Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Álgebras graduadas e identidades polinomiais graduadas

por

Diogo Diniz P. Silva†

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Álgebras graduadas e identidades polinomiais graduadas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Diogo Diniz P. Silva** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 31 de Julho de 2007.

P Kochloukov

Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov

Banca examinadora:

Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov.

Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho.

Prof. Dr. Luiz Antônio Peresi.

Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura.

Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti.

Dissertação, apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Silva, Diogo Diniz P. S.
Si38a Álgebras graduadas e identidades polinomiais graduadas/Diogo Diniz P. S. Silva -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Plamen Emilov Kochloukov
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Álgebra não-comutativa. 2. PI-algebras. 3. Polinomios. I. Kochloukov, Plamen Emilov. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Graded algebras and graded polynomial identities.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Noncommutative algebra. 2. PI-Algebras. 3. Polynomials.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho (IME-USP)
Prof. Dr. Luiz Antônio Peresi (IME–USP)

Data da defesa: 31/07/2007

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 31 de julho de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof. (a). Dr (a). FLÁVIO ULHOA COELHO

Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTÔNIO PERESI

AGRADECIMENTOS

Agradeço à meus pais, Wilton e Cleide, pelo exemplo, pela ajuda durante os dois anos de mestrado, e por muito mais.

Aos meus irmãos Cleiton e Uilma.

À todos os que foram meus professores, especialmente aos professores de matemática da UFCG.

Aos meus ex-professores, que hoje considero amigos, Daniel Pellegrino que foi meu orientador durante a graduação e Sérgio Mota por toda a ajuda.

Aos amigos que fiz aqui, que são enumeráveis mas difíceis de enumerar. Em especial à toda a galera da Rep Hostel.

Ao amigo Zé Antônio, que veio instalar TeX e LaTeX aqui em casa (num Domingo a tarde!).

À todos que fazem da Unicamp um ambiente agradável de estudo, em especial ao pessoal da secretaria.

Ao meu orientador Plamen Koshlukov pela excelente orientação e por toda ajuda que me concedeu com o seu imenso conhecimento matemático.

ABSTRACT

In this work we study graded algebras and graded polynomial identities. We study two types of problems: finding the possible gradings on a given algebra, and finding a basis for the graded identities of a given algebra. We begin with the basic definitions and results on algebras, graded algebras, (graded) polynomial identities, etc. We give a description of the possible gradings on the matrix algebra over an algebraically closed filed, and of the upper triangular matrices when the field is algebraically closed of characteristic 0, and the group is abelian and finite. Then we study the graded identities of the matrix algebra over a field K and of the algebras $M_{11}(E)$ and $E \otimes E$ where E is the infinite dimensional Grassmann (or exterior) algebra.

RESUMO

Neste trabalho estudamos álgebras graduadas e identidades polinomiais graduadas. Foram abordados dois tipos de problemas: determinar as possíveis graduações de uma determinada álgebra; encontrar uma base para as identidades graduadas de uma álgebra. Começamos com as definições e resultados básicos de álgebras, álgebras graduadas, identidades polinomiais (graduadas), etc. Em seguida fornecemos uma descrição das possíveis graduações da álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo algebricamente fechado, e da álgebra das matrizes triangulares superiores quando o corpo é algebricamente fechado, de característica 0 e o grupo é abeliano e finito. Depois estudamos as identidades graduadas da álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K e das álgebras $M_{11}(E)$ e $E \otimes E$ onde E é a álgebra exterior (ou de Grassmann) de dimensão infinita.

CONTEÚDO

Introdução

A teoria das álgebras que satisfazem identidades polinomiais, denominadas também PI-álgebras, é uma parte importante da teoria de anéis. Os primeiros trabalhos que envolviam PI-álgebras aparaceram, embora de forma implícita, na década de 1920-1930, nas pesquisas de Wagner e Dehn (poderíamos voltar às pesquisas de Sylvester, publicadas em 1852 e 1853, mas preferimos não entrar em assuntos históricos). O verdadeiro desenvolvimento da PI teoria começou com os trabalhos de N. Jacobson e I. Kaplansky há aproximadamente 60–65 anos, e atualmente é uma área da álgebra bem desenvolvida e em expansão rápida. São três as principais linhas de pesquisa sobre PI-álgebras. A primeira (e a mais clássica) estuda as propriedades de uma álgebra (ou um anel) sabendo-se que ela satisfaz alguma identidade polinomial. A segunda representa-se por pesquisas sobre as classes de álgebras que satisfazem um dado sistema de identidades polinomiais (essas classes são chamadas de variedades de álgebras). A terceira estuda as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra interessante. Gostaríamos de deixar claro que tal divisão não é definitiva nem exata e que os problemas na PI teoria, na maioria das vezes, estão interligados. Uma discussão mais detalhada sobre o desenvolvimento da PI teoria pode ser encontrada, por exemplo, na monografia [10], ou nas [12, 13].

Durante os últimos 20 anos observa-se uma tendência de maior concentração de pesquisa sobre identidades graduadas. As identidades graduadas, em álgebras associativas, aparecem com força total na fundamental e celebrada pesquisa desenvolvida por A. Kemer. Essa pesquisa permitiu que Kemer desse uma resposta positiva ao famoso problema de Specht e desenvolvesse a estrutura dos ideais de identidades polinomiais em característica 0. Os principais resultados e métodos da teoria de Kemer podem ser encontrados nas monografias [14, 12, 13]. A teoria de Kemer revelou de maneira clara que as álgebras associativas com identidades polinomiais têm semelhanças profundas com as álgebras comutativas e finitamente geradas. Logo após os trabalhos de Kemer, por volta de 1987, as identidades graduadas tornaram-se objeto de pesquisas independentes e muito ativas.

Sem dúvida alguma as álgebras matriciais e relacionadas a elas são de grande importância para a álgebra e as aplicações. Mas enquanto a estrutura dessas álgebras é bem conhecida, pouco se sabe sobre as identidades por elas satisfeitas. As identidades das álgebras $M_n(K)$ são conhecidas somente quando $n = 1$ (trivialmente), e $n = 2$, ver [17] para $\operatorname{char} K = 0$, e [16] e [9] para $\operatorname{char} K = p > 2$. Não se sabe quase nada sobre as identidades da álgebra $M_2(K)$ quando $\operatorname{char} K = 2$, nem sobre as de $M_3(K)$, nem mesmo em característica 0. As álgebras $M_n(K)$ admitem uma graduação natural com o grupo $\mathbb{Z}_n$, nos referimos a essa graduação como sendo a n-graduação de $M_n(K)$. Se e_{ij} são as matrizes elementares, com entrada 1 na posição (i, j) e 0 nas demais, então $M_n(K) = \oplus A_t$ onde $t \in \mathbb{Z}_n$ e A_t é o espaço gerado pelas e_{ij} com $j - i \equiv t \pmod{n}$. As identidades 2-graduadas de $M_2(K)$ foram descritas em [22] quando $\operatorname{char} K = 0$, e em [15] quando $\operatorname{char} K = p > 2$, e $|K| = \infty$. Mais tarde em [20] foi descrita uma base das identidades n-graduadas em $M_n(K)$, $\operatorname{char} K = 0$, e em [3], o mesmo resultado foi obtido para $|K| = \infty$. Ressaltamos que as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de $M_n(K)$ foram descritas em [21] ($\operatorname{char} K = 0$), e em [3] ($|K| = \infty$). Considerando-se álgebras associativas, sabe-se bastante sobre as identidades graduadas das álgebras T-primas, que desempenham um papel muito importante na teoria de Kemer, ver por exemplo [4, 5] e as bibliografias desses dois artigos. Ressaltamos que as identidades graduadas dessas álgebras foram estudadas em característica 0, bem como em característica positiva. As informações assim obtidas foram utilizadas no estudo do comportamento dos respectivos T-ideais conforme a característica do corpo. As possíveis graduações de $M_n(K)$, $\operatorname{char} K = 0$ e K algebricamente fechado, foram descritas em [7], assumindo-se o grupo da graduação abeliano e finito.

Neste trabalho estudamos as graduações nas álgebras matriciais, nas álgebras das matrizes triangulares superiores e outras álgebras importantes. Estudamos também as respectivas identidades graduadas.

A dissertação está organizada na seguinte maneira.

O primeiro capítulo contém uma parte dos pré-requisitos para a leitura dos capítulos posteriores. Recordamos as definições e as propriedades básicas de anel, álgebra etc., de identidade polinomial, T-ideal. Oferecemos vários exemplos, na sua maioria utilizados mais adiante na dissertação. Definimos também os conceitos de álgebra relativamente livre, variedade de álgebras e discutimos brevemente as propriedades mais importantes desses conceitos. Em seguida introduzimos álgebras graduadas, identidades graduadas e todos os conceitos relacionados com elas que serão necessários no decorrer da dissertação. Ressaltamos que nesse capítulo, como regra geral, as afirmações estão sem as devidas demonstrações, mas com citações para que o leitor interessado possa encontrá-las.

No segundo capítulo damos uma descrição das graduações de $M_n(K)$ em termos das graduações elementar, fina e induzida. Na seção 2.1 recordamos o conceito de graduação elementar (introduzido no capítulo 1) e introduzimos outros conceitos: graduação fina, graduação elementar e álgebra graduada com divisão, e enunciamos e provamos alguns resultados básicos que são utilizados adiante. Na seção 2.2 definimos representações projetivas e mostramos que a classificação das graduações finas é equivalente à descrição dos grupos finitos com representações projetivas de grau máximo. Essas duas seções "preparam o terreno"para o resultado principal deste capítulo, que é enunciado e demonstrado na seção de 2.3, e que dá uma descrição das graduações nas álgebras das matrizes sobre o corpo K, quando K é algebricamente fechado.

No terceiro capítulo damos uma descrição das G-graduações na álgebra $UT_n(K)$ das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre um corpo K quando G é um grupo abeliano finito e K é algebricamente fechado e de característica 0, o teorema que dá essa classificação é enunciado e provado na seção 3.2. Na seção 3.1, damos os conceitos e fatos básicos necessários para demonstrar o resultado principal na seção 3.2. Definimos o grupo dual $\widehat{G}$ de um grupo abeliano finito G e uma ação de $\widehat{G}$ em A, onde A é uma álgebra G-graduada. Em seguida mostramos que um subespaço $V \subset A$ é homogêneo se e somente se $\chi(V) = V$ para todo $\chi \in \widehat{G}$.

No quarto capítulo estendemos o resultado de Vasilovsky [20], que garante que quando $\operatorname{char} K = 0$ todas as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_n(K)$ seguem das identidades:

(i) $x_1x_2 = x_2x_1, wt(x_1) = wt(x_2) = 0;$

(ii) $x_1x_3x_2 = x_2x_3x_1, wt(x_1) = wt(x_2) = -wt(x_3),$

para o caso em que K é infinito. Para isto foi necessário construir um modelo genérico para a álgebra n-graduada $M_n(K)$, isto é feito na seção 4.1 onde também são provados alguns resultados básicos sobre esse modelo que são utilizados adiante. Na seção 4.2 provamos o resultado acima, quando K é infinito.

No quinto capítulo relembramos brevemente as definições das álgebras $M_{11}(E)$ e $E \otimes E$ e suas $\mathbb{Z}_2$-graduações naturais, definidas no capítulo 1. Construímos modelos genéricos para essas álgebras e utilizamos tais modelos para encontrar uma base para as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas satisfeitas por elas quando o corpo é infinito. É um fato conhecido que os T-ideais das álgebras M_{11} e $E \otimes E$ coincidem, quando o corpo é de característica 0 (Teorema de Kemer), encerramos o capítulo dando uma prova, utilizando os resultados provados no capítulo (que utilizam métodos elementares), da coincidência dos T-ideais das álgebras M_{11} e $E \otimes E$ sobre um corpo de característica 0.

CAPÍTULO 1

PI-Álgebras: Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos e alguns resultados que são utilizados ao longo do texto. Começaremos com a definição de álgebra. Para evitar repetir "... sobre o corpo K"freqüentemente, a menos que se diga algo em contrário, sempre consideraremos os espaços vetoriais, e as álgebras como sendo sobre o corpo K.

1.1 Álgebras, PI-Álgebras e Variedades

Nesta seção introduzimos os conceitos de Álgebra, Álgebra com Identidade Polinomial, que é uma importante classe de álgebras, Variedades e Álgebras Relativamente Livres.

1.1.1 Álgebras: Conceitos Gerais

Uma álgebra nada mais é que um espaço vetorial sobre um corpo K, com uma multiplicação de vetores compatível com a soma e multiplicação por escalar.

Definição 1.1.1. *Diremos que um K-espaço vetorial A munido de uma operação binária, $* : A \times A \to A$, denominada de multiplicação é uma **álgebra** sobre K, ou simplesmente que A é uma álgebra, se para qualquer $\alpha \in K$ e quaisquer a, b, $c \in A$, valer:*

(1) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

(2) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

(3) $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$.

Diremos que:

(i) A *é* ***comutativa****, se* $a * b = b * a$ *para quaisquer* a, $b \in A$;

(ii) A *é* ***associativa****, se* $(a * b) * c = a * (b * c)$ *para quaisquer* a, b, $c \in A$;

(iii) A *é* ***unitária****, se existir* $1_A \in A$ *tal que* $1_A * a = a * 1_A = a$ *para qualquer* $a \in A$ *(vamos escrever* $\underline{1}$ *em vez de* $\underline{1_A}$*).*

(iv) A *é uma* ***Álgebra de Lie*** *se para quaisquer* a, b, $c \in A$ *valem:*

$$a * a = 0, \textit{ anticomutatividade},$$

$$(a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0 \textit{ identidade de Jacobi.}$$

(v) A *é uma* ***álgebra de Jordan*** *se para quaisquer* a, $b \in A$ *valem:*

$$a * b = b * a, \quad (a^2 * b) * a = a^2 * (b * a) \textit{ onde } a^2 = a * a.$$

Observação 1.1.2. *Em geral, para simplificar a notação, iremos omitir o símbolo da multiplicação "* $*$ *" e escrever* (ab)*, no lugar de* $(a * b)$*.*

A seguir providenciamos alguns exemplos de álgebras.

Exemplo 1.1.3. *O espaço vetorial* $M_n(K)$ *das matrizes* $n \times n$ *com entradas em* K*, com a multiplicação sendo a multiplicação usual de matrizes, é uma álgebra associativa com 1.*

Exemplo 1.1.4. *O espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *sobre o corpo dos reais com o produto vetorial* $\times$ *usual é uma álgebra de Lie.*

Exemplo 1.1.5. *O anel* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *dos polinômios em* n *variáveis é uma álgebra comutativa e com 1.*

Exemplo 1.1.6. *Se* $K \subset L$ *é uma extensão de corpos, então* L *é* K*-álgebra.*

Exemplo 1.1.7. *O subespaço* $U_n(K)$ *de* $M_n(K)$ *das matrizes triangulares superiores com a multiplicação "herdada"de* $M_n(K)$*, também é uma álgebra associativa com 1.*

Exemplo 1.1.8. *Se A é uma álgebra associativa com multiplicação $*$ então o conjunto A é uma álgebra de Lie com a multiplicação $[a_1, a_2] = a_1 * a_2 - a_2 * a_1$. Essa álgebra é denotada por $A^{(-)}$.*

Exemplo 1.1.9. *A álgebra das matrizes simétricas $n \times n$ com o produto $a * b := (ab + ba)/2$ é uma álgebra de Jordan. Aqui exigimos que a característica do corpo seja diferente de 2.*

Exemplo 1.1.10. *Ressaltamos que, como no caso de álgebras de Lie, se A é uma álgebra associativa, substituindo-se o produto de A pelo produto simétrico $a*b = (ab+ba)/2$ obteremos uma álgebra de Jordan, denotada por $A^{(+)}$.*

Definição 1.1.11. *Um subespaço vetorial B de uma álgebra A será denominado uma* ***subálgebra*** *de A se B for fechado com respeito a multiplicação de A. O subespaço B será denominado um* ***ideal à esquerda*** *de A, se $AB \subseteq B$. De modo similar, definimos* ***ideal à direita*** *de A. Um* ***ideal bilateral*** *será simplesmente denominado de* ***ideal****.*

Exemplo 1.1.12. *O subespaço $U_n(K)$ é uma subálgebra de $M_n(K)$. O subespaço I de $U_n(K)$ que consiste das matrizes em que todos os elementos da diagonal são 0 é um ideal bilateral de $U_n(K)$ (mas não de $M_n(K)$).*

Exemplo 1.1.13. *É bem conhecido que, como K é corpo, toda álgebra de Lie é isomorfa a uma subálgebra de alguma álgebra de Lie do tipo $A^{(-)}$, onde A é associativa. Esta afirmação é conhecida como Teorema de Poincaré–Birkhoff–Witt. Considerando-se álgebras de Jordan, isso deixa de ser verdadeiro. As álgebras de Jordan que são subálgebras de $A^{(+)}$ são chamadas de* ***especiais****, e as demais* ***excepcionais****.*

Exemplo 1.1.14. ***Álgebra de Grassmann.*** *Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita, com base $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Definimos a álgebra de Grassmann ou álgebra exterior de V, denotada por E, como sendo a álgebra associativa com base, como espaço vetorial, consistente dos produtos $\{1,\ e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_k,\ k \geq 1\}$ e satisfazendo as relações $e_i^2 = 0$ e $e_ie_j = -e_je_i$ para quaisquer $i,\ j \in \mathbb{N}$. Sejam E_0 e E_1 os subespaços vetoriais de E gerados pelos conjuntos $\{1,\ e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_m} \mid m \text{ par}\}$, e $\{\ e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k} \mid k \text{ ímpar}\}$, respectivamente. É fácil ver que*

$$(e_{i_1}\ldots e_{i_m})(e_{j_1}\ldots e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1}\ldots e_{j_k})(e_{i_1}\ldots e_{i_m}),$$

para quaisquer $m,\ k \in \mathbb{N}$, e assim podemos concluir que $g_0x = xg_0$ para quaisquer $g_0 \in E_0$ e $x \in E$, e $g_1g_2 = -g_2g_1$ para quaisquer $g_1,\ g_2 \in E_1$.

Exemplo 1.1.15. ***Centro de uma álgebra.*** *Sendo A uma álgebra, o conjunto*

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa \text{ para todo } x \in A\}$$

é uma subálgebra de A, chamada de centro de A. No exemplo anterior $Z(G) = G_0$ se $\operatorname{char} K \neq 2$. Se $\operatorname{char} K = 2$ então a álgebra G é comutativa e neste caso $Z(G) = G$.

Definição 1.1.16. ***Produto Tensorial de Espaços Vetoriais.*** *Sejam V e W espaços vetoriais com bases $\{v_i \mid i \in I\}$ e $\{w_j \mid j \in J\}$ respectivamente. O produto tensorial $V \otimes W$ de V e W é o espaço vetorial com base $\{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$, onde vale*

$$\left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i\right) \otimes \left(\sum_{j \in J} \beta_j w_j\right) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \alpha_i \beta_j (v_i \otimes w_j),$$

onde os $\alpha_i, \beta_j \in K$ são escalares e as somas $\sum_{i \in I} \alpha_i v_i$, e $\sum_{j \in J} \beta_j w_j$ são finitas.

Veremos a seguir que para definir uma multiplicação em um espaço vetorial A, de modo a torná-lo uma álgebra, basta defini-la entre os elementos de uma base de A. Para isto utilizamos a proposição a seguir, sua demonstração é simples e será omitida.

Proposição 1.1.17. *Se A é um espaço vetorial com base β, e $f : \beta \times \beta \longrightarrow A$ é uma função qualquer, então existe uma única função bilinear $F : A \times A \longrightarrow A$ estendendo f.*

Agora basta observar que as propriedades $(1), (2)$ e (3) da Definição 1.1.1 nos dizem exatamente que a multiplicação $* : A \times A \longrightarrow A$ é uma aplicação bilinear. Assim se na definição acima os espaços vetoriais são álgebras para definir uma multiplicação que faz do produto tensorial uma álgebra basta definir uma multiplicação entre os elementos da base $\{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$.

Exemplo 1.1.18. ***Produto Tensorial de Álgebras.*** *Se V e W são álgebras com bases (como espaços vetoriais) $\{v_i \mid i \in I\}$ e $\{w_j \mid j \in J\}$ respectivamente então $V \otimes W$ é uma álgebra com a multiplicação dada por*

$$(v_{i_1} \otimes w_{j_1})(v_{i_2} \otimes w_{j_2}) = (v_{i_1} v_{i_2}) \otimes (w_{j_1} w_{j_2}), \quad i_1, i_2 \in I, j_1, j_2 \in J.$$

Exemplo 1.1.19. *Um exemplo importante de produto tensorial de álgebras, que será estudado no Capítulo 5, é a álgebra $E \otimes E$, onde E é a álgebra de Grassmann.*

Exemplo 1.1.20. ***Álgebras de matrizes com entradas na álgebra de Grassmann.*** *O espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas na álgebra de Grassmann E, munido com a multiplicação usual de matrizes é uma álgebra, que será denotada por $M_n(E)$. Sejam a, $b \in \mathbb{N}$ com $a + b = n$, a subálgebra de $M_{a+b}(E)$ das matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \text{ onde } A \in M_a(E_0), B \in M_{a\times b}(E_1), C \in M_{b\times a}(E_1), D \in M_b(E_0),$$

será denotada por $M_{a,b}(E)$.

Definição 1.1.21. *A transformação linear $\varphi : R_1 \longrightarrow R_2$ entre as álgebras R_1 e R_2 é um* ***homomorfismo*** *(de álgebras) se*

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b), a, b \in R_1.$$

O conjunto $\ker(\varphi) = \{r \in R_1 | \varphi(r) = 0\}$ é denominado ***núcleo*** *de φ. Se φ é biunívoca diremos que φ é um* ***isomorfismo****. Se $R_1 = R_2$ diremos que φ é um* ***endomorfismo****, e se φ é um endomorfismo biunívoco diremos que φ é um* ***automorfismo****.*

Exemplo 1.1.22. *É fácil ver que $M_n(E) \cong M_n(K) \otimes E$. Também, se L é uma extensão do corpo K então $M_n(L) \cong M_n(K) \otimes L$, onde conisderamos L como sendo uma K-álgebra.*

Vale um resultado análogo ao Teorema dos Isomorfismos para anéis, grupos e espaços vetoriais o qual também chamaremos de Teorema dos Isomorfismos. Antes precisamos definir o quociente de uma álgebra por um ideal.

Consideremos uma álgebra A e $I \subset A$ um ideal (bilateral) de A. Definimos a relação de congruência módulo I:

Definição 1.1.23. *Sejam a, $b \in A$. Dizemos que a é* ***congruente*** *ao elemento b módulo I, e escrevemos $a \equiv b \pmod I$, ou $a \equiv_I b$, se $a - b \in I$.*

Notação 1.1.24. *A classe de equivalência de a é o conjunto $\{b \in A | a \equiv b \pmod I\} = \{a + i | i \in I\} = a + I$ e será denotada por $\overline{a}$ ou $a + I$. O conjunto das classes de equivalência será denotado por A/I.*

Não é difícil verificar que a relação definida acima é uma relação de equivalência. A proposição a seguir garante que podemos definir operações de soma, multiplicação por escalar e multiplicação, de maneira natural de modo a tornar o conjunto A/I uma álgebra. A demonstração é simples e é análoga ao caso de anéis, e por isso será omitida.

Teorema 1.1.25. *Sejam A uma álgebra, I um ideal (bilateral), a, $b \in A$ e $\lambda \in K$. Então as operações:*

- ***multiplicação por escalar**: $\lambda\overline{a} = \overline{\lambda a}$;*
- ***soma**: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$;*
- ***multiplicação**: $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$,*

estão bem definidas e fazem do conjunto A/I uma álgebra.

Definição 1.1.26. *A álgebra A/I, no teorema anterior, é chamada de **álgebra quociente**.*

Agora podemos enunciar o Teorema dos Isomorfismos. A sua demonstração é análoga ao teorema para anéis e será omitida.

Teorema 1.1.27. ***Teorema dos Isomorfismos** Seja $\varphi : R_1 \longrightarrow R_2$ um homomorfismo de álgebras. Então $\ker(\varphi)$ é um ideal bilateral de R_1 e a álgebra quociente $R_1/\ker(\varphi)$ é isomorfa à $Im(\varphi)$.*

1.1.2 Álgebras Livres, Identidades Polinomiais e PI-Álgebras

Nesta seção definiremos as Álgebras Livres, que são importantes pois são o "ambiente" onde são introduzidos o conceito de identidades polinomiais, através do qual definimos a classe das álgebras com identidades polinomiais. Começaremos com a definição de Álgebras Livres.

Definição 1.1.28. *Seja $\mathcal{B}$ uma classe de álgebras e $F \in \mathcal{B}$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra F é dita livre na classe $\mathcal{B}$, livremente gerada pelo conjunto X, se satisfaz a seguinte propriedade universal: Para toda álgebra $R \in \mathcal{B}$, qualquer aplicação $X \to R$ pode ser estendida a um homomorfismo $F \to R$. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X será chamada de posto de F.*

A seguir construímos uma álgebra livre na classe das álgebras associativas. Seja X um conjunto. Uma *palavra* sobre X é uma seqüência $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ onde $n \in \mathbb{N}$ e $x_{i_j} \in X$. A palavra vazia será denotada por 1. Denotaremos por $K\langle X\rangle$ o espaço vetorial que tem como base o conjunto de todas as palavras sobre X. Assim, os elementos de $K\langle X\rangle$ são somas (formais) de termos que são produtos (formais) de um escalar por uma palavra em X.

Definição 1.1.29. *Os elementos $x \in X$ são chamados de* ***variáveis****, os produtos (formais) de um escalar por uma palavra são chamados de* ***monômios*** *e os elementos de $K\langle X\rangle$ são chamados de* ***polinômios****. Um monômio M tem* ***grau*** *k em x se, a variável x ocorre em M exatamente k vezes, denotamos $\deg_x(M) = k$. Dizemos que dois monômios M e N têm o mesmo* ***multigrau*** *se $\deg_x(M) = \deg_x(N)$, para todo $x \in X$. Um polinômio f é* ***homogêneo de grau*** *k em x, se todos os seus monômios tem grau k em x, denotamos este fato por $\deg_x f = k$. Dizemos que f é* ***multihomogêneo****, se para cada variável x todos os seus monômios têm o mesmo grau em x. Um polinômio* ***linear em*** *x é um polinômio de grau 1 em x. Se f é linear em cada variável dizemos que f é* ***multilinear****.*

Consideremos agora em $K\langle X\rangle$ a multiplicação definida por

$$(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}.$$

Munido deste produto, $K\langle X\rangle$ é uma álgebra associativa, com unidade, que é a palavra vazia 1. A proposição a seguir garante que $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade.

