \mathbf{u}_{|\Sigma} = 0.$$

LEMA 5.2 Existe uma constante positiva C_Ω, tal que:

$$\|\phi\|_2 \leq C_\Omega \|\phi\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} \qquad \forall \phi \in \widetilde{H^1}(\Omega).$$

LEMA 5.3 Existe uma constante positiva $\overline{c}$ tal que (Desigualdade de Korn):

$$\|\mathbf{u}\|_{G(\Omega)} \leq \overline{c}\, \|D\mathbf{u}\|_2 = \overline{c}\, \|\mathbf{u}\|_{J_0}, \qquad \forall \mathbf{u} \in H(\Omega).$$

LEMA 5.4 Existe uma constante positiva γ tal que:

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 \leq \gamma \, \|D\mathbf{u}\|_2^2, \qquad \forall \mathbf{u} \in G(\Omega).$$

LEMA 5.5. Para cada $\mathbf{u} \in G(\Omega)$ e $1 \leq q \leq 6$ existe uma constante positiva $C_q = C_q(\Omega, \partial\Omega)$ tal que

$$\|\mathbf{u}\|_q \leq C_q \|D\mathbf{u}\|_2 .$$

Observação 5.2. Por um cálculo simples obtemos

$$\begin{aligned}
|D\mathbf{u}| &= \left|\frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^t\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(|\nabla\mathbf{u}| + \left|(\nabla\mathbf{u})^t\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(|\nabla\mathbf{u}| + |\nabla\mathbf{u}|\right) \\
&\leq |\nabla\mathbf{u}|
\end{aligned}$$

o que nos fornece

$$\begin{aligned}
\|D\mathbf{u}\|_2 &= \left(\int_\Omega |D(\mathbf{u})|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&\leq \|\nabla\mathbf{u}\|_2 \\
\|\mathbf{u}\|_{J_0(\Omega)} &\leq \|\mathbf{u}\|_{H(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Com isso vemos então que $\|\mathbf{u}\|_{G(\Omega)}$ e $\|\mathbf{u}\|_{J_0}$ são equivalentes em $G(\Omega)$ e portanto em $J_0(\Omega)$. Do Lema 5.1 vemos que existe $\widetilde{C_\Omega}$ tal que $\|\mathbf{u}\|_2 \leq \widetilde{C_\Omega}\,\|\mathbf{u}\|_{J_0(\Omega)}$.

Observação 5.3. Seja $C = \max\{\widetilde{C}, \widetilde{C_\Omega}\}$ então podemos considerar as estimativas:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|_2 &\leq C\,\|\mathbf{u}\|_{J_0(\Omega)} \\
\|c\|_2 &\leq C\,\|c\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Consideremos as aplicações

$$\begin{aligned}
B_0 \;:\; & J_0(\Omega) \times J_0(\Omega) \times J_0(\Omega) \quad \to \quad \mathbb{R} \\
& B_0(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}, \mathbf{w})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B \;:\; & J_0(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \quad \to \quad \mathbb{R} \\
& B(\mathbf{u},\phi,\varphi) = (\mathbf{u}\cdot\nabla\phi, \varphi)
\end{aligned}$$

B_0 e B são formas trilineares com as propriedades bem definidas

$$\begin{aligned}
B_0(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) &= 0 \\
B_0(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) &= -B_0(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}) \\
|B_0(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})| &\leq C_1\,\|\mathbf{u}\|_{J_0(\Omega)}\,\|\mathbf{v}\|_{J_0(\Omega)}\,\|\mathbf{v}\|_{J_0(\Omega)}
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
B(\mathbf{u},\phi,\phi) &= 0\\
B(\mathbf{u},\phi,\varphi) &= -B(\mathbf{u},\varphi,\phi)\\
B(\mathbf{u},\phi,\varphi) &\leq C_1 \|\mathbf{u}\|_{J_0(\Omega)} \|\phi\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} \|\varphi\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

5.4 Equações de Fluxo Bioconvectivo Generalizado

Considerando o fluido incompressível e viscoso propomos as equações de fluxo bioconvectivo generalizado

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - 2div(v(c)D(\mathbf{u})) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) + \nabla p &= -g(1+\gamma c)\mathbf{i}_3 + \mathbf{f}\\
div\, \mathbf{u} &= 0\\
\frac{\partial c}{\partial t} - \theta\Delta c + \mathbf{u}\cdot\nabla c + U\frac{\partial c}{\partial x_3} &= 0 \ em \ (0,T)\times\Omega.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Aqui são utilizadas as notações

1. a) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado, com fronteira $\partial\Omega$, representando a região de escoamento do fluido
   b) $\mathbf{u}(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)) \in \mathbb{R}^3$ denota a velocidade do fluido em um ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ e instante $t \in [0,T]$, onde $0 < T \leq +\infty$.
   c) $p(x,t)$ é a pressão hidrostática no ponto x e instante t.
   d) $c(x,t)$ representa a concentração de microorganismos no ponto $x \in \Omega$ e instante t.
   e) $v(.) > 0$ é a viscosidade do fluido.
   f) θ é a constante que indica a taxa de difusão dos microorganismos.
   g) g é a intensidade da aceleração da gravidade (suposta constante).
   h) $\mathbf{f}$ representa uma força externa dada.
   i) $\mathbf{i}_3 = (0,0,1)$ é o vetor unitário na direção vertical.
   j) U denota a velocidade média de natação dos microorganismos, na direção vertical.
   l) γ é uma constante positiva, dada por $\gamma = \frac{\rho_0}{\rho_m} - 1$, onde ρ_0 e ρ_m são a densidade de um organismo e a densidade da cultura em fluido, respectivamente.

Nas equações acima, $\nabla, \Delta,$ *e* div representam os operadores gradiente, Laplaciano e divergente, respectivamente; $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ indica o operador de convecção.

As equações (5.1) foram estudadas em ([26]) e obtidos resultados de existência para solução fraca e forte e mediante algumas hipóteses adicionais foram obtidos resultados de unicidade para a solução forte. Em ([26]) foram estudados os casos estacionário e não estacionário e sempre que necessário utilizaremos os resultados lá contidos.

Especificamos agora o sistema bioconvectivo generalizado no caso não estacionário e enfatizamos que nos dedicaremos somente ao caso estacionário:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - 2div(\upsilon(c)D(\mathbf{u})) + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla p & = & -g(1+\gamma c)\mathbf{i}_3 + \mathbf{f}, \quad \Omega\times(0,T) \\
div\mathbf{u} & = & 0 \quad \Omega\times(0,T), \\
\frac{\partial c}{dt} - \theta\Delta c + \mathbf{u}\cdot\nabla c + U\frac{\partial c}{\partial x_3} & = & 0 \quad \Omega\times(0,T), \\
\mathbf{u}(x,t) & = & 0 \quad S\times(0,T), \\
\mathbf{u}(x,t)\cdot\mathbf{n} & = & 0 \quad \Gamma\times(0,T), \\
\upsilon(c)[D(\mathbf{u})\mathbf{n} - (\mathbf{n}\cdot D(\mathbf{u})\mathbf{n})\mathbf{n}] & = & b_1 \quad \Gamma\times(0,T), \\
\theta\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} - Ucn_3 & = & 0 \quad \partial\Omega\times(0,T), \\
\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) & , & c(x,0) = c_0(x), \quad \Omega\times(0,T),
\end{array} \tag{5.2}$$

onde $\partial\Omega = S\cup\Gamma$. S é a parte rígida da fronteira e Γ é a parte livre da fronteira (supomos S e Γ independentes do tempo); $\mathbf{n}(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ o vetor normal unitário no ponto $x\in\partial\Omega$ e $\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}$ a derivada normal sobre $\partial\Omega$.

Introduzimos a nova função $q = p + gx_3$ daí segue que $\nabla p = \nabla q - g\mathbf{i}_3$ e com isso a equação (5.2a) torna-se

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - 2div(\upsilon(c)D(\mathbf{u})) + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla q \;=\; -g\gamma c\mathbf{i}_3 + \mathbf{f}, \quad \Omega\times(0,T)$$

e fazendo $k = g\gamma$ temos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - 2div(\upsilon(c)D(\mathbf{u})) + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla q \;=\; -kc\mathbf{i}_3 + \mathbf{f}, \quad \Omega\times(0,T)$$

com as demais condições do sistema inalteradas

5.5 Problema Estacionário

5.5.1 Solução Fraca

O problema estacionário associado ao sistema (5.2) ao qual associaremos futuramente um problema de controle é o seguinte,

$$\begin{array}{rcl}
-2div(\upsilon(c)D(\mathbf{u})) + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla q & = & -kc\mathbf{i}_3 + \mathbf{f}, \quad \Omega \\
div\mathbf{u} & = & 0 \quad \Omega, \\
-\theta\Delta c + \mathbf{u}\cdot\nabla c + U\frac{\partial c}{\partial x_3} & = & 0 \quad \Omega, \\
\mathbf{u}(x) & = & 0 \quad S, \\
\mathbf{u}(x)\cdot\mathbf{n} & = & 0 \quad \Gamma, \\
\upsilon(c)[D(\mathbf{u})\mathbf{n} - (\mathbf{n}\cdot D(\mathbf{u})\mathbf{n})\mathbf{n}] & = & b_1 \quad \Gamma, \\
\theta\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} - Ucn_3 & = & 0 \quad \partial\Omega.
\end{array} \tag{5.3}$$

Sabemos que para $\mathbf{u}, \mathbf{z} \in J_0$ e $q \in C^1$, temos a seguinte fórmula de Green (ver [26])

$$\int_\Omega [-2div(\upsilon(c)D(\mathbf{u})) + \nabla q]\cdot\mathbf{z}dx = (2\upsilon(c)D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z})) - 2\int_\Gamma b_1\cdot\mathbf{z}d\sigma$$

e portanto a formulação variacional para equação (5.3a) é a seguinte:

$$\mathbf{u} \in J_0, \mathbf{f} \in X(\Omega)$$

$$\int_\Omega [2div(\upsilon(c)D(\mathbf{u})) + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla q]\cdot\mathbf{z}dx = -k\int_\Omega c\mathbf{i}_3\cdot z + \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{z}dx, \forall\mathbf{z} \in J_0$$

$$(2\upsilon(c)D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z})) - 2\int_\Gamma b_1\cdot\mathbf{z}d\sigma + B_0(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z}) = -k\int_\Omega c\mathbf{i}_3\cdot z + (\mathbf{f},\mathbf{z}), \forall\mathbf{z} \in J_0$$

$$(2\upsilon(c)D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z}) = 2\int_\Gamma b_1\cdot\mathbf{z}d\sigma - k\int_\Omega c\mathbf{i}_3\cdot z + (\mathbf{f},\mathbf{z}), \forall\mathbf{z} \in J_0.$$

A formulação variacional para a equação (5.3c) é a seguinte (ver [23]): $c \in H^1(\Omega)$

$$\theta a(c,r) + B(\mathbf{u},c,r) - U\int_\Omega c\frac{\partial r}{\partial x_3}dx = 0, \ \forall r \in H^1(\Omega).$$

Portanto uma formulação variacional para o sistema (5.3) é a seguinte:

$$(\mathbf{u}, c) \in J_0 \times H^1(\Omega)$$

$$(2\upsilon(c)D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z}) = 2\int_\Gamma b_1\cdot\mathbf{z}d\sigma - k\int_\Omega c\mathbf{i}_3\cdot z + (\mathbf{f},\mathbf{z})$$

$$\theta a(c,r) + B(\mathbf{u},c,r) - U\int_\Omega c\frac{\partial r}{\partial x_3}dx = 0$$

$$\forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in H^1(\Omega).$$

Definição 5.1. Dada $f \in L^2(\Omega)$, um par de funções $(u,c) \in J_0 \times H^1(\Omega)$ é chamada **solução fraca** do sistema (5.3) se são válidas as identidades:

$$\begin{aligned}(2\upsilon(c)D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{z}) &= 2(b_1,\mathbf{z})_\Gamma - k(c\mathbf{i}_3,\mathbf{z}) + (\mathbf{f},\mathbf{z}), \forall \mathbf{z} \in J_0 \\ \theta a(c,r) + B(\mathbf{u},c,r) - U\int_\Omega c\tfrac{\partial r}{\partial x_3}dx &= 0, \ \forall r \in H^1(\Omega).\end{aligned}$$

Como em ([23]) precisaremos da condição adicional $\int_\Omega c_\alpha = \alpha$ já que, sem esta condição, a solução $(\mathbf{u},0)$ não descreve o fluxo bioconvectivo e assim o problema que estudaremos daqui em diante é o seguinte:

$$\left\{\begin{array}{c}(\mathbf{u}_\alpha, c_\alpha) \in J_0 \times H^1(\Omega) \\ (2\upsilon(c_\alpha)D(\mathbf{u}_\alpha), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{z}) = 2(b_1,\mathbf{z})_\Gamma - k(c_\alpha\mathbf{i}_3,\mathbf{z}) + (\mathbf{f},\mathbf{z}) \\ \theta a(c_\alpha,r) + B(\mathbf{u}_\alpha,c_\alpha,r) - U(c_\alpha, \frac{\partial r}{\partial x_3}) = 0 \\ \int_\Omega c_\alpha = \alpha \\ \forall (r,\mathbf{z}) \in H^1 \times J_0.\end{array}\right. \tag{5.4}$$

De modo a provarmos posteriormente alguns resultados referentes ao problema (5.4) fazemos a seguinte mudança de variáveis em (5.4):

$$\widetilde{c}_\alpha = c_\alpha - \frac{\alpha}{|\Omega|}. \tag{5.5}$$

Substituindo (5.5) em (5.3a) temos

$$-2div(\upsilon(c_\alpha)D(\mathbf{u}_\alpha)) + \mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla\mathbf{u}_\alpha + \nabla q \;=\; -k(\widetilde{c}_\alpha + \tfrac{\alpha}{|\Omega|})\mathbf{i}_3 + \mathbf{f}, \quad em\,\Omega$$

$$-2div(\upsilon(c_\alpha)D(\mathbf{u}_\alpha)) + \mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla\mathbf{u}_\alpha + \nabla q \;=\; -k\widetilde{c}_\alpha\mathbf{i}_3 - k\tfrac{\alpha}{|\Omega|}\mathbf{i}_3 + \mathbf{f}, \quad em\,\Omega$$

$$-2div(\upsilon(c_\alpha)D(\mathbf{u}_\alpha)) + \mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla\mathbf{u}_\alpha + \nabla q \;=\; -k\widetilde{c}_\alpha\mathbf{i}_3 - k\tfrac{\alpha}{|\Omega|}\mathbf{i}_3 + \mathbf{f}, \quad em\,\Omega$$

$$-2div(\upsilon(c_\alpha)D(\mathbf{u}_\alpha)) + \mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla\mathbf{u}_\alpha + \nabla q + k\tfrac{\alpha}{|\Omega|}\mathbf{i}_3 \;=\; -k\widetilde{c}_\alpha\mathbf{i}_3 + \mathbf{f}, \quad em\,\Omega$$

$$-2div(\upsilon(c_\alpha)D(\mathbf{u}_\alpha)) + \mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla\mathbf{u}_\alpha + \nabla(q + k\tfrac{\alpha}{|\Omega|}x_3) \;=\; -k\widetilde{c}_\alpha\mathbf{i}_3 + \mathbf{f}, \quad em\,\Omega.$$

Fazendo novamenete a formulação variacional com $\widetilde{q} = q + k\frac{\alpha}{|\Omega|}x_3$ obtemos:

$$(2\upsilon(\widetilde{c}_\alpha + \tfrac{\alpha}{|\Omega|})D(\mathbf{u}_\alpha), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha, \mathbf{z}) \;=\; 2(b_1, \mathbf{z})_\Gamma - k(\widetilde{c}_\alpha \mathbf{i}_3, z) + (\mathbf{f}, \mathbf{z}).$$

Substituindo (5.5) em (5.3c) e refazendo a formulação variacional obtemos:

$$\theta a(\widetilde{c}_\alpha, r) + B(\mathbf{u}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha, r) - U(\widetilde{c}_\alpha, \frac{\partial r}{\partial x_3}) = \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1).$$

Observação 5.4: Podemos obter o mesmo resultado apenas substituindo (5.5) em (5.5b).

