Existência de Soluções das Equações de Navier-Stokes Através de Soluções Aproximadas Pelo Método de Aproximações de Galerkin Espectral

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. ELVA ELIANA ORTEGA TORRES e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 27 de Julho de 1994.

Prof. Dr. ____________________
José Luiz Boldrini

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em MATEMÁTICA APLICADA.

Existência de Soluções das Equações de Navier-Stokes Através de Soluções Aproximadas Pelo Método de Aproximações de Galerkin Espectral

Elva Eliana Ortega Torres

IMECC
Matemática Aplicada
Orientador: José Luiz Boldrini
Mestrado em Matemática Aplicada

Aos meus pais
e irmãos.

Agradecimentos

Ao Professor José Luiz Boldrini pela sua orientação.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Conteúdo

Introdução

Um dos objetivos deste trabalho é a construção de soluções clássicas das equações não estacionárias de Navier-Stokes, em domínios tri-dimensionais com contorno regular através de soluções aproximadas. O objetivo central será a obtenção de estimativas de erro para tais soluções aproximadas.

A prova da existência de soluções das equações de Navier-Stokes é feita com a ajuda das aproximações de Galerkin, as quais são construídas sobre a base das autofunções correspondentes ao problema linear de valor de contorno de Stokes (método de Galerkin Espectral). A parte central de tal prova está em obter estimativas para a sequência das aproximações de Galerkin, a partir das quais se pode inferir a sua convergência (ou de pelo menos a convergência de uma subsequência das aproximações), assim como algum grau de regularidade da solução resultante.

A seguir faremos um breve histórico dos resultados conhecidos sobre este problema.

O primeiro a usar este tipo de aproximação foi Hopf [10] que obteve um teorema de existência para o problema de valor de contorno inicial baseado em uma estimativa energia para as aproximações de Galerkin. Mas, baseado nesta simples estimativa, o teorema de existência de Hopf prova pouca regularidade da solução e é insuficiente para provar a unicidade da solução se o domínio é tri-dimensional. Para melhorar esta situação Kiselev e Ladyzhenskaya [11], no caso de dados iniciais mais regulares obtiveram uma segunda estimativa para as aproximações, a qual fornece a necessária regularidade da solução para obter também um teorema de unicidade. Esta segunda estimativa se mantem apenas localmente no tempo, a menos que os dados sejam pequenos ou então o domínio bi-dimensional.

O Teorema de existência de Prodi é baseado em uma estimativa completamente diferente das de Hopf e Kiselev-Ladyzhenskaya. Esta estimativa é determinada quando autofunções do operador de Stokes são usadas como uma base para as aproximações de Galerkin. Esta estimativa é menos elementar que as de Hopf e Kiselev-Ladyzhenskaya pois precisa da teoria de regularidade $\mathbf{L}^2$ para as equações de Stokes, associadas ao problema.

Assim, como as estimativas de Hopf e Kiselev-Ladyzhenskaya, as estimativas de Prodi mantêm-se apenas localmente no tempo levando para uma solução generalizada. A regularidade clássica de tal solução generalizada foi provada usando resultados da teoria de potencial para as equações de Navier-Stokes [6], [12].

Melhores resultados nestas direções foram obtidos por Rautmann [13] e Heywood [8], [9], e a nossa dissertação constará de um detalhamento de parte destes trabalhos ([8] e [13]).

No Capítulo 1 faremos uma revisão sucinta dos resultados básicos necessários e fixaremos a notação. As definições serão indicadas como tais e os resultados importantes serão enunciados como teoremas, lemas e proposições. Assim sendo, este capítulo serve tanto de preparo para os capítulos posteriores, como de lista conveniente de resultados para futuras referências.

No Capítulo 2 vamos mostrar como através de estimativas adicionais para as aproximações de Galerkin podemos obter a regularidade clássica da solução diretamente. O único resultado que será necessário para isto será a validade da estimativa $\mathbf{L}^2$ das derivadas segundas das soluções do Problema de Stokes estacionário associado ao problema não linear.

O procedimento começa com a introdução de três sequências infinitas de desigualdades diferenciais para as aproximações de Galerkin. Para prosseguir com a integração destas desigualdades, é necessário trabalhar com as três sequências simultaneamente, usando recursivamente as estimativas já obtidas por integração das desigualdades de uma sequência para integrar as da sequências seguintes.

Para se livrar da necessidade de condições de compatibilidade para os dados iniciais, as quais para as equações de Navier-Stokes são de natureza não local e muito complicadas, estas sequências de desigualdades diferenciais são integradas sobre intervalos de tempo da forma $[\varepsilon, T)$ com $\varepsilon > 0$. Para isto é necessário obter estimativas iniciais para $t = \varepsilon$, as quais são determinadas usando outra sequência de identidades e desigualdades para as aproximações de Galerkin.

Combinando estas estimativas para as aproximações de Galerkin, deduz-se a existência de uma solução $\mathbf{u} \in C^\infty((0,T), \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap L^\infty([0,T'], \mathbf{H}^2(\Omega))$ onde Ω é o domínio espacial e $T' < T$. Com este grau de regularidade obtido para a solução pode-se obter então a regularidade clássica da solução baseados apenas na regularidade $\mathbf{L}^2$ para as Equações de Stokes, e então ter $\mathbf{u} \in C^\infty(\Omega \mathrm{x} (0,T))$.

A seguir, desde que as propriedades do Problema de Stokes e de suas autofunções são relativamente bem conhecidas, pode-se perguntar: quão bem uma solução do problema não estacionário de Navier-Stokes pode ser aproximada usando como base as autofunções do operador de Stokes?.

No Capítulo 3, seguindo Rautmann [13], será mostrado que as normas $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{H}^1$ das diferenças entre a solução do Problema de Navier-Stokes e as soluçõesaproximadas são estimadas em termos dos inversos dos autovalores do Problema de Stokes associado. Desde que estimativas assintóticas de autovalores em casos gerais são conhecidas, teremos estimativas de erro assintóticas tendendo a zero quando a dimensão do subespaço de aproximações vai a infinito.

Seguiremos Rautmann [13] e mostraremos que para as aproximações de Galerkin da equação de Navier-Stokes e também para suas derivadas de qualquer ordem com respeito ao tempo podem ser deduzidas estimativas de erro se estas aproximações são formadas com as autofunções do correspondente Problema de Stokes (método de Galerkin Espectral). Tais estimativas de erro serão obtidas de uma desigualdade diferencial para normas adequadas da diferença de duas aproximações de Galerkin, passando então ao limite.

Capítulo 1

Preliminares

Para facilitar a leitura e fixar a notação faremos neste capítulo uma breve revisão dos principais conceitos e resultados a serem usados. Estes resultados podem ser encontrados nas referências indicadas abaixo.

1.1 Definições e Resultados Básicos

Neste trabalho denotaremos sempre por Ω um domínio limitado no espaço tridimensional $\Re^3$.

Definição 1.1 *Uma subvariedade M^m de classe C^k de uma variedade N^n de classe C^r $(r \geq k)$, é um subconjunto $M \subset N$ com a topologia induzida pela de N e dotado de uma estrutura de variedade C^k tal que a aplicação de inclusão $i : M \longrightarrow N$ é uma imersão de classe C^k.*

Definição 1.2 *O contorno de Ω, denotado por $\partial\Omega$, diz-se uniformemente de classe C^k $(k = 2$ ou $3)$ se:*
i- É possível escolher coordenadas cartesianas locais (y_1, y_2, y_3) numa vizinhança B_ξ de cada ponto $\xi \in \partial\Omega$, tal que $\partial\Omega \cap B_\xi$ é representado por uma função $y_3 = F(y_1, y_2, \xi)$ de classe C^k.
ii- As vizinhanças B_ξ podem ser escolhidas como bolas, todas do mesmo tamanho, com respectivos centros ξ, e tais que as derivadas até a ordem k de cada função $F(.,.,\xi)$ sejam limitadas por uma constante independente de ξ.

Observação : Se $\Omega \subset \Re^3$ é limitado e $\partial\Omega$ é uma subvariedade de classe C^3 então automaticamente $\partial\Omega$ é uniformemente de classe C^3.

Definição 1.3 *Dois vetores x e y, num espaço V com produto interno (.,.) são ditos ortogonais se (x,y)=0. A coleção* $\{x_i\}_{i\epsilon\Lambda}$ *de vetores em V onde* Λ *é um conjunto de índices é chamado um conjunto ortonormal se* $(x_i, x_i) = 1$ *para todo* $i\epsilon\Lambda$, *e* $(x_i, x_j) = 0, i, j\epsilon\Lambda,\ i \neq j$.

Proposição 1.1 (Desigualdade de Bessel) *Seja* $\{x_n\}_{n=1}^{N}$ *um conjunto ortonormal num espaço V com produto interno. Então para todo* $x \epsilon V$:

$$\|x\|_V^2 \geq \sum_{n=1}^{N} |(x, x_n)|^2.$$

Ver [4, pag 188].

Proposição 1.2 (Desigualdade de Schwarz) *Se x e y são dois vetores num espaço com produto interno V, então*

$$|(x, y)| \leq \|x\|_V \|y\|_V.$$

Ver [14, pag 38].

Definição 1.4 (Espaço separável) *Se diz-se que S é um espaço separável se existe um conjunto A contido em S, tal que A é enumerável e denso em S.*
Ver [16, pag 64].

Definição 1.5 (Espaço de Hilbert) *Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno e completo com métrica definida pelo seu produto interno.*
Ver [16, pag 118].

Definição 1.6 (Sistema ortonormal completo) *Seja H um espaço de Hilbert, A um sistema ortonormal em H. Diz-se que A é um sistema ortonormal completo se não existe outro sistema ortonormal em H que o contenha estritamente.*

Proposição 1.3 *Um conjunto ortonormal de vetores em um espaço com produto interno é completo se e somente se é uma base.*
Ver [4, pag 244].