Proposição 1.1.30. *A álgebra $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade.*

Prova: Para ver isto considere A uma álgebra associativa com unidade e $h : X \longrightarrow A$ uma aplicação qualquer. Para cada $i \in \mathbb{N}$ denotaremos por a_i a imagem de x_i por h. Consideremos agora a aplicação linear $\varphi_h : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $\varphi(1) = 1_A$ e $\varphi(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n}$. Temos que φ_h é um homomorfismo de álgebras e é o único satisfazendo $\varphi_h|_X = h$. ■

Se $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X\rangle$, denotaremos por $f(a_1, \dots, a_n)$ a imagem de f por φ_h. Na verdade $f(a_1, \dots, a_n)$ é o elemento de A que se obtém substituindo x_i por a_i em f.

De agora em diante, a menos que se diga algo em contrário X denota um conjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Definição 1.1.31. *Seja A uma álgebra associativa. Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X\rangle$ (ou a própria expressão $f(x_1, \dots, x_n) = 0$) é dito ser uma* ***identidade polinomial*** *de A se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$. Neste caso diremos que A* ***satisfaz a identidade*** *$f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Denotaremos por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A. Dizemos A é uma* ***álgebra com identidade polinomial*** *ou* ***PI-álgebra*** *se $T(A) \neq \{0\}$. Se A_1 e A_2 são álgebras, dizemos que A_1 e A_2 são* ***PI-equivalentes*** *se $T(A_1) = T(A_2)$.*

Observação 1.1.32. *Não é difícil ver que* $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ *é uma identidade de* A *se, e somente se,* f *pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de* $K\langle X\rangle$ *em* A.

Definição 1.1.33. ***Comutador (de Lie) de comprimento*** $n > 1$**.** *O comutador (de Lie) de comprimento* $n > 1$ *é definido indutivamente por*

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1,$$

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$$

Exemplo 1.1.34. *Se* A *é uma álgebra comutativa (e associativa) então* $[x_1, x_2] \in K\langle X\rangle$ *é uma identidade polinomial para* A*. Em particular qualquer álgebra comutativa é uma PI-álgebra.*

Exemplo 1.1.35. *O polinômio* $[x_1, x_2, x_3]$ *é uma identidade polinomial da álgebra de Grassmann* G*. Para ver isto, basta observar que* $[a, b] \in G_0 = Z(G)$ *para quaisquer* a*,* $b \in G$*.*

Sabemos que o conjunto das identidades polinomiais satisfeitas por uma determinada álgebra é um ideal de $K\langle X\rangle$. Além disso ele apresenta uma propriedade importante: esse conjunto é invariante por endomorfismos. Ideais com essa propriedade são denominados T-ideais.

Definição 1.1.36. *Dizemos que um ideal* I *de* $K\langle X\rangle$ *é um* ***T-ideal*** *se* $\varphi(I) \subseteq I$ *para todo* $\varphi \in End\ K\langle X\rangle$*, ou equivalentemente, se* $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$ *para quaisquer* $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ *e* $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$*.*

Proposição 1.1.37. *Se* A *é uma álgebra, então* $T(A)$ *é um T-ideal de* $K\langle X\rangle$*. Reciprocamente, se* I *é um T-ideal de* $K\langle X\rangle$*, então existe alguma álgebra* B *tal que* $T(B) = I$*.*

Prova: [10], pg. 22 e 23. ■

1.1.3 Variedades e Álgebras Relativamente Livres

Nesta seção, apresentaremos os conceitos de variedades (de álgebras associativas) e de álgebras relativamente livres.

Definição 1.1.38. *Seja* $\{f_i \in K\langle X\rangle | i \in I\}$ *um conjunto de polinômios da álgebra associativa livre* $K\langle X\rangle$*. A classe* $\mathcal{B}$ *de todas as álgebras associativas que satisfazem as identidades*

*$f_i = 0$, $i \in I$, é chamada de **variedade (de álgebras associativas) determinada pelo sistema de identidades polinomiais** $\{f_i \in K\langle X\rangle | i \in I\}$. A variedade $\mathcal{M}$ é chamada de **subvariedade** de $\mathcal{B}$ se $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$. O conjunto $T(\mathcal{B})$ de todas as identidades polinomiais satisfeitas por todas as álgebras da variedade $\mathcal{B}$ é denominado **o T-ideal de** $\mathcal{B}$. Dizemos que o T-ideal $T(\mathcal{B})$ é **gerado, como T-ideal,** pelo conjunto $\{f_i \in K\langle X\rangle | i \in I\}$. Usamos a notação $T(\mathcal{B}) = \langle f_i \in | i \in I\rangle^T$ e dizemos que o conjunto $\{f_i \in K\langle X\rangle | i \in I\}$ é uma **base para as identidades polinomiais de** $\mathcal{B}$. Os elementos de $T(\mathcal{B})$ são chamados **conseqüências** das identidades polinomiais da base.*

De maneira análoga define-se variedade de álgebras de Lie, de Jordan, etc.

Já vimos, na Proposição 1.1.37, que o conjunto $T(A)$ das identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra A é um T-ideal. Não é difícil ver que a interseção de T-ideais também é um T-ideal e portanto o conjunto $T(\mathcal{B})$ das identidades polinomiais satisfeitas por todas as álgebras de uma variedade $\mathcal{B}$ também é um T-ideal, o que justifica termos denominado $T(\mathcal{B})$ "o T-ideal de $\mathcal{B}$".

Exemplo 1.1.39. *A classe das álgebras comutativas é a variedade definida pelo conjunto $I = \{[x_1, x_2]\}$.*

Exemplo 1.1.40. *A classe das álgebras associativas é a variedade definida pelo conjunto $I = \emptyset$.*

Um dos principais problemas na teoria das álgebras com identidades polinomiais é encontrar uma base para as identidades dessa álgebra. Esse é, em geral, um problema bastante complicado. Apenas para se ter uma idéia ainda não são conhecidas bases para as identidades polinomiais de $M_n(K)$ quando $n \geq 3$, nem para $M_2(K)$ (quando $|K| = \infty$ e a característica de K é 2).

A seguir daremos alguns exemplos de bases para algumas das PI-álgebras.

Exemplo 1.1.41. *Se K é um corpo infinito então $T(K) = \langle [x_1, x_2]\rangle$.*

Exemplo 1.1.42 ([10], pg. 50, Teorema 5.1.2)**.** *O T-ideal das identidades da álgebra de Grassmann é gerado por $[x_1, x_2, x_3]$, quando o corpo é infinito e $chK \neq 2$.*

Exemplo 1.1.43 ([10], pg. 51, Teorema 5.2.1)**.** *Se K é um corpo infinito então $T(U_n(K)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}]\rangle^T$.*

Nos próximos exemplos precisaremos do *polinômio standard*

$$s_m = s_m(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(m)},$$

onde S_m é o grupo simétrico de $\{1, 2, \ldots, m\}$ e $(-1)^\sigma$ é o sinal da permutação σ. O clássico Teorema de Amitsur e Levitzki diz que a identidade de menor grau satisfeita pela álgebra matricial $M_n(K)$ é s_{2n}.

Exemplo 1.1.44. *Se K é um corpo de característica 0, os polinômios s_4 e $h_5 = [[x_1, x_2]^2, x_3]$ formam uma base das identidades da álgebra das matrizes $M_2(K)$. Este resultado foi obtido por Razmyslov e em seguida Drensky encontrou o sistema mínimo de geradores. Resultado análogo é válido quando K é infinito e de característica $p > 3$, quando $p = 3$, aparece mais uma identidade na base. Ver para mais detalhes [10], pg. 84 e [16, 9].*

Aqui ressaltamos que ainda para $n = 3$, a base das identidades para a álgebra $M_n(K)$, deverá conter o polinômio s_6 (segundo o Teorema de Amitsur e Levitzki), mais um polinômio que expressa o fato de $M_n(K)$ ser uma álgebra algébrica, e mais outros polinômios. Quais, não se sabe, nem tem-se idéia.

Exemplo 1.1.45. *Percebemos do exemplo anterior que a tarefa de encontrar uma base para as identidades de uma álgebra dada, pode ser extremamente difícil. Por outro lado, há outros tipos de identidades polinomiais que são mais fáceis de estudar, e ainda várias vezes oferecem bastante informação sobre as identidades (ordinárias) satisfeitas pela álgebra. Aqui recordamos brevemente alguns resultados. As identidades com traço na álgebra matricial $M_n(K)$, quando a característica de K é 0, foram descritas por Procesi e por Razmyslov, e elas seguem de um análogo do polinômio de Hamilton–Cayley, ver para mais detalhes [10], pg. 84. As identidades com involução também são importantes, ver para mais detalhes [12]. As identidades graduadas desempenham um papel especial. Elas foram utilizadas de maneira essencial por A. Kemer; em seguida vários pesquisadores vêm trabalhando na área. Nós estudaremos esse tópico de maneira detalhada nos próximos capítulos (e até o final desta dissertação).*

Definição 1.1.46. *Fixado um conjunto Y, a álgebra $F_Y(\mathcal{B})$ na variedade $\mathcal{B}$ é dita a álgebra relativamente livre de $\mathcal{B}$ (ou a álgebra $\mathcal{B}$-livre), se $F_Y(\mathcal{B})$ é livre na classe $\mathcal{B}$, livremente gerada por Y.*

O próximo teorema mostra que toda variedade tem uma álgebra livre e que a álgebra relativamente livre é determinada, a menos de isomorfismo, pela cardinalidade de Y.

Teorema 1.1.47. *Sejam $\mathcal{B}$ a variedade determinada pelo conjunto $\{f_i|i \in I\}$, Y um conjunto e J o ideal de $K\langle Y\rangle$ gerado por*

$$\{f_i(g_1, \ldots, g_{n_i})|g_i \in K\langle Y\rangle, i \in I\}.$$

Então a álgebra $F = K\langle Y\rangle/J$ é relativamente livre em $\mathcal{B}$ com um conjunto de geradores livres $\overline{Y} = \{y + J|y \in Y\}$. E quaisquer duas álgebras relativamente livres em $\mathcal{B}$ de mesmo posto são isomorfas.

Prova: [10], pg 23 ■

1.2 Álgebras Graduadas

1.2.1 Álgebras Graduadas: Conceitos Gerais

Nesta seção apresentaremos os conceitos de álgebras e identidades graduadas que serão o objeto central de estudo no restante do texto.

Definição 1.2.1. *Seja G um grupo. Uma álgebra A é dita ser G-**graduada**, se $A = \oplus_{g\in G}A_g$ onde A_g é subespaço de A para todo $g \in G$ e $A_gA_h \subseteq A_{gh}$ para todos g, $h \in G$. Um elemento $a \in \cup_{g\in G}A_g$ é chamado **homogêneo**. Se $a \in A_g$ dizemos que a é **homogêneo de grau** g e denotamos $wt(a) = g$. Se $a \in A$ então $a = \sum_{g\in G} a_g$, onde $a_g \in A_g$ são determinados unicamente por a. Chamamos a_g **de componente homogênea de grau** g **em** a e dizemos que $\sum_{g\in G} a_g$ é a **decomposição de** a **como soma de elementos homogêneos**. Dizemos que uma subálgebra B de A é **homogênea** na G-graduação de A, se*

$$B = \sum_{g\in G} B_g \text{ onde } B_g = B \cap A_g,$$

*neste caso os subespaços $B \cap A_g$ serão denominados de **subespaços homogêneos**. Se um ideal I de A é uma subálgebra G-graduada dizemos que I é um **ideal homogêneo** de A.*

Exemplo 1.2.2. *Seja A uma álgebra. Então é fácil ver que a decomposição*

$$\oplus_{g\in G}A_g,$$

onde $A_g = \{0\}$ se $g \neq \varepsilon$ e $A_\varepsilon = A$ é uma G-graduação em A. Esta graduação é chamada de trivial.

Exemplo 1.2.3. *A álgebra de Grassmann E possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 e E_1 são os subespaços definidos no Exemplo 1.1.14.*

Exemplo 1.2.4. *Consideremos*

$$(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1) \text{ e } (E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0).$$

É imediato verificar que

$$E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1, \qquad (E \otimes E)_i (E \otimes E)_j \subseteq (E \otimes E)_{i+j}$$

para todos i, $j \in \mathbb{Z}_2$. Portanto a álgebra $E \otimes E$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Exemplo 1.2.5. *Consideremos a decomposição*

$$M_{1,1}(E) = (M_{1,1}(E))_0 \oplus (M_{1,1}(E))_1$$

onde

$$(M_{1,1}(E))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0 \right\} \text{ e } (M_{1,1}(E))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in E_1 \right\}$$

e verificamos diretamente que

$$(M_{1,1}(E))_i (M_{1,1}(E))_j \subseteq (M_{1,1}(E))_{i+j} \text{ para todos } i, j \in \mathbb{Z}_2.$$

Assim essa decomposição é uma $\mathbb{Z}_2$ graduação para $M_{1,1}(E)$

Exemplo 1.2.6. *Seja a álgebra $M_n(K)$ das matrizes quadradas de ordem n sobre um corpo K. Para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_n$, definimos o subespaço $M_\gamma = \langle E_{ij} \mid \overline{j - i} = \gamma \rangle$ e para cada $k \in \mathbb{Z}$, definimos*

$$M_k = \begin{cases} \{0\} & , \text{ se } |k| \geq n, \\ \langle E_{ij} \mid j - i = k \rangle & , \text{ se } |k| < n. \end{cases}$$

É fácil ver que

$$M = \oplus_{\gamma \in \mathbb{Z}_n} M_\gamma \qquad e \qquad M = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k$$

Agora, para ver que estas decomposições definem uma $\mathbb{Z}_n$-graduação e uma $\mathbb{Z}$-graduação, respectivamente, em $M_n(K)$, basta observar que

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{kl}E_{il},$$

donde segue que $M_{\gamma_1}M_{\gamma_2} \subseteq M_{\gamma_1+\gamma_2}$ para γ_1, $\gamma_2 \in \mathbb{Z}_n$, e $M_{k_1}M_{k_2} \subseteq M_{k_1+k_2}$ para k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

Nas graduações definidas em $M_n(K)$ no Exemplo 1.2.6 acima as matrizes elementares são homogêneas. Mais ainda $E_{ij} \in M_{\gamma_j-\gamma_i}$ e $E_{ij} \in M_{j-i}$, onde $\gamma_1 = \overline{1}, \ldots, \gamma_n = \overline{n}$. As G-graduações na álgebra $M_n(K)$ com essa propriedade têm um papel importante, como veremos nos Capítulos 2 e 3.

Exemplo 1.2.7. *Sejam K um corpo e $K[x]$ a álgebra dos polinômios de uma variável x sobre K. Então $K[x]$ admite uma $\mathbb{Z}$-graduação: $K[x]_n$ é o espaço gerado por x^n, $n \geq 0$, e $K[x]_n = 0$ se $n < 0$.*

Uma $\mathbb{Z}$-graduação análoga pode ser definida na álgebra dos polinômios em várias variáveis $x_1, \ldots, x_n$ sobre K, considerando-se o grau total dos polinômios. Neste caso podemos considerar também uma graduação com o grupo $\mathbb{Z}^n$, onde levaremos em consideração o grau dos monômios em cada uma das variáveis.

Exemplo 1.2.8. *Seja K um corpo de característica diferente de 2 e seja $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ o grupo não cíclico de ordem 4. Definiremos uma G-graduação sobre a álgebra das matrizes $A = M_2(K)$. Se E_{ij} são as matrizes elementares, então $A_{(0,0)} = Span(E_{11} + E_{22})$, $A_{(1,0)} = Span(E_{11} - E_{22})$, $A_{(0,1)} = Span(E_{12} + E_{21})$, $A_{(1,1)} = Span(E_{12} - E_{21})$. Verifica-se facilmente que esta é uma G-graduação em $M_2(K)$.*

Exemplo 1.2.9. *Seja K um corpo algebricamente fechado e de característica 0, e seja A uma K-álgebra de dimensão finita sobre K. Um resultado clássico de C. T. C. Wall descreve as possíveis $\mathbb{Z}_2$-graduações de A supondo-se que A seja $\mathbb{Z}_2$-simples. (Em outras palavras, os dois únicos ideais homogêneos de A são 0 e A.) A menos de isomorfismo graduado, A tem de ser uma das seguintes álgebras.*

1. *$A = M_n(K)$ com a graduação trivial $A_0 = A$, $A_1 = 0$.*

2. *$A = M_{a+b}(K)$ é dividida em 4 blocos sendo os dois blocos diagonais de tamanhos $a \times a$ e $b \times b$. Neste caso*

$$A_0 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & W \\ T & 0 \end{pmatrix},$$

onde $U \in M_a(K)$, $V \in M_b(K)$, $W \in M_{a\times b}(K)$ e $T \in M_{b\times a}(K)$.

3. *$A = M_n(K) \oplus tM_n(K)$ onde $A_0 = M_n(K)$ e $A_1 = tM_n(K)$, e t é um elemento tal que $t^2 = 1$.*

Definição 1.2.10. *A G-graduação*

$$R = M_n(K) = \oplus_{g\in G} R_g$$

*na álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K é dita **elementar** se existe uma n-upla $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ tal que $E_{ij} \in R_{g_i^{-1}g_j}$.*

Exemplo 1.2.11. *A $\mathbb{Z}_n$-graduação e a $\mathbb{Z}$-graduação definidas no Exemplo 1.2.6 são elementares.*

A seguir damos uma caracterização bastante útil das subálgebras G-graduadas de uma álgebra G-graduada.

Lema 1.2.12. *Sejam A uma álgebra G-graduada e B uma subálgebra de A. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) B é subálgebra G-graduada de A;

(2) B é álgebra G-graduada tal que $B_g \subseteq A_g$ para todo $g \in G$;

(3) As componentes homogêneas de cada elemento de B pertencem a B;

(4) B é gerada por elementos homogêneos.

Prova: Se vale (1) então a decomposição $B = \oplus_{g\in G} B_g$, onde $B_g = A_g \cap B$, é uma G-graduação em B tal que $B_g \subseteq A_g$ e portanto vale (2).

Suponhamos então que vale (2). Seja $b \in B_g$ e $b = \sum_{g\in G} b_g$, onde $b_g \in B_g$, a decomposição de b como soma de elementos homogêneos, em relação a G-graduação de B. Como $B_g \subset A_g$ cada b_g também é homogêneo em relação à G-graduação de A e (3) está provada.

Se vale (3) então o conjunto $B \cap (\cup_{g\in G} A_g)$ gera B, e segue (4). De fato, seja $b \in B$ e $b = \sum_{g\in G} b_g$, onde $b_g \in A_g$, a decomposição de b como soma de elementos homogêneos, em relação a G-graduação de A. Segue de (3) que $b_g \in B$, ou seja $b_g \in B \cap (\cup_{g\in G} A_g)$.

Suponha que vale (4). Seja C uma base de B, $C \subset (\cup_{g\in G} A_g)$ composta de elementos homogêneos e seja $B_g = B \cap A_g$. O elemento $b = \sum_{i=1}^{n} c_i$, onde $c_i \in C$, é homogêneo de grau

g se, e somente se, $wt(c_i) = g$, $1 \leq i \leq n$. Assim $C_g = C \cap A_g$ é uma base para B_g e como $C = \cup_{g\in G} C_g$ segue que $B = \oplus_{g\in G} B_g$ e o lema está provado. ■

Exemplo 1.2.13. *Se consideramos $M_n(K)$ com qualquer uma das graduações definidas no Exemplo 1.2.6 então é fácil ver que a álgebra $U_n(K)$ das matrizes triangulares superiores é subálgebra homogênea de $M_n(K)$, já que é gerada pelos elementos homogêneos $\{E_{ij} | i \leq j\}$.*

Definição 1.2.14. *Uma aplicação $\Phi : A \to B$ entre álgebras G-graduadas é chamada **homomorfismo G-graduado**, se Φ é um homomorfismo que satisfaz $\Phi(A_g) \subseteq B_g$ para todo $g \in G$. De modo análogo, definimos **isomorfismo, endomorfismo e automorfismo G-graduado**.*

Proposição 1.2.15. *Se I é um ideal G-graduado de uma álgebra G-graduada A então A/I é uma álgebra G-graduada considerando $(A/I)_g = \{a + I | a \in A_g\}$.*

Prova: É claro que $A/I = \sum_{g\in G} (A/I)_g$, e que $(A/I)_g(A/I)_h \subset (A/I)_{gh}$. Para concluir resta mostrar que a soma é direta. Suponhamos que $(\sum_{g\in G}(a_g + I)) = 0$. Neste caso $(\sum_{g\in G} a_g) \in I$ e como I é G-graduado segue do Lema 4.1.1 que $a_g \in I$, ou seja $(a_g + I) = 0$, assim $A/I = \oplus_{g\in G}(A/I)_g$ e o lema está provado. ■

A proposição a seguir é uma versão graduada do Teorema 1.1.27, ao longo da dissertação também iremos nos referir a ela como Teorema dos Isomorfismos.

Proposição 1.2.16. ***Teorema dos Isomorfismos*** *Sejam A e B álgebras G-graduadas e $\Phi : A \to B$ um homomorfismo G-graduado. Então, o $\ker(\Phi)$ é um ideal G-graduado de A e a álgebra quociente $A/\ker \Phi$ é isomorfa (como álgebra graduada) à $Im\Phi = \Phi(A)$.*

Prova: É fácil ver que $\ker(\Phi)$ é um ideal de A, vamos mostrar que ele é G-graduado. Seja $a \in \ker(\Phi)$ e $a = \sum_{g\in G} a_g$, onde $a_g \in A_g$ é a sua decomposição como soma de elementos homogêneos. Como Φ é homomorfismo graduado temos que $0 = \sum_{g\in G}(\Phi(a_g))$ e $\Phi(a_g) \in B_g$, portanto $\Phi(a_g) \in \ker(\Phi)$.

A aplicação $\Psi : A/\ker \Phi \to B$ dada por $\Psi(a + \ker(\Phi)) = \Phi(a)$ está bem definida pois se a, $b \in A$ são tais que $a + \ker(\Phi) = b + \ker(\Phi)$, então $a - b \in \ker(\Phi)$ e $\Phi(a) = \Phi(b)$, ou seja $\Psi(a + \ker(\Phi)) = \Psi(b + \ker(\Phi))$. É fácil ver que Ψ é um homomorfismo graduado, assim resta apenas mostrar que Ψ é injetor. Se $\Psi(a + \ker(\Phi)) = 0$ então $\Phi(a) = 0$ e $a \in \ker(\Phi)$, logo $a + \ker(\Phi) = 0$ e o lema está provado. ■

1.2.2 Álgebras Graduadas Livres e Identidades Polinomiais Graduadas

Precisamos do conceito de álgebra associativa livre G-graduada. Consideremos uma família $\{X_g | g \in G\}$ de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Tomemos então $X = \bigcup_{g \in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K\langle X\rangle$. Definimos agora

$$wt(1) = 0 \quad \text{e} \quad wt(x_1 x_2 \ldots x_m) = wt(x_1)wt(x_2)\ldots wt(x_m)$$

onde $wt(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$. Sendo então m um monômio de $K\langle X\rangle$, dizemos que $wt(m)$ é o G-grau de m. Tomando para cada $g \in G$

$$K\langle X\rangle_g = \langle m \mid m \text{ é monômio de } K\langle X\rangle \;\text{ e }\; wt(m) = g\rangle$$

temos

$$K\langle X\rangle = \oplus_{g \in G} K\langle X\rangle_g \quad \text{e} \quad K\langle X\rangle_g K\langle X\rangle_h \subseteq K\langle X\rangle_{gh}$$

para quaisquer g, $h \in G$, assim $K\langle X\rangle$ é uma álgebra G-graduada denominada a álgebra associativa livre G-graduada.

Lema 1.2.17. *A álgebra G-graduada $K\langle X\rangle$ satisfaz a seguinte propriedade universal: Para toda álgebra G-graduada A, toda função $\Phi : \cup_{g\in G} X_g \to A$ tal que $\Phi(X_g) \subseteq A_g$, para todo $g \in G$ pode ser estendida a um único homomorfismo de álgebras.*

Agora podemos dar a definição de identidade polinomial graduada.

Definição 1.2.18. *Seja $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Dizemos que um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ é uma* ***identidade G-graduada*** *de A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{wt(x_i)}$ com $i = 1, \ldots, n$.*

Daremos agora a definição de T_G-ideal, que é o análogo para o caso de identidades polinomiais graduadas do conceito de T-ideal.

Definição 1.2.19. *Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre G-graduada. Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é dito ser um* ***T_G-ideal*** *se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G-graduado φ de $K\langle X\rangle$. Dado um subconjunto S qualquer de $K\langle X\rangle$, definimos o* ***T_G-ideal gerado*** *por S, que é denotado por $\langle S\rangle^{T_G}$, como sendo a interseção de todos os T_G-ideais de $K\langle X\rangle$ que contêm S. Quando $G = \mathbb{Z}_n$ o T_G-ideal também será denotado por T_n.*

É claro que $K\langle X\rangle$ é um T_G-ideal que contém S, assim na definição acima $\langle S\rangle^{T_G}$ é interseção de uma família não vazia de conjuntos, além disso não é difícil ver que a interseção de uma família qualquer de T_G-ideais é ainda um T_G-ideal, portanto $\langle S\rangle^{T_G}$ está bem definido e é o menor T_G-ideal que contém S.

O T_G-ideal gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto

$$\begin{aligned}\{h_1 f(g_1,\ldots,g_n)h_2 \quad | \quad & f(x_1,\ldots,x_n)\in S \ , \ h_1,h_2,g_1,\ldots,g_n\in K\langle X\rangle, \\ & wt(f_1)=wt(x_1),\ldots,wt(f_n)=wt(x_n)\}.\end{aligned}$$

A proposição a seguir é bastante útil, sua demonstração é simples e por isso será omitida.

Proposição 1.2.20. *Sendo A uma álgebra G-graduada, temos que o conjunto $T_G(A)$ das identidades G-graduadas de A é um T_G-ideal de $K\langle X\rangle$.*

Exemplo 1.2.21. *Consideremos a álgebra de Grassmann G com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural (conforme definida no Exemplo 1.2.3). Como $ab=-ba$ para quaisquer elementos $a,\, b\in G_1$, temos que $f(x_1,x_2)=x_1x_2+x_2x_1\in K\langle X\rangle$, onde $K\langle X\rangle$ é a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada, com $\alpha(x_1)=\alpha(x_2)=1$, é identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de G.*

O próximo resultado mostra uma importante relação entre os conceitos de identidades polinomiais ordinárias e graduadas.

