

11

SOBRE CERTAS CLASSES

DE

CORRENTES

DOMINCOS CHORFI

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio

CAMPINAS

1978

17-8-1978
10-11-1978

ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	v
-----------------	---

CAPÍTULO I - ÁLGEBRA DE GRASSMANN

1.1 - k -Vetores	1
1.2 - k -Covetores.....	4
1.3 - Produto Escalar Em $\Lambda_k(V)$ E $\Lambda^k(V)$	6
1.4 - Massa e Comassa.....	9

CAPÍTULO II - FORMAS DIFERENCIAIS

2.1 - Definição De Formas Diferencial.....	11
2.2 - Produto Exterior.....	12
2.3 - Aplicações Induzidas.....	12
2.4 - Diferencial Exterior.....	14

CAPÍTULO III - INTEGRAÇÃO DE FORMAS

3.1 - Complexos Simpliciais.....	16
3.2 - Complexos Celulares.....	20
3.3 - Integração Sobre Celas E Cadeias.....	22

CAPÍTULO IV - CORRENTES

4.1 - Correntes Com Suporte Compacto.....	24
4.2 - Massa De Uma Corrente.....	27

4.3 - Algumas Propriedades Das Correntes	
Com Suporte Compacto	29
4.4 - Aplicações Induzidas.....	30
4.5 - Correntes Normais E σ -Normais.....	33

CAPÍTULO V - TEOREMA DA DEFORMAÇÃO

5.1 - Corrente α , β -Normais.....	36
5.2 - Propriedades Das Correntes α , β -Normais.....	38
5.3 - Teoremas Da Deformação.....	53

BIBLIOGRAFIA.....	68
-------------------	----

INTRODUÇÃO

O Cálculo das Variações, embora tenha aparecido em época relativamente antiga, pois sua origem remonta aos problemas da braquistócrona e do sólido de revolução de resistência mínima, propostos, respectivamente, por J. Bernoulli e Isaac Newton no fim do século XVII, tem sido uma das fontes donde os matemáticos têm retirado idéias profundas que na maioria dos casos, depois de desenvolvidas, nada guardam aparentemente com sua origem. Isto se dá porque os problemas variacionais são de relevada importância nas aplicações da Física e da Engenharia, além de serem essencialmente geométricos.

Na tentativa de resolver os problemas variacionais Lagrange introduziu o conceito de Variação no século XVIII, época em que Euler descobriu a famosa equação diferencial que fornece a condição necessária para resolver um problema variacional no plano. Posteriormente este resultado foi generalizado demonstrando-se que um problema variacional nos leva a um problema de Equações Diferenciais. Esta via, entretanto nos conduz a uma série de dificuldades, como por exemplo, o problema de existência de solução de um problema variacional nos conduz a um problema de existência de solução para equações diferenciais, que é sabidamente difícil.

Há cerca de 40 anos, L.C. Young publicou um trabalho (ver [7]) onde ele introduz o conceito de uma Curva Generalizada, o qual constituiu o ponto chave para uma visão diferente dos problemas de Cálculo das Variações. Nesta nova direção o importante para a pesquisa deixa de ser o ponto de vista operacional como era carac

terístico da via por equações diferenciais, mas a estrutura do conjunto de objetos que constituem os candidatos à solução do problema variacional em questão. Posteriormente estendidas para dimensão superior, a técnica introduzida por Young permitiu a obtenção de Teoremas de existência bastante gerais (ver D'Ambrosio [4]).

Com relação a este novo ponto de vista destacam-se os trabalhos de H. Federer e W. H. Fleming, que partindo das correntes de De Rham têm desenvolvido estudos sobre compacidade de sub classes, dessas correntes numa dada norma, particularmente as correntes Normais e Integrais (ver [2]).

Em [8] são introduzidas as correntes σ -Normais que constituem o fecho das correntes Normais na topologia dada por Federer e Fleming no trabalho citado acima. Estas correntes são caracterizadas por possuírem Massa finita como as normais, mas ao contrário destas a fronteira pode ter Massa infinita. Neste trabalho são demonstradas uma série de propriedades que dizem respeito a esta nova classe de correntes.

O propósito inicial de nosso trabalho era a generalização do Teorema da Deformação, demonstrado em [2] para as correntes Normais, no que diz respeito as correntes σ -Normais. Entretanto, na medida em que desenvolvíamos nosso estudo verificamos, como era de se esperar, que nem todas as propriedades verificadas para as correntes normais poderiam ser estendidas para as σ -Normais. Este fato nos levou a constatar que quanto mais controlávamos tanto a corrente como sua fronteira melhores resultados obtínhamos. Daí introduzimos as classes das correntes α -Normais e β -Normais, cujo

estudo constitue o essencial deste trabalho, desenvolvido no capítulo V.

Para finalizar cumpre observar que os capítulos I, II, III e IV tem por finalidade introduzir os conceitos e resultados que utilizaremos no capítulo V e que além disso permite ao leitor não habituado a esta parte da matemática compreender sem grandes dificuldades o trabalho desenvolvido no capítulo V.

— o —

CAPÍTULO I

ÁLGEBRA DE GRASSMANN

1.1 - k-VETORES

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita n .

DEFINIÇÃO 1.1.1 - Chama-se k -vetor, $1 \leq k \leq n$, uma expressão da forma:

$$\alpha = a_1(v_{11} \wedge v_{12} \wedge \dots \wedge v_{1k}) + \dots + a_r(v_{r1} \wedge v_{r2} \wedge \dots \wedge v_{rk}),$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, com as propriedades, onde $u, v, u' \in V$.

$$a) (a+b)(u \wedge v) = a(u \wedge v) + b(u \wedge v);$$

$$b) 1(u \wedge v) = u \wedge v;$$

$$c) (u+u') \wedge v = u \wedge v + u' \wedge v;$$

$$d) u \wedge (v+u') = u \wedge v + u \wedge u';$$

$$e) (au) \wedge v = u \wedge (av) = a(u \wedge v);$$

$$f) (u \wedge u) = 0.$$

Usando estas regras temos:

$$u \wedge v + v \wedge u = u \wedge u + u \wedge v + v \wedge u + v \wedge v = (u+v) \wedge (u+v) = 0.$$

$$u \wedge v = - (v \wedge u).$$

Os 0-vetores são números reais, os 1-vetores são vetores de V e para $k > n$ os k -vetores são nulos.

O conjunto dos k -vetores com a operação adição $\alpha + \beta$ de dois k -vetores α e β , obtido escrevendo uma expressão ao lado da outra, unidas pelo sinal $+$, e a multiplicação por escalar $a\alpha$ obtida trocando a_i por aa_i na expressão de α , com $a \in \mathbb{R}$, forma um espaço vetorial que representaremos por $\Lambda_k(V)$. A este espaço chamamos espaço dos k -vetores.

Se $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$ é base de V . Pode-se mostrar que $\ell_{\lambda_1} < \ell_{\lambda_2} < \dots < \ell_{\lambda_k}$ com $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ e $1 \leq \lambda_i \leq n$, constitui uma base para $\Lambda_k(V)$, e portanto a dimensão deste espaço é $\binom{n}{k}$.

Logo todo k -vetor sobre V pode ser escrito como:

$$\alpha = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} \cdot \ell_{\lambda} \quad ; \quad \alpha_{\lambda} \in \mathbb{R},$$

$$\ell_{\lambda} = \ell_{\lambda_1} \wedge \ell_{\lambda_2} \wedge \dots \wedge \ell_{\lambda_k}, \quad \text{onde}$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \quad \text{com} \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$$

$$1 \leq \lambda_i \leq n, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

DEFINIÇÃO 1.1.2 - Um k-vetor é *simples* se possui a forma $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$, onde v_i , $i = 1, 2, \dots, k$, são elementos de V .

Vamos definir agora um modo de a partir de um k-vetor e um s-vetor obter um k+s-vetor.

DEFINIÇÃO 1.1.3 - Sejam $\alpha \in \Lambda_k(V)$ e $\beta \in \Lambda_s(V)$. Definiremos o *produto exterior* do k-vetor $\alpha = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} \cdot \ell_{\lambda}$ pelo s-vetor $\beta = \sum_u \beta_u \cdot \ell_u$ como sendo o elemento de $\Lambda_{k+s}(V)$ pela fórmula:

$$\alpha \wedge \beta = \left(\sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} \cdot \ell_{\lambda} \right) \wedge \left(\sum_u \beta_u \cdot \ell_u \right) =$$

$$= \sum_{(\lambda)(u)} \alpha_{\lambda} \beta_u \cdot \ell_{\lambda} \wedge \ell_u.$$

onde $\ell_{\lambda} \wedge \ell_u = \ell_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge \ell_{\lambda_n} \wedge \ell_{u_1} \wedge \dots \wedge \ell_{u_n}$.

O produto exterior goza das seguintes propriedades:

Se $\alpha \in \Lambda_k(V)$, $\beta \in \Lambda_s(V)$ e $\gamma \in \Lambda_t(V)$, tem-se:

a) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$;

b) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{ks} (\beta \wedge \alpha)$;

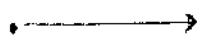
c) $\alpha \wedge \alpha = 0$ se k é ímpar ;

d) Como consequência de b) temos $v_{\lambda_1} \wedge v_{\lambda_2} \wedge \dots \wedge v_{\lambda_k} =$
 $= \varepsilon_{\lambda} \cdot v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$, onde $\{1, 2, \dots, k\}$ é um conjunto
e $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ uma permutação e ε_{λ} representa o

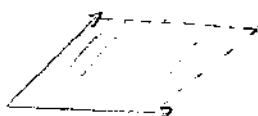
sinal desta permutação.

Os k -vetores simples podem ser pensados como k -paralelepípedos orientados em V , ou seja, como mostra as figuras abaixo.

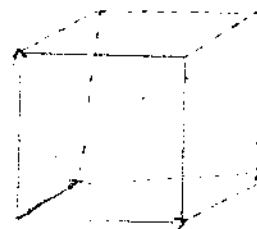
$$V = \mathbb{R}^3$$



1-vetor



2-vetor



3-vetor

Vamos agora considerar dois espaços vetoriais reais de dimensão finita e vejamos a relação (entre as suas álgebras de Grassmann) induzidas por uma aplicação linear.

Se $f: V \longrightarrow W$, onde V e W são espaços vetoriais, é uma aplicação linear, então existe uma única aplicação induzida por f de $\Lambda_k(V)$ em $\Lambda_k(W)$, que denotaremos f_k , tal que:

$$f_k(\sum_r a_r \cdot v_{r1} \wedge v_{r2} \wedge \dots \wedge v_{rk}) =$$

$$= \sum_r a_r f v_{r1} \wedge f v_{r2} \wedge \dots \wedge f v_{rk}$$

- 0 -

1.2 - K-COVETORES

Seja V um espaço vetorial e $\Lambda_k(V)$ o espaço dos k -vetores sobre V .

DEFINIÇÃO 1.2.1 - Um k -covetor de V é um elemento do espaço dual de $\Lambda_k(V)$.

Representaremos o dual por $\Lambda^k(V)$.

Se n é a dimensão de V , então a dimensão de $\Lambda^k(V)$ é $\binom{n}{k}$.

Pode-se mostrar-se que um elemento w de $\Lambda^k(V)$ pode ser escrito na forma:

$$w = \sum_i^r b^i \cdot f^{i1} \wedge f^{i2} \wedge \dots \wedge f^{ik}$$

onde f^{ij} , $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, k$ são elementos do espaço dual de V . Isto é identificamos

$$\Lambda^k(V) = (\Lambda_k(V))' = \Lambda_k(V')$$

Se $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$ e $\{\ell^1, \ell^2, \dots, \ell^n\}$ são bases duais, respectivamente, então

$$\ell^\lambda = \ell^{\lambda_1} \wedge \ell^{\lambda_2} \wedge \dots \wedge \ell^{\lambda_k} \in \Lambda^k(V),$$

onde

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \text{ com } \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k, 1 \leq \lambda_i \leq n \text{ e}$$

$i = 1, 2, \dots, k$, constitue uma base para $\Lambda^k(V)$.