Teorema 1.1 *Todo espaço de Hilbert tem uma base ortonormal.*
Ver [14, pag 44].

Teorema 1.2 *Um espaço de Hilbert é separável se e somente se tem uma base ortonormal enumerável.*
Ver [14, pag 47].

Definição 1.7 (Função mensurável) *Sejam X um espaço mensurável, Y um espaço topológico e f uma aplicação de X em Y, f diz-se mensurável se $f^{-1}(V)$ é um conjunto mensurável em X para todo aberto V em Y.*

Definição 1.8 (Equicontinuidade) *Seja X um subconjunto de um espaço métrico, e seja F um espaço de Banach. Seja Φ um subconjunto do espaço de aplicações contínuas $C(X,F)$. Diz-se que Φ é (ou os seus elementos são) equicontínuo no ponto $x_0 \in X$ se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que sempre que $x \in X$ e $d(x,x_0) < \delta$, então*

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \qquad \forall\, f \in \Phi.$$

Dizemos que Φ é equicontínuo em X, se é equicontínuo em cada ponto de X.

Teorema 1.3 (De Caratheódory) *Seja f uma função definida sobre R, mensurável em t e x, contínua em x para cada t fixo. Se existe uma função integrável m sobre um intervalo $|t-\tau| \leq a$ tal que $|f(x,t)| \leq m(t)$, $\forall\,(x,t) \in R$, então existe uma solução φ de:*

$$\begin{aligned} x' &= f(x,t) \\ x(\tau) &= \xi \end{aligned}$$

sobre algum intervalo $|t-\tau| \leq \beta$, $(\beta > 0)$.
Ver [3, pag 43].

Teorema 1.4 (Teorema de Ascoli-Arzelá) *Um subconjunto de funções em $C[a,b]$, com a norma do supremo, é relativamente compacto se e sómente se é uniformemente limitado e equicontínuo sobre $[a,b]$.*
Ver [4, pag 156].

Agora introduz-se um principio abstrato de Analise Funcional, o qual assegurará em certas circunstancias a existência e a unicidade de uma solução fraca para problemas variacionais.
Assume-se que H é um espaço de Hilbert, com a norma $\|.\|$ e o produto interno $(.,.)$, e $<.,.>$ denota a dualidade de H com o seu espaço dual.

Teorema 1.5 (Lema de Lax-Milgram) *Seja $B : H\text{x}H \longrightarrow \Re$ uma aplicação bilinear, para o qual existêm constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que*

$$|B(u,v)| \leq \alpha\|u\|\|v\| \;, \quad \forall\, u,v \in H \quad e$$

$$\beta\|u\|^2 \leq B(u,u) \;, \quad \forall\, u \in H.$$

Seja também $f : H \longrightarrow \Re$ um funcional linear limitado sobre H. Então existe uma única $u \in H$ tal que

$$B(u,v) = <f,v> \qquad \forall\, v \in H.$$

[2, pag 84].

Definição 1.9 (Convergência fraca) *Uma sequência $\{x_n\}$ num espaço de Hilbert H converge fracamente para $x \in H$, se $\forall f \in H'$ a sequência de números $\{(f, x_n)\}$ converge para (f, x).*
[2, pag 35].

Proposição 1.4 *Seja H um espaço de Hilbert. Seja $\{x_n\}$ uma sequência em H, tal que $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em H. Então $\|x_n\|$ é limitado e*

$$\|x\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|.$$

[2, pag 35].

Proposição 1.5 *Seja H um espaço de Hilbert. Seja $\{x_n\}$ uma sequência em H, tal que $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em H e $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$. Então*

$$\|x_n - x\| \to 0 \ , \ em \ H.$$

[2, pag 52].

Definição 1.10 (Operador Compacto) *Sejam X e Y espaços normados, um operador T definido sobre X em Y é compacto se leva todo conjunto limitado de X em um conjunto relativamente compacto de Y. Equivalentemente, T é compacto se e somente se para toda sequência limitada $\{x_n\} \subset X$, $\{Tx_n\}$ tem uma subsequência convergente em Y.*
[14, pag 199].

Uma importante propriedade dos operadores compactos é dada por

Teorema 1.6 *Um operador compacto aplica sequências fracamente convergentes em sequências convergentes em norma (isto é, fortemente convergentes).*
Ver [14, pag 199].

A seguir descreveremos os espaços funcionais a serem usados neste trabalho.
Seja $p \in \Re$, $1 \leq p < \infty$; temos os seguintes espaços clássicos de funções:

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \{u : \Omega \longrightarrow \Re \textit{ função mensurável} \ ; \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\} \\ \mathbf{L}^p(\Omega) &= (L^p(\Omega))^3 \\ L^\infty(\Omega) &= \{u : \Omega \longrightarrow \Re \ ; \ u \textit{ função essencialmente limitada}\} \\ \mathbf{L}^\infty(\Omega) &= (L^\infty(\Omega))^3 \end{aligned}$$

Observe-se que os elementos de $\mathbf{L}^p(\Omega)$ são na verdade classes de equivalência de funções mensuráveis(com a medida de Lebesque), onde duas funções são equivalentes se elas são iguais quase sempre sobre Ω.
Tais $\mathbf{L}^p(\Omega)$ são um espaço de Banach com as normas:

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbf{L}^p} &= (\int_\Omega \|u(x)\|^p dx)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{\mathbf{L}^\infty} &= \sup_{x \epsilon \Omega} \text{ ess } \|u(x)\| \end{aligned}$$

onde $\|.\|$ é a norma Euclidiana, isto é:

$$\|u(x)\| = (\sum_{i=1}^{3} |u_i(x)|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Para $p = 2$, $\mathbf{L}^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável com o produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i(x)v_i(x)\ dx.$$

Consideremos agora os funcionais $\|.\|_{m,p}$, para m um inteiro não negativo e $1 \leq p \leq \infty$, definidos por:

$$\|u\|_{m,p} = (\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} \quad se\ 1 \leq p < \infty \tag{1.1}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \tag{1.2}$$

para qualquer função u para o qual o lado direito de (1.1) e (1.2) faz sentido, onde

$$\|D^\alpha u\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = \int_\Omega \|D^\alpha u(x)\|^p\ dx = \int_\Omega (\sum_{i=1}^{3} |D^\alpha u_i(x)|^2)^{\frac{p}{2}}.$$

Consideremos também os espaços:

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) &= \{u \,\epsilon\, L^p(\Omega)\ ;\ D^\alpha u \,\epsilon\, L^p(\Omega)\ \ para\ \ 0 \leq |\alpha| \leq m\} \\ \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) &= (W^{m,p}(\Omega))^3 \end{aligned}$$

onde $D^\alpha u$ é a derivada parcial fraca (ou distribuicional), isto é, $D^\alpha u \,\epsilon\, \mathbf{L}^p(\Omega)$ e satisfaz

$$\int_\Omega u(x)D^\alpha \phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u(x)\phi(x)dx \quad \forall\, \phi \,\epsilon\, \mathcal{D}(\Omega),$$

com

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\phi \,\epsilon\, (C^\infty(\Omega))^3\ ; suporte\ \phi \subseteq K\ para\ algum\ compacto\ K \subseteq \Omega\}.$$

Os espaços $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ dotados com a norma (1.1) ou (1.2) são chamados espaços de Sobolev. No caso $p = 2$ denotamos com:

$$\begin{aligned} H^m(\Omega) &= W^{m,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)\ ;\ D^\alpha u \in L^2(\Omega)\,,\ |\alpha| \leq m\} \\ \mathbf{H}^m(\Omega) &= \mathbf{W}^{m,2}(\Omega). \end{aligned}$$

$\mathbf{H}^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável com o produto interno:

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} D^\alpha u_i(x) D^\alpha v_i(x)\ dx,$$

onde (u, v) é o produto interno em $\mathbf{L}^2(\Omega)$.
Como estamos considerando $\Omega \subset \Re^3$, a norma sobre $\mathbf{H}^m(\Omega)$ é:

$$\|u\|_{\mathbf{H}^m} = \Big(\sum_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq m} \int_\Omega \|\partial_x^\alpha u(x)\|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\|.\|$ a norma Euclidiana em $\Re^3$ e

$$\partial_x^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} (\partial x_2)^{\alpha_2} (\partial x_3)^{\alpha_3}} u(x_1, x_2, x_3).$$

Como $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathbf{H}^m(\Omega)$ definimos:

$$\mathbf{H}_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\mathbf{H}^m(\Omega)}.$$

Em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ as normas $\|u\|_{\mathbf{H}^1}$ e $\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}$ são equivalentes, pois como Ω é limitado vale a desigualdade de Poincaré-Friedrichs:

$$Se\ u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \implies \|u\|_{\mathbf{L}^2} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2},$$

a constante C_Ω depende apenas de Ω.

Note que, como $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, então define-se

$$\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \sum_{i=1}^{3} \|\nabla u_i\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \|\nabla u_i(x)\|^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega |\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|^2.$$

No seguinte teorema serão enunciados as desigualdades de Sobolev em domínios limitados:

Teorema 1.7 *Seja Ω um domínio limitado $\subset \Re^N$ com $\partial\Omega$ de classe C^3, e seja u qualquer função em $\mathbf{W}^{m,r}(\Omega) \cap \mathbf{L}^q(\Omega)$, $1 \leq r, q \leq \infty$, $m \geq 1$. Para qualquer inteiro j, $0 \leq j < m$ e qualquer número α no intervalo $\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$,*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{m} + \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{N}\right) + (1-\alpha)\frac{1}{q}$$

$$\begin{aligned} &Se \quad m - j - N/r \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\|u\|_{W^{m,r}(\Omega)})^{\alpha}(\|u\|_{L^q(\Omega)})^{1-\alpha} \\ &Se \quad m - j - N/r \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\|u\|_{W^{m,r}(\Omega)})^{\frac{j}{m}}(\|u\|_{L^q(\Omega)})^{1-\frac{j}{m}} \end{aligned}$$

a constante C depende apenas de Ω, r, q, m, j, α.
Ref. [5, pag 27].