Proposição 1.2.22. *Sejam A e B duas álgebras. Se A e B possuem G-graduações tais que $T_G(A)\subseteq T_G(B)$, então $T(A)\subseteq T(B)$. Ademais, se $T_G(A)=T_G(B)$, então $T(A)=T(B)$.*

Prova: Consideremos a álgebra associativa livre $K\langle Y\rangle$, onde $Y=\{y_1,y_2,\ldots\}$ e seja $f(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in T(A)$. Para cada $i=1,\,2,\,\ldots,\,n$, escolhemos $x_{ig}\in X_g$ e definimos o polinômio $f_1=f(\sum_{g\in G}x_{ig},\ldots,\sum_{g\in G}x_{ng})\in K\langle X\rangle$.

Como $f\in T(A)$, é fácil ver que $f_1\in T_G(A)$ e daí $f_1\in T_G(B)$. Dados $b_1,\,b_2,\,\ldots,\,b_n\in B$, tomemos $b_{ig}\in B_g$, para $i=1,\,\ldots,\,n$ e $g\in G$, tais que $b_i=\sum_{g\in G}b_{ig}$. Fazendo então as substituições $x_{ig}=b_{ig}$, para $i=1,\,\ldots,\,n$ e $g\in G$, temos

$$f(b_1,b_2,\ldots,b_n)=f\left(\sum_{g\in G}b_{1g},\sum_{g\in G}b_{2g},\ldots,\sum_{g\in G}b_{ng}\right)=0$$

e assim $f\in T(B)$.

Se $T_G(A)=T_G(B)$, então $T_G(A)\subseteq T_G(B)$ e $T_G(B)\subseteq T_G(A)$, donde temos a última afirmação. ■

Observação 1.2.23. *É importante observar que a recíproca do resultado acima é falsa. As álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas $E = E_0 + E_1$ e $E = E + 0$ (graduação trivial), satisfazem identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas diferentes.*

Definição 1.2.24. *Uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada A é supercomutativa, se $ab = (-1)^{wt(a)wt(b)}ba$ para todos a, $b \in A_0 \cup A_1$.*

Exemplo 1.2.25. *A álgebra de Grassmann é um exemplo de álgebra supercomutativa.*

Definição 1.2.26. *Seja $K\langle X\rangle = K\langle X\rangle_0 + K\langle X\rangle_1$ a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada definida como acima. Para os monômios f, $g \in K\langle X\rangle$, consideramos as relações $fg = (-1)^{w(f)w(g)}gf$ e seja I o ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado gerado por estas relações. A álgebra $K(Y;Z) = K\langle X\rangle/I$ é naturalmente $\mathbb{Z}_2$-graduada (pois herda a graduação de $K\langle X\rangle$) e é chamada de álgebra livre supercomutativa.*

A álgebra $K(Y;Z)$ satisfaz a seguinte propriedade universal: Para toda álgebra supercomutativa $A = A_0 \oplus A_1$, toda função $\Phi : Y \cup Z \to A$ tal que $\Phi(Y) \subseteq A_0$ e $\Phi(Z) \subseteq A_1$ pode ser estendido a um único homomorfismo de álgebras.

1.2.3 Identidades Graduadas Multilineares, Homogêneas e Próprias

Nesta seção veremos que sob determinadas condições podemos simplificar as identidades com que trabalhamos, podendo nos restringir a alguns tipos especiais de identidades.

Lema 1.2.27. *Seja $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle X\rangle$ onde f_i é a componente homogênea de f com grau i em x_i.*

(i) Se o corpo K contém mais que n elementos então $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \langle f\rangle^{T_G}$;

(ii) Se a característica do corpo é zero ou maior que o grau de f então $\langle f\rangle^{T_G}$ admite uma base composta por uma família finita de polinômios multilineares.

Prova: (i) Seja $I = \langle f\rangle^{T_G}$ o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por f. Escolhemos $n+1$ elementos distintos $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ de K. Como I é um T_G-ideal, obtemos que

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in I \ ; \ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Consideramos estas equações como um sistema linear com incógnitas f_i para $i = 0, 1, \ldots, n$. Sendo o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i)$$

o determinante de Vandermonde que é diferente de 0, temos que cada $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in I$.
(ii) Por (i), podemos assumir que $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é multihomogêneo. Seja $k = \deg_{x_1} f$. Escrevemos $f_i(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) \in I$ (aqui y_1, $y_2, \in X_{wt(x_1)}$) sob a forma

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{k} f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_m)$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1. Logo, $f_i \in I$ para $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k$. Como $\deg_{y_j} f_i < k$; $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1$; $j = 1,\ 2$, podemos aplicar argumentos indutivos e obtemos um conjunto de conseqüências multilineares de f. Para ver que estas identidades multilineares são uma base para $\langle f \rangle^{T_G}$ é suficiente observarmos que

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_m) = \binom{k}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_m)$$

e que o coeficiente binomial é diferente de 0, pois temos por hipótese que $\mathrm{char}\,(K) = 0$ ou $\mathrm{char}\, K \geq \deg(f)$. ■

Corolário 1.2.28. *Seja A uma álgebra. Então,*

(i) Se o corpo K é infinito todas identidades polinomiais graduadas de A seguem de suas identidades graduadas multihomogêneas;

(ii) Se o corpo K tem característica zero todas as identidades polinomiais graduadas de A seguem de suas identidades multilineares graduadas.

Quando a álgebra é unitária podemos restringir a nossa busca de identidades polinomiais a um determinado tipo de polinômios (polinômios próprios), conforme explicamos a seguir. No que segue $Y = X_\varepsilon$ e $Z = \cup_{g \neq \varepsilon} X_g$, assim $X = Y \cup Z$. As variáveis de grau ε serão denotas por y_i, $i \in \mathbb{N}$ e as variáveis de grau diferente de ε serão denotadas por z_j, $j \in \mathbb{N}$, quando uma variável tiver grau arbitrário será denotada por x_i, $i \in \mathbb{N}$.

Definição 1.2.29. *Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é chamado* ***polinômio próprio****, se as variáveis de grau ε aparecem em comutadores apenas, isto é,*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_{i,..,j} z_1^{a_1} z_2^{a_2} \ldots z_k^{a_k} [x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}] \ldots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}] \ ; \ \alpha_{i,\ldots,j} \in K,$$

onde $a_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k$ e assumimos que 1 é um produto de um conjunto vazio de comutadores. Denotamos por $B_G(X)$ o conjunto de todos os polinômios próprios de $K\langle X\rangle$.

O Lema 1.2.34 mostra a importância dos polinômios próprios para encontrar uma base das identidades de uma álgebra unitária. A demonstração está baseada no Teorema de Witt e no Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Antes de enunciá-los precisamos da definição a seguir.

Definição 1.2.30. *Se A é uma álgebra associativa e a álgebra de Lie L é isomorfa a uma subálgebra da álgebra de Lie $A^{(-)}$, definida no Exemplo 1.1.8, dizemos que A é uma* ***álgebra envolvente*** *de L. A álgebra associativa $U = U(L)$ é a* ***álgebra envolvente universal da álgebra de Lie*** *L, se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e U satisfaz a seguinte propriedade universal: Para qualquer álgebra associativa A e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : G \to R^{(-)}$ existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \to R$ que estende φ, ou seja, tal que $\psi(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in L$.*

O teorema a seguir garante que toda álgebra de Lie possui uma álgebra envolvente universal, que é única a menos de isomorfismos. Recordamos que no início deste capítulo fizemos um comentário que toda álgebra de Lie L é isomorfa a subálgebra de alguma álgebra $A^{(-)}$ para alguma álgebra associativa.

Teorema 1.2.31. ***Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt*** *Toda álgebra de Lie L possui uma única (a menos de isomorfismos) álgebra envolvente universal $U(L)$. Se L tem uma base $E = \{e_i \mid i \in I\}$, onde I é um conjunto ordenado, então $U(L) = K\langle E\rangle/J$, onde J é o ideal de $K\langle E\rangle$ gerado pelos polinômios $[e_i, e_j] - e_i * e_j$ (símbolo $*$ denota a multiplicação em G). Além disso os elementos*

$$\{e_{i_1} \ldots e_{i_p}, i_1 \leq \cdots \leq i_p, p = 0, 1, 2, \ldots\},$$

formam uma base de $U(L)$.

Prova: [11],Teorema 1.3.1, pg 11. ■

Teorema 1.2.32. ***Teorema de Witt*** *A subálgebra de Lie $L(X)$ de $K\langle X\rangle^{(-)}$ gerada por X é livre na classe das álgebras de Lie, além disso $U(L(X)) = K\langle X\rangle$.*

Prova: [11], Teorema 1.3.5, pg 14. ■

Agora vamos utilizar estes dois teoremas para encontrar uma base de $K\langle X\rangle$ que será bastante útil.

Proposição 1.2.33. *Suponhamos que os elementos*

$$x_1, x_2, \dots, [x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{j_1}, x_{j_2}], \dots, [x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}], \dots,$$

formam uma base ordenada de $L(X)$ onde os elementos $x_1, x_2, \dots$ precedem os comutadores. Então

(i) O espaço vetorial $K\langle X\rangle$ tem base formada pelos elementos

$$x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m} [x_{i_1}, x_{i_2}]^b \dots [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]^c,$$

onde $a_1 \dots, a_m, b, \dots, c \geq 0$ e $[x_{i_1}, x_{i_2}] < \dots < [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]$, na ordenação da base de $L(X)$.

(ii) Os elementos desta base tais que $a_i = 0$ sempre que $wt(x_i) = 0$, $1 \leq i \leq m$, formam uma base para $B_G(X)$.

Prova: O item (i) segue do Teorema de Witt que garante que $U(L(X)) = K\langle X\rangle$, e do Teorema de Poincaré-Brirkhoff-Witt, que nos diz como encontrar uma base para $U(L(X))$ a partir de uma base ordenada de $L(X)$. O item (ii) segue diretamente do item (i) e da definição de $B_G(X)$. ■

A seguir utilizaremos a base de $K\langle X\rangle$ dada na proposição anterior para provar que quando o corpo é infinito as identidades graduadas de uma álgebra seguem de suas identidades próprias. Para isto será necessário utilizar o seguinte fato: Se A é uma álgebra G-graduada então sua unidade é homogênea de grau ε. Isto será provado no Capítulo 2, Lema 2.1.5 (ii).

Lema 1.2.34. *Se A é uma álgebra unitária G-graduada sobre um corpo infinito K então todas as identidades polinomiais graduadas de A seguem das suas identidades próprias (ou seja, daquelas em $T_G(A) \cap B_G(X)$). Se $char K = 0$ então todas identidades polinomiais graduadas de A seguem das suas identidades próprias multilineares.*

Prova: Seja $f(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n) \in K\langle X\rangle$. Pela Proposição 5.1.4 podemos escrever f como

$$f = \sum \alpha_a y_1^{a_1}\ldots y_n^{a_n} z_{n+1}^{a_{n+1}}\ldots z_m^{a_m} w_a(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n), \quad \alpha_a \in K,$$

onde $w_a(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n) \in B_G(X)$ e a soma é feita sobre as m-uplas $a = (a_1,\ldots,a_m)$ tais que $a_i \leq \deg_{y_i}(f), 1 \leq i \leq n$ e $a_i \leq \deg_{z_i}(f), n+1 \leq i \leq m$. Para cada f dessa forma definimos o conjunto

$$\begin{aligned} M(f) &= \{M_1, M_2, \ldots, M_l\} \\ &= \{a_1 | a_1 \text{é o primeiro termo da } n\text{-upla } a = (a_1\ldots,a_m) \text{ e } \alpha_a \neq 0\}, \end{aligned}$$

onde $M_1 > M_2 \cdots > M_l > 0$.

Afirmamos que se $f \in T_G(A)$ e f é multihomogêneo em y_1, então

$$g_i = \sum_{a_1 = M_j} \alpha_a y_2^{a_2}\ldots y_n^{a_n} z_{n+1}^{a_{n+1}}\ldots z_m^{a_m} w_a(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n) \in T_G(A), j = 1,2,\ldots,n.$$

A demonstração do lema segue desta afirmação, juntamente com o Lema 5.2.8, pois se f é multihomogêneo então f é conseqüência das identidades $\{w_a(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n)|\alpha_a \neq 0\}$, que são multilineares se f é multilinear. Agora demonstraremos a afirmação.

É claro que

$$w_a(y_1+1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n) = w_a(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n).$$

Como $wt(1) = \varepsilon$ segue que $f(y_1+1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n)$ também é identidade polinomial graduada para A e concluímos que

$$f(y_1+1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n) = \sum \alpha_a \sum_{i=0}^{a_1} \binom{a_1}{i} y_1^i x_2^{a_2}\ldots x_m^{a_m} w_a(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n) \in T_G(A).$$

Como f é multihomogênea $a_1 + \deg_{y_1}(w_a(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n)) = \deg_{y_1}(f)$, assim a componente homogênea com menor grau possível em relação a y_1 se obtém quando $a_1 = M_1$ e é dada por

$$\sum_{a_1 = M_1} \alpha_a y_2^{a_2}\ldots z_m^{a_m} w_a(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n), \tag{1.1}$$

onde o sub-índice $a_1 = M_1$ no somatório significa que a soma é feita sobre os $a = (a_1\ldots,a_m)$ tais que $a_1 = m$. O corpo K é infinito, logo segue do Lema 5.2.8 que o polinômio 1.1 pertence a $T_G(A)$.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para 1, 2, $\ldots$, k, onde k é um número natural menor que n.

Multiplicando $g_1 + g_2 + \cdots + g_k$ por $y_1^{a_1}$ e subtraindo o produto de $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ obtemos

$$h(y_1, \ldots, y_n, z_{n+1}, \ldots, z_m) = \sum_{a_1 > M_k} \alpha_a y_1^{a_1} \ldots y_n^{a_n} z_{n+1}^{a_{n+1}} \ldots z_m^{a_m} w_a(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in T_G(A).$$

É claro que $M(g) = \{M_{k+1}, \ldots, M_l\}$ e aplicando os argumentos anteriores ao polinômio g concluímos que

$$\sum_{a_1 = M_{k+1}} \alpha_a y_2^{a_2} \ldots y_n^{a_n} z_{n+1}^{a_{n+1}} \ldots z_m^{a_m} w_a(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in T_G(A),$$

e a afirmação está provada. ■

Como veremos este lema será fundamental para encontrar uma base para $T_2(G \otimes G)$ no Capítulo 5.

CAPÍTULO 2

Graduações nas Álgebras de Matrizes

Neste capítulo estudamos as graduações na álgebra das matrizes sobre um corpo K. A maioria dos resultados estão em [6].

2.1 Graduações Fina e Induzida

Nesta seção definiremos dois tipos importantes de graduação nas álgebras de matrizes, a saber, a "fina" e a induzida, também provaremos alguns lemas que serão usados nas próximas seções. Recordamos que a G-graduação

$$R = M_n(K) = \oplus_{g\in G} R_g$$

na álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K é dita **elementar** se existe uma n-upla $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ tal que $E_{ij} \in R_{g_i^{-1}g_j}$.

Definição 2.1.1. *Sejam G um grupo, H subgrupo de G, $A = \oplus_{h\in H} A_h$ uma álgebra H-graduada e $B = M_n(K) = \oplus_{g\in G} B_g$ a álgebra matricial com a G-graduação elementar determinada pela n-upla $(g_1, \ldots, g_n)$ em G^n. A G-graduação $R = \oplus_{g\in G} R_g$ na álgebra $R = A \otimes B$, definida na seguinte maneira: $R_g = Span\{a \otimes E_{ij} | a \in A_h, g_i^{-1} h g_j = g\}$, é denominada* ***graduação induzida****.*

Não é difícil verificar que a decomposição $R = \oplus_{g\in G} R_g$ é de fato uma G-graduação. Para ver isto considere $r = a \otimes E_{ij} \in R_g$ e $s = b \otimes E_{kl} \in R_h$ então $rs = \delta_{jk} ab \otimes E_{il}$ e pela definição acima $rs \in R_{g_i^{-1}wt(ab)g_l}$. Se $rs \neq 0$ então $j = k$, $g = g_i^{-1}wt(a)g_j$ e $h = g_j^{-1}wt(b)g_l$, assim $g_i^{-1}wt(ab)g_l = g_i^{-1}wt(a)g_jg_j^{-1}wt(b)g_l = gh$. Portanto $rs \in R_{gh}$. Daí segue que, em geral, se $r \in R_g$ e $s \in R_h$ então $rs \in R_{gh}$.

Definição 2.1.2. *Uma G-graduação $R = \oplus_{g\in G}R_g$ em uma álgebra A é denominada **fina** se* $\dim A_g \leq 1$ *para todo $g \in G$.*

Lema 2.1.3. *Seja $R = M_n(K)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K, munida de uma G-graduação, $R = \oplus_{g\in G}R_g$. Se as matrizes escalares estão na componente unitária R_ε e todas as matrizes E_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, são homogêneas, então a graduação é elementar.*

Prova: Observemos que se um elemento idempotente u é homogêneo então $u \in R_\varepsilon$, pois se $u \in R_g$, então $u^2 \in R_{g^2}$. Como $u = u^2$, obtemos que $u \in R_g \bigcap R_{g^2}$, ou seja, $R_g = R_{g^2}$. Logo $g = g^2$ e portanto $g = \varepsilon$. Assim as matrizes $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ estão na componente R_ε. Vamos mostrar que isto implica que E_{ij} é homogênea para todos os $1 \leq i, j \leq n$.

Observemos que para quaisquer $1 \leq k, t \leq n$ existem $g \in G$ e $a \in R_g$ com $a = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$ e $a_{kt} \neq 0$. De fato, se esta afirmação fosse falsa então para todo $g \in G$ teríamos $R_g \subset \widetilde{R}$, onde $\widetilde{R} = Span\{E_{i,j} | (ij) \neq (k, t)\}$ e portanto $R \subset \widetilde{R}$, o que é um absurdo, já que $E_{kt} \in R$ e $E_{kt} \notin \widetilde{R}$. Como $E_{kk}, E_{tt}, a_{kt}^{-1}E \in R_\varepsilon$, onde E é a identidade de R, segue que

$$E_{kt} = (a_{kt}^{-1}E)E_{kk}(\sum_{ij} a_{ij}E_{ij})E_{tt} \in R_g,$$

e o lema está provado. ■

Observação 2.1.4. *Na demonstração do lema anterior utilizamos apenas que cada elemento não nulo do corpo tem inverso multiplicativo. A mesma demonstração vale se trocarmos o corpo K por um anel com divisão D.*

No Lema a seguir sempre consideramos ideais unilaterais.

Lema 2.1.5. *Sejam $R = \oplus_{g\in G}R_g$ um anel munido de uma G-graduação finita, ε a unidade de G, e R_ε a componente unitária de R nessa graduação. Então*

(i) Se R não tem ideais nilpotentes não nulos então R_ε não tem ideais nilpotentes não nulos;

(ii) Se R é um anel com unidade 1, então $1 \in R_\varepsilon$;

(iii) Se R é Artiniano, então R_ε também é Artiniano.

Prova: Vamos demonstrar primeiro (i) para ideais a esquerda. Seja I um ideal a esquerda de R_ε. Suponhamos que I é nilpotente. Como a graduação é finita temos que $|SuppR| = n$ para algum natural n. Seja $J = RI$ o ideal à esquerda de R gerado por I. Vamos mostrar que se $I^m = 0$, então $J^{mn} = 0$. Para isto basta mostrarmos que para quaisquer $x_1, \ldots, x_{mn} \in I$ e para quaisquer $a_1, \ldots, a_{mn} \in R$ homogêneos não nulos vale a igualdade

$$a_1x_1a_2x_2 \ldots a_{mn}x_{mn} = 0. \tag{2.1}$$

Sendo $a_1, \ldots, a_{mn} \in R$ homogêneos não nulos, existem $g_1, \ldots, g_{mn} \in SuppR$ tais que $a_i \in R_{g_i}$, $i = 1, \ldots, mn$. Considere os elementos $u_1 = g_1$, $u_2 = g_1g_2, \ldots, u_{mn} = g_1 \ldots g_{mn}$ de G. Se $u_i \notin SuppR$ então $a_1x_1a_2x_2 \ldots a_ix_i \in R_{u_i} = \{0\}$, e a igualdade (2.1) vale. Se $u_i \in SuppR$, $i = 1, \ldots, mn$ então como $|SuppR| = n$ existem, pelo princípio da casa de pombos, índices $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ tais que $u_{i_1} = \cdots = u_{i_m}$. Neste caso denotamos:

$$b_k = a_{i_k+1}x_{i_k+1}a_{i_k+2} \ldots a_{i_{k+1}}, \quad k = 1 \ldots, m-1$$

Assim $wt(b_0) = wt(b_0b_1) = \cdots = wt(b_0b_1 \ldots b_{m-1})$, onde $b_0 = a_1x_1 \ldots a_{i_1}x_{i_1}$, e portanto $wt(b_i) = e$, $i = 1, \ldots, m-1$. Ou seja, $b_1, \ldots b_{m-1} \in R_\varepsilon$ e no lado esquerdo da igualdade (2.1) aparece o fator $c = x_{i_1}b_1x_{i_2}b_2 \ldots b_{m-1}x_{i_m}$. Como $b_1 \ldots b_{m-1} \in R_e$ e I é um ideal a esquerda de R_ε segue que $c \in I^m = 0$, e portanto vale (2.1). Para ideais a direita o lema pode ser demonstrado de maneira análoga.

Para mostrar (ii) considere 1, a identidade do anel R e $1 = 1_\varepsilon + \sum_{g \neq \varepsilon} 1_g$ sua decomposição em fatores homogêneos. Para $x \in R$ temos $x = x1_\varepsilon + \sum_{g\neq\varepsilon} x1_g$, donde $x - x1_\varepsilon = \sum_{g\neq\varepsilon} x1_g$. Como para todo $g \neq \varepsilon$ temos $wt(x1_g) = wt(x)wt(1_g) \neq wt(x) = wt(x - x1_\varepsilon)$ segue que $x - x1_\varepsilon = 0$, ou seja $x = x1_\varepsilon$. Analogamente $x = 1_\varepsilon x$, e portanto $1 = 1_\varepsilon$.

Vamos agora mostrar (iii). Para isto seja I um ideal a esquerda qualquer de R_ε. Então o ideal RI de R gerado por I é homogêneo. Suponha que $a \in R$, $x \in I$ e que a é homogêneo. Se $ax \in R_\varepsilon$ então $a \in R_\varepsilon$ e, portanto $ax \in I$. Logo $RI \bigcap R_\varepsilon = I$. Assim qualquer cadeia estritamente descendente de ideais de R_e gera uma cadeia estritamente descendente de ideais em R e (iii) está provada. ■

Lema 2.1.6. *Sejam R uma K-álgebra com unidade 1 e A uma subálgebra de R isomorfa a $M_n(F)$. Se E_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, são as matrizes elementares de A e $1 = E_{11} + \ldots E_{nn}$ então $R = AC \simeq A \otimes C \simeq M_n(C)$, onde C é o centralizador de A em R.*

Prova: Dado $x \in R$, definimos
$$x_{ij} = \sum_s E_{si} x E_{js}.$$
Então para quaisquer k, l, obtemos
$$x_{ij}E_{kl} = \sum_s E_{si}xE_{js}E_{kl} = E_{ki}xE_{jk}E_{kl} = E_{ki}xE_{jl},$$
e
$$E_{kl}x_{ij} = \sum_s E_{kl}E_{si}xE_{js} = E_{kl}E_{li}xE_{jl} = E_{ki}xE_{jl},$$
ou seja, x_{ij} comuta com qualquer elemento de A. Por outro lado,
$$\sum_{ij} x_{ij}E_{ij} = \sum_{ijs} E_{si}xE_{js}E_{ij} = \sum_{ij} E_{ii}xE_{jj} = (E_{11} + \cdots + E_{jj})x(E_{11} + \cdots + E_{jj}) = 1x1 = x.$$
Portanto $R = AC$. ■

De agora em diante denotaremos a identidade de um anel por E.

Proposição 2.1.7. *Seja R um anel com unidade, munido de G-graduação $R = \oplus_{g\in G} R_g$. Se $x \in R_h$ é invertível, então $x^{-1} \in R_{h^{-1}}$.*

Prova: Seja $x^{-1} = \sum_{g\in G} r_g$ a decomposição de x^{-1} em soma de homogêneos. Temos que $E = xx^{-1} = \sum_{g\in G} xr_g$. Observe que $wt(xr_g) = \varepsilon$, somente se, $g = h^{-1}$, e como $wt(E) = \varepsilon$ segue que $r_g = 0$ para todo $g \neq h^{-1}$. Portanto, $x^{-1} = r_{h^{-1}}$. ■

Lema 2.1.8. *Seja $R = M_k(K)$ a álgebra das matrizes $k \times k$ sobre um corpo K munido de G-graduação $R = \oplus_{g\in G} R_g$. Se $\dim R_\varepsilon = 1$ então esta G-graduação é fina e os elementos homogêneos não-nulos de R são invertíveis.*

Prova: Pelo Lema 2.1.5 a identidade E está em R_ε e como sua dimensão é 1 segue que R_ε é o conjunto das matrizes escalares. Seja $x \in R_g$ um elemento homogêneo, não nulo tal que $\det x = 0$. Neste caso, $\det axb = 0$ para quaisquer a, $b \in R$. Observemos que se $z \in RxR$ então existem a_i, $b_i \in R$ homogêneos tais que $z = \sum_i a_i x b_i$. Se $z \in RxR \cap R_\varepsilon$ então $a_i x b_i \in R_\varepsilon$. Assim $a_i x b_i$ são matrizes escalares com determinante nulo, logo $a_i x b_i = 0$ e $z = 0$. Portanto $RxR \cap R_\varepsilon = 0$. Assim x gera um ideal próprio em R, o que é uma contradição. Agora, se $0 \neq x \in R_g$ então x é invertível e, pela Proposição 2.1.7, $x^{-1} \in R_{g^{-1}} \neq 0$. Segue daí que se $0 \neq x, y \in R_g$ então x é invertível e $x^{-1}y = \lambda E$, pois $x^{-1}y \in R_\varepsilon$. Logo, x e y são linearmente dependentes e $\dim R_g = 1$. ■

Corolário 2.1.9. *Se a álgebra $M_n(K)$ das matrizes sobre um corpo K tem uma graduação fina então todo elemento homogêneo não nulo de $M_n(K)$ é invertível.*

Prova: Segue diretamente dos Lemas 2.1.5 e 2.1.8. ■

Lema 2.1.10. *Seja $M_n(K) = R = \oplus_{g\in G} R_g$ a álgebra das matrizes sobre um corpo K munida de G-graduação fina. Então $H = SuppR$ é um subgrupo de G.*

Prova: Seja $0 \neq a \in A_g$ um elemento homogêneo arbitrário. Pelo Lema 2.1.8 o elemento a deve ser invertível. Seja $H = SuppR$ e suponha que $a, b \in H$. Desse modo $R_g \neq 0$ e $R_h \neq 0$. Então existem $a \in R_g$, $b \in R_g$ não nulos e como a e b são invertíveis segue que ab é não nulo. Além disso $wt(ab) = gh$ e portanto $R_{gh} \neq 0$. Logo H é fechado para a multiplicação. Pelo Corolário 2.1.9, se $h \in H$ então $h^{-1} \in H$. Portanto H é subgrupo de G. ■

Definição 2.1.11. *Dizemos que uma álgebra G-graduada A é* ***álgebra graduada com divisão*** *se cada elemento homogêneo não nulo é invertível.*

Como conseqüência dos Lemas 2.1.8 e 2.1.10 obtemos o corolário seguinte.