Como $\int_\Omega \widetilde{c}_\alpha = 0$ conseguimos o seguinte problema equivalente ao problema (5.4)

$$\begin{array}{lcl} (\mathbf{u}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha) \in J_0 \times \widetilde{H}^1(\Omega) & & \\ (2\upsilon(\widetilde{c}_\alpha + \frac{\alpha}{|\Omega|})D(\mathbf{u}_\alpha), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha, \mathbf{z}) & = & 2(b_1, \mathbf{z})_\Gamma - k(\widetilde{c}_\alpha \mathbf{i}_3, \mathbf{z}) + (\mathbf{f}, \mathbf{z}), \\ \theta a(\widetilde{c}_\alpha, r) + B(\mathbf{u}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha, r) - U(\widetilde{c}_\alpha, \frac{\partial r}{\partial x_3}) & = & \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1) \\ \forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in \widetilde{H}^1(\Omega). & & \end{array} \tag{5.6}$$

TEOREMA 5.1.Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $U < \frac{\theta}{C}$ onde C é a constante que aparece na observação 5.3. Seja υ Lipschitz contínua e suponhamos que

$$\begin{array}{lcl} \upsilon_0 & = & \inf\{\upsilon(c) \,|\, c \in \mathbb{R}\} > 0 \\ \upsilon_1 & = & \sup\{\upsilon(c) \,|\, c \in \mathbb{R}\} < +\infty. \end{array} \tag{5.7}$$

Então existe uma solução fraca do problema (5.6).

Prova. Fixemos bases de Schauder $\{\mathbf{w}^j\}_{j=1}^\infty$ de $J_0(\Omega)$ e $\{\phi^j\}_{j=1}^\infty$ de $\widetilde{H^1}$. Agora para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos as aproximações de Galerkin

$$\mathbf{u}^n(x) = \sum_{j=1}^n c_{n,j}\mathbf{w}^j(x) \quad \text{e} \quad c^n(x) = \sum_{l=1}^n d_{n,l}\phi^l(x)$$

satisfazendo o problema aproximado

$$\begin{aligned} (2\upsilon(c^n + \frac{\alpha}{|\Omega|})D(\mathbf{u}^n), D(\mathbf{w}^j)) \;=\; & -B_0(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{w}^j) + 2\int_\Gamma b_1 \cdot \mathbf{w}^j d\sigma \\ & -k\int_\Omega c^n \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{w}^j dx + (\mathbf{f}, \mathbf{w^j}) \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\theta a(c^n, \phi^l) + B(\mathbf{u}^n, c^n, \phi^l) - U\int_\Omega c^n \frac{\partial \phi^l}{\partial x_3}dx = \frac{U\alpha}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{\partial \phi^l}{\partial x_3}dx \tag{5.9}$$

para $1 \leq j, l \leq n$. Assumimos primeiro a existência de $(\mathbf{u}^n, c^n), \forall n \in \mathbb{N}$ (tal existência será provada posteriormente) e demonstraremos que podemos extrair subsequências que convergem para uma solução do problema. Para isto, será necessário obter estimativas para os gradientes das incógnitas.

Multiplicando (5.8) por $c_{n,j}$ e somando em j de 1 até n, obtemos

$$2(\upsilon(c^n + \frac{\alpha}{|\Omega|})D(\mathbf{u}^n), D(\mathbf{u}^n)) + B_0(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) - 2(b_1, \mathbf{u}^n)_\Gamma = -k(c^n \mathbf{i}_3, \mathbf{u}^n) + (\mathbf{f}, \mathbf{u^n}).$$

Similarmente multiplicando (5.9) por $d_{n,l}$ e somando em l de 1 até n temos:

$$\theta a(c^n, c^n) + B(\mathbf{u}^n, c^n, c^n) - U \int_\Omega c^n \frac{\partial c^n}{\partial x_3} dx = \frac{U\alpha}{|\Omega|} \int_\Omega \frac{\partial c^n}{\partial x_3} dx.$$

Notando que $B_0(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) = 0$ temos

$$\begin{aligned}
2\left|(\upsilon(c^n)D(\mathbf{u}^n), D(\mathbf{u}^n))\right| &\leq 2\left|\int_\Gamma b_1 \cdot \mathbf{u}^n d\sigma\right| + k\left|\int_\Omega c^n \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{u}^n dx\right| \\
&\quad + |(\mathbf{f}, \mathbf{u^n})| \\
2\upsilon_0 \left\|D(\mathbf{u}^n)\right\|_2^2 &\leq 2c\left(\int_\Gamma b_1^2 d\sigma\right)^{1/2} \left\|D(\mathbf{u}^n)\right\|_2 + k\left\|c^n\right\|_2 \left\|u^n\right\|_2 \\
&\quad + \left\|f\right\|_2 \left\|u^n\right\|_2 \\
&\leq 2c\left(\int_\Gamma b_1^2 d\sigma\right)^{1/2} \left\|D(\mathbf{u}^n)\right\|_2 + kC\left\|c^n\right\|_2 \left\|D(u^n)\right\|_2 \\
&\quad + C\left\|f\right\|_2 \left\|D(u^n)\right\|_2 \\
2\upsilon_0 \left\|D(\mathbf{u}^n)\right\|_2 &\leq kC\left\|c^n\right\|_2 + C\left\|f\right\|_2 + 2c\left\|b_1\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\
2\upsilon_0 \left\|\mathbf{u}^n\right\|_{J_0(\Omega)} &\leq kC^2 \left\|c^n\right\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} + C\left\|f\right\|_2 + 2c\left\|b_1\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\left\|c^n\right\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}^2 &\leq \frac{U}{\theta}\left\|c^n\right\|_2 \left\|\frac{\partial c^n}{\partial x_3}\right\|_2 + \frac{U\alpha}{\theta|\Omega|}|\Omega|^{1/2}\left\|\frac{\partial c^n}{\partial x_3}\right\|_2 \\
&\leq \frac{UC}{\theta}\left\|c^n\right\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} \left\|\nabla c^n\right\|_2 + \frac{U\alpha}{\theta|\Omega|^{1/2}}\left\|\nabla c^n\right\|_2 \\
&\leq \frac{UC}{\theta}\left\|c^n\right\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} \left\|c^n\right\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} + \frac{U\alpha}{\theta|\Omega|^{1/2}}\left\|c^n\right\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} \\
&\leq \frac{UC}{\theta}\left\|c^n\right\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}^2 + \frac{U\alpha}{\theta|\Omega|^{1/2}}\left\|c^n\right\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} \\
\left\|c^n\right\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}^2\left(1 - \frac{UC}{\theta}\right) &\leq \frac{U\alpha}{\theta|\Omega|^{1/2}}\left\|c^n\right\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\|c^n\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} \leq \frac{U\alpha}{|\Omega|^{1/2}(\theta - UC)}. \tag{5.10}$$

Com isso temos também

$$\begin{aligned} 2\upsilon_0 \|\mathbf{u}^n\|_{J_0(\Omega)} &\leq kC^2 \|c^n\|_{\widetilde{H^1}(\Omega)} + C\|f\|_2 + 2c\|b_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \frac{kC^2 U\alpha}{|\Omega|^{1/2}(\theta - UC)} + C\|f\|_2 + 2c\|b_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{u}^n\|_{J_0(\Omega)} \leq \frac{1}{2\upsilon_0}\left(\frac{kC^2 U\alpha}{|\Omega|^{1/2}(\theta - UC)} + C\|f\|_2 + 2c\|b_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right). \tag{5.11}$$

Portanto a sequência $\{(\mathbf{u}^n, c^n)\}$ é limitada em $J_0(\Omega) \times \widetilde{H^1}(\Omega)$. Agora, do fato que $J_0(\Omega)$ esta compactamente imerso em H e $\widetilde{H^1}(\Omega)$ esta compactamente imerso em $\widetilde{L^2}$, podemos escolher uma subsequência de $\{(\mathbf{u}^n, c^n)\}$(ainda denotada por $\{(\mathbf{u}^n, c^n)\}$) e elementos $\mathbf{u}_\alpha \in J_0(\Omega)$, $\widetilde{c}_\alpha \in \widetilde{H^1}(\Omega)$ tais que $\mathbf{u}^n \rightharpoonup \mathbf{u}_\alpha$ em $J_0(\Omega)$, $\mathbf{u}^n \to \mathbf{u}_\alpha$ em H; $c^n \rightharpoonup \widetilde{c}_\alpha$ em $\widetilde{H^1}(\Omega)$, $c^n \to \widetilde{c}_\alpha$ em $\widetilde{L^2}$. Ainda mais, podemos supor que $D(\mathbf{u}^n) \rightharpoonup D(\mathbf{u}_\alpha)$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $\nabla(c^n) \rightharpoonup \nabla(\widetilde{c}_\alpha)$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Com isso podemos passar ao limite quando $n \to +\infty$ em (5.6) e obter

$$\begin{aligned} (2\upsilon(\widetilde{c}_\alpha + \frac{\alpha}{|\Omega|})D(\mathbf{u}_\alpha), D(\mathbf{w}^j)) &= -B_0(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha, \mathbf{w}^j) + 2\int_\Gamma b_1 \cdot \mathbf{w}^j d\sigma \\ &\quad -k\int_\Omega \widetilde{c}_\alpha \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{w}^j dx + (\mathbf{f}, \mathbf{w^j}) \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\theta a(\widetilde{c}_\alpha, \phi^l) + B(\mathbf{u}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha, \phi^l) - U\int_\Omega \widetilde{c}_\alpha \frac{\partial \phi^l}{\partial x_3} dx = \frac{U\alpha}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{\partial \phi^l}{\partial x_3} dx. \tag{5.13}$$

Observamos aqui que

$$\begin{aligned} (\upsilon(c^n)D(\mathbf{u}^n), D(\mathbf{w}^j)) &= (D(\mathbf{u}^n), \upsilon(c^n)D(\mathbf{w}^j)), \\ (D(\mathbf{u}^n), \upsilon(c^n)D(\mathbf{w}^j)) &\to (D(\mathbf{u}_\alpha), \upsilon(\widetilde{c}_\alpha)D(\mathbf{w}^j)), \\ (D(\mathbf{u}_\alpha), \upsilon(\widetilde{c}_\alpha)D(\mathbf{w}^j)) &= (\upsilon(\widetilde{c}_\alpha)D(\mathbf{u}_\alpha), D(\mathbf{w}^j)), \end{aligned}$$

já que $\upsilon(c^n)D(\mathbf{w}^j) \to \upsilon(\widetilde{c}_\alpha)D(\mathbf{w}^j)$(convergência forte) em $L^2(\Omega)$ em virtude do Teorema da convergência dominada de Lebesgue.

Como as sequências $\{\mathbf{w}^j\}$ e $\{\phi^l\}$ são completas em $J_0(\Omega)$ e $\widetilde{H^1}(\Omega)$ respectivamente, usando (5.12) e (5.13) concluimos que $(\mathbf{u}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha)$ satisfazem (5.6).

Falta ainda provar que o sistema não linear (5.8) e (5.9) tem solução fraca para todo n. Faremos isso utilizando o Teorema de Ponto Fixo de Brower.

Seja W_n o subespaço gerado por $\{\mathbf{w}^1, ..., \mathbf{w}^n\}$ e seja M_n o subespaço gerado por $\{\phi^1, ..., \phi^n\}$. Para cada $(\mathbf{v}, \xi) \in W_n \times M_n$, consideramos a única solução (pelo Lema de Lax-Milgram) $T(\mathbf{v}, \xi) = (\mathbf{u}, c) \in W_n \times M_n$ das equações linearizadas

$$\begin{aligned}(2\upsilon(\xi + \frac{\alpha}{|\Omega|})D(\mathbf{u}), D(\mathbf{w}^j)) + B_0(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}^j) \quad &= \quad -2\int_\Gamma b_1 \cdot \mathbf{w}^j d\sigma \\ &\quad -k\int_\Omega c\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{w}^j dx + (\mathbf{f}, \mathbf{w}^\mathbf{j})\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\theta a(c, \phi^l) + B(\mathbf{v}, c, \phi^l) - U\int_\Omega c\frac{\partial \phi^l}{\partial x_3}dx = \frac{U\alpha}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{\partial \phi^l}{\partial x_3}dx \tag{5.15}$$

para $1 \leq j, l \leq n$.

Inicialmente vamos provar que as equações (5.14) e (5.15) tem uma única solução. Considere

$$\begin{aligned} F \quad &: \quad M_n \times M_n \to \mathbb{R} \\ F(c, r) \quad &= \quad \theta a(c, r) + B(\mathbf{v}, c, r) - U\int_\Omega c\frac{\partial r}{\partial x_3}dx, \\ f(r) \quad &= \quad \frac{U\alpha}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{\partial r}{\partial x_3}dx. \end{aligned}$$

Claramente F é bilinear. F é contínua já que

$$\begin{aligned} |F(c, r)| \quad \leq \quad &\theta \|c\|_{\widetilde{H^1}} \|r\|_{\widetilde{H^1}} + C_1 \|\mathbf{v}\|_{J_0} \|c\|_{\widetilde{H^1}} \|r\|_{\widetilde{H^1}} \\ &+UC \|c\|_{\widetilde{H^1}} \|r\|_{\widetilde{H^1}}. \end{aligned}$$

Também F é coerciva pois

$$F(c, c) \geq (\theta - UC) \|c\|^2_{\widetilde{H^1}}.$$

Claramente f é linear contínua, logo pelo Lema de Lax-Milgram existe um único $c_\alpha \in M_n$ tal que $F(c_\alpha, r) = f(r)$, $\forall r \in M_n$.

Tomando este único c_α considere os operadores

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \quad &: \quad W_n \times W_n \to \mathbb{R} \\ \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad &= \quad 2(\upsilon(\xi + \frac{\alpha}{|\Omega|})D(\mathbf{u}), D(\mathbf{w})) + B_0(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{w}) \quad &= \quad 2\int_\Gamma b_1 \cdot \mathbf{w}d\sigma - k\int_\Omega c_\alpha \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{w}dx + (\mathbf{f}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

O operador $\mathbf{F}$ é bilinear já que $(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{w}))$ é um produto interno e $B_0(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ é trilinear. $\mathbf{F}$ é contínua pois

$$\begin{aligned}|\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w})| &\leq 2\upsilon(\xi)\|D(\mathbf{u})\|_2 \|D(\mathbf{w})\|_2 + C_1 \|\mathbf{v}\|_{J_0} \|\mathbf{u}\|_{J_0} \|\mathbf{w}\|_{J_0} \\ &\leq 2\upsilon(\xi)\|\mathbf{u}\|_{J_0} \|\mathbf{w}\|_{J_0} + C_1 \|\mathbf{v}\|_{J_0} \|\mathbf{u}\|_{J_0} \|\mathbf{w}\|_{J_0}\end{aligned}$$

e como

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2\upsilon(\xi)\|D(\mathbf{u})\|_2^2 = 2\upsilon(\xi)\|\mathbf{u}\|_{J_0}^2$$

temos que $\mathbf{F}$ é coerciva.