Mencionaremos os teoremas de imersão de Sobolev, os quais serão muito usados . Considera-se $\partial\Omega$ localmente Lipschitz (se $\partial\Omega$ é considerado de classe C^1 isto implica que $\partial\Omega$ é localmente Lipschitz).

Teorema 1.8 *Seja m um inteiro, $m \geq 1$ e seja p qualquer número finito, $p \geq 1$, e N a dimensão do espaço. Então*

$$\begin{aligned} &Se \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) \subset \mathbf{L}^q(\Omega), \quad onde \quad p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} \\ &também: \|u\|_{L^q(\Omega)} \;\leq\; C(m,p,N,\Omega)\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \\ &Se \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) \subset \mathbf{L}^q(\mathcal{O}), \text{ para qualquer conjunto limitado } \mathcal{O} \subset \bar{\Omega} \text{ e } \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, q \in [1,\infty) \\ &também: \|u\|_{L^q(\mathcal{O})} \;\leq\; C(m,p,N,q,\mathcal{O},\Omega)\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \\ &Se \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) \subset \mathbf{C}(\mathcal{O}), \; \mathcal{O} \text{ é qualquer conjunto limitado, } \mathcal{O} \subset \bar{\Omega} \\ &também: \|u\|_{C^0(\mathcal{O})} \;\leq\; C(m,p,N,\mathcal{O},\Omega)\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

As inclusões acima são contínuas.
Ref. [17, pag 159], [1, pag 97].

Em particular, no caso $m = 1$, com Ω limitado e $\partial\Omega$ de classe C^1 tem-se:

$$\begin{aligned} &Se \;\; 1 \leq p < N \;\Rightarrow\; \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \subset \mathbf{L}^q(\Omega), \;\; \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \\ &Se \qquad p = N \;\Rightarrow\; \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \subset \mathbf{L}^q(\Omega), \;\; \forall\, q \in [p,\infty) \\ &Se \qquad p > N \;\Rightarrow\; \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \subset \mathbf{L}^{\infty}(\Omega) \end{aligned}$$

Nosso interesse particular é quando $p = 2$, $m = 1$, e $N = 3$, e $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Então temos que $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $\mathbf{L}^6(\Omega)$ e

$$\|u\|_{\mathbf{L}^6} \leq C(\Omega)\|u\|_{\mathbf{H}^1} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2} \tag{1.3}$$

Imersões compactas (que têm muitas importantes aplicações em analise), são descritas no seguinte teorema:

Teorema 1.9 (Riellich-Kondrachov) *Suponha Ω limitado, $\partial\Omega$ de classe C^1. Sejam j, m inteiros, $j \geq 0$, $m \geq 1$, e seja $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\begin{aligned}
&Se \;\; mp < N \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{W}^{j+m,p}(\Omega) \subset \mathbf{W}^{j,q}(\Omega), \;\; 1 \leq q < \frac{Np}{N - mp} \\
&Se \;\; mp = N \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{W}^{j+m,p}(\Omega) \subset \mathbf{W}^{j,q}(\Omega), \;\; 1 \leq q < \infty \\
&Se \;\; mp > N \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{W}^{j+m,p}(\Omega) \subset \mathbf{W}^{j,q}(\Omega), \;\; 1 \leq q < \infty \;\; e \\
&\qquad\qquad\qquad\;\; \mathbf{W}^{j+m,p}(\Omega) \subset \mathbf{C}^j(\bar{\Omega})
\end{aligned}$$

As inclusões acima são compactas.
Ref. [1, pag 144].

Em particular, se $m = 1$, temos as seguintes imersões compactas:

$$\begin{aligned}
&Se \; 1 \leq p < N \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \subset \mathbf{L}^{q^*}(\Omega), \text{ com } q^* \in [1, q), \text{ e } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \\
&Se \qquad p = N \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \subset \mathbf{L}^q(\Omega), \;\; \forall q \in [1, \infty) \\
&Se \qquad p > N \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \subset \mathbf{C}(\bar{\Omega})
\end{aligned}$$

Ref. [2, pag 169].

Teorema 1.10 (Desigualdade de Hölder Generalizada) *Sejam $f_1, f_2, ..., f_k$ funções tais que $f_i \in \mathbf{L}^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$ onde*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1$$

então o produto $f = f_1 f_2 ... f_k \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{\mathbf{L}^p} \leq \|f_1\|_{\mathbf{L}^{p_1}} \|f_2\|_{\mathbf{L}^{p_2}} ... \|f_k\|_{\mathbf{L}^{p_k}}.$$

Ver [2, pag 52].

Em particular, se $f \in \mathbf{L}^p(\Omega) \cap \mathbf{L}^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $f \in \mathbf{L}^r(\Omega)$, $\forall r : p \leq r \leq q$ e tem-se a desigualdade de interpolação:

$$\|f\|_{\mathbf{L}^r} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^p}^{\alpha} \|f\|_{\mathbf{L}^q}^{1-\alpha} \quad \text{com } \alpha \in [0,1] \text{ satisfazendo } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}.$$

Ver [2, pag 57].
Usando esta desigualdade de interpolação com $\alpha = \frac{1}{4}$, $p = 2$, e $q = 6$, vem para $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ e Ω limitado

$$\|u\|_{\mathbf{L}^4} \leq \|u\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{4}} \|u\|_{\mathbf{L}^6}^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \|u\|_{\mathbf{L}^4}^4 \leq \|u\|_{\mathbf{L}^2} \|u\|_{\mathbf{L}^6}^3 \leq C_\Omega \|u\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^3.$$

Assim, tem-se que:

$$\|u\|_{\mathbf{L}^4}^4 \leq C_\Omega \|u\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^3. \tag{1.4}$$

Para o estudo das equações de Navier-Stokes é necessária a introdução de outros espaços funcionais. Para isto, dado $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ define-se divergente de u (em coordenadas cartesianas) por:

$$\nabla . u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Considerando $\mathbf{D}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}(\Omega) \ ; \ \nabla . u = 0\}$ definimos os espaços funcionais:

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\mathbf{D}(\Omega)}^{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_1 = \overline{\mathbf{D}(\Omega)}^{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Desde que estamos considerando Ω limitado e $\partial\Omega$ de classe C^3 (o qual implica que $\partial\Omega$ é localmente Lipschitz) $\mathcal{H}_1$ é caracterizado por

$$\mathcal{H}_1 = \{u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \ ; \ \nabla . u = 0\},$$

a prova encontra-se em [17, pag 18].
O complemento ortogonal de $\mathcal{H}_0$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ pode ser caracterizado por

$$\mathcal{H}_0^{\perp} = \{\phi \in \mathbf{L}^2(\Omega) \ ; \ \phi = \nabla p \ \textit{para algum } p \in H^1(\Omega)\},$$

ver [17, pag 15]
Assim, $\mathbf{L}^2(\Omega)$ se expressa como soma direta dos espaços $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_0^{\perp}$, isto é:

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^{\perp},$$

e podemos considerar a projeção ortogonal $\mathbf{P}$, definida por esta soma direta

$$\mathbf{P} : \mathbf{L}^2(\Omega) \to \mathcal{H}_0.$$

Vale, portanto,

$$\mathbf{P}(\nabla g) = 0 \ , \ g \,\epsilon\, H^1(\Omega) \text{ com } \nabla g \,\epsilon\, \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Sempre com Ω limitado contido em $\Re^3$, a aplicação $a : \mathcal{H}_1 x \mathcal{H}_1 x \mathcal{H}_1 \longrightarrow \Re$, tal que $a(f,g,h) = \int_\Omega f(\nabla g)h = (f\nabla g, h)$ é uma forma trilinear bem definida.
De fato; sejam f, g, $h \,\epsilon\, \mathcal{H}_1$. Então, usando o Teorema 1.8, temos

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \mathbf{W}^{1,2}(\Omega) \subset \mathbf{L}^q(\Omega), \quad 2 \leq q \leq 6.$$

Assim, $f_i \,\epsilon\, L^6(\Omega)$, $\frac{\partial g_j}{\partial x_i} \,\epsilon\, L^2(\Omega)$ e $h_j \,\epsilon\, L^6(\Omega) \subset L^3(\Omega)$. Logo, $f_i(\frac{\partial g_j}{\partial x_i})h_j \,\epsilon\, L^1(\Omega)$.
Usando a desigualdade de Hölder, tem-se:

$$|\int_\Omega f_i(\frac{\partial g_j}{\partial x_i})h_j dx| \leq \|f_i\|_{L^6} \|\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\|_{L^2} \|h_j\|_{L^3}.$$

Então

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega f_i(\frac{\partial g_j}{\partial x_i})h_j dx = \int_\Omega f(\nabla g)h = a(f,g,h) \ \text{ é bem definida.}$$

Um resultado interessante sobre a forma trilinear a é dado na seguinte proposição:

Proposição 1.6 *Sobre $(\mathcal{H}_1)^3$ a forma trilinear $a(f,g,h) = \int_\Omega f(\nabla g)h = (f\nabla g, h)$ é limitada e quase-simétrica em g e h, isto é: $a(f,h,h) = 0$.*

Prova
Por definição temos que

$$a(f,g,h) = \int_\Omega f(\nabla g)h = (f\nabla g, h) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega f_i(\frac{\partial g_j}{\partial x_i})h_j dx,$$

então

$$|\int_\Omega f\nabla g h| \leq \sum_{i,j=1}^{3} |\int_\Omega f_i(\frac{\partial g_j}{\partial x_i})h_j| \leq \sum_{i,j=1}^{3} \|f_i\|_{L^6} \|\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\|_{L^2} \|h_j\|_{L^3} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^6} \|\nabla g\|_{\mathbf{L}^2} \|h\|_{\mathbf{L}^3}.$$

Mas $\mathbf{H}^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $\mathbf{L}^6(\Omega)$ e $\mathbf{L}^3(\Omega)$ isto é,

$$\|f\|_{\mathbf{L}^6} \leq C_\Omega \|f\|_{\mathbf{H}^1} \ \text{ e } \ \|h\|_{\mathbf{L}^3} \leq C_\Omega \|h\|_{\mathbf{H}^1} \quad \forall\, f, h \,\epsilon\, \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Portanto

$$|a(f,g,h)| = |\int_\Omega f\nabla g h| \leq C_\Omega \|f\|_{\mathbf{H}^1} \|g\|_{\mathbf{H}^1} \|h\|_{\mathbf{H}^1}.$$

Assim, $a(f,g,h) = \int_\Omega f(\nabla g)h$ é limitado. Além disso, tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(\nabla h)h dx &= \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega f_i(\frac{\partial h_j}{\partial x_i})h_j dx = \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega f_i[\frac{1}{2}\frac{\partial h_j^2}{\partial x_i}]dx \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega(\frac{\partial f_i}{\partial x_i})h_j^2 dx = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_i}{\partial x_i})h_j^2 dx \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega(\nabla . f)h_j^2 dx = 0
\end{aligned}$$

isto é, $a(f,h,h) = 0$.