Portanto podemos escrever os elementos de $\Lambda^k(V)$ como:

$$w = \sum_{\lambda} w^{\lambda} \cdot e^{\lambda}, \quad w^{\lambda} \in \mathbb{R}.$$

DEFINIÇÃO 1.2.2 - Dizemos que um k -covetor é simples se ele possui a forma

$$f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^k, \text{ onde } f^i \text{ são elementos do dual de } V.$$

Consideremos as somas diretas:

$$\Lambda_*(V) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda_k(V)$$

e

$$\Lambda^*(V) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V).$$

Estas somas são espaços vetoriais de dimensão 2^n , com elementos bases e_{λ} e e^{λ} , respectivamente. Estes espaços vetoriais com o produto exterior constituem as Álgebras Contravariante e Covariante de Grassmann.

- 0 -

1.3 - PRODUTO ESCALAR EM $\Lambda_k(V)$ e $\Lambda^k(V)$

DEFINIÇÃO 1.3.1 - Sejam $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$ e $w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k$ k -vetores simples. Definimos produto escalar por:

$$\begin{aligned} (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k) \cdot (w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k) &= \\ &= \det(v_i \cdot w_j) = |v_i \cdot w_j|. \end{aligned}$$

Portanto temos em $\Lambda_k(V)$ uma norma natural definida a partir desse produto escalar.

Para o caso de k-vetores gerais a definição é estendida pela propriedade de linearidade do produto escalar, ou seja, se

$$\alpha = (\sum_r a_r \cdot v_{r_1} \wedge v_{r_2} \wedge \dots \wedge v_{r_k}) \in \Lambda_k(V) \quad e$$

$$\beta = (\sum_s a_s \cdot v_{s_1} \wedge v_{s_2} \wedge \dots \wedge v_{s_k}) \in \Lambda_k(V),$$

então:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= (\sum_r a_r \cdot v_{r_1} \wedge \dots \wedge v_{r_k}) \cdot (\sum_s a_s \cdot v_{s_1} \wedge v_{s_2} \wedge \dots \wedge v_{s_k}) = \\ &= \sum_{r,s} a_r \cdot a_s \det(v_{r_i} \cdot v_{s_j}). \end{aligned}$$

Como $\Lambda^k(V)$ é o dual de $\Lambda_k(V)$ temos um produto escalar natural induzido nesse espaço pelo produto escalar definido acima.

Por outro lado se α é o k-vetor dado acima e w é o k-covetor $w = \sum_i b^i \cdot f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_k}$, definimos o produto misto $w \cdot \alpha =$

$$= \sum_{i,j} b^i a_j \cdot \sum_{\lambda} \epsilon^{\lambda} \cdot f^{i_1}(v_{j\lambda_1}) \dots f^{i_k}(v_{j\lambda_k}) =$$

$$= \sum_{i,j} b^i a_j \cdot \det [f^{i_\ell}(v_{jm})].$$

Seja $f: V \longrightarrow W$ uma aplicação linear. Então a aplicação induzida

$$f': W' \longrightarrow V'$$

define uma aplicação linear, que representaremos também por f^k ,

$$f^k: \Lambda^k(W) = \Lambda_k(W') \longrightarrow \Lambda^k(V) = \Lambda_k(V')$$

como se segue:

$$\begin{aligned} f^k(\sum_r b^r \cdot f^{r_1} \wedge f^{r_2} \wedge \dots \wedge f^{r_k}) &= \\ &= \sum_r b^r \cdot f^k f^{r_1} \wedge f^k f^{r_2} \wedge \dots \wedge f^k f^{r_k}. \end{aligned}$$

Se $w \in \Lambda^k(W)$ e $\alpha \in \Lambda_k(V)$ e

$f: V \longrightarrow W$ linear, então

$$(f^k w) \alpha = w(f_k \alpha).$$

Se definirmos ainda

$$\psi: \Lambda_k(V) \longrightarrow \Lambda^k(V)$$

por:

$$\psi(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k) = \psi_{v_1} \wedge \psi_{v_2} \wedge \dots \wedge \psi_{v_k}$$

e estendermos por linearidade, α se transforma num isomorfismo pois

$$\psi_{\ell_\lambda} = \ell^\lambda.$$

Se definirmos o produto escalar em $\Lambda^k(V)$ por:

$$\psi_\alpha \cdot \psi_\beta = \alpha \cdot \beta$$

temos que:

$$|\psi_\alpha| = |\alpha|,$$

onde $|\cdot|$ indica a norma proveniente do produto escalar, portanto são normas duais em $\Lambda_k(V)$ e $\Lambda^k(V)$.

- O -

1.4 - MASSA E COMASSA

É conveniente introduzir também normas especiais nos espaços $\Lambda_k(V)$ e $\Lambda^k(V)$.

DEFINIÇÃO 1.4.1 - A Massa de um k-vetor α é o número real

$$||\alpha|| = \inf \left\{ \sum_{\xi \in B} |\xi| / B \text{ é um conjunto finito de k-veto}$$

res simples e $\alpha = \sum_{\xi \in B} \xi \}$.

DEFINIÇÃO 1.4.2 - A Comassa de um k -covetor w é o número real

$$\|w\| = \sup \{w(\gamma) / \gamma \text{ é } k\text{-vetor simples e } \|\gamma\| \leq 1\}.$$

A Massa e a Comassa gozam das seguintes propriedades:

- 1) $\|\alpha\| \geq |\alpha|;$
- 2) $\|w\| \leq |w|;$
- 3) $|w \cdot \alpha| \leq \|w\| \cdot \|\alpha\|;$
- 4) $\|\alpha \wedge \beta\| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$, onde $\beta \in \Lambda_k(V)$.

Obviamente a Massa e a Comassa são normas duais.

CAPÍTULO II

FORMAS DIFERENCIAIS

2.1 - DEFINIÇÃO DE FORMA DIFERENCIAL

DEFINIÇÃO 2.1.1 - Uma k -forma num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de U em $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\varphi : U &\longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \\ x &\longrightarrow \varphi(x)\end{aligned}$$

Dizemos que uma k -forma em U é *infinitamente diferenciável* se para cada $\alpha \in \Lambda_k(U)$ tem-se que $\varphi(x) \cdot \alpha$ é infinitamente diferenciável.

Representaremos o conjunto das k -formas infinitamente diferenciáveis em U por $E^k(U)$.

As k -formas podem ser adicionadas e multiplicadas por escalar de modo natural e assim constituem um espaço vetorial.

Lembrando que $\Lambda_0(\mathbb{R}^n) = \Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ temos que uma 0-forma é uma função real em U e sendo $\Lambda^n(\mathbb{R}^n) \approx \mathbb{R}$, podemos considerar as n -formas no $\mathbb{R}^n$ como funções em $\mathbb{R}^n$.

A soma direta

$$E^*(U) = \bigoplus_k E^k(U)$$

é uma Álgebra Diferencial Graduada com produto exterior $\wedge$ e a diferencial exterior d .

2.2 - PRODUTO EXTERIOR

DEFINIÇÃO 2.2.1 - Seja φ uma k -forma e θ uma ℓ -forma no $\mathbb{R}^n$. Definimos produto exterior de φ por θ como sendo uma $k+\ell$ -forma no $\mathbb{R}^n$ tal que

$$(\varphi \wedge \theta)(x) = \varphi(x) \wedge \theta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

onde $\varphi(x) \wedge \theta(x)$ é o produto exterior de um k -covetor por um ℓ -covetor, definido de modo análogo ao produto exterior de um k -vetor por um ℓ -vetor.

O produto exterior goza das seguintes propriedades:

Sendo φ uma k -forma, θ uma ℓ -forma e γ é uma p -forma temos:

a) $(\varphi \wedge \theta) \wedge \gamma = \varphi \wedge (\theta \wedge \gamma);$

b) $\varphi \wedge \theta = (-1)^{k\ell} \theta \wedge \varphi;$

c) $\varphi \wedge (\theta + \gamma) = \varphi \wedge \theta + \varphi \wedge \gamma; \text{ se } p = \ell.$

— 0 —

2.3 - APLICAÇÕES INDUZIDAS

Vamos considerar agora uma aplicação diferenciável de um aberto U de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$.

$$f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

e vejamos como esta aplicação induz uma aplicação no espaço das

k -formas de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$.

Chamamos $T_x(\mathbb{R}^m)$ e $T_{f(x)}(\mathbb{R}^n)$ os espaços tangentes a $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ nos pontos x e $f(x)$, respectivamente. A aplicação derivada $Df(x)$ é então uma aplicação linear

$$\mathbb{R}^m \approx T_x(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{Df(x)} T_{f(x)}(\mathbb{R}^n) \approx \mathbb{R}^n.$$

Esta aplicação linear induz aplicações entre os espaços de k -vetores e k -covetores, denotados

$$\Lambda_k(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\Delta_k(f(x))} \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$$

dada por:

$$\begin{aligned} (\Delta_k f(x)) \left(\sum_r a_r \cdot v_{r_1} \wedge v_{r_2} \wedge \dots \wedge v_{r_k} \right) &= \\ = \sum_r a_r \cdot Df(x) v_{r_1} \wedge Df(x) v_{r_2} \wedge \dots \wedge Df(x) v_{r_k}, \end{aligned}$$

e

$$\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Delta^k f(x)} \Lambda^k(\mathbb{R}^m)$$

dado por:

$$[(\Delta^k f(x)w)](\alpha) = w[(\Delta_k f(x)\alpha)]$$

para todo $w \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \Lambda_k(\mathbb{R}^m)$.

Obviamente $\Delta^k f(x)$ induz de modo natural uma aplicação $f^\#$ do espaço das k -formas do $\mathbb{R}^n$ no espaço das k -formas do $\mathbb{R}^m$.

Dado $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, diferenciável, ela induz uma aplicação que denotaremos $f^\#$ tal que

$$f^\# : E^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow E^k(\mathbb{R}^m)$$

definida por :

$$\{(\Delta f^\#(\varphi))(x)\} \cdot (\alpha) = \varphi(x)[(\Delta_k f)(\alpha)]$$

para a $k \geq 1$, $\forall \varphi \in E^k(\mathbb{R}^n)$, $\forall x \in U$ e $\alpha \in \Lambda_k(\mathbb{R}^m)$.

Quando $k = 0$ escrevemos

$$f^\# \varphi = \varphi \cdot f, \quad \forall \varphi \text{ uma } 0\text{-forma.}$$

A aplicação $f^\#$ goza das seguintes propriedades:

- a) $f^\# (\varphi_1 + \varphi_2) = f^\# (\varphi_1) + f^\# (\varphi_2);$
- b) $f^\# (\varphi_1 \varphi_2) = f^\# (\varphi_1) \wedge f^\# (\varphi_2);$
- c) $f^\# (\varphi_1 \wedge \varphi_2) = f^\# (\varphi_1) \wedge f^\# (\varphi_2);$
- d) $(f \circ g)^\# (\varphi) = g^\# [f^\# (\varphi)].$

— 0 —

2.4 - DIFERENCIAL EXTERIOR

Consideremos uma k -forma infinitamente diferenciável φ sobre

um conjunto U do $\mathbb{R}^n$.

DEFINIÇÃO 2.4.1 - Denomina-se *Diferencial Exterior* de $\varnothing$ a $(k + 1)$ -forma, que denotamos $d\varnothing$, dada por:

$$\begin{aligned} d\varnothing(x) \cdot (\alpha) &= \\ &= d\varnothing(x) \cdot [\sum_r a_r \cdot v_{r_1} \wedge v_{r_2} \wedge \dots \wedge v_{r_{(k+1)}}] = \\ &= \sum_r a_r \cdot \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \nabla_{v_{r_i}} \varnothing(x) \cdot \\ &\quad (v_{r_1} \wedge v_{r_2} \wedge \dots \wedge \hat{v}_{r_i} \wedge \dots \wedge v_{r_{(k+1)}}) \end{aligned}$$

para $\forall x \in U$, se $k < n$; onde $\nabla_{v_{r_i}} \varnothing(x)$ é a derivada de $\varnothing$ em x com respeito a v_{r_i} (derivada no sentido de Gâteaux) e $\wedge$ indica que o vetor sobre o qual ele é colocado foi retirado da expressão do $(k + 1)$ -vetor.

