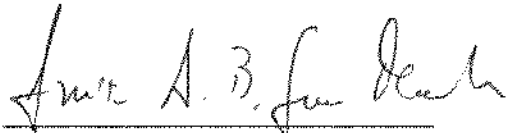


PRODUTO DE MATRIZES ALEÁTORIAS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. PAULO RÉGIS CARON RUFFINO e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 3 de Abril de 1992

Prof. Dr. 
LUIZ ANTÔNIO B. SAN MARTIN
ORIENTADOR

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

AGRADECIMENTOS

Ao San Martín pelo apoio e confiança, aos amigos da Pós-Graduação pelo companherismo, à Fátima pela inestimável ajuda na datilografia, e ao CNPq pelo apoio financeiro.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO:	1
CAPÍTULO I: TEORIA ERGÓDICA.....	3
1. Definições Básicas.....	3
2. Ergodicidade.....	5
3. Os Teoremas Ergódicos Sub-Aditivos e o de Birkhoff.....	10
4. O Teorema Ergódico Multiplicativo.....	28
CAPÍTULO II: PRODUTO DE MATRIZES ALEATÓRIAS.....	45
1. Notação.....	45
2. O Maior Expoente de Lyapunov.....	46
3. Cociclos e Produto de Convolução de Probabilidades.....	50
4. O Teorema de Furstenberg e Kesten.....	59
CAPÍTULO III: EXPOENTES DE LYAPUNOV EM PRODUTO DE MATRIZES ALEATÓRIAS.....	70
1. Conjuntos Contráteis.....	71
2. Irreducibilidade Forte.....	74
3. Resultados Relativos À Irreducibilidade Forte.....	78
4. Ação Contrativa em $P(\mathbb{R}^d)$ e Convergência em Direção.....	89
5. Os Expoentes de Lyapunov.....	97
6. Multiplicidade do Maior Expoente de Lyapunov.....	109
APÊNDICE 1:	118
APÊNDICE 2:	123
BIBLIOGRAFIA:	127

INTRODUÇÃO

A Teoria de Produto de Matrizes Aleatórias além de seu interesse em si tem aplicação em questões relativas a estabilidade de sistemas dinâmicos estocásticos (e de fato foi onde teve uma de suas motivações iniciais), em particular nos problemas relativos a solução de equações diferenciais ou de diferença com coeficientes aleatórios. A título de ilustração considere o problema de determinar o comportamento assintótico da sequência aleatória de números reais a_n satisfazendo $a_n = u_n \cdot a_{n-1} + v_n \cdot a_{n-2}$, onde (u_n, v_n) é uma sequência de vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos. Podemos então escrever:

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = Y_n \cdot \dots \cdot Y_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad Y_j = \begin{bmatrix} u_{j+1} & v_{j+1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

isto é, o comportamento de a_n depende diretamente do produto $Y_n \cdot \dots \cdot Y_1$.

Neste trabalho juntamos a Teoria Ergódica à Teoria de Produto de Matrizes Aleatórias no sentido da primeira permitir uma abordagem imediata, uma interpretação dinâmica e geométrica da segunda. Tentamos, na verdade fazer uma abordagem dupla desta Teoria: uma mais probabilística (como em [2], nosso texto principal) e outra ergódica (como na primeira parte de [9]) e comparar qual das interpretações é mais conveniente, em qual aspecto e precisamente onde as hipóteses em uma são equivalentes às hipóteses da outra.

No Capítulo I sobre Teoria Ergódica mostraremos, entre outros o Teorema Ergódico Multiplicativo de Osseledec que, em si centraliza a interpretação ergódica do produto de uma sequência de matrizes aleatórias e dos expoentes de Lyapunov associados a ela.

O Capítulo II dá noções gerais sobre a Teoria em questão, é

onde mostramos o Teorema de Furstenberg e Kesten, que vem a ser nada mais, nada menos que uma versão da Lei dos Grandes Números adaptado a produto de matrizes aleatórias, ou mais precisamente, garante que para uma sequência de matrizes aleatórias $Y_1, Y_2, \dots$ identicamente distribuídas temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|S_n\| = \gamma \quad \text{q.s.}$$

onde $S_n = Y_n \cdot \dots \cdot Y_1$.

Os resultados principais estão no Capítulo III onde efetivamente estudamos o comportamento assintótico do produto S_n especialmente no que diz respeito aos expoentes de Lyapunov e convergência no espaço projetivo.

Onde couber faremos comentários relativos à necessidade ou não da independência ou da inversibilidade dos elementos da sequência $(Y_n)_{n \geq 1}$. Uma extensão natural do trabalho seria o estudo de uma versão do Teorema Central do Limite adaptado a matrizes aleatórias (por exemplo a abordagem de Le Page em [10]), e na verdade os resultados do Capítulo III abrem caminho para isso, no entanto preferimos não assumir um objetivo tão extenso nesta monografia.

CAPÍTULO I

TEORIA ERGÓDICA

Neste primeiro capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos da Teoria Ergódica; essa nos fornece um ponto de vista mais abrangente e permite demonstrações mais imediatas dos resultados na Teoria de Produto de Matrizes Aleatórias. Este capítulo oferece um ferramental muito poderoso e geral, no sentido de poder ser tomado como ponto de partida para diversas teorias.

Inicialmente faremos uma breve apresentação de definições básicas: espaço de medida e transformação mensurável que preserva medida. Na seção 2, baseada principalmente em [7], apresentaremos um outro conceito fundamental na teoria: o de ergodicidade, discutiremos proposições que nos garantem essa propriedade e alguns exemplos que serão utilizados posteriormente. Nas outras duas seções estaremos tratando com uma questão típica: saber o comportamento assintótico da aplicação iterada de uma transformação mensurável T que preserva medida, isto é, da sequência $(T^n)_{n \geq 0}$; naturalmente para essa sequência fazer sentido, estaremos tratando com transformações de um espaço X nele mesmo. Na seção 3 provaremos o Teorema Ergódico Sub-aditivo de Kingman nas versões de [4] e [14] e o Teorema Ergódico de Birkhoff como corolário deste. Na seção 4 demonstraremos o Teorema Ergódico Multiplicativo de Osseledec seguindo a versão de [14].

1.1. DEFINIÇÕES BÁSICAS

O conceito básico de espaço de medida é uma tripla $(X, \mathcal{A}, m)$ onde X é um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra em X e m uma medida neste espaço;

na maioria das aplicações que faremos essa medida será uma probabilidade (isto é, $m(X) = 1$). Uma transformação mensurável $T: X \longrightarrow Y$ é uma aplicação entre dois espaços de medida $(X, \mathcal{A}_X, m_X)$ e $(Y, \mathcal{A}_Y, m_Y)$ tal que a imagem inversa de conjuntos mensuráveis em Y sejam conjuntos mensuráveis em X ; a transformação mensurável T será inversível se existir uma transformação mensurável $T^{-1}: Y \longrightarrow X$ tal que $TT^{-1} = \text{Id}_Y$ e $T^{-1}T = \text{Id}_X$. A maioria das transformações mensuráveis com as quais trabalharemos preserva medida, isto é, a medida de todo mensurável em Y é a mesma de sua imagem inversa em X : $m_X(T^{-1}A) = m_Y(A)$, onde A é mensurável em Y .

Um dos exemplos mais simples e familiares deste tipo de transformação é a translação na reta com a medida usual de Lebesgue: $Tx = x + 1$, ou mais geralmente em um espaço euclidiano: $Tx = x + c$, onde c é um vetor arbitrário. Ainda mais geral, em um grupo localmente compacto com uma medida de Haar invariante à esquerda, tome c um elemento arbitrário do grupo e defina $Tx = cx$. É ilustrativo neste caso, considerar por exemplo o grupo no círculo $\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ com a operação de multiplicação e T uma rotação por um ângulo α , onde α é o argumento do elemento c .

Uma das transformações mensuráveis que preservam medida que aparecem com frequência no estudo de Produto de Matrizes Aleatórias é o "shift" ou translação à esquerda em uma sequência unilateral. Seja E um espaço de probabilidade e considere o espaço produto $E^{\mathbb{N}} = E \times E \times \dots$, isto é, o espaço das sequências em E , com a σ -álgebra gerada pelos cilindros em um número finito de coordenadas; a medida neste espaço será a medida produto ρ , em outras palavras: dado um mensurável básico $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_K \times E \times E \times \dots$, $K \in \mathbb{N}$, temos $\rho(A) = m(A_1) \cdot m(A_2) \cdot \dots \cdot m(A_K)$. A transformação que faz a translação à esquerda é $T\left((x_n)_{n \geq 1}\right) = \left(x_{n+1}\right)_{n \geq 1}$. T é mensurável e preserva medida. A sequência é chamada unilateral porque o produto cartesiano de E se estende infinitamente para a direita; vale observar que se o mesmo shift à esquerda fosse feito sobre uma sequência bilateral (isto é, sobre $E^{\mathbb{Z}}$), T além de mensurável e preservar a medida, seria inversível.

Outro exemplo típico da teoria de que trataremos é a transformação

$$\theta: (Ex \text{ } Ex \dots) \times B \longrightarrow (Ex \text{ } Ex \dots) \times B,$$

onde E é o espaço das matrizes $d \times d$, B é o espaço projetivo $P(\mathbb{R}^d)$, e a medida em jogo é uma medida produto. Neste caso $\theta \left((Y_1, Y_2, \dots), x \right) \longrightarrow \left((Y_2, Y_3, \dots), \frac{Y_1 x}{\|Y_1 x\|} \right)$. Esse exemplo será discutido com mais detalhes, e numa linguagem mais adaptada à teoria, na demonstração da proposição II.3.7, para um semi-grupo topológico G agindo em um espaço topológico B .

1.2. ERGODICIDADE

O conceito de ergodicidade se fundamenta na seguinte:

Definição 2.1: Seja $T: X \longrightarrow X$ transformação mensurável que preserva a medida, dizemos que o subconjunto mensurável $E \subset X$ é invariante (ou T -invariante) se $T^{-1}E = E$ quase sempre. Analogamente, dizemos que a função mensurável $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ é invariante (T -invariante) se $f(Tx) = f(x)$ para quase todo $x \in X$.

No sentido dinâmico da transformação T , a noção mais natural de invariança de um conjunto é a de que sua imagem pela transformação esteja contida nele próprio, isto é, que $T(E) \subset E$ (ou equivalentemente que $E \subset T^{-1}E$), apesar da definição formal exigir mais: que $E = T^{-1}E$. Em geral essas noções não são equivalentes; no entanto se $m(x) < \infty$ então $E \subset T^{-1}E$ implica em $T^{-1}E = E$ q.s., isto é, que E é invariante a T (Analogamente se $T^{-1}E \subset E$ então E é invariante). De fato, como $m(T^{-1}E) = m(E)$ então:

$$m(E \cup (T^{-1}E - E)) = m(T^{-1}E),$$

que implica em

$$m(E) + m(T^{-1}E - E) = m(T^{-1}E).$$

Como $m(E) < \infty$ segue que

$$m(T^{-1}E - E) = 0.$$

Agora se $m(x) = \infty$ então $T(E) \subset E$ pode não significar invariância. Considere o seguinte contra-exemplo: $X = \mathbb{Z}$ com a medida da contagem (isto é, a medida de um subconjunto de $\mathbb{Z}$ é igual à sua cardinalidade) e a transformação $Tx = x + 1$. O subconjunto dos naturais $N = \{0, 1, \dots\}$ contém sua imagem, porém $m(TN - N) = m(\{0\}) = 1$, portanto os naturais não são invariantes a T . Mostramos agora a definição de ergodicidade:

Definição 2.2: Dizemos que a transformação mensurável $T: X \rightarrow X$ que preserva a medida é ergódica se os únicos conjuntos invariantes são os triviais, isto é, se $E \subset X$ mensurável é invariante então

$$m(E) = 0 \quad \text{ou} \quad m(X - E) = 0.$$

É fácil verificar que o exemplo acima com $X = \mathbb{Z}$ e $Tx = x + 1$ é ergódico (suponha que não seja, isto é, que exista E invariante tal que $E \neq \emptyset$ e $E \neq \mathbb{Z}$, use a boa ordenação dos naturais e chegue a um absurdo). Numa visão "dinâmica", ergodicidade no caso $m(X) < \infty$ significa que não existem subconjuntos próprios de medida positiva em que sua imagem esteja contida nele próprio, em outras palavras, a transformação faz, num certo sentido um embaralhamento completo do conjunto. Esta idéia estará bem patente na proposição 2.5.

Já dissemos na seção anterior que o shift à esquerda é uma transformação mensurável que preserva a medida, mostraremos agora que, além disso, também é ergódica; esse resultado será usado, em particular,

na demonstração da segunda versão do Teorema de Furstenberg e Kesten no final do próximo capítulo.

Lema 2.3: Seja E um espaço de probabilidade, então a translação à esquerda $T(x)_n = (x_{n+1})_{n \geq 1}$ no espaço produto $E^{\mathbb{N}}$ é ergódica.

Demonstração: Suponha que G seja um conjunto invariante; existe um cilindro de "dimensão finita" A que se aproxima de G no sentido de $\rho(A \Delta G)$, ser tão pequeno quanto se desejar (Δ é a diferença simétrica, isto é, $A \Delta G = (A - G) \cup (G - A)$). Como A é determinado por um número finito de coordenadas, então para um inteiro n suficientemente grande, o conjunto $B = T^{-n}A$ é determinado por um número finito de coordenadas disjuntas das anteriores; portanto $\rho(A \cap B) = \rho(A)\rho(B)$. Como G é invariante então $\rho(G \Delta B)$ também é tão pequeno quanto se desejar ($T^{-n}(G \Delta A) = T^{-n}(G \Delta B)$); o mesmo pode ser dito então para $\rho(G \Delta (A \cap B))$. Em outras palavras, $\rho(G)$ está, ao mesmo tempo, arbitrariamente próximo de $\rho(A)$, de $\rho(B)$ e de $\rho(A)\rho(B)$, então $\rho(G) = \rho(G)^2$, ou seja $\rho(G) = 0$ ou $\rho(G) = 1$; isto é G é trivial, logo T é ergódica.

■

A seguinte caracterização de ergodicidade será útil posteriormente:

Proposição 2.4: A transformação $T: X \rightarrow X$ mensurável que preserva a medida é ergódica se e somente se toda função mensurável invariante é constante.

Demonstração: Seja f mensurável e invariante, se $X(k,n)$ é o conjunto de $x \in X$ onde $\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$, $k \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, então a invariância de

f implica na invariância de $X(k,n)$. Pela ergodicidade de T existe um único $k = k(n)$ tal que $m\left(X(k(n),n)\right) = 1$. Ora

$$f(x) = f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X(k(n),n)\right) \quad \text{q.s.}$$

segue que $f(x)$ é constante quase sempre.

A recíproca é trivial: se não existe função mensurável invariante não constante então não existe conjunto mensurável invariante não trivial. ■

No caso de $m(X) < \infty$ podemos ainda dizer que T é ergódica se e somente se toda função invariante em $L_1(X)$ (ou da mesma maneira em $L_2(X)$) for constante, de fato, neste caso o que acontece é que toda função característica de conjuntos mensuráveis é integrável.

A próxima proposição é um exemplo típico da idéia de que ergodicidade em espaço de medida finita leva quase todo ponto em "quase todo lugar".

Proposição 2.5: Seja X grupo abeliano compacto com base enumerável, c um elemento neste grupo e $Tx = cx$. Então T é ergódica se e somente se a sequência $\{c^n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ é densa em X .

Antes de demonstrá-lo vejamos o seguinte

Lema 2.6: Se o espaço X é um espaço topológico compacto com base enumerável, tal que para todo aberto não vazio sua medida é positiva, e $T: X \longrightarrow X$ é uma transformação ergódica, então para quase todo x em X sua órbita (isto é, $\{T^n x\}_{n \geq 0}$) é densa.

Demonstração: Um elemento $x \in X$ tem órbita não densa se e somente se existe um aberto básico G tal que $T^n x \notin G$ ou ainda $x \notin T^{-n}G$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (X - T^{-n}G)$. Chamando essa intersecção de E temos $T^{-1}E \supset E$, portanto E é invariante porque X tem medida finita (lembre-se que trata-se de medida de Haar em espaço compacto). Como $m(G) > 0$ e G é disjunto de E segue pela ergodicidade que $m(E) = 0$. Cada elemento da base topológica G_i gera um conjunto E_i de medida nula como construído acima; se $x \in X$ não pertence à união enumerável dos E_i 's então x tem órbita densa

■

Demonstração da proposição 2.5: Se T é ergódica então, pelo lema 2.6, existe $x_0 \in X$ tal que a sequência $\{ T^n x_0 \}_{n \geq 0} = \{ c^n x_0 \}_{n \geq 0}$ é densa. Como $x \longrightarrow x x_0^{-1}$ é homeomorfismo então

$$\left\{ c^n x_0 \right\}_{n \geq 0} x_0^{-1} = \left\{ c^n \right\}_{n \geq 0} \text{ é denso em } X.$$

Reciprocamente, suponha que $\{c^n\}_{n \geq 1}$ seja denso em X . Temos que T induz um operador unitário $\tilde{T}: L_2(X) \longrightarrow L_2(X)$ da seguinte maneira: $f(x) \longrightarrow f \circ T(x) = f(cx)$, de fato verifique que $\langle f(cx), g(x) \rangle_{L_2} = \langle f(x), g(c^{-1}x) \rangle_{L_2}$. Se f é homomorfismo contínuo (lembrar que as funções contínuas são densas em $L_2(X) \subset L_1(X)$) isto é, $f(cx) = f(c) \cdot f(x)$ então f é um auto-vetor do operador $\tilde{T}$. Como os auto-vetores do operador unitário $\tilde{T}$ formam uma base Hilbertiana em $L_2(X)$, então toda função invariante em $L_2(X)$ pode ser escrita como uma expansão dessa base. Os auto-vetores correspondentes a auto-valores distintos são ortogonais, então toda função invariante está no auto-espaço associado ao auto-valor 1.

Note porém que se $f(cx) = f(x)$ para todo x então $f(c^n x) = f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pela densidade de $\{c^n\}_{n \geq 1}$ e continuidade da f concluímos que f é constante, portanto toda função invariante é constante quase sempre, isto é, T é ergódica

■

Um exemplo que ilustra bem a aplicação desta última proposição é a rotação no círculo: considere mais uma vez o grupo $X = \{ z \in \mathbb{C}: |z| = 1 \}$ e a transformação $Tx = cx$. Se c for raiz da unidade, isto é, $c = e^{i(p/q)2\pi}$, $p/q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, então sua órbita não é densa e portanto T não é ergódica; por outro lado, se $c = e^{ir2\pi}$, $r \in [0,1]$ irracional então sua órbita é densa e T é ergódica.

1.3. OS TEOREMAS ERGÓDICOS SUBADITIVO E O DE BIRKHOFF

O Teorema Ergódico Sub-aditivo de Kingman diz respeito à convergência de uma sequência de funções mensuráveis sub-aditivas $(g_n)_{n \geq 1}$, no sentido de $\frac{1}{n} g_n$ convergir quase sempre a uma função g mensurável. Vejamos precisamente a seguinte

Definição 3.1: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e θ uma transformação mensurável que preserva a medida: dizemos que $(g_n)_{n \geq 1}$ sequência de funções mensuráveis é sub-aditiva se

$$g_{n+k} \leq g_n + g_k \circ \theta^n \quad P\text{-quase sempre}$$

para todo n, k inteiros positivos.

Os exemplos seguintes serão úteis em demonstrações posteriores:

Exemplo 3.2: Seja uma função mensurável $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1(\Omega)$ e considere $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} f \circ \theta^j$. A sequência S_n é sub-aditiva; com efeito

$$S_{n+k} = \sum_{j=0}^{n-1} f \circ \theta^j + \sum_{j=n}^{n+k} f \circ \theta^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} f \circ \theta^j + \left(\sum_{l=0}^{k-1} f \circ \theta^l \right) \circ \theta^n = S_n + S_k \circ \theta^n.$$

Com este exemplo o Teorema Ergódico de Birkhoff será consequência do Teorema Ergódico Sub-aditivo (ver corolário 3.12).

Exemplo 3.3: Seja $Y: \Omega \longrightarrow M(d, \mathbb{R})$ uma função mensurável no espaço das matrizes reais $d \times d$. Definimos a norma $\|\cdot\|$ de uma matriz M como

$$\|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|.$$

Considere $Y_\omega^n = Y(\theta^{n-1}\omega) \dots Y(\theta\omega) Y(\omega)$; então a sequência $f_n(\omega) = \text{Log } \|Y_\omega^n\|$ é sub-aditiva. Com efeito:

$$\begin{aligned} \text{Log } \|Y_\omega^{n+k}\| &= \text{Log } \|Y(\theta^{n+k}\omega) \dots Y(\theta\omega) Y(\omega)\| \\ &\leq \text{Log } \left\{ \left\| (Y \circ \theta^k) \cdot \dots (Y \circ \theta) \cdot Y \right\| \circ \theta^n(\omega) \cdot \|Y(\theta^n\omega) \dots Y(\theta\omega) Y(\omega)\| \right\} \\ &= \text{Log } \left\| (Y \circ \theta^k) \dots (Y \circ \theta) \cdot Y \right\| \circ \theta^n(\omega) + \text{Log } \|Y(\theta^n\omega) \dots Y(\theta\omega) Y(\omega)\| \\ &= \text{Log } \|Y_\omega^k\| \circ \theta^n(\omega) + \text{Log } \|Y_\omega^n\|. \end{aligned}$$

Com este exemplo demonstramos o corolário 4.1 do Teorema Ergódico Sub-aditivo, de grande importância na demonstração do Teorema Ergódico Multiplicativo da próxima seção. Mostraremos agora duas versões equivalentes do Teorema Ergódico Sub-aditivo ([4] e [14]), bem como o Teorema Ergódico de Birkhoff como corolário destes. Nos próximos capítulos mostraremos como alguns resultados da Teoria de Produto de

Matrizes Aleatórias se adaptam, a menos de linguagem, como corolário destes teoremas.

Teorema 3.4 (Teorema Ergódico Sub-aditivo, 1ª versão): Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade, θ uma transformação mensurável que preserva a medida e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções sub-aditiva em $L^1(\Omega)$. Se existe $M \geq 0$ tal que $\int_{\Omega} g_n dP \geq -Mn$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} g_n$ existe P -quase sempre, é θ -invariante, e para todo conjunto mensurável invariante A ,

$$\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} g_n dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_A g_n dP.$$

A demonstração basear-se-á nos seguintes lemas:

Lema 3.5:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\Omega} g_n dP = \inf_n \frac{1}{n} \int_{\Omega} g_n dP \geq -M$$

Demonstração: A subaditividade nas funções $(g_n)_{n \geq 1}$ implica na subaditividade das integrais:

$$\int_{\Omega} g_{n+k} dP \leq \int_{\Omega} g_n dP + \int_{\Omega} g_k dP.$$

Agora um resultado auxiliar para sequências de números reais nos garante
o

Lema 3.6: Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ uma sequência subaditiva de números reais, isto é, para inteiros $m, p \geq 1$ temos $a_{m+p} \leq a_m + a_p$; então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_m \frac{a_m}{m}.$$

Demonstração: Fixado m , para todo $n \geq 1$ escreva $n = r \cdot m + q$, $r \geq 0$ e $1 \leq q < m$; então

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{(rm+q)}}{rm+q} \leq \frac{r \cdot a_m + a_q}{rm+q},$$

que converge para $\frac{a_m}{m}$ quando n vai para infinito. Segue que $\limsup \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}$ para todo m maior ou igual a 1. Concluimos o resultado considerando que $\limsup \frac{a_n}{n} \leq \inf_m \frac{a_m}{m} \leq \liminf \frac{a_n}{n}$. ■

Agora, tomando $a_n = \int_{\Omega} g_n \, dP$ temos então:

$$\lim \frac{1}{n} \int_{\Omega} g_n \, dP = \inf \frac{1}{n} \int_{\Omega} g_n \, dP \geq -M,$$

que conclui a demonstração. ■

Lema 3.7: Se $A \in \mathcal{F}$ é invariante então $g'_n = \chi_A \cdot g_n$, onde χ_A é a função característica do conjunto A , também satisfaz as hipóteses do teorema.

Demonstração: É claro que será sub-aditiva, só precisamos mostrar que satisfaz a hipótese de limitação inferior das integrais:

$$-Mn \leq \int_{\Omega} g_n \, dP = \int_A g_n \, dP + \int_{A^c} g_n \, dP = \int_{\Omega} g'_n \, dP + \int_{A^c} g_n \, dP.$$

É fácil ver que o complementar A^c também é invariante: se $m(TA^c \cap A) > 0$ então $m(T^{-1}A) > m(A)$ o que é um absurdo, segue que $TA^c \subset A^c$ q.s. Então:

$$\lim \frac{1}{n} \int_{A^c} g_n \, dP = \inf \frac{1}{n} \int_{A^c} g_n \, dP = c$$

Se $c \neq -\infty$ então, para todo n :

$$-nc \geq - \int_{A^c} g_n \, dP,$$

logo,

$$-(M+c)n \leq -Mn - \int_{A^c} g_n \, dP \leq \int_{\Omega} g'_n \, dP,$$

conforme desejamos.

Se $c = -\infty$ chegaremos a um absurdo pois

$$\begin{aligned} -M &\leq \lim \frac{1}{n} \int_{\Omega} g_n \, dP = \lim \frac{1}{n} \int_A g_n \, dP + \lim \frac{1}{n} \int_{A^c} g_n \, dP = \\ &= \lim \frac{1}{n} \int_A g_n \, dP - \infty \end{aligned}$$

Vimos na demonstração deste último lema que se um conjunto A for invariante então seu complementar A^c também o será. Temos ainda mais; suponha que $(A_i)_{i \geq 1}$ seja uma sequência de conjuntos invariantes, então

$$\theta^{-1} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \theta^{-1} A_i \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

Enfim, os mensuráveis invariante formam uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{F}$ que chamaremos de $\mathcal{I}$. No próximo lema mostraremos o comportamento da esperança condicional das funções g_n 's com respeito a $\mathcal{I}$.

Lema 3.8: Seja $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{F} : A \text{ é } \theta\text{-invariante}\}$, então:

$$\lim \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[g_n | \mathcal{I} \right] = \inf \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[g_n | \mathcal{I} \right] \text{ q.s.}$$

e

$$\int_A \lim \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[g_n | \mathcal{I} \right] d\mathbf{P} = \lim \frac{1}{n} \int_A g_n d\mathbf{P}$$

para todo $A \in \mathcal{I}$.