Claramente $\mathbf{g}$ é linear e

$$\begin{aligned}|\mathbf{g}(\mathbf{w})| &\leq 2\left|\int_\Gamma b_1 \cdot \mathbf{w} d\sigma\right| + k\left|\int_\Omega c_\alpha \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{w} dx\right| + |(\mathbf{f}, \mathbf{w})| \\ &\leq 2c\|b_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \|D(\mathbf{w})\|_2 + k\|c_\alpha\|_2 \|\mathbf{w}\|_2 \\ &\quad + \|\mathbf{g}\|_2 \|\mathbf{w}\|_2 \\ &\leq 2c\|b_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\mathbf{w}\|_{J_0} + kC^2 \|c_\alpha\|_{\widetilde{H}^1} \|\mathbf{w}\|_{J_0} \\ &\quad + C\|\mathbf{g}\|_2 \|\mathbf{w}\|_{J_0}\end{aligned}$$

implica que $\mathbf{g}$ é contínua. Novamente pelo Lema de Lax-Milgram existe um único $\mathbf{u}_\alpha \in W_n$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{w}) = \mathbf{g}(\mathbf{w}), \forall \mathbf{w} \in W_n$. Assim (5.14) e (5.15) tem uma única solução.

Por outro lado para o sistema (5.14) e (5.15) obtemos o mesmo tipo de estimativa que aquela em (5.10) e (5.11), isto é, existe M tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{J_0}^2 + \|c\|_{\widetilde{H}^1}^2 \leq M$$

Considere $G = \{(\mathbf{v}, \xi) \in W_n \times M_n \,\big|\, \|\mathbf{u}\|_{J_0}^2 + \|c\|_{\widetilde{H}^1}^2 \leq M\}$. Assim T define uma aplicação contínua $T : G \to G$. De fato, seja $(\mathbf{v}_n, \xi_n) \to (\mathbf{v}, \xi)$ com $T(\mathbf{v}, \xi) = (\mathbf{u}_\alpha, c_\alpha)$. Para cada $(\mathbf{v}_n, \xi_n)$ existem únicos $(\mathbf{u}_n, c_n)$ tais que $T(\mathbf{v}_n, \xi_n) = (\mathbf{u}_n, c_n)$, ou seja, temos as equações

$$(2\upsilon(\xi_n + \frac{\alpha}{|\Omega|})D(\mathbf{u}_n), D(\mathbf{w}^j)) + B_0(\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{w}^j) - 2(b_1, \mathbf{w}^j) = -k(c_n \mathbf{i}_3, \mathbf{w}^j) + (\mathbf{f}, \mathbf{w}^\mathbf{j})$$

$$\theta a(c_n, \phi^l) + B(\mathbf{v}_n, c_n, \phi^l) - U\int_\Omega c_n \frac{\partial \phi^l}{\partial x_3} dx = \frac{U\alpha}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{\partial \phi^l}{\partial x_3} dx$$

$1 \leq j, l \leq n$. Fazendo as mesmas estimativas que (5.10) e (5.11), temos que existem subsequências $\mathbf{u}_{n_k} \rightharpoonup \widetilde{\mathbf{u}}$ e $c_{n_k} \rightharpoonup \widetilde{c}$. Passando o limite nestas equações quando $n \to +\infty$ vemos que $T(\mathbf{v}, \xi) = (\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{c})$. Mas esta equações tem únicas soluções e concluimos que $(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{c}) = (\mathbf{u}_\alpha, c_\alpha)$, ou seja, $(\mathbf{u}_{n_k}, c_{n_k}) \rightharpoonup (\mathbf{u}_\alpha, c_\alpha)$. Como estamos em dimensão finita temos que $(\mathbf{u}_{n_k}, c_{n_k}) \to (\mathbf{u}_\alpha, c_\alpha)$, isto é, $T(\mathbf{v}_{n_k}, \xi_{n_k}) \to T(\mathbf{v}, \xi)$. Portanto de $(\mathbf{v}_{n_k}, \xi_{n_k}) \to (\mathbf{v}, \xi)$ concluimos que $T(\mathbf{v}_{n_k}, \xi_{n_k}) \to T(\mathbf{v}, \xi)$, logo T é contínua. Claramente G é convexo fechado já que G é uma bola fechada em $W_n \times M_n$. Portanto pelo Teorema do ponto fixo de Brouwer concluimos que a aplicaçào T possui pelo menos um ponto fixo que é solução de (5.8), (5.9).■

PROPOSIÇÃO 5.1.Sejam $f \in L^2(\Omega)$, $U < \frac{\theta}{C}$ onde C é a constante que aparece na observação 5.3 e seja υ Lipschitz contínua satyisfazendo a condição (5.7). Suponhamos que $(\mathbf{u}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha)$ é uma solução fraca de (5.6) então temos as estimativas:

$$\|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H}^1} \leq \frac{U\alpha}{|\Omega|^{1/2}(\theta - UC)}, \tag{5.16}$$

$$\|\mathbf{u}_\alpha\|_{J_0} \leq \frac{1}{2\upsilon_0}\left(\frac{kC^2U\alpha}{|\Omega|^{1/2}(\theta - UC)} + C\|\mathbf{f}\|_2 + 2c\|b_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right). \tag{5.17}$$

Prova. Fazendo $\mathbf{z} = \mathbf{u}_\alpha$ e $r = \widetilde{c}_\alpha$ em (5.6) temos

$$\begin{array}{rcl} (2\upsilon(\widetilde{c}_\alpha + \frac{\alpha}{|\Omega|})D(\mathbf{u}_\alpha), D(\mathbf{u}_\alpha)) & = & 2(b_1, \mathbf{u}_\alpha)_\Gamma - k(\widetilde{c}_\alpha \mathbf{i}_3, \mathbf{u}_\alpha) + (\mathbf{f}, \mathbf{u}_\alpha), \\ \theta a(\widetilde{c}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha) - U\int_\Omega \widetilde{c}_\alpha \frac{\partial \widetilde{c}_\alpha}{\partial x_3} dx & = & \frac{U\alpha}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{\partial \widetilde{c}_\alpha}{\partial x_3} dx, \end{array}$$

e a partir da segunda equação acima conseguimos

$$\begin{array}{rcl} \theta\,|a(\widetilde{c}_\alpha, \widetilde{c}_\alpha)| & = & U\left|\int_\Omega \widetilde{c}_\alpha \frac{\partial \widetilde{c}_\alpha}{\partial x_3} dx\right| + \frac{U\alpha}{|\Omega|}\left|\int_\Omega \frac{\partial \widetilde{c}_\alpha}{\partial x_3} dx\right|, \\ \theta\,\|\widetilde{c}_\alpha\|^2_{\widetilde{H}^1} & \leq & U\|\widetilde{c}_\alpha\|_2 \left\|\frac{\partial \widetilde{c}_\alpha}{\partial x_3}\right\|_2 + \frac{U\alpha\,|\Omega|^{1/2}}{|\Omega|}\left\|\frac{\partial \widetilde{c}_\alpha}{\partial x_3}\right\|_2, \\ & \leq & UC\|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H}^1}\|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H}^1} + \frac{U\alpha}{|\Omega|^{1/2}}\|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H}^1}, \\ \theta\,\|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H}^1} & \leq & UC\|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H}^1} + \frac{U\alpha}{|\Omega|^{1/2}}, \\ (\theta - UC)\|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H}^1} & \leq & \frac{U\alpha}{|\Omega|^{1/2}}, \\ \|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H}^1} & \leq & \frac{U\alpha}{|\Omega|^{1/2}(\theta - UC)}, \end{array}$$

e da primeira equação acima conseguimos

$$\begin{aligned}
\left|(2\upsilon(\widetilde{c}_\alpha + \frac{\alpha}{|\Omega|})D(\mathbf{u}_\alpha), D(\mathbf{u}_\alpha))\right| &= |2(b_1,\mathbf{u}_\alpha)_\Gamma - k(\widetilde{c}_\alpha \mathbf{i}_3, \mathbf{u}_\alpha) + (\mathbf{f}, \mathbf{u}_\alpha)| \\
\left|(2\upsilon(\widetilde{c}_\alpha + \frac{\alpha}{|\Omega|})D(\mathbf{u}_\alpha), D(\mathbf{u}_\alpha))\right| &\le |2(b_1,\mathbf{u}_\alpha)_\Gamma| + |k(\widetilde{c}_\alpha \mathbf{i}_3, \mathbf{u}_\alpha)| + |(\mathbf{f}, \mathbf{u}_\alpha)| \\
2\upsilon_0 \|D(\mathbf{u}_\alpha)\|_2^2 &\le 2c\left(\int_\Gamma b_1 d\sigma\right)^{1/2} \|D(\mathbf{u}_\alpha)\|_2 + k\|\widetilde{c}_\alpha\|_2 \|\mathbf{u}_\alpha\|_2 \\
&\quad + \|\mathbf{f}\|_2 \|\mathbf{u}_\alpha\|_2 \\
&\le 2c\left(\int_\Gamma b_1 d\sigma\right)^{1/2} \|D(\mathbf{u}_\alpha)\|_2 + kC\|\widetilde{c}_\alpha\|_2 \|D(\mathbf{u}_\alpha)\|_2 \\
&\quad + C\|\mathbf{f}\|_2 \|D(\mathbf{u}_\alpha)\|_2 \\
2\upsilon_0 \|D(\mathbf{u}_\alpha)\|_2 &\le kC^2 \|\widetilde{c}_\alpha\|_{\widetilde{H^1}} + C\|\mathbf{f}\|_2 + 2c\|b_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)}
\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{u}_\alpha\|_{J_0} \le \frac{1}{2\upsilon_0}\left(\frac{kC^2U\alpha}{|\Omega|^{1/2}(\theta - UC)} + C\|\mathbf{f}\|_2 + 2c\|b_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)$$

■

5.6 Um problema de controle

Nesta seção supomos que $\upsilon(\cdot)$ é uma função contínua satisfazendo a condição (5.7) e que a velocidade U satisfaz a condição:

$$U < \frac{\theta}{C}$$

onde C é a constante que aparece na observação 5.3 .Vamos considerar $\upsilon(c) = \upsilon \circ c$, assim $\upsilon(c(x)) = (\upsilon \circ c)(x)$ e além disso temos que $\upsilon(c) \in H^1(\Omega)$ se $\upsilon_1' = \sup\{\upsilon'(t)\,|t \in \mathbb{R}\,\} < \infty$.

Vamos considerar o funcional $J : K \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$.

$$J(\alpha, c) = \frac{1}{2}\int_\Omega (c - c_d)^2 dx + \frac{N}{2}\alpha^2 \tag{5.18}$$

onde $K \subset [0, +\infty)$ é um intervalo fechado, não vazio, não degenerado, N é uma constante não negativa e $c_d \in L^2(\Omega)$ é uma função dada.

Consideramos o conjunto T definido por,

$$T = \left\{(\alpha, c) \in K \times H^1(\Omega)\ |\,\exists\, u \in J_0 \,\text{com}\, (u, c)\quad \text{satisfazendo}\,(5.4)\right\} \tag{5.19}$$

e formulamos o problema de controle ótimo:

$$\min\left\{J(\alpha, c)\,|(\alpha, c) \in T\right\}, \tag{5.20}$$

Provaremos em seguida a existência de um controle ótimo para o problema (5.20) e posteriormente encontraremos as condições necessárias de otimalidade (Princípio do mínimo).

PROPOSIÇÃO 5.2. .Sejam $f \in L^2(\Omega)$, $U < \frac{\theta}{C}$ *onde* C *é a constante que aparece na observação 5.3 e seja* v *Lipschitz contínua satisfazendo a condição (5.7). Seja* J *o funcional definido por (5.18) e* T *o conjunto definido por (5.19). Então problema de controle ótimo (5.20) tem ao menos uma solução.*

Prova. Pode ser provado que qualquer sequência minimizante $\{(\alpha_n, c_n)\}_n \subset T$ de J é limitada em $K \times H^1(\Omega)$ (esta demonstração já foi feita para o caso clássico no cap 3). Provemos agora que T é fracamente fechado. Seja $(\alpha_n, c_n) \rightharpoonup (\alpha, c)$ em $\mathbb{R} \times H^1(\Omega)$, com $(\alpha_n, c_n) \in T$. Existe $\mathbf{u}_n \in J_0$ tal que $(\mathbf{u}_n, c_n)$ é solução de

$$(2v(c_n)D(\mathbf{u}_n), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{z}) = 2\int_\Gamma b_1 \cdot \mathbf{z} d\sigma - k\int_\Omega c_n \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} + (\mathbf{f}, \mathbf{z}), \quad (5.21)$$

$$\theta a(c_n, r) + B(\mathbf{u}_n, c_n, r) - U\int_\Omega c_n \frac{\partial r}{\partial x_3} dx = 0, \quad (5.22)$$

$$\int_\Omega c_n = \alpha_n. \quad (5.23)$$

Como $\alpha_n \to \alpha$, α_n é limitada e da estimativa (5.17) $\mathbf{u}_n$ é limitada em J_0,portanto existe uma subsequência $\mathbf{u}_{n_k} \rightharpoonup \mathbf{u}$. Existem também subsequências $c_{n_k} \rightharpoonup c$ em $H^1(\Omega)$ (também temos $c_{n_k} \rightharpoonup c$ em $L^2(\Omega)$) e $\alpha_{n_k} \rightharpoonup \alpha$. Do fato que J_0 está compactamente imerso em X e H^1 esta compactamente imerso em $\widetilde{L^2}$, podemos escolher subsequências $(\mathbf{u}_{n_k}, c_{n_k})$ tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n_k} &\rightharpoonup \mathbf{u} \text{ em } J_0, \quad \mathbf{u}_{n_k} \to \mathbf{u} \text{ em } X, \\ c_{n_k} &\rightharpoonup c \text{ em } H^1, \quad c_{n_k} \to c \text{ em } \widetilde{L^2}. \end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u}_{n_k}) &\rightharpoonup D(\mathbf{u}\ )\text{em } \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \nabla(c_{n_k}) &\rightharpoonup \nabla(c) \text{ em } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Isso nos permite passar o limite nas equações (5.21), (5.22) e (5.23) para obter $(\mathbf{u}, c)$ como solução de (5.4) o que nos diz que $(\alpha, c) \in T$ mostrando que T é fracamente fechado. Da continuidade fraca de J sobre $K \times H^1(\Omega)$ obtemos a existência de um controle ótimo para o problema (5.20). ■