Corolário 2.1.12. *Seja $A = M_n(K) = \oplus_{g\in G} A_g$ a álgebra das matrizes sobre um corpo algebricamente fechado K, e munida de G-graduação. Então A é uma álgebra graduada com divisão se, e somente se, a G-graduação é fina.*

Prova: Se a G-graduação é fina então, pelo Corolário 2.1.9, A é uma álgebra G-graduada com divisão. Suponha que cada elemento homogêneo não nulo é invertível. Pelo Lema 2.1.5 a componente homogênea A_ε é uma subálgebra semi-simples contendo todas as matrizes escalares. Por hipótese A_ε é uma álgebra graduada com divisão sobre K, sendo K é algebricamente fechado temos que $\dim A_\varepsilon = 1$. E a partir do Lema 2.1.8 obtemos que todos os subespaços não nulos A_g têm dimensão 1. ■

2.2 Graduação Fina e Representações Projetivas

Nesta seção mostraremos que a classificação das graduações finas é equivalente a um conhecido problema de teoria dos grupos.

Definição 2.2.1. *Sejam G um grupo finito e V um espaço vetorial sobre um corpo K. Uma aplicação $f : G \longrightarrow GL(V)$ é chamada* ***representação projetiva de** G **em** V* *se $f(\varepsilon) = E$,* *aqui ε é a identidade de G e E é a identidade de $GL(V)$, e $f(g)f(h) = \alpha(g,h)f(gh)$ para quaisquer g, $h \in G$ onde $\alpha(g,h)$ é um escalar não nulo. Uma representação projetiva é denominada irredutível se V não tem subespaço W não trivial tal que $f(g)(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$.*

Com esta definição podemos ver f como função de G para $PGL(V) = GL(V)/Z(GL(V))$; $PGL(V)$ é chamado de grupo linear projetivo. Então f é homomorfismo de grupos (os escalares somem pois serão $\alpha(g,h)I_n$).

Não é difícil vermos que para um grupo de ordem n a dimensão das representações projetivas irredutíveis é limitada por $\sqrt{n}$ quando K é algebricamente fechado, a demonstração desse fato é bem parecida com a demonstração do Teorema 2.2.2 abaixo (e por isso iremos omiti-la). Qualquer grupo abeliano do tipo $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ tem uma representação irredutível de dimensão n, podemos obter tal representação da seguinte maneira. Seja A uma matriz com 1 nas posições $(i, i+1)$ e $(n, 1)$, e com zero nas outras. Seja B a matriz diagonal onde na diagonal aparecem as raízes n-ésimas da unidade. A aplicação $f : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow GL(\mathbb{C}^n)$ dada por $f((\overline{a}, \overline{b})) = A^a B^b$ é uma representação projetiva irredutível de dimensão n.

Em geral é um problema complicado classificar os grupos de ordem n^2 que tem representação projetiva irredutível de dimensão n e encontrar tais representações.

O teorema a seguir mostra que de certo modo a classificação das graduações finas nas álgebras de matrizes é equivalente à descrição dos grupos finitos com representações projetivas de grau máximo.

De acordo com o Lema 2.1.10, o suporte de qualquer graduação fina na álgebra das matrizes é um subgrupo finito de G.

Teorema 2.2.2. *Qualquer graduação fina em uma álgebra de matrizes $R = M_n(K)$, sobre um corpo K, determina uma representação projetiva n-dimensional do grupo $H = SuppR$, de ordem n^2. Se K é algebricamente fechado e G é um grupo de ordem n^2 então qualquer representação projetiva irredutível n-dimensional de G determina uma graduação fina na álgebra de matrizes $M_n(K)$.*

Prova: Seja $M_n(K) = R = \oplus_{g\in G} R_g$ uma graduação fina na álgebra das matrizes. Sabemos, pelo Lema 2.1.10, que $H = SuppR$ é um subgrupo de G e que $\dim R_h = 1$ para todo $h \in H$. Em cada componente R_h, $h \in H$ e $h \neq \varepsilon$ escolhemos uma matriz não nula denotada por $f(h)$. Se $h = \varepsilon$ definimos $f(\varepsilon) = E$, a matriz identidade. Temos que $f(g)f(h) = \alpha(g,h)f(gh)$, para algum escalar não nulo $\alpha(g,h)$, já que cada componente R_h, $h \in H$, tem dimensão 1 e $f(g)$, $f(h)$, e $f(gh)$ são não nulos. Assim obtemos uma representação projetiva de H.

Para vermos a irredutibilidade desta representação consideremos um subespaço não nulo W de K^n e suponhamos que

$$f(h)(W) \subseteq W \text{ para todo } h \in H. \tag{2.2}$$

Denotemos por $T : K^n \longrightarrow W^{\perp}$ a projeção de K^n em $W^{\perp}$. Seja $T = \sum_{h \in H} T_h$ a decomposição de T em fatores homogêneos. Como $\dim R_h = 1$ existem escalares λ_h tais que $T = \sum_{h \in H} \lambda_h f(h)$ e por (2.2) segue que $T(W) \subseteq W$. Assim $W^{\perp} = T(W) \subseteq W$ e $W^{\perp} = 0$, logo $W = K^n$.

Agora considere um grupo G de ordem n^2 e $f : G \longrightarrow GL_n(K)$ uma representação projetiva irredutível de dimensão n sobre um corpo algebricamente fechado K. O espaço vetorial

$$A = Span\{f(g) \mid g \in G\} \tag{2.3}$$

é uma subálgebra de $M_n(K)$, pois $f(g)f(h) \in A$ para quaisquer g, $h \in G$ e assim A é fechado para multiplicação. Como K^n é um A-módulo simples e fiel, já que f é irredutível, sobre um corpo algebricamente fechado, segue que $A = M_n(K)$. Daí, os elementos $f(g)$, $g \in G$ são linearmente independentes, ou seja

$$M_n(K) = A = \oplus_{g \in G} A_g, \tag{2.4}$$

onde A_g é o subespaço de $M_n(K)$ gerado por $f(g)$. Pela definição de representação projetiva temos que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para quaisquer g, $h \in G$. Logo (2.4) é uma graduação. ■

Lema 2.2.3. *Se R é uma álgebra simples e $f \in R$ é um elemento idempotente então $A = fRf$ é subálgebra simples de R cuja identidade é f. Além disso se R é graduada então $A = fRf$ é homogênea.*

Prova: Primeiro observemos que se $x = frf$, para algum $r \in R$, sendo $f^2 = f$, temos que

$$fx = f^2rf = frf \quad \text{e} \quad xf = frf^2 = frf = x.$$

Ou seja se $x \in A$ então $fx = xf = x$.

Sejam I um ideal de A, com $I \neq A$, e RIR o ideal de R gerado por I. Se $x \in RIR \cap A$ então existem r_l, $s_l \in R$, $m_l \in I$ tais que $x = \sum r_l m_l s_l$. Como $x = fxf$ e $fm_lf = m_l$ temos que

$$x = fxf = \sum fr_l m_l s_l f = \sum fr_l f m_l f s_l f.$$

Mas $fr_l f m_l f s_l f \in I$, logo $x \in I$. Assim $RIR \cap A \subseteq I \neq A$, e portanto $RIR = 0$, logo $I = 0$, e o resultado está provado. ■

2.3 Teorema Principal

Nesta seção K denotará um corpo algebricamente fechado, $R = M_n(K)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em K, munida de uma G-graduação $R = \oplus_{g \in G} R_g$, e E a identidade de R. O nosso objetivo é provar o teorema a seguir, que dá uma descrição das graduações de $M_n(K)$ em termos das graduações elementar, fina e induzida. Este é o teorema 5.1 de [6].

Teorema 2.3.1. *Sejam K um corpo algebricamente fechado e $M_n(K) = R = \oplus_{g \in G} R_g$ a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em K, graduada por um grupo G. Então existem uma decomposição $n = pq$, um subgrupo $H \subseteqq G$ de ordem p^2 e uma q-upla $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_q) \in G^q$ tais que $M_n(K)$ é isomorfa, como álgebra graduada, ao produto tensorial $M_p(K) \otimes M_q(k)$ com a G-graduação induzida onde $M_p(K)$ é H-graduada com uma graduação fina e $M_q(K)$ tem a G-graduação elementar induzida por $\boldsymbol{g}$.*

Denotaremos por A a componente unitária de R. Pelo Lema 2.1.5 A é uma álgebra semi-simples que contém E. Decompomos a álgebra A em uma soma de componentes simples, $A = A^{(1)} \oplus \cdots \oplus A^{(k)}$. Como K é algebricamente fechado cada $A^{(i)} \simeq M_{q_i}(K)$ é uma algebra de matrizes. Denotemos por e_i a identidade de $A^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$. Então a partir do Lema 2.2.3 concluímos que $R^{(i)} = e_i R e_i$ é uma subálgebra simples e homogênea de R. Denotaremos por $C^{(i)}$ o centralizador de $A^{(i)}$ em $R^{(i)}$.

Proposição 2.3.2. *O centralizador $C^{(i)}$ é uma subálgebra simples e homogênea de R.*

Prova: Pelo Lema 2.1.6, $R^{(i)} = A^{(i)} C^{(i)} \simeq A^{(i)} \otimes C^{(i)}$ e se I é um ideal não nulo de $C^{(i)}$ então $A^{(i)} I$ é um ideal não nulo de $R^{(i)}$. Logo $R^{(i)} = A^{(i)} I$, já que $R^{(i)}$ é simples, e portanto $I = C^{(i)}$. Para verificar que $C^{(i)}$ é homogênea considere $c = \sum_{g \in G} c_g$, onde $c \in C^{(i)}, c_g \in C^{(i)} \bigcap R_g$. Se r é homogêneo então $0 = rc - cr = \sum_{g \in G} rc_g - c_g r$ e essa é a decomposição de $rc - cr$ como soma de fatores homogêneos, logo $rc_g - c_g r = 0$ para todo $g \in G$.

Ou seja, $rc_g = c_g r$, para todo $g \in G$. Segue daí que $rc_g = c_g r$ para todo $r \in R$ e para todo $g \in G$, assim $c_g \in C^{(i)}$. Portanto $C^{(i)}$ é homogênea. ■

No que segue $H^{(i)}$ denotará o suporte de $C^{(i)}$.

Proposição 2.3.3. *A subálgebra $C^{(i)}$ tem uma G-graduação fina e $H^{(i)}$ é um subgrupo de G.*

Prova: Observemos que $\dim(C^{(i)} \cap A^{(i)}) = 1$, pois sendo $A^{(i)}$ isomorfo à uma álgebra de matrizes, se $x \in C^{(i)} \cap A^{(i)}$ então $x = \lambda e_i$. Daí, segue que $\dim C^{(i)} \cap A = 1$ e como $C^{(i)}$ é homogênea segue do Lema 2.1.8 que $C^{(i)}$ é uma álgebra munida de uma graduação fina. Além disso, $\mathrm{Supp} C^{(i)} = H^{(i)}$ é um subgrupo de G, pelo Lema 2.1.10. ■

Agora decompomos as identidades das álgebras $A^{(1)}, \ldots, A^{(k)}$ como uma soma de idempotentes minimais, ou seja, de matrizes unitárias diagonais. Para isto denotaremos por $e^i_{\alpha\beta}$, $1 \leq \alpha, \beta \ \leq q_i$, as matrizes unitárias de $A^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$. Então $e_i = e^i_{11} + \cdots + e^i_{q_i q_i}$.

Proposição 2.3.4. *Existem elementos homogêneos $\overline{x}_{i,i-1} \in e_i R e_{i-1}$ e $x_{i-1,i} \in e_{i-1} R e_i$, onde $2 \leq i \leq k$, tais que*

$$e_k \overline{x}_{k,k-1} e_{k-1} \ldots e_3 \overline{x}_{32} e_2 \overline{x}_{21} e_1 x_{12} e_2 x_{23} \ldots x_{k-1,k} e_k \neq 0$$

e

$$wt(\overline{x}_{i+1,i}) wt(x_{i,i+1}) = \varepsilon.$$

Prova: Temos que

$$e_k R \ldots R e_2 R e_1 R e_2 R \ldots R e_k = e_k R e_k \neq 0. \tag{2.5}$$

Para verificar isso observemos que se m é uma matriz não nula então RmR é um ideal não nulo de R e portanto é igual à R. Daí segue que $R \ldots R e_2 R e_1 R e_2 R \ldots R = R$ e assim (2.5) vale. Assim existem elementos homogêneos $x_{i,j} \in e_i R e_j$ $1 \leq i, j \leq k$ tais que

$$e_k x_{k,k-1} e_{k-1} \ldots e_2 x_{2,1} e_1 x_{1,2} e_2 x_{2,3} \ldots x_{k-1,k} e_k \neq 0. \tag{2.6}$$

Lembramos que $R^{(i)} = A^{(i)} C^{(i)}$ e $A^{(i)} \subseteq R_\varepsilon$, assim cada elemento $r \in R$ se escreve na forma $r = \sum_l a_l c_l$, onde $a_l \in A^{(i)}$ e $c_l \in C^{(i)}$. É claro que $r \in R_g$, se e somente se $c_l \in C^{(i)} \cap R_g$. Logo $R_g = 0$ se, e somente se $C^{(i)} \cap R_g = 0$. Ou seja, $SuppR^{(i)} = SuppC^{(i)} = H^{(i)}$, onde $i = 1, \ldots, k$. Como $x_{1,2} x_{2,1} \in e_2 R e_2$ é homogêneo não nulo, $t_2 = wt(x_{21} x_{12})$ pertence a $H^{(2)}$ que é subgrupo de G. Logo existe $0 \neq z_2 \in C^{(2)}$, tal que $wt(z_2) = t_2^{-1}$. Sabemos que

$C^{(2)}$ tem uma graduação fina e que z_2 é homogêneo e não nulo, assim a partir do Lema 2.1.8 concluímos que z_2 é invertível. Além disso z_2 comuta com e_2, assim considerando $x_{21}^{'} = z_2 x_{21}$, $x_{32}^{'} = x_{32} z_2^{-1}$ obtemos que $x_{32}^{'} e_2 x_{21}^{'} = x_{32} e_2 x_{21}$. Portanto

$$e_k x_{k,k-1} e_{k-1} \dots e_3 x_{32}^{'} e_2 x_{21}^{'} e_1 x_{1,2} e_2 x_{2,3} \dots x_{k-1,k} e_k \neq 0 \tag{2.7}$$

e

$$x_{21}^{'} x_{12} \in R^{(2)}.$$

Além disso,

$$wt(x_{21}^{'}) = wt(z_2 x_{12}) = wt(z_2) wt(x_{21}) = wt(x_{12})^{-1} wt(x_{21})^{-1} wt(x_{21}) = wt(x_{12})^{-1}.$$

Analogamente existe um elemento homogêneo e invertível $z_3 \in C^{(3)}$ tal que $wt(z_3) = wt(x_{32}^{'} x_{23})^{-1}$. E podemos substituir $x_{32}^{'}$ por $x_{32}^{''} = z_3 x_{32}^{'}$ e x_{43} por $x_{43}^{'} = x_{43} z_3^{-1}$ em (2.7). Observe que $wt(x_{32}^{''}) = wt(x_{23})^{-1}$. Prosseguindo dessa maneira obtemos $\overline{x}_{k,k-1}, \dots, \overline{x}_{21}$ de modo que

$$e_k \overline{x}_{k,k-1} e_{k-1} \dots e_3 \overline{x}_{32} e_2 \overline{x}_{21} e_1 x_{12} e_2 x_{23} \dots x_{k-1,k} e_k \neq 0 \tag{2.8}$$

e

$$wt(\overline{x}_{i+1,i}) wt(x_{i,i+1}) = \varepsilon,$$

e o resultado está provado. ■

Segue da Proposição 5.1.4 que

$$\overline{x}_{i+1,i} x_{i,i+1} \in R_\varepsilon \cap R^{(i+1)} \text{ e } \overline{x}_{i,i+1} x_{i+1,i} \in R_\varepsilon \cap R^{(i)}. \tag{2.9}$$

Além disso existem $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k$ tais que

$$e^k_{\beta_k \beta_k} \overline{x}_{k,k-1} e^{k-1}_{\beta_{k-1}\beta_{k-1}} \dots e^2_{\beta_2\beta_2} \overline{x}_{21} e^1_{\alpha_1\alpha_1} x_{12} e^2_{\alpha_2\alpha_2} x_{23} \dots x_{k-1,k} e^k_{\alpha_k\alpha_k} \neq 0. \tag{2.10}$$

Definimos

$$y_{i,i+1} = e^i_{1\alpha_i} e^i_{\alpha_i\alpha_i} x_{i,i+1} e^{i+1}_{\alpha_{i+1}\alpha_{i+1}} e^{i+1}_{\alpha_{i+1}1}, \quad y_{i+1,i} = e^{i+1}_{1\beta_{i+1}} e^{i+1}_{\beta_{i+1}\beta_{i+1}} \overline{x}_{i+1,i} e^i_{\beta_i\beta_i} e^i_{\beta_i 1}. \tag{2.11}$$

Então os elementos $y_{12}, \dots, y_{k-1,k}, y_{21}, \dots, y_{k,k-1}$ são homogêneos,

$$e^i_{11} y_{i,i+1} e^{i+1}_{11} = y_{i,i+1}, \quad e^{i+1}_{11} y_{i+1,i} e^i_{11} = y_{i+1,i} \tag{2.12}$$

e, usando 2.10 , obtemos que

$$y_{k,k-1}\dots y_{21}\dots y_{k-1,k}\neq 0. \tag{2.13}$$

Logo

$$y_{ij}:=y_{i,i+1}y_{i+1,i+2}\dots y_{j-1,j}\neq 0,\quad y_{ji}:=y_{j,j-1}y_{j-1,j-2}\dots y_{i+1,i}\neq 0 \tag{2.14}$$

para todos $1\leq i<j\leq k$. Desse modo (2.12) vale para quaisquer $1\leq i,j\leq k$, pois se $i<j$, temos

$$\begin{aligned} e_{11}^{i}y_{ij}e_{11}^{i} &= e_{11}^{i}(e_{11}^{i}y_{i,i+1}e_{11}^{i+1}e_{11}^{i+1}y_{i+1,i+2}e_{11}^{i+2}\dots e_{11}^{j-1}y_{j-1,j}e_{11}^{j})e_{11}^{j}\\ &= e_{11}^{i}y_{i,i+1}e_{11}^{i+1}e_{11}^{i+1}y_{i+1,i+2}e_{11}^{i+2}\dots e_{11}^{j-1}y_{j-1,j}e_{11}^{j}=y_{i,j}\end{aligned}$$

e de modo análogo $e_{11}^{j}y_{ji}e_{11}^{i}=y_{ji}$. Temos então a seguinte relação

$$e_{11}^{i}y_{i,j}e_{11}^{j}=y_{i,j},\quad 1\leq i,j\leq k. \tag{2.15}$$

Observemos que $y_{22}:=y_{21}y_{12}\neq 0$ e que $wt(y_{22})=wt(\overline{x}_{21}x_{12})$ (já que as matrizes unitárias $e_{\alpha\beta}^{i}$ são homogêneas de grau ε) e por (2.9) $wt(\overline{x}_{21}x_{12})=\varepsilon$, logo $y_{22}\in e_2Re_2\bigcap R_\varepsilon=A^{(2)}$. Como $e_{11}^{2}y_{22}e_{11}^{2}=y_{22}$ e $y_{22}\in A^{(2)}$ concluímos que y_{22} é um múltiplo escalar da matriz e_{11}^{2}. Se dividirmos y_{21} por esse fator (que é não nulo, já que $y_{22}\neq 0$) podemos assumir que $y_{22}=e_{11}^{2}$, enquanto as relações (2.14) e (2.15) continuam válidas. De modo análogo $y_{11}:=y_{12}y_{21}=\alpha e_{11}^{1}$, e portanto $y_{11}^{2}=\alpha^2e_{11}^{1}e_{11}^{1}=\alpha^2e_{11}^{1}=\alpha y_{11}$. Agora observemos que $y_{22}^{3}=y_{21}(y_{12}y_{21})(y_{12}y_{21})y_{12}=y_{21}y_{11}^{2}y_{12}=\alpha y_{21}y_{11}y_{12}=\alpha(y_{21}y_{12})(y_{21}y_{12})=\alpha y_{22}^{2}=\alpha y_{22}$, por outro lado $y_{22}^{3}=y_{22}^{2}y_{22}=y_{22}^{2}=y_{22}$. Assim $\alpha y_{22}=y_{22}$ e portanto $\alpha=1$. O mesmo argumento mostra que dividindo $y_{i+1,i}$ por um escalar adequado obtemos

$$y_{i,i+1}y_{i+1,i}=e_{11}^{i}\quad \text{e}\quad y_{i+1,i}y_{i,i+1}=e_{11}^{i+1}, \tag{2.16}$$

enquanto as relações 2.14 e 2.15 permanecem válidas. Definindo $y_{ii}=e_{11}^{i}$ temos o seguinte resultado.

Proposição 2.3.5. *Os elementos y_{ij} definidos em (2.11), $1\leq i,j\leq k$ são linearmente independentes com multiplicação dada por $y_{ij}y_{rs}=\delta_{js}y_{is}$. Ainda $y_{ij}\in e_iRe_j$ e $e_{11}^{i}y_{ij}e_{11}^{j}=y_{ij}$.*

Prova: É suficiente provarmos que $y_{ij}y_{rs}=\delta_{js}y_{is}$, daí segue que os $y_{ij}, 1\leq i,j\leq k$ são linearmente independentes. Se $j\neq s$ então por (2.15) temos $y_{ij}y_{rs}=e^{i}y_{ij}(e^{j}e^{r})y_{rs}e^{s}=0$, pois $e^j e^r = 0$. Se $i < j = r < s$ ou $i > j = r > s$ segue diretamente de (2.14) que $y_{ij} y_{js} = y_{is}$. Se $i = j$ então para $i < s$ segue de (2.11) que

$$
\begin{aligned}
y_{ii} y_{is} = e^i_{11} y_{i,i+1} y_{i+1,s} &= e^i_{11}(e^i_{1\alpha_i} e^i_{\alpha_i\alpha_i} x_{i,i+1} e^{i+1}_{\alpha_{i+1}\alpha_{i+1}} e^{i+1}_{\alpha_{i+1}1}) y_{i+1,s} \\
&= e^i_{1\alpha_i} e^i_{\alpha_i\alpha_i} x_{i,i+1} e^{i+1}_{\alpha_{i+1}\alpha_{i+1}} e^{i+1}_{\alpha_{i+1}1} y_{i+1,s} \\
&= y_{i,i+1} y_{i+1,s} = y_{i,s}.
\end{aligned}
$$

Da mesma maneira concluímos que $y_{ii} y_{is} = y_{i,s}$, se $i \geq s$, e que $y_{ir} y_{rr} = y_{i,r}$. Se $i < j$ e $r > s$ então

$$
\begin{aligned}
y_{ij} y_{js} &= y_{i,i+1} \cdots y_{j-2,j-1}(y_{j-1,j} y_{j,j-1}) y_{j-1,j-2} \cdots y_{s+1,s} \\
&= y_{i,i+1} \cdots y_{j-2,j-1}(e^{j-1}_{11}) y_{j-1,j-2} \cdots y_{s+1,s} \\
&= y_{i,i+1} \cdots y_{j-2,j-1} y_{j-1,j-2} \cdots y_{s+1,s} = y_{i,j-1} y_{j-1,s}.
\end{aligned}
$$

Ou seja se $i < j$ e $r > s$ então $y_{ij} y_{js} = y_{i,j-1} y_{j-1,s}$, e utilizando esta relação repetidamente recaímos em um dos casos $y_{ir} y_{rr} = y_{i,r}$ ou $y_{ii} y_{is} = y_{i,s}$. O caso $i > j$ e $r < s$ é análogo. ■

Proposição 2.3.6. *O subespaço com base $\{y_{ij} | 1 \leq i, j \leq k\}$ é uma subálgebra graduada de R, isomorfa à álgebra $M_k(K)$ munida de G-graduação elementar e existem $g_1 = \varepsilon$, g_2, ..., $g_k \in G$ tais que $wt(y_{ij}) = g_i^{-1} g_j$.*

Prova: Segue da Proposição 5.1.4 e do Lema 2.1.3. ■

Lembramos que $R^{(i)} = A^{(i)} C^{(i)}$, os elementos das subálgebras simples $A^{(i)}$ e $C^{(i)}$ comutam entre si, $A^{(i)} \simeq M_{q_i}(K)$ está contida na componente unitária R_ε, $C^{(i)} \simeq M_{p_i}(K)$ munida de graduação fina e $e_1 + \cdots + e_k$ é a matriz identidade de $R = M_n(K)$.