1.2 O Problema de Stokes: autofunções, projeções e aproximações

Seja Ω um conjunto aberto e limitado no espaço tri-dimensional $\Re^3$ com pontos $x = (x_1, x_2, x_3)$, assumimos que $\partial\Omega$ é uma C^3-subvariedade de $\Re^3$ (Definição 1.1).
Consideremos o seguinte problema de valor de contorno (chamado Problema de Stokes):
Dado $f : \Omega \longrightarrow \Re^3$, achar $u : \Omega \longrightarrow \Re^3$ e $p : \Omega \longrightarrow \Re$ tais que

$$\begin{aligned}
-\Delta u + \nabla p &= f \text{ sobre } \Omega \,\mathrm{x}\, (0,\infty) && (1.5)\\
\nabla . u &= 0 \text{ sobre } \Omega \,\mathrm{x}\, (0,\infty) && (1.6)\\
u|_{\partial\Omega} &= 0. && (1.7)
\end{aligned}$$

Neste problema consideraremos $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ e buscamos $u \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ e $p \in H^1(\Omega)$.
Usando o operador projeção ortogonal $\mathbf{P}$, o Problema de Stokes toma a seguinte forma:

$$-\mathbf{P}\Delta u = \mathbf{P} f. \tag{1.8}$$

Logo se $f \in \mathcal{H}_0$ (isto é, $\mathbf{P}f = f$), estamos procurando uma solução $u \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ da equação:

$$-\mathbf{P}\Delta u = f. \tag{1.9}$$

O operador $-\mathbf{P}\Delta$ é conhecido como operador de Stokes.

Observe-se que $\forall\, w \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ e $\forall\, v \in \mathcal{H}_1$ é satisfeita a equação:

$$\int_\Omega(-\mathbf{P}\Delta w)v dx = \int_\Omega \nabla w \nabla v dx. \tag{1.10}$$

De fato: Se $w \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ então $-\triangle w \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, logo tendo em conta a decomposição $\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_0^{\perp}$, $-\triangle w$ pode se expressar como $-\triangle w = h + \nabla p$ onde $h \in \mathcal{H}_0$ e $\nabla p \in \mathcal{H}_0^{\perp}$, seguidamente aplicando o operador projeção $\mathbf{P}$, temos que $-\mathbf{P}\triangle w = h$ (pois $\mathbf{P}h = h$ e $\mathbf{P}(\nabla p) = 0$). Assim, $-\triangle w = -\mathbf{P}\triangle w + \nabla p$, o qual implica $-\mathbf{P}\triangle w = -\triangle w - \nabla p$.
Então, para $v \in \mathcal{H}_1$ tem-se:

$$\int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle w) v dx = \int_\Omega (-\triangle w - \nabla p) v dx = \int_\Omega (-\triangle w) v dx.$$

Observe-se que $\int_\Omega (\nabla p) v dx = 0$ desde que $v \in \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$ e $\nabla p \in \mathcal{H}_0^{\perp}$. Logo, usando a fórmula de Green na integral do lado direito vem

$$\int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle w) v dx = -\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial \vec{\eta}} + \int_\Omega \nabla w \nabla v dx = \int_\Omega \nabla w \nabla v dx,$$

obtendo-se (1.10).

A seguir descreveremos as propriedades fundamentais do operador de Stokes ($-\mathbf{P}\triangle : \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}_0$), em uma sequência de lemas:

Lema 1.1 *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\Re^3$, $\partial\Omega$ uniformemente de classe C^3. Suponha que $w \in \mathcal{H}_1$ é uma solução generalizada das equações de Stokes $-\triangle w + \nabla p = f$ com $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, isto é:*

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \phi dx = \int_\Omega f.\phi dx \quad \forall\, \phi \in \mathbf{D}(\Omega) \tag{1.11}$$

onde $\nabla w \nabla \phi = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$.
Então w possui segunda derivada em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e são satisfeitas as desigualdades:

$$\begin{aligned} \|D^2 w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq C_\partial(\|\mathbf{P}\triangle w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}) & (1.12)\\ \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} &\leq C_\partial(\|\mathbf{P}\triangle w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}) & (1.13) \end{aligned}$$

onde C_∂ apenas depende da C^3-regularidade de $\partial\Omega$ (não do tamanho de $\partial\Omega$ ou Ω).
Ver [8, pag 647].

A teoria de regularidade consiste de $\mathbf{L}^2(\Omega)$-estimativas da forma geral

$$\|D^2 u\|_{\Omega \cap G''} \leq C\|f\|_{\Omega \cap G'} + C'\|\nabla u\|_{\Omega \cap G'} \tag{1.14}$$

para soluções do Problema de Stokes:

$$\begin{aligned} -\triangle u &= -\nabla p + f & \text{sobre } \Omega \,\mathrm{x}\, (0,\infty),\\ \nabla . u &= 0 & \text{sobre } \Omega \,\mathrm{x}\, (0,\infty),\\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

onde Ω, G', G'', são subconjuntos abertos e limitados de $\Re^3$, com $\bar{G}'' \subset G'$, e

$$\|D^2u\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\|_{\mathbf{L}^2}^2.$$

Das hipóteses do Lema 1.1, w satisfaz (1.11) e usando (1.10) temos:

$$\int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle w)\phi = \int_\Omega \nabla w \nabla \phi = \int_\Omega f\phi \quad \forall\, \phi \epsilon \mathbf{D}(\Omega),$$

então $f = -\mathbf{P}\triangle w$, logo levando isto em (1.14),

$$\|D^2 w\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C(\|\mathbf{P}\triangle w\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}),$$

obtendo-se a desigualdade (1.12).
Agora, substituindo ∇w por ϕ na desigualdade de Sobolev $\|\phi\|_{\mathbf{L}^3} \leq C(\|\nabla\phi\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}\|\phi\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}})$ válida $\forall\, \phi \,\epsilon\, \mathbf{H}^1(\Omega)$ (ver Teorema 1.7) temos

$$\|\nabla w\|_{\mathbf{L}^3} \leq C(\|\nabla(\nabla w)\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}),$$

desde que $\|\nabla(\nabla w)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C_1\|D^2 w\|_{\mathbf{L}^2}$ e usando a desigualdade (1.12) tem-se:

$$\|\nabla w\|_{\mathbf{L}^3} \leq C_2\|D^2 w\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \leq C(\|\mathbf{P}\triangle w\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2})^{\frac{1}{2}}\|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}},$$

como $(a+b)^{\frac{1}{2}} \leq a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ para $a, b \geq 0$, então

$$\|\nabla w\|_{\mathbf{L}^3} \leq C(\|\mathbf{P}\triangle w\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}})\|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} = C(\|\mathbf{P}\triangle w\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}),$$

obtendo-se a desigualdade (1.13).
De (1.13), aplicando a desigualdade de Young, obtem-se:

$$|\nabla w\|_{\mathbf{L}^3} \leq C_\partial(\|\mathbf{P}\triangle w\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}) \tag{1.15}$$

Do Teorema 1.8, $\mathbf{H}^2(\Omega) \subset \mathbf{C}(\Omega)$ é contínua, logo para $w \,\epsilon\, \mathbf{H}^2(\Omega)$ existe $C > 0$ tal que:

$$\sup_\Omega |w| \leq C\|w\|_{\mathbf{H}^2}.$$

Assim, da definição de $\|.\|_{\mathbf{H}^2}$ e a desigualdade (1.12), temse:

$$\sup_\Omega |w| \leq C_{1\partial}(\|\mathbf{P}\triangle w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}^2)^{\frac{1}{2}} \leq C_\partial(\|\mathbf{P}\triangle w\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}) \tag{1.16}$$

Sempre considerando Ω conjunto limitado contido em $\Re^3$ e $\partial\Omega$ de classe C^3, tem-se

Lema 1.2 *A aplicação* $-\mathbf{P}\triangle : \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}_0$ *define sobre* $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$ *um operador positivo definido, simétrico, tendo inverso compacto*

$$(-\mathbf{P}\triangle)^{-1} : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0$$

Prova
$-\mathbf{P}\triangle$ é simétrico em $\mathcal{H}_0$:
De fato, de (1.10) temos que:

$$\int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle f) g dx = \int_\Omega \nabla f \nabla g dx \quad \forall g \in \mathcal{H}_1 \text{ e } \forall f \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega), \tag{1.17}$$

logo se $f, g \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}(-\mathbf{P}\triangle f, g) &= \int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle f) g dx = \int_\Omega \nabla f . \nabla g dx \\ &= \int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle g) f dx = (f, -\mathbf{P}\triangle g).\end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ denso em $\mathcal{H}_0$ tem-se:

$$(-\mathbf{P}\triangle f, g) = (f, -\mathbf{P}\triangle g) \ \ \forall f, g \in \mathcal{H}_0.$$