De modo a obter as condições necessárias de otimalidade vamos aproximar J (em um certo sentido que ficará claro na proposição 5.4) por uma família de funcionais $\{J_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ definidos por

$$\begin{array}{rcl} J_\epsilon & : & \widetilde{H^1} \times J_0 \times K \longrightarrow \mathbb{R} \\ J_\epsilon(\xi, \mathbf{w}, \alpha) & = & J(\alpha, c(\mathbf{w}, \alpha)) + \frac{1}{2\epsilon} \|\mathbf{u}(\xi, \mathbf{w}, \alpha) - \mathbf{w}\|_{J_0}^2 \\ & & + \frac{1}{2\epsilon} \|c(\mathbf{w}, \alpha) - \xi_\alpha\|_2^2 , \end{array} \tag{5.24}$$

onde$(\mathbf{u}(\xi, \mathbf{w}, \alpha), c(\mathbf{w}, \alpha))$ é a única solução de

$$(\mathbf{u}, c) \in J_0 \times H^1(\Omega)$$

$$\begin{array}{rcl} (2v(\xi_\alpha)D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) & = & 2(b_1, \mathbf{z})_\Gamma - k(c_\alpha \mathbf{i}_3, \mathbf{z}) + (\mathbf{f}, \mathbf{z}) \\ \xi_\alpha & = & \xi + \dfrac{\alpha}{|\Omega|} \end{array} \tag{5.25}$$

$$\begin{array}{rcl} \theta a(c, r) + B(\mathbf{w}, c, r) - U(c, \dfrac{\partial r}{\partial x_3}) & = & 0 \\ \displaystyle\int_\Omega c & = & \alpha \end{array}$$

$$\forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in H^1(\Omega).$$

Fazendo $\widetilde{c} = c - \frac{\alpha}{|\Omega|}$ e definindo $v_{\xi_\alpha} = v(\xi_\alpha) = v(\xi + \frac{\alpha}{|\Omega|})$ obtemos o problema equivalente,

$$\begin{array}{rcl} J_\epsilon & : & \widetilde{H^1} \times J_0 \times K \longrightarrow \mathbb{R} \\ J_\epsilon(\xi, \mathbf{w}, \alpha) & = & J(\alpha, \widetilde{c} + \frac{\alpha}{|\Omega|}) + \frac{1}{2\epsilon} \|\mathbf{u}(\xi, \mathbf{w}, \alpha) - \mathbf{w}\|_{J_0}^2 \\ & & + \frac{1}{2\epsilon} \|\widetilde{c} - \xi\|_2^2 \end{array} \tag{5.26}$$

onde $(\mathbf{u}, \widetilde{c})$ é a única solução de

$$\begin{array}{lcl} (\mathbf{u}, \widetilde{c}) \in J_0 \times \widetilde{H^1}(\Omega) & & \\ (2v_{\xi_\alpha} D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) & = & 2(b_1, \mathbf{z})_\Gamma - k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3, \mathbf{z}) + (\mathbf{f}, \mathbf{z}) \\ \theta a(\widetilde{c}, r) + B(\mathbf{w}, \widetilde{c}, r) - U(\widetilde{c}, \frac{\partial r}{\partial x_3}) & = & \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1) \\ \forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega). & & \end{array} \tag{5.27}$$

Inicialmente vamos provar que o sistema (5.27) tem uma única solução.

LEMA 5.6. Sejam $f \in L^2(\Omega)$, $U < \frac{\theta}{C}$ onde C é a constante que aparece na observação 5.3 e seja v Lipschitz contínua satisfazendo a condição (5.7). Então, para cada $(\xi, \alpha, \mathbf{w})$ dado, o sistema (5.27) tem uma única solução $(\mathbf{u}, \widetilde{c}) \in J_0 \times \widetilde{H^1}(\Omega)$.

Prova. Considere

$$
\begin{aligned}
F &: \widetilde{H^1}(\Omega) \times \widetilde{H^1}(\Omega) \to \mathbb{R} \\
F(\widetilde{c}, r) &= \theta a(\widetilde{c}, r) + B(\mathbf{w}, \widetilde{c}, r) - U(\widetilde{c}, \frac{\partial r}{\partial x_3}) \\
f(r) &= \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1).
\end{aligned}
$$

Nota-se F é bilinear.e F é contínua pois

$$
\begin{aligned}
|F(\widetilde{c}, r)| \leq\ & \theta \|\widetilde{c}\|_{\widetilde{H^1}} \|r\|_{\widetilde{H^1}} + C_1 \|\mathbf{v}\|_{J_0} \|\widetilde{c}\|_{\widetilde{H^1}} \|r\|_{\widetilde{H^1}} \\
& + UC \|\widetilde{c}\|_{\widetilde{H^1}} \|r\|_{\widetilde{H^1}}.
\end{aligned}
$$

Também F é coerciva pois

$$
F(\widetilde{c}, \widetilde{c}) \geq (\theta - UC) \|\widetilde{c}\|^2_{\widetilde{H^1}}.
$$

Também f é linear e contínua pois

$$
\begin{aligned}
|f(r)| &\leq \left| \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1) \right| \\
&\leq \frac{U\alpha}{|\Omega|} |\Omega|^{1/2} \|\nabla r\|_2 \\
&\leq \frac{U\alpha}{|\Omega|^{1/2}} \|r\|_{\widetilde{H^1}}.
\end{aligned}
$$

Logo pelo Lema de Lax-Milgram existe um único $\widetilde{c}_1 \in \widetilde{H^1}(\Omega)$ tal que $F(\widetilde{c}_1, r) = f(r)$, $\forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega)$.

Considere os operadores

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &: J_0 \times J_0 \to \mathbb{R} \\
\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) &= 2(\upsilon(\xi_\alpha) D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{z}), \\
\mathbf{g}(\mathbf{z}) &= 2(b_1, \mathbf{z})_\Gamma - k(\widetilde{c}_1 \mathbf{i}_3, \mathbf{z}) + (\mathbf{f}, \mathbf{z}).
\end{aligned}
$$

O operador $\mathbf{F}$ é bilinear já que $(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z}))$ é um produto interno e $B_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{z})$ é trilinear. $\mathbf{F}$ é contínua pois

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{z})| &\leq 2\upsilon_1 \|D(\mathbf{u})\|_2 \|D(\mathbf{z})\|_2 + C_1 \|\mathbf{w}\|_{J_0} \|\mathbf{u}\|_{J_0} \|\mathbf{z}\|_{J_0} \\
&\leq 2\upsilon_1 \|\mathbf{u}\|_{J_0} \|\mathbf{z}\|_{J_0} + C_1 \|\mathbf{z}\|_{J_0} \|\mathbf{u}\|_{J_0} \|\mathbf{z}\|_{J_0},
\end{aligned}
$$

e como

$$\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{u}) = 2(\upsilon(\xi_\alpha)D(\mathbf{u}),D(\mathbf{u})) \geq 2\upsilon_0 \left\|D(\mathbf{u})\right\|_2^2 \geq 0$$

temos que $\mathbf{F}$ é coerciva.

Claramente $\mathbf{g}$ é linear e

$$\begin{aligned}
|\mathbf{g}(\mathbf{z})| &\leq 2\left|\int_\Gamma b_1 \cdot \mathbf{z} d\sigma\right| + k\left|\int_\Omega \widetilde{c}_1 \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} dx\right| + |(\mathbf{f},\mathbf{z})| \\
&\leq 2c\left\|b_1\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \left\|D(\mathbf{z})\right\|_2 + k\left\|\widetilde{c}_1\right\|_2 \left\|\mathbf{z}\right\|_2 \\
&\quad + \left\|\mathbf{f}\right\|_2 \left\|\mathbf{z}\right\|_2 \\
&\leq 2c\left\|b_1\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \left\|\mathbf{z}\right\|_{J_0} + kC^2\left\|\widetilde{c}_1\right\|_{\widetilde{H^1}} \left\|\mathbf{z}\right\|_{J_0} \\
&\quad + C\left\|\mathbf{f}\right\|_2 \left\|\mathbf{z}\right\|_{J_0}
\end{aligned}$$

implica que $\mathbf{g}$ é contínua. Novamente pelo Lema de Lax-Milgram existe um único $\mathbf{u}_1 \in J_0$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{u}_1,\mathbf{z}) = \mathbf{g}(\mathbf{z}), \forall \mathbf{z} \in J_0$. Assim o sistema (5.27) tem uma única solução. ■

Como a correspondência $(\xi,\mathbf{w},\alpha) \to (u(\mathbf{w},\alpha), c(\mathbf{w},\alpha))$ é univaluada, isso nos permite obter condições de otimalidade, via formalismo de Dubovitskii-Milyutin, para o seguinte problema de controle

$$\min\left\{J_\epsilon(\xi,\mathbf{w},\alpha) \mid (\xi,\mathbf{w},\alpha) \in \widetilde{H^1} \times J_0 \times K\right\} \tag{5.28}$$

e então por passagem ao limite obter as condições desejadas para a solução do problema de controle (5.20).

PROPOSIÇÃO 5.3. Sejam $f \in L^2(\Omega)$, $U < \frac{\theta}{C}$ onde C é a constante que aparece na observação 5.3 e seja υ Lipschitz contínua satisfazendo a condição (5.7). Seja J_ϵ definido por (5.26). Então existe ao menos uma solução do problema de controle (5.28).

Prova. Seja $\{(\xi_\epsilon^n, \mathbf{w}_\epsilon^n, \alpha_\epsilon^n)\}_n$ uma sequência minimizante de J_ϵ. Portanto temos que $J_\epsilon(\xi_\epsilon^n, \mathbf{w}_\epsilon^n, \alpha_\epsilon^n)$ é limitada e da definição de J vem que $\{\alpha_\epsilon^n\}$ é limitada. Da definição de J_ϵ existe $(\mathbf{u}_\epsilon^n, \widetilde{c}_\epsilon^n)$ que é solução de (5.27). Pela Proposição 5.1 temos que $\{\widetilde{c}_\epsilon^n\}$ é limitada em $\widetilde{H^1}$ e $\{\mathbf{u}_\epsilon^n\}$ é limitada em J_0.

De

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\epsilon}\left\|\mathbf{u}_\epsilon^n - \mathbf{w}_\epsilon^n\right\|_{J_0}^2 &\leq J_\epsilon(\xi_\epsilon^n, \mathbf{w}_\epsilon^n, \alpha_\epsilon^n) \leq k_1 \qquad (k_1 \text{ constante}) \\
\left\|\mathbf{u}_\epsilon^n - \mathbf{w}_\epsilon^n\right\|_{J_0} &\leq (2\epsilon k_1)^{1/2} \\
\left\|\mathbf{w}_\epsilon^n\right\|_{J_0} &\leq \left\|\mathbf{u}_\epsilon^n - \mathbf{w}_\epsilon^n\right\|_{J_0} + \left\|\mathbf{u}_\epsilon^n\right\|_{J_0} \leq (2\epsilon k_1)^{1/2} + k_2
\end{aligned}$$

vem que $\{\mathbf{w}_\epsilon^n\}$ é limitada em J_0. Analogamente de

$$\frac{1}{2\epsilon}\left\|\widetilde{c}_\epsilon^n - \xi_\epsilon^n\right\|_{\widetilde{H^1}}^2 \leq J_\epsilon(\xi_\epsilon^n, \mathbf{w}_\epsilon^n, \alpha_\epsilon^n) \leq k_1 \qquad (k_1 \text{ constante})$$

vem que $\{\xi_\epsilon^n\}$ é limitada em $\widetilde{H^1}$. Logo existe subsequência $(\xi_\epsilon^{n_k}, \mathbf{w}_\epsilon^{n_k}, \alpha_\epsilon^{n_k})$ tal que $(\xi_\epsilon^{n_k}, \mathbf{w}_\epsilon^{n_k}, \alpha_\epsilon^{n_k}) \rightharpoonup (\xi_\epsilon^*, \mathbf{w}_\epsilon^*, \alpha_\epsilon^*)$. Da semicontinuidade fraca inferior de J_ϵ vem

$$\begin{aligned} J_\epsilon(\xi_\epsilon^*, \mathbf{w}_\epsilon^*, \alpha_\epsilon^*) &\leq \underline{\lim} J_\epsilon(\xi_\epsilon^{n_k}, \mathbf{w}_\epsilon^{n_k}, \alpha_\epsilon^{n_k}) \\ &= \lim J_\epsilon(\xi_\epsilon^{n_k}, \mathbf{w}_\epsilon^{n_k}, \alpha_\epsilon^{n_k}) \\ &= \inf_{(\xi_\epsilon, \mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon) \in \widetilde{H^1} \times J_0 \times K} J_\epsilon(\xi_\epsilon, \mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon). \end{aligned}$$

Como K é fechado e convexo, K é fracamente fechado e portanto $(\xi_\epsilon^*, \mathbf{w}_\epsilon^*, \alpha_\epsilon^*) \in \widetilde{H^1} \times J_0 \times K$. Logo

$$J_\epsilon(\xi_\epsilon^*, \mathbf{w}_\epsilon^*, \alpha_\epsilon^*) = \min_{(\xi_\epsilon, , \mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon) \in \widetilde{H^1} \times J_0 \times K} J_\epsilon(\xi_\epsilon, \mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon)$$

■

PROPOSIÇÃO 5.4. Sejam $f \in L^2(\Omega)$, $U < \frac{\theta}{C}$ *onde* C *é a constante que aparece na observação 5.3 e seja* v *Lipschitz contínua satisfazendo a condição (5.7). Seja* J_ϵ *definido por (5.26 e para todo* $\epsilon > 0$ *seja* $(\xi_\epsilon, \mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon)$ *um ponto de mínimo de* J_ϵ*. Então existem* $(\alpha^*, \mathbf{u}^*, c^*)$ *e subsequencias* $\alpha_{\epsilon_p}, \xi_{\epsilon_p}, c_{\epsilon_p}, \mathbf{u}_{\epsilon_p}, \mathbf{w}_{\epsilon_p}$ *tais que*

$$\begin{array}{rcll} \alpha_{\epsilon_p} & \to & \alpha^* & \\ \xi_{\epsilon_p} & \rightharpoonup & \widetilde{c}^* & \textit{em } \widetilde{H^1} \\ c_{\epsilon_p} & \rightharpoonup & \widetilde{c}^* & \textit{em } \widetilde{H^1} \\ \mathbf{u}_{\epsilon_p} & \rightharpoonup & \mathbf{u}^* & \textit{em } J_0 \\ \mathbf{w}_{\epsilon_p} & \rightharpoonup & \mathbf{u}^* & \textit{em } J_0. \end{array}$$

Prova. Se K é limitado, claramente $\{\alpha_\epsilon\}$ é limitada. Se K não é limitado, então

$$\frac{N}{2}\alpha_\epsilon \leq J(\alpha_\epsilon, c_\epsilon) \leq J_\epsilon(\xi_\epsilon, \mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon) \leq J_\epsilon(\widetilde{c}_0, \mathbf{u}_0, c_0) = J(\alpha_0, c_0)$$

onde (α_0, c_0) é solução de (5.20), $c_0 = \widetilde{c}_0 + \frac{\alpha_0}{|\Omega|}$, e $(\mathbf{u}_0, \widetilde{c}_0)$ satisfaz

$$\begin{array}{lcl} (\mathbf{u}_0, \widetilde{c}_0) \in J_0 \times \widetilde{H^1}(\Omega) & & \\ (2v(\widetilde{c}_0 + \frac{\alpha_0}{|\Omega|})D(\mathbf{u}_0), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{z}) & = & 2(b_1, \mathbf{z})_\Gamma - k(\widetilde{c}_0\mathbf{i}_3, \mathbf{z}) + (\mathbf{f}, \mathbf{z}) \\ \theta a(\widetilde{c}_0, r) + B(\mathbf{u}_0, \widetilde{c}_0, r) - U(\widetilde{c}_0, \frac{\partial r}{\partial x_3}) & = & \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1) \\ \forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega) & & \end{array}$$

ou seja, $(\mathbf{u}_0, \widetilde{c}_0)$ satisfaz (5.27) com $\mathbf{w} = \mathbf{u}_0$, $\xi = \widetilde{c}_0$ e $\alpha = \alpha_0$.