Proposição 2.3.7. *Se p_i e q_i são como acima, $p_1 q_1 + \cdots + p_k q_k = n$.*

Prova: De fato, e_i é a unidade da álgebra $R^{(i)}$ e $\dim R^{(i)} = p_i^2 q_i^2$. Como $R^{(i)} = e_i R e_i$ segue $p_i^2 q_i^2 = \dim R^{(i)} = P(e_i)^2$, onde $P(e_i)$ denota é o posto de e_i. Então $P(e_i) = p_i q_i$. Como $E = e_1 + \cdots + e_k$, temos $n = P(e_1) + \cdots + P(e_k) = p_1 q_1 + \cdots + p_k q_k$. ■

Proposição 2.3.8. *Se y é um elemento homogêneo não nulo de R então*

$$\dim y C^{(i)} = \dim C^{(i)} y = p_i^2.$$

Prova: Considere a transformação linear $T : C^{(i)} \longrightarrow C^{(i)}y$, definida por $T(x) = xy$. Observemos que T é injetora, pois caso contrário existiria x homogêneo não nulo (e portanto invertível) tal que $xy = 0$, o que é um absurdo já que $y \neq 0$, além disso T é claramente sobrejetora. Portanto T é um isomorfismo de espaços vetoriais e $\dim C^{(i)}y = p_i^2$. É claro que o mesmo argumento mostra que $\dim yC^{(i)} = p_i^2$. ■

Proposição 2.3.9. *O posto da matriz e_{11}^i é p_i, $i = 1, \ldots, k$.*

Prova: Observemos que

$$e_{11}^{(i)}Re_{11}^{(i)} = e_{11}^{(i)}e_iRe_ie_{11}^{(i)} = e_{11}^{(i)}R^{(i)}e_{11}^{(i)} = e_{11}^{(i)}A^{(i)}C^{(i)}e_{11}^{(i)} = e_{11}^{(i)}A^{(i)}e_{11}^{(i)}C^{(i)} = e_{11}^{(i)}C^{(i)}.$$

Logo, pela Proposição 2.3.8, segue que $P(e_{11}^i)^2 = \dim e_{11}^{(i)}Re_{11}^{(i)} = \dim e_{11}^{(i)}C^{(i)} = p_i^2$ e portanto $P(e_{11}^i) = p_i$. ■

Proposição 2.3.10. *Com as notações acima, temos $p_1 = \ldots = p_k := p$,*

$$\dim C^{(i)}y_{ij}C^{(j)} = p^2 \quad e \quad C^{(i)}y_{ij} = y_{ij}C^{(j)}.$$

Prova: Como o posto de e_{11}^i é p_i temos que

$$\dim e_{11}^i Re_{11}^j = p_ip_j. \tag{2.17}$$

Em particular, a dimensão do $(C^{(i)}, C^{(j)})$-bimódulo $C^{(i)}y_{ij}C^{(j)}$ é no máximo p_ip_j, já que $y_{ij} \in e_{11}^i Re_{11}^j$ e portanto $C^{(i)}y_{ij}C^{(j)} \subset e_{11}^i Re_{11}^j$. Já vimos que $C^{(i)}y_{ij}$ e $y_{ij}C^{(j)}$ são subespaços de $C^{(i)}y_{ij}C^{(j)}$ de dimensão p_i^2 e p_j^2, respectivamente. Portanto

$$\dim C^{(i)}y_{ij}C^{(j)} \geq \max p_i^2, p_j^2. \tag{2.18}$$

Ou seja $\dim C^{(i)}y_{ij}C^{(j)} \geq \max p_i^2, p_j^2$ e $\dim C^{(i)}y_{ij}C^{(j)} \leq p_ip_j$, logo $p_i = p_j := p$ e $C^{(1)}, \ldots, C^{(k)}$ têm a mesma dimensão.

Além disso

$$\dim C^{(i)}y_{ij}C^{(j)} = p^2. \tag{2.19}$$

Afirmamos que $C^{(i)}y_{ij}C^{(j)}$ é irredutível como um $C^{(i)}$-módulo graduado a esquerda e como um $C^{(j)}$ módulo graduado a direita. De fato, suponha que $M \neq 0$ é um submódulo graduado de $C^{(i)}y_{ij}C^{(j)}$. Seja $0 \neq m \in M$ um elemento homogêneo não nulo de M. Pela Proposição 2.3.8 temos que $\dim C^{(i)}m = \dim C^{(i)} = p^2$ e portanto $\dim M \geq p^2$. Como M é submódulo de $C^{(i)}y_{ij}C^{(j)}$ e $\dim C^{(i)}y_{ij}C^{(j)} = p^2$ segue que $\dim M \leq p^2$. Assim $\dim M = p^2$ e portanto $C^{(i)}y_{ij}C^{(j)} = M$. De modo análogo segue que $C^{(i)}y_{ij}C^{(j)}$ é irredutível como um $C^{(j)}$-módulo graduado a direita. Observamos que $C^{(i)}y_{ij}$ é um $C^{(i)}$-submódulo graduado de $C^{(i)}y_{ij}C^{(j)}$ e que $y_{ij}C^{(j)}$ é um $C^{(j)}$-submódulo graduado de $C^{(i)}y_{ij}C^{(j)}$, logo

$$C^{(i)}y_{ij} = C^{(i)}y_{ij}C^{(j)} = y_{ij}C^{(j)}. \tag{2.20}$$

E o lema está demonstrado. ■

Lema 2.3.11. *Existe um isomorfismo de álgebras tal que* $xy_{ij} = y_{ij}\varphi(x)$.

Prova: Pela Proposição 2.3.10 para cada $x \in C^{(i)}$ homogêneo existe um único $\overline{x} \in C^{(j)}$ tal que $xy_{ij} = y_{ij}\overline{x}$. Para ver a unicidade observemos que se $xy_{ij} = y_{ij}\overline{x} = y_{ij}\widetilde{x}$ então $\overline{x} - \widetilde{x}$ é homogêneo e como $0 = y_{ij}(\overline{x} - \widetilde{x})$ segue do Corolário 2.1.9 que $\overline{x} = \widetilde{x}$. Denotaremos este elemento por $\varphi(x)$. Observemos que se $x, y \in C^{(i)}$ são elementos homogêneos então temos que $(xy)y_{ij} = x(y_{ij}\varphi(y)) = y_{ij}\varphi(x)\varphi(y)$, e portanto $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Logo a aplicação $\varphi : C^{(i)} \longrightarrow C^{(j)}$ dada por $\varphi(\sum_{g\in G} x_g) = \sum_{\varphi_{g\in G}} \varphi(x_g)$, onde $x_g \in C^{(i)} \cap R_g$, é um homomorfismo de álgebras tal que $xy_{ij} = y_{ij}\varphi(x)$. Se φ não é um isomorfismo então existe $x \in C^{(i)}$ homogêneo não nulo tal que $0 = \varphi(x)$, logo $xy_{ij} = 0$, o que é uma contradição. Portanto é um isomorfismo de álgebras. ■

De certo modo este é um isomorfismo de algebras graduadas. Mais precisamente, a aplicação $\theta : H^{(i)} \longrightarrow H^{(j)}$ dada por $\theta(h) = wt(\varphi(x))$, onde x é tal que $wt(x) = h$, é um isomorfismo de grupos e $\varphi(C^{(i)} \cap R_g) \subseteq C^{(j)} \cap R_{\theta(g)}$. Como todos os $H^{(i)}$ são isomorfos podemos considerar as álgebras $C^{(i)}$ como $H^{(1)}$-graduadas. Essas álgebras são isomorfas, como álgebras graduadas.

Denotemos, para o caso $j = i + 1$ cada isomorfismo desses por $\varphi_{i,i+1}$. Definimos $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = \varphi_{12}$, $\varphi_3 = \varphi_{23}\varphi_{12} = \varphi_{23}\varphi_2$, $\ldots$, $\varphi_k = \varphi_{k-1,k}\varphi_{k-1}$. Então para cada $x \in C^{(1)}$ e $i < j$ temos $\varphi_i(x)y_{ij} = y_{ij}\varphi_j(x)$. Na verdade essa relação vale para quaisquer i, j.

Lema 2.3.12. *Com as notações acima, temos*

$$\varphi_i(x)y_{ij} = y_{ij}\varphi_j(x),$$

para quaisquer $1 \leq i, j \leq k$.

Prova: Denotamos por $\varphi_{i+1,i} : C^{(i+1)} \longrightarrow C^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k-1$ o isomorfismo no caso $i - j = 1$. Considere $a \in C^{(i)}$. Temos que

$$ay_{ii} = ay_{i,i+1}y_{i+1,i} = (y_{i,i+1}\varphi_{i,i+1}(a))y_{i+1,i} = y_{ii}(\varphi_{i+1,i}\varphi_{i,i+1}(a)). \tag{2.21}$$

Como a e $\varphi_{i+1,i}\varphi(a)_{i,i+1}$ pertencem a $C^{(i)}$, $y_{ii} \in A^{(i)}$ e $A^{(i)}C^{(i)} \simeq A^{(i)} \otimes C^{(i)}$, segue de 2.21 que $a = \varphi_{i+1,i}\varphi(a)_{i,i+1}$. Daí segue que

$$\varphi_i(x)y_{i,i-1} = y_{i,i-1}\varphi_{i,i-1}(\varphi_i(x)) = \varphi_{i,i-1}(\varphi_{i,i-1}\varphi_{i-1}(x)) = y_{i,i-1}\varphi_{i-1}(x),$$

e o Lema está provado. ■

Lema 2.3.13. *Os elementos* $\overline{x} = x + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_k(x)$. *formam uma subálgebra (não necessariamente graduada)* $C \simeq M_p(K)$. *Além disso* $\overline{x}y_{ij} = y_{ij}\overline{x}$.

Prova: Observemos que

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = (x + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_k(x))(y + \varphi_2(y) + \cdots + \varphi_k(y)),$$

e como $C^{(i)}C^{(j)} = 0$ temos que

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = (xy + \varphi_2(x)\varphi_2(y) + \cdots + \varphi_k(x)\varphi_k(y)) = (xy + \varphi_2(xy) + \cdots + \varphi_k(xy)) = \overline{xy}.$$

Além disso se $0 = \overline{x} = x + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_k(x)$, então

$$0 = e_i(x + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_k(x)) = \varphi_i(x), \quad i = 2, \ldots, k$$

e portanto $x = 0$.

Como $y_{ij} \in e_iRe_j$, $\varphi_i(x) \in e_iRe_i$ e os idempotentes são ortogonais, segue de 2.21 que

$$\overline{x}y_{ij} = y_{ij}\overline{x}, \tag{2.22}$$

para quaisquer $1 \leq i, j \leq k$, $\overline{x} \in C$, e o lema está provado. ■

É claro que os elementos da forma

$$e^i_{\alpha 1}y_{ij}e^j_{1\beta}, 1 \leq \alpha \leq q_i, 1 \leq \beta \leq q_j$$

são homogêneos. Além disso se $e^i_{\alpha 1}y_{ij}e^j_{1\beta} = 0$, então $0 = e^i_{1\alpha}e^i_{\alpha 1}y_{ij}e^j_{1\beta}e^j_{\beta 1} = e^i_{11}y_{ij}e^j_{11}$, e por 2.16 temos $y_{ij} = 0$, o que é um absurdo. Assim os $e^i_{\alpha 1}y_{ij}e^j_{1\beta}$ são não nulos, além disso são linearmente independentes e o subespaço D gerado por eles é uma álgebra isomorfa a $M_q(K)$, onde $q = q_1 + \cdots + q_k$. De fato, o isomorfismo é definido se levamos $e^i_{\alpha 1}y_{ij}e^j_{1\beta}$ em $E_{\mu\nu}$, onde $\mu = q_1 + \cdots + q_{i-1} + \alpha$ e $\nu = q_1 + \cdots + q_{j-1} + \beta$.

Como $\overline{x}e^i_{\alpha 1} = \varphi_i(x)e^i_{\alpha 1}, e^j_{1\beta}\overline{x} = e^j_{1\beta}\varphi_j(x)$ e $e^i_{\alpha 1}$ está no centralizador de $C^{(i)}$ segue de 2.22 que

$$\overline{x}e^i_{\alpha 1}y_{ij}e^j_{1\beta} = e^i_{\alpha 1}y_{ij}e^j_{1\beta}\overline{x}, \tag{2.23}$$

ou seja, D está no centralizador de C em R. Temos o seguinte resultado.

Lema 2.3.14. *A álgebra R é isomorfa a $C^{(1)} \otimes D$.*

Prova: É suficiente ver que $\dim D = q^2$, $\dim C = p^2$ e $\dim R = p^2q^2$, portanto $R = CD$ é isomorfa a $C^{(1)} \otimes D$. ■

Na verdade o isomorfismo $\varphi : C^{(1)} \otimes D \longrightarrow R$ é dado por, $\varphi(x \otimes E_{\mu\nu}) = \overline{x}E_{\mu\nu}$, onde

$$E_{\mu\nu} = e^i_{\alpha 1} y_{ij} e^j_{1\beta}, \mu = q_1 + \cdots + q_{i-1} + \alpha \text{ e } \nu = q_1 + \cdots + q_{j-1} + \beta \tag{2.24}$$

é uma matriz unitária em D. Agora para provar o Teorema 2.3.1 basta provar que este é um isomorfismo graduado.

Prova do Teorema 2.3.1: Já que todos os $E_{\mu\nu}$ são homogêneos, sabemos que a graduação em D é elementar, $wt(E_{\mu\nu}) = g_\mu^{-1} g_\nu$, onde $E_{\mu\nu}$ é o elemento dado em (2.24). Além disso, podemos assumir que $g_\mu = g_i$ e $g_\nu = g_j$, pois $e^i_{\alpha 1} \in A^{(i)}$, $e^j_{\alpha 1} \in A^{(j)}$ e

$$wt(E_{\mu\nu}) = wt(y_{ij}) = g_i^{-1} g_j. \tag{2.25}$$

Denotemos $H = H^{(1)} = SuppC^{(1)}$ e vamos calcular o grau do elemento $\overline{x}E\mu\nu = \varphi(x \otimes E\mu\nu)$, onde $x \in C^{(1)}$, $wt(x) = h \in H$:

$$wt(\overline{x}E_{\mu\nu}) = wt(\overline{x} e^i_{\alpha 1} y_{ij} e^j_{1\beta}) = wt(\varphi_i(x) e^i_{\alpha 1} y_{ij} e^j_{1\beta}) = wt(\varphi_i(x) y_{ij}). \tag{2.26}$$

Consideremos $wt(\varphi(x)) = h'$. Então $xy_{1i} = \varphi_1(x) y_{1i} = y_{1i} \varphi_i(x)$ pela igualdade (2.22), logo $hg_1^{-1} g_i = g_1^{-1} g_i h'$, ou seja, $hg_i = g_i h'$, já que $g_1 = e$. Assim $wt(\varphi_i(x) y_{ij}) = g_i^{-1} h g_i g_i^{-1} g_j = g_i^{-1} h g_j = g_{mu}^{-1} h g_\nu$. Considerando em $C^{(1)} \otimes D$ a graduação induzida então se $x \in C_h^{(1)}$ temos que

$$wt(x \otimes E_{\mu\nu}) = g_\mu^{-1} h g_\nu. \tag{2.27}$$

Isto significa que φ é um isomorfismo de álgebras graduadas e o teorema está provado. ■

CAPÍTULO 3

Graduações abelianas na álgebra das matrizes triangulares superiores

Neste capítulo daremos uma descrição das G-graduações na álgebra $UT_n(K)$ das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre um corpo K quando G é um grupo abeliano finito e K é algebricamente fechado e de característica 0. A maioria dos resultados estão em [19].

3.1 Grupo dual

Nesta seção definiremos o grupo dual $\widehat{G}$ de um grupo abeliano finito G. Se $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ é uma álgebra G-graduada definiremos uma ação de $\widehat{G}$ em A como automorfismos e mostraremos que um subespaço V de A é homogêneo se, e somente se, é invariante pela ação de $\widehat{G}$. Para mais detalhes recomendamos [12]. Neste capítulo K é um corpo algebricamente fechado e de característica 0.

Lembramos que se G é um grupo finito, quando o corpo é algebricamente fechado, vale o seguinte resultado.

Teorema 3.1.1. *São equivalentes:*

(i) G é abeliano.

(ii) Todas as representações irredutíveis têm grau 1.

Segue do teorema acima que quando G é um grupo abeliano finito o conjunto $\widehat{G}$ dos caracteres irredutíveis de G com a operação $\chi_1\chi_2(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$ é um grupo abeliano, chamado grupo dual de G.

Podemos definir uma ação de $\widehat{G}$ em A da seguinte maneira

$$\chi(a) = \sum_{g \in G} \chi(g) a_g$$

onde χ é um caracter irredutível de G e $a = \sum_{g \in G} a_g$ é a decomposição de $a \in A$ como soma de elementos homogêneos $a_g \in A_g$.

Teorema 3.1.2. *Um subespaço $V \subset A$ é homogêneo se e somente se $\chi(V) = V$ para todo $\chi \in \widehat{G}$.*

Prova: Sejam $v \in V$ e $v = \sum_{g \in G} v_g$ a decomposição de v como soma de fatores homogêneos e χ um elemento de $\widehat{G}$. Se V é homogêneo então $v_g \in V$ para todo $g \in G$, e portanto $\chi(v) = \sum_{g \in G} \chi(g) v_g \in V$. E como $\chi(g) \neq 0$, para todo $g \in G$ concluímos que $\chi(V) = V$.

Suponha agora que $\chi(V) = V$ para todo $\chi \in \widehat{G}$. Se V não é homogêneo então existe um natural t tal que:

(*) Existem elementos homogêneos $v_{g_1}, \ldots, v_{g_t} \notin V$, onde $g_1, \ldots, g_t \in G$, para os quais $v = v_{g_1} + \cdots + v_{g_t} \in V$.

Podemos supor que t é o menor número natural com a propriedade (*). Seja χ tal que $\chi(g_1) = \lambda$, $\chi(g_2) = \mu$ e $\lambda \neq \mu$. Então

$$u = \lambda v - \chi(v) = (\lambda - \mu) v_{g_2} + \cdots \in V,$$

o que é um absurdo, pela minimalidade de t. ■

Esse fato será muito usado na demonstração do Lema 3.2.2.

3.2 Resultado principal

Nosso objetivo neste capítulo é provar o resultado a seguir, que corresponde ao teorema principal de [19].

Teorema 3.2.1. *Sejam K um corpo algebricamente fechado de característica 0 e $A = UT_n$ a álgebra das matrizes triangulares superiores sobre K, graduada por um grupo abeliano finito G. Então A é isomorfa como álgebra graduada à UT_n com alguma G-graduação elementar.*

Antes de demonstrar o teorema precisamos dos resultados a seguir.

Lema 3.2.2. *Seja $A = UT_n = \oplus_{g\in G} A_g$ graduada por um grupo G. Se as matrizes elementares são homogêneas então a graduação é elementar.*

Prova: Como $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ são homogêneas na G-graduação e $E_{ii}^2 = E_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$ segue que $E_{11}, \ldots E_{nn}$ estão na componente unitária A_ε de A. Seja $g_1 = \varepsilon$. Definimos $g_{i+1} = g_i wt(E_{i,i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$. Então é claro que $E_{ij} = E_{i,i+1}, \ldots, E_{j-1,j} \in A_{g_i^{-1}g_j}$ e o lema está provado. ∎

Lema 3.2.3. *Seja $A = UT_n = \oplus_{g\in G} A_g$ como no teorema. Então existem matrizes triangulares estritamente superiores $Y_1, \ldots, Y_n$ tais que $e_1 = E_{11} + Y_1, \ldots, e_n = E_{nn} + Y_n$ são idempotentes ortogonais e $e_1, \ldots, e_n \in A_\varepsilon$, onde A_ε é a componente unitária de A na G graduação dada.*

Prova: Sejam $|G| = m$ e $\widehat{G} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ o grupo dual de G. O teorema será provado por indução. Se $n = 1$ o resultado é óbvio. Suponha que $n \geq 2$ e que o lema já está provado para $n-1$. A subálgebra das matrizes triangulares estritamente superiores $J = Span\{E_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\}$ é o radical de Jacobson de A e portanto $\varphi(J) = J$ para todo $\varphi \in AutA$ e conseqüentemente J é homogênea. Denotamos

$$W = Span\{E_{1n}, \ldots, E_{n-1,n}\}.$$

Não é difícil ver que W é o anulador a esquerda de J. Seja $\varphi \in AutA$, como $\varphi(J) = J$ temos que se $j \in J$ então $\varphi(w)j = \varphi(w\varphi^{-1}(j)) = 0$, onde φ^{-1} e o automorfismo inverso de φ. Assim $\varphi(W) = W$, e portanto W é homogêneo. Como W é um ideal homogêneo temos que A/W também é uma álgebra G-graduada.

Denotemos por $\rho : A \longrightarrow A/W$ a projeção canônica. Então

$$A/W = \rho(UT_{n-1}) \bigoplus C$$

onde $C = \rho(\langle E_{nn}\rangle)$ é a imagem do subespaço gerado por E_{nn}. Como $UT_{n-1} \cap W = \{0\}$ a restrição de ρ a UT_{n-1} é um isomorfismo e portanto $UT_{n-1} \simeq \rho(UT_{n-1})$.

Vamos mostrar que

$$J(\rho(UT_{n-1}) \bigoplus C) = J(\rho(UT_{n-1})). \tag{3.1}$$

De fato, seja $y \in J(\rho(UT_{n-1}) \oplus C)$. Temos que $y \in \rho(UT_{n-1})$, pois caso contrário existiriam $0 \neq \lambda \in K$, $\widetilde{y} \in UT_{n-1}$ tais que $y = \rho(\widetilde{y}) + \lambda\rho(E_{nn})$. E portanto $\rho(I) - \frac{1}{\lambda}y = \rho(I - \frac{1}{\lambda}\widetilde{y} - E_{nn})$

não é invertível, já que $M = I - \frac{1}{\lambda}\widetilde{y} - E_{nn}$ é uma matriz triangular superior com $M_{nn} = 0$, o que é um absurdo pois $y \in J(\rho(UT_{n-1}) \oplus C)$. Observemos que $E_{nn}(UT_{n-1}) = 0$, logo se $x = \widetilde{x} + c$, com $\widetilde{x} \in \rho(UT_{n-1})$, $c \in C$ temos $1 - xy = 1 - \widetilde{x}y$ e assim $y \in J(UT_{n-1} \bigoplus C)$ se, e somente se $y \in J(\rho(UT_{n-1}))$. E 5.6 está provada.

É claro que o anulador (bilateral) de $J(\rho(UT_{n-1}))$ é $\langle\{\rho(E_{nn}), \rho(E_{1,n-1})\}\rangle$, e segue de (5.6) que para qualquer $\varphi \in Aut(A/W)$ vale

$$\varphi(J(\rho(UT_{n-1}))) = J(\rho(UT_{n-1}))$$

e

$$\varphi(\langle\rho(E_{nn}), \rho(E_{1,n-1})\rangle) = \langle\rho(E_{nn}), \rho(E_{1,n-1})\rangle.$$

Logo $\varphi(\rho(E_{nn})) = \alpha\rho(E_{nn}) + \beta\rho(E_{1,n-1})$, α, $\beta \in K$ e como $E_{nn}^2 = E_{nn}$ concluímos que $\alpha = 1$ e $\beta = 0$.

Assim as subálgebras C e $\rho(UT_{n-1}) = AnnC$ são homogêneas em A/W. Por hipótese de indução o lema está provado para $\rho(UT_{n-1})$. Existem $Y_1^{'}, \ldots, Y_n^{'} \in Span\{E_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\}$ tais que se $e_1^{'} = E_{11} + Y_1{'}, \ldots, e_{n-1}^{'} = E_{n-1,n-1} + Y_{n-1}^{'}$ então $\rho(e_1^{'}), \ldots, \rho(e_n^{'})$ são idempotentes ortogonais e invariantes pelos automorfismos $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Daí segue que os $e_1^{'}, \ldots, e_{n-1}^{'}$ são idempotentes ortogonais, já que $UT_{n-1} \cap W = \{0\}$. Além disso esses elementos são invariantes pelos automorfismos $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ módulo W, pois $\rho(\varphi_i(e_j^{'})) = \varphi_i(\rho(e_j^{'})) = \rho(e_j^{'})$. É claro que $\rho(E_{nn})$ está na componente unitária de A/W, já que C é homogênea em A/W. Logo $e_n^{'} = E_{nn}$ também é invariante pelos automorfismos $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ módulo W.

Como $\widehat{G} = \{\varphi_1, \ldots \varphi_m\}$ é um grupo abeliano, K é algebricamente fechado e $\widehat{G}(W) \subset W$, existe uma base $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ de W que consiste de autovetores de φ_i, $i = 1, \ldots, m$.

Fixemos um $e_j^{'}$, vamos construir o e_j da forma $e_j = e_j^{'} + u_j^{'}$, para algum $u_j^{'} \in W$. Seja

$$\varphi(e_j^{'}) = e_j^{'} + a_1 w_1 + \ldots a_{n-1} w_{n-1}$$

para algum $\varphi \in \widehat{G}$, onde $a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$. Se $\varphi(w_i) = \lambda_i w_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, então é claro que

$$\varphi^k(e_j^{'}) = e_j^{'} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(1 + \lambda_i + \cdots + \lambda_i^{k-1}) w_i.$$

Como $\varphi^m = 1$ segue que

$$a_i(1 + \lambda_i + \cdots + \lambda_i^{m-1}) = 0, \quad \text{para todo } i = 1 \ldots, n-1. \tag{3.2}$$

Analogamente se $\psi \in \widehat{G}$. $\psi(w_i) = \mu_i w_i$, $i = 1, \ldots, n-1$ e

$$\psi(e_j^{'}) = e_j^{'} + b_1 w_1 + \cdots + b_{n-1} w_{n-1},$$

então

$$b_i(1 + \lambda_i + \cdots + \lambda_i^{m-1}) = 0, \quad \text{para todo } i = 1 \ldots, n-1. \tag{3.3}$$

Temos que

$$\psi\varphi(e_j^{'}) = e_j^{'} + \sum_{i=1}^{n-1}(b_i + \mu_i a_i)w_i,$$

$$\varphi\psi(e_j^{'}) = e_j^{'} + \sum_{i=1}^{n-1}(a_i + \lambda_i b_i)w_i,$$

e como $\widehat{G}$ é abeliano segue que

$$b_i(1 - \lambda_i) = a_i(1 - \mu_i), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{3.4}$$

Agora construímos $e_j^{''}$ pela seguinte regra. Se para nosso $\varphi \in \widehat{G}$ todos os $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ são diferentes de 1, então definimos

$$e_j^{''} = e_j^{'} + \frac{a_1}{1-\lambda_1} w_1 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{1-\lambda_{n-1}} w_{n-1}. \tag{3.5}$$

Se $\lambda_i = 1$, mas $\mu_i \neq 1$ para algum outro $\psi \in \widehat{G}$ substituímos o coeficiente $\frac{a_i}{1-\lambda_i}$ de w_i em (3.5) por $\frac{b_i}{1-\mu_i}$. Se $\rho(w_i) = w_i$ para todo $\rho \in \widehat{G}$ então em (3.5) tomamos o coeficiente de w_i como sendo 0.