Demonstração: A primeira igualdade fica estabelecida em razão do lema 3.6 se mostrarmos que $\mathbb{E} \left[g_n | \mathcal{I} \right]$ é sub-aditiva. Ora, de fato $\mathbb{E} \left[g_n \circ \theta^n | \mathcal{I} \right] = \mathbb{E} \left[g_k | \mathcal{I} \right]$ pois $\mathcal{I}$ é a sub- σ -álgebra dos θ -invariante, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[g_{n+k} | \mathcal{I} \right] &= \mathbb{E} \left[g_n | \mathcal{I} \right] + \mathbb{E} \left[g_k \circ \theta^n | \mathcal{I} \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[g_n | \mathcal{I} \right] + \mathbb{E} \left[g_k | \mathcal{I} \right] . \end{aligned}$$

Para mostrarmos a segunda igualdade temos que

$$\lim \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[g_n | \mathcal{I} \right] = \inf \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[g_n | \mathcal{I} \right] \leq \frac{1}{m} \mathbb{E} \left[g_m | \mathcal{I} \right] ,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Integrando ambos os lados temos:

$$\int_A \lim \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[g_n | \mathcal{I} \right] d\mathbf{P} \leq \frac{1}{m} \int_A \mathbb{E} \left[g_m | \mathcal{I} \right] d\mathbf{P} = \frac{1}{m} \int_A g_m d\mathbf{P} ,$$

e passando ao limite:

$$\int_A \lim \frac{1}{n} \mathbb{E}[g_n | \mathcal{F}] \, dP \leq \lim \frac{1}{m} \int_A g_m \, dP \quad (1.1)$$

Por outro lado, por indução sobre a sub-aditividade temos que

$$g_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} g_1 \circ \theta^i \text{ o que implica em:}$$

$$\mathbb{E}[g_1 | \mathcal{F}] - \frac{1}{n} \mathbb{E}[g_n | \mathcal{F}] \geq 0$$

Aplicando o Lema de Fatou obtemos

$$\begin{aligned} & \int_A \mathbb{E}[g_1 | \mathcal{F}] \, dP - \int_A \lim \frac{1}{n} \mathbb{E}[g_n | \mathcal{F}] \, dP = \\ &= \int_A \left[\mathbb{E}[g_1 | \mathcal{F}] - \lim \frac{1}{n} \mathbb{E}[g_n | \mathcal{F}] \right] \, dP \leq \liminf \int_A \left[\mathbb{E}[g_1 | \mathcal{F}] - \frac{1}{n} \mathbb{E}[g_n | \mathcal{F}] \right] \, dP = \\ &= \int_A \mathbb{E}[g_1 | \mathcal{F}] \, dP - \limsup \int_A \frac{1}{n} \mathbb{E}[g_n | \mathcal{F}] \, dP. \end{aligned}$$

Então

$$\limsup \int_A \frac{1}{n} \mathbb{E}[g_n | \mathcal{F}] \, dP \leq \int_A \lim \frac{1}{n} \mathbb{E}[g_n | \mathcal{F}] \, dP$$

Logo

$$\lim \frac{1}{n} \int_A g_n \, dP \leq \int_A \lim \frac{1}{n} \mathbb{E}[g_n | \mathcal{F}] \, dP \quad (1.2)$$

Ora, (1.1) e (1.2) nos dão o resultado desejado. ■

Lema 3.9: As funções $\limsup \frac{1}{n} g_n$ e $\liminf \frac{1}{n} g_n$ são invariantes.

Demonstração: Temos:

$$\begin{aligned} \left(\limsup \frac{1}{n} g_n \right) \circ \theta &= \limsup \frac{1}{n} (g_n \circ \theta) \geq \limsup \frac{1}{n} (g_{n+1} - g_1) = \\ &= \limsup \frac{1}{n} g_n . \end{aligned}$$

Da mesma maneira

$$\left(\liminf \frac{1}{n} g_n \right) \circ \theta \geq \liminf \frac{1}{n} g_n .$$

Dizemos que f é sub-invariante se $f \circ \theta \geq f$; se θ preserva medida então a sub-invariança implica em invariança pois o operador $T: L^1 \rightarrow L^1$, $T(f) = f \circ \theta$ preserva a norma $\|T(f)\|_1 = \|f\|_1$, logo $f \circ \theta = f$ quase sempre ■

O próximo lema é muito versátil em Teoria Ergódica, no nosso desenvolvimento será usado na demonstração do Lema de Hopf (3.11).

Lema Ergódico Maximal 3.10: Seja a sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$, sub-aditiva, isto é, $g_{n+k} \leq g_n + g_k \circ \theta^n$ q.s. e θ uma transformação que preserva medida; sejam

$$E_k = \left\{ \omega : \sup_{1 \leq n \leq k} g_n(\omega) > 0 \right\} \quad \text{e} \quad E = \left\{ \omega : \sup_{1 \leq n} g_n(\omega) > 0 \right\}$$

então

$$\int_{E_k} g_1 dP \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_E g_1 dP \geq 0.$$

Demonstração: Considere o operador linear $T: L_1(\Omega) \longrightarrow L_1(\Omega)$, onde $T(f) = f \circ \theta$; T é positivo pois se $f \geq 0$ então $T(f) \geq 0$ e além disso tem norma unitária. Definimos $g_0 \equiv 0$ e estabelecemos

$$G_k(\omega) = \sup_{0 \leq n \leq k} g_n(\omega)$$

então $G_k \geq g_n$, $0 \leq n \leq k$. Como T é positivo, $TG_k \geq Tg_n$, logo

$$TG_k + g_1 \geq g_1 + g_n \circ \theta^1 \geq g_{n+1}$$

segue que $TG_k + g_1 \geq \sup_{1 \leq n \leq k} g_n = G_k$ (assumindo $G_k > 0$).

Assim, $g_1 \geq G_k - TG_k$ em $E_k = \{\omega : G_k(\omega) > 0\}$, logo:

$$\int_{E_k} g_1 dP \geq \int_{E_k} G_k dP - \int_{E_k} TG_k dP = \int_{\Omega} g_k dP - \int_{E_k} TG_k dP$$

(pois $G_k \equiv 0$ em $\Omega - E_k$)

$$\geq \int_{\Omega} g_k dP - \int_{\Omega} TG_k dP \geq 0,$$

pois T é positivo e tem norma 1. Portanto

$$\int_{E_k} g_1 dP \geq 0, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Como $E_k \subset E_{k+1}$ e $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = E$, então aplicando o teorema da convergência dominada a $\chi_{E_k} \cdot g_1$ convergindo pontualmente a $\chi_E \cdot g_1$, temos:

$$\int_E g_1 dP = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} g_1 dP \geq 0,$$

pois todos os termos são positivos

■

Note que se a sequência for aditiva, isto é, $g_{n+k} = g_n + g_k \circ \theta^n$ então $(-g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também satisfaz as hipóteses do Lema Ergódico Maximal, o que significa que, neste caso, podemos trocar sup por inf e inverter as desigualdades. Mostraremos por fim o Lema de Hopf que desempenhará um papel central na demonstração do Teorema Ergódico Sub-aditivo; usando as mesmas notações e hipóteses do teorema temos então o

Lema (Hopf) 3.11: Seja

$$E = \left\{ \omega : \liminf_n \frac{1}{n} g_n(\omega) < 0 \right\}.$$

Então

$$\lim_n \frac{1}{n} \int_E g_n d\mathbf{P} \leq 0.$$

Demonstração: Considere o operador linear positivo $T(f) = f \circ \theta$; definimos

$$g_0 \equiv 0 \text{ e } f_m = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m (g_r - Tg_{r-1}), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Para $n < m$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} T^i f_m = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{r=1}^m (T^i g_r - T^{i+1} g_{r-1})$$

então:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n-1} T^i f_m &= f_m + T f_m + \dots + T^{n-1} f_m = \\
 &= \frac{1}{m} \left[\sum_{r=1}^m (g_r - T g_{r-1}) + \sum_{r=1}^m (T g_r - T^2 g_{r-1}) + \dots + \sum_{r=1}^m (T^{n-1} g_r - T^n g_{r-1}) \right] = \\
 &= \frac{1}{m} \left[\sum_{r=1}^m g_r + T g_m + T^2 g_m + \dots + T^{n-1} g_m - (T^n g_0) - (T^n g_1) - \dots - (T^n g_{m-1}) \right] = \\
 &= \frac{1}{m} \left[\sum_{\ell=1}^{n-1} g_\ell + \sum_{\ell=n}^{m-1} (g_\ell - T^n g_{\ell-n}) + \sum_{\ell=m}^{m+n-1} (T^{\ell-m} g_m - T^n g_{\ell-n}) \right].
 \end{aligned}$$

Pela sub-aditividade temos $g_\ell - T^n g_{\ell-n} \leq g_n$ para $\ell \geq n$ e $T^{\ell-m} g_m - T^n g_{\ell-n} \leq T^n g_{\ell-n} \leq T^{\ell-m} g_{n+m-\ell}$ ou $T^{\ell-m} g_m \leq T^{\ell-m} g_{n+m-\ell} + T^n g_{\ell-n}$ pois $g_m \leq g_{n+m-\ell} + T^{n+m-\ell} g_{\ell-n}$. Então

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n-1} T^i f_m &\leq \frac{1}{m} \left[\sum_{\ell=1}^{n-1} g_\ell + (m-n) g_n + \sum_{\ell=m}^{m+n-1} T^{\ell-m} g_{n+m-\ell} \right] = \\
 &= g_n + \frac{1}{m} \left[\sum_{\ell=1}^{n-1} g_\ell - n g_n + \sum_{\ell=m}^{m+n-1} T^{\ell-m} g_{n+m-\ell} \right].
 \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{\ell=m}^{m+n-1} T^{\ell-m} g_{n+m-\ell} \leq \sum_{k=0}^{n-1} T^k \left(\sup_{1 \leq \ell \leq n+1} g_\ell \right) \quad \text{então:}$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} T^l f_m \leq g_n + \frac{1}{m} \left[\sum_{l=1}^{n-1} g_l - n g_n + \sum_{l=0}^{n-1} T^l \left(\sup_{1 \leq \ell \leq n+1} g_\ell \right) \right].$$

Notar que o termo que aparece no colchete independe de m , logo pode ser limitado por uma função $h_k \in L^1(\Omega)$, $k < m$ e $h_k > 0$ independente de m tal que:

$$\sum_{l=0}^{n-1} T^l f_m \leq g_n + \frac{h_k}{m} \leq g_n + \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{n-1} T^l h_k, \text{ para } n \leq k.$$

Sejam

$$A_k = \left\{ \omega : \inf_{1 \leq n \leq k} g_n(\omega) < 0 \right\} \quad \text{e}$$

$$B_{m,k} = \left\{ \omega : \inf_{1 \leq n \leq k} \sum_{l=0}^{n-1} T^l \left(f_m - \frac{1}{m} h_k \right) < 0 \right\}.$$

Temos que $A_k \subset B_{m,k}$, $\forall k < m$ pois

$$\sum_{l=0}^{n-1} T^l \left(f_m - \frac{1}{m} h_k \right) \leq g_n, \quad n \leq k,$$

e como E é θ -invariante

$$B_{m,k} \cap E = E \cap \left\{ \inf_{1 \leq n \leq k} \sum_{l=0}^{n-1} T^l \chi_E \left(f_m - \frac{1}{m} h_k \right) < 0 \right\}.$$

Aplicando o Lema de Hopf na forma de inf na sequência aditiva $S_n =$

$$\sum_{l=0}^{n-1} T^l \left(f_m - \frac{1}{m} h_k \right) \text{ resulta que}$$

$$\int_{B_{m,k} \cap E} S_1 \, dP = \int_{B_{m,k} \cap E} \left(f_m - \frac{1}{m} h_k \right) \, dP \leq 0$$

Logo

$$\int_{B_{m,k} \cap E} f_m dP \leq \frac{1}{m} \int_{B_{m,k} \cap E} h_k dP \leq \frac{1}{m} \int_{\Omega} h_k dP$$

pois $h_k \geq 0$, então:

$$\limsup \int_{B_{m,k} \cap E} f_m dP \leq \limsup \frac{1}{m} \int_{\Omega} h_k dP = 0$$

Por outro lado, como $f_m \leq g_1$ pois

$$f_m = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m (g_r - Tg_{r-1}) \leq \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m g_1 = g_1,$$

então

$$\int_E f_m dP \leq \int_{B_{m,k} \cap E} f_m dP + \int_{E-A_k} g_1^+ dP,$$

onde g_1^+ é a parte positiva de g_1 ; logo

$$\limsup \int_E f_m dP \leq \int_{E-A_k} g_1^+ dP.$$

Agora, como $A_k \subset A_{k+1}$ e $E \subset \bigcup A_k$ temos que

$$\limsup \int_E f_m dP \leq 0, \text{ mas}$$

$$\begin{aligned} \int_E f_m dP &= \int_E \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m (g_r - Tg_{r-1}) = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m \left[\int_E g_r dP - \int_E Tg_{r-1} dP \right] = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m \left[\int_E g_r dP - \int_E g_{r-1} dP \right] = \frac{1}{m} \int_E g_m dP \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração

■

A demonstração do Teorema se faz agora combinando os resultados dos lemas anteriores:

Demonstração do Teorema Ergódico Sub-aditivo (3.4): O teorema fica estabelecido se mostrarmos que as funções invariante do lema 3.9: $\rho = \liminf \frac{1}{n} g_n$ e $\xi = \limsup \frac{1}{n} g_n$ são tais que $\rho \geq \Psi \geq \xi$ q.s. isto é que $\lim \frac{1}{n} g_n = \Psi$, onde Ψ é a função invariante $\Psi = \lim \frac{1}{n} E[g_n | \mathcal{F}]$, do lema 3.8.

1) $\rho \geq \Psi$ q.s.:

Seja $B = \{x : \Psi(x) > \rho(x) + a\}$ para um certo $a > 0$ arbitrário, note que B é θ -invariante. Considere

$$g'_n(x) = \mathcal{I}_B(x) \left[g_n(x) - n(\Psi(x) - a) \right].$$

A sequência dentro do colchete $\left[g_n(x) - n(\Psi(x) - a) \right]$ é sub-aditiva (lembrar que $\Psi \circ \theta = \Psi$) e além disso

$$\int_{\Omega} \frac{g_n(x) - n(\Psi(x) - a)}{n} dP > -M - \int_{\Omega} (\Psi(x) - a) dP$$

onde $M + \int_{\Omega} (\Psi + a) dP > 0$ para M suficientemente grande. Em outras palavras essa sequência satisfaz as hipóteses do teorema, e pelo lema 3.7 a sequência g'_n também o satisfaz. Vamos então aplicar o lema de Hopf nesta última, só que antes disto observaremos que se $B' = \{x : \liminf \frac{1}{n} g'_n(x) < 0\}$ então $B = B'$. De fato se $x \in B$ então $\Psi(x) > \rho(x) + a$ e $\frac{1}{n} g'_n(x) = \frac{1}{n} g_n(x) - (\Psi(x) - a)$. Logo:

$$\liminf \frac{1}{n} g'_n(x) = \liminf \left[\frac{1}{n} g_n(x) - (\Psi(x) - a) \right] = \rho(x) - (\Psi(x) - a) < 0$$

então $x \in B'$. Reciprocamente, se $x \notin B$ então $\mathcal{I}_B(x) = 0$ logo $\liminf \frac{1}{n} g'_n(x) = 0$, isto é, $x \notin B'$.

O lema de Hopf nos garante então que

$$\lim \frac{1}{n} \int_B g'_n dP = \lim \frac{1}{n} \int_B g_n dP - \int_B \Psi dP + a P(B) \leq 0.$$

Como B é invariante, então pelo lema 3.8

$$\lim \frac{1}{n} \int_B g_n dP = \int_B \Psi dP,$$

segue que $a.P(B) \leq 0$ o que implica em $P(B) = 0$, e pela arbitrariedade de a concluímos que $\rho \geq \Psi$ q.s.

2) $\Psi \geq \xi$ q.s:

Seja $B = \{x : \xi(x) > \Psi(x) + a\}$ θ -invariante com $a > 0$ arbitrário; e $f_n = \frac{1}{k} g_{nk}$. A sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é subaditiva para θ^k , com efeito:

$$f_{n+r} = \frac{1}{k} g_{(n+r)k} = \frac{1}{k} g_{(nk+rk)} \leq \frac{1}{k} g_{nk} + \frac{1}{k} g_{rk} \circ \theta^{nk} = f_n + f_k \circ (\theta^k)^n.$$

Considere, como na primeira parte da demonstração que $f'_n = \mathcal{I}_B[f_n - n(\Psi+a)]$, análogo ao que já foi demonstrado para g'_n , f'_n é sub-aditiva para θ^k e satisfaz as hipóteses do teorema. Seja

$$B' = \left\{x: \sup f'_n(x) > 0\right\},$$

afirmamos que $B = B'$, com efeito, se $x \in B$, considere $n = kj + p$, como $j \geq 0$ e $0 \leq p < k$, então:

$$\frac{1}{n} g_n(x) - \left(\Psi(x) + a\right) \leq \frac{1}{kj} g_{kj}(x) + \frac{1}{n} g_p \circ \theta^{kj} - \left(\Psi(x) + a\right),$$

logo

$$0 < \xi(x) - \left(\psi(x) + a \right) \leq \limsup \frac{1}{n} f'_n(x) \leq \sup f'_n(x),$$

isto é $x \in B'$. Reciprocamente, se $x \notin B$ então $f'_n(x) = 0$ logo $\sup f'_n(x) = 0$ e $x \notin B'$.

Agora, pelo Lema de Hopf:

$$\lim \frac{1}{n} \int_B f'_n dP = \lim \frac{1}{n} \int_B \frac{1}{k} g_{nk} dP - \int_B \psi dP - a P(B) \geq 0$$

então:

$$\lim \frac{1}{n} \int_B \frac{1}{k} g_{nk} dP - \int_B \psi dP \geq a P(B),$$

como B é invariante segue pelo lema 3.8 que o lado esquerdo da desigualdade é zero, isto é, $P(B) = 0$, então $\psi \geq \xi$ q.s.

O último resultado do Teorema agora é trivial com o que provamos: $\lim \frac{1}{n} g_n = \lim \frac{1}{n} E[g_n | \mathcal{I}]$ e o lema 3.8. ■

Corolário 3.12 (Teorema Ergódico de Birkhoff): Se θ é uma transformação que preserva a medida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e se $f \in$

$L^1(\Omega)$, então $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\theta^j x)$ converge quase sempre. A função limite f^* é integrável, invariante e igual a $E[f | \mathcal{I}]$ onde $\mathcal{I}$ é a sub- σ -álgebra gerada pelos conjuntos θ -invariantes.

O corolário é demonstrado considerando $g_n = \sum_{l=0}^{n-1} f \circ \theta^l$ (ver exemplo 3.2), tome M por exemplo igual a $\int |f| dP$ e note que

$$\int_A f^* dP = \int_A \lim \frac{1}{n} g_n dP = \lim \frac{1}{n} \int_A g_n dP = \int_A f dP,$$

onde A é um conjunto mensurável invariante. Observe, em particular que se θ for ergódica então f^* é constante quase sempre e igual a $\int_{\Omega} f dP$.

Para nossas aplicações será mais conveniente a segunda versão do Teorema Ergódico Sub-aditivo que apresentamos agora; essa versão demonstra-se facilmente a partir da primeira. Vale ressaltar que nesta versão, diferente da primeira, pode-se admitir não só funções, como integrais assumindo valores em $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Teorema 3.13: (Teorema Ergódico Sub-aditivo, 2ª versão): Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade, θ uma transformação que preserva medida e $(f_n)_{n \geq 0}$ uma sequência de funções mensuráveis $\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ satisfazendo as seguintes condições:

a) integrabilidade $f_1^+ \in L^1(\Omega)$;

b) sub-aditividade $f_{m+n} \leq f_m + f_n \circ \theta^m$ q.s.

Então, existe uma função $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ mensurável, θ -invariante tal que $f^+ \in L^1(\Omega)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f_n = f \quad \text{q.s.}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int f_n dP = \inf \frac{1}{n} \int f_n dP = \int f dP.$$

Demonstração: Das hipóteses a) e b) temos:

$$f_n^+ \leq \left(f_1 + f_1 \circ \theta + \dots + f_1 \circ \theta^{n-1} \right)^+ \leq$$

$$f_1^+ + f_1^+ \circ \theta + \dots + f_1^+ \circ \theta^{n-1} \in L^1(\Omega)$$

Portanto $I_n = \int f_n \, dP$ existe, finito ou $-\infty$, e pela sub-aditividade (lema 3.1)

$$\lim \frac{1}{n} \int f_n \, dP = \inf_n \frac{1}{n} \int f_n \, dP.$$

Agora, para cada inteiro positivo N defina:

$$f_n^{(N)}(x) = \max \left\{ f_n(x), -nN \right\},$$

é claro que $(f_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$ ainda é sub-aditiva, está em $L^1(\Omega)$ e além disso $\int f_n^{(N)} \, dP \geq -nN$, $\forall n \in \mathbb{N}$, portanto, pelo teorema sub-aditivo (1ª versão)

$\frac{1}{n} f_n^{(N)}$ converge para $f^{(N)}$ q.s.. A sequência $(f^{(N)})_{N \in \mathbb{N}}$ é decrescente, seja então $f = \inf_N f^{(N)}$; teremos então:

$$f^{(N)}(x) = \max \left\{ f(x), -N \right\} \quad \text{q.s.}$$

Em particular

$$\lim \frac{1}{n} f_n = f \quad \text{q.s. e}$$

$$\int f \, dP = \inf_N \int f^{(N)} \, dP$$

Além disso

$$\int f^{(N)} dP = \inf_n \int \frac{1}{n} f_n^{(N)} dP,$$

então

$$\begin{aligned} \int f dP &= \inf_{N,n} \int \frac{1}{n} f^{(N)} \\ &= \inf_n \int \frac{1}{n} f_n dP \end{aligned}$$

■

Com essa segunda versão do Teorema Ergódico Sub-aditivo, o Teorema Ergódico de Birkhoff agora pode ser reenunciado para funções $f^+ \in L^1(\Omega)$ que as conclusões continuam verdadeiras. Essa versão "extendida" do Teorema de Birkhoff será útil na proposição II.3.7.

A proposição 4.1 da próxima seção é ainda um corolário imediato desta segunda versão do Teorema Sub-aditivo.

1.4. O TEOREMA ERGÓDICO MULTIPLICATIVO

Nesta seção os resultados e a linguagem estarão muito mais próximas da Teoria de Produto de Matrizes Aleatórias; o Teorema Ergódico Multiplicativo em si é, essencialmente, um tipo de Teorema Espectral para o comportamento assintótico desse tipo de produto (onde as matrizes aleatórias identicamente distribuídas não são necessariamente independentes). De maneira mais precisa, sob certas hipóteses esse teorema garante que existem sub-espacos formando uma filtração em $\mathbb{R}^m$: $V^{(1)} \subset V^{(2)} \subset \dots \subset V^{(s)} = \mathbb{R}^m$, tal que se $u \in V_i - V_{i-1}$, $1 < i \leq s$, então $\frac{1}{n} \log \|T_\omega^n u\|$ converge para o auto-valor correspondente λ_i , onde T_ω^n é o produto entre as n -ésimas primeiras matrizes aleatórias identicamente distribuídas. Essa visão geométrica dos auto-valores λ_i será interessante quando definirmos os expoentes de Lyapunov de uma

sequência de matrizes aleatórias no capítulo III. O teorema em questão foi publicado primeiro por Osseledec em 1968; no entanto a demonstração que faremos aqui estará baseada naquela apresentada por Ruelle [14], onde uma simplificação pode ser feita graças ao corolário 4.1 do Teorema Ergódico Sub-aditivo:

Corolário 4.1: Sejam θ uma transformação que preserva a medida em Ω e $Y: \Omega \longrightarrow M(d, \mathbb{R})$ uma função mensurável no espaço das matrizes reais $d \times d$, tal que

$$\text{Log}^+ \|Y(\cdot)\| \in L^1(\Omega).$$

Considere $Y_\omega^n = Y(\theta^{n-1}\omega) \dots Y(\theta\omega).Y(\omega)$. Então existe uma função mensurável θ -invariante $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tal que $X^+ \in L^1(\Omega)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|Y_\omega^n\| = X(\omega) \quad \text{q.s.}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \text{Log} \|Y_\omega^n\| dP = \inf_n \frac{1}{n} \int \text{Log} \|Y_\omega^n\| dP = \int X(\omega) dP.$$

Pelo exemplo 3.3 a sequência $f_n(\omega) = \text{Log} \|Y_\omega^n\|$ é sub-aditiva, portanto a demonstração é imediata se aplicarmos o Teorema Ergódico Sub-aditivo (3.13) a $(f_n)_{n \geq 1}$. Esse corolário é, em última análise, o Teorema de Furstenberg e Kesten (II.4.2) conforme veremos na seção 4 do próximo capítulo.

O Teorema Ergódico Multiplicativo é essencialmente, numa versão determinística a proposição 4.2 seguinte; a versão probabilística (Teorema 4.4) é feita combinando o corolário 4.1 com essa proposição.

Para conveniência do leitor colocamos no apêndice I alguns resultados relativos a produto exterior.

Proposição 4.2: Seja $(T_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de matriz reais $d \times d$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \text{Log } \|T_n\| \leq 0.$$

Considere $T^n = T_n \cdot \dots \cdot T_2 \cdot T_1$, e assuma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|(T^n)^{\wedge q}\|$$

existe para $1 \leq q \leq d$. Então:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (T^{n*} T^n)^{1/2n} = \Lambda$ existe, onde $*$ indica a transposta da matriz.
- b) Sejam $\exp \lambda^{(1)} < \dots < \exp \lambda^{(s)}$ os autovalores de Λ , ($\lambda^{(r)}$ reais e $\lambda^{(1)}$ pode ser $-\infty$) e $U^{(1)}, \dots, U^{(s)}$ os auto-espacos correspondentes; ortogonais entre si. Tome

$$V^{(0)} = \left\{ 0 \right\} \quad \text{e} \quad V^{(r)} = U^{(1)} + \dots + U^{(r)},$$

temos então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|T^n u\| = \lambda^{(r)}$$

quando $u \in V^{(r)} - V^{(r-1)}$ para $r = 1, \dots, s$.

Demonstração: Sejam $0 \leq t_n^{(1)} \leq \dots \leq t_n^{(d)}$ os auto-valores da matriz simétrica $(T^{n*} T^n)^{1/2}$. Por hipótese, os limites

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|(T^n)^{\wedge q}\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \prod_{p=d-q+1}^d t_n^{(p)} \quad (\text{ver apêndice 1, lema 5}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\text{Log} t_n^{(d-q+1)} + \dots + \text{Log} t_n^{(d-1)} + \text{Log} t_n^{(d)} \right] \end{aligned}$$

existe para $1 \leq q \leq d$, portanto também existem os limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} t_n^{(p)} = \mathcal{I}^{(p)}$$

para $1 \leq p \leq d$. Sejam $\lambda^{(1)} < \dots < \lambda^{(s)}$ os valores distintos de $\mathcal{I}^{(p)}$, e $U_n^{(r)}$ o sub-espaço gerado pelos auto-vetores de $(T^{n*} T^n)^{1/2}$ correspondente aos auto-valores $t_n^{(p)}$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} t_n^{(p)} = \lambda^{(r)}. \quad (1.3)$$

Interrompemos agora a demonstração da proposição para mostrarmos um lema. Por simplicidade assumiremos $\lambda^{(1)} \neq -\infty$.

Lema 4.3: Dado $\delta > 0$, existe $K > 0$ tal que para todo k e n inteiros positivos temos:

$$\max \left\{ |\langle u, u' \rangle| : u \in U_n^{(r)}, u' \in U_{n+k}^{(r')}, \|u\| = \|u'\| = 1 \right\} \leq K \exp \left[-n \left(|\lambda^{(r')} - \lambda^{(r)}| - \delta \right) \right]$$

Demonstração: Obviamente o lema só faz sentido para $r \neq r'$; demonstraremos primeiro para $r < r'$. É suficiente mostrar que se $v_{rr'}^k$ é a projeção ortogonal de $u \in \sum_{t \leq r} U_n^{(t)}$ em $u \in \sum_{t' \leq r'} U_{n+k}^{(t')}$ então

$$\|v_{rr'}^k\| \leq K \|u\| \exp \left[-n \left(\lambda^{(r')} - \lambda^{(r)} - \delta \right) \right]. \quad (1.4)$$

De fato, tome em particular $u \in U_n^{(r)}$, $\|u\| = 1$ tal que u realiza o máximo no primeiro membro da desigualdade do lema. Teremos então, da definição do operador projeção P que

$$u' = \frac{P_{U_{n+k}}^{(r')} u}{\|P_{U_{n+k}}^{(r')} u\|}$$

é um correspondente de u nesta maximalidade (se a norma no denominador for zero então u' é qualquer vetor unitário). Além disso

$$\langle u, u' \rangle = \|P_{U_{n+k}}^{(r')} u\|.$$

agora, usando o fato que se $W \subset U$ são sub-espacos então $P_W \circ P_U = P_W$ temos de (1.4) e da definição de $v_{rr'}^k$ que:

$$\langle u, u' \rangle = \|P_{U_{n+k}}^{(r')} u\| \leq \|v_{rr'}^k\| \leq K \exp \left[-n \left(\lambda^{(r')} - \lambda^{(r)} - \delta \right) \right]$$

Mostramos então que o lema é consequência de (1.4) (na verdade são equivalentes, embora não caiba aqui uma prova disto), vamos agora mostrar a veracidade de (1.4).