Observe-se que se $k = n$ então $d\varnothing = 0$.

Pode-se mostrar que a diferencial exterior possui as seguintes propriedades:

- a) $d(\varnothing_1 + \varnothing_2) = d\varnothing_1 + d\varnothing_2$;
- b) $d(\varnothing_1 \wedge \varnothing_2) = d\varnothing_1 \wedge \varnothing_2 + (-1)^k \varnothing_1 \wedge d\varnothing_2$, $\varnothing$ é k -forma;
- c) $d(d\varnothing) = 0$;
- d) $d[f^\#(\varnothing)] = f^\#(d\varnothing)$.

CAPITULO III

INTEGRAÇÃO DE FORMAS

3.1 - COMPLEXOS SIMPLICIAIS (EM $\mathbb{R}^n$): Vamos resumir alguns resultados e definições da teoria dos complexos simpliciais no $\mathbb{R}^n$. Para maiores detalhes referimos o leitor a [9].

Seja $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial real.

Um conjunto finito $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ de pontos de $\mathbb{R}^n$ é dito estar em *posição geral* se os vetores $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0$ são linearmente independentes. (por abuso de linguagem diremos que os pontos $v_0, v_1, \dots, v_n$ estão em posição geral).

DEFINIÇÃO 3.1.1 - Sejam $n \geq 0$ um número natural e $v_0, v_1, \dots, v_n$, $n+1$ pontos de $\mathbb{R}^n$ em posição geral. Então o conjunto

$$\sigma^n = [v_0, v_1, \dots, v_n] = \{v \in \mathbb{R}^n / v = \sum_{i=0}^n a_i v_i,$$

$$\sum_{i=0}^n a_i = 1, 0 \leq a_i \leq 1\}$$

é chamado de *n-simplexo* em $\mathbb{R}^n$ gerado pelos pontos $v_0, v_1, \dots, v_n$.

A dimensão de um *n-simplexo* é o número n . Por convenção o conjunto vazio será considerado como *n-simplex* em $\mathbb{R}^n$, com $n = -1$, e portanto de dimensão -1 .

Em tudo que se segue a expressão "Seja $\sigma^n = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ um *n-simplexo*" significa "Seja σ^n o *n-simplexo* em $\mathbb{R}^n$ gerado pelos

pontos $v_0, v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ em posição geral".

Quando não estaremos interessados diretamente na dimensão do simplexo, omitiremos o índice superior do simplexo, escrevendo apenas σ .

Sejam $\sigma^n = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ um n -simplexo e k um número natural tal que $0 \leq k \leq n$. Então o k -simplexo em $\mathbb{R}^n$ gerado por um subconjunto de $k+1$ elementos de $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ é dito uma k -face de σ^n . As 0-faces de um simplexo são chamados *vértices*. Convenciona-se que o conjunto vazio é a (-1) -face de qualquer simplexo. Para indicar que σ_1 é face própria de σ_2 , isto é, que σ_1 é face de σ_2 , distinta de σ_2 , escreveremos $\sigma_1 < \sigma_2$.

Um k -simplexo orientado é um k -simplexo no qual damos uma ordenação aos seus vértices. Consideramos iguais duas ordenações que podem ser convertidas uma na outra por um número par de permutações de vértices. Assim todo simplexo admite duas orientações. Vamos representar um k -simplexo orientado pela notação $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ onde estamos considerando a ordenação $v_0, v_1, \dots, v_k$. A notação $-(v_0, v_1, \dots, v_k)$ significa que estamos considerando o simplexo $[v_0, v_1, \dots, v_k]$ com a orientação oposta, isto é, $(v_1, v_0, \dots, v_k)$.

Dado um k -simplexo orientado $\sigma^k = (v_0, v_1, \dots, v_k)$, associamos a ele o k -vetor $\frac{1}{k!} [(v_1 - v_0) \wedge (v_2 - v_0) \wedge \dots \wedge (v_k - v_0)]$ se $k \geq 2$ ou $v_1 - v_0$ se $k=1$.

Para efeito de notação, dado um k -simplexo orientado σ^k , o k -vetor associado será indicado por $\vec{\sigma}^k$.

Denotamos ainda por $|\sigma^k|$ o conjunto de pontos determinado por σ^k .

DEFINIÇÃO 3.1.2 - Seja $\sigma^k = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ um k -simplexo ($k \geq 1$). O *baricentro* de σ^k é o ponto:

$$b(\sigma^k) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k v_i.$$

Sejam σ_i^k k -simplexos $1 \leq i \leq k$.

Uma k - *cadeia orientada* é uma expressão da forma

$$\sum_i^r a_i \sigma_i^k$$

onde a_i são números reais, σ_i^k são k -simplexos orientados. As k -cadeias podem ser somadas, somando-se os coeficientes respectivos e multiplicando-se seus coeficientes.

O conjunto das k -cadeias será indicado por C_k e com as operações acima é um espaço vetorial.

DEFINIÇÃO 3.1.3 - Dado o k -simplexo orientado $\sigma = (v_0, v_1, \dots, v_k)$, o *bordo* de σ , denotado por $\partial\sigma$, será a $(k-1)$ -cadeia orientada dada por:

$$\partial(v_0, v_1, \dots, v_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k)$$

onde $\hat{v}_i$ indica ausência de v_i , se $k \geq 1$, se $k=0$, fazemos $\partial\sigma=0$.

O bordo de uma k -cadeia é obtido por linearidade, isto é,

$$\partial\left(\sum_{i=1}^r a_i \sigma_i^k\right) = \sum_{i=1}^r a_i \partial\sigma_i^k.$$

Esta operação define então uma aplicação linear chamada *operador bordo*

$$\partial : C_k \rightarrow C_{k-1};$$

onde representamos $\partial(\sigma)$ por $\partial\sigma$.

Podemos verificar facilmente que $\partial^2\sigma = \partial(\partial\sigma) = 0$.

Seja K um complexo simplicial e $\Delta^1(K)$ o complexo simplicial cujos simplexes são do tipo:

$$B = [b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_r)],$$

onde r é um número inteiro satisfazendo $-1 \leq r \leq \dim K$ e $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_r$ são simplexes de K . $\Delta^1(K)$ é chamado a *primeira subdivisão baricêntrica* de K .

Definimos, indutivamente, a n -ésima subdivisão baricêntrica de K , como o complexo simplicial:

$$\Delta^n(K) = \Delta(\Delta^{n-1}(K)), \text{ com}$$

$$\Delta^0(K) = \Delta(K).$$

Seja K um complexo simplicial. A *malha* ("mesh") de K é definida por:

$$\text{malha}(K) = \sup_{\sigma \in K} \{\text{diâmetro de } \sigma\}.$$

Note que se $\mathbb{K}$ é finito então: $\text{malha}(\mathbb{K}) < \infty$.

Pode-se mostrar que se $\mathbb{K}$ é um complexo simplicial de dimensão n em $\mathbb{R}^n$, então $\text{malha}(\Delta(\mathbb{K})) \leq \frac{n}{n+1} \text{malha}(\mathbb{K})$. Se $\mathbb{K}$ é tal que $\text{malha}(\mathbb{K}) < \infty$ então $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{malha}(\Delta^r(\mathbb{K})) = 0$.

DEFINIÇÃO 3.1.4 - Um *complexo simplicial orientado* $\mathbb{K}$ é uma coleção finita de simplexos orientados, sujeita as seguintes condições:

i) Se $\sigma^n \in \mathbb{K}$ e σ^k é face de σ^n , então $\sigma^k \in \mathbb{K}$.

ii) Se $\sigma^n \neq \sigma^m$, então $|\sigma^n| \cap |\sigma^m| = \emptyset$.

A $\dim \mathbb{K}$ é a maior das dimensões de seus simplexos.

A *região poliedral* $|\mathbb{K}|$ associado ao complexo $\mathbb{K}$ é o conjunto

$$|\mathbb{K}| = \bigcup_{\sigma^k \in \mathbb{K}} |\sigma^k|.$$

— 0 —

3.2 - COMPLEXOS CELULARES: Sejam $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial real normado e S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Então se para quaisquer dois pontos x e y em S , o segmento de reta unindo x a y está contido em S , dizemos que S é convexo.

Além disso, se S é um conjunto convexo, a *dimensão* de S é o menor m tal que existe um m -plano de $\mathbb{R}^n$ contendo S .

DEFINIÇÃO 3.2.1 - Uma *cela* de dimensão zero em $\mathbb{R}^n$ é um ponto de

$\mathbb{R}^n$. Se $k \geq 1$ uma cela de dimensão k em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto compacto, convexo e de dimensão k de $\mathbb{R}^n$, cuja fronteira topológica (que chamaremos de *bordo da cela*) é a união de um número finito (não nulo) de celas de dimensão $k-1$ com interiores disjuntos (estas são chamadas as $(k-1)$ -faces da cela).

Notemos ainda que, se $1 < i \leq k$ uma $(k-1)$ -face de uma cela de dimensão k é uma $(k-i)$ -face de uma $(k-i+1)$ -face da cela considerada. As 0 -faces são chamadas *vértices*. (Note que se $k \geq 0$, um k -simplexo é uma cela).

Uma *cela orientada* é uma cela no qual damos uma orientação aos vértices, considera-se que duas orientações de uma mesma cela são iguais se uma pode ser convertida na outra por uma permutação de ordem par.

DEFINIÇÃO 3.2.2 - Seja $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial normado.

Um complexo celular em $\mathbb{R}^n$ é uma coleção K de celas em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:

- i) Se $B \in K$, então todas as faces de B estão em K ;
- ii) Se B e $D \in K$, então $\text{Int } B \cap \text{Int } D = \emptyset$ ou $B \cap D$ é face de B e de D .
- iii) Se B e $D \in K$, então $B \cap D$ é uma união de celas de K .

Seja K um complexo celular em $\mathbb{R}^n$. Associamos a K subconjunto $|K|$ de $\mathbb{R}^n$ definido por:

$$|K| = \bigcup_{A \in K} A$$

A dimensão de K , denotada $\dim K$, é o supremo das dimensões de suas celas.

Sejam A uma cela em $\mathbb{R}^n$ e $v_1, v_2, \dots, v_n$ os seus vértices. O baricentro de A é o ponto $b(A)$ de A definido por:

$$b(A) = \frac{1}{n} v_1 + \dots + \frac{1}{n} v_n.$$

Podemos verificar que se K é um complexo celular de dimensão finita, então K admite uma subdivisão chamada primeira subdivisão baricêntrica que é um complexo simplicial.

- 0 -

3.3 - INTEGRAÇÃO SOBRE CELAS E CADEIAS

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ uma k -cadeia orientada de $\mathbb{R}^n$ ou seja

$$A = \sum a_i \sigma_i$$

e seja ϕ uma forma Diferencial contínua sobre A .

Sejam $b(\sigma_i^k)$ baricentro dos k -simplexos σ_i^k e $\bar{\sigma}_i^k$ os k -vetores associados a σ_i .

Definimos a operação "o" (que não é independente da subdivisão) por:

$$\phi \circ \sum_i a_i \sigma_i^k = \sum_i a_i \phi(b(\sigma_i)) \cdot (\bar{\sigma}_i^k)$$

pois

$$\phi(b(\sigma_i)) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\sigma_i^k \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n).$$

Vamos definir agora integração de formas sobre cadeias.

Seja agora σ^k k -simplexo orientado e ϕ k -forma contínua em σ^k .

Seja $\Delta^1(\sigma), \Delta^2(\sigma), \dots$, sequência de subdivisões de σ^k com malhas cujo diâmetro tende para zero.

Pode-se mostrar que existe o limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi \circ \Delta^k(\sigma).$$

DEFINIÇÃO 3.3.1 - Chama-se Integral de ϕ sobre σ^k o número real

$$\int_{\sigma^k} \phi = \int_{\sigma^k} \phi(p) dp = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi \circ \Delta^k(\sigma).$$

Definimos integral de uma k -forma contínua ϕ sobre uma k -cadeia simplicial $\sum a_i \sigma_i^k$ por:

$$\int_A \phi = \int_{A = \sum a_i \sigma_i^k} \phi = \sum a_i \int_{\sigma_i^k} \phi.$$

A integral de uma k -forma contínua ϕ sobre uma k -cadeia celular é obtida por uma expressão análoga à anterior.