Vamos agora mostrar que $\varphi(e_i^{''}) = e_j^{''}$. Para isto consideremos $e_i^{''} = e_j^{'} + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{n-1} w_{n-1}$. Temos que

$$\varphi(e_i^{''}) = e_j^{'} + (a_1 + \lambda_1 \alpha_1) w_1 + \cdots + (a_{n-1} + \lambda_{n-1}\alpha_{n-1}) w_{n-1}.$$

Se $\lambda_i \neq 1$, então $\alpha_i = \frac{a_i}{1-\lambda_i}$ e

$$a_i + \lambda_i \alpha_i = \frac{a_i}{1-\lambda_i} = \alpha_i.$$

Segue de (3.2) que $\lambda_i = 1$ implica que $a_i = 0$. Assim se $\lambda_i = 1$ mas $\mu_i \neq 1$ para algum outro $\psi \in \widehat{G}$ para algum $\psi \neq \varphi$ então

$$a_i + \lambda_i \alpha_i = \alpha_i.$$

E se $\rho(w_i) = w_i$ para todo $\rho \in \widehat{G}$ então $\alpha_i = 0$ e

$$a_i + \lambda_i \alpha_i = 0 = \alpha_i.$$

Logo $\varphi(e_j^{''}) = e_j^{''}$.

Segue da relação (3.4) que $\psi(e_j^{''}) = e_j^{''}$ para todo $\psi \in \widehat{G}$. Agora definimos $u_j = e_j^{''} - e_j^{'}$, ou seja, $e_j^{''} = e_j^{'} + u_j$, $j = 1, \ldots, n$. Lembramos que para todo $j = 1, \ldots, n-1$ os $e_j^{'}$ são idempotentes, $e_j^{'}, e_j^{''} \in UT_{n-1}$, $u_j \in W$, $W^2 = 0$, $e_n^{'} = E_{nn}$ e que $W(UT_{n-1}) = 0$. Assim os elementos

$$\begin{aligned} (e_j^{''})^2 &= (e_j^{'} + u_j)^2 = e_j^{'} + e_j^{'}u_j, \quad j = 1, \ldots, n-1 \\ (e_n^{''})^2 &= (e_n^{'} + u_n)^2 = e_n^{'} + u_n e_n^{'} \end{aligned}$$

e

$$(e_j^{''})^2 \quad (e_n^{''})^2 = (e_j^{'} + u_j)^2 (e_n^{'} + u_n)^2 = e_j^{'}(u_j + u_n)e_n^{'}, \quad j = 1, \ldots, n-1$$

também são invariantes pela ação de qualquer $\psi \in \widehat{G}$. Então os elementos

$$\begin{aligned} e_j &= e_j^{'} + e_j^{'}u_j - e_j^{'}(u_j + u_n)e_n^{'}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \\ e_n &= e_n^{'} + u_n e_n^{'} \end{aligned}$$

satisfazem a condição $\psi(e_i) = e_i$ para todo $\psi \in \widehat{G}$, $i = 1, \ldots, n$. Vamos agora mostrar que os $e_1, \ldots, e_n$ são idempotentes ortogonais. Como $We_j^{'} = 0$, $j = 1, \ldots, n-1$, temos $e_n^{'}W = 0$ e os $e_1^{'}, \ldots, e_n^{'}$ são idempotentes ortogonais. Segue que $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. De modo análogo, $e_n^2 = e_n$, $e_n e_j = 0$, $j = 1, \ldots, n-1$. Finalmente,

$$\begin{aligned} e_j e_n &= (e_j^{'} + e_j^{'}u_j - e_j^{'}(u_j + u_n)e_n^{'})(e_n^{'} + u_n e_n^{'}) \\ &= e_j^{'}u_j e_n^{'} - e_j^{'}(u_j + u_n)e_n^{'} + e_j^{'}u_n e_n^{'} = 0, \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \ldots, n-1$. Por construção os elementos $e_1, \ldots, e_n$ são da forma $E_{11} + Y_1$, $\ldots$, $E_{nn} + Y_n$, respectivamente, com $Y_1 \ldots, Y_n \in J(A)$ e o lema está provado. ■

Prova do Teorema 3.2.1: Consideremos os idempotentes $e_1 = E_{11} + Y_1, \ldots, e_n = E_{nn} + Y_n$ construídos no Lema 3.2.3. Como $e_1, \ldots, e_n \in A_\varepsilon$, qualquer subespaço $A_{ij} = e_i A e_j$ é homogêneo. Além disso $A_{ij} \neq 0$ pois $0 \neq e_i E_{ij} e_j \in A_{ij}$. Se $0 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} a_{ij}$, onde $0 \neq a_{ij} \in A_{ij}$ e $\alpha_{ij} \in K$, então, como os idempotentes $e_1, \ldots, e_n$ são ortogonais segue que $0 = e_k(\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} a_{ij}) e_l = \alpha_{kl} a_{kl}$. Logo $\alpha_{kl} = 0$. Daí segue que

$$A = \oplus_{1 \leq i \leq j \leq n} A_{ij},$$

e $\dim A_{ij} = 1$ para quaisquer $1 \leq i \leq j \leq n$.

Se $i < j$ então

$$e_i E_{ij} e_j = E_{ij} + Y_i E_{ij} + E_{ij} Y_j + Y_i E_{ij} Y_j \in J(A),$$

logo $\oplus_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij} \subset J(A)$. Como os dois subespaços têm a mesma dimensão vale a igualdade $J(A) = \oplus_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij}$. Assim $J^{n-1} = A_{12} A_{23} \ldots A_{n-1,n}$ e se $A_{i,i+1} = \langle a_{ij} \rangle$, onde $a_{i,i+1} = e_i E_{ij} e_j$ é um elemento homogêneo não nulo tal que $e_i a_{i,i+1} e_{i+1} = a_{i,i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, então $a_{12} a_{23} \ldots a_{n-1,n} \neq 0$. Assim os elementos homogêneos

$$a_{11} = e_1, \ldots, a_{nn} = e_n, \quad a_{ij} = a_{i,i+1} \ldots a_{j-1,j}, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

formam uma base de A com a multiplicação dada por

$$a_{ij} a_{kl} = \delta_{kj} a_{il}.$$

Agora o teorema segue do Lema 3.2.2. ■

CAPÍTULO 4

Identidades Graduadas para a Álgebra de Matrizes $n \times n$

Neste capítulo consideramos a álgebra $M_n(K)$ das matrizes de ordem n sobre um corpo K com a $\mathbb{Z}_n$-graduação dada no Exemplo 1.2.6. A maioria dos resultados estão em [2]. Assim $M_n(K)^{(0)}$ consiste das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n} \in K,$$

e, para $0 < t \leq n-1$, $M_n(K)^{\bar{t}}$ consiste das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,t+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2,t+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-t,n} \\ a_{n-t+1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $a_{1,t+1}$, $a_{2,t+2}$, $\ldots$, $a_{n-t,n}$, $a_{n-t+1,1}$, $\ldots$, $a_{n,t} \in K$.

Em [20] Vasilovsky mostrou que quando $\operatorname{char} K = 0$ todas as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_n(K)$ seguem das identidades:

(i) $x_1x_2 = x_2x_1, wt(x_1) = wt(x_2) = 0;$

(ii) $x_1x_3x_2 = x_2x_3x_1, wt(x_1) = wt(x_2) = -wt(x_3).$

Mais tarde em [2], Azevedo estendeu o resultado para corpos infinitos de característica qualquer. Para isto foi necessário construir um modelo genérico para $M_n(K)$. De agora em diante iremos nos referir às identidades acima como (i) e (ii).

Neste capítulo uma barra sobre um $i \in \mathbb{Z}$ denota a imagem de i pela projeção canônica $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ enquanto $i \pmod n$ denota o resto da divisão de i por n.

4.1 Um Modelo Genérico para $M_n(K)$

Sejam $Y = \{y_i^{(k)} \mid 1 \leq k \leq n, i \geq 1\}$ e $\Omega = K[Y] = K\langle Y\rangle/J$, onde $J = \langle y_1y_2 - y_2y_1\rangle$, a álgebra dos polinômios em variáveis comutativas gerada pelas variáveis $y_i^{(k)}$. Decompomos a álgebra $M_n(\Omega)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em Ω como soma direta dos subespaços $M_n(\Omega)_{\bar{i}}$ formados pelas matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{n-i} \\ f_{n-i+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & f_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $f_1, \ldots, f_n \in \Omega$, e $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

Para mostrar que esta decomposição é uma $\mathbb{Z}_n$-graduação precisaremos do lema a seguir.

Lema 4.1.1. *Sejam f_1, $\ldots$, f_n, g_1, $\ldots$, g_n polinômios pertencentes à Ω. Considere as* *matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{n-i} \\ f_{n-i+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & f_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & g_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{n-j} \\ g_{n-j+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & g_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $0 \leq i, j \leq n-1$. *Então*

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & f_1 g_{i_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & f_2 g_{i_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & f_x g_{i_x} \\ f_{x+1} g_{i_{x+1}} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & f_n g_{i_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $i_k = (i+k-1) \pmod{n+1}$ *e* $x = n-(i+j) \pmod{n}$.

Prova: Podemos escrever as matrizes A e B na forma $A = \sum_{k=1}^{n} f_k E_{k,i_k}$, $B = \sum_{l=1}^{n} g_l E_{lm_l}$. Assim $AB = \sum_{k=1}^{n} f_k g_{i_k} E_{k,m_{i_k}}$.

A posição do elemento f_k é (k, i_k) com $i_k - k \equiv i(\pmod{n})$. Assim concluímos que $i_k = i+k$ se $i+k \leq n$ e $i_k = i+k-n$ se $i+k > n$. Ou seja, $i_k = (i+k-1) \pmod{n+1}$.

O elemento $f_x g_{i_x}$ está na última coluna da matriz AB. Assim, como g_{n-j} está na última coluna da matriz B, temos que $n-j = i_x$. Logo, $n-j = (i+x-1) \mod n+1$ e portanto

$x \equiv -(i+j) \pmod n$. Como $n-(i+j) \pmod n$ é o único elemento de $1, \ldots, n$ tal que $n-(i+j) \equiv -(i+j) \pmod n$ segue que $x = n-(i+j) \pmod n$. ■

Nosso objetivo agora é construir um modelo genérico $\mathbb{Z}_n$-graduado da álgebra $M_n(K)$ que é o análogo da álgebra das matrizes genéricas para o caso $\mathbb{Z}_n$-graduado. Denotemos por R a subálgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada de $M_n(\Omega)$ gerada pelas matrizes

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_i^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & y_i^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_i^{(n-a(x_i))} \\ y_i^{(n-a(x_i)+1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & y_i^{(n)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

para $i \geq 1$.

Lema 4.1.2. *A álgebra relativamente livre $\mathbb{Z}_n$-graduada $K\langle X\rangle / T_n(M_n(K))$ é isomorfa à algebra R.*

Prova: É claro que a aplicação $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow R$ dada por $\varphi(f(x_1, \ldots, x_k)) = f(A_1, \ldots, A_k)$, (este é o homomorfismo que estende a função $x_i \longrightarrow A_i$) é um homomorfismo $\mathbb{Z}_n$-graduado que é sobrejetor já que R é gerada pelos $A_1, \ldots, A_n$. Vamos mostrar que $\ker \varphi = T_n(M_n(K))$ e o lema segue do Teorema dos Isomorfismos. É claro que $\ker \varphi \subset T_n(M_n(K))$, já que cada matriz de $M_n(K)$ é especialização de uma matriz de mesmo grau de R.

Suponha agora que $f \in T_n(M_n(K))$. Temos que $f(M_1, \ldots, M_k) = 0$ para quaisquer matrizes $M_1, \ldots, M_k$ tais que $wt(M_1) = wt(A_1), \ldots, wt(M_k) = wt(A_k)$. Assim a entrada (i,j) da matriz $f(A_1, \ldots A_k)$ é um polinômio nas variáveis $y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(n)}$, $1 \leq i \leq k$ que se anula para qualquer substituição $y_i^{(l)} \longrightarrow r_{i,l}$, onde $r_{i,l} \in K$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq l \leq n$. E como o corpo K é infinito esse polinômio deve ser o polinômio nulo. Daí segue que $f(A_1, \ldots, A_k) = 0$, logo $f \in \ker \varphi$. E portanto $\ker \varphi = T_n(M_n(K))$ e o lema está provado. ■

4.2 As Identidades Graduadas de $M_n(K)$

Agora faremos uso da álgebra R construída na seção anterior para demonstrar o teorema a seguir, que é o resultado principal de [2].

Teorema 4.2.1. *Todas as identidades polinomiais graduadas da álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada $M_n(K)$ seguem de*

$$x_1x_2 = x_2x_1, \quad wt(x_1) = wt(x_2) = 0,$$

e

$$x_1x_3x_2 = x_2x_3x_1, \quad wt(x_1) = wt(x_2) = -wt(x_3),$$

onde $wt(x)$ é o grau da variável x.

Denotaremos por I o ideal das identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas em $K\langle X\rangle$ gerado pelas identidades (i) e (ii).

Lema 4.2.2. *A álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada $M_n(K)$ satisfaz as identidades graduadas do T_n-ideal I.*

Prova: Lembramos que se $M,\ N \in M_n(K)^{(0)}$ então M e N são matrizes diagonais, e portanto comutam. Logo $M_n(K)$ satisfaz a identidade (i). Como as identidades em (ii) são multilineares basta mostrar que elas valem quando

$$x_1 = E_{i_1j_1}, \quad x_2 = E_{rs}, \quad x_3 = E_{i_2j_2},$$

onde $E_{i_1j_1},\ E_{i_2j_2} \in M_n(K)^{(\bar{t})}$ e $E_{rs} \in M_n(K)^{(\overline{n-t})}$, onde $0 < t \leq n-1$ (se $t = 0$ então essa identidade é conseqüência óbvia de (i)). Assim temos que

$$\begin{aligned} j_1 &= \begin{cases} i_1 + t, & \text{se } i_1 + t \leq n, \\ i_1 + t - n, & \text{se } i_1 + t > n; \end{cases} \\ i_2 &= \begin{cases} j_2 - t, & \text{se } j_2 - t \geq 1, \\ j_2 - t + n, & \text{se } j_2 - t < 1; \end{cases} \\ r &= \begin{cases} s + t, & \text{se } s + t \leq n, \\ s + t - n, & \text{se } s + t > n. \end{cases} \end{aligned}$$

Se $E_{i_1,j_1}E_{r,s}E_{i_2,j_2} \neq 0$ então $j_1 = r$ e $s = i_2$. Afirmamos que, neste caso, $i_1 = s = i_2$ e $j_1 = r = j_2$. De fato, se $j_1 = i_1 + t$ e $r = s + t - n$, então como $j_1 = r$ segue que $n = s - i_1$, o que é um absurdo. Assim as igualdades $j_1 = i_1 + t$ e $r = s + t - n$ não podem valer simultaneamente. De modo análogo concluímos que as igualdades $r = s + t$ e $i_2 = j_2 - t + n$ não podem valer simultaneamente. Portanto se $j_1 = i_1 + t$, então $r = s + t$ e $i_2 = j_2 - t$, logo

$$i_2 = s = r - t = j_1 - t = i_1$$

e

$$r = j_1 = i_1 + t = i_2 + t = j_2.$$

Analogamente provamos que se $j_1 = i_1 + t - n$ então $r = s + t - n$ e $i_2 = j_2 - t + n$. Portanto

$$i_2 = s = r - t + n = j_1 - t + n = i_1$$

e

$$r = j_1 = i_1 + t - n = i_2 + t - n = j_2,$$

e a afirmação está provada. Daí segue que $E_{i_1,j_1}E_{r,s}E_{i_2j_2} \neq 0$ se, e somente se $i_1 = s = i_2$ e $j_1 = r = j_2$ e isto ocorre se, e somente se $E_{i_2,j_2}E_{r,s}E_{i_1j_1} \neq 0$. Assim temos que

$$E_{i_1,j_1}E_{r,s}E_{i_2j_2} = E_{i_1j_2} = E_{i_2j_1} = E_{i_2,j_2}E_{r,s}E_{i_1j_1},$$

ou então

$$E_{i_1,j_1}E_{r,s}E_{i_2j_2} = 0 = E_{i_2,j_2}E_{r,s}E_{i_1j_1},$$

logo (ii) vale. ■

A demonstração do lema anterior é a que aparece em [20], Lema 1. Nesse artigo o autor utiliza a hipótese de que o corpo K tem característica 0 para reduzir o resultado ao caso multilinear. No caso de corpos de característica positiva isto não pode ser feito. Para contornar isto usaremos o modelo genérico construído na seção anterior. Antes de demonstrar o Teorema 4.2.1 precisamos de alguns lemas.

Lema 4.2.3. *Para todo monômio $0 \neq m(x_1, \ldots, x_k) \in K\langle X\rangle$ de comprimento q, existem inteiros $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_q \leq k$ e $\{k_1, \ldots, k_q, x\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tais que*

$$m(A_1, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_{i_1}^{(k_1)} \ldots y_{i_q}^{(k_q)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_x \\ \omega_{x+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\omega_i = y_{i_1}^{((k_1+i-2) \mod n+1)} \ldots y_{i_q}^{((k_q+i-2) \mod n+1)}$, $i = 2, \ldots, n$.

Prova: Provaremos o resultado por indução sobre q. Se $q = 1$, o resultado é claramente verdadeiro. Suponha agora que $q > 1$. Então existe um monômio $0 \neq n(x_1, \ldots, x_k) \in K\langle X \rangle$ tal que $m(x_1, \ldots, x_k) = n(x_1, \ldots, x_k)x_i$, onde $1 \leq i \leq k$. O resultado segue da hipótese de indução e do Lema 4.1.1, já que as outras entradas da matriz são função da primeira. ■

Lema 4.2.4. *Sejam $m(x_1, \ldots, x_k)$ e $n(x_1, \ldots, x_k)$ dois monômios de $K\langle X \rangle$. Se as matrizes $m(A_1, \ldots, A_k)$ e $n(A_1, \ldots, A_k)$ têm a mesma entrada não nula na primeira linha então $m(A_1, \ldots, A_k) = n(A_1, \ldots, A_k)$.*

Prova: Se $m(x_1, \ldots, x_k)$ e $n(x_1, \ldots, x_k)$ têm na primeira linha a mesma entrada não nula segue diretamente do Lema 4.2.3 que $m(A_1, \ldots, A_k) = n(A_1, \ldots, A_k)$. ■

Lema 4.2.5. *Sejam $m(x_1, \ldots, x_k)$ e $n(x_1, \ldots, x_k)$ dois monômios de $K\langle X \rangle$ tais que*

$$m(A_1, \ldots, A_k) = n(A_1, \ldots, A_k).$$

Se x_p é uma variável de $m(x_1, \ldots, x_k)$ e $m_1, \ldots, m_l$ são monômios de $K\langle X \rangle$ tais que vale $m = m_1 x_p m_2 m_3 \ldots m_{l-1} x_p m_l$ então existem monômios $n_1, \ldots, n_l$ em $K\langle X \rangle$ e uma bijeção $\varphi : \{1, \ldots, l\} \longrightarrow \{1, \ldots, l\}$ de modo que

$$n = n_1 x_p n_2 x_p n_3 \ldots n_{l-1} x_p n_l, \quad wt(m_1 x_p m_2 \ldots m_t) = wt(n_1 x_p n_2 \ldots n_{\varphi(t)}).$$

Prova: Vamos demonstrar apenas os casos $l = 2$ e $l = 3$, a mesma idéia pode ser usada para demonstrar o caso geral. Suponha $l = 2$, pelo Lema 4.2.3 sabemos que existem monômios $\omega_1, \ldots, \omega_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ em Ω e inteiros $0 \leq i, j \leq n-1$ tais que

$$m_1(A_1, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_{n-i} \\ \omega_{n-i+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$m_2(A_1,\ldots,A_k)=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \eta_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \eta_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_{n-j}\\ \eta_{n-i+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \eta_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que o grau de $m(A_1,\ldots,A_k)$ em R é $\bar{i}$ e portanto o grau de $m(x_1,\ldots,x_m)$ também é $\bar{i}$. Segue do Lema 4.1.1 que $m_1(A_1,\ldots,A_k)A_pm_2(A_1,\ldots,A_k)$ é igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \omega_1 y_p^{(i_1)}\eta_{j_1} & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \omega_y y_p^{(i_y)}\eta_{j_y}\\ \omega_{y+1}y_p^{(i_{y+1})}\eta_{j_{y+1}} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \omega_n y_p^{(i_n)}\eta_{j_n} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $i_r=(i+r-1) \mod n+1$, $x=n-(i+a(x_p)) \mod n$, $j_s=(n-x+s-1) \mod n+1$ e $y=n-(n-x+j) \mod n$. Em particular $i_1=i+1$. Concluímos então que a variável $y_p^{(i+1)}$ aparece no monômio não nulo da primeira linha de $m(A_1,\ldots,A_k)$ se, e somente se, existem monômios m_1 e m_2 em $K\langle X\rangle$ tais que $m=m_1x_pm_2$ e $wt(m_1)=\bar{i}$. Assim a variável $y_p^{(i+1)}$ deve aparecer no monômio não nulo da primeira linha de $n(A_1,\ldots,A_k)$ e aplicando o raciocínio anterior a n concluímos que existem n_1 e n_2 em $k\langle X\rangle$ tais que $n=n_1x_pn_2$ e $n_1(A_1,\ldots,A_k)$ tem grau $\bar{i}$ em R. Logo $wt(m_1)=wt(n_1)$ e é fácil ver que $\varphi=(1,2)=id_{S_2}$ e o resultado está provado para $l=2$.

Vamos agora mostrar o lema para $l=3$. Consideremos então $m=m_1x_pm_2x_pm_3$. Sejam $0\leq i_1,i_2,\leq n-1$ naturais tais que $\overline{i_1}=wt(m_1)$ e $\overline{i_2}=wt(m_1x_pm_2)$. Então as variáveis $y_p^{(i_1+1)}$ e $y_p^{(i_2+1)}$ aparecem no monômio não nulo na primeira linha de $m(A_1,\ldots,A_k)$ e portanto também aparecem no monômio não nulo da primeira linha de $n(A_1,\ldots,A_n)$, denotaremos tal monômio por ω, e portanto existem monômios n_1 e n_2 em $K\langle X\rangle$, com $n=n_1x_pn_2x_pn_3$, tais que:

$$wt(n_1)=\overline{i_1} \text{ e } wt(n_1x_pn_2)=\overline{i_2}, \text{ se } y_1 \text{ aparece à esquerda de } y_2 \text{ em } \omega$$

ou

$$wt(n_1) = \overline{i_2} \text{ e } wt(n_1 x_p n_2) = \overline{i_1}, \text{ se } y_1 \text{ aparece à direita de } y_2 \text{ em } \omega.$$

No primeiro caso $\varphi = (1, 2, 3) = id_{S_3}$ e no segundo $\varphi = (2, 1, 3)$, e o resultado está provado. ■

Lema 4.2.6. *Sejam $m(x_1, \ldots, x_k)$ e $n(x_1, \ldots, x_k)$ dois monômios de $K\langle X\rangle$ que satisfazem $m(A_1, \ldots, A_k) = n(A_1, \ldots, A_k)$. Então $m(x_1, \ldots, x_k) \equiv n(x_1, \ldots, x_k) \pmod{I}$.*

Prova: Seja x_i a primeira variável de m. Pelo Lema 4.2.5 existem monômios n_1 e n_2 em $K\langle X\rangle$ tais que $n = n_1 x_i n_2$ e $wt(n_1) = 0$.

Trocando as letras m e n se necessário, existem quatro monômios n_7, n_8, n_9, n_{10} em $K\langle X\rangle$ tais que $n = n_7 n_8 x_i n_9 n_{10}$, $wt(n_7 n_8) = 0$ e $wt(n_8 x_i n_9) = 0$. Para demonstrar essa afirmação consideramos três casos possíveis.

Caso 1: Existem monômios m_1 e m_2 em $K\langle X\rangle$ tais que $m = x_i m_1 x_i m_2$ e $wt(x_i m_1) = 0$. Então pelo Lema 4.2.5 existem três monômios n_2, n_3 e n_4 tais que $n = n_3 x_i n_4 x_i n_5$, e $wt(n_3) = wt(n_3 x_i n_4) = 0$ e a afirmação vale.

Caso 2: Existem duas variáveis x_a e x_b, e seis monômios m_1, m_2, n_3, n_4, n_5, n_6 em $K\langle X\rangle$ tais que $m = m_1 x_a x_b m_2$, $n = n_3 x_a n_4 x_i n_5 x_b n_6$, $n_1 = n_3 x_a n_4$, $wt(m_1) = wt(n_3)$ e $wt(m_1 x_a) = wt(n_3 x_a n_4 x_i n_5)$. Então $wt(n_4 x_i n_5) = 0$ e como $wt(n_3 x_a n_4) = wt(n_1) = 0$ a afirmação está provada.

Caso 3: Nenhum dos casos 1 e 2 vale. Consideremos $m = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_q}$. Escolhemos $r \in \{1, \ldots, q\}$ o menor inteiro tal que x_{i_r} é uma variável de n_1. Pelo Lema 4.2.5 existem monômios n_3, n_4, n_5, n_6 de $K\langle X\rangle$ tais que $n_1 = n_3 x_{i_r} n_4$, $wt(n_3) = wt(x_{i_1} \ldots x_{i_{r-1}})$, $n = n_5 x_{i_{r+1}} n_6$, $wt(n_5) = wt(x_{i_1} \ldots x_{i_r})$. Vamos mostrar que o comprimento de $n_5 x_{i_{r+1}}$ não é maior que o comprimento de n_1. De fato, se o comprimento de $n_5 x_{i_{r+1}}$ é igual ao comprimento de n_1 então, como $n_5 x_{i_{r+1}} n_6 = n = n_1 x_i n_2$ segue que $n_1 x_i = n_5 x_{i_{r+1}}$ e conseqüentemente $x_i = x_{i_{r+1}}$ e $wt(n_5) = wt(n_1) = 0$. Mas $wt(n_5) = wt(x_{i_1} \ldots x_{i_r})$ e caímos no caso 1, o que é uma contradição. Se o comprimento de $n_5 x_{i_{r+1}}$ é maior que o comprimento de n_1 então caímos no caso 2 (onde $x_a = x_{i_r}$ e $x_b = x_{i_{r+1}}$), o que é um absurdo. Assim o comprimento de $n_5 x_{i_{r+1}}$ não é maior que o comprimento de n_1. Observemos que mesmo que $i_r = i_{r+1}$ podemos, pelo Lema 4.2.5, tomar $n_3 \neq n_5$, de modo que x_{i_r} e $x_{i_{r+1}}$ também aparecem em posições distintas em n_1. Aplicando o mesmo raciocínio para $r+1$, $r+2$, ..., q concluímos que se x é uma variável de $x_{i_r} x_{i_{r+1}} \ldots x_q$ então x é variável de n_1 e $a(x) \leq b(x)$, onde

$a(x)$ denota a multiplicidade de x em $x_{i_r}x_{i_{r+1}}\dots x_q$ e $b(x)$ denota a multiplicidade de x em n_1. Como r é o menor inteiro pertencente a $\{1,\dots,q\}$ tal que x_r é variável de n_1, vale a igualdade $a(x) = b(x)$. Portanto n_1 e $x_{i_r}x_{i_{r+1}}\dots x_q$ têm o mesmo multigrau, em particular $wt(x_{i_r}x_{i_{r+1}}\dots x_q) = wt(n_1) = 0$. Pelo Lema 4.2.5 existem monômios m_3, m_4, m_5 de $K\langle X\rangle$ tais que $m = m_3m_4x_jm_5$, onde x_j é a primeira variável de n, $wt(m_3m_4) = 0$ e $m_4x_jm_5 = x_{i_{r_0}}x_{i_{r+1}}\dots x_{i_q}$, logo $wt(m_4x_jm_5) = wt(x_{i_{r_0}}x_{i_{r+1}}\dots x_{i_q}) = 0$. E trocando as letras m e n a afirmação está provada.