Assumiremos, por conveniência, que δ é menor que $|\lambda^{(r')} - \lambda^{(r)}|$ para todo par $r \neq r'$, e que $\delta^* = \left(\frac{\delta}{s} \right)$. Pela primeira hipótese da proposição, a saber, $\limsup \frac{1}{n} \text{Log } \|T_n\| \leq 0$, existe $C > 0$ tal que para todo n :

$$\text{Log } \|T_{n+1}\| \leq C + n \frac{\delta^*}{4}.$$

Podemos decompor u em sub-espacos ortogonais tais que $u = \tilde{u} + v_{rr'}^1$, em razão disto temos

$$\|T^{n+1}u\|^2 = \langle T^{n+1} T^{n+1} (\tilde{u} + v_{rr'}^1), \tilde{u} + v_{rr'}^1 \rangle = \|T^{n+1}(\tilde{u})\|^2 + \|T^{n+1}(v_{rr'}^1)\|^2$$

assim

$$\|T^{n+1}\left(v_{rr'}^1\right)\| \leq \|T^{n+1}u\|. \quad (1.5)$$

Como $v_{rr'}^1$ está na soma de auto-espacos $\sum_{t \geq r} U_{n+1}^{(t)}$, então

$$\|T^{n+1}\left(v_{rr'}^1\right)\| \geq \|v_{rr'}^1\| \cdot t_{n+1}^{(r')} = \|v_{rr'}^1\| \cdot \exp \left[\frac{n+1}{n+1} \text{Log } t_{n+1}^{(r')} \right],$$

e para n suficientemente grande temos

$$\|T^{n+1}\left(v_{rr'}^1\right)\| \geq \|v_{rr'}^1\| \cdot \exp \left[n+1 \left(\lambda^{(r')} - \delta^*/4 \right) \right] \quad (1.6)$$

Usando o mesmo argumento temos analogamente que, para n grande:

$$\|T^n u\| \leq \|u\| \exp \left[n \left(\lambda^{(r')} - \delta^*/4 \right) \right]. \quad (1.7)$$

Encadeando (1.5), (1.6) e (1.7) obtemos

$$\begin{aligned} \|v_{rr'}^1\| \exp \left[n+1 \left(\lambda^{(r')} - \delta^*/4 \right) \right] &\leq \|T^{n+1}u\| \leq \|T_{n+1}\| \cdot \|T^n u\| \\ &\leq \exp \left(C+n \frac{\delta^*}{4} \right) \cdot \|u\| \cdot \exp \left[n \left(\lambda^{(r')} + \delta^*/4 \right) \right] \end{aligned}$$

isto é,

$$\|v_{rr'}^1\| \leq \|u\| \exp \left[-n \left(\lambda^{(r')} - \lambda^{(r)} - \delta^* \right) + \left(C - \lambda^{(r')} + \frac{\delta^*}{4} - n \frac{\delta^*}{4} \right) \right].$$

Se n for suficientemente grande para que

$$\left(C - \lambda^{(r')} + \frac{\delta^*}{4} - n \frac{\delta^*}{4} \right) \leq 0, \text{ então}$$

$$\|v_{rr'}^1\| \leq \|u\| \exp\left[-n\left(\lambda^{(r')} - \lambda^{(r)} - \delta^*\right)\right] \quad (1.8)$$

Desta inequação obtemos, em particular que

$$\|v_{r,r+1}^k\| \leq \sum_{j=0}^{k-1} \|u\| \exp\left[-(n+j)\left(\lambda^{(r+1)} - \lambda^{(r)} - \delta^*\right)\right] \quad (1.9)$$

Para mostrarmos isso considere, para um certo r fixo, os projetores

$$P_1 = \text{projecção sobre o sub-espaco } \sum_{t \leq r} U_1^{(t)};$$

$$P'_1 = \text{projecção sobre o sub-espaco } \sum_{t' \geq r+1} U_1^{(t')};$$

Agora, dado $u \in \sum_{t \leq r} U_n^{(t)}$ temos que

$$u = P_{(n+k)} u + P'_{(n+k)} u,$$

por definição $v_{r,r+1}^k$ é a última componente; usando a desigualdade (1.8):

$$\begin{aligned} \|v_{r,r+1}^k\| &\leq \|P'_{(n+k-1)} u\| + \|P_{(n+k-1)} u\| \cdot e^{-(n+k-1)(\lambda^{(r+1)} - \lambda^{(r)} - \delta^*)} \\ &\leq \|P'_{(n+k-1)} u\| + \|u\| \cdot e^{-(n+k-1)(\lambda^{(r+1)} - \lambda^{(r)} - \delta^*)} \end{aligned}$$

e por indução sobre k concluímos (1.9). Somando a progressão geométrica de razão $e^{-(\lambda^{(r+1)} - \lambda^{(r)} - \delta^*)}$ obtemos:

$$\|v_{r,r+1}^k\| \leq K_1 \|u\| e^{-n(\lambda^{(r+1)} - \lambda^{(r)} - \delta^*)},$$

onde

$$K_1 = \frac{1}{1 - e^{-(\lambda^{(r+1)} - \lambda^{(r)} - \delta^*)}}$$

Da mesma maneira mostramos que

$$\begin{aligned} \|v_{r,r+2}^k\| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \|u\| \exp\left[-(n+j)\left(\lambda^{(r+2)} - \lambda^{(r)} - \delta^*\right)\right] \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} K_1 \|u\| \exp\left[-n\left(\lambda^{(r+1)} - \lambda^{(r)} - \delta^*\right)\right] \cdot \exp\left[-(n+j)\left(\lambda^{(r+2)} - \lambda^{(r+1)} - \delta^*\right)\right] \leq \\ &\leq K_2 \|u\| \exp\left[-n\left(\lambda^{(r+2)} - \lambda^{(r)} - 2\delta^*\right)\right]. \end{aligned}$$

Para mostrar a desigualdade usamos agora os projetores:

$$P_1 = \text{projektor sobre } \sum_{t \leq r} U_1^{(t)};$$

$$\hat{P}_1 = \text{projektor sobre } U_1^{(r+1)};$$

$$P'_1 = \text{projektor sobre } \sum_{t' \leq r+2} U_1^{(t')};$$

e o mesmo argumento de indução aplicado anteriormente, só que agora com mais componentes. No caso geral:

$$\|v_{r,r'}^k\| \leq K_{r',r} \|u\| \exp\left[-n\left(\lambda^{(r')} - \lambda^{(r)} - (r'-r)\delta^*\right)\right],$$

como $(r'-r)\delta^* < \delta$, isto prova o lema no caso $r' > r$.

Note que o lema dá limites para os elementos da matriz S dx dx

de produtos escalares entre os auto-vetores de $(T^{n*}T^n)^{1/2}$ e de $(T^{n+k*}T^{n+k})$, isto é, S matriz mudança de base. Provamos até agora a limitação dos elementos em um lado da diagonal de S , $r' > r$ (na verdade não é precisamente de um lado da diagonal, mas de um lado de blocos na diagonal formados pelo produto escalar entre auto-vetores associados a auto-valores que convergem para o mesmo valor, isto é, vetores em $U_n^{(r)}$ e em $U_{n+k}^{(r)}$ respectivamente). Obtemos a limitação dos elementos do outro lado da "diagonal" $r > r'$, calculando $S^* = S^{-1}$ através dos menores de S . A menos de mudanças em δ e K , é suficiente usar a limitação que já temos e o fato que o valor absoluto de todos os elementos da matriz é menor ou igual a 1

■

O lema 4.3 mostra que $(U_n^{(r)})_{n>0}$ é uma sequência de Cauchy, ou mais precisamente, que se O_n é matriz mudança de base, da base canônica à base formada pelos auto-vetores de $(T^{n*}T^n)^{1/2}$ tal que

$$(T^{n*}T^n)^{1/2} = O_n^* \begin{pmatrix} t_n^{(1)} & 0 \\ 0 & t_n^{(d)} \end{pmatrix} O_n,$$

então $(O_n)_{n>0}$ é uma sequência de Cauchy que converge para O , e por (1.3) temos então que

$$(T^{n*}T^n)^{1/2n} = O_n^* \begin{pmatrix} (t_n^{(1)})^{1/n} & 0 \\ 0 & (t_n^{(d)})^{1/n} \end{pmatrix} O_n$$

converge para

$$O^* \begin{pmatrix} e^{\lambda^{(1)}} & 0 \\ 0 & e^{\lambda^{(d)}} \end{pmatrix} O = \Lambda,$$

que prova a parte (a).

Seja $U^{(r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n^{(r)}$, dado $0 \neq u \in U^{(r)}$, considere $(u_n)_{n \geq 0}$ uma sequência de vetores tais que $u_n \rightarrow u$ e $u_n \in U_n^{(r)}$. Então teremos, para n suficientemente grande

$$\lambda^{(r)} - 2\delta \leq \frac{1}{n} \text{Log} \frac{\|T^n u\|}{\|u\|} \leq \lambda^{(r)} + 2\delta,$$

por outro lado o termo central converge para $\frac{1}{n} \text{Log} \frac{\|T^n u\|}{\|u\|}$, logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|T^n u\| = \lambda^{(r)}, \quad u \in U^{(r)} - \{0\}.$$

Se $u \in V^{(r)}$ então $u = u_1 + \dots + u_r$, onde $u_i \in U^{(i)}$, $1 \leq i \leq r$, e

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|T^n u\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log} \|T^n(u_1 + \dots + u_r)\|^{2/2n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log} \left(\|T^n u_1\|^2 + \dots + \|T^n u_r\|^2 \right)^{1/2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log} \left(t_n^{(1)^2} \|u_1\|^2 + \dots + t_n^{(r)^2} \|u_r\|^2 \right)^{1/2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log} \left(t_n^{(r)} \right)^{1/n} = \lambda^{(r)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Por fim temos o teorema principal desta seção:

Teorema 4.4 (Teorema Ergódico Multiplicativo): Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade, e τ uma transformação que preserva medida. Considere $T: \Omega \rightarrow M(d, \mathbb{R})$ uma função mensurável no espaço das matrizes reais $d \times d$ tal que

$$\text{Log}^+ \|T(\cdot)\| \in L^1(\Omega).$$

Tome $T_\omega^n = T(\tau^{n-1}\omega) \cdot \dots \cdot T(\tau\omega) \cdot T(\omega)$.

Existe $\Gamma \subset M$, invariante com $P(\Gamma) = 1$, onde as seguintes propriedades valem:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(T_{\omega}^n \cdot T_{\omega}^n \right)^{1/2n} = \Lambda_{\omega} \text{ existe;}$$

b) Sejam $\exp \lambda_{\omega}^{(1)} < \dots < \exp \lambda_{\omega}^{(s)}$ os auto-valores de Λ_{ω} (onde $s = s(\omega)$, $\lambda_{\omega}^{(r)}$ são reais e $\lambda_{\omega}^{(1)}$ pode ser $-\infty$), e $U_{\omega}^{(1)}, \dots, U_{\omega}^{(s)}$ os correspondentes auto-espacos. Seja $m_{\omega}^{(r)} = \dim U_{\omega}^{(r)}$. As funções $\omega \mapsto \lambda_{\omega}^{(r)}, m_{\omega}^{(r)}$ são τ -invariantes. Se $V_{\omega}^{(0)} = \{0\}$ e $V_{\omega}^{(r)} = U_{\omega}^{(1)} + \dots + U_{\omega}^{(r)}$, então, para $r = 1, \dots, s$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T_{\omega}^n u\| = \lambda_{\omega}^{(r)} \text{ quando } u \in V_{\omega}^{(r)} - V_{\omega}^{(r-1)}.$$

Demonstração: Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff (corolário 3.12) temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n-1} \log^+ \|T(\tau^{n-l}\omega)\|$$

converge em Γ_1 τ -invariante e $P(\Gamma_1) = 1$, portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log^+ \|T(\tau^{n-1}\omega)\| = 0 \quad \text{se} \quad \omega \in \Gamma_1.$$

Sabemos que $\|T^q\| \leq \|T\|^q$ (ver apêndice 1), portanto temos que $\log^+ \|T^q(\cdot)\| \in L^1(\Omega)$. Além disso:

$$\begin{aligned} \left(T_{\omega}^n \right)^{\wedge q} &= \left(T(\tau^{n-1}\omega) \cdot \dots \cdot T(\tau\omega) \cdot T(\omega) \right)^{\wedge q} \\ &= T(\tau^{n-1}\omega)^{\wedge q} \cdot \dots \cdot T(\tau\omega)^{\wedge q} \cdot T(\omega)^{\wedge q}, \end{aligned}$$

segue então pelo corolário 4.1 que existe Γ_2 invariante, $P(\Gamma_2) = 1$ tal que, para $q = 1, \dots, d$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \left\| \left(T_{\omega}^n \right)^{\wedge q} \right\|$$

existe e é uma função τ -invariante.

Considere $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$; o teorema segue da proposição 4.2 aplicada a $T_n = T(\tau^{n-1}\omega)$ para $\omega \in \Gamma$ ■

Antes de darmos exemplos de sequência de matrizes aleatórias identicamente distribuídas onde podemos ilustrar o que se passa no Teorema Ergódico Multiplicativo, vejamos ainda o seguinte corolário que dá outra informação valiosa sobre os sub-espacos $V_{\omega}^{(r)}$. Com a mesma notação que estamos usando temos:

Corolário 4.5: Se $x \in \mathbb{R}^d$, então para quase todo ω

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|T_{\omega}^n x\| = X(\omega, x)$$

existe, finito ou $-\infty$. Se $\lambda \in \mathbb{R}$, o sub-espaço

$$V_{\omega}^{\lambda} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : X(\omega, x) \leq \lambda \right\}$$

é uma função mensurável de ω (onde a σ -álgebra no conjunto de sub-espacos é aquela gerada pelos abertos no espaço das grassmannianas).

A demonstração é imediata a partir do teorema (4.4): se

$$x \in V_{\omega}^{(j)} - V_{\omega}^{(j-1)} \text{ então } X(\omega, x) = \lambda_{\omega}^{(j)} \text{ e } V_{\omega}^{\lambda} = \bigcup_j \left\{ V_{\omega}^{(j)} : \lambda_{\omega}^{(j)} \leq \lambda \right\} = V_{\omega}^{(r)},$$

onde $\lambda_{\omega}^{(r)}$ é o maior auto-valor menor ou igual a λ . Note ainda que

$$\mathcal{X}(\tau\omega, T(\omega)x) = \mathcal{X}(\omega, x) \quad , \quad (1.10)$$

com efeito, pela definição

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\tau\omega, T(\omega)x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|T_{\tau\omega}^n (T(\omega)x)\| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|T(\tau^n\omega) \dots T(\tau\omega) T(\omega)x\| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|T_{\omega}^{n+1} x\| \\ &= \mathcal{X}(\omega, x) . \end{aligned}$$

Pela equação (1.10) temos em particular que

$$T(\omega) V_{\omega}^{\lambda} \subset V_{\tau\omega}^{\lambda} \quad (1.11)$$

isto é, $T(\omega) V_{\omega}^{(r)} \subset V_{\tau\omega}^{(r)}$. Se $T(\omega)$ for inversível então $T(\omega) V_{\omega}^{(r)} = V_{\tau\omega}^{(r)}$.

Dada uma variável aleatória $T : \Omega \rightarrow M(d, \mathbb{R})$ e uma transformação ergódica τ que satisfazem as hipóteses do teorema 4.4, o cálculo, em geral, de Λ_{ω} , de $\lambda_{\omega}^{(1)}$, ..., $\lambda_{\omega}^{(s)}$ e dos auto-espaços $V_{\omega}^{(1)}$, ..., $V_{\omega}^{(s)}$ é extremamente trabalhoso e difícil de ser feito mesmo para distribuições μ em $M(d, \mathbb{R})$ relativamente simples. Como nossa intenção agora é simplesmente ilustrar e dar uma idéia melhor do que se passa no Teorema Ergódico Multiplicativo vamos então começar exemplificando com o caso mais simples:

Exemplo 4.6: Suponha Ω com um único elemento, $\Omega = \{a\}$ e $P(a) = 1$, e seja $T(a) = A$, onde A é uma matriz diagonal $A = \text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_d]$. Neste caso é óbvio que

$$\left(T_a^{n*} T_a^n \right)^{1/2n} = \text{diag}[\alpha_1^{2n}, \dots, \alpha_d^{2n}]^{1/2n} = \Lambda_a,$$

isto é, o espectro de Λ_a é, a menos de módulo, o mesmo do de A .

Agora digamos que A esteja na forma de Jordan, podemos ainda calcular os expoentes $\lambda_a^{(1)}, \dots, \lambda_a^{(s)}$ e saber onde estão os auto-espacos $U_a^{(1)}, \dots, U_a^{(s)}$ através da relação:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|A^n \cdot x\| = \lambda^{(r)} \text{ para } x \in V_a^{(r)} - V_a^{(r-1)}.$$

da seguinte maneira: cada bloco fundamental de Jordan da matriz A

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & & 0 \\ & \alpha_1 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad (\alpha_1 \neq 0, \text{ caso contrário é trivial})$$

torna-se

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^n & \binom{n}{1} \alpha_1^{n-1} & \dots & \binom{n}{s-1} \alpha_1^{n-s+1} \\ 0 & \alpha_1^n & \binom{n}{1} \alpha_1^{n-1} & \binom{n}{s-2} \alpha_1^{n-d+2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & \alpha_1^n \end{bmatrix}_{s \times s}$$

quando A está elevado a n . Assim, se $x \neq 0$ está no auto-espço associado a α_1 (podemos supor sem perda de generalidade que x é um múltiplo de um elemento da base), então

$$\|A^n x\| = \|x\| \cdot |\alpha_1|^n \sqrt{1 + \left[\binom{n}{1} \alpha_1^{-1} \right] + \dots},$$

onde "..." indica um número finito de termos (no máximo $d - 1$). A raiz quadrada acima será sempre maior que um, e para n grande, estará majorado por

$$d \cdot \binom{n}{d} \cdot \max \left\{ \alpha_1^{-1}, \alpha_1^{-d} \right\}.$$

Como o logaritmo da raiz n -ésima do termo acima tende a zero quando n vai para infinito, então segue que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|A^n x\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \left[|\alpha_1|^n \|x\| \cdot d \binom{n}{d} \max \left\{ \alpha_1^{-1}, \alpha_1^{-d} \right\} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} |\alpha_1|^n \\ &= |\alpha_1|. \end{aligned}$$

isto é, a menos de módulo o espectro de A_s é o mesmo de A ; quanto aos auto-espços, se $W_1, W_2, \dots, W_s$ são os auto-espços de A associados aos auto-valores $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ então podemos dizer que $U_s^{(1)} + \dots + U_s^{(r)} = W_1 + \dots + W^{(r)}$ para todo $r = 1, \dots, s$. (Note que isso não significa que os auto-espços sejam os mesmos!).

Uma rápida inspeção no que foi feito mostra que as conclusões são verdadeiras mesmo se A possuir auto-valores complexos.

Exemplo 4.7: Suponha agora Ω com dois elementos: $\Omega = \{ a, b \}$ com $P(a) = P(b) = 1/2$ e τ o ciclo (ab) , $T(a) = A$ e $T(b) = B$. Então $T(\tau a) = B$, $T(\tau b) = A$ e

$$T^n(a)x = \begin{cases} (BA)^{n/2} x & \text{se } n \text{ for par,} \\ A(BA)^{(n-1)/2} x & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

$$T^n(b)x = \begin{cases} (AB)^{n/2} x & \text{se } n \text{ for par,} \\ B(AB)^{(n-1)/2} x & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Pelo Teorema Ergódico Multiplicativo os limites a baixo são iguais:

$$\lim \frac{1}{n} \text{Log} \|(BA)^n x\| = \lim \frac{1}{n} \text{Log} \|A(BA)^n x\| = \lambda_a^{(r)}$$

se $x \in V_a^{(r)} - V_a^{(r-1)}$.

A transformação σ é ergódica então $\lambda_a^{(r)} = \lambda_b^{(r)}$ e pela equação (1.11):

$$A V_a^{(r)} \subseteq V_b^{(r)}$$

e

$$B V_b^{(r)} \subseteq V_a^{(r)}$$

ou seja a igualdade dos subespaços vale se A e B forem inversíveis.

Se agora ao invés de dois elementos tivermos $\Omega = \left\{ a_1, a_2, \dots, a_p \right\}$, com $P(a_i) = 1/p$ para todo i , τ o ciclo $(1, 2, \dots, p)$ e $T(a_i) = A_i$ $i = 1, \dots, p$, então podemos usar o mesmo argumento de ergodicidade e de convergência das subsequências:

$$T^{pn}(a_1) x = (A_p \dots A_2 A_1)^n x$$

$$T^{pn}(a_2) x = (A_1 A_p \dots A_3 A_2)^n x$$

$$T^{pn}(a_p) x = (A_{p-1} \dots A_2 A_1 A_p)^n x,$$

e dizer que os auto-valores dos A_{a_i} 's são iguais e os sub-espacos V_{a_i} 's, são tais que $A_{\tau_1} V_i^{(r)} \subseteq V_{\tau_1}^{(r)}$

Voltaremos a citar os exemplos (4.6) e (4.7) no capítulo III, seção 5 quando definirmos os expoentes de Lyapunov associados a uma sequência de matrizes aleatórias identicamente distribuídas, verificaremos que esses expoentes são nada mais nada menos que os próprios logaritmos dos auto-valores $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(s)}$ definidos no Teorema Ergódico Multiplicativo.

CAPÍTULO II

PRODUTO DE MATRIZES ALEATÓRIAS

Neste capítulo apresentaremos a linguagem básica da Teoria de Produto de Matrizes Aleatórias e alguns resultados que serão usados com frequência no texto; definiremos o maior expoente de Lyapunov γ associado a uma certa distribuição μ no espaço de matrizes, introduziremos o conceito de cociclo e de produto de convolução de medida, que serão utilizados na demonstração do Teorema de Furstenberg e Kesten ([2], capítulo I). Este resultado será redemonstrado numa versão mais forte como um corolário dos resultados da Teoria Ergódica apresentados no primeiro capítulo, em particular do Teorema Ergódico Sub-aditivo de Kingman.

II. 1. NOTAÇÃO :

Chamaremos de $M(d, \mathbb{R})$ o espaço das matrizes reais $d \times d$; $Gl(d, \mathbb{R})$, o subespaço dos elementos inversíveis de $M(d, \mathbb{R})$; $Sl(d, \mathbb{R})$ o subconjunto das matrizes de determinante um. M^* denotará a matriz transposta de M . Em geral os resultados não dependerão da escolha da norma em $\mathbb{R}^d$ ou em $M(d, \mathbb{R})$; por conveniência adotaremos (salvo consideração em contrário) a norma euclidiana em $\mathbb{R}^d$ e a norma de operadores em $M(d, \mathbb{R})$, isto é, para $x \in \mathbb{R}^d$ e $M \in Gl(d, \mathbb{R})$ temos

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^d x_i^2 \right\}^{1/2}$$

$$\| M \| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ x \neq 0}} \frac{\| Mx \|}{\| x \|}$$

As variáveis aleatórias serão definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; $E[x]$ será a esperança da variável aleatória x : $E[x] = \int x dP$, e se $\mathcal{F}$ for uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{A}$ então $E[x | \mathcal{F}]$ será a esperança condicional de x com respeito a $\mathcal{F}$.

Uma sequência de matriz aleatórias $(Y_n)_{n \geq 1}$ em $M(d, \mathbb{R})$, independente e identicamente distribuída (i.i.d) é uma sequência de variáveis aleatórias $Y_n: \Omega \rightarrow M(d, \mathbb{R})$, $n = 1, 2, \dots$ com distribuição comum μ tal que dados $A_1, A_2, \dots, A_k$, $k \in \mathbb{N}$, mensuráveis em $M(d, \mathbb{R})$, $P\{Y_1 \in A_1, Y_2 \in A_2, \dots, Y_k \in A_k\} = \prod_{i=1}^k P\{Y_i \in A_i\}$.

Um semi-grupo topológico é um espaço topológico munido de uma operação interna associativa $(g, h) \mapsto g \cdot h$ contínua. Por exemplo $M(d, \mathbb{R})$ é um semi-grupo topológico. Um grupo topológico é um grupo com uma topologia tal que $(g, h) \mapsto g \cdot h$ e $g \mapsto g^{-1}$ são contínuas. Por exemplo $GL(d, \mathbb{R})$ é grupo topológico.

II. 2. O MAIOR EXPOENTE DE LYAPUNOV

Considere uma sequência $(Y_n)_{n \geq 1}$ de matrizes aleatórias independentes e com distribuição comum μ . Seja o produto $S_n = Y_n \cdot \dots \cdot Y_1$; para a norma escolhida

$$\| S_n \| \leq \| Y_n \| \| Y_{n-1} \| \dots \| Y_1 \|.$$

Portanto, se $E[\log^+ \| Y_1 \|]$ for finito (escrevemos f^+ para $\max\{f, 0\}$) então $\log^+ \| S_n \|$ é integrável. De fato

$$\log^+ \| S_n \| \leq \left(\log \| Y_n \| + \dots + \log \| Y_1 \| \right)^+$$

$$\leq \text{Log}^+ \|Y_n\| + \dots + \text{Log}^+ \|Y_1\|.$$

Se $n, p \geq 1$ então:

$$E [\text{Log} \|S_{n+p}\|] \leq$$

$$E [\text{Log} \|Y_{n+p} \dots Y_{n+1}\|] + E [\text{Log} \|Y_n \dots Y_1\|] \leq$$

$$E [\text{Log} \|S_p\|] + E [\text{Log} \|S_n\|].$$

Isto é, a sequência $\left(E [\text{Log} \|S_n\|] \right)_{n \geq 1}$ é sub-aditiva, portanto pelo Lema (I.3.6) $\frac{1}{n} E [\text{Log} \|S_n\|]$ converge para $\inf_n \left\{ \frac{1}{n} E [\text{Log} \|S_n\|] \right\}$ em $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Definiremos agora o maior expoente de Lyapunov; embora essa definição neste ponto da teoria pode parecer um tanto quanto sem sentido, será importante para nós anteciparmos alguns resultados relativos a esse maior expoente. Quando introduzirmos os outros expoentes de Lyapunov essa definição ganhará mais sentido e ficará claro porque este γ corresponde exatamente ao maior deles.

Definição 2.1: Se $E [\text{Log}^+ \|Y_1\|] < \infty$, o maior expoente de Lyapunov associado a μ é o elemento $\gamma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ definido por

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E [\text{Log} \|Y_n \dots Y_1\|].$$

Antes de darmos os exemplos, vamos mostrar que se a sequência de matrizes aleatórias $(Y_n)_{n \geq 1}$ é independente e identicamente distribuída (i.i.d.) então cada sequência de variáveis aleatórias reais

dos elementos $y_{ij}(n)$ $1 \leq i, j \leq d$, também o será. Com efeito dados $n, m \in \mathbb{N}$ é claro que para todo A mensurável da reta $P \left\{ y_{ij}(n) \in A \right\} =$

$$P \left\{ Y_n \in \mathbb{R}^{d^2-1} \times A \right\} = P \left\{ Y_m \in \mathbb{R}^{d^2-1} \times A \right\} = P \left\{ y_{ij}(m) \in A \right\};$$

(ver figura 2.1).

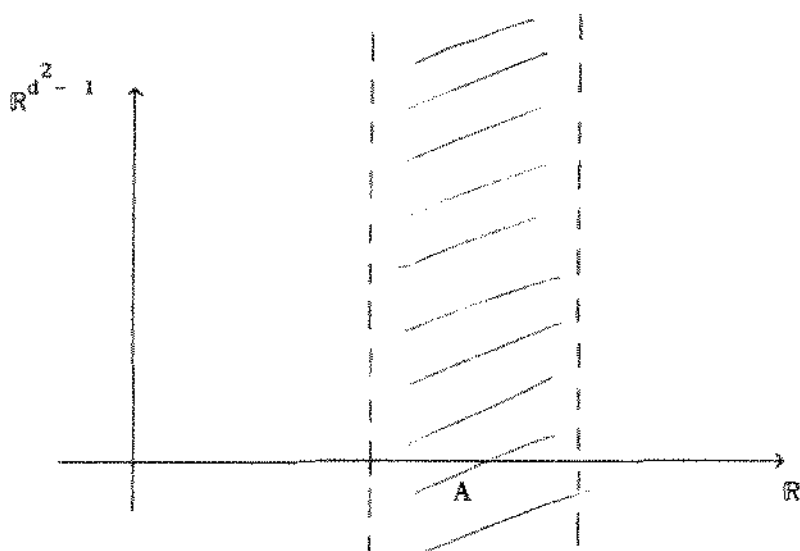


figura 2.1: subconjunto de $M(d, \mathbb{R})$ onde $y_{ij} \in A$.