CAPÍTULO IV

CORRENTES

4.1 - CORRENTES COM SUPORTE COMPACTOS

Consideremos $E^k(U)$ o espaço das k -formas infinitamente diferenciáveis no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.

DEFINIÇÃO 4.1.1 - Seja $\varphi \in E^k(U)$, o suporte de φ é o subconjunto fechado de U , dado por:

$$\text{Supp } \varphi = U \cap \text{Fecho } \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) \neq 0\}.$$

Consideraremos a noção de convergência em $E^k(U)$ dada pela convergência uniforme, em cada subconjunto compacto de U , de cada derivada parcial de qualquer ordem, isto é, uma sequência de k -formas $\{\varphi_n\}$ converge para a k -forma φ , se para cada compacto de U a sequência $\{\varphi_n\}$ e a de suas derivadas convergem uniformemente nesses compactos.

DEFINIÇÃO 4.1.2 - Seja $E^k(U)$ com a noção da convergência dada acima. Uma corrente k -dimensional em U é um funcional linear

$$T : E^k(U) \longrightarrow \mathbb{R},$$

que seja contínuo, isto é, se $\{\varphi_n\}$ é uma sequência $E^k(U)$ que con-

verge para o Zero, então

$$T(\varphi_n) \longrightarrow 0.$$

O conjunto das correntes k -dimensionais em U é denotado por $E_k(U)$. Este conjunto é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e está munida da topologia fraca, isto é, uma sub-base é dada pelos subconjuntos de $E^k(U)$:

$$V(T, \varphi, \epsilon) = \{S \in E_k(U) \mid |T(\varphi) - S(\varphi)| < \epsilon\}$$

para cada $T \in E_k(U)$, $\varphi \in E^k(U)$, $\epsilon > 0$.

DEFINIÇÃO 4.1.3 - O suporte de T ($\text{supp } T$) é o menor conjunto $C \subset U$, tal que C é fechado em relação a U e $T(\varphi) = 0$ para todo $\varphi \in E^k(U)$ com $\text{supp } \varphi \subset U - C$.

Dizemos que uma sequência $\{T_n\}$ de correntes em $E_k(U)$ converge para $T \in E_k(U)$ se é somente se, para cada $\varphi \in E^k(U)$, $T_n(\varphi) \rightarrow T(\varphi)$.

Para correntes de suporte compactos podemos utilizar a métrica

$$\rho(A, B) = \max \{ \sup \{d(x, A), x \in B\}, \sup \{d(x, B), x \in A\} \}$$

denominada métrica de Hausdorff para comparar distância de suportes.

A soma direta,

$$E_* (U) = \bigoplus_k E_k (U)$$

constitui um Complexo de Cadeias com o operador fronteira

$$\partial: E_k (U) \longrightarrow E_{k-1} (U)$$

definido como:

$$\partial T = T \circ d,$$

onde $T \in E_k (U)$, e d é a diferencial exterior. Então temos $\partial^2 = 0$.

Dada $T \in E_k (U)$, a corrente $\partial T \in E_{k-1} (U)$ é chamada o bordo de T . Obviamente o operador bordo ∂ é contínuo em $E_k (U)$.

Demonstra-se facilmente que se $T \in E_k (U)$ então $\text{supp } \partial T \subset \text{supp } T$ e ainda que se $\text{supp } T$ é compacto, então $\text{supp } \partial T$ é compacto.

DEFINIÇÃO 4.1.4 - Seja $T \in E_k (U)$ e $\varphi \in E^m (U)$ com $k \geq m$. Definimos $T \wedge \varphi \in E_{k-m} (U)$ como

$$(T \wedge \varphi) (\psi) = T(\varphi \wedge \psi)$$

para todo $\psi \in E^{k-m} (U)$ e portanto,

$$\partial (T \wedge \varphi) = (-1)^m (\partial T) \wedge \varphi + (-1)^{m-1} T \wedge \partial \varphi.$$

A cada $\psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, L_n somável com suporte compacto associamos a corrente $C\psi \in E_{n-k}$

$$(C\psi)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi \wedge \varphi,$$

$\varphi \in E^{n-k}(\mathbb{R}^n)$ com $\mathbb{R}^n$ orientado de maneira usual.

No caso em que ψ anterior é a fronteira característica de um subconjunto aberto e limitado $U(\chi_U)$, então $C\psi$ pode ser identificada com U , escrevendo

$$U(\varphi) = \int_U \varphi,$$

$$\varphi \in E^k(\mathbb{R}^n).$$

No item seguinte introduziremos uma outra norma no espaço das correntes. Tal norma corresponderá à noção da área, volume, etc. do suporte da corrente.

- o -

4.2 - MASSA DE UMA CORRENTE

DEFINIÇÃO 4.2.1 - Seja $\varphi \in E^k(U)$, definimos *Massa de φ* como,

$$M(\varphi) = \sup \{ ||\varphi(x)|| \mid x \in U \},$$

onde $||\cdot||$ indica a Comassa (veja L.4.2)

DEFINIÇÃO 4.2.2 - Se $T \in E_k(U)$ a Massa de T é definida como

$$M(T) = \sup \{T(\varphi) / \varphi \in E^k(U) \text{ e } M(\varphi) \leq 1\}.$$

As aplicações M em $E^k(U)$ e $E_k(U)$ constituem normas nos espaços das formas com suporte compacto em U e das correntes de suporte compacto contido em U .

Seja $\varphi \in E^k(U)$. Associamos a φ uma função real não negativa

$$||\varphi||: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$||\varphi|| (x) = ||\varphi(x)||,$$

$x \in U$, onde $||\cdot||$ indica a Comassa (veja 1.4.2).

Seja $T \in E_k(U)$ com $M(T) < \infty$ associamos uma medida chamada *medida variacional de T* e denotada $||T||$ definida como:

$$||T|| (f) = \sup \{T(\varphi) / \varphi \in E^k(U) \text{ e } ||\varphi|| \leq f\}$$

onde f é uma função real não negativa e contínua em U .

4.3 - ALGUMAS PROPRIEDADES DAS CORRENTES COM SUPORTE COMPACTO

A seguir apresentamos algumas propriedades que utilizaremos neste trabalho.

$$1) \quad M(T \wedge \varnothing) \leq \binom{k}{m} ||T|| (||\varnothing||), T \in E_k(U),$$

$$M(T) < \infty, \varnothing \in E^m(U), \quad m \leq k.$$

$$2) \quad ||\varnothing \wedge \psi|| \leq \binom{k}{m} ||\varnothing|| \cdot ||\psi||, \psi \in E^{k-m}(U).$$

$$3) \quad M(T \cap A) = ||T|| (\chi_A), \quad A \subset U \text{ subconjunto de Borel e } \chi_A \text{ função característica de } A.$$

$$4) \quad M(C\psi) = \int |\psi| \, dL_n, \quad \psi \in L_n \text{ somável com suporte compacto.}$$

No caso particular em que ψ é a função característica de uma cela convexa k -dimensional orientada de A , então a massa da corrente k -dimensional associada é igual à medida k -dimensional da cela.

$$5) \quad ||T \wedge \chi_A|| (f) \leq ||T|| (f), \quad A \subset \mathbb{R}^n \text{ subconjunto de Borel.}$$

$$6) \quad \text{Se } T \in E_k(U) \text{ e } M(T) < +\infty.$$

então T pode ser estendida no conjunto das k -formas contínuas em U e:

- 7) Seja $\{T_i\}_{i \geq 1}$ uma sequência de correntes e $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$ tais que $\lim_{i \rightarrow \infty} T_i = T$ e $\liminf_{i \rightarrow \infty} M(T_i) < +\infty$ então $M(T) < \infty$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} T_i(\varphi) = T(\varphi)$ para toda k -forma contínua φ em U e

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} ||T_i|| (A) \geq ||T|| (A)$$

para todo conjunto aberto $A \subset U$.

- 8) Se A é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, e $0 < C < \infty$, então

$$E_k(\mathbb{R}^n) \cap \{T: \text{supp } T \subset A \text{ e } M(T) \leq C\}$$

é compacto (na topologia fraca).

Observamos que nas duas primeiras propriedades podemos desprezar o fator $\binom{k}{m}$ desde que $\varphi(x)$ é simples quando $x \in \text{supp } T$.

Note que nas propriedades acima estamos usando $T \cap A$ em vez de $T \wedge \chi_A$.

- 0 -

4.4 - APLICAÇÕES INDUZIDAS

Sejam U e V dois abertos de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente. Uma função infinitamente diferenciável $f: U \rightarrow V$ induz uma transformação linear contínua

$$f_{\#} : E_k(U) \longrightarrow E_k(V)$$

dada por:

$$f_{\#}(T)(\varnothing) = T(f^{\#}\varnothing), \text{ para cada } \varnothing \in E^k(V),$$

onde

$$f^{\#} : E^k(V) \longrightarrow E^k(U)$$

dada no item 2.3

PROPRIEDADES DE $f_{\#}$

- 1) $f_{\#}$ comuta com o operador bordo: $\partial \circ f_{\#} = f_{\#} \circ \partial$.
- 2) $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$
- 3) $f_{\#}(T) \wedge \varnothing = f_{\#}[T \wedge f^{\#}(\varnothing)]$, $\varnothing \in E^m(V)$, $m \leq k$.
- 4) $\text{supp } f_{\#}(T) \subset f(\text{supp } T)$ e quando f tem inversa diferenciável, então:

$$\text{supp } T = \text{supp } f_{\#}^{-1}(f_{\#}T) \subset f^{-1}(\text{supp } f_{\#}T) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\text{supp } T) \subset \text{supp } f_{\#}(T)$$

e portanto $\text{supp } f_{\#}(T) = f(\text{supp } T)$.

No caso particular de homotetia

$$\mu_\delta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

temos então

$$\text{supp } \mu_{\delta\#}(T) = \mu_\delta(\text{supp } T).$$

5) Para $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$

$$M(f_\# T) \leq \|T\| (Df^k) < +\infty$$

$M(T) \leq \|T\| (1)$ e então no caso de homotetia μ_δ

$$M(\mu_\delta(T)) \leq \|T\| (|\delta|^k) =$$

$$= |\delta|^k \|T\| (1) = |\delta|^k M(T)$$

também, quando $k \geq 1$

$$M(\partial(\mu_{\delta\#} T)) =$$

$$= M(\mu_{\delta\#}(\partial T)) \leq |\delta|^{k-1} M(\partial T).$$

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Consideremos o subespaço vetorial $P_k(U)$ de $E^k(U)$ gerado pelos k -simplexos orientados de U pensados como corrente de acordo com o item 4.1. A cada elemento de $P_k(U)$ chamamos de *cadeia poliedral*. Dada uma cadeia poliedral se os seus coeficientes em relação aos simplexos forem inteiros, a cadeia poliedral é chamada *cadeia poliedral inteira*.

- o -

4.5 - CORRENTES NORMAIS E σ -NORMAIS

DEFINIÇÃO 4.5.1 - Uma corrente $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$ é *normal* se

$$N(T) = M(T) + M(\partial T) < +\infty.$$

A cada subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ associamos o espaço linear das *correntes normais*

$$N_k(U) = E_k(\mathbb{R}^n) \cap \{T / N(T) < \infty \text{ e } \text{supp } T \subset U\},$$

e o complexo de cadeias

$$N_*(U) = \bigoplus_k N_k(U).$$

Quando U é aberto, identificamos $N_k(U)$ com

$$E_k(U) \cap \{T / N(T) < \infty\}.$$

Seja $f:U \longrightarrow V$ infinitamente diferenciável, então pode-se mostrar que f induz uma aplicação $f_{\#}$

$$f_{\#} : N_k(U) \longrightarrow N_k(V) \text{ de modo}$$

análogo ao visto em 4.4.

Um resultado muito importante sobre estas correntes é o chamado Teorema da Deformação que enunciaremos a seguir.