Definimos

$$w(x_1,\dots,x_k) = \begin{cases} x_in_9n_7n_8n_{10} & \text{, se} \quad wt(n_8) = 0, \\ x_in_9n_8n_7n_{10} & \text{, se} \quad \alpha(n_8) \neq 0. \end{cases}$$

Se $wt(n_8) = 0$ então $wt(x_in_9) = 0$ e usando a identidade $x_1x_2 = x_2x_1$, com $wt(x_1) = wt(x_2) = 0$ segue que $w(x_1,\dots,x_k) \equiv n(x_1,\dots,x_k) \pmod I$. Se $wt(n_8) \neq 0$, então $wt(n_7) = wt(x_in_9) = -wt(n_8)$ e, usando a identidade $x_1x_3x_2 = x_2x_3x_1$, com $wt(x_1) = wt(x_2) = -wt(x_3)$, e novamente temos $w(x_1,\dots,x_k) \equiv n(x_1,\dots,x_k) \pmod I$.

Como $w(x_1,\dots,x_k) - n(x_1,\dots,x_k) \in I \subseteq T_n(M_n(K)) = T_n(R)$, segue que

$$w(A_1,\dots,A_k) = n(A_1,\dots,A_k) = m(A_1,\dots,A_k).$$

Se w_0 e m_0 são monômios de $K\langle X\rangle$ tais que $w = x_iw_0$ e $m = x_im_0$ então segue do Lema 4.1.1 que $w_0(A_1,\dots,A_k) = m_0(A_1,\dots,A_k)$. Segue da hipótese de indução que vale a congruência $w_0(x_1,\dots,x_k) \equiv m_0(x_1,\dots,x_k) \pmod I$, então $w(x_1,\dots,x_k) \equiv m(x_1,\dots,x_k) \pmod I$. ■

Agora vamos demonstrar o resultado principal deste capítulo, o Teorema 4.2.1.

Prova do Teorema 4.2.1: Precisamos mostrar que $T_n(M_n(K)) = I$. Do Lema 4.2.2 segue que $I \subset T_n(M_n(K))$. Resta mostrar que vale a inclusão contrária $T_n(M_n(K)) \subset I$. Como o corpo K é infinito segue do Corolário 1.2.28 que o ideal $\mathbb{Z}_n$-graduado é conseqüência dos seus elementos multihomogêneos, logo para mostrar que $T_n(M_n(K)) \subset I$ basta mostrar que se $f(x_1,\dots,x_k) \in T_n(M_n(K))$ é uma identidade polinomial graduada multihomogênea de $M_n(K)$ então $f(x_1,\dots,x_k) \in I$.

Seja r o menor inteiro não-negativo tal que o polinômio f pode ser expresso módulo I como uma combinação linear de r monômios multihomogêneos

$$f \equiv \sum_{q=1}^{r} a_qm_q \pmod I,$$

onde $0 \neq a_q \in K$. Afirmamos que $r = 0$. Vamos provar esta afirmação por absurdo. Suponha então que $r > 0$. Pelo Lema 4.2.5 sabemos que $f \in T_n(R)$, logo

$$a_1 m_1(A_1, \ldots, A_k) = -\sum_{q=2}^{r} a_q m_q(A_1, \ldots, A_k)$$

e portanto existe $p \in \{2, \ldots, q\}$ tal que $m_1(A_1, \ldots, A_q)$ e $m_p(A_1, \ldots, A_q)$ têm na primeira linha a mesma entrada não-nula. Segue dos Lemas 4.2.4 e 4.2.6 que $m_1 \equiv m_p \mod I$, o que contradiz a minimalidade de r, já que

$$f \equiv \sum_{q=1}^{r} a_q m_q = (a_1 + a_p) m_1 + \sum_{q=2}^{p-1} a_q m_q + \sum_{q=p+1}^{r} a_q m_q \mod I.$$

Assim $f \equiv 0 \pmod I$ e o teorema está provado. ■

CAPÍTULO 5

Identidades Graduadas para algumas Álgebras T-primas

Neste capítulo estudaremos identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas, encontraremos bases para essas identidades satisfeitas pelas álgebras $M_{11}(E)$ e $E \otimes E$ com suas $\mathbb{Z}_2$-graduações naturais definidas nos exemplos 1.2.5 e 1.2.4 respectivamente. A maioria dos resultados está em [15].

Lembramos que no caso da álgebra associativa livre $\mathbb{Z}_2$-graduada $K\langle X\rangle$ (livremente gerada por X), consideramos $X = Y \cap Z$ (a união é disjunta), onde $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ é o conjunto das variáveis pares e $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ é o conjunto das variáveis ímpares.

5.1 A álgebra $M_{1,1}(E)$

Começamos lembrando que $M_{11}(E)$ é a álgebra das matrizes M de ordem 2, com entradas na álgebra de Grassmann, da forma

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

onde a, $d \in E_0$ e b, $c \in E_1$. As operações em $M_{11}(E)$ são as operações usuais para matrizes. A $\mathbb{Z}_2$-graduação em $M_{11}(E)$ é dada pela decomposição

$$M_{11}(E) = (M_{11}(E))_0 \oplus (M_{11}(E))_1,$$

onde

$$(M_{11}(E))_0 = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; a, d \in E_0\},\ (M_{11}(E))_1 = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}; b, c \in E_1\}.$$

Por simplicidade de notação freqüentemente denotaremos a álgebra $M_{11}(E)$ por M_{11}.

O nosso objetivo nesta seção é descrever o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas satisfeitas por essa álgebra. Para isso precisaremos construir um modelo genérico para essa álgebra.

5.1.1 Um modelo genérico para $M_{1,1}(E)$

Consideremos os conjuntos $Y = \{y_i^{(j)} | i \geq 1, j = 1, 2\}$ (das variáveis de grau 0), e $Z = \{z_i^{(j)} | i \geq 1, j = 1, 2\}$ (das variáveis de grau 1), como os conjuntos geradores da álgebra livre supercomutativa. Lembramos que a álgebra livre supercomutativa é denotada por $K(Y; Z)$. Agora considere as matrizes

$$A_i = \begin{pmatrix} y_i^{(1)} & 0 \\ 0 & y_i^{(2)} \end{pmatrix} \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & z_i^{(1)} \\ z_i^{(2)} & 0 \end{pmatrix}$$

e a subálgebra $Gen(M_{1,1})$ de $M_2(K(Y; Z))$ gerada por essas matrizes. Essa álgebra tem uma 2-graduação natural:

$$Gen(M_{11}) = Gen(M_{11})_0 \oplus Gen(M_{11})_1,$$

onde

$$Gen(M_{11})_0 = \{f_{11}e_{11} + f_{22}e_{22}; f_{11}, f_{22} \in K(Y; Z)\}$$

e

$$Gen(M_{11})_1 = \{f_{12}e_{12} + f_{21}e_{21}; f_{12}, f_{21} \in K(Y; Z)\}.$$

É fácil ver que tal decomposição é de fato uma 2-graduação. Mais ainda, temos que f_{11}, $f_{22} \in K(Y; Z)_0$ e f_{12}, $f_{21} \in K(Y; Z)_1$.

Veremos a seguir que a álgebra 2-graduada $Gen(M_{11})$ é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto enumerável $F_2(M_{11})$. Para provar isso precisamos do lema abaixo.

Lema 5.1.1. *Se K é um corpo infinito e $f(y_1^{(1)}y_1^{(2)},\dots,y_n^{(2)},z_1^{(1)},\dots,z_m^{(2)}) \in K(Y;Z)$ é tal que $f(g_1,\dots,g_n,h_1,\dots,h_m) = 0$ para quaisquer $g_1, \dots, g_n \in E_0$ e $h_1,\dots, h_m \in E_1$ então $f = 0$.*

Prova: Usando as relações $gh = (-1)^{wt(g)wt(h)}hg$ podemos escrever f na forma

$$f(y_1^{(1)}y_1^{(2)},\dots,y_n^{(2)},z_1^{(1)},\dots,z_m^{(2)}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i(y_1^{(1)}y_1^{(2)},\dots,y_n^{(2)},z_1^{(1)},\dots,z_m^{(2)}),$$

onde $m_i \in K(Y;Z)$ são monômios de multigraus distintos. Como o corpo K é infinito segue do Corolário 1.2.28 que $\alpha_i m_i(g_1,\dots,g_n,h_1,\dots,h_m) = 0$ para quaisquer $g_1, \dots, g_n \in E_0$ e $h_1, \dots, h_m \in E_1$. Mas neste caso é fácil ver que $\alpha_i m_i(y_1^{(1)}y_1^{(2)},\dots,y_n^{(2)},z_1^{(1)},\dots,z_m^{(2)}) = 0$ e o lema está provado. ■

Lema 5.1.2. *A álgebra 2-graduada $Gen(M_{11})$ é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto enumerável $F_2(M_{11})$ na variedade das álgebras 2-graduadas determinada por M_{11}.*

Prova: Consideremos o homomorfismo 2-graduado $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow Gen(M_{11})$ que estende a aplicação $\varphi : X \longrightarrow Gen(M_{11})$ dada por $\varphi(y_i) = A_i$, $\varphi(z_i) = B_i$. É claro que vale a inclusão $\ker(\varphi) \subset T_2(M_{11})$, já que cada matriz de M_{11} é uma especialização de uma matriz de $Gen(M_{11})$. Seja $f(y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_m) \in T_2(M_{11})$. Então existem

$$f_{ij}(y_1^{(1)}y_1^{(2)},\dots,y_n^{(2)},z_1^{(1)},\dots,z_m^{(1)}z_m^{(2)}) \in K\langle Y \cup Z\rangle, 1 \le i,j \le 2,$$

tais que a matriz $M = f(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_m)$, é da forma

$$M = E_{11}f_{11} + E_{12}f_{12} + E_{21}f_{21} + E_{22}f_{22}.$$

Como $f \in T_2(M_{11})$ os polinômios f_{ij} são tais que

$$f_{ij}(g_1^{(1)}g_1^{(2)},\dots,g_n^{(2)},h_1^{(1)},\dots,h_m^{(1)}h_m^{(2)}) = 0$$

para quaisquer $(g_1^{(1)}g_1^{(2)},\dots,g_n^{(2)}) \in E_0$ e $(h_1^{(1)},\dots,h_m^{(1)}h_m^{(2)}) \in E_1$. Assim segue do Lema 5.1.1 que $f_{ij} = 0$, ou seja $f(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_m) = 0$ e portanto $f \in \ker(\varphi)$. Logo $T_2(M_{11}) = T_2(Gen(M_{11}))$, e como φ é sobrejetora o Teorema dos Isomorfismos garante que $F_2(M_{11}) = K(X)/T_2(M_{11})$ é isomorfa a $Gen(M_{11})$. ■

5.1.2 As identidades graduadas de $M_{1,1}(E)$

Agora utilizaremos o modelo genérico de $M_{1,1}(E)$ para encontrar uma base para as identidades 2-graduadas de $M_{1,1}(E)$. Para simplificar a notação de agora em diante o símbolo $\wedge$ sobre uma variável significa que ela pode não aparecer. Por exemplo $z_{a_1}z_{b_1}\ldots z_{a_n}\widehat{z_{b_n}}$ representa qualquer um dos monômios $z_{a_1}z_{b_1}\ldots z_{a_n}z_{b_n}$ ou $z_{a_1}z_{b_1}\ldots z_{a_n}$.

Proposição 5.1.3. *Seja I o T_2-ideal das identidades 2-graduadas de M_{11}. Então os polinômios $y_1y_2 - y_2y_1$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 \in K\langle X\rangle$ pertencem a I.*

Prova: Lembramos que E_0 é o centro de E e que se g_1, g_2, $g_3 \in E_1$ então $g_1g_2g_3+g_3g_2g_1 = 0$. Assim se

$$y_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} \in (M_{11})_0 \text{ e } y_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \in (M_{11})_0,$$

então a_1, a_2, b_1, $b_2 \in E_0$ e

$$y_1y_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 & 0 \\ 0 & b_2b_1 \end{pmatrix} = y_2y_1,$$

ou seja $y_1y_2 - y_2y_1 \in I$. Além disso, se

$$z_i = \begin{pmatrix} 0 & c_i \\ d_i & 0 \end{pmatrix} \in (M_{11})_1, i = 1, 2, 3,$$

então

$$z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 = \begin{pmatrix} 0 & c_1d_2c_3 + c_3d_2c_1 \\ d_1c_2d_3 + d_3c_2d_1 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

e a proposição está provada. ∎

Agora vamos mostrar que essas identidades são uma base para $T_2(M_{11}(E))$. De agora em diante identificamos as variáveis y_i e z_i com as suas imagens pela projeção canônica $K\langle X\rangle \longrightarrow K\langle X\rangle/J$, onde J é o ideal das identidades 2-graduadas gerado pelos polinômios $y_1y_2-y_2y_1, z_1z_2z_3+z_3z_2z_1 \in K\langle X\rangle$. Definimos o conjunto $\mathcal{B} \subset K(X)$ como sendo o conjunto formado pelos monômios

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k},$$
$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{z_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l},$$
$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}},$$
$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}}.$$

Aqui $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l$, $c_1 < c_2 < \dots c_m$ e $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$, $k \geq 0$, $l \geq 0$, $m \geq 0$. Nos monômios do segundo tipo $k + l \geq 1$, nos monômios do quarto tipo se $k = l = 0$ seu grau é maior que ou igual a 2, lembramos que o chapéu sobre uma variável significa que ela pode não aparecer. A proposição a seguir garante que a imagem de $\mathcal{B}$ pela projeção canônica, que de agora em diante também denotaremos por $\mathcal{B}$, gera $K\langle X\rangle/J$.

Proposição 5.1.4. *O conjunto $\mathcal{B}$ gera $K\langle X\rangle/J$.*

Prova: Para isto basta mostrar que cada monômio em $K\langle X\rangle$ é congruente módulo J a um monômio de $\mathcal{B}$. Como $y_1y_2 - y_2y_1 \equiv 0 \pmod J$ segue que se $g \in K\langle X\rangle_0$ então

$$y_1g - gy_1 \equiv 0 \pmod J. \tag{5.1}$$

Usando 5.1 não é difícil ver que se m é um monômio em $K\langle X\rangle$ então existe um monômio da forma $h_1(y)\widehat{z_{e_1}}h_2(y)z_{e_2}z_{e_3}\dots z_{e_s}$ com o mesmo multigrau de m tal que:

$$m \equiv h_1(y)\widehat{z_{e_1}}h_2(y)z_{e_2}z_{e_3}\dots z_{e_s} \pmod J, \tag{5.2}$$

onde $h_1(y)$ e $h_2(y)$ são monômios nas variáveis y_i.

Observe que se $h(y)$ é um monômio nas variáveis y_i então segue de 5.1 que

$$h(y) \equiv y_{e_1}y_{e_2}\dots y_{e_{n_h}} \pmod J. \tag{5.3}$$

Aqui $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_{n_h}$. Se $h(z) \not\equiv 0 \pmod J$ é um monômio nas variáveis z_i então segue da identidade $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 \in J$ que

$$\widehat{z_{e_2}}z_{e_3}z_{e_4}\dots z_{e_s} \equiv z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\dots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}} \pmod J, \tag{5.4}$$

onde $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$, $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$, e os índices são tais que os monômios têm o mesmo multigrau.

A proposição segue de 5.2, 5.3 e 5.4. ■

Um cálculo direto nos dá a seguinte proposição:

Proposição 5.1.5. *Se A_i e B_i são as matrizes definidas na Seção* 5.1.1 *então*

$$A_{a_1}A_{a_1}\dots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}\dots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\dots B_{c_m}\widehat{B_{d_m}} \tag{5.5}$$

é igual a expressão

$$\begin{aligned} & y_{a_1}^{(1)} \quad y_{a_2}^{(1)}\dots y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}\dots y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\dots z_{c_m}^{(1)}\widehat{z_{d_m}^{(2)}}e_{t_1t_2} \\ + & \quad y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}\dots y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{2}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}\dots y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\dots z_{c_m}^{(2)}\widehat{z_{d_m}^{(1)}}e_{t_3t_4}, \end{aligned}$$

note que os $z^{(1)}_{d_m}$, $z^{(2)}_{d_m}$ aparecem se, e somente se, a matriz B_{d_m} aparece. Além disso se a matriz 5.5 for par então $t_1 = t_2 = 1$ e $t_3 = t_4 = 2$ e se for ímpar então $t_1 = t_4 = 1$ e $t_3 = t_4 = 2$.

De agora em diante a matriz $\overline{M}$ denota a matriz obtida substituindo $y_i = A_i$ e $z_i = B_i$ em um monômio $M \in K\langle X\rangle$.

Corolário 5.1.6. *Se $M \in \mathcal{B}$ então a matriz $\overline{M}$ é da forma $P^1_M e_{ij} + P^2_M e_{kl}$, os índices i, j, k, l são determinados pela paridade da matriz $\overline{M}$ e os multigraus dos monômios P^1_M, $P^2_M \in K(Y;Z)$ dependem injetivamente de M, isto é, a aplicação que associa a cada matriz M de $\mathcal{B}$ o multigrau da matriz P^1_M (resp. P^2_M) é injetiva. Além disso $P^1_M \neq 0$ e $P^2_M \neq 0$.*

Prova: A primeira parte do corolário segue diretamente da proposição anterior. A segunda parte segue observando que se

$$P^1_M = y^{(1)}_{a_1} y^{(1)}_{a_2} \dots y^{(1)}_{a_k} z^{(1)}_{c_1} y^{(2)}_{b_1} y^{(2)}_{b_2} \dots y^{(2)}_{b_l} z^{(2)}_{d_1} z^{(1)}_{c_2} z^{(2)}_{d_2} \dots z^{(1)}_{c_m} \widehat{z^{(2)}_{d_m}},$$

então M é um monômio nas variáveis $y_{a_1}, y_{a_2}, \dots, y_{a_k}$, $y_{b_1}, y_{b_2}, \dots, y_{b_l}$, $z_{c_1}, z_{c_2}, z_{d_1}, z_{d_2}, \dots, z_{c_m}, \widehat{z_{d_m}}$, onde a variável z_{d_m} aparece no monômio M se, e somente se $z^{(2)}_{d_m}$ aparece em P^1_M. Assim podemos determinar a partir de P^1_M as variáveis que aparecem em M. Agora observamos que como $M \in \mathcal{B}$ a ordem em que as variáveis aparecem em M fica determinada pelos índices superiores nas variáveis $y^{(a)}_n$, $z^{(b)}_m$ de P^1_M e o resultado segue. Se $M \in \mathcal{B}$ então $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_l$, $c_1 < c_2 < \dots c_m$ e $d_1 < d_2 < \dots < d_m$, $k \geq 0$, $l \geq 0$, portanto $P^1_M \neq 0$ e $P^2_M \neq 0$. ■

Proposição 5.1.7. *O conjunto $\mathcal{B} \subset K\langle X\rangle$ é linearmente independente módulo $T_2(M_{11})$.*

Prova: Como o corpo K é infinito basta mostrar que cada subconjunto multihomogêneo de $\mathcal{B}$ é linearmente independente módulo J. Sejam M_1, M_2, $\dots$, M_n monômios distintos em $\mathcal{B}$ multihomogêneos e $\lambda_i \in K$, $1 \leq i \leq n$ escalares tais que

$$M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_n M_n \in T_2(M_{11}(E)).$$

Então, como $T_2(M_{11}(E)) = T_2(Gen(M_{11}))$, se substituímos $y_i = A_i$ e $z_j = B_j$ em M_l obtemos

$$\overline{M} = \lambda_1 \overline{M_1} + \lambda_2 \overline{M_2} + \dots + \lambda_n \overline{M_n} = 0. \tag{5.6}$$

Segue do Corolário 5.1.6 que as matrizes $\overline{M_a}$ são da forma $P^1_{M_a}e_{ij} + P^2_{M_a}e_{kl}$, onde os índices i, j, k, l são determinados pela paridade da matriz $\overline{M_a}$. Observe que como os M_l são multihomogêneos as matrizes $\overline{M_l}$ têm a mesma paridade. Então a equação 5.6 fica

$$0 = (\lambda_1 P^1_{M_1} + \lambda_2 P^1_{M_2} + \cdots + \lambda_n P^1_{M_n})e_{ij} + (\lambda_1 P^2_{M_1} + \lambda_2 P^2_{M_2} + \cdots + \lambda_n P^2_{M_n})e_{kl}.$$

Logo

$$0 = \lambda_1 P^1_{M_1} + \lambda_2 P^1_{M_2} + \cdots + \lambda_n P^1_{M_n} = \lambda_1 P^2_{M_1} + \lambda_2 P^2_{M_2} + \cdots + \lambda_n P^2_{M_n}.$$

Pelo Corolário 5.1.6, os multigraus dos monômios não-nulos $P_{M_a^1}$, $P_{M_a^2} \in K(Y;Z)$ dependem injetivamente de M_a, concluímos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. ■

O teorema a seguir corresponde ao teorema 9 de [15].

Teorema 5.1.8. *Se K é um corpo infinito com $\operatorname{char} K \neq 2$ então as identidades 2-graduadas de $M_{11}(E)$ seguem das identidades $y_1y_2 - y_2y_1$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$.*

Prova: Pela Proposição 5.1.3 segue que $J \subset T_2(M_{11})$. Consideremos $f \in T_2(M_{11})$. Pela Proposição 5.1.4 existem escalares λ_i e monômios m_i em $\mathcal{B} \subset K\langle X\rangle$ tais que

$$f \equiv \sum \lambda_i m_i \pmod J. \tag{5.7}$$

Como $J \subset T_2(M_{11})$ segue que $0 \equiv_{T_2(M_{11})} f \equiv_{T_2(M_{11})} \sum \lambda_i m_i$, e pela Proposição 5.1.7 $\lambda_i = 0$. Assim a equação 5.7 fica $f \equiv 0 \pmod J$, logo $f \in J$. Assim $T_2(M_{11}) \subset J$ e o resultado segue. ■

5.2 A álgebra $E \otimes E$

Como vimos no Capítulo 1 a álgebra $E \otimes E$ tem uma 2-graduação natural, a saber

$$E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1,$$

onde

$$(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1) \text{ e } (E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0).$$

Nesta seção encontraremos uma base para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas satisfeitas por essa álgebra com a $\mathbb{Z}_2$-graduação acima. A seguir construímos um outro modelo genérico para M_{11} e provamos alguns resultados que serão úteis mais adiante.

5.2.1 Um outro Modelo Genérico para M_{11}

Sejam $Y = \{a_i^{(0)}, b_i^{(0)} | i \in \mathbb{N}\}$ variáveis comutativas e $Z = \{a_i^{(1)}, b_i^{(1)} | i \in \mathbb{N}\}$ variáveis anticomutativas. Consideremos a álgebra supercomutativa $K(Y;Z)$ livremente gerada por elas e a álgebra L gerada por 1 e pelas matrizes

$$C_i = a_i^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_i^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_i = a_i^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_i^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se os C_i são elementos pares e os D_i são elementos ímpares então L tem uma 2-graduação natural.

A proposição a seguir mostra que L é de fato um outro modelo genérico para M_{11}.

Proposição 5.2.1. *A álgebra L é isomorfa à $Gen(M_{11})$.*

Prova: Seja $\varphi : Gen(M_{11}) \longrightarrow L$ o homomorfismo determinado por $\varphi(A_i) = C_i$, $\varphi(B_i) = D_i$. Para ver que $\ker \varphi = 0$ basta observar que, como $\operatorname{char} K \neq 2$, as matrizes A_i e B_i são especializações das matrizes C_i e D_i, basta substituirmos $a_i^{(0)}$, $b_i^{(0)}$, $a_i^{(1)}$ e $b_i^{(1)}$ por $\frac{y_i^{(1)}+y_i^{(2)}}{2}$, $\frac{y_i^{(1)}-y_i^{(2)}}{2}$, $z_i^{(1)}$ e $z_i^{(2)}$ respectivamente. ■

As proposições a seguir serão úteis na próxima seção.

Proposição 5.2.2. *As matrizes $E_i = b_i^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D_i = \begin{pmatrix} 0 & c_i^{(1)} \\ d_i^{(1)} & 0 \end{pmatrix}$ satisfazem as seguintes relações:*

$$E_iE_j \text{ são centrais}, \quad E_iE_j = E_jE_i,$$

$$E_iD_j = -D_jE_i, \quad D_i^2 D_j = -D_j D_i^2.$$

Prova: Basta verificar diretamente fazendo os cálculos. ■

Proposição 5.2.3. *Se $f \in B_2(L)$ é um polinômio multihomogêneo, então f é combinação linear de elementos da forma*

$$E_{i_1}^{\alpha_1} E_{i_2}^{\alpha_2} \dots E_{i_k}^{\alpha_k} D_{j_1} D_{j_1}^2 D_{j_2}^2 \dots D_{j_l}^2 g(D_{n_1}, D_{n_2}, \dots, D_{n_m}),$$

onde $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $\{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ e $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ são disjuntos, $j_1 < j_2 < \dots < j_l$, e os polinômios g são multilineares.