$-\mathbf{P}\triangle$ é positivo definido:
Como Ω é limitado, usando a desigualdade de Poincaré-Friedrichs para todo $u \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$, $u \neq 0$ temos:

$$\begin{aligned}0 < \|u\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq C_\Omega \|\nabla u\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = C_\Omega \int_\Omega \nabla u \nabla u dx \\ &= C_\Omega \int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle u) u dx = C_\Omega (-\mathbf{P}\triangle u, u),\end{aligned}$$

então $C_\Omega(-\mathbf{P}\triangle u, u) > 0$ com $C_\Omega > 0$. Assim $(-\mathbf{P}\triangle u, u) > 0 \ \ \forall u \neq 0$, o que prova que $-\mathbf{P}\triangle$ é um operador positivo definido.
$-\mathbf{P}\triangle$ é um operador injetor e sobrejetor:
Para cada $f \in \mathcal{H}_0$ existe exatamente um $u \in \mathcal{H}_1$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega f . \phi dx \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_1. \tag{1.18}$$

De fato, definimos $a(u, \phi) = (\nabla u, \nabla \phi)$ para $u, \phi \in \mathcal{H}_1$, então

$$\begin{aligned}|a(u, \phi)| &\leq \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla \phi\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u\|_{\mathbf{H}^1} \|\phi\|_{\mathbf{H}^1} \\ a(u, u) &= \|\nabla u\|^2_{\mathbf{L}^2} \geq C \|u\|^2_{\mathbf{H}^1},\end{aligned}$$

e como $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$ tem-se $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0' \subset \mathcal{H}_1'$. Logo pelo Teorema de Lax-Milgram: para cada $f \in \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0' \subset \mathcal{H}_1'$ existe um único $u \in \mathcal{H}_1$ tal que $a(u,\phi) = (f,\phi) \;\; \forall \phi \in \mathcal{H}_1$, isto é, $\int_\Omega \nabla u \nabla \phi = \int_\Omega f\phi \;\; \forall \phi \in \mathcal{H}_1$.
A seguir, da desigualdade (1.12) do Lema 1.1 tem-se que $D^2 u \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ logo $u \in \mathbf{H}^2(\Omega)$. Então

$$-\Delta u \in \mathbf{L}^2(\Omega) \quad \text{e} \quad -\Delta u = \nabla p + f \quad \text{para algum} \quad p \in H^1(\Omega) \text{ e } f \in \mathcal{H}_0,$$

logo $-\mathbf{P}\Delta u = f$.
Assim, para cada $f \in \mathcal{H}_0$ existe um único $u \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ tal que $-\mathbf{P}\Delta u = f$, mostrando que, sobre $\mathcal{H}_0$ o operador $-\mathbf{P}\Delta$ tem inversa $(-\mathbf{P}\Delta)^{-1} : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$, e desde que $\mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ é denso em $\mathcal{H}_0$, tem-se $(-\mathbf{P}\Delta)^{-1} : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0$.
$(-\mathbf{P}\Delta)^{-1}$ é compacto em $\mathcal{H}_0$:
Pondo $\phi = w$ em (1.11) temos:

$$\int_\Omega \nabla w \nabla w dx = \int_\Omega f.w dx \quad \Rightarrow \quad \|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)},$$

logo, usando a desigualdade de Poincaré - Friedrichs tem-se:

$$\|w\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$

assim,

$$\|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

Além, da equação $\Delta w + \nabla p = -f$ temos $\mathbf{P}\Delta w = -f$ e então $w = (-\mathbf{P}\Delta)^{-1} f$.
Então, $\| -\mathbf{P}\Delta)^{-1} f\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, logo tem-se que $(-\mathbf{P}\Delta)^{-1} : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ é contínua, e como $i : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_0$ é compacta (pois $\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ é compacta), então $(-\mathbf{P}\Delta)^{-1} : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0$ é compacta.

Outro resultado importante sobre as autofunções do Operador de Stokes no espaço $\mathcal{H}_0$ com o produto interno em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ é dado por:

Lema 1.3 *O operador $-\mathbf{P}\Delta$ tem a sequência $\{\lambda_i\}$ de autovalores positivos, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_i \leq ...$, $\lambda_i \longrightarrow \infty$ como $i \longrightarrow \infty$, e as correspondentes autofunções $\{e_i\}$ formam um sistema ortonormal completo em $\mathcal{H}_0$.*

Prova
Do Lema anterior sabemos que $(-\mathbf{P}\Delta)^{-1}$ é linear, contínua, simétrica e compacta, então $\exists\, \beta_1 \geq \beta_2 \geq, ..., \geq \beta_n \geq, ...$, com $\beta_i > 0$ e $\beta_n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ e as correspondentes autofunções $\{e_i\}$ formam um sistema ortonormal completo em $\mathcal{H}_0$. Então

$$-(\mathbf{P}\Delta)^{-1} e_i = \beta_i e_i \Rightarrow \frac{1}{\beta_i} e_i = (-\mathbf{P}\Delta) e_i$$

logo os $\lambda_i = \frac{1}{\beta_i}$ são autovalores do operador $(-\mathbf{P}\triangle)$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq, ..., \leq \lambda_i \leq, ...,$ com $\lambda_i > 0$ e $\lambda_i \longrightarrow \infty$ quando $i \longrightarrow \infty$, e as correspondentes autofunções $\{e_i\}$ formam um sistema ortonormal completo em $\mathcal{H}_0$ para o operador $-\mathbf{P}\triangle$.

Observe-se que as autofunções $\{e_i\}$ são ortogonais em $\mathcal{H}_1$ com produto interno $(\nabla\phi, \nabla\psi)$. De fato, se $i \neq j$

$$(\nabla e_i, \nabla e_j) = \int_\Omega \nabla e_i \nabla e_j = \int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle e_i)e_j = \lambda_i \int_\Omega e_i e_j = 0.$$

Também as autofunções $\{e_i\}$ são ortogonais no produto interno $(\mathbf{P}\triangle\phi, \mathbf{P}\triangle\psi)$, pois para $i \neq j$

$$(\mathbf{P}\triangle e_i, \mathbf{P}\triangle e_j) = (-\lambda_i e_i, -\lambda_j e_j) = \lambda_i \lambda_j (e_i, e_j) = 0.$$

Seja $\mathcal{H}_{0,m}$ o subespaço m-dimensional de $\mathcal{H}_0$, onde $\mathcal{H}_{0,m}$ é gerado pelas m primeiras autofunções $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ do operador $-\mathbf{P}\triangle$, tomados em qualquer ordem correspondentes aos autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_m$.
Denotamos por $\mathbf{P}_m$ a projeção ortogonal de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ sobre $\mathcal{H}_{0,m}$, isto é:

$$\mathbf{P}_m : \mathbf{L}^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}_{0,m},$$

e para qualquer $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$

$$\mathbf{P}_m f = \sum_{i=1}^{m} (f, e_i) e_i = \sum_{i=1}^{m} e_i \int_\Omega f.e_i.$$

Sobre o espaço $\mathcal{H}_1$ com o produto interno $\int_\Omega \nabla f \nabla g$ temos:

Lema 1.4 *As funções $\{\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\}$ formam um conjunto ortonormal completo em $\mathcal{H}_1$. E para qualquer $f \in \mathcal{H}_1$ a sequência $\{\mathbf{P}_i f\}$ converge para f em $\mathcal{H}_1$.*

Prova
Usando a equação $-\mathbf{P}\triangle e_i = \lambda_i e_i$ para as autofunções e_i, $i = 1, 2, ...$, e $\int_\Omega \nabla f \nabla g = \int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle f) g$ tem-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \nabla \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}} &= \int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}) \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}} = \int_\Omega \sqrt{\lambda_i} e_i \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}} \\
&= \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_k}} \int_\Omega e_i e_k = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo $\{\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\}$ é ortonormal em $\mathcal{H}_1$.
Vamos mostrar que $\{\mathbf{P}_i f\}$ converge para f em $\mathcal{H}_1$, isto é:

$$\nabla f = \lim_{i \longrightarrow \infty} \nabla \mathbf{P}_i f.$$

Pelo Lema 1.3, para qualquer $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tem-se: $\mathbf{P}_i f = \sum_{j=1}^{i}(f, e_j)e_j$. Então

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{P}_i f &= \sum_{j=1}^{i}(f, e_j)\nabla e_j = \sum_{j=1}^{i}(f, \frac{-\mathbf{P}\triangle e_j}{\lambda_j})\nabla e_j = \sum_{j=1}^{i}(f, -\mathbf{P}\triangle e_j)\frac{\nabla e_j}{\lambda_j} \\ &= \sum_{j=1}^{i}(\nabla f, \nabla e_j)\frac{\nabla e_j}{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{i}(\nabla f, \frac{\nabla e_j}{\sqrt{\lambda_j}})\frac{\nabla e_j}{\sqrt{\lambda_j}}\end{aligned}$$

Logo, na norma $\mathbf{L}^2(\Omega)$ tem-se

$$\|\nabla f - \nabla \mathbf{P}_i f\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \|\nabla f - \sum_{j=1}^{i}(\nabla f, \nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}})\nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}\|_{\mathbf{L}^2}^2.$$

Logo, mostrar que $\{\nabla \mathbf{P}_i f\}$ converge para ∇f é equivalente a mostrar que

$$\nabla f = \lim_{i \longrightarrow \infty} \sum_{j=1}^{i}(\nabla f, \nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}})\nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}.$$