Da Proposição 5.1 podemos concluir que $\{\widetilde{c}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ e $\{\mathbf{u}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ são limitadas em $\widetilde{H^1}$ e J_0 respectivamente, onde $c_\epsilon = \widetilde{c}_\epsilon + \frac{\alpha_\epsilon}{|\Omega|}$. Existem $(u^*, \widetilde{c}^*) \in J_0 \times H^1$,$\alpha^* \in K$ e subseqüências $\alpha_{\epsilon_p}, c_{\epsilon_p}, \mathbf{u}_{\epsilon_p}$,tais que

$$\begin{array}{lll} \alpha_{\epsilon_p} & \to & \alpha^* \\ \widetilde{c}_{\epsilon_p} & \rightharpoonup & \widetilde{c}^* \quad\quad em \quad \widetilde{H}^1(\Omega) \\ \mathbf{u}_{\epsilon_p} & \rightharpoonup & u^* \quad\quad em \quad J_0. \end{array}$$

Da desigualdade

$$\left\|\mathbf{u}_{\epsilon_p} - \mathbf{w}_{\epsilon_p}\right\|^2_{J_0} \leq 2\epsilon_p J_{\epsilon_p}(\xi_{\epsilon_p}, \mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p}) \leq 2\epsilon_p J(\alpha_0, c_0)$$

vem que $\left\|\mathbf{u}_{\epsilon_p} - \mathbf{w}_{\epsilon_p}\right\|_{J_0} \to 0$ quando $\epsilon_p \to 0$. Portanto $\mathbf{w}_{\epsilon_p} - \mathbf{u}_{\epsilon_p} \rightharpoonup 0$ e de $\mathbf{w}_{\epsilon_p} = (\mathbf{w}_{\epsilon_p} - \mathbf{u}_{\epsilon_p}) + \mathbf{u}_{\epsilon_p}$ vem que $\mathbf{w}_{\epsilon_p} \rightharpoonup u^*$.

Analogamente de

$$\left\|\widetilde{c}_{\epsilon_p} - \xi_{\epsilon_p}\right\|^2_{\widetilde{H^1}} \leq 2\epsilon_p J_{\epsilon_p}(\xi_{\epsilon_p}, \mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p}) \leq 2\epsilon_p J(\alpha_0, c_0)$$

vem que $\xi_{\epsilon_p} \rightharpoonup \widetilde{c}^*$ e da imersão $\widetilde{H}^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ temos que $\xi_{\epsilon_p} \to \widetilde{c}^*$ em $L^2(\Omega)$. Como υ é Lipschitz contínua temos,

$$\begin{aligned} \left\|\upsilon(\xi_{\epsilon_p} + \frac{\alpha_{\epsilon_p}}{|\Omega|}) - \upsilon(\widetilde{c}^* + \frac{\alpha^*}{|\Omega|})\right\|_2 &\leq C_l \left\|\xi_{\epsilon_p} + \frac{\alpha_\epsilon}{|\Omega|} - \widetilde{c}^* - \frac{\alpha^*}{|\Omega|}\right\|_2 \\ &\leq C_l \left\|\xi_{\epsilon_p} - \widetilde{c}^*\right\|_2 + \left\|\frac{\alpha_\epsilon}{|\Omega|} - \frac{\alpha^*}{|\Omega|}\right\|_2 \\ &\leq C_l \left\|\xi_{\epsilon_p} - \widetilde{c}^*\right\|_2 + \frac{|\alpha_\epsilon - \alpha^*|}{|\Omega|^{1/2}}. \end{aligned}$$

Deste modo podemos concluir que $\upsilon_{\xi_{\epsilon_p}} \to \upsilon(c^*)$ em $L^2(\Omega)$, onde $c^* = \widetilde{c}^* + \frac{\alpha^*}{|\Omega|}$ e relembramos que $\upsilon_{\xi_{\epsilon_p}} = \upsilon(\xi_{\epsilon_p} + \frac{\alpha_{\epsilon_p}}{|\Omega|})$.

Passando o limite em (5.27) quando $p \to \infty$, correspondentes a $(\xi_\alpha, \mathbf{w}, \alpha) = (\xi_{\alpha_{\epsilon_p}}, \mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p})$ obtemos $(\mathbf{u}^*, \widetilde{c}^*)$ solução de (5.6) para $\alpha = \alpha^*$. Mas isto quer dizer que $(\alpha^*, c^*) \in T$. Como J é fracamente contínuo

$$\lim_{\epsilon_p \to 0} J(\alpha_{\epsilon_p}, c_{\epsilon_p}) = J(\alpha^*, c^*).$$

Das desigualdades

$$J(\alpha_{\epsilon_p}, c_{\epsilon_p}) \leq J_{\epsilon_p}(\xi_{\epsilon_p}, \mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p}) \leq J(\alpha_0, c_0)$$

vem que

$$J(\alpha^*, c^*) \leq J(\alpha_0, c_0).$$

Mas como (α_0, c_0) é uma solução de (5.20) e como $(\alpha^*, c^*) \in T$ temos que $J(\alpha_0, c_0) \leq J(\alpha^*, c^*)$ o que nos da $J(\alpha_0, c_0) = J(\alpha^*, c^*)$.

Desde que $(\xi_{\epsilon_p}, \mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p})$ é um ponto de mínimo de J_{ϵ_p} temos que

$$J_{\epsilon_p}(\xi_{\epsilon_p}, \mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p}) \leq J_{\epsilon_p}(\widetilde{c}^*, \mathbf{u}^*, \alpha^*) = J(\alpha^*, c^*).$$

Da semicontinuidade fraca de J_ϵ vem que,

$$J(\alpha^*, c^*) = J_{\epsilon_p}(\widetilde{c}^*, \mathbf{u}^*, \alpha^*) \leq \lim_{\epsilon_p \to 0} J_{\epsilon_p}(\xi_{\epsilon_p}, \mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p}).$$

Portanto $\lim\limits_{\epsilon_p \to 0} J_{\epsilon_p}(\xi_{\epsilon_p}, \mathbf{w}_{\epsilon_p}, \alpha_{\epsilon_p}) = J(\alpha^*, c^*)$.

Como $\{J_\epsilon(\xi_\epsilon, \mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon)\}_{\epsilon > 0}$ tem um único ponto limite (pois J_ϵ é estritamente convexa) concluimos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} J_\epsilon(\xi_\epsilon, \mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon) = J(\alpha^*, c^*) = \min\{J(\alpha, c) \,|(\alpha, c) \in T\}.$$

■

5.7 Aplicação do Formalismo de Dubovitskii-Milyutin

Agora vamos aplicar o formalismo de Dubovitskii-Milyutin para encontrar as condições necessárias de otimalidade para o problema (5.28). O funcional J_ϵ esta definido por

$$\begin{array}{lcl} J_\epsilon & : & \widetilde{H^1} \times J_0 \times K \longrightarrow \mathbb{R} \\ J_\epsilon(\xi, \mathbf{w}, \alpha) & = & J(\alpha, c(\mathbf{w}, \alpha)) + \frac{1}{2\epsilon} \left\| \mathbf{u}(\xi, \mathbf{w}, \alpha) - \mathbf{w} \right\|_{J_0}^2 \\ & & + \frac{1}{2\epsilon} \left\| c(\mathbf{w}, \alpha) - \xi_\alpha \right\|_2^2 \end{array}$$

onde$(\mathbf{u}, c)$ é a única solução de

$$(\mathbf{u}, c) \in J_0 \times H^1(\Omega)$$

$$\begin{array}{rcl} (2v(\xi_\alpha) D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) & = & \displaystyle\int_\Gamma b_1 \cdot \mathbf{z} d\sigma - k \int_\Omega c \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{z} dx + (\mathbf{f}, \mathbf{z}) \\ \xi_\alpha & = & \xi + \dfrac{\alpha}{|\Omega|} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \theta a(c, r) + B(\mathbf{w}, c, r) - U \displaystyle\int_\Omega c \frac{\partial r}{\partial x_3} dx & = & 0 \\ \displaystyle\int_\Omega c_\alpha & = & \alpha \end{array}$$

$$\forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in H^1(\Omega).$$

Fazendo a mudança de variáveis $\widetilde{c} = c - \frac{\alpha}{|\Omega|}$ obtemos

$$\begin{array}{lcl} J_\epsilon & : & \widetilde{H^1} \times J_0 \times K \longrightarrow \mathbb{R} \\ J_\epsilon(\xi, \mathbf{w}, \alpha) & = & J(\alpha, \widetilde{c} + \frac{\alpha}{|\Omega|}) + \frac{1}{2\epsilon} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|_{J_0}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|\widetilde{c} - \xi\|_2^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (\mathbf{u}, \widetilde{c}) \in J_0 \times \widetilde{H^1}(\Omega) & & \\ (2\upsilon(\xi_\alpha) D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) & = & 2(b_1, \mathbf{z})_\Gamma - k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3, \mathbf{z}) + (\mathbf{f}, \mathbf{z}) \\ \theta a(\widetilde{c}, r) + B(\mathbf{w}, \widetilde{c}, r) - U(\widetilde{c}, \frac{\partial r}{\partial x_3}) & = & \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1) dx \\ \forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega). & & \end{array}$$

Para aplicar o Formalismo vamos definir adequadamente os espaços funcionais onde definiremos nosso funcional objetivo, nossas restriçoes de igualdade e nossa restrição de controle. Definimos os espaços

$$Z = J_0 \times \widetilde{H^1}(\Omega)$$

$$Y = \widetilde{H^1}(\Omega) \times J_0 \times \mathbb{R}$$

$$M = \widetilde{H^1}(\Omega) \times J_0 \times K$$

Consideramos $x = (\mathbf{u}, \widetilde{c}) \in Z$ e $m = (\xi, \mathbf{w}, \alpha) \in Y$.

Definimos os operadores:

$$P_1 : Z \times Y \longrightarrow J_0^*$$

$$P_1(x, m)\mathbf{z} = (2\upsilon(\xi_\alpha) D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) - 2(b_1, \mathbf{z})_\Gamma - k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3, \mathbf{z}) - (\mathbf{f}, \mathbf{z})$$

$$P_2 : Z \times Y \longrightarrow \left(\widetilde{H^1}\right)^*$$

$$P_2(x, m)r = \theta a(\widetilde{c}, r) + B(\mathbf{w}, \widetilde{c}, r) - U(\widetilde{c}, \frac{\partial r}{\partial x_3}) - \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1) dx$$

$$P : Z \times Y \longrightarrow J_0^* \times \left(\widetilde{H^1}\right)^*$$

$$P(x, m)(\mathbf{z}, r) = (P_1(x, m)\mathbf{z}, P_2(x, m)r). \tag{5.29}$$

Consideremos agora

$$J_\epsilon : Z \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$J_\epsilon(x, m) = J(\alpha, \widetilde{c} + \frac{\alpha}{|\Omega|}) + \frac{1}{2\epsilon} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|_{J_0}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|\widetilde{c} - \xi\|_2^2$$

$$J_\epsilon(x,m) = \frac{1}{2}\left\|\widetilde{c} + \frac{\alpha}{|\Omega|} - c_d\right\|_2^2 + \frac{N}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2\epsilon}\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|_{J_0}^2 + \frac{1}{2\epsilon}\|\widetilde{c}-\xi\|_2^2$$

Escreveremos agora o problema (5.28) em uma forma abstrata de modo a podermos aplicar o formalismo de Dubovitskii-Milyutin.:

$$\left.\begin{array}{c} \min J_\epsilon(x,m) \\ s.a \\ P(x,m)=0 \\ m \in M. \end{array}\right\} \qquad \text{(P)}$$

Daqui por diante, para efeito de cálculos, vamos supor que $\epsilon > 0$ esta fixado e que (x_ϵ, m_ϵ) é um ponto de mínimo do funcional J_ϵ .

5.7.1 Análise do funcional

Algumas notações

$$\begin{aligned}
x_\epsilon &= (\mathbf{u}_\epsilon, \widetilde{c}_\epsilon),\ x = (\mathbf{u},\widetilde{c}) \\
m_\epsilon &= (\xi_\epsilon, \mathbf{w}_\epsilon, \alpha_\epsilon),\ m = (\xi, \mathbf{w},\alpha) \\
c_\epsilon &= \widetilde{c}_\epsilon + \frac{\alpha_\epsilon}{|\Omega|} \\
v_{\xi_\epsilon} &= v(\xi_\epsilon + \frac{\alpha_\epsilon}{|\Omega|}) \\
\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}} &= \xi_\epsilon + \frac{\alpha_\epsilon}{|\Omega|},\ \xi_\alpha = \xi + \frac{\alpha}{|\Omega|}.
\end{aligned}$$

O funcional J_ϵ é Frechet diferenciável e usando regra da cadeia podemos calcular explicitamente sua derivada que é dada por

$$\begin{aligned}
J'_\epsilon(x_\epsilon, m_\epsilon)(x,m) &= \frac{1}{\epsilon}(D(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon), D(\mathbf{u})) - \frac{1}{\epsilon}(D(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon), D(\mathbf{w})) \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon}a(\widetilde{c}_\epsilon - \xi_\epsilon, \widetilde{c}) - \frac{1}{\epsilon}a(\widetilde{c}_\epsilon - \xi_\epsilon, \xi) \\
&\quad + (c_\epsilon - c_d, \widetilde{c}) + (c_\epsilon - c_d, 1)\frac{\alpha}{|\Omega|} + N\alpha_\epsilon\alpha.
\end{aligned}$$

O cone de direções de decrescimento de J_ϵ no ponto (x_ϵ, m_ϵ) é dado por:

$$K_{D=}\{(x,m) \in Z \times Y \mid J'_\epsilon(x_\epsilon, m_\epsilon)(x,m) < 0\}$$

e o seu cone dual é dado por

$$K_D^* = \{-\lambda_0 J'_\epsilon(x_\epsilon, m_\epsilon) \in (Z \times Y)^* \mid 0 \leq \lambda_0 < \infty\}.$$

5.7.2 Análise das restrições de controle

O conjunto $M = \{(\xi, \mathbf{w}, \alpha) \in Y \mid \alpha \in K\}$ é convexo e fechado e $intM \neq \emptyset$ e portanto o conjunto $Q = X \times M$ também é convexo fechado e $intQ = Z \times intM \neq \emptyset$. Seja K_F o cone de direções factíveis para o conjutno Q no ponto $h_\epsilon = (x_\epsilon, m_\epsilon)$. Então se $f \in K_T^*$ segue que $f = (0, f_1)$ onde $f_1 \in Y^*$ é um funcional suporte para M no ponto m_ϵ, ou seja, $f_1 \in M^* = \{f \in Y^* \mid f(m) \geq f(m_\epsilon), \forall m \in M\}$.