Portanto $y_{ij}(n)$ é identicamente distribuída. Suponha agora que existam i e j tais que a sequência $(y_{ij}(n))_{n \geq 1}$ não seja independente; então existem A e B , subconjuntos mensuráveis da reta e $m, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$P \left\{ y_{ij}(n) \in A, y_{ij}(m) \in B \right\} \neq P \left\{ y_{ij}(n) \in A \right\} \cdot P \left\{ y_{ij}(m) \in B \right\},$$

ora, isso implica em

$$P \left\{ Y_n \in \mathbb{R}^{d^2-1} \times A, Y_m \in \mathbb{R}^{d^2-1} \times B \right\} \neq$$

$$P \left\{ Y_n \in \mathbb{R}^{d^2-1} \times A \right\} = P \left\{ Y_{mn} \in \mathbb{R}^{d^2-1} \times B \right\},$$

o que é um absurdo pois os Y_n 's são independentes. Note que com argumento análogo podemos mostrar que se as seqüências de variáveis aleatórias reais $(a_1(n))_{n \geq 1}$, $(a_2(n))_{n \geq 1}$, ..., $(a_d(n))_{n \geq 1}$ são i.i.d. então a seqüência de matrizes

$$M_n = \begin{bmatrix} a_1(n) & \dots & a_d(n) \\ & \dots & \\ & \dots & \\ a_{d^2-d}(n) & \dots & a_d^2(n) \end{bmatrix}$$

também o será. Vejamos agora o seguinte

Exemplo 2.2: Considere a seguinte seqüência de matrizes aleatórias $(Y_n)_{n \geq 1}$ onde cada $Y_n = \text{diag} [a_1(n), \dots, a_d(n)]$. Teremos então que

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E \left[\text{Log} \| Y_n \dots Y_1 \| \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E \left[\text{Log} \max \left\{ \prod_{i=1}^n |a_1(i)|, \dots, \prod_{i=1}^n |a_d(i)| \right\} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\max \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \text{Log} |a_1(i)|}{n}, \dots, \frac{\sum_{i=1}^n \text{Log} |a_d(i)|}{n} \right\} \right] \end{aligned}$$

Considerando o comentário anterior teremos que os elementos do conjunto entre chaves são i.i.d., a Lei dos Grandes Números nos garante que as médias dos $\text{Log} |a_j(n)|$, $1 \leq j \leq d$ converge para $E [\text{Log} |a_j$

(1) $| \cdot |$ quase sempre e portanto

$$\gamma = \max \left\{ E \left[\log |a_1(1)| \right], \dots, E \left[\log |a_d(1)| \right] \right\},$$

ou ainda que

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \| Y_n \cdots Y_1 \|.$$

O teorema de Furstenberg e Kesten na sua primeira versão nos diz que a igualdade acima é verdadeira sempre que as matrizes Y_n estão em $GL(d, \mathbb{R})$; na versão mais geral veremos que essa igualdade é verdadeira para toda sequência de matrizes aleatórias identicamente distribuídas.

II. 3. COCICLOS E PRODUTO DE CONVOLUÇÃO DE PROBABILIDADES

Definição 3.1: Seja G um semi-grupo topológico; dizemos que G age sobre um espaço topológico B se existe uma função contínua $\theta: G \times B \longrightarrow B$, $(g, x) \longmapsto \theta(g, x) = g \cdot x$ tal que $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$, para todo $g_1, g_2 \in G$ e $x \in B$. Se além disso G for grupo topológico e $e \cdot x = x$, onde e é o elemento neutro de G , dizemos então que B é um G -espaço. Note que neste caso cada g em G define um homeomorfismo $\theta(g, \cdot)$ em B .

Definição 3.2: Seja G um semi-grupo topológico agindo em um espaço B . Um cociclo aditivo é uma função contínua $\sigma: G \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $\sigma(g_1 g_2, x) = \sigma(g_1, g_2 \cdot x) + \sigma(g_2, x)$, para todo g_1, g_2 em G e todo x em B .

Observe que $\sigma(e, x) = 0$, para todo $x \in B$. Quando o cociclo não depende de x (por exemplo quando $B = \{x\}$), o cociclo é simplesmente um homomorfismo entre G e $\mathbb{R}$.

Um exemplo típico de cociclo aditivo é quando o grupo $GL(d, \mathbb{R})$ age sobre a esfera unitária $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^d, \|x\| = 1 \right\}$ da seguinte maneira:

$$M \cdot x = \frac{M x}{\|Mx\|} ,$$

$M \in GL(d, \mathbb{R})$ e $x \in S$, e o cociclo é definido como:

$$\sigma (M, x) = \text{Log } \| M x \| .$$

De fato, verificamos que é uma ação de grupo :

$$M_1 \cdot (M_2 \cdot x) = \frac{M_1 \cdot \frac{M_2 x}{\|M_2 x\|}}{\frac{\|M_1 M_2 x\|}{\|M_2 x\|}} = \frac{M_1 M_2 x}{\|M_1 M_2\|} = (M_1 M_2) \cdot x ,$$

e que a função contínua é um cociclo aditivo:

$$\begin{aligned} \sigma (M_1 M_2, x) &= \text{Log } \| M_1 M_2 x \| = \text{Log } \left\| \frac{M_1 M_2 x}{\|M_2 x\|} \right\| + \text{Log } \| M_2 x \| = \\ &= \text{Log } \| M_1 (M_2 \cdot x) \| + \text{Log } \| M_2 x \| = \\ &= \sigma (M_1, M_2 \cdot x) + \sigma (M_2, x) . \end{aligned}$$

Analogamente definimos cociclo multiplicativo $\sigma : G \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ quando $\sigma(g_1 g_2, x) = \sigma(g_1, g_2 \cdot x) \cdot \sigma(g_2, x)$. Transforma-se um cociclo multiplicativo em cociclo aditivo e vice-versa através de logaritmo e exponencial respectivamente. No exemplo anterior $\sigma (M, x) = \| M x \|$ é cociclo multiplicativo.

Apresentaremos agora a definição de produto de convolução de medidas e de medida invariante, este último de fundamental importância na teoria, por exemplo garantindo que uma transformação preserve medida (ver por exemplo aplicação θ na demonstração da proposição 3.7).

Definição 3.3: Sejam μ e ν medidas de probabilidade em G , semi-grupo topológico, e em B , espaço topológico, respectivamente. O produto de convolução $\mu \ast \nu$ é a medida de probabilidade em B que satisfaz

$$\int_B f(x) d(\mu \ast \nu)(x) = \int_G \int_B f(g \cdot x) d\mu(g) d\nu(x)$$

para toda função f mensurável e limitada.

Definição 3.3': Se G for grupo topológico então o produto de convolução $\mu \ast \nu$ é definido por :

$$\mu \ast \nu (A) = \int_G \nu(g^{-1}A) d\mu(g), \text{ com } A \subset B \text{ mensurável}.$$

Verifica-se facilmente que as definições são equivalentes integrando-se inicialmente para funções simples e depois passando-se para o limite.

Exemplo 3.4: Se a convolução de probabilidade é feita entre μ e ν , medidas de probabilidade absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue na reta, então a derivada de Radon-Nikodyn da convolução corresponde exatamente à função dada pela convolução usual das derivadas de Radon-Nikodyn de μ e ν . De fato, sejam f_1 e f_2 funções reais tais que

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_A f_1(x) dx & \text{e} \\ \nu(A) &= \int_A f_2(x) dx & , \quad \text{para todo } A \subseteq \mathbb{R} \text{ mensurável.} \end{aligned}$$

Então,

$$\mu \ast \nu (A) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A-h) d\mu(h) = \int_{\mathbb{R}} \int_{A-h} f_1(x) dx d\mu(h) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \int_A f_1(x) f_2(h) dx dh = \\
&= \int_A \left[\int_{\mathbb{R}} f_1(x-h) f_2(h) dh \right] d\mu(x) ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\mu \dot{*} \nu (A) = \int_A F(x) dx , \text{ onde}$$

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x-h) f_2(h) dh .$$

Se μ e λ são duas medidas de probabilidade em G então o produto de convolução entre μ e ν é definido, analogamente pela medida $\mu \dot{*} \nu$ que satisfaz :

$$\int f(x) d(\mu \dot{*} \nu)(x) = \int \int f(gh) d\mu(g) d\lambda(h)$$

para toda f em G . Note que, se além disso o semi-grupo G age no espaço B com medida ν , então $(\mu \dot{*} \lambda) \dot{*} \nu = \mu \dot{*} (\lambda \dot{*} \nu)$. Com efeito,

$$\int_B f(x) d[(\mu \dot{*} \lambda) \dot{*} \nu](x) = \int_G \int_B f(g \cdot x) d(\mu \dot{*} \lambda) d\nu(x) =$$

$$\int_G \int_G \int_B f(gh \cdot x) d\mu(g) d\lambda(h) d\nu(x) =$$

$$\int_G \int_G \int_B f(g \cdot (h \cdot x)) d\mu(g) d\lambda(h) d\nu(x) =$$

$$\int_G \int_B f(g \cdot x) d\mu(g) d(\lambda * \nu)(x) = \int_B f(x) d[\mu * (\lambda * \nu)](x)$$

Exemplo 3.5: Se G é um grupo topológico e δ_g , δ_h são medidas que carregam os elementos g e h respectivamente (medida de Dirac), isto é, para todo A mensurável:

$$\delta_g(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } g \in A, \text{ e} \\ 0 & \text{se } g \notin A. \end{cases}$$

(analogamente para δ_h), então $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$. Ora, dado $A \subseteq G$ mensurável teremos

$$\begin{aligned} \delta_g * \delta_h(A) &= \int \delta_h(y^{-1}A) d\delta_g(y) = \\ &= \delta_h(g^{-1}A) = \begin{cases} 1 & \text{se } h \in g^{-1}A \Leftrightarrow gh \in A, \text{ e} \\ 0 & \text{se } h \notin g^{-1}A \Leftrightarrow gh \notin A, \end{cases} \end{aligned}$$

logo $\delta_g * \delta_h(A) = \delta_{gh}(A)$.

Com este exemplo fica claro não só que o produto de convolução de medida não obrigatoriamente é comutativo como também que (com um cálculo análogo) a medida δ_e é o elemento neutro do semi-grupo das probabilidades em G , com a operação de convolução.

Definição 3.6: Dizemos que a medida ν em B é μ -invariante se $\nu = \mu * \nu$.

Observações:

1) Note da definição (3.3') que se G é um grupo topológico então a

medida $\mu \star \nu$ em B é a medida produto $\mu \otimes \nu$ em $G \times B$ transportada pela ação contínua $\theta : G \times B \longrightarrow B$ para B .

) Sejam X_1, X_2 variáveis aleatórias reais independentes, μ_1 e μ_2 as respectivas medidas induzidas em $\mathbb{R}$. Então $X_1 + X_2$ induz na reta a medida $\mu_1 \star \mu_2$.

Vamos apresentar agora proposições que serão úteis no desenvolvimento da teoria, e serão particularmente utilizadas na demonstração do Teorema de Furstenberg e Kesten.

Analogamente à definição de uma sequência de matrizes aleatórias independentes e identicamente (i.i.d.), uma sequência $(Y_n)_{n \geq 1}$ de elementos aleatórios em G i.i.d. é uma sequência de variáveis aleatórias:

$$Y_n : \Omega \longrightarrow G, \quad n = 1, 2, \dots \text{ i.i.d. .}$$

Temos então a

Proposição 3.7: Sejam G um semi-grupo topológico agindo no espaço topológico B e σ um cociclo aditivo em $G \times B$. Considere uma sequência $(Y_n)_{n \geq 1}$ de elementos aleatórios de G , independentes e com distribuição comum μ . Seja ν uma medida em B μ -invariante tal que

$$\int \int |\sigma(g, x)| d\mu(g) d\nu(x) < \infty, \text{ então}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sigma \left(Y_n(\omega) \cdot \dots \cdot Y_1(\omega), x \right) = \phi(\omega, x)$$

$P \otimes \nu$ -quase sempre e $\phi(\omega, x) \in L^1(\Omega \times B, P \otimes \nu)$.

Demonstração: Podemos considerar $\Omega = \left\{ \omega = (Y_n)_{n \geq 1} ; Y_n \in G \right\}$, $\mathcal{F}$ a σ -álgebra em Ω gerada por cilindros nas coordenadas Y_n , $n = 1, 2, \dots$ e a probabilidade P é tal que os Y_i 's são independentes e com distribuição μ .

Estabelecemos $E = \Omega \times B$, $Q = P \otimes \nu$ e $\theta : E \longrightarrow E$ definida por $\theta(\omega, x) = \theta \left((Y_n)_{n \geq 1}, x \right) = \left((Y_n)_{n \geq 1}, Y_1 \cdot x \right)$.

Afirmamos que θ é uma transformação mensurável que preserva a medida Q , com efeito sejam : A_0 boreliano de B e $A_1, A_2, \dots$ borelianos de G , então

$$Q \left\{ (\omega, x) \in \Omega \times B : \theta(\omega, x) \in (A_1 \times A_2 \times \dots) \times A_0 \right\} =$$

$$P \otimes \nu \left\{ Y_2 \in A_1, Y_3 \in A_2, \dots, Y_1 \cdot x \in A_0 \right\} ;$$

agora note que

$$P \otimes \nu \left\{ Y_1 \cdot x \in A_0 \right\} = \int_G \nu \left(Y_1^{-1} A_0 \right) d\mu \left(Y_1 \right) = \nu \left(A_0 \right)$$

porque ν é μ -invariante, e portanto:

$$P \otimes \nu \left\{ Y_2 \in A_1, Y_3 \in A_2, \dots, Y_1 \cdot x \in A_0 \right\} =$$

$$P \otimes \nu \left\{ Y_2 \in A_1, Y_3 \in A_2, \dots, x \in A_0 \right\} =$$

$$P \otimes \nu \left\{ Y_1 \in A_1, Y_2 \in A_2, \dots, x \in A_0 \right\} =$$

$$Q \left\{ \left(A_1 \times A_2 \times \dots \right) \times A_0 \right\}.$$

Para cada inteiro p temos

$$\theta^p \left(\left((Y_n)_{n \geq 1}, x \right) \right) = \left((Y_{n+p})_{n \geq 1}, Y_p \dots Y_1 \cdot x \right)$$

Se definirmos $F : \Omega \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ por $F(\omega, x) = \sigma(Y_1, x)$ onde $\omega = (Y_n)_{n \geq 1}$, então $F \in L^1(\Omega \times B, P \otimes \nu)$ por hipótese. Teremos

$$\begin{aligned} \sigma(Y_n \dots Y_1, x) &= \sigma(Y_n, (Y_{n-1} \dots Y_1) \cdot x) + \sigma(Y_n \dots Y_1, x) = \\ &= \sum_{p=1}^n \sigma(Y_p, (Y_{p-1} \dots Y_1) \cdot x) = \sum_{p=0}^{n-1} F(\theta^p(\omega, x)). \end{aligned}$$

Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff (I.3.12) teremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} F(\theta^p(\omega, x)) = \phi(\omega, x) \quad P \otimes \nu\text{-quase sempre,}$$

Segue que

$$\frac{1}{n} \sigma(Y_n \dots Y_1, x) \xrightarrow{\text{q.s.}} \phi(\omega, x) \quad \blacksquare$$

Note na demonstração da proposição 3.7 que o Teorema Ergódico de Birkhoff assegura ainda mais: que a função limite $\phi(\omega, x)$ tem a mesma esperança que $F(\omega, x) = \sigma(Y_1, x)$, isto é

$$\iint \phi(\omega, x) \, d(P \otimes \nu) = \iint \sigma(Y(\omega), x) \, d(P \otimes \nu)$$

Vale ressaltar ainda que se na hipótese da proposição exigíssemos apenas que $\sigma^+(g, x) \in L^1(\mu \otimes \nu)$ então o resultado continuaria válido, bastaria usar o Teorema Ergódico de Birkhoff na versão que aparece nos comentários depois da demonstração da segunda versão do Teorema Ergódico Sub-aditivo (seção I.3).

No próximo lema asseguramos que se B for compacto e separável, então existirá uma medida de probabilidade ν em B μ -invariante, onde μ é uma probabilidade em G . Denotamos μ^n a n -ésima potência de convolução de μ consigo mesma (isto é, $\mu^0 = \delta_e$, $\mu^1 = \mu$, $\mu^2 = \mu * \mu$, ...). Antes de demonstrá-lo, vejamos o conceito de convergência fraca no espaço de probabilidades no espaço topológico $B : \mathcal{P}(B)$ ([8] seção 1.2).

Definição 3.8: Uma sequência $(P_n)_{n \geq 1}$ de probabilidades em um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ converge fracamente a uma probabilidade P sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ se para toda função real f contínua e limitada tivermos :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x) dP_n(x) = \int_{\Omega} f(x) dP(x).$$

Suponha que B seja um espaço topológico compacto e separável; pelo Teorema de Riesz (ver por exemplo [13] seção 14.2) o dual do espaço das funções contínuas $C^*(B)$ é o espaço das medidas $\mathcal{M}(B)$ sobre os borelianos de B . O conjunto de todas as probabilidades em B , $\mathcal{P}(B)$, é o subconjunto dos funcionais positivos na esfera unitária de $C^*(B)$. Ora, a convergência fraca em probabilidade definida acima coincide com a convergência fraca-* em $C^*(B)$, e pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (ver por exemplo [3] seção III.4), a bola unitária em $C^*(B)$ é fraco-* compacta; como $\mathcal{P}(B)$ é fraco-* fechado, segue que $\mathcal{P}(B)$ é fraco-* compacto. Uma caracterização de subconjuntos relativamente compactos de $\mathcal{P}(B)$, sem a restrição de compacidade pode ser encontrada ainda em [8] seção 1.2. No nosso caso sempre temos compacidade uma vez que o espaço B corresponde ao espaço projetivo $P(\mathbb{R}^d)$. Com esta observação agora é fácil mostrar o

Lema 3.9: Sejam B um espaço topológico compacto e separável, G um semi-grupo topológico agindo em B . Tome μ probabilidade em G e m probabilidade em B ; então cada ponto limite de $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu^i * m, n \geq 1 \right\}$

é uma medida μ -invariante em B.

Demonstração: Seja a sequência de medidas em B: $\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mu^l \star m$, pela observação anterior temos que $\left\{ \nu_n, n \geq 1 \right\}$ é relativamente compacto. Seja ν um ponto limite para onde converge (a menos de subsequência) a sequência ν_n ; então, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mu \star \nu_n &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mu^{l+1} \star m \\ &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mu^l \star m + \frac{1}{n} \left\{ \mu^{n+1} \star m - \mu \star m \right\} \\ &= \nu_n + \frac{1}{n} \left\{ \mu^{n+1} \star m - \mu \star m \right\}, \end{aligned}$$

e agora fazendo n tender para infinito concluímos que $\mu \star \nu = \nu$ ■

II. 4. O TEOREMA de FURSTENBERG e KESTEN

Apresentaremos nesta seção duas versões do Teorema de Furstenberg e Kesten. A primeira, mais próxima da demonstração original se restringe às matrizes aleatórias inversíveis, é particularmente interessante porque fornece resultados que serão usados no decorrer da teoria, além de ser uma boa ilustração das técnicas que estamos usando. A segunda versão é uma excelente aplicação da Teoria Ergódica: reduz-se praticamente a um corolário do Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman (I.3.4), além disso é mais geral porque admite matrizes aleatórias quaisquer, sem hipótese de invisibilidade.

O Teorema de Furstenberg e Kesten assume importância porque permite desvincular a definição do maior expoente de Lyapunov γ com a convergência da esperança, em outras palavras, nos garante que o que

temos na realidade é a convergência a γ em quase todo ponto e não só na média. Visto ainda de outra maneira, conforme dissemos, é uma versão da Lei dos Grandes Números para produto de matrizes aleatórias identicamente distribuídas.

Teorema 4.1 (Teorema de Furstenberg e Kesten, 1ª versão): Sejam $Y_1, Y_2, \dots$ matrizes aleatórias independentes e identicamente distribuídas em $Gl(d, \mathbb{R})$. Se $E [\text{Log}^+ \|Y_n \dots Y_1\|] < \infty$, então, com probabilidade um temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|Y_n \dots Y_1\| = \gamma.$$

Demonstração: Considere um número inteiro m fixo, e para todo inteiro n , escreva $n = pm + q$, onde $p \geq 0$ e $0 \leq q < m$. Temos então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \text{Log} \|Y_n \dots Y_1\| &\leq \\ \frac{1}{n} \text{Log} \|Y_n \dots Y_{pm+1}\| + \frac{1}{n} \text{Log} \|Y_{pm} \dots Y_1\| &\leq \\ \frac{1}{n} \sum_{i=pm+1}^n \text{Log} \|Y_i\| + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{p-1} \text{Log} \|Y_{(j+1)m} \dots Y_{jm+1}\|. \end{aligned}$$

O primeiro somatório é sempre limitado, portanto sua componente tende a zero. Por outro lado, aplicando a Lei dos Grandes Números às variáveis aleatórias i.i.d. $(\text{Log} \|Y_{(j+1)m} \dots Y_{jm+1}\|)_{j \geq 0}$ do segundo somatório, temos que quando p cresce, a segunda componente converge para $\frac{1}{m} E [\text{Log} \|Y_m \dots Y_1\|]$, logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \text{Log} \|Y_n \dots Y_1\| \leq \frac{1}{m} E [\text{Log} \|Y_m \dots Y_1\|] \quad \text{q.s.}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, passando ao limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \text{Log} \| Y_n \cdots Y_1 \| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} E [\text{Log} \| Y_m \cdots Y_1 \|] = \gamma. \quad (2.1)$$

Esta última desigualdade prova o teorema no caso de $\gamma = -\infty$.

Suponha agora que γ seja finito. Considere B como sendo o espaço compacto de todas as matrizes $d \times d$ cuja norma seja igual a um. Para Y em $Gl(d, \mathbb{R})$ e M em B colocamos:

$$Y \cdot M = \frac{Y M}{\|Y M\|} ,$$

neste caso B se torna um $Gl(d, \mathbb{R})$ -espaço (note que para construirmos essa ação de grupo é crucial que Y seja inversível). Sejam m a medida de probabilidade em B igual a um carregamento de Dirac na matriz identidade Id , e μ a distribuição de Y_1 . Para todo inteiro n considere a distribuição ν_n em B definida por

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu^i * m$$

Se $\nu_{n(l)}$ é uma subsequência convergente de $(\nu_n)_{n \geq 1}$, seu limite, digamos ν é uma distribuição μ -invariante pelo lema 3.9.

Defina o cociclo aditivo $\sigma : Gl(d, \mathbb{R}) \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\sigma (Y, M) = \text{Log} \| Y M \| , \quad Y \in Gl(d, \mathbb{R}) , \quad M \in B .$$

Temos:

$$\sigma (Y, M) \leq \text{Log} \| Y \| \| M \| \leq \text{Log} \| Y \| ,$$

e para $\sigma^+ = \sup (\sigma, 0)$,

$$\sigma^+ (Y, M) \leq \text{Log}^+ \| Y M \| .$$

Por hipótese temos que $E [\text{Log}^+ \| Y_1 \|] < \infty$, portanto $\int \sigma^+(Y, M) d\mu(Y)$ é uma função contínua e limitada em B e

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int \int \sigma^+(Y, M) d\mu(Y) d\nu_{n(l)}(M) = \int \int \sigma^+(Y, M) d\mu(Y) d\nu(M).$$

Por outro lado, para $\sigma^- = \min(-\sigma, 0)$ e qualquer $k > 0$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \int \int \min \left\{ k, \sigma^-(Y, M) \right\} d\mu(Y) d\nu_{n(l)}(M) = \\ \int \int \min \left\{ k, \sigma^-(Y, M) \right\} d\mu(Y) d\nu(M), \end{aligned}$$

então teremos

$$\begin{aligned} \liminf_{l \rightarrow \infty} \int \int \sigma^-(Y, M) d\mu(Y) d\nu_{n(l)}(M) \geq \\ \int \int \sigma^-(Y, M) d\mu(Y) d\nu(M) \end{aligned} \quad (2.2)$$

De fato, para se provar a desigualdade lembre-se que

$$\int \int \sigma^-(Y, M) d\mu(Y) d\nu(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \int \min \left\{ k, \sigma^-(Y, M) \right\} d\mu(Y) d\nu(M)$$

e suponha, por absurdo que seja falsa, então existe $c \in \mathbb{R}$ que satisfaz :

$$1) \quad \int \int \min \left\{ k, \sigma^-(Y, M) \right\} d\mu(Y) d\nu(M) > c, \text{ para todo } k$$

maior que um certo K_1 , inteiro positivo; e

$$2) \quad \liminf_{l \rightarrow \infty} \int \int \sigma^-(Y, M) \, d\mu(Y) \, d\nu_{n(l)}(M) < c.$$

ora, concluímos a idéia tomando um $k_0 > K_1$ e chegando à seguinte contradição :

$$\begin{aligned} c &< \int \int \min \left\{ k_0, \sigma^-(Y, M) \right\} \, d\mu(Y) \, d\nu(M) = \\ &\lim_{l \rightarrow \infty} \int \int \min \left\{ k_0, \sigma^-(Y, M) \right\} \, d\mu(Y) \, d\nu_{n(l)}(M) \leq \\ &\liminf_{l \rightarrow \infty} \int \int \sigma^-(Y, M) \, d\mu(Y) \, d\nu_{n(l)}(M) < c. \end{aligned}$$

Agora, de (2.1) teremos

$$\begin{aligned} &\limsup_{l \rightarrow \infty} \int \int \sigma^-(Y, M) \, d\mu(Y) \, d\nu_{n(l)}(M) = \\ &\limsup_{l \rightarrow \infty} \left[\int \int \sigma^+(Y, M) \, d\mu(Y) \, d\nu_{n(l)}(M) - \right. \\ &\quad \left. \int \int \sigma^-(Y, M) \, d\mu(Y) \, d\nu_{n(l)}(M) \right] = \\ &\int \int \sigma^+(Y, M) \, d\mu(Y) \, d\nu(M) - \liminf_{l \rightarrow \infty} \int \int \sigma^-(Y, M) \, d\mu(Y) \, d\nu_{n(l)}(M) \leq \\ &\int \int \sigma^+(Y, M) \, d\mu(Y) \, d\nu(M) - \int \int \sigma^-(Y, M) \, d\mu(Y) \, d\nu(M) = \end{aligned}$$

$$\iint \sigma(Y, M) d\mu(Y) d\nu(M) . \quad (2.3)$$

Mas

$$\begin{aligned} \iint \sigma(Y, M) d\mu(Y) d\nu_n(M) = \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \iint \sigma(Y, M) d\mu(Y) d(\mu^i * m)(M). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Usando a definição de convolução de probabilidade chegamos no seguinte resultado :

$$\begin{aligned} \iint \sigma(Y, M) d\mu(Y) d(\mu^i * m)(M) = \\ \iiint \sigma(Y, Y^1 \cdot M) d(\mu^{i-1} * m)(M) d\mu(Y^1) d\mu(Y) = \\ \iiint \sigma(Y, Y^2 \cdot (Y^1 \cdot M)) d(\mu^{i-2} * m)(M) d\mu(Y^1) d\mu(Y^2) d\mu(Y) , \end{aligned}$$

que por indução é igual a

$$\begin{aligned} \iint \binom{i+2}{j} \int \sigma(Y, Y^1 \cdot (Y^{1-1} \cdot (\dots \cdot (Y^1 \cdot M) \dots))) \\ \dots d\mu(Y^1) \dots d\mu(Y^1) \cdot m(M) d\mu(Y). \end{aligned}$$

Observe que

$$Y^1 \cdot (Y^{1-1} \cdot (\dots \cdot (Y^1 \cdot M) \dots)) = (Y^1 Y^{1-1} \dots Y^1) \cdot M ,$$

com efeito, por indução tem-se que

$$Y^1 \cdot (Y^{1-1} \cdot (\dots (Y^1 \cdot M) \dots)) =$$

$$\frac{Y^1 Y^{1-1} \dots Y^1 M}{\|Y^{1-1} \dots Y^1 M\|} =$$

$$\left\| \frac{Y^1 \dots Y^1 M}{Y^{1-1} \dots Y^1 M} \right\|$$

$$(Y^1 Y^{1-1} \dots Y^1) \cdot M.$$

Além disso, usando a hipótese de que a sequência $Y_1, Y_2, \dots$ é i.i.d., então:

$$\int \int \dots \int \sigma(Y, Y^1 \cdot (Y^{1-1} \cdot (\dots (Y^1 \cdot M) \dots)))$$

$$d\mu(Y^1) \dots d\mu(Y^1) m(M) d\mu(Y) =$$

$$\int \sigma(Y_{l+1}, (Y_1 \dots Y_l) \cdot Id) dP(\omega) =$$

$$E \left[\sigma(Y_{l+1}, (Y_1 \dots Y_l) \cdot Id) \right]$$

(lembrar que m é distribuição de Dirac em Id) portanto, de (2.4) temos

$$\int \int \sigma(Y, M) d\mu(Y) d\nu_n(M) =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n E \left[\sigma(Y_{l+1}, (Y_1 \dots Y_l) \cdot Id) \right] =$$

$$\frac{1}{n} E \left[\sigma(Y_{n+1}, Y_n \dots Y^1, Id) \right] =$$

$$\frac{1}{n} E \left[\text{Log} \|Y_1 Y_n \dots Y_1\| \right].$$

Segue que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \iint \sigma(Y, M) d\mu(Y) d\nu_{n(l)}(M) =$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{n(l) + 1}{n(l)} \right) \frac{1}{n(l) + 1} E \left[\text{Log} \| Y_{n(l)+1} \ Y_{n(l)} \ \dots \ Y_1 \| \right] = \gamma$$

e por (2.3):

$$\iint \sigma(Y, M) d\mu(Y) d\nu(M) \geq \gamma. \quad (2.5)$$

Isto prova que σ de fato está em $L^1(\mu \otimes \nu)$. Pela Proposição 3.7 existe uma função $f: \Omega \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ que quando $n \longrightarrow \infty$ tem-se

$$\frac{1}{n} \text{Log} \| Y_n(\omega) \cdots Y_1(\omega) M \| = \frac{1}{n} \sigma(Y_n(\omega) \cdots Y_1(\omega), M) \longrightarrow f(\omega, M)$$

(2.6)

$P \otimes \nu$ -q.s.