Primeiro mostra-se que $\{\sum_{j=1}^{i}(\nabla f, \nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}})\nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}\}$ é uma sequência de Cauchy. De fato, se $i \geq m$:

$$\begin{aligned}\|\sum_{j=1}^{i}(\nabla f, \nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}})\nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}} - \sum_{j=1}^{m}(\nabla f, \nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}})\nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= \|\sum_{j=m+1}^{i}(\nabla f, \nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}})\nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &= (\sum_{j=m+1}^{i}(\nabla f, \nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}})\nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}, \sum_{k=m+1}^{i}(\nabla f, \nabla \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}})\nabla \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}) \\ &= \sum_{j=m+1}^{i}|(\nabla f, \nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}})|^2 \longrightarrow 0, \quad \text{quando } m \longrightarrow \infty.\end{aligned}$$

Logo, existe ∇f_1 tal que $\nabla f_1 = \lim_{i \longrightarrow \infty}\sum_{j=1}^{i}(\nabla f, \nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}})\nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}$. Então,

$$\begin{aligned}(\nabla f - \nabla f_1, \nabla \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}) &= \lim_{i \longrightarrow \infty}(\nabla f - \sum_{j=1}^{i}(\nabla f, \nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}})\nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}, \nabla \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}) \\ &= (\nabla f, \nabla \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}) - \lim_{i \longrightarrow \infty}\sum_{j=1}^{i}(\nabla f, \nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}})(\nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}, \nabla \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}) \\ &= (\nabla f, \nabla \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}) - (\nabla f, \nabla \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}) = 0, \ \forall \ \nabla \frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k}}.\end{aligned}$$

Então $\nabla f - \nabla f_1 = 0$, o qual implica que

$$\nabla f = \lim_{i \longrightarrow \infty} \sum_{j=1}^{i} (\nabla f, \nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}) \nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}$$

mostrando assim $\|\nabla f - \nabla \mathbf{P}_i f\|_{\mathbf{L}^2} \longrightarrow 0$ quando $i \longrightarrow \infty$, então $\mathbf{P}_i f \longrightarrow f$ em $\mathcal{H}_1$.

A regularidade das autofunções do Operador de Stokes é estabelecida no seguinte lema.

Lema 1.5 *Seja $\partial\Omega$ uma C^m-subvariedade de $\Re^3$, $m \geq 2$. Então as autofunções $\{e_i\}$ de (1.9) pertencem a $\mathbf{H}^m(\Omega)$.*
Ver [17, pag 33-39].

1.3 Estimativa de Erro para Expansões em Termos das Autofunções do Problema de Stokes

Se aproximarmos elementos de $\mathcal{H}_1$ por suas projeções $\mathbf{P}_m$ sobre o espaço de dimensão finita $\mathcal{H}_{0,m}$ ($\mathbf{P}_m : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{0,m}$), podemos achar estimativas de erro:

Lema 1.6 *Assumimos $f \in \mathcal{H}_1$. Então tem-se a estimativa de erro:*

$$\|f - \mathbf{P}_m f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \|\nabla f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Prova
Usando $\int_\Omega (-\mathrm{P}\Delta u) v = \int_\Omega \nabla u \nabla v$, $-\mathrm{P} \triangle e_i = \lambda_i e_i$ e supondo $\lambda_i \geq \lambda_{m+1}$ para qualquer $i \geq m+1$, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} (\int_\Omega f.e_i)^2 &= \frac{1}{\lambda_i^2} (\int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle e_i) f)^2 = \frac{1}{\lambda_i^2} (\int_\Omega \nabla e_i . \nabla f)^2 \\ &= \frac{1}{\lambda_i} (\int_\Omega \frac{\nabla e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \nabla f)^2 \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} (\int_\Omega \nabla (\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}) \nabla f)^2. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Como do Lema 1.3, $\{e_i\}$ é um sistema ortonormal completo em $\mathcal{H}_0$ e $f \in \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$, então $f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, e_i) e_i$ e como $\mathbf{P}_m f = \sum_{i=1}^{m} (f, e_i) e_i$, temos:

$$\begin{aligned} \|f - \mathbf{P}_m f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \| \sum_{i=m+1}^{\infty} (f, e_i) e_i \|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &= \sum_{i=m+1}^{\infty} |(f, e_i)|^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} (\int_\Omega f.e_i)^2. \end{aligned}$$

Aplicando (1.19):

$$\begin{aligned}\|f-\mathbf{P}_m f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{\lambda_{m+1}}\sum_{i=m+1}^{\infty}\left(\int_\Omega \nabla f \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{m+1}}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_\Omega \nabla f \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right)^2. \qquad (1.20)\end{aligned}$$

Como do Lema 1.4, $\{\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\}$ é um conjunto ortonormal completo em $\mathcal{H}_1$ respeito ao produto interno $\int_\Omega \nabla f \nabla g$, podemos aplicar a desigualdade de Bessel:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(\nabla f, \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right)\right|^2 \leq \|\nabla f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \qquad (1.21)$$

e logo, aplicando (1.21) em (1.20) temos:

$$\|f-\mathbf{P}_m f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}}\|\nabla f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Assumindo mais regularidade, pode-se melhorar a estimativa de erro, como mostra o seguinte lema:

Lema 1.7 *Assumir $f \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$. Então tem-se a estimativa de erro:*

$$\|f-\mathbf{P}_m f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda^2_{m+1}}\|\mathbf{P}\triangle f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Prova

De $-\mathbf{P}\triangle e_i = \lambda_i e_i$, $\lambda_i \geq \lambda_{m+1}$ para qualquer $i \geq m+1$, lembrando que o operador $-\mathbf{P}\triangle$ é simétrico temos:

$$\left(\int_\Omega f.e_i\right)^2 = \frac{1}{\lambda_i^2}\left(\int_\Omega(-\mathbf{P}\triangle e_i)f\right)^2 = \frac{1}{\lambda_i^2}\left(\int_\Omega(-\mathbf{P}\triangle f)e_i\right)^2 \leq \frac{1}{\lambda^2_{m+1}}\left(\int_\Omega(-\mathbf{P}\triangle f)e_i\right)^2.$$

Então

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_\Omega f.e_i\right)^2 \leq \frac{1}{\lambda^2_{m+1}}\sum_{i=1}^{\infty}|(-\mathbf{P}\triangle f, e_i)|^2$$

e como $\{e_i\}$ é um sistema ortonormal completo em $\mathcal{H}_0$ e $-\mathbf{P}\triangle f \in \mathcal{H}_0$, podemos aplicar a desigualdade de Bessel:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(-\mathbf{P}\triangle f, e_i)|^2 \leq \|\mathbf{P}\triangle f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Logo, vem

$$
\begin{aligned}
\|f - \mathbf{P}_m f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \sum_{i=m+1}^{\infty} (\int_\Omega f.e_i)^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} (\int_\Omega f.e_i)^2 \\
&\le \frac{1}{\lambda^2_{m+1}} \sum_{i=1}^{\infty} |(-\mathbf{P}\triangle f, e_i)|^2 \le \frac{1}{\lambda^2_{m+1}} \|\mathbf{P}\triangle f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Na norma $\mathbf{H}^1(\Omega)$, a estimativa de erro é dado no seguinte lema:

Lema 1.8 *Assumir* $f \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$. *Então tem-se a estimativa de erro:*

$$
\|\nabla f - \nabla \mathbf{P}_m f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le \frac{1}{\lambda_{m+1}} \|\mathbf{P}\triangle f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.
$$

Prova

Usando $\int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle f) g = \int_\Omega \nabla f \nabla g$, $-\mathbf{P}\triangle e_i = \lambda_i e_i$, $\lambda_i \ge \lambda_{m+1}$ para qualquer $i \ge m+1$, fazemos as estimativas

$$
\begin{aligned}
(\int_\Omega \nabla f \nabla (\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}))^2 &= (\int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle f) \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}})^2 = \frac{1}{\lambda_i} (\int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle f) e_i)^2 \\
&\le \frac{1}{\lambda_{m+1}} (\int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle f) e_i)^2, \qquad (1.22)
\end{aligned}
$$

como a expansão $f - \mathbf{P}_m f = \sum_{i=m+1}^{\infty} (\int_\Omega (-\mathbf{P}\triangle f).e_i) e_i$ converge em $\mathcal{H}_1$, temos:

$$
\begin{aligned}
\nabla (f - \mathbf{P}_m f) &= \sum_{i=m+1}^{\infty} (\int_\Omega f.e_i) \nabla e_i = \sum_{i=m+1}^{\infty} (\nabla e_i) \int_\Omega f(-\mathbf{P}\triangle \frac{e_i}{\lambda_i}) \\
&= \sum_{i=m+1}^{\infty} (\nabla e_i)(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_\Omega \nabla f \nabla \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}) = \sum_{i=m+1}^{\infty} (\nabla f, \nabla \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}) \nabla \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}.
\end{aligned}
$$

Além disso, para j = 1,2,...,m, e como $\{\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\}$ é um sistema ortonormal completo em $\mathcal{H}_1$ para o produto interno $\int_\Omega \nabla f \nabla g$, e assim temos

$$
\begin{aligned}
(\nabla (f - \mathbf{P}_m f), \nabla e_j) &= \sum_{i=m+1}^{\infty} (\nabla f, \nabla \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}})(\nabla \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \nabla e_j) \\
&= \sum_{i=m+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} (\nabla f, \nabla \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}})(\nabla \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \nabla \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}) = 0.
\end{aligned}
$$

Assim, sendo $f - \mathbf{P}_m f$ ortogonal a $e_1, e_2, ..., e_m$ em $\mathcal{H}_1$, e usando a relação de Parseval com respeito ao sistema ortonormal completo $\{\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\}$ tem-se:

$$
\|\nabla (f - \mathbf{P}_m f)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} |(\nabla (f - \mathbf{P}_m f), \nabla \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}})|^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} |(\nabla (f - \mathbf{P}_m f), \nabla \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}})|^2
$$

$$= \sum_{i=m+1}^{\infty} |(\nabla f, \nabla \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}) - (\nabla \mathbf{P}_m f, \nabla \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}})|^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} |(\nabla f, \nabla \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}})|^2.$$

Aplicando (1.22), resulta:

$$\|\nabla(f - \mathbf{P}_m f)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le \frac{1}{\lambda_{m+1}} \sum_{i=m+1}^{\infty} (\int_\Omega (-\mathbf{P}\Delta f) e_i)^2 \le \frac{1}{\lambda_{m+1}} \sum_{i=1}^{\infty} |(-\mathbf{P}\Delta f, e_i)|^2.$$

Finalmente aplicando a desigualdade de Bessel para a função $-\mathbf{P}\Delta f \,\epsilon\, \mathcal{H}_0$ obtemos:

$$\|\nabla(f - \mathbf{P}_m f)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le \frac{1}{\lambda_{m+1}} \|\mathbf{P}\Delta f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

1.4 Lemas e Proposições sobre Desigualdades Diferenciais

Nos seguintes lemas assumimos que $\phi(t)$, $\psi(t)$, $f(t)$ e $h(t)$ são funções regulares, não negativas definidas $\forall t \ge 0$.