Se $T \in N_k(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$, então existem $P \in N_k(\mathbb{R}^n)$, $Q \in N_k(\mathbb{R}^n)$ e $S \in N_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$1) \quad T = P + Q + \partial S$$

$$2) \quad M(P) \leq 2n^k \left[\binom{n}{k} M(T) + \binom{n}{k-1} \varepsilon \cdot M(\partial T) \right]$$

$$3) \quad M(\partial P) \leq 2n^{k-1} \binom{n}{k-1} M(\partial T)$$

$$4) \quad M(Q) \leq 6n^k \binom{n}{k-1} \varepsilon \cdot M(\partial T)$$

$$5) \quad M(S) \leq 4n^{k+1} \binom{n}{k} \varepsilon \cdot M(T)$$

6) P é cadeia poliedral com coeficientes reais

$$7) \quad \text{supp}(P) \cup \text{supp}(S) \subset \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, \text{supp } T) \leq 2n \varepsilon\}$$

$$8) \quad \text{supp}(\partial P) \cup \text{supp}(Q) \subset \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, \text{supp } \partial T) \leq 2n \varepsilon\}$$

Seja agora $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$. Para cada $\varepsilon > 0$ tomemos,

$$M_{\varepsilon}(\partial T) = \inf_{\substack{Q \in E_k(\mathbb{R}^n) \\ \text{supp } Q \text{ compacto}}} \{M(\partial Q) / M(T-Q) < \varepsilon\}$$

$$N_{\varepsilon}(T) = M(T) + M_{\varepsilon}(\partial T)$$

DEFINIÇÃO 4.5.2 - Uma corrente $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$ é σ - Normal se e sômente se para cada $\varepsilon > 0$, $N_{\varepsilon}(T) < \infty$.

De modo análogo ao que foi dito anteriormente para correntes normais obtemos o complexo de cadeias $N_*^{\sigma}(U)$ para cada conjunto aberto U do $\mathbb{R}^n$.

Em [8] prova-se $N_k^{\sigma}(U)$ é o fecho de $N_k(U)$ na norma

$$N_{\varepsilon}(T) = M(T) + M_{\varepsilon}(\partial T)$$

e além disso se U e V são abertos do $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente e $f : U \longrightarrow V$ é uma aplicação localmente lipschitziana, então f induz uma aplicação

$$f_{\#}^{\sigma} : N_*^{\sigma}(U) \longrightarrow N_*^{\sigma}(V);$$

e se $f|_{\text{supp } T}$ é própria então

1) $f_{\#}^{\sigma}$ é linear

2) Se f e g são aplicações localmente Lipschitzianas e

$f|_{\text{supp } T}$ e $g|_{\text{supp } f_{\#}^{\sigma}(T)}$ são próprias então

$$(g \circ f)_{\#}^{\sigma} = g_{\#}^{\sigma} \circ f_{\#}^{\sigma}$$

- o -

CAPÍTULO V

TEOREMA DA DEFORMAÇÃO

5.1 - CORRENTES α, β - NORMAIS

Dados os números $\varepsilon, \delta_1, \delta_2 > 0$ consideremos os seguintes números:

$$1) M_{\varepsilon}^{\delta_1}(\partial T) = \inf_{Q \in E_k(\mathbb{R}^n)} \{M(\partial Q), M(T-Q) < \varepsilon,$$

$\rho(\text{supp } T, \text{supp } Q) \leq \delta_1, \text{supp } Q \text{ compacto}\}$ onde ρ é a métrica de Hausdorff.

$$2) M_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) = \inf_{Q \in E_k(\mathbb{R}^n)} \{M(\partial Q), M(T-Q) < \varepsilon,$$

$\rho(\text{supp } T, \text{supp } Q) < \delta_1, (\text{supp } \partial T, \text{supp } \partial Q) < \delta_2, \text{supp } Q \text{ compacto}\},$

onde T é uma corrente de suporte compacto.

Nas condições anteriores definimos ainda:

$$N_{\varepsilon}(T) = M(T) + M_{\varepsilon}(\partial T)$$

$$N_{\varepsilon}^{\delta_1}(T) = M(T) + M_{\varepsilon}^{\delta_1}(\partial T)$$

$$N_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(T) = M(T) + M_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T).$$

Observe que:

$$N_{\varepsilon}(T) \leq N_{\varepsilon}^{\delta_1}(T) \leq N_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(T)$$

e além disso se, $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ então

$$N_{\varepsilon_1}(T) \leq N_{\varepsilon_2}(T);$$

$$N_{\varepsilon_1}^{\delta_1}(T) \leq N_{\varepsilon_2}^{\delta_1}(T);$$

$$N_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(T) \leq N_{\varepsilon_2}^{\delta_1, \delta_2}(T).$$

DEFINIÇÃO 5.1.1 - Seja $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$.

T é β -normal se T tem suporte compacto e para $\forall \varepsilon, \delta_1 > 0$,

$$N_{\varepsilon}^{\delta_1}(T) < +\infty.$$

DEFINIÇÃO 5.1.2 - T é α -normal se T tem suporte compacto e para $\forall \varepsilon, \delta_1, \delta_2 > 0$,

$$N_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(T) < +\infty.$$

Denotamos o conjunto das correntes β -normais por $N_k^{\beta}(\mathbb{R}^n)$ e o conjunto das correntes α -normais por $N_k^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Segue-se das relações entre os números $N_\varepsilon(T)$, $N_\varepsilon^{\delta_1}(T)$ e $N_\varepsilon^{\delta_1, \delta_2}(T)$ que :

$$N_k(\mathbb{R}^n) \subset N_k^\alpha(\mathbb{R}^n) \subset N_k^\beta(\mathbb{R}^n) \subset N_k^\sigma(\mathbb{R}^n).$$

- 0 -

5.2 - PROPRIEDADES DAS CORRENTES α , β -NORMAIS

Neste ítem demonstraremos algumas propriedades importantes das correntes α , β -normais.

TEOREMA 5.2.1 - $N_k^\beta(\mathbb{R}^n)$ é o fecho de $N_k(\mathbb{R}^n)$ na topologia dada pela métrica definida por:

$$d_1(T_1, T_2) = M(T_1 - T_2) + \rho(\text{supp } T_1, \text{supp } T_2)$$

onde ρ é a métrica de Hausdorff.

PROVA:

Seja $T \in N_k^\beta(\mathbb{R}^n)$.

Precisamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ tal que $d_1(T, T_1) < \varepsilon$. Como $T \in N_k^\beta(\mathbb{R}^n)$, dados $\frac{\varepsilon}{3}$ e $\frac{\varepsilon}{3}$, $N_{\varepsilon/3}^{\varepsilon/3}(T) < +\infty$ e portanto existe $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ tal que $M(T - T_1) < \frac{\varepsilon}{3}$, $\rho(\text{supp } T, \text{supp } T_1) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ e $M(\partial T_1) \leq M_{\varepsilon/3}^{\varepsilon/3}(\partial T) + 1 < +\infty$. De $M(T - T_1) < \frac{\varepsilon}{3} \implies M(T_1) < M(T) + \frac{\varepsilon}{3} < +\infty$. Concluimos então

que $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ e que

$$\begin{aligned} d_1(T, T_1) &= M(T - T_1) + \rho(\text{supp } T, \text{supp } T_1) < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $N_k^\beta(\mathbb{R}^n) \subset \text{fecho}_{d_1} N_k(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, dado $T \in \text{fecho}_{d_1} N_k(\mathbb{R}^n)$, para qualquer $\varepsilon_1 > 0$ existe $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ tal que $d_1(T, T_1) < \varepsilon_1$. Dados então $\varepsilon, \delta > 0$, quaisquer, existe $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ tal que $d_1(T, T_1) < \min(\varepsilon, \delta)$.

Portanto $M(T - T_1) < \min(\varepsilon, \delta) < \varepsilon$ e $\rho(\text{supp } T, \text{supp } T_1) < \min(\varepsilon, \delta) \leq \delta$. e assim $M_\varepsilon^\delta(\partial T) = \inf_{Q \in E_k(\mathbb{R}^n)} \{M(\partial Q), M(T - Q) < \varepsilon,$

$$\rho(\text{supp } T, \text{supp } T_1) \leq \delta\} \leq M(\partial T_1) < +\infty.$$

Concluimos portanto que $T \in N_k^\beta(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\text{fecho}_{d_1} N_k(\mathbb{R}^n) \subset N_k^\beta(\mathbb{R}^n). \quad \text{c.q.d.}$$

TEOREMA 5.2.2 - $N_k^\alpha(\mathbb{R}^n)$ é o fecho de $N_k(\mathbb{R}^n)$ na topologia dada pela métrica definida por:

$$\begin{aligned} d_2(T_1, T_2) &= M(T_1 - T_2) + \rho(\text{supp } T_1, \text{supp } T_2) + \\ &+ \rho(\text{supp } \partial T_1, \text{supp } \partial T_2). \end{aligned}$$

PROVA:

Seja $T \in N_k^\alpha(\mathbb{R}^n)$. Precisamos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ tal que $d_2(T_1, T) < \varepsilon$. Como $T \in N_k^\alpha(\mathbb{R}^n)$ dados $\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}$, $N_{\varepsilon/4}^{\varepsilon/4}(T) < +\infty$ e portanto existe $T_1 \in E_k(\mathbb{R}^n)$ tal que $M(T - T_1) < \frac{\varepsilon}{4}$, $\rho(\text{supp } T, \text{supp } T_1) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ e $\rho(\text{supp } \partial T, \text{supp } \partial T_1) \leq \frac{\varepsilon}{4}$, com

$$M(\partial T_1) \leq M_{\varepsilon/4}^{\varepsilon/4, \varepsilon/4}(\partial T) + 1 < +\infty.$$

$$\text{De } M(T - T_1) < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow M(T_1) < M(T) + \frac{\varepsilon}{3} < +\infty.$$

Concluimos então que $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$. Além disso

$$\begin{aligned} d_2(T, T_1) &= M(T - T_1) + \rho(\text{supp } T, \text{supp } T_1) + \\ &+ \rho(\text{supp } \partial T, \text{supp } \partial T_1) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $N_k^\alpha(\mathbb{R}^n) \subset \text{fecho}_{d_1} N_k(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, dado $T \in \text{fecho}_{d_2} N_k(\mathbb{R}^n)$, para qualquer $\varepsilon_1 > 0$ existe $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ tal que $d_2(T, T_1) < \varepsilon_1$.

Dados, então, $\forall \varepsilon, \delta_1, \delta_2 > 0$, existe $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ tal que $d_2(T, T_1) < \min(\varepsilon, \delta_1, \delta_2)$. Portanto $M(T - T_1) < \min(\varepsilon, \delta_1, \delta_2) \leq \varepsilon$;

$$\rho(\text{supp } T, \text{supp } T_1) \leq \min(\varepsilon, \delta_1, \delta_2) \leq \delta_1 \text{ e}$$

$$\rho(\text{supp } \partial T, \text{supp } \partial T_1) < \min(\varepsilon, \delta_1, \delta_2) \leq \delta_2,$$

e assim

$$M_{\varepsilon}^{\delta}(\partial T) = \inf_{Q \in E_k(\mathbb{R}^n)} \{M(\partial Q), M(T-Q) < \varepsilon\},$$

$$\rho(\text{supp } T, \text{supp } T_1) \leq \delta_1,$$

$$\rho(\text{supp } \partial T, \text{supp } \partial T_1) \leq \delta_2 \} \leq$$

$$\leq M(\partial T_1) < +\infty.$$

Concluimos portanto que $T \in N_k^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $\text{fecho}_{d_2 N_k}(\mathbb{R}^n) \subset N_k^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. c.q.d.