De (2.1) obtemos

$$f(\omega, M) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| Y_n(\omega) \cdots Y_1(\omega) \| \leq \gamma$$

Agora temos,

$$\iint f(\omega, M) dP(\omega) d\nu(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint \frac{1}{n} \sigma(Y_n(\omega) \cdots Y_1(\omega), M) dP(\omega) d\nu(M) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sigma(Y_l(\omega), (Y_{l-1}(\omega) \cdots Y_1(\omega)) \cdot M) dP(\omega) d\nu(M)$$

e como ν é μ -invariante então este último limite é igual a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sigma(Y_l(\omega), M) dP(\omega) d\nu(M) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma(Y, M) d\mu(Y) d\nu(M) = \iint \sigma(Y, M) d\mu(Y) d\nu(M),$$

isto é:

$$\iint f(\omega, M) dP(\omega) d\nu(M) = \iint \sigma(Y, m) d\mu(Y) d\nu(M)$$

segue por (2.5) que

$$\gamma \leq \iint f(\omega, M) dP(\omega) d\nu(M) .$$

Assim

$$f(\omega, M) = \gamma \quad \text{q.s.} \quad (2.7)$$

e

$$\gamma \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \| Y_n(\omega) \cdots Y_1(\omega) \| \quad \text{q.s.} .$$

Esta última equação com (2.1) concluem a prova. ■

A demonstração da segunda versão torna-se bem mais curta porque o Teorema Ergódico Subaditivo (I.3.13) já garante de imediato a convergência da sequência subaditiva $\frac{1}{n} \text{Log} \| Y_n \cdots Y_1 \|$. Repare que na demonstração da primeira versão tivemos que construir primeiro uma ação de grupo (e aí aparece a necessidade das matrizes aleatórias serem inversíveis) e um cociclo para só depois utilizar uma versão enfraquecida do Teorema Ergódico Subaditivo, a saber o Teorema Ergódico de Birkhoff embutido na proposição 3.7, para garantir a convergência da mesma sequência. Vejamos então o

Teorema 4.2: (Teorema de Furstenberg e Kesten, 2ª versão): Seja $Y_1, Y_2, \dots$ matrizes aleatórias em $M(d, \mathbb{R})$, independentes e com distribuição comum μ .

Se $E[\text{Log}^+ \|Y_1\|] < \infty$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|Y_n \dots Y_1\| = \gamma \quad \text{q.s.}$$

Demonstração: Se $\sigma = -\infty$ então repete-se a primeira parte da demonstração da 1ª versão. Provemos então para γ finito.

Sejam $\Omega = \left\{ \omega = (Y_n)_{n \geq 1}; Y_n \in M(d, \mathbb{R}) \right\}$, $\mathcal{A}$ a σ -álgebra em Ω gerada por cilindros de dimensão finita nas coordenadas Y_n , $n = 1, 2, \dots$ e a probabilidade produto P na qual os Y_i 's são independentes e com distribuição μ .

Considere a função mensurável $T: \Omega \rightarrow M(d, \mathbb{R})$ tal que $T(Y_n)_{n \geq 1} = Y_1$ e a transformação ergódica

$$\tau: \Omega \rightarrow \Omega$$

$$(Y_n)_{n \geq 1} \mapsto (Y_{n+1})_{n \geq 1}$$

(ver lema I.2.3). É claro que $\text{Log}^+ \|T(\cdot)\| \in L^1(P)$, portanto pelo corolário I.4.1 do Teorema Ergódico Subaditivo existe uma função mensurável $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ τ -invariante tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|T(\tau^{n-1}\omega) \dots T(\tau\omega) T(\omega)\| = X(\omega),$$

além disso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E \left[\text{Log} \|T(\tau^{n-1}\omega) \dots T(\tau\omega) T(\omega)\| \right] = \int X(\omega) dP(\omega).$$

X é constante quase sempre porque τ é ergódica (proposição 1.2.4), segue da última equação que $X(\omega) = \gamma$ q.s., o resultado fica estabelecido já que $T(\tau^{n-1}\omega) \cdots T(\tau\omega) T(\omega) = Y_n(\omega) \cdots Y_1(\omega)$ ■

Note que no Teorema de Furstenberg e Kesten não é obrigatório a hipótese de independência da sequência de matriz aleatórias; basta que exista uma transformação ergódica θ em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tal que as matrizes aleatórias podem ser definidas como $Y_n = Y \circ \theta^{n-1}$ onde $Y : \Omega \longrightarrow GL(d, \mathbb{R})$ é uma variável aleatória.

Observação: Acabamos de ver que se as variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, \dots$ são independentes e identicamente distribuídas então existem $T : \Omega \longrightarrow M(d, \mathbb{R})$ mensurável e $\tau : \Omega \longrightarrow \Omega$ ergódica tal que $Y_n = T \circ \tau^{n-1}(\omega)$.

A pergunta natural que surge agora é: dados $\hat{T} : \Omega \longrightarrow M(d, \mathbb{R})$ mensurável e $\hat{\tau} : \Omega \longrightarrow \Omega$ ergódico, as variáveis aleatórias $\hat{Y}_n = \hat{T} \circ \hat{\tau}^n$ serão independentes? (É claro que serão identicamente distribuídas). A resposta é não. Considere o seguinte contra-exemplo: $\Omega = \{a, b\}$ e $P(a) = 1/2$, $P(b) = 1/2$; $\tau : \Omega \longrightarrow \Omega$ a permutação $\tau(a) = b$ e $\tau(b) = a$; e a função mensurável $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(a) = 0$ e $f(b) = 1$; então

$$P \left\{ f = 0, f \circ \tau = 1 \right\} = P \left\{ a \right\} = 1/2$$

no entanto

$$P \left\{ f = 0 \right\} \cdot P \left\{ f \circ \tau = 1 \right\} = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4, \text{ isto é}$$

f e $f \circ \tau$ não são independentes.

CAPÍTULO III

EXPOENTES DE LYAPUNOV EM
PRODUTO DE MATRIZES ALEATÓRIAS

Neste capítulo trataremos do comportamento assintótico do produto $S_n = Y_n \dots Y_1$ de uma sequência de matrizes aleatórias; estudaremos especialmente algumas propriedades relativas aos expoentes de Lyapunov, particularmente em relação à multiplicidade do maior deles. Até a seção 4 faremos uma abordagem muito mais probabilística e neste contexto aparecem resultados garantindo a ação contrativa do produto S_n no espaço projetivo, ou mais precisamente garantindo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta \left(S_n \cdot \bar{x}, S_n \cdot \bar{y} \right) = 0, \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in P(\mathbb{R}^d)$$

onde δ é a métrica natural do ângulo em $P(\mathbb{R}^d)$. Da seção 5 em diante mostraremos como alguns resultados podem ser reinterpretados à luz da Teoria Ergódica, ou mais precisamente como que os expoentes de Lyapunov de uma sequência de matrizes aleatórias se torna um caso particular do Teorema Ergódico Multiplicativo, que nos dá uma idéia mais dinâmica e geométrica dos conceitos envolvidos.

Na seção 1 e 2 definiremos conjuntos contráteis, irreduzíveis e fortemente irreduzíveis, bem como propriedades desses; as seções 3 e 4 contém os resultados principais da ação de $S_n = Y_n \dots Y_1$ sobre o espaço projetivo. Na seção 5, onde definiremos os expoentes de Lyapunov, fazemos uma ligação entre a teoria que desenvolvemos e o Teorema Ergódico Multiplicativo (teorema 4.4 do capítulo I); com o auxílio deste podemos fazer uma interpretação geométrica desses expoentes bem como dar uma outra interpretação dos resultados vistos nas outras seções. Por fim, na seção 6 analisamos a multiplicidade do maior expoente de

Lyapunov e concluímos o capítulo com um resultado de convergência no espaço projetivo um pouco mais forte do que aquele obtido na seção 4; ou seja, sob as condições de irreducibilidade forte e contratibilidade de G_μ a convergência se dá com velocidade exponencial.

III.1. CONJUNTOS CONTRÁTEIS

Vamos introduzir o conceito de índice de um sub-conjunto de $Gl(d, \mathbb{R})$, temos a

Definição 1.1: Dado um sub-conjunto T de $Gl(d, \mathbb{R})$, definimos o índice de T como o menor inteiro positivo p tal que existe uma sequência $(M_n)_{n \geq 0} \subset T$ onde $\|M_n\|^{-1} M_n$ converge para uma matriz de posto p (lembrar que o posto de uma matriz é a dimensão de sua imagem).

Se $p = 1$ dizemos que T é um conjunto contrátil.

Exemplo 1.2: Considere o conjunto formado pela sequência $M_n = \text{diag} [n, 1, \dots, 1]$, $n = 1, 2, \dots$. Temos que $\|M_n\| = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|M_n\|^{-1} M_n$ converge para a matriz de posto um: $M = \text{diag} [1, 0, \dots, 0]$, portanto $T = \{ M_n, n \geq 1 \}$ é um conjunto contrátil. Podemos ainda estender este exemplo e considerar a sequência $(M_n)_{n \geq 1}$ onde na decomposição polar (ver apêndice 1) temos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1(M_n) = \infty$ e $a_j(M_n)$ limitado para todo $1 < j \leq d$ e $n \in \mathbb{N}$, onde $a_1(M_n) \geq a_2(M_n) \geq \dots \geq a_d(M_n)$ são as raízes dos auto-valores de $M_n^* M_n$. Como $\|M_n\| = a_1(M_n)$ então, a menos de subsequência:

$$\frac{K_n A_n U_n}{a_1(M_n)} \longrightarrow K \text{diag} [1, 0, \dots, 0] U,$$

onde $K_n, U_n \in O(d, \mathbb{R})$, $A_n = \text{diag} [a_1(M_n), \dots, a_d(M_n)]$ é a decomposição

polar de M_n . Ou seja, o conjunto $\{M_n, n \geq 1\}$ é contrátil. Esse exemplo ilustra bem o que se passa no próximo lema.

Lema 1.3: Seja T um subconjunto de $Gl(d, \mathbb{R})$, e p o índice de T então:

$$\sup \left\{ a_1(M)^{-1} a_1(M) ; M \in T \right\} = \infty$$

se e somente se $i > p$.

Demonstração: Se fixarmos um i teremos:

$$\sup \left\{ a_1(M)^{-1} a_1(M) ; M \in T \right\} = \infty$$

então existe uma sequência M_n onde $\lim a_1(M_n)^{-1} a_1(M_n) = \infty$. Considere a decomposição polar $M_n = K_n A_n U_n$; K_n e U_n são isometrias então $\|M_n\| = \|A_n\| = a_1(M_n)$. A menos de subsequência temos que $\|M_n\|^{-1} M_n = K_n a_1(M_n)^{-1} A_n U_n$ converge para $M = K A U$, onde $K = \lim K_n$, $U = \lim U_n$ e $A = \lim a_1(M_n)^{-1} A_n$, logo i deve ser estritamente maior que o índice de $(M_n)_{n \geq 1} \subset T$, isto é $i > p$.

Reciprocamente, se $i > p$, considere uma sequência $(M_n)_{n \geq 1}$ tal que $\|M_n\|^{-1} M_n$ converge para M , com posto de M igual a p . Se $M_n = K_n A_n U_n$ é sua decomposição polar então:

$$\|M_n\|^{-1} M_n = K_n a_1(M_n)^{-1} A_n U_n \longrightarrow K A U,$$

onde $K = \lim K_n$, $U = \lim U_n$ e $A = \lim a_1(M_n)^{-1} A_n$, como posto $(A) = \max \{1 < j \leq d : a_j \neq 0\}$ então $a_1 = 0$, isto é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_1(M_n)^{-1} a_1(M_n) = \infty$$

Definição 1.4: Uma medida de probabilidade m em $P(\mathbb{R}^d)$ é própria se para todo hiperplano $H \subset \mathbb{R}^d$

$$m \left(\bar{x} \in P(\mathbb{R}^d) : x \in H - \{0\} \right) = 0.$$

Se $M \in GL(d, \mathbb{R})$ e m é uma distribuição em $P(\mathbb{R}^d)$ então denotamos Mm a medida de probabilidade em $P(\mathbb{R}^d)$ que satisfaz

$$\int f \, d(Mm) = \int f(M \cdot \bar{x}) \, dm(\bar{x})$$

para toda função f mensurável e limitada em $P(\mathbb{R}^d)$. Em outras palavras $Mm(A) = m(M^{-1}A)$ para todo $A \subset P(\mathbb{R}^d)$ mensurável. Se M não for inversível a definição é a mesma, só que agora entenda $M^{-1}A$ como imagem inversa (por exemplo $\text{Ker } M \subset M^{-1}A$, para todo $A \neq \emptyset$).

A próxima proposição vai mostrar como um conjunto contrátil age "contraíndo" uma medida própria m de $P(\mathbb{R}^d)$ a uma medida de Dirac.

Proposição 1.5: Seja T um subconjunto contrátil de $GL(d, \mathbb{R})$. Para qualquer medida própria m de $P(\mathbb{R}^d)$ existe uma sequência $\{M_n, n \geq 0\}$ em T tal que $M_n m$ converge fracamente a uma medida de Dirac.

Demonstração: Seja (M_n) uma sequência em T tal que $\|M_n\|^{-1} M_n$ converge para uma matriz M de posto um. Temos para $x \in \mathbb{R}^d$ tal que $x \notin \text{Ker } M$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n \cdot \bar{x} = M \cdot \bar{x}.$$

Como $\text{Ker } M$ é um hiperplano em $\mathbb{R}^d$ e m é uma medida própria então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n \cdot \bar{x} = M \cdot \bar{x} \quad m - \text{q.s.}$$

Agora se $\bar{z}$ é a direção da imagem de M então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n \cdot \bar{x} = \bar{z} ,$$

ou seja, para $A \subset P(\mathbb{R}^d)$ mensurável:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m \left(M_n^{-1} A \right) = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{z} \in A \\ 0 & \text{se } \bar{z} \notin A \end{cases}$$

em outras palavras M_n converge fracamente para $\delta_{\bar{z}}$. ■

III.2. Irredutibilidade Forte:

Introduzimos a definição de conjunto fortemente irredutível:

Definição 2.1: Dado um subconjunto $T \subset GL(d, \mathbb{R})$, dizemos que

(i) T é irredutível se não existir um subespaço próprio $V \subset \mathbb{R}^d$ tal que $M(V) = V$ para todo $M \in T$.

(ii) T é fortemente irredutível se não existir uma família finita de subespaços próprios de $\mathbb{R}^d$, $V_1, V_2, \dots, V_k$ tal que

$$M(V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$$

para todo $M \in T$.

Vejamos o seguinte

Exemplo 2.2: Considere o grupo gerado pela rotação de π em $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$:

$G_\pi = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$; esse conjunto não é irredutível porque qualquer subespaço próprio é invariante à rotação de π (consequentemente

tampouco é fortemente irredutível). Tome agora a rotação por $\pi/2$, e o grupo $G_{\pi/2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, esse conjunto agora é irredutível porém não é fortemente irredutível, de fato se V_1 é o subespaço dos imaginários puros e V_2 o subespaço dos reais então $M(V_1 \cup V_2) = V_1 \cup V_2$ para todo $M \in G_{\pi/2}$. Ou ainda se V_1 é o subespaço gerado por um vetor qualquer $v \neq 0$ e V_2 o subespaço gerado pelo vetor $v \cdot e^{i\pi/2}$ então $M(V_1 \cup V_2) = V_1 \cup V_2$ para todo $M \in G_{\pi/2}$.

Ainda mais geral, considere o semi-grupo gerado pela rotação por um ângulo $0 < \theta < \pi/2$, $G_\theta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}, \dots \right\}$. Se $e^{i\theta}$ for uma raiz n -ésima da unidade então o semi-grupo é finito, irredutível mas não fortemente irredutível; de fato a família de subespaços gerados pelos vetores $1, e^{i\theta}, e^{i2\theta}, \dots, e^{i(n-1)\theta}$ é invariante a toda matriz $M \in G_\theta$. Por outro lado se θ for da forma $\alpha \cdot \pi$ onde α é um irracional então o semi-grupo será infinito, irredutível e fortemente irredutível uma vez que a órbita de qualquer vetor unitário é densa em $S = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$.

Dada uma distribuição μ em $Gl(d, \mathbb{R})$ escrevemos T_μ (respectivamente G_μ) para o menor semi-grupo fechado (respectivamente subgrupo) de $Gl(d, \mathbb{R})$ que contém o suporte de μ (lembrar que o suporte de uma medida μ , $\text{supp } \mu$, é o complementar do maior aberto de medida nula)

Observação 2.3: Note que se $V_1, \dots, V_k$ são subespaços de $\mathbb{R}^d$, então o conjunto G de matrizes M tais que $M(V_1 \cup \dots \cup V_k) = V_1 \cup \dots \cup V_k$ é um subgrupo fechado de $Gl(d, \mathbb{R})$. Com efeito se $M, N \in G$ então

$$M \cdot N(V_1 \cup \dots \cup V_k) = M(V_1 \cup \dots \cup V_k) = V_1 \cup \dots \cup V_k,$$

logo $MN \in G$, e também

$$M^{-1}(V_1 \cup \dots \cup V_k) = M^{-1}\left(M(V_1 \cup \dots \cup V_k)\right) = V_1 \cup \dots \cup V_k$$

isto é $M^{-1} \in G$. Além disso o subgrupo é fechado (na topologia induzida de $Gl(d, \mathbb{R})$) devido à continuidade de

$$\Theta_v : Gl(d, \mathbb{R}) \longrightarrow Gr_s(d) = \left\{ \text{subespaços de } \mathbb{R}^d \text{ com dimensão } s \right\}$$

$$M \longmapsto M(V)$$

onde V é um subespaço de dimensão $1 \leq s \leq d$.

Com vista nesta observação é fácil mostrar que são equivalentes:

- (i) Suporte de μ é fortemente irredutível;
- (ii) T_μ é fortemente irredutível;
- (iii) G_μ é fortemente irredutível.

Com efeito (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) é trivial por continência de conjuntos; para provar que (iii) $\Rightarrow$ (i) suponha que o suporte de μ não seja fortemente irredutível, isto é, que exista $V_1, \dots, V_k$ tal que $M(V_1 \cup \dots \cup V_k) = V_1 \cup \dots \cup V_k$, para todo $M \in \text{supp } \mu$; pela observação anterior, o menor subgrupo que o contém, G_μ , tampouco será fortemente irredutível, que é um absurdo, portanto fica estabelecida a equivalência.

O interesse na irredutibilidade forte vem do seguinte resultado, que será útil no teorema principal da próxima seção:

Proposição 2.4: Seja μ uma probabilidade em $Gl(d, \mathbb{R})$ tal que G_μ é fortemente irredutível. Então qualquer medida ν em $P(\mathbb{R}^d)$ μ -invariante é própria.

Demonstração: Seja $Gr_\ell(d)$ o conjunto de todos os subespaços de dimensão ℓ de $\mathbb{R}^d$ e considere

$$\ell_0 = \inf \left\{ \ell \leq d; \nu(\bar{V}) \neq 0 \text{ para algum } V \text{ em } Gr_\ell(d) \right\},$$

onde $(\bar{V} = \{ \bar{x} \in P(\mathbb{R}^d) : x \in V \})$,

$$r = \sup \left\{ \nu(\bar{V}) : V \in Gr_{\ell_0}(d) \right\}$$

e

$$\Lambda = \left\{ V \in Gr_{\ell_0}(d) : \nu(\bar{V}) = r \right\}.$$

Se V_1 e V_2 estão em Λ então ou $V_1 = V_2$ ou $\dim(V_1 \cap V_2) < \ell_0$ e pela definição de ℓ_0 : $\nu(V_1 \cap V_2) = 0$. Segue que se $V_1, V_2, \dots, V_k$ são elementos distintos de Λ então

$$\nu(\bar{V}_1 \cup \bar{V}_2 \cup \dots \cup \bar{V}_k) = \sum_{i=1}^k \nu(\bar{V}_i) = k \cdot r$$

logo Λ é finito.

Por outro lado, para todo $V \in \Lambda$ temos:

$$r = \nu(\bar{V}) = \mu * \nu(\bar{V}) = \int \nu(M^{-1} \cdot \bar{V}) d\mu(M),$$

pela μ -invariança de ν . Mas $\nu(M^{-1} \cdot \bar{V}) \leq r$, segue então que para μ -quase todo M , $\nu(M^{-1} \cdot \bar{V}) = r$ e portanto $M^{-1} \cdot \bar{V} \in \Lambda$. Seja $L = \bigcup_{V_\lambda \in \Lambda} V_\lambda$; temos então

que $\{ M \in Gl(d, \mathbb{R}) : M(L) = L \}$ é um subgrupo fechado que contém G_μ . Se $\ell_0 < d$ então L é a união de uma família finita de subespaços próprios, portanto, G_μ não seria fortemente irredutível; segue que $\ell_0 = d$ e assim

ν é própria

■

Na verdade a recíproca da proposição também é verdadeira, a demonstração disso não apresenta dificuldades.

III.3. RESULTADOS RELATIVOS À IRREDUTIBILIDADE FORTE

O próximo teorema (3.2) será usado nas demonstrações dos resultados principais deste capítulo; entre outras coisas ele assegura que se G_μ for fortemente irredutível e contrátil então existe uma única medida ν em $P(\mathbb{R}^d)$ μ -invariante. Sua demonstração estará fortemente baseada no lema (3.1) que apresentaremos agora; esse lema assume uma papel central na abordagem probabilística dos resultados do capítulo III, a idéia principal é ter a convergência fraca da sequência de medidas $X_1(\omega) \dots X_n(\omega) g \nu$ a partir da convergência de um martingale limitado. Em virtude da sua prova exigir conceitos e técnicas que fogem da linha abordada neste capítulo, essa será feita no apêndice 2.

Lema 3.1: Seja G um semi-grupo topológico agindo em um espaço topológico localmente compacto B que satisfaz o 2º axioma da enumerabilidade. Considere uma sequência $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. em G com distribuição comum μ . Se ν é uma distribuição em B μ -invariante então para quase todo ω existe uma probabilidade ν_ω em B tal que a sequência

$$\left(X_1(\omega) X_2(\omega) \dots X_n(\omega) g \nu \right)_{n \geq 1}$$

converge fracamente para ν_ω para quase todo g com respeito à medida $\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \mu^n$. Além disso, para toda função mensurável limitada f em B

$$\int f \, d \nu = E \left[\int f \, d \nu_\omega \right].$$

O que o teorema 3.2 vai nos garantir é que se G_μ for fortemente irredutível e contrátil então as medidas ν_ω são de Dirac quase sempre, e além disso a distribuição de $\bar{z}(\omega)$ tal que $\nu_\omega = \delta_{\bar{z}(\omega)}$ é exatamente ν .

Teorema 3.2: Seja $X_1, X_2, \dots$ uma sequência de matriz aleatórias em $GL(d, \mathbb{R})$, i.i.d. com distribuição comum μ . Suponha que T_μ seja fortemente irredutível e que seu índice seja p . Então, se $M_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$, para quase todo ω existe um subespaço $V(\omega)$ de $\mathbb{R}^d$, de dimensão p tal que todo ponto de acumulação de $\{ \|M_n(\omega)\|^{-1} M_n(\omega), n \geq 1 \}$ é uma matriz de posto p com imagem $V(\omega)$. Se $x \neq 0$ então

$$P \left\{ \omega : x \text{ ortogonal a } V(\omega) \right\} = 0$$

Se T_μ for contrátil, existe uma única medida ν em $P(\mathbb{R}^d)$ μ -invariante, e $M_n(\omega)\nu$ converge fracamente a $\delta_{\bar{z}(\omega)}$ onde $\bar{z}(\omega)$ é qualquer vetor não nulo de $V(\omega)$, que neste caso tem dimensão um.

Demonstração: Tome uma medida ν em $P(\mathbb{R}^d)$ μ -invariante (essa medida existe pelo lema II.3.9). Pelo lema 3.1 anterior existe, para quase todo ω , uma medida de probabilidade ν_ω tal que $\left(M_n(\omega) g \nu \right)_{n \geq 1}$ converge fracamente a ν_ω para quase todo $g \in GL(d, \mathbb{R})$ com respeito à medida $\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \mu^n$.