Lema 1.9 *Suponha $\phi(0) = \phi_0$ e $\phi'(t) + \psi(t) \le g(\phi(t)) + f(t)$ para $t \ge 0$, onde g é uma função Lipschitz-contínua e não negativa definida para $\phi \ge 0$.*
Então $\phi(t) \le F(t; \phi_0)$ para $t \,\epsilon\, [0, T(\phi_0))$ onde $F(.; \phi_0)$ è a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} F'(t) &= g(F(t)) + f(t) \\ F(0) &= \phi_0 \end{aligned}$$

e $[0, T(\phi_0))$ é o intervalo maximal de existência. Além disso, se g é não decrescente, então:

$$\int_0^t \psi(\tau) d\tau \le \tilde{F}(t; \phi_0) \quad onde \quad \tilde{F}(t; \phi_0) = \phi_0 + \int_0^t [g(F(\tau; \phi_0)) + f(\tau)] d\tau$$

Ref. [9, pag 656].

Lema 1.10 *Suponha $\phi(0) = \phi_0$ e $\phi'(t) + \psi(t) \le h(t)\phi(t) + f(t)$ para $t \ge 0$.*
Então $\phi(t) \le F(t; \phi_0)$ e $\int_0^t \psi(\tau) d\tau \le \tilde{F}(t; \phi_0)$ para todo $t \ge 0$, onde

$$\begin{aligned} F(t; \phi_0) &= [\phi_0 + \int_0^t f(\tau)(exp \int_0^\tau -h(\sigma) d\sigma) d\tau] exp \int_0^t h(\tau) d\tau \qquad e \\ \tilde{F}(t; \phi_0) &= \phi_0 + \int_0^t [h(\tau) F(\tau; \phi_0) + f(\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Assim, estimativas para $\phi(t)$ e $\int_0^t \psi(\tau) d\tau$ são obtidas de estimativas para ϕ_0, $\int_0^t h(\tau) d\tau$ e $\int_0^t f(\tau) d\tau$.
Ref. [9, pag 656].

Proposição 1.7 *Seja a função $a(t) \geq 0$ absolutamente contínua com $a'(t) \geq 0$ e $b(t) \geq 0$ somável em $[0,T]$. Suponha que para as funções contínuas positivas φ e φ^* sobre $[0,T]$ com constante $\lambda > 0$, mantem-se a desigualdade integral:*

$$\varphi(t) + \int_0^t \varphi^*(\tau)d\tau \leq \frac{a(t)}{\lambda} + \int_0^t b(\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Então,

$$\varphi(t) + \int_0^t \varphi^*(\tau)d\tau \leq \frac{1}{\lambda}[1 + \int_0^t b(\tau)d\tau]\psi(t),$$

onde

$$\psi(t) = a(t)e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}.$$

Ver [13, pag 437].

Proposição 1.8 *Sejam $a(t) \geq 0$, $b(t) \geq 0$, $\varphi^*(t) \geq 0$ funções contínuas, $\varphi(t)$ continuamente diferenciável sobre $[\varepsilon_0, T]$ e assumimos que com constantes $a_0 \geq 0$, $\lambda > 0$ e um valor $t_* \epsilon [\varepsilon_0, \varepsilon_0 + \varepsilon]$ são satisfeitas as desigualdades:*

$$\begin{aligned} \varphi'(t) + \varphi^*(t) &\leq \frac{a(t)}{\lambda} + b(t)\varphi(t) \quad \textit{sobre} \quad [\varepsilon_0, T] \quad \textit{e} \\ \varphi(t_*) &\leq \frac{a_0}{\lambda}. \end{aligned}$$

Então

$$\varphi(t) + \int_{\varepsilon_0+\varepsilon}^t \varphi^*(\tau)d\tau \leq \frac{A(t, \varepsilon_0 + \varepsilon)}{\lambda} \quad \textit{sobre} \quad [\varepsilon_0 + \varepsilon, T],$$

com as funções contínuas:

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon_0 + \varepsilon) &= a_0 + \int_{\varepsilon_0}^t [a(\tau) + b(\tau)\psi(\tau, \varepsilon_0 + \varepsilon)]d\tau \quad \textit{e} \\ \psi(t, \varepsilon_0 + \varepsilon) &= [a_0 + \int_{\varepsilon_0}^t a(\tau)exp(-\int_{\varepsilon_0+\varepsilon}^t b(\sigma)d\sigma)d\tau]exp(\int_{\varepsilon_0}^t b(\tau)d\tau), \end{aligned}$$

sendo monótonas crescentes na variável t.
Ver [13, pag 445].

Capítulo 2

Estimativas A Priori das Aproximações de Galerkin e Existência de Soluções

2.1 Aproximações de Galerkin Espectrais

Consideremos $\Omega \subset \Re^3$ um domínio limitado, com contorno $\partial\Omega$ de classe C^3.
Seja o problema de valor de contorno inicial (Equação de Navier-Stokes):

$$
\begin{aligned}
\rho_0 u_t + \rho_0 u.\nabla u - \nu\Delta u &= -\nabla p + \rho_0 f && \text{em } (x,t)\,\epsilon\,\Omega \text{ x } (0,\infty)\\
\nabla.u &= 0 && \text{em } (x,t)\,\epsilon\,\Omega \text{ x } (0,\infty)\\
u(x,0) &= \mathrm{u}_0(x)\\
u|_{\partial\Omega} &= 0,
\end{aligned}
$$

onde $u(x,t)$ é a velocidade do fluido incompressível e homogêneo (densidade constante) num ponto $x\,\epsilon\,\Omega \subset \Re^3$ (região de escoamento) e instante t de tempo, $\rho_0 > 0$ é a densidade (constante) do fluido, $\nu > 0$ é o coeficiente de viscosidade (constante).
$f(x,t)$ é a densidade de forças externas por unidades de massa, $\mathbf{u}_0$ é a velocidade inicial do fluido, $u.\nabla u$ indica o operador de convecçao e $p(x,t)$ é a pressão hidrostática.
A equação $\nabla.u = 0$ indica que o fluido é incompressível, e a condição sobre a fronteira $\partial\Omega$ indica que o fluido adere às paredes do vaso Ω que é considerado em repouso.

Vamos considerar que o problema está normalizado de modo que ρ_0 e ν sejam iguais a um e também que a densidade de forças f é o gradiente de um potencial e assim possa ser absorvida dentro da pressão. Sem perda de generalidade, podemos então considerar o problema na forma seguinte:

$$u_t + u.\nabla u = -\nabla p + \Delta u \qquad \text{em } \Omega \text{ x } (0,\infty)$$

$$
\begin{aligned}
\nabla . u &= 0 && \text{em } \Omega \times (0,\infty) \\
u(x,0) &= \mathrm{u}_0(x) && \\
u|_{\partial\Omega} &= 0 &&
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Chamaremos a $(\mathbf{u},p)$ de uma *solução clássica* do Problema (2.1) se $\mathbf{u}\,\epsilon\, C(\bar{\Omega}\times[0,T))$, $\mathbf{u}_t, \nabla\mathbf{u}, \triangle\mathbf{u}, \nabla p\,\epsilon\, C(\Omega\times(0,T))$, e se as condições de contorno e inicial do problema são satisfeitas continuamente. Diz-se que $\mathbf{u}$ é uma *solução local forte* do Problema (2.1) se $\mathbf{u}\,\epsilon\, L^\infty([0,T],\mathcal{H}_1)$ sobre um intervalo de tempo [0,T], com as suas derivadas $\mathbf{u}_t, \partial_x^\alpha\mathbf{u}$, para $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \leq 2$ em $L^2((0,T],\mathbf{L}^2(\Omega))$ e $\|\nabla\mathbf{u}(.,t)-\nabla\mathbf{u}_0\|_{L^2} \longrightarrow 0$, quando $t \longrightarrow 0^+$.