5.7.3 Análise das restrições de igualdade

Os operadores P_1 e P_2 são Frechet diferenciáveis em (x_ϵ, m_ϵ) e assim P é Frechet diferenciável em (x_ϵ, m_ϵ). As derivadas de P_1 e P_2 são dadas por:

$$\begin{aligned} P_1'(x_\epsilon, m_\epsilon)(x,m)\mathbf{z} &= (2v(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \\ &\quad + B_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{z}) + (2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})\xi D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{z})) \\ &\quad + (2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{z}))\frac{\alpha}{|\Omega|} + k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3, \mathbf{z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1'(x_\epsilon, m_\epsilon)(x,m)r &= \theta a(\widetilde{c}, r) + B(\mathbf{w}_\epsilon, \widetilde{c}, r) + B(\mathbf{w}, \widetilde{c}_\epsilon, r) \\ &\quad - U(\widetilde{c}, \frac{\partial r}{\partial x_3}) - \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1). \end{aligned}$$

Vamos agora utilizar o Teorema de Lyusternik para encontrar o cone de direções tangentes associado a restrição de igualdade.

Se (x_ϵ, m_ϵ) é um ponto de mínimo do funcional J_ϵ então $P(x_\epsilon, m_\epsilon) = 0$ pela definiçao de J_ϵ . Como P é Frechet diferenciável em todos os pontos em particular P é diferenciável em uma vizinhança de (x_ϵ, m_ϵ).

LEMA 5.2. Sejam $f \in L^2(\Omega)$, $U < \frac{\theta}{C}$ onde C é a constante que aparece na observação 5.3 e seja v Lipschitz contínua satisfazendo a condição (5.7). Seja P o operador definido por (5.29) então P é de classe C^1.

Prova. Seja $h_\epsilon^n \to h_\epsilon$ em $Z \times Y$. Isso nos diz que $\|h_\epsilon^n - h_\epsilon\|_{Z\times Y} \to 0$. Agora

$$\begin{aligned} \|P'(h_\epsilon^n) - P'(h_\epsilon)\|_{\pounds(Z\times Y, Z^*)} &= \|P_1'(h_\epsilon^n) - P_1'(h_\epsilon)\|_{\pounds(Z\times Y, J_0^*)} \\ &\quad + \|P_2'(h_\epsilon^n) - P_2'(h_\epsilon)\|_{\pounds(Z\times Y, (\widetilde{H}^1)^*)}. \end{aligned}$$

Mas de

$$|B(\mathbf{w}, \widetilde{c}_\epsilon^n - \widetilde{c}_\epsilon, r)| \leq C_1 \|\mathbf{w}\|_{J_0} \|\widetilde{c}_\epsilon^n - \widetilde{c}_\epsilon\|_{\widetilde{H}^1} \|r\|_{\widetilde{H}^1},$$

$$|B(\mathbf{w}_\epsilon^n - \mathbf{w}_\epsilon, \widetilde{c}, r)| \leq C_1 \|\mathbf{w}_\epsilon^n - \mathbf{w}_\epsilon\|_{J_0} \|\widetilde{c}\|_{\widetilde{H}^1} \|r\|_{\widetilde{H}^1}$$

vem que $\|P_2'(h_\epsilon^n) - P_2'(h_\epsilon)\|_{\pounds(Z\times Y,(\widetilde{H}^1)^*)} \longrightarrow 0$.

Temos também as desigualdades

$$\begin{aligned}
|B_0(\mathbf{w}_\epsilon^n - \mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}, \mathbf{z})| &\leq \|\mathbf{w}_\epsilon^n - \mathbf{w}_\epsilon\|_{J_0} \|\mathbf{u}\|_{J_0} \|\mathbf{z}\|_{J_0} \\
|B_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\epsilon^n - \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{z})| &\leq \|\mathbf{w}\|_{J_0} \|\mathbf{u}_\epsilon^n - \mathbf{u}_\epsilon\|_{J_0} \|\mathbf{z}\|_{J_0}
\end{aligned}$$

$$\left|(2(\upsilon_{\xi_\epsilon}^n - \upsilon_{\xi_\epsilon})D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z}))\right| \leq 2\left\|\upsilon_{\xi_\epsilon}^n - \upsilon_{\xi_\epsilon}\right\|_2 \|D(\mathbf{u})\|_4 \|D(\mathbf{z})\|_4$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2C_l \left\|(\xi_\epsilon^n - \xi_\epsilon) + \frac{(\alpha_\epsilon^n - \alpha_\epsilon)}{|\Omega|}\right\|_2 \|D(\mathbf{u})\|_4 \|D(\mathbf{z})\|_4 \\
&\leq 2C_l \left\|(\xi_\epsilon^n - \xi_\epsilon) + \frac{(\alpha_\epsilon^n - \alpha_\epsilon)}{|\Omega|}\right\|_2 \|D(\mathbf{u})\|_4 \|D(\mathbf{z})\|_4 \\
&\leq 2C_l\widetilde{C}\,\|(\xi_\epsilon^n - \xi_\epsilon)\|_{\widetilde{H^1}} \|D(\mathbf{u})\|_4 \|D(\mathbf{z})\|_4 \\
&\quad + \frac{2C_l}{|\Omega|^{1/2}} |(\alpha_\epsilon^n - \alpha_\epsilon)| \|D(\mathbf{u})\|_4 \|D(\mathbf{z})\|_4 ,
\end{aligned}$$

$$\left|\Big(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon^n}}^n)\xi D(\mathbf{u}_\epsilon^n) - 2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})\xi D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{z})\Big)\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left|2\left(\left[v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon^n}}^n)\xi - v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})\xi\right] D(\mathbf{u}_\epsilon^n), D(\mathbf{z})\right)\right| \\
&\quad + \left|\big(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})\xi\,[D(\mathbf{u}_\epsilon^n) - D(\mathbf{u}_\epsilon)]\,, D(\mathbf{z})\big)\right| .
\end{aligned}$$

Do fato que $\mathbf{u}_\epsilon^n \to \mathbf{u}_\epsilon$ implica $D(\mathbf{u}_\epsilon^n) \to D(\mathbf{u}_\epsilon)$ em $L^2(\Omega)$ e v é de classe C^1 temos que a parcela acima tendo a zero quando $n \to \infty$. Analogamente

$$\left|\Big(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon^n}}^n)D(\mathbf{u}_\epsilon^n) - 2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{z})\Big)\frac{\alpha}{|\Omega|}\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left|2\left(\left[v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon^n}}^n)\xi - v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})\xi\right] D(\mathbf{u}_\epsilon^n), D(\mathbf{z})\right)\right| \frac{\alpha}{|\Omega|} \\
&\quad + \left|\big(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})\xi\,[D(\mathbf{u}_\epsilon^n) - D(\mathbf{u}_\epsilon)]\,, D(\mathbf{z})\big)\right| \frac{\alpha}{|\Omega|}
\end{aligned}$$

tende a zero quando $n \to \infty$.

Portanto

$$\|P_1'(h_\epsilon^n) - P_1'(h_\epsilon)\|_{\pounds(Z\times Y,(\widetilde{H}^1)^*)} \longrightarrow 0$$

e com isso P é de classe C^1.$\blacksquare$

LEMA 5.3. Sejam $f \in L^2(\Omega)$, $U < \frac{\theta}{C}$ onde C é a constante que aparece na observação 5.3 e seja υ Lipschitz contínua satisfazendo a condição (5.7). Seja P o operador definido por (5.29) então o operador $P'(h_\epsilon)$ é sobrejetivo.

Prova: Seja $(l,g) \in Z^*$ e fixemos $m_1 = (\xi_1, w_1, \alpha_1)$. Considere as equações,

$$\begin{aligned}(l,z) &= (2\upsilon_{\xi_\epsilon} D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \\ &\quad + B_0(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{z}) + (2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})\xi_1 D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{z})) \\ &\quad + (2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}}) D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{z}))\frac{\alpha_1}{|\Omega|} + k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3, \mathbf{z}), \qquad \forall z \in J_0\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}(g,r) &= \theta a(\widetilde{c}, r) + B(\mathbf{w}_\epsilon, \widetilde{c}, r) + B(\mathbf{w}_1, \widetilde{c}_\epsilon, r) \\ &\quad - U(\widetilde{c}, \frac{\partial r}{\partial x_3}) - \frac{U\alpha_1}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1), \qquad \forall r \in \widetilde{H^1}.\end{aligned} \tag{5.31}$$

Pelo Lema de Lax-Milgram existe um único $\widetilde{c}_1 = \widetilde{c}_1(w_1, \alpha_1, g)$ solução de (5.31). Substituindo este $\widetilde{c}_1$ em (5.30) novamente pelo Lema de Lax-Milgram encontramos $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(\xi_1, w_1, \alpha_1, l, g)$ solução de (5.30). Portanto dado $l_g = (l,g) \in Z^*$ podemos encontrar $h_1 = ((\mathbf{u}_1, \widetilde{c}_1), (\xi_1, w_1, \alpha_1))$ tal que $P'(h_\epsilon)h_1 = l_g$ e assim $P'(h_\epsilon)$ é sobrejetiva.■

Pelo Teorema de Lyusternik o conjunto de direções tangentes K_T para o conjunto $Q_2 = \{h \in Z \times Y \mid P(h) = 0\}$ no ponto h_ϵ é dado por $K_T = \{h \in Z \times Y \mid P'(h_\epsilon)h = 0\}$ e seu cone dual é dado por $K_T^* = (K_T)^0 = \{f \in (Z \times Y)^* \mid f(h) = 0, \forall h \in K_T\}$.

5.7.4 Equações de Euler Lagrange

Pelo Teorema de Dubovitskii-Milyutin existem funcionais lineares, não todos nulos, $f_0 \in K_D^*$, $\widetilde{f}_1 \in K_F^*$, $f_2 \in K_T^*$ tais que $f_0 + \widetilde{f}_1 + f_2 = 0$, ou seja,

$$f_0(h) + \widetilde{f}_1(h) + f_2(h) = 0.$$

Como $\widetilde{f}_1(h) = f_1(m)$ onde $f_1 \in M^*$ obtemos,

$$f_0(x,m) + f_1(m) + f_2(x,m) = 0.$$

Para cada $m = (\xi, w, \alpha) \in M$ seja $x = (u, \widetilde{c})$ escolhido de forma que

$$P'(h_\epsilon)(x,m) = 0.$$

Dessa forma $f_2(x,m) = 0$ e a equação de Euler-Lagrange fica

$$f_0(x,m) + f_1(m) = 0,$$

$$-\lambda_0 J'_\epsilon(x_\epsilon, m_\epsilon)(x,m) + f_1(m) = 0.$$

Como o problema é normal (Se $\lambda_0 = 0$ então $f_1 = 0$, o que é um absurdo) podemos tomar $\lambda_0 = 1$ e assim

$$f_1(m) = \lambda_0 J'_\epsilon(x_\epsilon, m_\epsilon)(x,m),$$

$$\begin{aligned} f_1(m) &= \frac{1}{\epsilon}(D(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon), D(\mathbf{u})) - \frac{1}{\epsilon}(D(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon), D(\mathbf{w})) \\ &+ \frac{1}{\epsilon}(\widetilde{c}_\epsilon - \xi_\epsilon, \widetilde{c}) - \frac{1}{\epsilon}(\widetilde{c}_\epsilon - \xi_\epsilon, \xi) \\ &+ (c_\epsilon - c_d, \widetilde{c}) + (c_\epsilon - c_d, 1)\frac{\alpha}{|\Omega|} + N\alpha_\epsilon \alpha \end{aligned}$$

onde $c_\epsilon = \widetilde{c}_\epsilon + \frac{\alpha_\epsilon}{|\Omega|}$.

5.7.5 Equações Adjuntas

Seja $\mathbf{p}_\epsilon \in J_0$, $q_\epsilon \in \widetilde{H^1}$ únicas soluções (pelo Lema de Lax-Milgram) do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} (2v_{\xi_\epsilon} D(\mathbf{z}), D(\mathbf{p}_\epsilon)) + B_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{z}, \mathbf{p}_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}(D(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon), D(\mathbf{z})) \\ a(r, q_\epsilon) + B(\mathbf{w}_\epsilon, r, q_\epsilon) + k(r\mathbf{i}_3, \mathbf{p}_\epsilon) - U(r, \frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}) = \frac{1}{\epsilon}(\widetilde{c}_\epsilon - \xi_\epsilon, r) + (c_\epsilon - c_d, r) \\ \forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega). \end{array} \right. \tag{5.32}$$

Relembrando a escolha de $h = (x,m)$ $(P'(h_\epsilon)(x,m) = 0)$ temos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u}, \widetilde{c}) \in J_0 \times \widetilde{H^1}(\Omega) \\ \\ (2v_{\xi_\epsilon} D(\mathbf{u}), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}, \mathbf{z}) = -(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})\xi D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{z})) \\ -(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}}) D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{z}))\frac{\alpha}{|\Omega|} - k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3, \mathbf{z}) - B_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{z}) \\ \\ \theta a(\widetilde{c}, r) + B(\mathbf{w}_\epsilon, \widetilde{c}, r) + B(\mathbf{w}, \widetilde{c}_\epsilon, r) - U(\widetilde{c}, \frac{\partial r}{\partial x_3}) = \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1) \\ \\ \forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega). \end{array} \right. \tag{5.33}$$

Fazendo $r = \widetilde{c}$ na equação (5.32b) vem,

$$\theta a(\widetilde{c}, q_\epsilon) + B(\mathbf{w}_\epsilon, \widetilde{c}, q_\epsilon) - U(\widetilde{c}, \frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}) = \frac{1}{\epsilon}(\widetilde{c}_\epsilon - \xi_\epsilon, \widetilde{c}) + (c_\epsilon - c_d, \widetilde{c}).$$

Fazendo $r = q_\epsilon$ na equação (5.33b) vem,

$$\theta a(\widetilde{c}, q_\epsilon) + B(\mathbf{w}_\epsilon, \widetilde{c}, q_\epsilon) - U(\widetilde{c}, \frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}) = \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}, 1) - B(\mathbf{w}, \widetilde{c}_\epsilon, q_\epsilon).$$

Logo

$$\frac{1}{\epsilon} a(\widetilde{c}_\epsilon - \xi_\epsilon, \widetilde{c}) + (c_\epsilon - c_d, \widetilde{c}) = \frac{U\alpha}{|\Omega|}(\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}, 1) - B(\mathbf{w}, \widetilde{c}_\epsilon, q_\epsilon) + k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3, \mathbf{p}_\epsilon).$$

Fazendo $\mathbf{z} = \mathbf{u}$ na equação (5.32a) temos

$$(2v_{\xi_\epsilon} D(\mathbf{u}), D(\mathbf{p}_\epsilon)) + B_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}, \mathbf{p}_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}(D(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon), D(\mathbf{u})).$$

Fazendo $\mathbf{z} = \mathbf{p}_\epsilon$ na equação (5.33a) temos

$$\begin{aligned}(2v_{\xi_\epsilon} D(\mathbf{u}), D(\mathbf{p}_\epsilon)) + B_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}, \mathbf{p}_\epsilon) \quad = \quad & -(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})\xi D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)) \\ & -(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon))\frac{\alpha}{|\Omega|} \\ & -B_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) - k(\widetilde{c}\mathbf{i}_{3,}\mathbf{p}_\epsilon).\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon}(D(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon), D(\mathbf{u})) \quad = \quad & -B_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) - (2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})\xi D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)) \\ & -(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon))\frac{\alpha}{|\Omega|} - k(\widetilde{c}\mathbf{i}_{3,}\mathbf{p}_\epsilon).\end{aligned}$$