Fixemos então ω e vamos considerar um ponto de acumulação $A(\omega)$ de $\left(\|M_n(\omega)\|^{-1} M_n(\omega) \right)_{n \geq 1}$. Se $A(\omega) x \neq 0$ então $M_n(\omega) \cdot \bar{x}$ converge, a menos de subsequência, a $A(\omega) \cdot \bar{x}$. Pela proposição 2.4 ν é própria então:

$$\nu \left\{ \bar{x} \in P(\mathbb{R}^d) : A(\omega) g x = 0 \right\} = 0,$$

isto é,

$$A(\omega) g \cdot \bar{x} = \lim M_n(\omega) g \cdot \bar{x} \quad \nu - \text{quase sempre}$$

ou seja

$$A(\omega) g \nu = \lim M_n g \nu = \nu_\omega \quad \text{para } \lambda - \text{quase todo } g$$

(esse mesmo argumento foi usado na demonstração da proposição 1.5). É fácil ver que

$$\left\{ g \in \text{Gl}(d, \mathbb{R}); A(\omega) g \nu = \nu_\omega \right\}$$

é fechado em $\text{Gl}(d, \mathbb{R})$ de fato se tomarmos uma sequência $\left(h_n \right)_{n \geq 1}$ de elementos que estão no conjunto tal que $h_n \longrightarrow h$ então $A(\omega) h \nu = \nu_\omega$ porque ν é própria. Além disso, como o suporte de λ é $T_\mu \cup \{ \text{Id} \}$, segue então que

$$A(\omega) g \nu = \nu_\omega \quad \text{para todo } g \in T_\mu.$$

Considere agora uma sequência $\left(g_n \right)_{n \geq 1}$ em T_μ tal que $\| g_n \|^{\frac{1}{p}} g_n$ converge a uma matriz h de posto p (essa sequência existe porque o índice de T_μ é p). Para todo g em T_μ , $gg_n \in T_\mu$, portanto

$$A(\omega) gg_n \nu = \nu_\omega.$$

Se $A(\omega) gh x \neq 0$ então $A(\omega) gg_n \cdot \bar{x}$ converge para $A(\omega) gh \cdot \bar{x}$. Seria desejável então que

$$\nu \left\{ \bar{x} \in P(\mathbb{R}^d); A(\omega) gh x = 0 \right\} = 0 \quad (3.1)$$

porque neste caso $A(\omega) gg_n \nu$ convergiria fracamente a $A(\omega) gh \nu$ (note que agora h não necessariamente está em T_μ).

Vamos então mostrar por absurdo que existe $g \in T_\mu$ onde (3.1) é verdadeiro: como ν é própria (pela proposição 2.4) então negar (3.1) é o

mesmo que admitir

$$A(\omega) \text{ gh } x = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d. \quad (3.2)$$

Mas se (3.2) for verdadeiro para todo $g \in T_\mu$ então o subespaço V de $\mathbb{R}^d$ gerado pela união $\bigcup_{g \in T_\mu} g \cdot (\text{imagem de } h)$ deveria estar contido no núcleo de $A(\omega)$, e portanto $\dim V < d$. Ora, para todo $g \in T_\mu$, $gV = V$, (com efeito todo $v \in V$ é da forma $g_1 u$ onde $g_1 \in T_\mu$ e u está na imagem de h , portanto $g(g_1 u) = (gg_1) u \in V$) que gera uma contradição com a irreduzibilidade forte de T_μ . Concluimos então que existe $g \in T_\mu$ tal que (3.1) acontece e portanto

$$\nu_\omega = \lim A(\omega) g g_n \nu = A(\omega) \text{ gh } \nu. \quad (3.3)$$

Seja $V(\omega)$ o subespaço gerado por $\left\{ x \in \mathbb{R}^d - \{0\} : \bar{x} \in \text{supp } \nu_\omega \right\}$. Por (3.3), $V(\omega)$ está contido na imagem de $A(\omega) \text{ gh}$, portanto $\dim V(\omega) \leq p$ porque $\text{posto}(h) = p$.

Por outro lado o suporte da distribuição de M_n é $(\text{supp } (\mu))^n$, portanto $P(M_n \in T_\mu) = 1$ e $P(M_n \in T_\mu, \forall n \geq 1) = 1$. Pela definição de índice de T_μ , o posto de $A(\omega)$ é maior ou igual a p . Como $\nu_\omega = A(\omega)\nu$ então $V(\omega) = I_m A(\omega)$ ou seja $\dim V(\omega) = p$.

Acabamos de provar que $V(\omega)$ é um subespaço de dimensão p que é a imagem de todo ponto de acumulação de $\left(\|M_n(\omega)\|^{-1} M_n(\omega) \right)_{n \geq 1}$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$ seja $H(x) = \left\{ \bar{y} \in P(\mathbb{R}^d), \langle x, y \rangle = 0 \right\}$.

Sabemos pelo lema 3.1 anterior que $\nu = \int \nu_\omega dP(\omega)$, então

$$\begin{aligned} P(\omega : x \text{ ortogonal a } V(\omega)) &= P\left(\text{supp } \nu_\omega \subset H(x)\right) \\ &= P\left(\nu_\omega(H(x)) = 1\right) \\ &\leq \int \nu_\omega(H(x)) dP(\omega) \end{aligned}$$

$$= \nu(H(x)) = 0$$

pois ν é própria.

Por fim se T_μ for contrátil então $p = 1$ por definição e $\bar{V}(\omega)$ se reduz a um ponto $\bar{z}(\omega)$ em $P(\mathbb{R}^d)$. Note que por construção $\bar{z}(\omega)$ não depende de ν : $V(\omega) =$ imagem de $A(\omega)$ e como $\dim V(\omega) = 1$ então ν_ω só pode ser a medida de Dirac em $\bar{z}(\omega)$ (vale observar que isso não acontece se $p > 1$, de fato neste caso ν_ω depende de ν : $\nu_\omega = A(\omega)\nu$. Agora, como $\nu = \int \delta_{\bar{z}(\omega)} dP(\omega)$ então ν é a única medida μ -invariante em $P(\mathbb{R}^d)$; note ainda que a distribuição de $\bar{z}(\omega)$ é a própria ν ■

A próxima proposição será útil posteriormente.

Proposição 3.3: Seja a sequência $Y_1, Y_2, \dots$ de elementos aleatórios independentes em $GL(d, \mathbb{R})$ com distribuição comum μ , e $S_n = Y_n \dots Y_1$. Considere a decomposição polar

$$S_n = K_n A_n U_n$$

onde $K_n, U_n \in O(d, \mathbb{R})$ e $A_n = \text{diag} \left[a_1(n), \dots, a_d(n) \right]$ com $a_1(n) \geq a_2(n) \geq \dots \geq a_d(n) > 0$.

Se T_μ tem índice p e é fortemente irredutível então

(a) O subespaço gerado por $\left\{ U_n^*(\omega) e_1, \dots, U_n^*(\omega) e_p \right\}$ converge q.s. a um subespaço p -dimensional $V(\omega)$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{p+1}(n)}{\|S_n\|} = 0$ e $\inf_n \frac{a_p(n)}{\|S_n\|} > 0$ q.s.

(c) Para toda sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ em $\mathbb{R}^d$ que converge a um vetor não nulo

$$\sup_{n \geq 1} \frac{\|S_n(\omega)\|}{\|S_n(\omega)x_n\|} < \infty \quad \text{q.s.}$$

Preste atenção que o item (c) é válido para uma sequência fixa (x_n) e quase todo ω . O alerta é feito porque uma aparente contradição pode aparecer entre os itens (b) e (c) se alguém construir uma sequência de vetores unitários (x_n) onde cada x_n está exatamente no subespaço de dimensão um onde as normas estão sendo multiplicadas por $a_{p+1}(n)$ (em outras palavras, x_n converge a x , com x ortogonal a $V(\omega)$); neste caso, pelo item (b):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n(\omega)\|}{\|S_n(\omega)x\|} = \infty. \quad (3.4)$$

O que falha neste raciocínio é que a sequência (x_n) é função de ω ; o que o item (c) está dizendo precisamente é que dada uma sequência (x_n) como a que foi construída, seu limite da equação (3.4) só é infinito para um conjunto de ω 's de medida nula. Veja na demonstração deste item que é fundamental o fato de (do teorema 3.2)

$$P\left\{\omega : x \text{ ortogonal a } V(\omega)\right\} = 0,$$

isto é, se x é o limite de x_n , x é ortogonal a "quase nenhum" $V(\omega)$. O item (c) ainda implicará o resultado surpreendente do item (i) no corolário 3.5.

Antes de demonstrarmos a proposição vejamos ainda o seguinte lema 3.4 com o qual essa se torna praticamente um corolário do teorema 3.2.

Lema 3.4: Se ρ é a distribuição de Y_1^* , o índice de T_ρ é igual ao índice de T_μ e T_ρ é fortemente irredutível se T_μ o for.

Demonstração: Observe primeiro que $T_\rho = \left\{ M^*, M \in T_\mu \right\}$ (trivial porque $M_1^* M_2^* = (M_2 M_1)^*$). Considerando agora a decomposição polar $M = K A U$, M^*

$= U^* A K^*$ e o lema 1.3 então o índice de T_ρ é igual ao índice de T_μ uma vez que $a_i(M) = a_i(M^*)$, $i = 1, 2, \dots, d$.

Suponha agora que exista uma família finita de subespaços próprios $V_1, V_2, \dots, V_\ell$ de $\mathbb{R}^d$ tal que

$$M\left(\bigsqcup_{i=1}^{\ell} V_i\right) = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} V_i$$

para todo $M \in T_\rho$.

Como cada M é inversível então na realidade o que M faz como operador no conjunto dos subespaços é uma permutação entre subespaços de mesmas dimensões; portanto sem perda de generalidade podemos considerar a sub-família dos subespaços de dimensão maximal, que por comodidade continuaremos chamando $V_1, V_2, \dots, V_\ell$.

Sejam W_i 's os subespaços ortogonais aos respectivos V_i 's, $i = 1, 2, \dots, \ell$. Ora $MV_i = V_j \Leftrightarrow MV_i \perp W_j \Leftrightarrow V_i \perp M^*W_j \Leftrightarrow W_i = M^*W_j$; então

$$\left\{ M^*W_1, \dots, M^*W_\ell \right\} = \left\{ W_1, \dots, W_\ell \right\} \quad \forall M \in T_\rho,$$

portanto $M\left(\bigsqcup_{j=1}^{\ell} W_j\right) = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} W_j$ para todo $M \in T_\mu$, isto é, T_μ não é fortemente irredutível, o que é um absurdo ■

Vejamos agora a:

Demonstração da proposição 3.3: Pelo lema anterior podemos aplicar o teorema 3.2 à sequência $X_1 = Y_1^*$. Então existe quase sempre um subespaço vetorial $V(\omega)$ de dimensão p que é a imagem de cada ponto limite $M(\omega)$ de $\left\{ \|S_n^*(\omega)\|^{-1} S_n^*(\omega)^* \right\}_{n \geq 1}$. Como $\|S_n^*\| = a_1(n)$,

$$\frac{S_n^*}{\|S_n^*\|} = U_n^* \text{diag} \left[1, \frac{a_2(n)}{a_1(n)}, \dots, \frac{a_d(n)}{a_1(n)} \right] K_n^*.$$

Cada componente do produto acima está contida em um compacto (bola unitária fechada). Se $U_\infty(\omega)$, $K_\infty(\omega)$, $\alpha_2(\omega)$, ..., $\alpha_d(\omega)$ forem pontos limites de $U_n(\omega)$, $K_n(\omega)$ e $\frac{a_2(n)}{a_1(n)}$, ..., $\frac{a_d(n)}{a_1(n)}$ então

$$M(\omega) = U_\infty^*(\omega) \operatorname{diag} \left[1, \alpha_2(\omega), \dots, \alpha_d(\omega) \right] K_\infty^*(\omega)$$

é um ponto limite de $\left\{ \|S_n^*(\omega)\|^{-1} S_n^*(\omega) \right\}_{n \geq 1}$. Portanto com probabilidade um o posto de $M(\omega)$ é igual a p , isto é, $\alpha_2(\omega) \geq \dots \geq \alpha_p(\omega) > 0$ e $\alpha_{p+1}(\omega) = \dots = \alpha_d(\omega) = 0$. O subespaço gerado por $\left\{ U_\infty^*(\omega) e_1, \dots, U_\infty^*(\omega) e_p \right\}$ é, então igual à imagem de $M(\omega)$, o que prova (a).

A parte (b) segue diretamente da relação $\alpha_p(\omega) \neq 0$ e $\alpha_{p+1}(\omega) = 0$. (Note que esta parte de proposição é equivalente ao lema 1.3; aqui ela segue do teorema 3.2, mas o lema 1.3 já está embutido no teorema em questão).

Para verificarmos a parte (c) temos:

$$\frac{\|S_n x_n\|^2}{\|S_n\|^2} = \frac{\|A_n U_n x_n\|^2}{\|A_n\|^2} = \sum_{i=1}^d \left\{ \frac{a_i(n)}{a_1(n)} \right\}^2 \langle x_n, U_n^* e_i \rangle^2$$

e portanto

$$\frac{\|S_n x_n\|^2}{\|S_n\|^2} \geq \left\{ \frac{a_p(n)}{a_1(n)} \right\}^2 \sum_{i=1}^p \langle x_n, U_n^* e_i \rangle^2$$

Se $x_n \longrightarrow x$ e $y(\omega)$ é a projeção ortogonal de x em $V(\omega)$, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\|S_n(\omega)x\|}{\|S_n(\omega)\|} \geq \inf \left\{ \frac{a_p(n)}{a_1(n)}(\omega) \right\} \|y(\omega)\|$$

Ainda pelo teorema 3.2

$$P\left(\omega : \|y(\omega)\| = 0\right) = P\left(\omega : x \text{ ortogonal a } V(\omega)\right) = 0$$

e pela parte (b)

$$\inf_n \left\{ \frac{a_p(n)}{a_1(n)} \right\} > 0 \quad \text{q.s.}$$

segue

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n(\omega)x_n\|}{\|S_n(\omega)\|} > 0 \quad \text{q.s.}$$

ou o que é o mesmo

$$\sup_{n \geq 1} \frac{\|S_n(\omega)\|}{\|S_n(\omega)x_n\|} < \infty \quad \blacksquare$$

Desta proposição deduzimos facilmente o importante corolário abaixo:

Corolário 3.5: Seja uma sequência $Y_1, Y_2, \dots$ de matrizes aleatórias em $GL(d, \mathbb{R})$ independentes e com distribuição comum μ . Suponhamos que

$$(a) \quad E\left[\text{Log}^+ \|Y_1\|\right] < \infty.$$

$$(b) \quad G\mu \text{ é fortemente irredutível.}$$

Então

(i) Para toda sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ que converge a um vetor não nulo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \text{Log} \|Y_n \dots Y_1 x_n\| = \gamma \quad \text{q.s.}$$

(ii) Se ν é uma medida de probabilidade μ -invariante em $P(\mathbb{R}^d)$ então:

$$\gamma = \iint \text{Log} \frac{\|Mx\|}{\|x\|} d\mu(M) d\nu(\bar{x}) .$$

Demonstração: Seja $S_n = Y_n \dots Y_1$. Pela proposição 3.3, se $x_n \rightarrow x \neq 0$ então existe $C(\omega)$ tal que

$$\sup_{n \geq 1} \frac{\|S_n(\omega)\|}{\|S_n(\omega)x_n\|} \leq C^{-1}(\omega) < \infty \quad \text{q.s.}$$

isto é:

$$0 < C(\omega) \leq \frac{\|S_n(\omega)x_n\|}{\|S_n(\omega)\|} \leq \|x_n\| \leq M ,$$

para algum $M \in \mathbb{R}$ e para $n \geq 1$. Segue que

$$C(\omega) \|S_n(\omega)\| \leq \|S_n(\omega)x_n\| \leq M \|S_n(\omega)\| , \text{ ou}$$

$$\text{Log } C(\omega) + \text{Log } \|S_n(\omega)\| \leq \text{Log } \|S_n(\omega)x_n\| \leq \text{Log } M + \text{Log } \|S_n(\omega)\|$$

dividindo esta inequação por n e fazendo n tender a infinito temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|S_n(\omega)x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|S_n(\omega)\| = \gamma \quad \text{q.s.}$$

Para demonstrarmos (ii) seja ν uma medida μ -invariante.

Se $E \left[\log^+ \|Y_1\| \right] < \infty$ então

$$\iint \text{Log}^+ \frac{\|Yx\|}{\|x\|} d\mu(Y) d\nu(x) = \int \left[\iint \text{Log}^+ \frac{\|Yx\|}{\|x\|} d\mu(Y) \right] d\nu(x)$$

$$\leq \int \mathbb{E} \left[\text{Log}^+ \|Y_1\| \right] d\nu(x) < \infty$$

e portanto, aplicando a proposição 11.3.7 como está nas observações depois de sua demonstração, para o cociclo aditivo $\sigma(Y, \bar{x}) = \text{Log} \frac{\|Yx\|}{\|x\|}$ concluímos que

$$\iint \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|Y_n \dots Y_1 x\| = \iint \sigma(Y, x) d\mu(Y) d\nu(x) = \iint \text{Log} \frac{\|Yx\|}{\|x\|} d\mu d\nu,$$

e como, pelo item (i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|Y_n \dots Y_1 x\| = \gamma \quad \text{q.s.}$$

segue que

$$\gamma \iint \text{Log} \frac{\|Yx\|}{\|x\|} d\mu(Y) d\nu(x) \quad \blacksquare$$

O resultado do item (i) do corolário é surpreendente, possibilita o cálculo de γ a partir de qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, bastando analisar o comportamento da norma de $Y_n \dots Y_1 x$. Para distribuições μ de Y_1 convenientes (μ discreta por exemplo) é fácil calcular γ com a certeza de que não estamos no conjunto de medida nula onde o resultado não vale. Esse mesmo resultado será ainda rediscutido na seção 5 depois de introduzido o conceito dos d expoentes de Lyapunov e dado um significado geométrico deles através do Teorema Ergódico Multiplicativo de Osseledec (teorema 1.4.4).

III. 4 AÇÃO CONTRATIVA EM $P(\mathbb{R}^d)$ E CONVERGÊNCIA EM DIREÇÃO

Vamos primeiro definir o que se entende precisamente por distância angular natural em $P(\mathbb{R}^d)$:

Definição 4.1: Se x, y são vetores unitários em $\mathbb{R}^d$ com direções $\bar{x}, \bar{y}$ respectivamente então definimos a distância $\delta(\bar{x}, \bar{y})$ como:

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) = \left\{ 1 - \langle x, y \rangle^2 \right\}^{1/2}.$$

Observe que $\delta(\bar{x}, \bar{y}) = \sin(\theta_{xy})$, onde θ_{xy} é o ângulo entre x e y em $\mathbb{R}^d$ dado pelo produto interno.

Para qualquer matriz ortogonal K , é óbvio que $\delta(K\bar{x}, K\bar{y}) = \delta(\bar{x}, \bar{y})$. Para verificar que δ de fato é uma métrica precisamos ainda mostrar a desigualdade triangular:

$$\delta(\bar{y}, \bar{z}) \leq \delta(\bar{y}, \bar{x}) + \delta(\bar{x}, \bar{z})$$

Pois, dados x, y e z vetores unitários l.i.(caso contrário, é trivial) tomemos uma base ortonormal conveniente tal que:

$$x = e_1,$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2,$$

$$z = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3,$$

Então:

$$\begin{aligned} \delta(\bar{y}, \bar{z}) &= \left\{ 1 - \left(y_1 z_1 + y_2 z_2 \right)^2 \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ 1 - y_1^2 z_1^2 - 2 y_1 z_1 y_2 z_2 - y_2^2 z_2^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Considerando que $z_1^2 = 1 - z_2^2 - z_3^2$ e $z_2^2 = 1 - z_1^2 - z_3^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \delta(\bar{y}, \bar{z}) &= \left\{ 1 - (y_1^2 + y_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) z_3^2 + y_1^2 z_2^2 - 2y_1 z_2 y_2 z_1 + y_2^2 z_1^2 \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \left(y_1 z_1 - y_2 z_1 \right)^2 + z_3^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ \left(|y_2| + |z_2| \right)^2 + z_3^2 \right\}^{1/2}, \quad (3.5) \end{aligned}$$

uma vez que $|y_1| < 1$ e $|z_1| < 1$.

Interrompemos agora nossas contas para mostrar a seguinte desigualdade envolvendo números reais positivos: se $a, b, c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ então

$$\left[\left(a + b \right)^2 + c^2 \right]^{1/2} \leq a + \left(b^2 + c^2 \right)^{1/2}.$$

De fato, basta desenvolver a potência e notar que

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 + c^2 &\leq a^2 + 2a \left(b^2 + c^2 \right)^{1/2} + b^2 + c^2 \\ &= \left[a + \left(b^2 + c^2 \right)^{1/2} \right]^2. \end{aligned}$$

Aplicando esse resultado as nossas contas resulta, de (3.5), que:

$$\begin{aligned} \left\{ \left(|y_2| + |z_2| \right)^2 + z_3^2 \right\}^{1/2} &\leq |y_2| + \left(z_2^2 + z_3^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left(1 - y_1^2 \right)^{1/2} + \left(1 - z_1^2 \right)^{1/2} \\ &= \delta(\bar{x}, \bar{y}) + \delta(\bar{x}, \bar{z}), \end{aligned}$$

que mostra a desigualdade triangular.

Pelo apêndice 1 sabemos que se $x, y \in \mathbb{R}^d$ então $\|x \wedge y\|$ é a área do paralelograma gerado por x e y . Como a área do paralelograma é

igual ao produto $\|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin \theta_{xy}$, temos que para todo x, y distintos de zero:

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\|x \wedge y\|}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad (3.6)$$

Usando esta fórmula o lema seguinte é consequência de um par de contas:

Lema 4.2: Para todo M em $Gl(d, \mathbb{R})$, se $a_1(M), a_2(M)$ são as raízes dos dois maiores autovalores de M^*M então

$$\frac{\delta(M \cdot \bar{x}, M \cdot \bar{y})}{\delta(\bar{x}, \bar{y})} \leq a_1(M) a_2(M) \frac{\|x\| \cdot \|y\|}{\|Mx\| \cdot \|My\|},$$

para todo par $x \neq y$.

Demonstração: Da equação (3.6) temos que

$$\frac{\delta(M \cdot \bar{x}, M \cdot \bar{y})}{\delta(\bar{x}, \bar{y})} = \frac{\|x\| \cdot \|y\|}{\|Mx\| \cdot \|My\|} \frac{\|\Lambda^2 M(x \wedge y)\|}{\|x \wedge y\|},$$

agora pelo lema 5 do apêndice 1 temos que

$$\|\Lambda^2 M\| = a_1(M) \cdot a_2(M),$$

segue então que

$$\frac{\|x\| \cdot \|y\|}{\|Mx\| \cdot \|My\|} \frac{\|\Lambda^2 M(x \wedge y)\|}{\|x \wedge y\|} \leq a_1(M) a_2(M) \frac{\|x\| \cdot \|y\|}{\|Mx\| \cdot \|My\|}$$

■

Mostraremos agora o principal resultado sobre o comportamento do produto S_n agindo em $P(\mathbb{R}^d)$: ele estabelece que se $T\mu$ for fortemente irreduzível e contrátil então S_n contrai a distância δ com probabilidade um enquanto a direção de $S_n^* x$ converge em probabilidade a um limite aleatório $z(\omega)$ que independe de x . É notável que isso se passa sob condições que dependem só de $T\mu$.

Teorema 4.3: Seja $S_n = Y_n \dots Y_1$ onde $(Y_n)_{n \geq 1}$ são matrizes aleatórias independentes em $GL(d, \mathbb{R})$ com distribuição comum μ . Suponha que $T\mu$ seja fortemente irreduzível e contrátil, então:

(i) Para todo par $\bar{x}, \bar{y} \in P(\mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(S_n \cdot \bar{x}, S_n \cdot \bar{y}) = 0 \quad \text{q.s.}$$

(ii) Existe uma direção aleatória $z(\omega)$ tal que $S_n^* \cdot \bar{x}$ converge em probabilidade a $\bar{z}(\omega)$, uniformemente em $\bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)$.

(iii) Existe uma única distribuição ν em $P(\mathbb{R}^d)$ μ -invariante, e para toda função contínua f em $P(\mathbb{R}^d)$,

$$\sup_{\bar{x}} \left| \mathbb{E} \left\{ f(S_n \cdot \bar{x}) \right\} - \int f d\nu \right| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty.$$

Demonstração: Seja $a_1(n)$ e $a_2(n)$ as raízes dos dois maiores autovalores de $S_n^* S_n$. Se (x_n) e (y_n) são duas seqüências disjuntas de vetores unitários que convergem em direção, então o lema 4.2 garante que

$$\frac{\delta(S_n \cdot \bar{x}_n, S_n^* \cdot \bar{y}_n)}{\delta(\bar{x}_n, \bar{y}_n)} \leq \frac{a_1(n) a_2(n)}{\|S_n x_n\| \cdot \|S_n y_n\|}$$

$$= \frac{a_2(n)}{\|S_n\|} \frac{\|S_n\|}{\|S_n x_n\|} \frac{\|S_n\|}{\|S_n y_n\|}.$$

Pela proposição 3.3 temos $\frac{a_2(n)}{\|S_n\|} \longrightarrow 0$,

$$\sup_n \frac{\|S_n\|}{\|S_n x_n\|} < \infty \quad \text{e} \quad \sup_n \frac{\|S_n\|}{\|S_n y_n\|} < \infty,$$

portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta(S_n \cdot \bar{x}_n, S_n \cdot \bar{y}_n)}{\delta(\bar{x}_n, \bar{y}_n)} = 0 \quad \text{q.s.}$$

Em particular, tomando $x_n = x$ e $y_n = y$, obtemos (i).

Chamemos agora de μ^* a distribuição comum das matrizes aleatórias $X_1 = Y_1^*$ e $R_n = X_n \dots X_1$. Vamos provar inicialmente que quando $n \longrightarrow \infty$:

$$\sup_{\bar{x}, \bar{y} \in P(\mathbb{R}^d)} \mathbb{E} \left[\delta \left(R_n \cdot \bar{x}, R_n \cdot \bar{y} \right) \right] \longrightarrow 0 \quad (3.7)$$

Suponha por absurdo que existe um $\epsilon > 0$ e uma subsequência n_i tal que para $\left(x_{n_i}\right)$ e $\left(y_{n_i}\right)$

$$\mathbb{E} \left[\delta \left(R_{n_i} \cdot \bar{x}_{n_i}, R_{n_i} \cdot \bar{y}_{n_i} \right) \right] > \epsilon \quad (3.8)$$

Podemos considerar ainda que $\left(x_{n_i}\right)$ e $\left(y_{n_i}\right)$ são convergente porque estão em um compacto. Agora, pelo lema 3.4 T_{μ}^* também é fortemente irredutível e contrátil, logo, pelo no item anterior

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \delta \left(R_{n_l} \cdot \bar{x}_{n_l}, R_{n_l} \cdot \bar{y}_{n_l} \right) = 0 \quad \text{q.s.,}$$

o que é uma contradição com (3.8).

Pelo teorema 3.1 sabemos que existe uma única distribuição μ^* -invariante em $P(\mathbb{R}^d)$, com $X_n \dots X_1$ m convergindo fracamente a uma distribuição de Dirac $\delta_{z(\omega)}$. Temos:

$$\mathbb{E} \left[\delta \left(S_n^* \cdot \bar{x}, \bar{z} \right) \right] \leq \mathbb{E} \left[\delta \left(S_n^* \cdot \bar{x}, S_n^* \cdot \bar{y} \right) \right] + \mathbb{E} \left[\delta \left(S_n^* \cdot \bar{y}, \bar{z} \right) \right],$$

como a desigualdade vale para todo $\bar{y} \in P(\mathbb{R}^d)$ então

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\delta \left(S_n^* \cdot \bar{x}, \bar{z} \right) \right] &\leq \int \mathbb{E} \left[\delta \left(S_n^* \cdot \bar{x}, S_n^* \cdot \bar{y} \right) \right] dm(\bar{y}) + \int \mathbb{E} \left[\delta \left(S_n^* \cdot \bar{y}, \bar{z} \right) \right] dm(\bar{y}) \\ &\leq \sup_{\bar{x}, \bar{z}} \mathbb{E} \left[\delta \left(S_n^* \cdot \bar{x}, S_n^* \cdot \bar{y} \right) \right] dm(\bar{y}) + \int \mathbb{E} \left[\delta \left(S_n^* \cdot \bar{y}, \bar{z} \right) \right] dm(\bar{y}) \end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito da desigualdade tende a zero por (3.7) (note que S_n^* e R_n tem a mesma distribuição)

$$\begin{aligned} \int \mathbb{E} \left[\delta \left(S_n^* \cdot \bar{y}, \bar{z} \right) \right] dm(\bar{y}) &= \mathbb{E} \left[\int \delta \left(S_n^* \cdot \bar{y}, \bar{z} \right) dm(\bar{y}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int \delta \left(\bar{u}, \bar{z} \right) d(X_n \dots X_1 m) \left(\bar{u} \right) \right], \end{aligned}$$

que converge para $\mathbb{E} [\delta(\bar{z}, \bar{z})] = 0$, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)} \mathbb{E} \left[\delta \left(S_n^* \cdot \bar{x}, \bar{z} \right) \right] = 0$$

o que conclui (ii) (é fácil provar a partir das definições que uma

sequência de variáveis aleatórias (ζ_n) , limitada em uma métrica Δ converge em probabilidade para uma variável aleatória ζ se e somente se $\lim \mathbb{E} [\Delta(\zeta_n, \zeta)] = 0$.