TEOREMA 5.2.3 - Se $T \in N_k^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon, \delta_1, \delta_2 > 0$, então

$$M_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) = \inf_{Q \in N_k(\mathbb{R}^n)} \{M(\partial Q), M(Q-T) < \varepsilon,$$

$$\rho(\text{supp } T, \text{supp } Q) < \delta_1,$$

$$\rho(\text{supp } \partial T, \text{supp } \partial Q) < \delta_2,$$

$$\text{supp } Q \text{ compacto}\}$$

PROVA :

Por definição:

$$M_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) = \inf_{Q \in E_k(\mathbb{R}^n)} \{M(\partial Q), M(Q-T) < \varepsilon,$$

$$\rho(\text{supp } T, \text{supp } Q) < \delta_1,$$

$$\rho(\text{supp } \partial T, \text{supp } \partial Q) < \delta_2 ,$$

$$\text{supp } Q \text{ compacto} \} \quad e$$

$$M_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) < +\infty .$$

Como $M(T) < +\infty$ segue-se que para os Q que entram no cálculo de $M_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T)$, $M(Q-T) < \varepsilon$ implica $M(Q) - M(T) < \varepsilon$ e portanto $M(Q) < M(T) + \varepsilon$, ou seja $M(Q) < +\infty$. Além disso, obviamente, todo Q que entra efetivamente no cálculo do ínfimo tem $M(\partial Q) < +\infty$. Concluimos portanto que aqueles Q que entram efetivamente no cálculo do ínfimo pertencem a $N_k(\mathbb{R}^n)$.

TEOREMA 5.2.4 - Se $T \in N_k^{\beta}(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon, \delta_1 > 0$, então:

$$M_{\varepsilon}^{\delta_1}(\partial T) = \inf_{Q \in N_k(\mathbb{R}^n)} \{M(\partial Q), M(T-Q) < \varepsilon ,$$

$$\rho(\text{supp } T, \text{supp } Q) < \delta_1, \text{supp } Q \text{ compacto} \} .$$

PROVA:

(totalmente análoga à anterior).

TEOREMA 5.2.5 - Se $T \in N_k^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$, então:

$$M_{\varepsilon}(\partial T) = \inf_{Q \in N_k(\mathbb{R}^n)} \{M(\partial Q), M(T-Q) < \varepsilon ,$$

$$\text{supp } Q \text{ compacto} \} .$$

PROVA:

(totalmente análoga ao Teor. 5.2.3).

TEOREMA 5.2.6 - Seja $\delta_1, \delta_2 > 0$ e $T \in N_k^\alpha(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \{M_\varepsilon^{\delta_1, \delta_2}(\partial T)\} < +\infty.$$

Então $T \in N_k(\mathbb{R}^n)$

(ou seja, se $\delta_1, \delta_2 > 0$, $T \in N_k^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e $T \notin N_k(\mathbb{R}^n)$ então dado $M_0 > 0$, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $M_\varepsilon^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) > M_0$).

PROVA:

Seja uma sequência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tal que $M_{\varepsilon_n}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) < K$ (constante) para todo n . Existe então $T_n \in N_k(\mathbb{R}^n)$ (pelo Teorema 5.2.3) tal que $M(T - T_n) < \varepsilon_n$, $M(\partial T_n) \leq M_{\varepsilon_n}(\partial T) + 1 < K + 1$.

Mas, por definição

$$M(T - T_n) = \sup \left\{ \frac{(T - T_n)(\varphi)}{M(\varphi)} \mid 0 \neq \varphi \in E^k(\mathbb{R}^n) \right\}$$

e portanto $(T - T_n)(\varphi) \leq M(T - T_n) \cdot M(\varphi) \leq \varepsilon_n M(\varphi)$.

Então, para cada $\varphi \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$, onde $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das k -formas de suporte compacto, temos que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ implica

$$T_n(\varphi) \longrightarrow T(\varphi) \quad (\text{pois } M(\varphi) < +\infty).$$

Como $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$ é denso em $E^k(\mathbb{R}^n)$, T e T_n são contínuas na topologia fraca (definição de corrente) então $T_n(\varphi) \longrightarrow T(\varphi)$ para $\forall \varphi \in E^k(\mathbb{R}^n)$ e portanto

$$T_n \longrightarrow T \quad \text{fracamente.}$$

Como ∂ é contínua na topologia fraca, temos

$$\partial T_n \longrightarrow \partial T \quad \text{fracamente}$$

e portanto para cada $\varphi \in E^k(\mathbb{R}^n)$ tal que $N(\varphi) \leq 1$, como

$$\partial T_n(\varphi) \longrightarrow \partial T(\varphi), \quad \text{existe } n_{\varphi} \in \mathbb{N}$$

tal que

$$\begin{aligned} \partial T(\varphi) &\leq \partial T_{n_{\varphi}}(\varphi) + 1 \leq \\ &\leq M(\partial T_{n_{\varphi}}) \cdot N(\varphi) + 1 \leq \\ &\leq M(\partial T_{n_{\varphi}}) + 1 \leq K + 1 + 1 = \\ &= K + 2. \end{aligned}$$

Então

$$M(\partial T) = \sup \{ (\partial T(\phi), M(\phi) \leq 1) \leq \\ \leq K + 2 < +\infty$$

e portanto $T \in N_k(\mathbb{R}^n)$.

TEOREMA 5.2.7 - Seja $\delta_1 > 0$ e $T \in N_k^\beta(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \{ M_{\varepsilon}^{\delta_1}(\partial T) \} < +\infty.$$

Então $T \in N_k(\mathbb{R}^n)$

(ou seja, se $T \in N_k^\beta(\mathbb{R}^n)$ e $T \notin N_k(\mathbb{R}^n)$ então para qualquer $M_0 > 0$, existe $\varepsilon < 0$ suficientemente pequeno tal que

$$M_{\varepsilon}^{\delta}(\partial T) > M_0).$$

PROVA:

(a mesma que a anterior) ,

TEOREMA 5.2.8 - Seja $T \in N_k^\sigma(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ M_{\varepsilon}(\partial T) \} < +\infty$.

Então $T \in N_k(\mathbb{R}^n)$

(ou seja, se $T \in N_k^\sigma(\mathbb{R}^n)$ e $T \notin N_k(\mathbb{R}^n)$ então para qualquer $M_0 > 0$ existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $M_{\varepsilon}^{\delta}(\partial T) > M_0$),

PROVA:

(a mesma do Teor. 5.2.6) .

TEOREMA 5.2.9 - Se $T \in N_k^\alpha(\mathbb{R}^n)$, $T \notin N_k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 2$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$ e $0 < \delta_1 < \delta_3$ e $0 < \delta_2 < \delta_4$, temos

$$M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) > M_{\varepsilon_2}^{\delta_3, \delta_4}(\partial T).$$

PROVA:

Usando o Teorema 5.2.6 podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que $M_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) > 0$ (e portanto $M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) > M_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) > 0$).

Assim, dado ε_1 , existe $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ (Teor. 5.2.3) com suporte de T_1 compacto e $M(T - T_1) < \varepsilon_1$ (o que implica $M(T_1) \leq M(T) + \varepsilon_1$),

$$\rho(\text{supp } T, \text{supp } T_1) < \delta_1,$$

$$\rho(\text{supp } \partial T, \text{supp } \partial T_1) < \delta_2 \quad \text{e}$$

ainda com $M(\partial T_1) = M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) + r$ com r suficientemente pequeno

para que sejam satisfeitas as desigualdades:

$$(1) \quad 1 - \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{M(T) + \varepsilon_1} \right) \frac{1}{k} < \left(\frac{M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T)}{\delta_1, \delta_2(\partial T) + r} \right) \frac{1}{k-1}$$

$$(2) \quad 1 - \left(\frac{\delta_3 - \delta_1}{\ell} \right) < \left(\frac{M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T)}{\delta_1, \delta_2(\partial T) + r} \right) \frac{1}{k-1}$$

$$(3) \quad 1 - \left(\frac{\delta_4 - \delta_2}{\ell} \right) < \left(\frac{M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T)}{\delta_1, \delta_2(\partial T) + r} \right) \frac{1}{k-1}$$

onde $\ell = \max \{ |x| / d(x, \text{supp } T) \leq \max(\delta_3, \delta_4) \}$

(tal ℓ existe pois o conjunto é compacto).

Evidentemente $\ell > 0$.

Nestas condições, como $\rho(\text{supp } T, \text{supp } T_1) \leq \delta_1 < \delta_3$, então

$$\begin{aligned} \text{supp}(T_1) &\subset \{ |x| / d(x, \text{supp } T) \leq \\ &\leq \max(\delta_3, \delta_4) \} \quad \text{e portanto} \end{aligned}$$

$$\ell \geq \max_{y \in \text{supp } T_1} \{ |y| \} \quad \text{e,}$$

$$\text{analogamente} \quad \ell \geq \max_{y \in \text{supp } \partial T_1} \{ |y| \}.$$

Dados então $\varepsilon > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$, queremos exibir $T_2 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$M(T-T_2) < \varepsilon_2, \quad M(\partial T_2) < M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T),$$

$$\rho(\text{supp } T, \text{supp } T_2) < \delta_3 \quad \text{e}$$

$$\rho(\text{supp } \partial T, \text{supp } \partial T_2) < \delta_4.$$

Façamos $T_2 = \mu_\delta(T_1)$ onde μ_δ é uma homotetia de razão de semelhança $\delta > 0$ tal que

$$(*) \quad 1 - \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{M(T) + \varepsilon_1} \right)^{\frac{1}{k}} < \delta < \left(\frac{M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T)}{M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) + \varepsilon} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$(**) \quad 1 - \left(\frac{\delta_3 - \delta_1}{\ell} \right) \leq \delta$$

$$(***) \quad 1 - \left(\frac{\delta_4 - \delta_2}{\ell} \right) \leq \delta.$$

Temos então

$$\begin{aligned} M(T-T_2) &= M(T-\mu_\delta T_1) = \\ &= M(T-T_1 + T_1 - \mu_\delta T_1) \leq \\ &\leq M(T-T_1) + M((1-\mu_\delta)T_1) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon_1 + (1-\delta)^k M(T_1) \leq$$

$$\leq \varepsilon_1 + (1-\delta)^k (M(T) + \varepsilon_1).$$

De (*) - parte esquerda - vem que

$$(1-\delta)^k < \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{M(T) + \varepsilon_1}, \text{ ou seja,}$$

$$(1-\delta)^k (M(T) + \varepsilon_1) < \varepsilon_2 - \varepsilon_1. \text{ Assim}$$

$$M(T - T_2) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

$$\text{Ainda } M(\partial T_2) = M(\partial(\mu_\delta T_1)) = M(\mu_\delta(\partial T_1)) = \delta^{k-1} M(\partial T_1) \text{ e}$$

de (*) - parte direita - vem que

$$\delta^{k-1} < \frac{M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T)}{M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) + r} \text{ e portanto}$$

$$M(\partial T_2) < \frac{M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T)}{M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) + r} \cdot M(\partial T_1) =$$

$$= M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T).$$

Ainda

$$\begin{aligned}
 \rho(\text{supp } T, \text{supp } T_2) &= \rho(\text{supp } T, \text{supp } \mu_\delta T_1) = \\
 &= \rho(\text{supp } T, \mu_\delta \text{supp } T_1) \leq \\
 &\leq \rho(\text{supp } T, \text{supp } T_1) + (1-\delta) \max_{y \in \text{supp } T_1} \{|y|\} \leq \\
 &\leq \delta_1 + (1-\delta) \cdot \ell
 \end{aligned}$$

e de (***) - parte esquerda-vem que $(1-\delta) \cdot \ell \leq \delta_3 - \delta_1$ e portanto

$$\rho(\text{supp } T, \text{supp } T_2) \leq \delta_1 + \delta_3 - \delta_1 = \delta_3.$$

Analogamente, usando (***) - parte esquerda - vem que

$$\rho(\text{supp } \partial T, \text{supp } \partial T_2) \leq \delta_4.$$

Concluimos portanto que

$$M_{\varepsilon_2}^{\delta_3, \delta_4}(\partial T) < M_{\varepsilon_1}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T).$$

UNICAMP
BIBLIO - CENTRO

TEOREMA 5.2.10 - Se $T \in N_k^\beta(\mathbb{R}^n)$ e $T \notin N_k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 2$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$ e $0 < \delta_1 < \delta_2$ temos

$$M_{\varepsilon_1}^{\delta_1}(\partial T) > M_{\varepsilon_2}^{\delta_2}(\partial T).$$

PROVA:

Análoga à do Teorema anterior escolhendo para razão de homotopia $\delta > 0$ satisfazendo apenas as desigualdades

$$(*) \quad 1 - \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{M(T) + \varepsilon_1} \right)^{\frac{1}{k}} < \delta < \left(\frac{M_{\varepsilon_1}^{\delta_1}(\partial T)}{M_{\varepsilon_1}^{\delta_1}(\partial T) + r} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$(**) \quad 1 - \left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\ell} \right) \leq \delta.$$

TEOREMA 5.2.11 - Se $T \in N_k^\sigma(\mathbb{R}^n)$, $T \notin N_k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 2$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$ temos

$$M_{\varepsilon_1}(\partial T) > M_{\varepsilon_2}(\partial T).$$

PROVA:

Análoga à do Teorema anterior, escolhendo para razão de homotetia $\delta > 0$ satisfazendo apenas

$$1 - \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{M(T) + \varepsilon_1} \right)^{\frac{1}{k}} < \delta < \left(\frac{M_{\varepsilon_1}(\partial T)}{M_{\varepsilon_1}(\partial T) + r} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

— o —

5.3 - TEOREMAS DA DEFORMAÇÃO

Nesta secção estenderemos o Teorema da deformação para as correntes σ, β, α -normais.