5.7.6 Condições necessárias de optimalidade

Podemos agora escrever o funcional f_1 como:

$$\begin{aligned}f_1(m) \quad = \quad & -B_0(\mathbf{w}, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) - \left(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})\xi D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)\right) \\ & -\left(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)\right)\frac{\alpha}{|\Omega|} - k(\widetilde{c}\mathbf{i}_{3,}\mathbf{p}_\epsilon) \\ & -\frac{1}{\epsilon}\left(D(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{w}_\epsilon), D(\mathbf{w})\right) - \frac{1}{\epsilon} a(\widetilde{c}_\epsilon - \xi_\epsilon, \xi) \\ & +U(\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}, 1)\frac{\alpha}{|\Omega|} - B(\mathbf{w}, \widetilde{c}_\epsilon, q_\epsilon) \\ & +(c_\epsilon - c_d, 1)\frac{\alpha}{|\Omega|} + N\alpha_\epsilon\alpha + k(\widetilde{c}\mathbf{i}_3, \mathbf{p}_\epsilon).\end{aligned}$$

Mas $f_1 \in M^*$ e isto quer dizer que $f_1(m) \geq f_1(m_\epsilon)$ para todo $m \in M$ e podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&-B_0(\mathbf{w}-\mathbf{w}_\epsilon,\mathbf{u}_\epsilon,\mathbf{p}_\epsilon)-\frac{1}{\epsilon}\left(D(\mathbf{u}_\epsilon-\mathbf{w}_\epsilon),D(\mathbf{w}-\mathbf{w}_\epsilon)\right)-\frac{1}{\epsilon}a(\widetilde{c}_\epsilon-\xi_\epsilon,\xi-\xi_\epsilon)\\
&-B(\mathbf{w}-\mathbf{w}_\epsilon,\widetilde{c}_\epsilon,q_\epsilon)-\big(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})(\xi-\xi_\epsilon)D(\mathbf{u}_\epsilon),D(\mathbf{p}_\epsilon)\big)\\
&+U(\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3},1)\frac{(\alpha-\alpha_\epsilon)}{|\Omega|}-\big(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})D(\mathbf{u}_\epsilon),D(\mathbf{p}_\epsilon)\big)\frac{(\alpha-\alpha_\epsilon)}{|\Omega|}\\
&+(c_\epsilon-c_d,1)\frac{(\alpha-\alpha_\epsilon)}{|\Omega|}+N\alpha_\epsilon(\alpha-\alpha_\epsilon)\geq 0.
\end{aligned}
$$

Como $m=(\xi,\mathbf{w},\alpha)\in\widetilde{H^1}(\Omega)\times J_0\times K$, para $\forall\alpha\in K$, podemos tomar $m=(\xi_\epsilon,\mathbf{w}_\epsilon,\alpha)$ para $\forall\alpha\in K$. Finalmente temos as condições necessárias de optimalidade: Para todo $\alpha\in K$ temos

$$\left[U(\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3},1)-\big(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})D(\mathbf{u}_\epsilon),D(\mathbf{p}_\epsilon)\big)+(c_\epsilon-c_d,1)+N\alpha_\epsilon\,|\Omega|\right](\alpha-\alpha_\epsilon)\geq 0.$$

Observe que se v é constante obtemos as mesmas condições de optimalidade do modelo bioconvectivo clássico.

Como para todo $\xi\in\widetilde{H^1}(\Omega)$ podemos tomar $m=(\xi+\xi_\epsilon,\mathbf{w}_\epsilon,\alpha_\epsilon)$ e também $m=(-\xi+\xi_\epsilon,\mathbf{w}_\epsilon,\alpha_\epsilon)$ obtemos a igualdade

$$\frac{1}{\epsilon}a(\widetilde{c}_\epsilon-\xi_\epsilon,\xi)=-\big(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})\xi D(\mathbf{u}_\epsilon),D(\mathbf{p}_\epsilon)\big),\forall\xi\in\widetilde{H^1}(\Omega).$$

Analogamente para todo $\mathbf{w}\in J_0$ podemos tomar $m=(\xi_\epsilon,\mathbf{w}+\mathbf{w}_\epsilon,\alpha_\epsilon)$ e $m=(\xi_\epsilon,-\mathbf{w}+\mathbf{w}_\epsilon,\alpha_\epsilon)$ e obtemos também a igualdade

$$\frac{1}{\epsilon}\left(D(\mathbf{u}_\epsilon-\mathbf{w}_\epsilon),D(\mathbf{w})\right)=-B_0(\mathbf{w},\mathbf{u}_\epsilon,\mathbf{p}_\epsilon)-B(\mathbf{w},\widetilde{c}_\epsilon,q_\epsilon),\ \forall\mathbf{z}\in J_0$$

e podemos escrever nossas equações adjuntas na forma,

$$\big(2v_{\xi_\epsilon}D(\mathbf{z}),D(\mathbf{p}_\epsilon)\big)+B_0(\mathbf{w}_\epsilon,\mathbf{z},\mathbf{p}_\epsilon)=-B_0(\mathbf{z},\mathbf{u}_\epsilon,\mathbf{p}_\epsilon)-B(\mathbf{z},\widetilde{c}_\epsilon,q_\epsilon)$$

$$\theta a(r,q_\epsilon)+B(\mathbf{w}_\epsilon,r,q_\epsilon)+k(r\mathbf{i}_3,\mathbf{p}_\epsilon)-U(r,\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3})=-\big(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}})rD(\mathbf{u}_\epsilon),D(\mathbf{p}_\epsilon)\big)+(c_\epsilon-c_d,r)$$

$$\forall\mathbf{z}\in J_0,\quad\forall r\in H^1(\Omega).$$

O desenvolvimento acima nos permite enunciar o seguinte Teorema:

TEOREMA 5.2. Sejam $f\in L^2(\Omega)$, $U<\frac{\theta}{C}$ onde C é a constante que aparece na observação 5.3 e seja v Lipschitz contínua satisfazendo a condição (5.7). Seja J_ϵ definido por (5.26), P definido por (5.29) e $M=\widetilde{H^1}(\Omega)\times J_0\times K$. Seja $(\xi_\epsilon,\mathbf{w}_\epsilon,\alpha_\epsilon)$ um controle ótimo para o problema (P) e sejam

$$
\begin{aligned}
c_\epsilon &= \widetilde{c}_\epsilon + \frac{\alpha_\epsilon}{|\Omega|},\\
\upsilon_{\xi_\epsilon} &= \upsilon(\xi_\epsilon + \frac{\alpha_\epsilon}{|\Omega|}),\\
\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}} &= \xi_\epsilon + \frac{\alpha_\epsilon}{|\Omega|}.
\end{aligned}
$$

Então existem únicos elementos $(u_\epsilon, \widetilde{c}_\epsilon) \in J_0 \times \widetilde{H^1}$ *e* $(\mathbf{p}_\epsilon, q_\epsilon) \in J_0 \times \widetilde{H^1}$ *tais que para* $\forall \alpha \in K$

$$
\begin{cases}
(2\upsilon_{\xi_\epsilon} D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{z}) = 2(b_1, \mathbf{z})_\Gamma - k(\widetilde{c}_\epsilon \mathbf{i}_3, \mathbf{z}) + (\mathbf{f}, \mathbf{z})\\
\theta a(\widetilde{c}_\epsilon, r) + B(\mathbf{w}_\epsilon, \widetilde{c}_\epsilon, r) - U(\widetilde{c}_\epsilon, \frac{\partial r}{\partial x_3}) = \frac{U\alpha_\epsilon}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1)\\
\forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega)
\end{cases}
\tag{5.34}
$$

$$
\begin{cases}
\big(2\upsilon_{\zeta_\epsilon} D(\mathbf{z}), D(\mathbf{p}_\epsilon)\big) + B_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{z}, \mathbf{p}_\epsilon) = -B_0(\mathbf{z}, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) - B(\mathbf{z}, \widetilde{c}_\epsilon, q_\epsilon)\\
\theta a(r, q_\epsilon) + B(\mathbf{w}_\epsilon, r, q_\epsilon) = k(r\mathbf{i}_3, \mathbf{p}_\epsilon) + U(r, \frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3})\\
\qquad\qquad - \big(2\upsilon'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}}) r D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)\big) + (c_\epsilon - c_d, r)\\
\forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega)
\end{cases}
\tag{5.35}
$$

$$
\left[U(\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}, 1) - \big(2\upsilon'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}}) D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)\big) + (c_\epsilon - c_d, 1) + N\alpha_\epsilon |\Omega|\right](\alpha - \alpha_\epsilon) \geq 0.
\tag{5.36}
$$

COROLÁRIO 5.1 : Sejam $f \in L^2(\Omega)$, $U < \frac{\theta}{C}$ *onde* C *é a constante que aparece na observação 5.3 e seja* υ *Lipschitz contínua satisfazendo a condição (5.7). Seja* J *definido por (5.18) e o conjunto* T *definido por (5.19). Sob estas condições existe um controle ótimo* (α^*, c^*) *para (5.20) e existem elementos* $\mathbf{u}^* \in J_0$, $(\mathbf{p}^*, q^*) \in J_0 \times \widetilde{H^1}(\Omega)$ *e* $\lambda \in \{0, 1\}$ *tais que*

$$
\begin{cases}
(2\upsilon(c^*) D(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{z}) = 2(b_1, \mathbf{z})_\Gamma - k(\widetilde{c}^* \mathbf{i}_3, \mathbf{z}) + (\mathbf{f}, \mathbf{z})\\
\theta a(\widetilde{c}^*, r) + B(\mathbf{w}_\epsilon, \widetilde{c}^*, r) - U(\widetilde{c}^*, \frac{\partial r}{\partial x_3}) = \frac{U\alpha^*}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1)\\
\forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega)
\end{cases}
\tag{5.37}
$$

$$
\begin{cases}
(2\upsilon(c^*) D(\mathbf{p}^*), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{z}) = B_0(\mathbf{z}, \mathbf{p}^*, \mathbf{u}^*) + B(\mathbf{z}, q^*, \widetilde{c}^*)\\
\theta a(r, q^*) - B(\mathbf{u}^*, q^*, r) = k(r\mathbf{i}_3, \mathbf{p}^*) + U(r, \frac{\partial q^*}{\partial x_3})\\
\qquad\qquad - (2\upsilon'(c^*) r D(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{p}^*)) + \lambda(c_\epsilon - c_d, r)\\
\forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega)
\end{cases}
\tag{5.38}
$$

$$
\left\{\left[U(\frac{\partial q^*}{\partial x_3}, 1) - (2\upsilon'(c^*) D(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{p}^*)) + \lambda[(c_\epsilon - c_d, 1) + N\alpha_\epsilon |\Omega|]\right](\alpha - \alpha^*) \geq 0\right.
\tag{5.39}
$$

$$\lambda + \|q^*\|_{\widetilde{H^1}} > 0. \tag{5.40}$$

Prova: Passando o limite em (5.34) sobre subsequências obtidas na Proposição 5.4, obtemos

$$\begin{cases} (2\upsilon(c^*)D(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{z}) = 2(b_1, \mathbf{z})_\Gamma - k(\widetilde{c}^*\mathbf{i}_3, \mathbf{z}) + (\mathbf{f}, \mathbf{z}) \\ \theta a(\widetilde{c}^*, r) + B(\mathbf{w}_\epsilon, \widetilde{c}^*, r) - U(\widetilde{c}^*, \frac{\partial r}{\partial x_3}) = \frac{U\alpha^*}{|\Omega|}(\frac{\partial r}{\partial x_3}, 1) \\ \forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega) \end{cases}$$

Suponhamos que $\{p_\epsilon\}$ é limitada em J_0. Fazendo $r = q_\epsilon$ em (5.35b) temos

$$\begin{aligned} \theta \|q_\epsilon\|^2_{\widetilde{H^1}} &= k(q_\epsilon \mathbf{i}_3, \mathbf{p}_\epsilon) + U(q_\epsilon, \frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_3}) \\ &\quad - \big(2\upsilon'(\xi_{\epsilon_{\alpha\epsilon}}) r D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)\big) + (c_\epsilon - c_d, q_\epsilon) \\ &\leq kC^2 \|q_\epsilon\|_{\widetilde{H^1}} \|\mathbf{p}_\epsilon\|_{J_0} + UC \|q_\epsilon\|^2_{\widetilde{H^1}} \\ &\quad + 2\upsilon_1' C_1 \|q_\epsilon\|_{\widetilde{H^1}} \|\mathbf{u}_\epsilon\|_{J_0} \|\mathbf{p}_\epsilon\|_{J_0} \\ &\quad + C^2 \|c_\epsilon - c_d\|_{\widetilde{H^1}} \|q_\epsilon\|_{\widetilde{H^1}} \\ (\theta - UC) \|q_\epsilon\|^2_{\widetilde{H^1}} &\leq kC^2 \|\mathbf{p}_\epsilon\|_{J_0} + 2\upsilon_1' C_1 \|\mathbf{u}_\epsilon\|_{J_0} \|\mathbf{p}_\epsilon\|_{J_0} \\ &\quad + C^2 \|c_\epsilon - c_d\|_{\widetilde{H^1}} . \end{aligned}$$

Logp $\{q_\epsilon\}$ é limitada em $\widetilde{H^1}$. Das limitações acima obtemos subsequências

$$\begin{aligned} q_\epsilon &\rightharpoonup q^* \text{ } em \text{ } \widetilde{H^1} \\ \mathbf{p}_\epsilon &\rightharpoonup p^* em \text{ } J_0. \end{aligned}$$

Passando o limite sobre subsequências obtemos de (5.35a)

$$(2\upsilon(c^*)D(\mathbf{p}^*), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{z}) = B_0(\mathbf{z}, \mathbf{p}^*, \mathbf{u}^*) + B(\mathbf{z}, q^*, \widetilde{c}^*).$$

Para passar o limite em (5.35b) e em (5.36) necessitamos verificar a convergência do termo:

$$\big(2\upsilon'(\xi_{\epsilon_{\alpha\epsilon}}) r D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)\big) .$$

AFIRMAÇÃO 5.1: Vale a seguinte convergência

$$\big(2\upsilon'(\xi_{\epsilon_{\alpha\epsilon}}) r D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)\big) \to (2\upsilon'(c^*) r D(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{p}^*)) .$$

Prova:

$$\begin{aligned}
& \left|\left(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha\epsilon}})rD(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)\right) - (2v'(c^*)rD(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{p}^*))\right| \\
= & \left|\left(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha\epsilon}})rD(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)\right) - (2v'(c^*)rD(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{p}^*))\right. \\
& \left. - (2v'(c^*)rD(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)) + (2v'(c^*)rD(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon))\right| \\
\leq & \left|\left(2\left[v'(\xi_{\epsilon_{\alpha\epsilon}}) - v'(c^*)\right] rD(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)\right)\right| + \\
& |(2v'(c^*)rD(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)) - (2v'(c^*)rD(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{p}^*)) \\
& - (2v'(c^*)rD(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{p}_\epsilon)) + (2v'(c^*)rD(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{p}_\epsilon))| \\
\leq & \left|\left(2\left[v'(\xi_{\epsilon_{\alpha\epsilon}}) - v'(c^*)\right] rD(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)\right)\right| \\
& + |(2v'(c^*)rD(\mathbf{u}_\epsilon) - D(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{p}_\epsilon))| \\
& + |(2v'(c^*)rD(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{p}_\epsilon) - D(\mathbf{p}^*))| .
\end{aligned}$$