Por fim, se f for uma função contínua em $P(\mathbb{R}^d)$ então f é uniformemente contínua. Portanto usando o resultado que já foi estabelecido em (ii):

$$\sup_{\bar{x}} \mathbb{E} \left[\left| f \left(S_n^* \cdot \bar{x} \right) - f(\bar{z}) \right| \right] \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty$$

Como

$$\mathbb{E} \left[\left| f \left(S_n^* \cdot \bar{x} \right) - f(\bar{z}) \right| \right] \geq \left| \mathbb{E} \left[f \left(S_n^* \cdot \bar{x} \right) - f(\bar{z}(\omega)) \right] \right| =$$

$$\left| \mathbb{E} \left[f \left(S_n^* \cdot \bar{x} \right) \right] - \int f(\bar{z}(\omega)) \, dP(\omega) \right| ,$$

segue que

$$\sup_{\bar{x}} \left| \mathbb{E} \left[f \left(S_n^* \cdot \bar{x} \right) \right] - \int f \, d\mu \right| \leq \sup_{\bar{x}} \mathbb{E} \left[\left| f \left(S_n^* \cdot \bar{x} \right) - f(\bar{z}) \right| \right]$$

converge a zero quando $n \longrightarrow \infty$. Agora (iii) é obtido simplesmente verificando que tanto o item (ii) como a desigualdade acima são verdadeiras trocando X_1 por Y_1 e a medida μ pela ν

■

As hipóteses do teorema 4.3 não estão em excesso, é o que mostra a

Proposição 4.4: Se assumimos que T_μ é apenas irredutível então (i) é verdadeiro se e somente se T_μ for fortemente irredutível e contrátil.

Antes de demonstrá-la vejamos o

Lema 4.5: Se T_μ não é fortemente irredutível então existe uma família de subespaços próprios $V_1, \dots, V_\ell$ de mesma dimensão tal que

$$(a) \quad \text{Se } i \neq j, V_i \cap V_j = \{0\}.$$

$$(b) \quad \text{Para todo } i = 1, \dots, \ell \text{ e } M \in T, MV_i = V_j \text{ para algum } j = 1, \dots, \ell.$$

Demonstração: Seja r o menor inteiro positivo tal que exista uma família finita L de subespaços próprios de dimensão menor ou igual a r que satisfaz $M \left(\bigsqcup_{\ell \in L} V_\ell \right) = \bigsqcup_{\ell \in L} V_\ell$, para todo $M \in T_\mu$. Seja V_1 um dos subespaços de dimensão r ; como todo M aplicado a L faz uma permutação entre subespaços de mesma dimensão então existem $V_2, \dots, V_\ell$ em L tais que $\{MV_1, M \in T_\mu\} = \{V_1, V_2, \dots, V_\ell\}$. Supomos os V_i 's distintos (caso contrário, isto é, se não existem V_i 's distintos de V_1 então T_μ não é irredutível e o resultado é trivial). Vejamos agora que se $M \in T_\mu$

$$M \left(\bigsqcup_{i \neq j} (V_i \cap V_j) \right) = \bigsqcup_{i \neq j} (V_i \cap V_j).$$

como $\dim V_i \cap V_j < r$, a hipótese de minimalidade de r implica (a). O item (b) é trivial uma vez que acabamos de mostrar que $L = \{V_1, \dots, V_\ell\}$

■

Demonstração da proposição: Seja m uma medida própria em $P(\mathbb{R}^d)$, se (i) do teorema 4.3 é verdadeiro então existe ω , $\bar{x}$ e n_1 tais que $S_{n_1}(\omega) \in T_\mu$ e quando $i \rightarrow \infty$, $S_{n_i}(\omega) \cdot \bar{x}$ converge a um $\bar{z}$ e $\delta(S_{n_i}(\omega) \cdot \bar{x}, S_{n_i}(\omega) \cdot \bar{y}) \rightarrow 0$ para m -quase todo $\bar{y}$. Portanto $S_{n_i}(\omega)$ m converge fracamente a uma medida de Dirac em $\bar{z}$ e $\|S_{n_i}(\omega)\|^{-1} S_{n_i}(\omega)$ converge a uma matriz de imagem $\bar{z}$, isto é, T_μ é contrátil.

Suponha agora que T_μ não seja fortemente irredutível. Seja $\bar{V}_1 = \left\{ \bar{x} \in P(\mathbb{R}^d), x \in V_1 \right\}$ onde $V_1, \dots, V_\ell$ são os subespaços próprios construídos no lema 4.5. Como $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_j = \emptyset$ então

$$\alpha = \inf \left\{ \delta(\bar{V}_i, \bar{V}_j), 1 \leq i < j \leq \ell \right\} > 0$$

Se (i) acontece então para $\bar{x} \in \bar{V}_1$ e $\bar{y} \in \bar{V}_2$ existe ω tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(S_n(\omega) \cdot \bar{x}, S_n(\omega) \cdot \bar{y}) = 0.$$

Mas (b) do lema implica que existem $i \neq j$ tais que $S_n(\omega) \cdot \bar{x} \in V_i$ e $S_n(\omega) \cdot \bar{y} \in V_j$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\delta(S_n(\omega) \cdot \bar{x}, S_n(\omega) \cdot \bar{y}) > \alpha > 0$$

para todo n , o que é um absurdo

■

III. 5. OS EXPOENTES DE LYAPUNOV

Nesta seção definiremos os d expoentes de Lyapunov associados à distribuição μ de Y_1 ; inicialmente daremos uma abordagem mais

probabilística como no nosso texto principal [2] e posteriormente, com o enfoque da Teoria Ergódica, especialmente do Teorema Ergódico Multiplicativo de Osseledec, daremos uma interpretação geométrica do que significam esses expoentes. Antes de apresentarmos a definição, porém, vamos mostrar um lema que será útil mais adiante. Um resumo de resultados relativos à potência exterior $\Lambda^p \mathbb{R}^d$ pode ser visto no apêndice 1.

Lema 5.1: Se $M \in GL(d, \mathbb{R})$, seja

$$\ell(M) = \max \left\{ \log^+ \|M\|, \log^+ \|M^{-1}\| \right\}.$$

Então para todo p , $1 \leq p \leq d$ e todo vetor unitário w em $\Lambda^p \mathbb{R}^d$:

$$|\log \|\Lambda^p M\|| \leq p \ell(M) \text{ e } |\log \|\Lambda^p M w\|| \leq p \ell(M).$$

Demonstração: Pelo lema 5 do apêndice 1 temos que

$$\|\Lambda^p M\| = a_1(M) \dots a_p(M) \leq a_1(M)^p = \|M\|^p$$

portanto

$$\log \|\Lambda^p M\| \leq p \log \|M\| \leq p \log^+ \|M\| \leq p \ell(M).$$

Por outro lado, como

$$\|\Lambda^p M^{-1} \Lambda^p M\| = \|\Lambda^p \text{Id}\| = 1 \text{ e}$$

$$\|\Lambda^p M^{-1} \Lambda^p M\| \leq \|\Lambda^p M^{-1}\| \cdot \|\Lambda^p M\|$$

então

$$\|\Lambda^p M\|^{-1} \leq \|\Lambda^p M^{-1}\| \leq \|M^{-1}\|^p .$$

Logo

$$- \text{Log} \|\Lambda^p M\| \leq p \text{Log} \|M^{-1}\| \leq p \text{Log}^+ \|M^{-1}\| \leq p \ell(M),$$

isto é,

$$|\text{Log} \|\Lambda^p M\|| \leq p \ell(M).$$

Por fim temos que se $\|w\| = 1$ então $\|\Lambda^p M w\| \leq \|\Lambda^p M\|$ e da mesma maneira para seu inverso $\|\Lambda^p M w\|^{-1} \leq \|\Lambda^p M^{-1}\|$ (basta notar que $\|\Lambda^p M^{-1} \Lambda^p M w\| \leq \|\Lambda^p M^{-1}\| \cdot \|\Lambda^p M w\|$, com o primeiro membro da desigualdade igual a um), segue então:

$$|\text{Log} \|\Lambda^p M w\|| \leq p \ell(M)$$

■

Considerando a decomposição polar de uma matriz M (ver lema 1 do apêndice 1) temos que $|\det M| = \prod_{i=1}^d a_i(M)$; note que se $|\det M| = 1$ então $\ell(M) \leq (d-1) \text{Log} \|M\|$ e $\|M\| \geq 1$. Com efeito:

$$\|M^{-1}\| = a_d(M)^{-1} = \prod_{i=1}^{d-1} a_i(M) \leq a_1(M)^{d-1} = \|M\|^{d-1} ,$$

e como $\|M\| \geq 1$ (trivial) então:

$$\ell(M) = \max \left\{ \text{Log} \|M\|, \text{Log} \|M^{-1}\| \right\} \leq (d-1) \text{Log} \|M\| .$$

Note ainda da demonstração do lema que, como $\|\Lambda^p Y_1\| \leq \|Y_1\|^p$, se $E [\text{Log}^+ \|Y_1\|] < \infty$ então $E [\text{Log}^+ \|\Lambda^p Y_1\|] < \infty$. Vamos agora definir os d expoentes de Lyapunov associados a uma sequência de matrizes i.i.d. .

Definição 5.2: Seja $Y_1, Y_2, \dots$ uma sequência de matrizes aleatórias i.i.d. em $GL(d, \mathbb{R})$ com $E[\log^+ \|Y_1\|] < \infty$. Os expoentes de Lyapunov $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d$ associados a essa sequência são definidos indutivamente como $\gamma_1 = \gamma$ e para $p \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^p \gamma_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E \left[\log \| \Lambda^n Y_1 \dots Y_n \| \right].$$

Em outras palavras $\sum_{i=1}^p \gamma_i$ é o maior expoente de Lyapunov associados à matriz $(\Lambda^n Y_1)_{n \geq 1}$ (ver definição II.2.1); e além disso pelo

Teorema de Furstenberg e Kesten $\sum_{i=1}^p \gamma_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \| \Lambda^n Y_1 \dots Y_n \|$.

A definição é ambígua se para algum p , $\sum_{i=1}^p \gamma_i = -\infty$, neste caso estabelecemos $\gamma_p = \gamma_{p+1} = \dots = \gamma_d = -\infty$.

Observação 5.3: Se $E[\log^+ \|Y_1^{-1}\|]$ também é finito então todos os expoentes de Lyapunov são finitos.

Com efeito, a sequência $E[\log \| \Lambda^n S_n \|]$ é sub-aditiva pelo mesmo argumento usado na seção II.2 onde $p = 1$; portanto, pelo lema 5.1:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} E \left[\log \| \Lambda^n S_n \| \right] \right| &\leq \left| E \left[\log \| \Lambda^n Y_1 \| \right] \right| \\ &\leq E \left[\left| \log \| \Lambda^n Y_1 \| \right| \right] \\ &\leq E \left[p \cdot \ell(M) \right] < \infty, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto

$$\left| \sum_{i=1}^p \gamma_i \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} E \left[\text{Log} \|\Lambda^n S_n\| \right] \right| < \infty$$

A próxima proposição é importante para fazermos a ligação entre a teoria que estamos desenvolvendo e o Teorema Ergódico Multiplicativo (teorema I.4.4). Veremos que os expoentes de Lyapunov correspondem na notação do teorema aos autovalores da matriz simétrica Λ_ω , limite de $\left(T_\omega^n^* T_\omega^n \right)^{1/2n}$; então a partir deste mesmo Teorema Ergódico podemos ter uma interpretação geométrica desses expoentes.

Proposição 5.4: Se $a_1(n) \geq a_2(n) \dots \geq a_d(n) > 0$ são as raízes dos autovalores de $S_n^* S_n$, então com probabilidade um:

$$\gamma_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E \left[\text{Log } a_p(n) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log } a_p(n).$$

Demonstração: Inicialmente suponha que $\gamma_1 + \dots + \gamma_{p-1} = -\infty$, então temos que provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log } a_p(n) = -\infty.$$

De fato:

$$a_p(n)^{p-1} \leq a_1(n) \dots a_{p-1}(n),$$

que implica em

$$\begin{aligned} (p-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log } a_p(n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log } a_1(n) \dots a_{p-1}(n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log } \|\Lambda^{p-1} Y_n \dots Y_1\| \end{aligned}$$

$$= \gamma_1 + \dots + \gamma_{p-1} = -\infty.$$

Suponha agora que $\gamma_1 + \dots + \gamma_{p-1} \neq -\infty$, então

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} a_p(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \frac{a_1(n) \dots a_p(n)}{a_1(n) \dots a_{p-1}(n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \operatorname{Log} \|\Lambda^p Y_n \dots Y_1\| - \operatorname{Log} \|\Lambda^{p-1} Y_n \dots Y_1\| \right\} \\ &= \gamma_p \end{aligned}$$

■

Fica evidente com esta proposição que $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_d$, o que justifica chamarmos $\gamma = \gamma_1$ o maior expoente de Lyapunov.

Corolário 5.5: Como as mesmas hipóteses da proposição 5.4. temos que

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_d = \mathbb{E} \left[\operatorname{Log} |\det Y_1| \right]$$

Demonstração: Temos que $|\det(Y_n \dots Y_1)| = a_1(n) \cdot a_2(n) \dots a_d(n)$, portanto (para valores finitos ou infinitos):

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \dots + \gamma_d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\operatorname{Log} (a_1(n) \dots a_d(n)) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\operatorname{Log} |\det S_n| \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\operatorname{Log} |\det Y_n| + \dots + \operatorname{Log} |\det Y_1| \right] \end{aligned}$$

$$= E \left[\log | \det Y_1 | \right] ,$$

porque as matrizes são identicamente distribuídas.

■

Em outras palavras o corolário nos diz que todos os expoentes são finitos se e somente se $\log | \det Y_1 |$ é integrável.

Vamos agora mostrar que os d expoentes de Lyapunov são nada mais nada menos que os auto-valores da matriz simétrica Λ_ω do Teorema Ergódico Multiplicativo de Osseledec.

Já vimos na demonstração do Teorema de Furstenberg e Kesten (2ª versão, II.4.2) que a sequência de matrizes aleatórias i.i.d. $Y_1, Y_2, \dots$ pode ser expressa como $Y_n = T \circ \tau^{n-1}$ onde $T : \Omega \longrightarrow GL(d, \mathbb{R})$ é uma variável aleatória definida em $(\Omega = GL(d, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}, P)$ e τ , o deslocamento, é uma transformação ergódica. Ora, como $E[\log^+ \|Y_1\|] < \infty$ então é óbvio que $E[\log^+ \|T(\cdot)\|] < \infty$ e portanto estamos dentro das hipóteses do Teorema Ergódico Multiplicativo (I.4.4), temos $T_\omega^n = Y_n \dots Y_1$, isto é $T_\omega^n = S_n(\omega)$, e para quase todo ω temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(T_\omega^n^* T_\omega^n \right)^{1/2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_n^* S_n \right)^{1/2n} = \Lambda_\omega .$$

Lembramos que na demonstração da proposição I.4.2 temos que para cada ω :

$$\left(T_\omega^n^* T_\omega^n \right)^{1/2n} = O_n^* \begin{pmatrix} \left(a_n(1) \right)^{1/2n} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & \left(a_n(d) \right)^{1/2n} \end{pmatrix} O_n ,$$

onde $(O_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de Cauchy de matrizes ortogonais e $a_1(d), 1$

$1 \leq i \leq d$ são os auto-valores de $\begin{pmatrix} T_\omega^{n*} & T_\omega^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_n^* & S_n \end{pmatrix}$; o produto acima então converge para

$$O^* \begin{pmatrix} e^{\lambda_\omega^{(1)}} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_\omega^{(s)}} \end{pmatrix} O = \Lambda_n ,$$

Pelo item (b) do Teorema Ergódico Multiplicativo as funções $\omega \mapsto \lambda_\omega^{(i)}, m_\omega^{(i)}, 1 \leq i \leq s$ ($m_\omega^{(i)}$ é a multiplicidade de $\lambda_\omega^{(i)}$) são τ invariante, então pelo fato de τ ser ergódico (ver proposição 1.2.4) $\lambda_\omega^{(i)}$ e $m_\omega^{(i)}$ são constantes quase sempre, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n(i) \right)^{1/n} = e^{\lambda^{(j)}}, \quad \text{q.s. para algum } 1 \leq j \leq s$$

ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a_n(i) = \lambda^{(j)},$$

(j não necessariamente é igual a i porque consideramos os $\lambda^{(j)}$ em ordem crescente e os γ_i 's em ordem decrescente) pela proposição 5.4 então temos que os $\lambda^{(j)}$ são os s distintos expoentes de Lyapunov, isto é, $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d) = (\lambda^{(s)}, \dots, \lambda^{(s)}, \dots, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(1)})$, onde cada auto-valor $\lambda^{(j)}$ aparece $m^{(j)}$ vezes.

Ainda pelo item (b) deste teorema ergódico temos que para cada ω existe uma filtração de $\mathbb{R}^d$ em subespaços vetoriais:

$$\mathbb{R}^d = V_\omega^{(s)} \supset V_\omega^{(s-1)} \supset \dots \supset V_\omega^{(1)} \supset V_\omega^{(0)} = \{0\},$$

$V_\omega^{(j)} = U_\omega^{(1)} + \dots + U_\omega^{(j)}, 1 \leq j \leq s$ onde os $U_\omega^{(j)}$ são os auto-espaços

associados aos auto-valores $\lambda_{\omega}^{(j)}$ da matriz A_{ω} , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|T_{\omega}^n x\| = \lambda^{(j)}, \text{ se } x \in V_{\omega}^{(j)} - V_{\omega}^{(j-1)}.$$

Ainda lembrando do comentário depois do corolário I.4.5 temos que

$$Y_1(\omega) \cdot V_{\omega}^{(j)} = V_{\tau\omega}^{(j)}$$

Resumindo o que dissemos temos o importante corolário do Teorema Ergódico Multiplicativo, alguns autores o consideram como o próprio Teorema [9] :

Corolário 5.6: Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade, τ uma transformação ergódica, $T : \Omega \longrightarrow GL(d, \mathbb{R})$ uma função mensurável tal que

$$\text{Log}^+ \|T(\cdot)\| \in L^1(\Omega),$$

e a sequência $Y_n = T \circ \tau^{n-1}$.

Então para quase todo ω existe uma filtração de $\mathbb{R}^d$ em subespaços vetoriais

$$\mathbb{R}^d = V^{(s)} \supset V^{(s-1)} \dots \supset V^{(1)} \supset V^{(0)} = \{0\}$$

tal que:

(i) A aplicação $\omega \longmapsto V_{\omega}^{(j)}$ é mensurável (no sentido do corolário I.4.5);

(ii) $Y_1(\omega) V_{\omega}^{(j)} = V_{\tau\omega}^{(j)}$;

(iii) existem $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_s$ em $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tais que se $x \in V_{\omega}^{(j)} - V_{\omega}^{(j-1)}$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|Y_n \dots Y_1 x\| = \lambda^{(j)} \quad \text{q.s.} \quad (3.9)$$

A sequência formada por $\lambda^{(j)}$, repetindo cada elemento o número de vezes de sua multiplicidade ($\dim V^{(j)} - \dim V^{(j-1)}$) é, em ordem crescente, a sequência dos expoentes de Lyapunov da sequência de matrizes aleatórias $Y_1, Y_2, \dots$

Quanto a este corolário cabe ainda algumas observações: a primeira delas é que, como vimos não é necessário que a sequência de matrizes aleatórias identicamente distribuídas $Y_1, Y_2, \dots$ seja independente, em outras palavras os expoentes de Lyapunov podem ainda ser definidos para sequências de matrizes deste tipo. A segunda observação relevante é que a invariança de $\lambda_\omega^{(j)}$, de $m_\omega^{(j)}$, e a ergodicidade da τ nos garantem a existência quase sempre do limite da equação (3.9), isto é, limite constante quase sempre, no entanto os subespaços $V_\omega^{(j)}$ da filtração não são invariantes, ou seja em princípio nada nos garante que fixado um $\lambda^{(j)}$, exista um $x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ fixo tal que para todo ω

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|Y_n(\omega) \dots Y_1(\omega) x\| = \lambda^{(j)}.$$

Em vista desta segunda observação vamos uma vez mais ressaltar a força do item (i) do corolário 3.5 onde a hipótese de G_μ fortemente irredutível nos garante que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|Y_n \dots Y_1 x\| = \gamma \quad \text{q.s.}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$. Em última análise, sob o ponto de vista do Teorema Ergódico em questão, o que esse resultado está dizendo é que fixado $x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, então $x \in V_\omega^{(s)} - V_\omega^{(s-1)}$ para quase todo ω , onde $V_\omega^{(s)} = \mathbb{R}^d$ é o subespaço que contém o auto-espaço $U_\omega^{(s)}$ associado ao maior

auto-valor. Na verdade podemos fazer uma prova mais direta disto, nela podemos ver o que efetivamente se passa sob o ponto de vista geométrico:

Proposição 5.7: Sob as hipóteses (a) e (b) do corolário 3.5 temos que para todo $x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, $P\left\{\omega : x \in V_{\omega}^{(s)} - V_{\omega}^{(s-1)}\right\} = 1$.

Demonstração: Sabemos pelo lema 3.4 que se G_{μ} for fortemente irredutível então G_{μ}^* também o será, além disso tem o mesmo índice p (lembrar que μ^* é a distribuição de $Y_1(\omega)$). Considere agora $S_n = Y_n \dots Y_1$ e sua decomposição polar $S_n = K_n A_n U_n$, então $S_n^* = X_n^* \dots X_1^*$, onde $X_1^* = Y_1^*(\omega)$, e tem como decomposição polar $S_n^* = U_n^* A_n K_n^*$.

Chamaremos $V(\omega)$, como no teorema 3.2, a imagem do limite de $\frac{S_n^*}{\|S_n^*\|}$; ora, se provarmos que $V(\omega) = U_{\omega}^{(s)} \subset V_{\omega}^{(s)} - V_{\omega}^{(s-1)}$, onde s corresponde ao maior auto-valor $\exp \lambda^{(s)}$, então o resultado fica estabelecido uma vez que pelo teorema 3.2, para todo $x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$:

$$\begin{aligned} P\left\{\omega : x \notin V_{\omega}^{(s)} - V_{\omega}^{(s-1)}\right\} &= P\left\{\omega : x \text{ ortogonal a } U_{\omega}^{(s)}\right\} \\ &= P\left\{\omega : x \text{ ortogonal a } V(\omega)\right\} = 0. \end{aligned}$$

Ora

$$\frac{S_n^*}{\|S_n^*\|} = U_n^* \text{diag}\left[1, \frac{a_2(n)}{a_1(n)}, \dots, \frac{a_d(n)}{a_1(n)}\right] K_n^*,$$

que, a menos de subsequencia converge pela proposição 3.3 a

$$U^* \text{diag}\left[1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, 0, \dots, 0\right] K^*$$

onde

$$1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_p > 0,$$

isto é, $V(\omega)$ é o sub-espaco gerado por $\left\{ U^* e_1, \dots, U^* e_p \right\}$.

Por outro lado:

$$\begin{pmatrix} S_n^* & S_n \end{pmatrix}^{1/2n} = U_n^* \operatorname{diag} \left[\left(a_1(n) \right)^{1/n}, \dots, \left(a_d(n) \right)^{1/n} \right] K_n^*,$$

e pelo Teorema Ergódico Multiplicativo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Log} a_1(n)^{1/n} = \lambda(s),$$

que correspondente ao maior auto-valor $\exp [\lambda^{(s)}]$ ($\lambda^{(s)}$ é o maior expoente de Lyapunov). Agora, como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_p(n)}{a_1(n)} = \alpha_p > 0$$

segue que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Log} \left(\frac{a_p(n)}{a_1(n)} \right)^{1/n} = 0,$$

mas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Log} \left[\frac{a_p(n)}{a_1(n)} \right]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} a_p(n) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} a_1(n)$$

isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} a_p(n) = \lambda(s),$$

em outras palavras, a multiplicidade $m^{(s)}$ de $\lambda^{(s)}$ é pelo menos p , quer dizer que $U_\omega^{(s)}$ contém o subespaco gerado por $\left\{ U^* e_1, \dots, U^* e_p \right\} = V(\omega)$

■

A demonstração desta proposição pode ainda nos sugerir o fato da multiplicidade $m^{(s)}$ de $\lambda(s)$ ser exatamente igual ao índice p de G_μ . Porém se até aqui é dispensável a hipótese de independência entre as variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, \dots$, para se provar essa igualdade vamos precisar da hipótese de independência. (ver a prova na proposição 6.1 na próxima seção).

III. 6. MULTIPLICIDADE DO MAIOR EXPOENTE DE LYAPUNOV

Vimos no final da seção anterior que se G_μ for fortemente irreduzível e com índice p então a multiplicidade de $\lambda^{(s)}$, onde $\exp \lambda^{(s)}$ é o maior auto-valor de A do Teorema Ergódico Multiplicativo, é maior ou igual a p , mostraremos agora que sob a hipótese de independência esses valores coincidem, ou seja $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_p > \gamma_{p+1}$ onde γ_i 's são os expoentes de Lyapunov, em particular se G_μ for contrátil $\gamma_1 > \gamma_2$.

Antes de demonstrarmos a proposição principal desta seção vamos enunciar um lema no qual a demonstração desta está baseada. Uma vez que a demonstração deste lema foge das idéias principais deste capítulo e não apresenta maior interesse na teoria vamos deixá-lo sem demonstração e sugerir ao leitor interessado que consulte [2] capítulo II, lema 2.2. .

Lema 6.1: Seja B um G -espaço, $(Y_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de elementos aleatórios em G independentes e com distribuição μ , σ um cociclo aditivo em $G \times B$. Suponha que a distribuição ν em B , μ -invariante seja tal que:

$$(i) \quad \iint \sigma^*(g, x) \, d\mu(g) \, d\nu(x) < \infty .$$

$$(ii) \quad \text{Para } (\omega, x) \text{ } P \otimes \nu\text{-quase sempre, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(Y_n(\omega) \dots Y_1(\omega), x) = +\infty .$$

Então:

$$\sigma \in L^1(G \times B) \text{ e } \iint \sigma(g, x) \, d\mu(g) \, d\nu(x) > 0.$$

Usaremos aqui as mesmas notações da seção anterior e do Teorema Ergódico em questão.