TEOREMA 5.3.1 - Seja $T \in N_k^\sigma(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 2$ e $T \notin N_k(\mathbb{R}^n)$. Existe, então, $r > 0$ tal que para qualquer $0 < \varepsilon < r$, podemos encontrar $P \in N_k(\mathbb{R}^n)$, $Q \in N_k^\sigma(\mathbb{R}^n)$ e $S \in N_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ tais que:

$$1) \quad T = P + Q + \partial S$$

$$2) \quad M(P) \leq 2 n^k \left[\binom{n}{k} M(T) + \binom{n}{k-1} \varepsilon \cdot M_\varepsilon(\partial T) \right]$$

$$3) \quad M(\partial P) \leq 2 n^{k-1} \binom{n}{k-1} M_\varepsilon(\partial T)$$

$$4) \quad M(Q) \leq 6 n^k \binom{n}{k-1} \varepsilon \cdot M_\varepsilon(\partial T)$$

$$5) \quad M(S) \leq 4 n^k \binom{n}{k} \varepsilon \cdot M(T)$$

6) P é uma cadeia poliedral com coeficientes reais.

PROVA:

Consideremos $r > 0$ tal que valham os resultados dos Teoremas 5.2.8 e 5.2.11. Mais explicitamente, tal que para qualquer $0 < \varepsilon < r$, tenhamos

$$(*) \quad M_{\varepsilon}(\partial T) > M_{\frac{3\varepsilon}{2}}(\partial T) > M_{2\varepsilon}(\partial T) \geq$$

$$\geq \frac{n - k + 1}{k} \cdot \varepsilon$$

Pelo Teorema 5.2.5, podemos, então encontrar $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$M(T - T_1) < \frac{3}{2} \varepsilon \quad (\text{e portanto } M(T_1) \leq$$

$$\leq M(T) + \frac{3}{2} \varepsilon) \quad \text{e}$$

$$M(\partial T_1) < M_{\frac{3\varepsilon}{2}}(\partial T) + \Lambda, \quad \text{com}$$

$$\Lambda = M_{\varepsilon}(\partial T) - M_{\frac{3\varepsilon}{2}}(\partial T) \\ \frac{\quad}{2} < M_{\varepsilon}(\partial T) - M_{\frac{3\varepsilon}{2}}(\partial T).$$

Portanto temos:

$$\begin{aligned}
 (**) \quad M(\partial T_1) &< M_{\frac{3\varepsilon}{2}}(\partial T) + M_\varepsilon(\partial T) - \\
 &- M_{\frac{3\varepsilon}{2}}(\partial T) = M_\varepsilon(\partial T).
 \end{aligned}$$

Seja agora

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_2 &= \inf \left\{ \varepsilon - \frac{3}{2} \varepsilon \cdot \frac{n-k+1}{k M_\varepsilon(\partial T)}, \right. \\
 &\left. \varepsilon - \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{6 n^k \binom{n}{k-1} M_\varepsilon(\partial T)}, \frac{M(T) \cdot \varepsilon}{M(T) + \frac{3\varepsilon}{2}} \right\}.
 \end{aligned}$$

A condição (*) garante que $\varepsilon_2 > 0$. Como $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$, usando o teorema da deformação para correntes normais, com ε_2 , existem $P \in N_k(\mathbb{R}^n)$, $Q_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ e $S \in N_{k+1}(\mathbb{R}^n)$

tais que

$$(1) \quad T_1 = P + Q_1 + \partial S$$

$$(2) \quad M(P) \leq 2n^k \left[\binom{n}{k} M(T_1) + \binom{n}{k-1} \varepsilon_2 \cdot M(\partial T_1) \right]$$

$$(3) \quad M(\partial P) \leq 2n^k \binom{n}{k-1} M(\partial T_1)$$

$$(4) \quad M(Q_1) \leq 6n^k \binom{n}{k-1} M(\partial T_1) \cdot \varepsilon_2$$

$$(5) \quad M(S) \leq 4n^k \binom{n}{k} M(T_1) \cdot \varepsilon_2$$

(6) P é uma cadeia poliedral com coeficientes reais.

Podemos escrever então

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T - T_1 = P + Q_1 + \partial S + T - T_1 = \\ &= P + (Q_1 + T - T_1) + \partial S \quad \text{e fazendo} \end{aligned}$$

$$Q = Q_1 + T - T_1, \quad \text{concluimos que existem}$$

$$P \in N_k(\mathbb{R}^n), \quad Q \in N_k^\sigma(\mathbb{R}^n) \quad \text{e}$$

$$S \in N_{k+1}(\mathbb{R}^n) \quad \text{tais que}$$

$$(1) \quad T = P + Q + \partial S.$$

Além disso:

$$\begin{aligned} (2) \quad M(P) &\leq 2n^k \left[\binom{n}{k} M(T_1) + \binom{n}{k-1} \varepsilon_2 \cdot M(\partial T_1) \right] \\ &\leq 2n^k \left[\binom{n}{k} (M(T) + \frac{3}{2} \varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + \binom{n}{k-1} \left(\varepsilon - \frac{3}{2} \varepsilon \cdot \frac{n-k+1}{k M_\varepsilon(\partial T)} \right) M_\varepsilon(\partial T) \right] \\ &= 2n^k \left[\binom{n}{k} M(T) + \binom{n}{k-1} \varepsilon \cdot M_\varepsilon(\partial T) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \binom{n}{k} \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{3}{2} \varepsilon \cdot \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}]$$

mas

$$\frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k}$$

e portanto

$$M(P) \leq 2n^k \left[\binom{n}{k} M(T) + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{k-1} \varepsilon \cdot M_{\varepsilon}(\partial T) \right]$$

$$(3) \quad M(\partial P) \leq 2n^k \binom{n}{k-1} M(\partial T_1) \leq$$

$$\leq 2n^k \binom{n}{k-1} M_{\varepsilon}(\partial T)$$

usando (**)

$$(4) \quad M(Q) = M(Q_1 + T - T_1) \leq$$

$$\leq M(Q_1) + M(T - T_1) \leq$$

$$\leq 6n^k \binom{n}{k-1} M(\partial T_1) \cdot \varepsilon_2 + \frac{3}{2} \varepsilon$$

$$\leq 6n^k \binom{n}{k-1} M_{\varepsilon}(\partial T) \cdot \varepsilon_2 + \frac{3}{2} \varepsilon$$

$$\leq 6n^k \binom{n}{k-1} M_{\varepsilon}(\partial T)$$

$$= \left(\varepsilon - \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{6n^k \binom{n}{k-1} M_{\varepsilon}(\partial T)} \right) + \frac{3}{2} \varepsilon$$

$$= 6n^k \binom{n}{k-1} M_\varepsilon(\partial T) \cdot \varepsilon$$

$$\begin{aligned} (5) \quad M(S) &\leq 4n^k \binom{n}{k} M(T_1) \cdot \varepsilon_2 \leq \\ &\leq 4n^k \binom{n}{k} (M(T) + \frac{3}{2}\varepsilon) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{M(T) \cdot \varepsilon}{M(T) + \frac{3\varepsilon}{2}} \\ &\leq 4n^k \binom{n}{k} M(T) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

(6) P é poliedral com coeficientes reais por causa de (6)

TEOREMA 5.3.2 - Seja $T \in N_k^\beta(\mathbb{R}^n)$, $T \notin N_k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 2$ e $\delta > 0$. Existe, então $r > 0$ tal que para qualquer $0 < \varepsilon < r$, podemos encontrar $P \in N_k(\mathbb{R}^n)$, $Q \in N_k^\beta(\mathbb{R}^n)$ e $S \in N_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$(1) \quad T = P + Q + \partial S$$

$$(2) \quad M(P) \leq 2n^k \left[\binom{n}{k} M(T) + \binom{n}{k-1} \varepsilon \cdot M_\varepsilon^\delta(\partial T) \right]$$

$$(3) \quad M(\partial P) \leq 2n^{k-1} \binom{n}{k-1} M_\varepsilon^\delta(\partial T)$$

$$(4) \quad M(Q) \leq 6n^k \binom{n}{k-1} \varepsilon \cdot M_\varepsilon^\delta(\partial T)$$

$$(5) \quad M(S) \leq 4n^k \binom{n}{k} \varepsilon \cdot M(T)$$

(6) P é cadeia poliedral com coeficientes reais

$$(7) \quad \text{supp } (P) \cup \text{supp } (S) \subset \{x / d(x, \text{supp } T) \leq 2\delta\}$$

$$(8) \text{ supp } (\partial P) \cup \text{ supp } (Q) \subset \{x / d(x, \text{ supp } T) \leq 2\delta\}.$$

PROVA:

Consideremos $r > 0$ tal que valham os resultados dos Teoremas 5.2.7 e 5.2.10. Mais explicitamente, tal que para qualquer $0 < \varepsilon < r$ tenhamos

$$(*) \quad M_{\varepsilon}^{\delta}(\partial T) > M_{\frac{3}{2}\varepsilon}^{\frac{3}{2}\delta}(\partial T) > M_{2\varepsilon}^{2\delta}(\partial T) \geq \frac{n-k+1}{k} \cdot 3.$$

Pelo Teorema 5.2.4, podemos encontrar, então, $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ tal que $M(T - T_1) < \frac{3}{2} \varepsilon$ (e portanto $M(T_1) \leq M(T) + \frac{3}{2} \varepsilon$),

$$\rho(\text{supp } T, \text{ supp } T_1) \leq \frac{3}{2} \delta \quad \text{e}$$

$$M(\partial T_1) \leq M_{\frac{3}{2}\varepsilon}^{\frac{3}{2}\delta}(\partial T) + \Delta, \text{ com}$$

$$\Delta = \frac{M_{\varepsilon}^{\delta}(\partial T) - M_{\frac{3}{2}\varepsilon}^{\frac{3}{2}\delta}(\partial T)}{2} <$$

$$< M_{\varepsilon}^{\delta}(\partial T) - M_{\frac{3}{2}\varepsilon}^{\frac{3}{2}\delta}(\partial T).$$

Temos portanto,

$$(**) \quad M(\partial T_1) <$$

$$< M_{\frac{3}{2}\varepsilon}^{\frac{3}{2}\delta}(\partial T) + M_{\varepsilon}^{\delta}(\partial T) - M_{\frac{3}{2}\varepsilon}^{\frac{3}{2}\delta}(\partial T) =$$

$$= M_{\varepsilon}^{\delta}(\partial T).$$

Seja agora

$$\varepsilon_2 = \inf \left\{ \varepsilon - \frac{3}{2} \varepsilon \cdot \frac{n-k+1}{k_{\varepsilon} N^{\delta}(\partial T)} \right\},$$

$$\varepsilon - \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{6n^k \binom{n}{k-1} M_{\varepsilon}^{\delta}(\partial T)},$$

$$\left\{ \frac{M(T)}{M(T) + \frac{3}{2}\varepsilon}, \frac{\delta}{4n} \right\}.$$