Prova: Como as matrizes $C_i = a_i^{(0)} I_2 + E_i$, onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2, aparecem apenas em comutadores e $a_i^{(0)} I$ é central esses termos têm contribuição nula e não aparecem na expansão de f. Segue do lema anterior que $f = E_{i_1}^{\alpha_1} E_{i_2}^{\alpha_2} \dots E_{i_k} h(D_1 D_2 \dots D_t)$, onde h é um polinômio multihomogêneo e $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Escrevemos h como uma soma de monômios não nulos $h = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i$, onde $\lambda_i \in K$. Observe que M_i é um monômio que só tem variáveis ímpares. Usando a identidade $z_1 z_2 z_3 + z_3 z_2 z_1 = 0$, como feito na Proposição 5.1.4, podemos escrever $M_i = D_{c_1} D_{d_1} D_{c_2} D_{d_2} \dots D_{c_m} \widehat{D_{d_m}}$ (o chapéu tem o mesmo significado que na Proposição 5.1.4), com $c_1 \leq c_2 \leq \dots c_m$ e $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$. Agora observemos que se $c_i = c_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$ então segue de $z_1 z_2 z_1 = 0$ que $M_i = 0$. Logo $c_i \neq c_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$ e analogamente $d_i \neq d_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$. Isso quer dizer que cada i pode aparecer no máximo duas vezes, uma em $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ e outra em $\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$. Assim a menos de sinal temos $M_i = \dots D_i^2 \dots$ e usando $D_i^2 D_j = -D_j D_i^2$ temos $M_i = D_i^2 \dots$, a menos de sinal. Como $D_i^2 D_j^2 = D_j^2 D_i^2$ segue que $M_i = D_{j_1}^2 D_{j_1}^2 D_{j_2}^2 \dots D_{j_l}^2 g_i(D_{n_1}, D_{n_2}, \dots, D_{n_m})$, onde $j_1 < j_2 < \cdots < j_l$, g_i é um monômio multilinear e $\{j_1, j_2, \dots, j_l\} \bigcap \{n_1, n_2, \dots, n_m\} = \emptyset$. Como os M_i têm o mesmo multigrau o resultado segue. ■

5.2.2 Um Modelo Genérico para $E \otimes E$

Para encontrar o T_2 ideal de $E \otimes E$ também faremos uso de um modelo genérico. Nesta seção construímos esse modelo e provaremos alguns resultados que serão úteis.

Sejam $a_i^{(0)}, b_i^{(0)}, c_i^{(0)}, d_i^{(0)}$ variáveis comutativas e $a_i^{(1)}, b_i^{(1)}, c_i^{(1)}, d_i^{(1)}$ anti-comutativas, onde $i = 1, 2, \dots$ Consideramos a álgebra livre supercomutativa $K(Y; Z)$ livremente gerada pelos conjuntos $Y = \{a_i^{(0)}, b_i^{(0)}, c_i^{(0)}, d_i^{(0)}\}$ e $Z = \{a_i^{(1)}, b_i^{(1)}, c_i^{(1)}, d_i^{(1)}\}$ das variáveis pares e ímpares, respectivamente. Denotemos por F a subálgebra de $K(Y; Z) \otimes K(Y; Z)$ gerada pelos elementos da forma

$$Y_i = a_i^{(0)} \otimes b_i^{(0)} + a_i^{(1)} \otimes b_i^{(1)}, \quad Z_i = c_i^{(0)} \otimes d_i^{(1)} + c_i^{(1)} \otimes d_i^{(0)}.$$

A álgebra F tem uma 2-graduação natural, consideramos Y_i como as variáveis pares e Z_i como as variáveis ímpares.

Proposição 5.2.4. *A álgebra 2-graduada F é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto enumerável $K(X)/I$ na variedade das álgebras 2-graduadas definidas por $E \otimes E$.*

Prova: O homomorfismo $\varphi : K(X) \longrightarrow F$ determinado por $y_i \longrightarrow Y_i$ e $z_i \longrightarrow Z_i$ é claramente sobrejetor. Para concluir basta mostrar que $\ker \varphi = I$ e a proposição segue do

Teorema dos Isomorfismos. É claro que $\ker\varphi \subset I$, já que cada elemento de $E \otimes E$ é uma especialização de um elemento de F. Seja $f \in I$ então $\varphi(f)$ é um polinômio em $K(Y;Z) \otimes K(Y;Z)$ que se anula para cada substituição dos $a_i^{(0)}$, $b_i^{(0)}$, $c_i^{(0)}$, $d_i^{(0)}$ por elementos de E_0 e dos $a_i^{(1)}$, $b_i^{(1)}$, $c_i^{(1)}$, $d_i^{(1)}$ por elementos de E_1. Daí segue que $\varphi(f) = 0$ em $K(Y;Z) \otimes K(Y;Z)$, ou seja, $f \in \ker\varphi$ e a proposição está demonstrada. ■

5.2.3 Um Pouco de Combinatória

Na seção a seguir precisaremos de alguns resultados combinatórios que serão provados nesta seção. Mais precisamente necessitaremos os resultados desta seção para provar que os monômios $z_{i_1}z_{j_1}z_{i_2}z_{j_2}\dots z_{i_m}\widehat{z_{j_m}}$, onde $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ e $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$ são linearmente independentes módulo as identidades graduadas de $E \otimes E$. Começamos com a definição de sinal colorido:

Definição 5.2.5. *Sejam $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ uma permutação dos símbolos $\{1, 2, \dots, n\}$ e A, B subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ tais que*

$$A \cup B = \{1, 2, \dots, n\}, \quad A \cap B = \emptyset.$$

Um par (i_α, i_β), $1 \leq \alpha, \beta \leq n$, forma uma inversão colorida (em relação a partição $\{A, B\}$ se $1 \leq \alpha < \beta \leq n$, $\{\alpha, \beta\} \subset A$ ou $\{\alpha, \beta\} \subset B$, e $i_\alpha > i_\beta$. Se q é o número de inversões coloridas então $(-1)^q$ é o sinal colorido desta permutação com relação a partição $\{A, B\}$.

Exemplo 5.2.6. *A tabela abaixo mostra os sinais coloridos de todas as permutações de $\{1, 2, 3\}$.*

permutações

partições		123	132	231	213	312	321
	123	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
	12; 3	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
	13; 2	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
	23; 1	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$

Observação 5.2.7. *Vamos considerar as partições como pares não ordenados, deste modo o conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ tem exatamente 2^{n-1} partições, incluindo a partição trivial. No caso*

da partição trivial $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $B = \emptyset$ a definição acima coincide com a definição usual do sinal de uma partição, ou seja, o sinal colorido de uma permutação com relação a esta partição é o sinal usual da permutação.

Lema 5.2.8. *As transposições $(t, t+2)$ mudam o sinal colorido de qualquer permutação em relação a qualquer partição.*

Prova: Consideremos $i = (i_1, \ldots, i_n)$ uma permutação dos símbolos $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\{A, B\}$ uma partição qualquer deste conjunto e $j = (i_1, \ldots, i_{t+2}, i_{t+1}, i_t \ldots i_n)$. Temos duas possibilidades para os símbolos i_t, i_{t+1}, i_{t+2}:

(1) os símbolos i_t, i_{t+1}, i_{t+2} pertencem a um mesmo conjunto da partição;

(2) não acontece (1).

Definimos q_A^i como sendo o número de inversões coloridas com relação à cor A, isto é, o número de inversões coloridas (i_α, i_β) tais que $\{\alpha, \beta\} \subset A$ na permutação i. Definimos de modo análogo os números q_B^i, q_A^j e q_B^j. No caso (1) podemos supor sem perda de generalidade que i_t, i_{t+1}, i_{t+2} pertencem a A. Neste caso $q_B^i = q_B^j$ e os números q_A^i e q_A^j têm paridades diferentes e neste caso o resultado vale.

No caso (2) podemos supor sem perda de generalidade que dois dos símbolos i_t, i_{t+1}, i_{t+2} pertencem a A e o outro pertence a B. Temos que considerar três possibilidades: ou temos i_t, $i_{t+1} \in A$, i_t, ou $i_{t+2} \in A$ ou i_{t+1}, $i_{t+2} \in A$. Não é difícil ver que para qualquer uma das três possibilidades $q_B^i = q_B^j$ e os números q_A^i e q_A^j têm paridades diferentes. ■

Veremos na proposição a seguir que para uma permutação variando-se as partições ou o sinal colorido não varia ou número de sinais coloridos iguais a 1 e a -1 é o mesmo.

Proposição 5.2.9. *Seja $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ uma permutação fixa de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Então o sinal colorido de i é igual a 1 ou -1 com relação a todas as partições, ou então é igual a 1 para 2^{n-2} partições e -1 para as outras 2^{n-2} partições.*

Prova: Pelo Lema 5.2.8 basta provar a proposição para permutações i tais que $i_1 < i_3 < \ldots$ e $i_2 < i_4 < \ldots$. Faremos indução em n. Para $n = 1$, 2, o resultado é óbvio. Para $n = 3$ o resultado segue do Exemplo 5.2.6.

Suponha agora que $n > 3$ e que o resultado já está provado para 1, 2, $\ldots$, $n - 1$. Seja $i' = (i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})$ a permutação dos $n - 1$ símbolos $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_n\}$ obtida de i

apagando-se o símbolo i_n. Então a proposição vale para i' pela hipótese de indução. Como $i_1 < i_3 < \ldots$ e $i_2 < i_4 < \ldots$ segue que $i_n = n$ ou $i_{n-1} = n$.

Se $i_{n-1} < i_n$ então $i_n = n$. Se $\{A, B\}$ é uma partição de $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_n\}$ então $\{A \cup \{i_n\}, B\}$, e $\{A, B \cup \{i_n\}\}$ são partições de $\{1, 2, \ldots, n\}$, e toda partição de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é obtida desta maneira, além disso os sinais coloridos destas partições são os mesmos de i' com relação a partição $\{A, B\}$. E neste caso a proposição está provada.

Se $i_{n-1} > i_n$ então $i_{n-1} = n$. Definimos $i'' = (i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}, i_n)$. Então a proposição vale para i''. Seja (C, D) uma partição de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ e seja ε o sinal de i'' com relação a esta partição. Consideremos as partições $(C \cup \{n\}, D)$, $(C, D \cup \{n\})$ de $\{i, 2, \ldots, n\}$. Em uma delas i_n e $i_{n-1} = n$ pertencem a conjuntos diferentes da partição, e neste caso o sinal colorido de i em relação a esta partição é ε. Na outra i_n e $i_{n-1} = n$ pertencem ao mesmo conjunto da partição e o sinal colorido de i em relação a esta partição é $-\varepsilon$. E neste caso a proposição também está provada. ■

Proposição 5.2.10. *Seja $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ tal que $i_1 < i_3 < \ldots$ e $i_2 < i_4 < \ldots$. Se $i \neq (1, 2, \ldots, n)$, então o sinal colorido de i é igual a 1 para 2^{n-2} partições e é igual a -1 para as outras 2^{n-2} partições de $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

Prova: Segue da demonstração da proposição anterior. Faremos indução em n, e observamos que por hipótese de indução tanto no caso $i_{n-1} < i_n$ quanto no caso $i_{n-1} > i_n$ obtemos 2^{n-2} vezes o sinal colorido 1 e 2^{n-2} vezes o sinal colorido -1. ■

5.2.4 As Identidades Graduadas de $E \otimes E$

Nesta seção encontraremos uma base para o T_2-ideal das identidades 2-graduadas de $E \otimes E$.

Proposição 5.2.11. *Os polinômios $y_1y_2 - y_2y_1, z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ são identidades graduadas para a álgebra $E \otimes E$. Se $\operatorname{char} K = p > 2$ então o polinômio $y_1^p z_1 - z_1 y_1^p$ também é uma identidade graduada para $E \otimes E$.*

Prova: O primeiro polinômio é claramente uma identidade graduada, já que a componente par de $E \otimes E$ é uma álgebra comutativa.

Vamos agora mostrar que o segundo polinômio é uma identidade graduada. Como o segundo polinômio é multilinear para concluir basta mostrar que

$$g_1g_2g_3 \otimes h_1h_2h_3 + g_3g_2g_1 \otimes h_3h_2h_1 = 0,$$

sempre que g_i, h_i, $i = 1, 2, 3$, são homogêneos tais que $wt(h_i) = wt(g_i)+1$. Neste caso temos

$$\begin{aligned} g_1g_2g_3 &= (-1)^{(wt(g_1)wt(g_2))}g_2g_1g_3 = (-1)^{(wt(g_1)wt(g_2)+wt(g_1)wt(g_3))}g_2g_3g_1 \\ &= (-1)^{(wt(g_1)wt(g_2)+wt(g_1)wt(g_3)+wt(g_2)wt(g_3))}g_3g_2g_1, \end{aligned}$$

e

$$h_1h_2h_3) = (-1)^{\sigma}h_3h_2h_1,$$

onde $\sigma = wt(h_1)wt(h_2) + wt(h_1)wt(h_3) + wt(h_2)wt(h_3) = wt(g_1g_2) + wt(g_1g_3) + wt(g_2g_3) + 1$ (a última igualdade é módulo 2). Ou seja,

$$h_1h_2h_3 = -(-1)^{(wt(g_1g_2)+wt(g_1g_3)+wt(g_2g_3))}h_3h_2h_1,$$

e segue que o segundo polinômio é identidade.

Resta mostrar que se $\operatorname{char} K = p > 2$ então o polinômio $y_1^pz_1 - z_1y_1^p$ também é uma identidade graduada para $E \otimes E$. Para isto considere $a \in E_0 \otimes E_0 \oplus E_1 \otimes E_1$. Então a se escreve na forma $a = \sum(e_i \otimes f_i + g_i \otimes h_i)$, onde e_i, $f_i \in E_0$ e g_i, $h_i \in E_1$. Como a é uma soma de elementos que comutam dois a dois e $\operatorname{char} K = p$ segue que

$$a^p = \sum(e_i^p \otimes f_i^p + g_i^p \otimes h_i^p),$$

e como g_i, $h_i \in G_1$ segue que $g_i^p = h_i^p = 0$, assim $a^p = \sum(e_i^p \otimes f_i^p)$. Como os elementos $e_i^p \otimes f_i^p$ são contrais em $E \otimes E$ o resultado segue. ■

Lema 5.2.12. *A álgebra $B_2(F) = B_2(X)/B_2(X) \cap I$ é imagem homomorfa de $B_2(L)$*

Prova: Definimos a aplicação $\varphi : B_2(L) \longrightarrow B_2(F)$ por $\varphi(P + T_2(M_{1,1})) = Q + I$, onde P, $Q \in B_2(X)$ e $Q \in P + T_2(M_{1,1})$. Como $T_2(M_{1,1}) \subset I$ é fácil ver que a aplicação está bem definida. Também é fácil ver que φ é um homomorfismo e se $P \in B_2(X)$ temos que $\varphi(P + T_2(M_{1,1})) = P + I$. Daí segue que φ é um homomorfismo sobrejetor e o lema está provado. ■

Agora vamos usar o outro modelo genérico de $M_{1,1}$ construído nesta seção para provar o resultado a seguir.

Lema 5.2.13. *Sejam $g_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ polinômios multilineares linearmente independentes módulo o T_2-ideal $T_2(M_{1,1})$. Os polinômios*

$$y_1^{i_1}y_2^{i_2}\ldots y_k^{i_k}z_{n+1}^2z_{n+2}^2\ldots z_{n+r}^2g_i(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

são linearmente independentes módulo o T_2-ideal $T_2(M_{1,1})$.

Prova: Como o corpo K é infinito basta mostrar que os polinômios acima de mesmo multigrau são linearmente independentes, mas neste caso qualquer combinação linear é um polinômio da forma

$$y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_k^{i_k} z_{n+1}^2 z_{n+2}^2 \dots z_{n+r}^2 g(z_1, z_2, \dots, z_n), \tag{5.8}$$

onde $g(z_1, z_2, \dots, z_n)$ é uma combinação linear dos $g_i(z_1, z_2, \dots, z_n)$. Se mostrarmos que o polinômio 5.8 pertence a $T_2(M_{1,1})$ somente quando $g(z_1, z_2, \dots, z_n)$ pertence a $T_2(M_{1,1})$, o resultado estará provado, já que os $g_i(z_1, z_2, \dots, z_n)$ são linearmente independentes módulo $T_2(M_{1,1})$.

Observemos que

$$E_i^{\alpha} = (b_i^{(0)})^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\alpha} \text{ e } D_i^2 = c_i^{(1)} d_i^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim fazendo $y_i = E_i$, $1 \leq i \leq k$ e $z_j = D_j$, $1 \leq j \leq n+r$, podemos concluir que o monômio $y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_k^{i_k} z_{n+1}^2 z_{n+2}^2 \dots z_{n+r}^2$ é igual a

$$(b_1^{(0)})^{i_1} (b_2^{(0)})^{i_2} \dots (b_k^{(0)})^{i_k} (c_{n+1}^{(1)} d_{n+1}^{(1)}) \dots (c_{n+r}^{(1)} d_{n+r}^{(1)}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{(i_1+i_2+\dots i_k+r)}.$$

Assim se

$$y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_k^{i_k} z_{n+1}^2 z_{n+2}^2 \dots z_{n+r}^2 g(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

segue que o polinômio $g(z_1, z_2, \dots, z_n)$ se anula quando substituímos $z_1 = D_1, \dots, z_n = D_n$. Logo $g(z_1, z_2, \dots, z_n) \in T_2(M_{1,1})$, e o resultado segue. ∎

Agora usaremos os resultados da Seção 5.2.3 para provar o lema a seguir.

Lema 5.2.14. *Os monômios multilineares*

$$m_{ij} = z_{i_1} z_{j_1} z_{i_2} z_{j_2} \dots z_{i_m} \widehat{z_{j_m}},$$

onde $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, $j_1 < j_2 < \dots < j_{m-1} < j_m$, são linearmente independentes módulo as identidades graduadas de $E \otimes E$, e o chapéu significa que a variável z_{j_m} não aparece se o grau do monômio é ímpar.

Prova: Suponhamos por absurdo que os monômios sejam linearmente dependentes. Então existem m_{ij} e escalares α_{ij} não todos nulos tais que $\sum \alpha_{ij} m_{ij}$ é uma identidade graduada para $E \otimes E$. Como o corpo K é infinito podemos supor que esses monômios têm o mesmo multigrau e renomeando as variáveis se necessário podemos supor que os m_{ij} são monômios nas variáveis z_1, z_2, $\ldots$, z_k e que o monômio $z_1 \ldots z_k$ aparece com coeficiente não nulo α.

Consideremos a nova identidade $\sum \alpha_{ij}(m_{ij}z_{k+1})$. Sejam $\{A, B\}$ uma partição do conjunto $\{1, 2, \ldots, k-1, k\}$, $n = |A|$, $m = |B|$. Substituímos $z_i \mapsto e_{2i-1} \otimes 1$, se $i \in A$, $z_i \mapsto 1 \otimes e_{2i}$, se $i \in B$ e $z_{k+1} \mapsto e_{2n+1}e_{2n+3} \ldots e_{2k-1} \otimes e_{2m+2}e_{2m+4} \ldots e_{2k}$. Denotaremos por $\overline{m_{ij}z_{k+1}}^{(A;B)}$ o resultado do monômio $m_{ij}z_{k+1}$ após a substituição. Como $\sum \alpha_{ij}(m_{ij}z_{k+1})$ é identidade para $E \otimes E$ segue que $0 = \sum \alpha_{ij}\overline{m_{ij}z_{k+1}}^{(A;B)}$. Logo $0 = \sum_{(A;B)}(\sum \alpha_{ij}\overline{m_{ij}z_{k+1}}^{(A;B)})$, onde a primeira soma é feita sobre todas as 2^{k-1} partições de $\{1, 2, \ldots k\}$. Reordenando a soma obtemos

$$\sum \alpha_{ij}(\sum_{(A;B)} \overline{m_{ij}z_{k+1}}^{(A;B)}) = 0. \tag{5.9}$$

Agora iremos usar a Proposição 5.2.10 para provar que $\sum_{(A;B)} \overline{m_{ij}z_{k+1}}^{(A;B)} = 0$ sempre que $m_{ij} \neq z_1z_2 \ldots z_k$. De fato, suponhamos que $m_{ij} = z_{n_1} \ldots z_{n_k} \neq z_1 \ldots z_k$, então

$$\overline{m_{ij}z_{k+1}}^{(A;B)} = (-1)^{\sigma(A;B)}e_1e_3 \ldots e_{2k-1} \otimes e_2e_4 \ldots e_{2k},$$

onde $\sigma(A; B)$ é o sinal colorido da permutação $(n_1, \ldots, n_k)$ com relação à partição $A \cup B$. Segue da definição de m_{ij} que $n_1 < n_3 < \ldots$, e $n_2 < n_4 < \ldots$. Como $(n_1, \ldots, n_k) \neq (1, 2, \ldots, k)$, segue da Proposição 5.2.10 que

$$\sum_{(A;B)} \overline{m_{ij}z_{k+1}}^{(A;B)} = (\sum_{(A;B)} (-1)^{\sigma(A;B)})e_1e_3 \ldots e_{2k-1} \otimes e_2e_4 \ldots e_{2k} = 0.$$

Assim, como o sinal colorido de $(1, 2, \ldots, k)$ é igual a 1 em relação a qualquer partição obtemos de 5.9 que

$$\alpha 2^{k-1}(e_1e_3 \ldots e_{2k-1} \otimes e_2e_4 \ldots e_{2k}) = 0,$$

o que é um absurdo pois $\alpha \neq 0$ e $\operatorname{char} K \neq 2$. ■

Lema 5.2.15. *Seja $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in B_2(M_{1,1}) \equiv B_2(L)$ um polinômio graduado (aqui usamos as letras y_i para E_i e z_i para D_i). Então módulo o ideal I das identidades graduadas de $E \otimes E$ o polinômio f é igual a um polinômio da forma*

$$y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2} \ldots y_m^{\alpha_m} z_{i_1}^2 z_{i_2}^2 \ldots z_{i_k}^2 g_j(z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_l}),$$

onde $\{i_1, i_2 \ldots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_l\} = \emptyset$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ e g_j é um polinômio multilinear. Se $\operatorname{char} K = p > 0$ impomos $\alpha_i < p$, $i = 1, \ldots, m$.

Além disso se os polinômios multilineares g_j são são linearmente independentes módulo I então os polinômios acima são linearmente independentes também.

Prova: Pela Proposição 5.2.11 segue que $T_2(M_{1,1}) \subset I$, assim a primeira parte segue da Proposição 5.2.3. Se $char K = p > 0$ e $a \in E_1 \times E_1$ então $a^p = 0$. Assim quando $char K = p > 0$ impomos $\alpha_i < p$, $i = 1, \ldots, m$. Se os g_j são linearmente independentes módulo I procedemos de modo análogo à demonstração da Proposição 5.2.13. ■

O teorema a seguir corresponde ao teorema 23 de [15].

Teorema 5.2.16. *O ideal das identidades 2-graduadas da álgebra $E \otimes E$ é gerado pelos polinômios $y_1y_2 - y_2y_1, z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$, e se $char K = p > 2$, também por $y_1^pz_1 - z_1y_1^p$.*

Prova: Já vimos que esses polinômios são identidades graduadas de $E \otimes E$ (Proposição 5.2.11). Como os dois primeiros são uma base para as identidades graduadas de $M_{1,1}$ podemos trabalhar na álgebra relativamente livre determinada por elas, ou seja, em $Gen(M_{1,1})$. Pelo Lema 1.2.34 basta considerar os polinômios próprios, e assim o resultado segue dos Corolários 5.2.15 e 5.2.14. ■

Como conseqüência dos Teoremas 5.1.8 e 5.2.16 obtemos uma nova prova, utilizando métodos elementares, da coincidência dos T-ideais das álgebras M_{11} e $E \otimes E$ sobre um corpo de característica 0.

Corolário 5.2.17. *Se $char K = 0$ então as álgebras $M_{1,1}$ e $E \otimes E$ são PI-equivalentes, ou seja, $T(M_{1,1}) = T(E \otimes E)$.*

Prova: Se $char K = 0$ então segue dos Teoremas 5.1.8 e 5.2.16 que $T_2(M_{11}) = T_2(E \otimes E)$, e o resultado segue diretamente da Proposição 1.2.22. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] S. M. Alves, *PI equivalência e não equivalência de Álgebras*, Tese de Doutorado.

[2] S. S. Azevedo, *Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field*, Commun. Algebra **30 (12)**, 5849–5860 (2002).

[3] S. S. Azevedo, *A basis for $\mathbb{Z}$-graded identities of matrices over infinite fields*, Serdica Math. Journal **29 (2)**, 149–158 (2003).

[4] S. Azevedo, M. Fidelis, P. Koshlukov, *Tensor product theorems in positive characteristic*, J. Algebra **276, no. 2**, 836–845, (2004).

[5] S. Azevedo, M. Fidelis, P. Koshlukov, *Graded identities and the tensor product theorem in positive characteristic*, Commun. Algebra **33 (4)**, 1011–1022 (2005).

[6] Yu. A. Bahturin and M. V. Zaicev, *Group Gradings on Matrix Algebras*, Canad. Math. Bull. 45, $499 - 508$, 2002.

[7] Yu. Bahturin, S. Sehgal, M. Zaicev, *Group gradings on associative algebras*, J. Algebra **241, no. 2**, 677–698 (2001).

[8] A. Brandão, *Polinômios Centrais para Álgebras Graduadas*, Tese de Doutorado.

[9] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two*, Linear Algebra Appl. **377**, 53–67 (2004).

[10] V. Drensky, *Free algebras and PI algebras. Graduate Course in Algebra*, Springer, Singapore, 1999.

[11] V. Drensky, *Gelfand-Kirillov dimension of PI algebras*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **198**, Denker, New York, 97 – 113, 1998.

[12] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Math. Surveys Monographs **122**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[13] A. Kanel–Belov, L. Rowen, *Computational aspects of polynomial identities.* Research Notes in Mathematics, **9**. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2005.

[14] A. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*, Translations Math. Monographs **87**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[15] P. Koshlukov, S. S. Azevedo, *Graded identities for T-prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel J. Math. **128**, 157–176 (2002).

[16] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic* $p \neq 2$, J. Algebra **241, no. 1**, 410–434 (2001).

[17] Yu. Razmyslov, *Identities of algebras and their representations*, Translations Math. Monographs, **138**, AMS, Providence, RI, 1994.

[18] J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups*, Graduate texts in mathematics, Springer, 1977.

[19] A. Valenti and M. Zaicev, *Abelian Gradings on upper-triangular matrices*, Arch. Math., 80, 12 – 17, 2003.

[20] S. Yu. Vasilovsky, $\mathbb{Z}_n$*-graded polynomial identities of the full matrix algebra of order* n, Proc. Amer. Math. Soc. **127 (12)**, 3517–3524 (1999).

[21] S. Yu. Vasilovsky, $\mathbb{Z}$*-graded polynomial identities of the full matrix algebra*, Commun. Algebra **26 (2)**, 601–612 (1998).

[22] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of* $M_{1,1}(E)$, Israel J. Math. **80 (3)**, 323–335 (1992).

[23] M. V. Zaicev, S. K. Sehgal, *Finite Gradings of simple Artinian rings*, Vestnik Moskov. Univ. Mat. Mekh. (3), 21 – 24, 2001.