Proposição 6.2: Seja $Y_1, Y_2, \dots$ uma sequência de matrizes aleatórias independentes em $GL(d, \mathbb{R})$ com distribuição comum μ . Se $E[\text{Log}^+ \|Y_1(\cdot)\|] < \infty$, G_μ for fortemente irredutível com índice p , então a multiplicidade $m^{(s)}$ de $\lambda^{(s)}$ é exatamente p , isto é,

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_p > \gamma_{p+1}.$$

Observação:

O fato de $\frac{a_{p+1}(n)}{a_1(n)}$ convergir para 0 não diz nada sobre o limite de $\text{Log} \left(\frac{a_{p+1}(n)}{a_1(n)} \right)^{1/n}$. Em última análise o que a proposição está dizendo é que a razão $\frac{a_{p+1}(n)}{a_1(n)} \approx e^{n(\gamma_{p+1} - \gamma_1)}$ quando n é grande, isto é, vai à zero exponencialmente ou ainda:

$$\lim \text{Log} \left(\frac{a_{p+1}(n)}{a_1(n)} \right)^{1/n} = \lim \text{Log} e^{(\gamma_{p+1} - \gamma_1)} = \gamma_{p+1} - \gamma_1 < 0$$

Demonstração: Só nos falta mostrar que $\gamma_1 > \gamma_{p+1}$. Pois bem, da proposição (3.3) sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}^d$, se $S_n = Y_n \dots Y_1$ então:

$$\inf \frac{\|S_n x\|}{\|S_n\|} \neq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{p+1}(n)}{\|S_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\Lambda^{p+1} S_n\|}{\|S_n\|^{p+1}} = 0 \quad \text{q.s.},$$

da mesma maneira para toda matriz M diferente de zero temos

$$\inf \frac{\|S_n M\|}{\|S_n\|} \neq 0 \quad \text{q.s.}$$

(basta considerar cada coluna de M como um vetor em $\mathbb{R}^d$). Combinando então as equações obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n\|^{p+1}}{\|\Lambda^{p+1} S_n\|} \cdot \frac{\|S_n M\|^{p+1}}{\|S_n\|^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n M\|^{p+1}}{\|\Lambda^{p+1} S_n\|} = +\infty \quad (3.10)$$

Usaremos o lema 6.1 para concluirmos, usando (3.10) que

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_p > \gamma_{p+1}.$$

Na demonstração da 1ª versão do Teorema de Furstenberg e Kesten (teorema I.4.1) vimos que se B_1 for o conjunto compacto de todas as matrizes $d \times d$ com norma um então existe uma distribuição ν_1 em B_1 μ -invariante tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|S_n M\| = \gamma_1$$

para $P \otimes \nu_1$ -quase todo (ω, M) - veja também as equações (2.6) e (2.7). Da mesma maneira, se considerarmos $(\Lambda^{p+1} Y_1)$ então existe uma distribuição ν_2 μ -invariante em B_2 , o conjunto de endomorfismos de $\Lambda^{p+1} \mathbb{R}^d$ (ou seja, conjunto de matrizes $\begin{pmatrix} d \\ p+1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ p+1 \end{pmatrix}$) tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|\Lambda^{p+1} S_n N\| = p \cdot \gamma_1 + \gamma_{p+1}$$

para $P \otimes \nu_2$ - quase to (ω, N) .

Considere $B = B_1 \times B_2$, B é um $GL(d, \mathbb{R})$ - espaço se definirmos a ação

$$Y \cdot (M, N) = \left(\frac{YM}{\|YM\|}, \frac{(\Lambda^{p+1}Y)N}{\|(\Lambda^{p+1}Y)N\|} \right), Y \in GL(d, \mathbb{R}), M \in B_1 \text{ e } N \in B_2.$$

Pelo lema II.3.9 todo ponto de acumulação ν de

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i^{1*} (\nu_1 \otimes \nu_2); n \geq 1 \right\}$$

é uma medida μ -invariante em $B_1 \times B_2$.

Definimos o seguinte cociclo aditivo:

$$\sigma(Y, (M, N)) = \text{Log} \frac{\|YM\|^{p+1}}{\|\Lambda^{p+1}YN\|}.$$

Com efeito

$$\begin{aligned} & \sigma(Y_1, Y_2 \cdot (M, N)) + \sigma(Y_2, (M, N)) = \\ & = \sigma \left(Y_1, \left(\frac{Y_2 M}{\|Y_2 M\|}, \frac{(\Lambda^{p+1}Y_2)N}{\|(\Lambda^{p+1}Y_2)N\|} \right) \right) + \text{Log} \frac{\|Y_2 M\|^{p+1}}{\|\Lambda^{p+1}Y_2 N\|} \\ & = \text{Log} \frac{\left\| Y_1 \frac{Y_2 M}{\|Y_2 M\|} \right\|^{p+1}}{\left\| \left(\Lambda^{p+1}Y_1 \right) \frac{(\Lambda^{p+1}Y_2)N}{\|(\Lambda^{p+1}Y_2)N\|} \right\|} + \text{Log} \frac{\|Y_2 M\|^{p+1}}{\|\Lambda^{p+1}Y_2 N\|} \\ & = \text{Log} \frac{\|Y_1 Y_2 M\|^{p+1}}{\|\Lambda^{p+1}Y_1 Y_2 N\|} = \end{aligned}$$

$$= \sigma \left(Y_1 Y_2, (M, N) \right) .$$

A hipótese $\mathbb{E} \left[\text{Log}^+ \|M\| \right] < \infty$ garante o item (i) do lema, para verificarmos (ii) temos, por (3.10):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma \left(S_n, (M, N) \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log} \frac{\|S_n M\|^{p+1}}{\|\Lambda^{p+1} S_n\|} = \infty$$

Agora:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sigma \left(S_n, (M, N) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p+1}{n} \text{Log} \|S_n M\| - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|\Lambda^{p+1} S_n N\| \\ &= (p+1) \gamma_1 - p\gamma_1 - \gamma_{p+1} \\ &= \gamma_1 - \gamma_{p+1} \quad \text{q.s.} \end{aligned}$$

Por outro lado, conforme vimos na demonstração da proposição II.3.7

$$\frac{1}{n} \sigma \left(S_n, (M, N) \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma \left(Y_j, \left(Y_{j-1} \dots Y_1 \right) \cdot (M, N) \right)$$

e portanto, como ν é μ -invariante e a sequência $(Y_n)_{n \geq 1}$ é i.i.d. temos:

$$\iint \frac{1}{n} \sigma \left(S_n, (M, N) \right) d\mu(Y_n) \dots d\mu(Y_1) d\nu(M, N) = \iint \sigma \left(Y, (M, N) \right) d\mu(Y) d\nu(M, N) > 0$$

pelo lema 6.1. Segue que

$$\gamma_1 - \gamma_{p+1} > 0 \quad \text{q.s.}$$

■

O próximo teorema caracteriza semi-grupos fortemente irreduzíveis e contráteis, uma parte dele é consequência imediata da proposição 6.1, a outra segue-se facilmente do lema 6.4.

Teorema 6.3: Seja $Y_1, Y_2, \dots$ i.i.d. em $GL(d, \mathbb{R})$ tal que $E[\text{Log}^+ Y_1(\cdot)] < \infty$. Suponha que T_μ seja irreduzível, então $\gamma_1 > \gamma_2$ se e somente se T_μ for contrátil e fortemente irreduzível.

Tendo em vista a proposição 6.2, precisamos mostrar apenas que se $\gamma_1 > \gamma_2$ então T_μ é fortemente irreduzível; o próximo lema será útil nesta tarefa, o que ele nos garante é uma versão ainda mais forte do corolário 3.5, ao invés de irreduzibilidade forte exige apenas irreduzibilidade.

Lema 6.4: Seja $S_n = Y_n \dots Y_1$ onde $(Y_n)_{n \geq 1}$ são matrizes aleatórias i.i.d. em $GL(d, \mathbb{R})$ com distribuição comum μ . Se $G\mu$ for irreduzível e $E[\text{Log}^+ \|Y_1(\cdot)\|] < \infty$ então para todo $x \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|S_n x\| = \gamma \quad \text{q.s.}$$

Demonstração: Seja

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|S_n x\| < \gamma \quad \text{q.s.} \right\}.$$

O conjunto $V \subset \mathbb{R}^d$ definido desta maneira é um subespaço vetorial, com efeito, se $x, y \in V$ então para todo $\alpha \neq 0$ real:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|S_n \alpha x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} |\alpha| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|S_n x\|$$

$$\lim \frac{1}{n} \text{Log} \|S_n x\| < \gamma .$$

e

$$\begin{aligned} \lim \frac{1}{n} \text{Log} \|S_n (x + y)\| &\leq \lim \frac{1}{n} \text{Log} \left(\|S_n x\| + \|S_n y\| \right) \\ &\leq \lim \frac{1}{n} \text{Log} \left[2 \cdot \max \left(\|S_n x\| + \|S_n y\| \right) \right] < \gamma . \end{aligned}$$

Vamos mostrar que V é invariante a g para todo g em $G\mu$, isto é, $gV = V \forall g \in G\mu$, o que implicará em $V = \{ 0 \}$ uma vez que $G\mu$ é irredutível. Pois bem, para um certo $x \in V$ fixo considere

$$A = \left\{ \omega : \lim \frac{1}{n} \text{Log} \|S_n(\omega) x\| < \gamma \right\} .$$

Pela própria definição de V temos que $P(A) = 1$. Usamos agora o seguinte artifício: já sabemos que podemos considerar $\Omega = \text{Gl}(d, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ sem perda de generalidade, ou ainda $\Omega = \text{Gl}(d, \mathbb{R}) \times \text{Gl}(d, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ com a medida produto $\mu \otimes P$. Se $P(A \subset \Omega) = 1$ então

$$\iint \chi_A(g, \omega) d\mu(g) dP(\omega) = P(A) = 1 .$$

ora, pelo Teorema de Fubini para μ -quase todo g , $(\mu \otimes P)(g, A) = 1$, ou seja

$$\lim \frac{1}{n} \text{Log} \|Y_n \dots Y_2 g x\| < 0 \quad \mu \otimes P - \text{q.s.}$$

em outras palavras $g \cdot x \in V$ μ -q.s., ou seja V é invariante por quase todo elemento do suporte de μ , como o produto $g \cdot V$ é contínuo e o suporte é fechado então V é invariante a todo elemento do suporte de μ e

consequentemente a todo elemento de $G\mu$.

■

Demonstração do Teorema 6.3: Suponhamos então que $\gamma_1 > \gamma_2$ e vamos mostrar que T_μ é fortemente irredutível. Para cada par de vetores unitários x, y temos:

$$\begin{aligned} \delta\left(S_n(\omega) \cdot \bar{x}, S_n(\omega) \cdot \bar{y}\right) &= \frac{\|S_n(\omega) \cdot (x \wedge y)\|}{\|S_n(\omega)x\| \cdot \|S_n(\omega)y\|} \\ &\leq \frac{\|\Lambda^2 S_n(\omega)\|}{\|S_n(\omega)x\| \cdot \|S_n(\omega)y\|} \\ &= \frac{\exp\left[n\left(\frac{1}{n} \text{Log}\|\Lambda^2 S_n(\omega)\|\right)\right]}{\exp\left[n\left(\frac{1}{n} \text{Log}\|S_n(\omega)x\| + \frac{1}{n} \text{Log}\|S_n(\omega)y\|\right)\right]}, \end{aligned}$$

portanto, pelo Teorema de Furstenberg e Kesten e pelo lema (6.4) anterior:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta\left(S_n(\omega) \cdot \bar{x}, S_n(\omega) \cdot \bar{y}\right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\Lambda^2 S_n(\omega)\|}{\|S_n(\omega)x\| \cdot \|S_n(\omega)y\|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n(\gamma_1 + \gamma_2)}}{e^{n(\gamma_1 + \gamma_1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n(\gamma_1 - \gamma_2)} = 0 \quad \text{q.s.}, \end{aligned}$$

e agora pela proposição (4.4) temos que T_μ é fortemente irredutível

■

Por fim a proposição (6.4) mostra que a convergência no

espaço projetivo se faz exponencialmente.

Lembre-se que

$$\ell(M) = \max \left\{ \log^+ \|M\|, \log^+ \|M^{-1}\| \right\}.$$

Proposição 6.4: Suponha que $(Y_n)_{n \geq 1}$ seja uma sequência de matrizes aleatórias i.i.d. com distribuição comum μ . Se $E[\ell(Y_1)] < \infty$, T_μ for contrátil e fortemente irredutível então, se $S_n = Y_n \dots Y_1$, para todo $\bar{x}, \bar{y} \in P(\mathbb{R}^d)$ temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\delta(S_n \cdot \bar{x}, S_n \cdot \bar{y})}{\delta(\bar{x}, \bar{y})} < 0 \quad \text{q.s.}$$

Demonstração: Pelo observação (5.3) da seção anterior já sabemos que sob essas hipótese γ_1 e γ_2 são finitos. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, tal que $\bar{x} \neq \bar{y}$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(S_n \cdot \bar{x}, S_n \cdot \bar{y})}{\delta(\bar{x}, \bar{y})} &= \frac{\|S_n x \wedge S_n y\|}{\|S_n x\| \cdot \|S_n y\|} \cdot \frac{\|x\| \cdot \|y\|}{\|x \wedge y\|} \\ &\leq \|A^2 S_n\| \frac{\|x\| \cdot \|y\|}{\|S_n x\| \cdot \|S_n y\|}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{n} \log \|A^2 S_n\|$ converge quase sempre a $\gamma_1 + \gamma_2$ e $\frac{1}{n} \log \frac{\|S_n x\|}{\|x\|}$ converge a γ_1 (q.s.) pelo corolário (3.5), então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\delta(S_n \cdot \bar{x}, S_n \cdot \bar{y})}{\delta(\bar{x}, \bar{y})} \leq \gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_1 = \gamma_2 - \gamma_1,$$

e pelo teorema (6.3), $\gamma_2 - \gamma_1 < 0$.

■

APÊNDICE I

PRODUTO EXTERIOR

Definiremos primeiro o que chamamos uma decomposição polar de uma matriz: analogamente à representação polar $\zeta = \rho e^{i\theta}$ de um número complexo, temos que toda matriz M em $M(d, \mathbb{R})$ pode ser escrita como o produto $M = U S$ onde U é matriz ortogonal e S é simétrica (ver [5], § 83, por exemplo). Para termos uma idéia mais clara do que acontece geometricamente, podemos assumir a seguinte equivalência:

Definição 1: Seja $M \in M(d, \mathbb{R})$, dizemos que

$$M = K A U$$

é uma decomposição polar de M se K e U forem matrizes ortogonais e $A = \text{diag} [a_1, \dots, a_d]$ com $a_1 \geq \dots \geq a_d \geq 0$.

Lema 2: Se M é inversível então $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_d > 0$ são necessariamente as raízes dos auto-valores de $M^* M$.

Demonstração: Seja $\{e_i, 1 \leq i \leq d\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^d$ e $\{f_i, 1 \leq i \leq d\}$ a base ortonormal tal que $M^* M f_i = a_i^2 f_i$, $i = 1, \dots, d$. defina a matriz ortonormal U por $U f_i = e_i$, $1 \leq i \leq d$.

Então

$$U^* A^2 U f_i = U^* A^2 e_i = a_i^2 U^{-1} e_i = a_i^2 f_i = M^* M f_i,$$

assim $U^* A^2 U = M^* M$. Se considerarmos $K = U^{-1} A^{-1}$ então

$$K^* K = A^{-1} U M^* M U^{-1} A^{-1} = A^{-1} A^2 A^{-1} = \text{Id},$$

isto é, K é ortogonal. Ora, então $M = KAU$ é a decomposição polar e $M^* M = U^{-1} A^2 U$ ■

O lema acima é verdadeiro mesmo para matrizes não inversíveis, só que neste caso teremos necessariamente que a partir de um certo $1 < r \leq d$, $a_r, \dots, a_d = 0$. Mostra-se isso aplicando o lema inicialmente na aplicação linear que vai do complementar do núcleo de M à sua imagem, de dimensão $(r-1) \times (r-1)$; depois completamos a diagonal com zeros e impomos que as matrizes ortogonais levem o núcleo ao complementar da imagem.

Seja E um espaço vetorial de dimensão d , com o dual E^* . Para p inteiro $1 \leq p \leq d$, seja $\Lambda^p E$ (ou $E^{\wedge p}$)^{*} o espaço vetorial das formas p -linear alternadas. Para $u_1, u_2, \dots, u_p$ em E e $f_1, f_2, \dots, f_p$ em E^* estabelecemos:

$$\begin{aligned} \left(u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_p \right) \left(f_1, f_2, \dots, f_p \right) &= \sum_{\tau \text{ permutação}} \left(\text{sgn } \tau \right) f_{\tau_1} \left(u_1 \right) \cdot \dots \cdot f_{\tau_p} \left(u_p \right) = \\ &= \det \left[\left\{ f_i \left(u_j \right) \right\}_{i,j} \right]. \end{aligned}$$

É claro que $(u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_p)$ é um elemento de $\Lambda^p E$, chamá-lo-emos de um p -vetor decomponível.

Os resultados seguintes são facilmente demonstrados (ver, por exemplo, [6] seção 7.7).

Lema 3: (i) Se $\{e_1, \dots, e_d\}$ é uma base de E , então $\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}, 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d\}$ é uma base $\Lambda^p E$.

(ii) Para $u_1, u_2, \dots, u_p$ em E , $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_p$ é não-nulo se e somente se $u_1, u_2, \dots, u_p$ são linearmente independentes.

(iii) Duas p -úplas independentes $\{u_i, 1 \leq i \leq p\}$ e $\{v_i, 1 \leq i \leq p\}$ tem o mesmo sub-espço gerado se e somente se $u_1 \wedge \dots \wedge u_p = \lambda (v_1 \wedge \dots \wedge v_p)$ para algum $\lambda \neq 0$.

Concluimos deste lema que a imagem do conjunto dos p -vetores decomponíveis no espaço projetivo $P(\Lambda^p E)$ pode ser identificado com o conjunto dos sub-espços p -dimensional de E (isto é, a Grassmanniana $Gr_p(E)$ dos p -planos de E).

Definição 4: Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar usual em $\mathbb{R}^d$, definimos o produto escalar em $\Lambda^p \mathbb{R}^d$ pela fórmula:

$$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_p, v_1 \wedge \dots \wedge v_p \rangle = \det \left[\left\{ \langle u_i, v_j \rangle \right\}_{i,j} \right].$$

Estabelecemos a norma em $\Lambda^p \mathbb{R}^d$ como aquela proveniente do produto escalar. Note que $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}, 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d\}$ é uma base ortonormal de $\Lambda^p \mathbb{R}^d$, e que $\|u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_p\|$ é o volume p -dimensional do paralelogramo gerado por $u_1, \dots, u_p$.

Se $M \in M(d, \mathbb{R})$, definimos a transformação linear $\Lambda^p M$ (ou $M^{\wedge p}$) por

$$\left(\Lambda^p M \right) \left(u_1 \wedge \dots \wedge u_p \right) = Mu_1 \wedge Mu_2 \wedge \dots \wedge Mu_p.$$

$\Lambda^p M$ denota a transformação linear ou sua matriz associada à base $(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p})$. Definimos ainda:

$$\|\Lambda^p M\| = \sup \left\{ \left\| \left(\Lambda^p M \right) w \right\| : w \in \Lambda^p \mathbb{R}^d \text{ e } \|w\| = 1 \right\}.$$

Note que

$$\Lambda^p(MN) = \left(\Lambda^p M \right) \left(\Lambda^p N \right) \text{ e } \|\Lambda^p MN\| \leq \|\Lambda^p M\| \cdot \|\Lambda^p N\|.$$

Se K é uma matriz ortogonal então

$$\begin{aligned} \left\langle K u_1 \wedge \dots \wedge K u_p, K v_1 \wedge \dots \wedge K v_p \right\rangle &= \det \left\{ \langle K u_i, K v_j \rangle \right\} = \\ &= \det \left\{ \langle u_i, v_j \rangle \right\}, \end{aligned}$$

portanto $\Lambda^p K$ é ortogonal.

Lema 5: Seja M uma matriz em $M(d, \mathbb{R})$, e $a_1(M) \geq a_2(M) \geq \dots \geq a_d(M) \geq 0$ as raízes dos auto-valores de $M^* M$. Então para todo p , $1 \leq p \leq d$:

$$\|\Lambda^p M\| = a_1(M) a_2(M) \dots a_p(M).$$

Demonstração: Tome a decomposição polar $M = KAU$, onde $K, U \in O(d, \mathbb{R})$ e $A = \text{diag} [a_1(M), \dots, a_d(M)]$. Como $\Lambda^p K$ e $\Lambda^p U$ são isometrias em $\Lambda^p \mathbb{R}^d$, então

$$\|\Lambda^p M\| = \left\| \left(\Lambda^p K \right) \left(\Lambda^p A \right) \left(\Lambda^p U \right) \right\| = \|\Lambda^p A\|,$$

mas

$$\left(\Lambda^p A \right) \left(e_{11} \wedge \dots \wedge e_{1p} \right) = a_{11}(M) \cdot \dots \cdot a_{1p}(M) e_{11} \wedge \dots \wedge e_{1p},$$

portanto

$$\begin{aligned}\|A^p A\| &= \sup \left\{ a_{i_1}(M) \cdot \dots \cdot a_{i_p}(M); 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d \right\} = \\ &= a_i(M) \cdot \dots \cdot a_p(M) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

APÊNDICE 2

A demonstração do lema III.3.1 que apresentamos aqui é exatamente a mesma da que temos em [2], lema II.2.1 a menos de algumas explicações complementares. Para comodidade do leitor vamos reenunciar esse lema:

Lema III.3.1: Seja G um semi-grupo topológico agindo em um espaço topológico localmente compacto B que satisfaz o 2º axioma da enumerabilidade. Considere uma sequência $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. em G com distribuição comum μ . Se ν é uma distribuição em B μ -invariante então para quase todo ω existe uma probabilidade ν_ω em B tal que a sequência

$$\left(X_1(\omega) X_2(\omega) \dots X_n(\omega) g \nu \right)_{n \geq 1}$$

converge fracamente para ν_ω para quase todo g com respeito à medida $\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \mu^n$. Além disso, para toda função mensurável limitada f em B

$$\int f \, d\nu = \mathbb{E} \left[\int f \, d\nu_\omega \right].$$

Demonstração: Seja f uma função real contínua mensurável e limitada em B e $F : G \longrightarrow \mathbb{R}$ as médias da f transladada por g :

$$F(g) = \int_B f(g \cdot x) \, d\nu(x) \quad , \quad g \in G.$$

Definimos $M_n(\omega) = X_1(\omega) X_2(\omega) \dots X_n(\omega)$. Se chamamos de $\mathcal{F}_n$ a σ -álgebra gerada por $X_1, \dots, X_n$ então

$$E\left[F(M_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right] = \int F(M_n g) \, d\mu(g) \quad , \quad (1)$$

com efeito, se E for um elemento de $\mathcal{F}_n$ então

$$\begin{aligned} \int_E F(X_1(\omega) \dots X_{n+1}(\omega)) \, dP(\omega) &= \\ \int_E F(X_1(\omega) \dots X_n(\omega) g) \, d(P \otimes \mu)(\omega, g) \end{aligned}$$

pela independência dos X_i 's. Pelo Teorema de Fubini a integral acima é igual a

$$\int_E \left[\int F(M_n(\omega) g) \, d\mu(g) \right] dP(\omega) \quad .$$

A partir de (1) e da definição da função F temos, (lembrar que ν é μ -invariante):

$$\begin{aligned} E\left[F(M_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right] &= \iint f(M_n g \cdot x) \, d\mu(g) \, d\nu(x) \\ &= \int f(M_n \cdot x) \, d(\mu * \nu)(x) \\ &= \int f(M_n \cdot x) \, d\nu(x) \\ &= F(M_n) \end{aligned}$$

Isto é, a sequência $\left\{ F(M_n), n \geq 1 \right\}$ é um martingale, como é limitado, converge quase sempre a uma função Γ_f (ver por exemplo seção 2.2 de [11]) e além disso

$$\mathbb{E}\left[\Gamma_f\right] = \mathbb{E}\left[F\left(M_1\right)\right] = \iint f\left(X_1 \cdot x\right) d\mu\left(X_1\right) d\nu(x) = \int f(x) d\nu(x) . \quad (2)$$

Para todo $k, r \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|F\left(M_{k+r}\right) - F\left(M_k\right)\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[F\left(M_{k+r}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[F\left(M_k\right)^2\right] - 2 \mathbb{E}\left[F\left(M_{k+r}\right)F\left(M_k\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[F\left(M_{k+r}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[F\left(M_k\right)^2\right] . \end{aligned}$$

Portanto, por cancelamento telescópico

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \mathbb{E}\left[\left|F\left(M_{k+r}\right) - F\left(M_k\right)\right|^2\right] &\leq \sum_{k=1}^r \mathbb{E}\left[F\left(M_k\right)^2\right] + \sum_{k=1}^r \mathbb{E}\left[F\left(M_{k+r}\right)^2\right] \\ &\leq 2r \sup_{x \in G} |F(x)|^2 . \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\int \left|F\left(M_k g\right) - F\left(M_k\right)\right|^2 d\lambda(g)\right] &= \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r-1} \mathbb{E}\left[\int \left|F\left(M_k g\right) - F\left(M_k\right)\right|^2 d\mu^r(g)\right] &= \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r-1} \mathbb{E}\left[\left|F\left(M_{k+r}\right) - F\left(M_k\right)\right|^2\right] &\leq \sum_{r=0}^{\infty} r 2^{-r} \sup_{x \in G} |F(x)|^2 . \end{aligned}$$

Segue então que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| F(M_k g) - F(M_k) \right|^2 < \infty \quad \text{q.s.}$$

e portanto a sequência $\left\{ F(M_k g), k \geq 1 \right\}$ também converge a Γ_f , $P \otimes \lambda$ - quase sempre.

Dada uma sequência $\left\{ f_q, q \geq 1 \right\}$ densa no espaço separável $C_0(B)$ das funções contínuas em B com suporte compacto, existe um subconjunto mensurável $A \subset \Omega \times G$ com $(P \otimes \lambda)(A) = 1$ tal que para todo $q \geq 1$ e $(\omega, g) \in A$:

$$\int f_q \left(M_n(\omega) g \cdot x \right) d\nu(x) \longrightarrow \Gamma_{f_q}(\omega).$$

Chamemos de $\nu_{\omega, g}$ um ponto limite de

$$\left\{ M_n(\omega) g \nu, n \geq 1 \right\}$$

(ver lema II.2.9), então

$$\int f_q d\nu_{\omega, g} = \Gamma_{f_q}(\omega),$$

isto é, $\nu_{\omega, g}$ não depende de g e é o limite de $M_n(\omega) g \nu$, será chamado então de ν_{ω} . Por fim, pela equação (2):

$$\int f_q d\nu = E \left[\Gamma_{f_q} \right],$$

então para toda função mensurável e limitada

$$\int f d\nu = E \left[\int f d\nu_{\omega} \right],$$

isto é, ν_{ω} tem que ser uma medida de probabilidade quase sempre.

BIBLIOGRAFIA :

- [1]. ARNOLD, L. e WIHSTUTZ, V., *Lyapunov Exponents: a Survey*, Lect. Notes in Math. n°1186. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1986.
- [2]. BOUGEROL, P. e LACROIX, J., *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operator*, Progress in Probability and Statistics 8, Birkhauser, 1985.
- [3]. BREZIS, H., *Analyse Fonctionnelle - Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [4]. DERRIENNIC, M.Y., *Sur le Théorème Ergodique Sous-Additif*, C.R.A.S. Paris, 281A, p. 985-988, 1975.
- [5]. GARSIA, A.M., *A Simple Proof of E. Hopf's Maximal Theorem*, J. of Math. Mech., 14, p. 381-382, 1965.
- [6]. HALMOS, P.R., *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Springer Verlag, New York, 1974.
- [7]. HALMOS, P.R., *Lectures on Ergodic Theory*, Chelsea Publishing Company, New York, 1956.
- [8]. IKEDA, N. e WATANABE, S., *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland Publishing Company, 1989.
- [9]. LEDRAPPIER, F., *Quelques Propriétés des Exposants Caractéristiques*, in "Ecole d'Été de Saint-Flour 12-1982", ed. P.L. Hennequin. Lect. Notes in Math. n°1097. Springer Verlag. Berlin, heidelberg, New York, 1984.

- [10]. LE PAGE, E., *Théorèmes Limites pour les Produits de Matrices Aléatoires*, in "Probability Measures on Groups", ed. H. Heyer. Lect. Notes in Math. n° 928. Springer Verlag. Berlin, heidelberg, New York, 1984.
- [11]. LIPTZER, R.S. e SHIRYAEV, A.N., *Statistics of Random Processes I - General Theory*. Springer - Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.
- [12]. LOOMIS, L.H. e STERNBERG, S., *Advanced Calculus*, Addison-Wesley, Series in Mathematics, 1968.
- [13]. ROYDEN, H.L., *Real Analysis*, MacMillan Company, 1968.
- [14]. RUELLE, D., *Ergodic Theory of Differentiable Dynamical Systems*, I.H.E.S. - Publ. Math. n° 50, 1979.