Como $\{\mathbf{u}_\epsilon\}$ e $\{\mathbf{p}_\epsilon\}$ são limitadas em J_0 e podemos supor que v' Lipschitz contínua, da convergência $\xi_\epsilon \to \widetilde{c}^*$ vem que

$$\left(2\left[v'(\xi_{\epsilon_{\alpha\epsilon}}) - v'(c^*)\right] rD(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{p}_\epsilon)\right) \to 0.$$

Seja $r \in \widetilde{H^1}$ e considere $r_k \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ com $r_k \to r$ em $\widetilde{H^1}$. Para cada r_k podemos obter a estimativa

$$\begin{aligned}
|(2v'(c^*)rD(\mathbf{u}_\epsilon) - D(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{p}_\epsilon))| & \leq \|v'(c^*)\|_\infty \|r_k\|_\infty \|D(\mathbf{u}_\epsilon) - D(\mathbf{u}^*)\|_2 \|D(\mathbf{p}_\epsilon)\|_2 \\
& \leq C\|D(\mathbf{u}_\epsilon) - D(\mathbf{u}^*)\|_2 \\
& \leq C\|D(\mathbf{u}_\epsilon) - D(\mathbf{u}^*)\|_2 \\
& \leq C_2\|\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{u}^*\|_{H^1} .
\end{aligned}$$

pois $\{\mathbf{p}_\epsilon\}$ é limitada em J_0, $\|r_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3$ (C_3 constante) e v' Lipschitz contínua. Da regularidade H^2 de $\mathbf{u}_\epsilon$ (ver [26]) temos que $\|\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{u}^*\|_{H^1} \to 0$. Dado que a convergência pode ser feita para qualquer elemento no subconjunto denso, também é verdadeira para seu limite e assim temos,

$$(2v'(c^*)rD(\mathbf{u}_\epsilon) - D(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{p}_\epsilon)) \to 0.$$

Como $2v'(c^*)rD(\mathbf{u}^*) \in H^{-1}$, da convergência fraca $\mathbf{p}_\epsilon \rightharpoonup p^*$ em J_0 vem que

$$|(2v'(c^*)rD(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{p}_\epsilon) - D(\mathbf{p}^*))| \to 0.$$

Passando o limite sobre subsequências temos

$$\begin{cases}
(2v(c^*)D(\mathbf{p}^*), D(\mathbf{z})) + B_0(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{z}) = B_0(\mathbf{z}, \mathbf{p}^*, \mathbf{u}^*) + B(\mathbf{z}, q^*, \widetilde{c}^*) \\
\theta a(r, q^*) - B(\mathbf{u}^*, q^*, r) = k(r\mathbf{i}_3, \mathbf{p}^*) + U(r, \frac{\partial q^*}{\partial x_3}) \\
\qquad\qquad - (2v'(c^*)rD(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{p}^*)) + (c_\epsilon - c_d, r) \\
\forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega)
\end{cases}$$

e assim obtemos (5.38) e (5.39) para $\lambda = 1$,e neste caso (5.40) é verdade.

Se $\{\mathbf{p}_\epsilon\}$ não é limitada em J_0,tomamos as sequências:

$$\mathbf{P}_\epsilon = \left\{ \frac{\mathbf{p}_\epsilon}{\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{J_0}} \right\},$$

$$Q_\epsilon = \left\{ \frac{\mathbf{q}_\epsilon}{\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{J_0}} \right\}.$$

Dividindo as equações (5.35) e (5.36) $\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{J_0}$ obtemos as equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \big(2v_{\zeta_\epsilon} D(\mathbf{z}), D(\mathbf{P}_\epsilon)\big) + B_0(\mathbf{w}_\epsilon, \mathbf{z}, \mathbf{P}_\epsilon) = -B_0(\mathbf{z}, \mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{P}_\epsilon) - B(\mathbf{z}, \widetilde{c}_\epsilon, Q_\epsilon) \\ \theta a(r, Q_\epsilon) + B(\mathbf{w}_\epsilon, r, Q_\epsilon) = k(r\mathbf{i}_3, \mathbf{P}_\epsilon) + U(r, \frac{\partial Q_\epsilon}{\partial x_3}) \\ \qquad\qquad - \big(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}}) r D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{P}_\epsilon)\big) + \frac{1}{\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{J_0}}(c_\epsilon - c_d, r) \\ \forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega) \end{array} \right. \tag{5.41}$$

$$\left[U(\frac{\partial Q_\epsilon}{\partial x_3}, 1) - \big(2v'(\xi_{\epsilon_{\alpha_\epsilon}}) D(\mathbf{u}_\epsilon), D(\mathbf{P}_\epsilon)\big) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{J_0}}(c_\epsilon - c_d, 1) + \frac{1}{\|\mathbf{p}_\epsilon\|_{J_0}} N\alpha_\epsilon |\Omega| \right] (\alpha - \alpha_\epsilon) \geq 0. \tag{5.42}$$

Como $\{P_\epsilon\}$ é limitada em J_0 analogamente ao caso anterior concluimos que $\mathbf{P}_\epsilon \rightharpoonup \mathbf{P}^*$ em J_0 e $Q_\epsilon \rightharpoonup Q^*$ em $\widetilde{H^1}$

Passando o limite sobre subsequências obtemos as equações

$$\left\{ \begin{array}{l} (2v(c^*) D(\mathbf{z}), D(\mathbf{P}^*)) + B_0(\mathbf{u}^*, \mathbf{z}, \mathbf{P}^*) = -B_0(\mathbf{z}, \mathbf{u}^*, \mathbf{P}^*) - B(\mathbf{z}, \widetilde{c}^*, Q^*) \\ \theta a(r, Q^*) + B(\mathbf{u}^*, r, Q^*) = k(r\mathbf{i}_3, \mathbf{P}^*) + U(r, \frac{\partial Q^*}{\partial x_3}) \\ \qquad\qquad - (2v'(c^*) r D(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{P}^*)) \\ \forall \mathbf{z} \in J_0, \quad \forall r \in \widetilde{H^1}(\Omega) \end{array} \right. \tag{5.43}$$

$$\left[U(\frac{\partial Q^*}{\partial x_3}, 1) - (2v'(c^*) D(\mathbf{u}^*), D(\mathbf{P}^*)) \right] (\alpha - \alpha^*) \geq 0 \tag{5.44}$$

que nada mais é que (5.38) e (5.39) para $\lambda = 0$.

Se $\|q^*\|_{\widetilde{H^1}} = 0$ então de (5.38) vem que $\mathbf{p}^* = 0$ (pela unicidade de solução de (5.38a) devido ao Lema de Lax-Milgram) o que é um absurdo (já que $\|\mathbf{p}^*\|_{J_0} = 1$), e assim vale (5.40) para o caso $\lambda = 0$.■

5.8 Conclusão

Podemos concluir com este capítulo que o formalismo de Dubovitskii e Milyutin é uma ferramenta poderosa para se resolver problemas de controle distribuido envolvendo equações não lineares. A pricipal dificuldade que tivemos foi a presença da não linearidade envolvendo a viscosidade o que dificultou um pouco a obtenção de estimativas a priori e dos cones de direções tangentes. O enfoque via formalismo nos permitiu calcular as derivadas de Frechet de um modo operacional mais simples do que aquele feito por A. Căpătină, R. Stavre no caso de fluxo bioconvectivo clássico, além disso o formalismo nos permitiu obter as equações adjuntas de uma maneira natural com o simples objetivo de explicitar a equação de Euler-Lagrange mostrando que o formalismo também é bastante prático.

Cremos que nossa contribuição foi bastante significativa e que demos um passo importante dentro da teoria de controle distribuido mostrando que podem ser resolvidos problemas de uma certa complexidade pelo uso de uma ferramenta bastante eficaz e pouco conhecida. Fazendo isso estamos divulgando o formalismo de Dubovitskii e Milyutin e ampliando os horizontes do conhecimento, mostrando que o nosso trabalho é relevante e tem um caráter avançado.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Observamos durante o nosso trabalho que o Formalismo de Dubovitskii e Milyutin é uma ferramenta bastante prática para a resolução de problemas de controle distribuido e observamos o pouco uso que se faz desta ferramenta. O enfoque abstrato do Formalismo pode ser aplicado a quase todos o tipos de problemas de controle sendo que o enfoque utilizado será praticamente o mesmo quando se trabalha com o problema abstrato associado ao problema em questão e o que diferirá de um problema para o outro será o conhecimento específico de cada área para os cálculos necessários a aplicação do Formalismo.

Conseguimos o nosso objetivo que foi aplicar o formalismo a três problemas de controle distribuido, sendo um problema de evolução e dois outros problemas estacionários e além disso, fizemos também uma simulação numérica mostrando a união da parte teórica com a parte aplicada em um nível avançado.

Muito trabalho há que ser feito e os horizontes estão abertos a todos aqueles que manisfem interesse nesta bonita teoria iniciada por Dubovitskii e Milyutuin

6.1 Futuras pesquisas

Como futuros trabalhos a serem estudados indicamos:

a) Estudar o problema de controle associado a fluxo bioconvectivo clássico no caso de evolução.

b) Estudar o problema de controle associado a fluxo bioconvectivo generalizado no caso de evolução.

c) Estudar a aplicação do Formalismo ao processo de esterilazação de liquidos enlatados.

d) Obtenção das condições necessárias via Formalismo para o problemas anormais.

e) Obtenção de condições de segunda ordem via Formalismo.

f) Aplicação do Formalismo à problemas de controle impulsivo.

BIBLIOGRAFIA

[1] I. V. Girsanov, Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problerms, Springer-Verlag, 1972

[2] U. Ledzewicz-Kowalewska, On some specification of the Dubotskii-Milyutin method. Nonlinear Analysis, 10 (12) (1986), 1367-1371.

[3] U. Ledzewicz, H. Schättler, A second-order Dubotskii-Milyutin theory and applications to control methods, Stability Control Theory Methods Appl., 5 (1997), 179-192

[4] U. Ledzewicz, H. Schättler, High-order approximations and generalized necessary conditions for optimality, SIAM J. Control Optim., 37 (1) (1998), 33-53.

[5] U. Ledzewicz, An extension of the local maximum principle to abnormal optimal control problems, J. Optim. Theory Appl., 77 (1993), 661-681.

[6] U. Ledzewicz, H. Schättler, Second-order conditions for xtremum problems with non regular equality constraints, J. Optim. Theory Appl., 86 (1995), 113-144.

[7] E.R. Avakov, Necessary conditions for smooth problems with equality-type constraints, USSR Comput. Math. and Math. Phys., 25 (1985), 24-32.

[8] E.R. Avakov, Necessary conditions for a minimum for nonregular problems in Banach spaces. The maximum principle for abnormal optimal control, Proc. Steklov Inst. Math. 2 (1990) 1-32

[9] E.R. Avakov, Necessary extremum conditions for smooth abnormal problems with equality and inequality constrains, J. Math. Notes, 45 (1989), 431-437.

[10] A. L. da Silva, Caracterização de pontos ótimos para problemas de otimização, regulares e não regulares, Tese de Mestrado em Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, 1996.

[11] E. A. Resende, Condições necessárias de otimalidade para problemas extremais e suas aplicações. Abordagem via Formalismo analitico-funcional de Dubotskii-Milyutin, Tese de Mestrado em Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, 1997

[12] J. Ortega, M.A. Rojas-Medar, On the controllability of stationary magneto-micropolar fluids, ICONE.

[13] A.J.V. Brandão, M.A. Rojas-Medar, J. Ortega, The optimal control some partial differential equations by using the Dubovtskii-Milyutin approach, em preparação.

[14] R. de Aguiar, M.A. Rojas-Medar, J. Ortega, M.D. Rojas-Medar, A control problem in generalized bioconvective flow, em preparação.

[15] R. de Aguiar, A.C. Moretti, M.A. Rojas-Medar, An application of the Dubovistskii and Milyutin formalism to the optimal control in the sterilization process of canned foods,1^o Aplicon . AssociaçãoBrasileira de Ciencias Mecânicas (ABCM) e Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), (2001), 156-159.

[16] R. de Aguiar, A.C. Moretti, M.A. Rojas-Medar, Aplicação do formalismo de Dubovistskii e Milyutin ao controle ótimo do processo de esterilização de comida enlatada, 53^o SBA (2001) 379-394

[17] R. de Aguiar, M.A. Rojas-Medar, M. Durán, J. Mura, Modelling the sterilization of caned food. Application of Dubovistskii and Milyutin formalism

and numerical simulation, VI Congrès Franco-Chilien de Mathématics Appliquées, 2001.

[18] A..J.V. Brandão, M.A. Rojas-Medar, Optimal control for the stationary Navier-Stokes equations: Dubovitskii-Myulitin' approach,1^o Aplicon , Associação Brasileira de Ciências Mecânicas (ABCM) e Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), (2001), 217-220.

[19] D. B. Lund, Effects of heat processing on nutrients. From "nutritional Evaluation of Food Processing" p.205. (Ed.) R.S. Harris and E. Karmas. AVI Pub. Co. Westport, CT, 1975.

[20] M. M. Nadkarni , T. A. Hatton, Optimal nutrient retention during the thermal processing of conduction-heated canned foods: application of the distributed minimum principle. J. Food Science, 50 (1985), 1312-1321.

[21] D. R. Thompson, The challenge in predicting nutrient changes during food processing. Food Technol. 36(2) (1982), 97.

[22] J. P. Aubin, H. Franskowska, Set Valued Analysis, Birkhähuser, (1990).

[23] A. Căpătină, R. Stavre, A control problem in bioconvective flow. J. Math. Kyoto Univ., 37-4 (1998) 585-595

[24] M. Levandowsky, W. S. Hunter and E. A. Spiegel, A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms, J. Protozoology, 22 (1975), 296-306.

[25] Y. Moribe, On the bioconvection of Tetrahymena pyriformis, Master's thesis (in Japanese), Osaka University, 1973.

[26] M. D. Rojas-Medar, Alguns resultados sobre uma generalização das equações de fluxo bioconvectivo, Tese de Doutorado em Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, 1998

[27] S. Lorca, J.L. Boldrini, The initial value problem for a generalized Boussinesq model. Nonlinear Analysis 36 (1999) 457-480.

[28] R. Temam, Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis (revised edition), North-holland Publ. Comp., Amsterdam, 1979.

[29] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[30] A. Papageorgiou, N.S. Papageorgiou, Necessary and sufficient conditions for optimality in nonlinear distributed parameter systems with variable initial state, J. Math. Soc. Japan 42 (1990), 387-396.

[31] Y. Kan-On, K. Narukawa and Y. Teramoto, On the equations of bioconvetive flow. J. Math. Kyoto Univ. 32-1 (1992), 135-153.

[32] D. H. Wagner, Survey of measurable selection theorems, Siam J. Control and Optimization 15, N^o 5 (1997), 859-903.