A condição (*) garante que $\varepsilon_2 > 0$. Como $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$, usando o Teorema da Deformação para correntes normais, com ε_2 , existem $P \in N_k(\mathbb{R}^n)$, $Q_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ e $S \in N_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$(1) \quad T_1 = P + Q_1 + \partial S$$

$$(2) \quad M(P) \leq 2n^k \left[\binom{n}{k} M(T_1) + \binom{n}{k-1} \varepsilon_2 \cdot M(\partial T_1) \right]$$

$$(3) \quad M(\partial P) \leq 2n^k \binom{n}{k-1} M(\partial T_1)$$

$$(4) \quad M(Q_1) \leq 6n^k \binom{n}{k-1} M(\partial T_1) \cdot \varepsilon_2$$

$$(5) \quad M(S) \leq 4n^k \binom{n}{k} M(T_1) \cdot \varepsilon_2$$

(6) P é uma cadeia poliedral com coeficientes reais

$$(7) \text{ supp } (P) \cup \text{ supp } (S) \subset \{x / d(x, \text{ supp } T_1) \leq 2n \varepsilon_2\}$$

$$(8) \text{ supp } (\partial P) \cup \text{ supp } (Q_1) \subset \{x/d(x, \text{ supp } \partial T_1) \leq 2n \varepsilon_2\}.$$

Podemos escrever então

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T - T_1 = P + Q_1 + \partial S + T - T_1 = \\ &= P + (Q_1 + T - T_1) + \partial S \end{aligned}$$

e chamando

$$Q = Q_1 + T - T_1,$$

concluimos que existem

$$P \in N_k(\mathbb{R}^n), \quad Q \in N_k^\beta(\mathbb{R}^n) \text{ e } S \in N_{k+1}(\mathbb{R}^n)$$

tais que

$$(1) \quad T = P + Q + \partial S.$$

Além disso mostram-se (2), (3), (4), (5) e (6) com os mesmos argumentos utilizados nas demonstrações dos itens correspondentes do teorema 5.3.1. Falta apenas provar (7) e (8). Para isto, observemos que como $\text{supp } T_1$ é compacto, existe $y_0 \in \text{supp } T_1$ tal que

$$d(x, y_0) = d(x, \text{supp } T_1) \leq 2n \varepsilon_2$$

para cada $x \in \{x / d(x, \text{supp } T_1) \leq 2n \varepsilon_2\}$.

Por outro lado, como

$$p(\text{supp } T, \text{supp } T_1) \leq \frac{3}{2}\delta,$$

por definição de distância de Hausdorff, isto implica

$$d(y_0, \text{supp } T) \leq \frac{3}{2} \delta.$$

Então, para cada

$$x \in \{x / d(x, \text{supp } T_1) \leq 2n \varepsilon_2\},$$

temos

$$d(x, \text{supp } T) \leq d(x, y_0) + d(y_0, \text{supp } T) \leq$$

$$\leq 2n \varepsilon_2 + \frac{3}{2}\delta \leq 2n \frac{\delta}{4n} + \frac{3}{2}\delta = 2\delta.$$

Ainda,

$$\text{supp } (\partial P) \cup \text{supp } (Q) =$$

$$= \text{supp } (\partial P) \cup \text{supp } (Q_1 + T - T_1) \subset$$

$$\subset \text{supp } (\partial P) \cup \text{supp } (Q_1) \cup \text{supp}(T) \cup$$

$$\cup \text{supp } (T_1)$$

$$\subset \{x / d(x, \text{supp } \partial T_1) \leq 2n \varepsilon_2\} \cup$$

$$\cup \text{supp } (T) \cup \text{supp } (T_1)$$

$$\subset \{x/d(x, \text{supp } T_1) \leq 2n \varepsilon_2\} \cup \text{supp}(T)$$

$$\cup \text{supp}(T_1)$$

e pelo mesmo argumento anterior, vem

$$\subset \{x/d(x, \text{supp } T) \leq 2\delta\}.$$

TEOREMA 5.3.3 - Seja $T \in N_k^\alpha(\mathbb{R}^n)$, $T \notin N_k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 2$, $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$. Existe então $r > 0$ tal que para qualquer $0 < \varepsilon < r$, podemos encontrar $P \in N_k(\mathbb{R}^n)$, $Q \in N_k^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e $S \in N_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$(1) \quad T = P + Q + \partial S$$

$$(2) \quad M(P) \leq 2n^k \binom{n}{k} M(T) + \binom{n}{k-1} \varepsilon \cdot M_\varepsilon^{\delta_1, \delta_2}(\partial T)$$

$$(3) \quad M(\partial P) \leq 2n^{k-1} \binom{n}{k-1} M_\varepsilon^{\delta_1, \delta_2}(\partial T)$$

$$(4) \quad M(Q) \leq 6n^k \binom{n}{k-1} \varepsilon \cdot M_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T)$$

$$(5) \quad M(S) \leq 4n^k \binom{n}{k} \varepsilon \cdot M(T)$$

(6) P é uma cadeia poliedral com coeficientes reais

$$(7) \quad \text{supp } (P) \cup \text{supp}(S) \subset \{x \mid d(x, \text{supp } T) \leq 2\delta_1\}$$

$$(8) \quad \text{supp } (\partial P) \cup \text{supp}(Q) \subset \{x \mid d(x, \text{supp } T) \leq 2\delta_1\}$$

$$(9) \quad \text{supp } (\partial P) \cup \text{supp}(\partial Q) \subset \{x \mid d(x, \text{supp } \partial T) \leq 2\delta_2\}$$

PROVA:

Consideremos $r > 0$ tal que valham os resultados dos Teoremas 5.2.6 e 5.2.9. Mais explicitamente, tal que para qualquer $0 < \varepsilon < r$ tenhamos

$$(*) \quad M_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) > M_{\frac{3}{2}\varepsilon}^{\frac{3}{2}\delta_1, \frac{3}{2}\delta_2} >$$

$$> M_{2\varepsilon}^{2\delta_1, 2\delta_2}(\partial T) \geq \frac{n-k+1}{k} \cdot 3.$$

Pelo Teorema 5.2.3, podemos encontrar, então,

$$T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$$

tal que

$$M(T - T_1) < \frac{3}{2} \varepsilon$$

(e portanto $M(T_1) \leq M(T) + \frac{3}{2} \varepsilon$),

$$\rho(\text{supp } T, \text{supp } T_1) \leq \frac{3}{2} \delta_1,$$

$$\rho(\text{supp } \partial T, \text{supp } \partial T_1) \leq \frac{3}{2} \delta_2 \quad e$$

$$M(\partial T_1) \leq M_{\frac{3}{2}\varepsilon}^{\frac{3}{2}\delta_1, \frac{3}{2}\delta_2}(\partial T) + \Delta, \quad \text{com}$$

$$\Delta = \frac{M_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) - M_{\frac{3}{2}\varepsilon}^{\frac{3}{2}\delta_1, \frac{3}{2}\delta_2}(\partial T)}{2} <$$

$$< M_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T) - M_{\frac{3}{2}\varepsilon}^{\frac{3}{2}\delta_1, \frac{3}{2}\delta_2}(\partial T).$$

Temos portanto

$$(**) \quad M(\partial T_1) < M_{\varepsilon}^{\delta_1, \delta_2}(\partial T).$$

Seja agora

$$\varepsilon_2 = \inf \left\{ \varepsilon - \frac{3}{2} \varepsilon \cdot \frac{n - k + 1}{k M_\varepsilon^{\delta_1, \delta_2}(\partial T)} \right\},$$

$$, \quad \varepsilon - \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{6n^k \binom{n}{k-1} M_\varepsilon^{\delta_1, \delta_2}(\partial T)},$$

$$, \quad \frac{M(T) \cdot \varepsilon}{M(T) + \frac{3}{2} \varepsilon}, \quad \frac{\delta_1}{4n}, \quad \frac{\delta_2}{4n} \}.$$

A condição (*) garante que $\varepsilon_2 > 0$. Como $T_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$, usando o Teorema da deformação para correntes normais, com ε_2 , existem $P \in N_k(\mathbb{R}^n)$, $Q_1 \in N_k(\mathbb{R}^n)$ e $S \in N_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$(1) \quad T_1 = P + Q_1 + \partial S$$

$$(2) \quad M(P) \leq 2n^k \left[\binom{n}{k} M(T_1) + \binom{n}{k-1} \varepsilon_2 \cdot M(\partial T_1) \right]$$

$$(3) \quad M(\partial P) \leq 2n^k \binom{n}{k-1} M(\partial T_1)$$

$$(4) \quad M(Q_1) \leq 6n^k \binom{n}{k-1} M(\partial T_1) \cdot \varepsilon_2$$

$$(5) \quad M(S) \leq 4n^k \binom{n}{k} M(T_1) \cdot \varepsilon_2$$

$$(6) \quad P \text{ é uma cadeia poliedral com coeficientes reais}$$

$$(7) \quad \text{supp}(P) \cup \text{supp}(S) \subset \{x \mid d(x, \text{supp } T_1) \leq 2n \varepsilon_2\}$$

$$(8) \quad \text{supp}(\partial P) \cup \text{supp}(Q_1) \subset \{x \mid d(x, \text{supp } \partial T_1) \leq 2n \varepsilon_2\}.$$

Podemos escrever então

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T - T_1 = P + Q_1 + \partial S + T - T_1 = \\ &= P + (Q_1 + T - T_1) + \partial S \end{aligned}$$

e chamando

$$Q = Q_1 + T - T_1,$$

concluimos que existem $P \in N_k(\mathbb{R}^n)$, $Q \in N_k^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e $S \in N_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$(1) \quad T = P + Q + \partial S$$

e, além disso, mostram-se (2), (3), (4), (5), (6), (7) e (8) com os mesmos argumentos utilizados nas demonstrações dos itens correspondentes do Teorema 5.3.2. Falta provar apenas o item (9).

Para isto:

$$\text{supp}(\partial P) \cup \text{supp}(\partial Q) =$$

$$= \text{supp}(\partial P) \cup \text{supp}(\partial Q_1 + \partial T - \partial T_1) \subset$$

$$\begin{aligned}
& \subset \text{supp}(\partial P) \cup \text{supp}(\partial Q_1) \cup \text{supp}(\partial T) \cup \\
& \cup \text{supp}(\partial T_1) \\
& \subset \text{supp}(\partial P) \cup \text{supp}(Q_1) \cup \text{supp}(\partial T) \\
& \cup \text{supp}(\partial T_1)
\end{aligned}$$

e usando (8) vem que

$$\subset \{x \mid d(x, \text{supp } \partial T_1) \leq 2n \varepsilon_2\} \cup \text{supp}(\partial T).$$

Por outro lado, usando o mesmo argumento que no final do Teorema anterior, com

$$\varepsilon_2 < \frac{\delta_2}{4n},$$

concluimos que

$$\{x \mid d(x, \text{supp } \partial T_1) \leq 2n \varepsilon_2\} \subset \{x \mid d(x, \text{supp } \partial T) \leq 2 \delta_2\}$$

e portanto

$$\text{supp}(\partial P) \cup \text{supp}(\partial Q) \subset$$

$$\subset \{x \mid d(x, \text{supp } \partial T) \leq 2 \delta_2\}.$$

c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

- [1] WHITNEY H. - Geometric Integration Theory, Princeton, Univ. Press, 1957.
- [2] FEDERER, H. & FLEMING, W.H. - Normal and Integral Currents, Annals of Mathematics, Vol. 72, nº 3, November 1960, pp. 458-519.
- [3] DE RHAM, G. - Variétés Differentiables, Hermann, Paris, 1955.
- [4] FEDERER, H. - Geometric Measure Theory, Springer-Verlag, N.Y., 1969.
- [5] D'AMBRÓSIO, U. - Variedades Generalizadas en el Calculus Variaciones, Cuadernos del Instituto de Matemática "Beppolevi", 6, Rosário, 1976.
- [6] FLANDERS, H. - Differential Forms With applications to the Physical Sciences, Academic Press, N.Y. 1963.
- [7] YOUNG, L.C. - Generalized Curves and the existence, of an attained absolute minimum in the calculus of variations. C.R. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Classe III, Vol. 30 (1937), pp. 212-234.
- [8] RODRIGUES, FILHO, J. - Correntes σ -Normais - Trabalho de Mestrado, I.T.A., São José dos Campos, 1975.
- [9] BOLDRINI, J.L. - Ações Exóticas de Grupos Cíclicos sobre Espaços Euclidianos, Trabalho de Mestrado, UNICAMP, 1976.