Soluções locais forte $\mathbf{u}\,\epsilon\, L^\infty([0,T],\mathcal{H}_1)$ do Problema (2.1) sobre um (possívelmente pequeno) intervalo de tempo [0,T], podem ser construídas usando o método de Galerkin com autofunções do operador de Stokes $-\mathbf{P}\triangle$ como base de funções.
Para isto, consideremos a k-ésima aproximação da solução de (2.1):

$$u^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t)e_i(x)$$

onde os k coeficientes desconhecidos devem satisfazer

$$c_{ik}(t) = \int_\Omega u^k(x,t)e_i(x)dx \qquad i = 1,2,...,k$$

e são determinados pelo sistema não linear de equações diferenciais ordinarias

$$(u_t^k, e_l) - (\triangle u^k, e_l) \;=\; -(u^k\nabla u^k, e_l) \tag{2.2}$$

$l = 1,2,...,k$, com condições iniciais

$$c_{ik}(0) \;=\; (e_i, \mathrm{u}_0) \qquad i = 1,2,...,k.$$

Aqui (,) denota o produto interno em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ ($(\phi,\psi) = \int_\Omega \phi.\psi$), e $u_t^k = \frac{d}{dt}u^k$.
Da existência e unicidade das funções c_{ik} em um intervalo $[0,T]$, tem-se a existência e a unicidade das aproximações de Galerkin $u^k(x,t)$, onde cada u^k pertence a $L^\infty([0,T],\mathcal{H}_0)\cap L^2([0,T],\mathcal{H}_1)$.
De fato, usando (2.2) e observando que $(-\triangle u^k, e_l) = (\nabla u^k, \nabla e_l)$ (deduz-se da fórmula de Green, pois $e_l|_{\partial\Omega} = 0$), tem-se:

$$(u_t^k, e_l) + (\nabla u^k, \nabla e_l) + (u^k\nabla u^k, e_l) = 0$$

para $l = 1,2,...,k$. Logo, desenvolvendo vem

$$\sum_{i=1}^{k} c'_{ik}(t)(e_i,e_l) + \sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t)(\nabla e_i, \nabla e_l) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_{ik}(t)c_{jk}(t)(e_i\nabla e_j, e_l) = 0 \tag{2.2'}$$

Como as autofunções e_l são linearmente independentes, então a matriz $[(e_i, e_l)]_{k\times k}$, $i, l = 1, 2, ..., k$ é não singular. Assim, o sistema (2.2′) pode ser colocado na forma:

$$\begin{aligned} c'_{ik}(t) &= \varphi_i(t, c_{1k}, c_{2k}, ..., c_{kk}) \ , \ i = 1, 2, ..., k \\ c_{ik}(0) &= (u_0, e_i), \end{aligned}$$

com φ_i funções de classe C^∞.
Logo, existe $c_{ik}(t)$ (Teorema 1.3), o qual implica na existência de $u^k(x,t)$, pelo menos localmente no tempo.
Agora multiplicando (2.2) por $c_{lk}(t)$ somando $\sum_{l=1}^k$ e observando $(u^k \nabla u^k, u^k) = 0$ temos:

$$(\partial_t u^k, u^k) - (\Delta u^k, u^k) = 0.$$

Logo, usando integração por partes tem-se $-(\Delta u^k, u^k) = (\nabla u^k, \nabla u^k)$ e, então

$$(\partial_t u^k, u^k) + (\nabla u^k, \nabla u^k) = 0$$

e como $(\partial_t u^k, u^k) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^k\|^2_{\mathrm{L}^2}$ resulta a equação da energia:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^k(.,t)\|^2_{\mathrm{L}^2} + \|\nabla u^k(.,t)\|^2_{\mathrm{L}^2} = 0 \tag{2.3}$$

Na estimativa (2.3), integrando de 0 a t, e desde que $\|u^k(0)\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|\mathrm{u}_0\|_{\mathrm{L}^2}$, se $\mathrm{u}_0 \epsilon \mathrm{L}^2(\Omega)$, temos:

$$\frac{1}{2}\|u^k(.,t)\|^2_{\mathrm{L}^2} + \int_0^t \|\nabla u^k(.,\tau)\|^2_{\mathrm{L}^2} d\tau = \frac{1}{2}\|u^k(.,0)\|^2_{\mathrm{L}^2} \leq \frac{1}{2}\|\mathrm{u}_0\|^2_{\mathrm{L}^2} \tag{2.4}$$

assim, em particular

$$\|u^k(.,t)\|^2_{\mathrm{L}^2} \leq \|\mathrm{u}_0\|^2_{\mathrm{L}^2},$$

e logo, u^k é limitado independente de t e k. Assim a solução é global (porque a norma não vai a infinito em tempo finito).
Também,

$$\sup_{t\epsilon[0,T]} \|u^k(.,t)\|^2_{\mathrm{L}^2} \leq C \ \text{ e então } u^k(.,t) \ \text{ pertence a } \ L^\infty([0,T], \mathcal{H}_0).$$

Também, tomando $t = T$ em (2.4), obtemos que u^k pertence a $L^2([0,T], \mathcal{H}_1)$. Portanto $u^k \,\epsilon\, L^\infty([0,T], \mathcal{H}_0) \cap L^2([0,T], \mathcal{H}_1)$.
A estimativa de energia (2.4) é aquela sobre o qual o teorema de existência de solução de Hopf é baseado.
A estimativa de Kiselev e Ladyzhenskaya é baseada sobre uma identidade obtida por diferenciação de (2.2) com respeito a t, multiplicando-se então o resultado por $\frac{d}{dt}c_{lk}(t)$ e

tomando a soma $\sum_{l=1}^{k}$.
Prossegue-se tendo em conta que $(u^k\nabla u_t^k, u_t^k) = 0$ e integrando por partes. De fato, temos:

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 u^k, u_t^k) - (\triangle u_t^k, u_t^k) &= -(u_t^k \nabla u^k, u_t^k) - (u^k \nabla u_t^k, u_t^k) \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_t^k, u_t^k) + (\nabla u_t^k, \nabla u_t^k) &= -(u_t^k \nabla u^k, u_t^k) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 = -(u_t^k\nabla u^k, u_t^k) \tag{2.5}$$

Para o lado direito de (2.5) pode ser determinada uma estimativa: usando a desigualdade de Hölder, obtem-se

$$|(u_t^k\nabla u^k, u_t^k)| \leq \|u_t^k\|_{\mathbf{L}^4}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^4} = \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^4}^2.$$

Logo, usando a desigualdade de Sobolev (1.4), $\|u\|_{\mathbf{L}^4}^4 \leq C\|u\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^3$, tem-se:

$$|(u_t^k\nabla u^k, u_t^k)| \leq C\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{3}{2}}$$

e da desigualdade de Young, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e $p = 4$, $q = \frac{4}{3}$ temos:

$$\begin{aligned} C\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{3}{2}} &= [C(\frac{3}{2})^{\frac{3}{4}}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}][(\frac{2}{3})^{\frac{3}{4}}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{3}{2}}] \\ &\leq C_1\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^4\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$|(u_t^k\nabla u^k, u_t^k)| \leq C_1\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^4\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \tag{2.6}$$

e de (2.3), a desigualdade de Hölder e (2.4) tem-se:

$$\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 = -(u_t^k, u^k) \leq \|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\|u^k\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathrm{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}. \tag{2.7}$$

Então, levando (2.7) em (2.6), resulta a estimativa:

$$|(u_t^k\nabla u^k, u_t^k)| \leq C_1\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^4\|\mathrm{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2. \tag{2.8}$$

O uso da estimativa (2.8) na identidade (2.5), fornece:

$$\frac{d}{dt}\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C_2\|\mathrm{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}^2\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^4. \tag{2.9}$$

Para obter estimativas para as aproximações de Galerkin por integração de (2.9), precisamos de uma estimativa para o valor inicial $\|u_t^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}$, que seja uniforme em k. Usando (2.2) obtemos:

$$\begin{aligned}
(u_t^k(0), u_t^k(0)) - (\triangle u^k(0), u_t^k(0)) &= -(u^k(0)\nabla u^k(0), u_t^k(0)) \\
\|u_t^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + (\nabla u^k(0), \nabla u_t^k(0)) &= -(u^k(0)\nabla u^k(0), u_t^k(0)) \\
\|u_t^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= -(\nabla u^k(0), \nabla u_t^k(0)) - (u^k(0)\nabla u^k(0), u_t^k(0)).
\end{aligned}$$

Usando (1.10) e a desigualdade de Hölder tem-se:

$$\begin{aligned}
\|u_t^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= (\mathbf{P}\triangle u^k(0), u_t^k(0)) - (u^k(0)\nabla u^k(0), u_t^k(0)), \\
&\leq \|\mathbf{P}\triangle u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}\|u_t^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} + \|u^k(0)\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}\|u_t^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}, \\
\|u_t^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\mathbf{P}\triangle u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} + \|u^k(0)\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}, \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{P}$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ sobre o subespaço $\mathcal{H}_0$.
Usando sucessivamente a desigualdade de Hölder, $\|uv\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u\|_{\mathbf{L}^6}\|v\|_{\mathbf{L}^3}$, a desigualdade de Sobolev (1.3), a desigualdade (1.13) e a desigualdade de Young, tem-se:

$$\begin{aligned}
\|u_t^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\mathbf{P}\triangle u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} + \|u^k(0)\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^3} \\
&\leq \|\mathbf{P}\triangle u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} + C\|\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}) \\
&\leq \|\mathbf{P}\triangle u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} + C\|\mathbf{P}\triangle u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{3}{2}} + C\|\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
&\leq 2\|\mathbf{P}\triangle u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} + C_1\|\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}^3 + C\|\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|u_t^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} \leq 2\|\mathbf{P}\triangle u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} + C_1\|\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}^3 + C\|\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}^2$$

e da ortogonalidade das funções $\{e_i\}$ no produto interno $(\nabla\phi, \nabla\psi)$ e $(\mathbf{P}\triangle\phi, \mathbf{P}\triangle\psi)$ (ver página 16), e $u^k(0) = \sum_{i=1}^k c_{ik}(0)e_i$ onde $c_{ik}(0) = (\mathrm{u}_0, e_i) = \frac{(\nabla \mathrm{u}_0, \nabla e_i)}{\|\nabla e_i\|_{\mathbf{L}^2}^2} = \frac{(\mathbf{P}\triangle \mathrm{u}_0, \mathbf{P}\triangle e_i)}{\|\mathbf{P}\triangle e_i\|_{\mathbf{L}^2}^2}$, tem-se:

$$\|\mathbf{P}\triangle u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|\mathbf{P}\triangle \mathrm{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} \ \text{ e } \ \|\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|\nabla \mathrm{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}.$$

Logo, se $\mathrm{u}_0 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$, deduz-se uma estimativa para $\|u_t^k(0)\|_{\mathbf{L}^2}$, isto é:

$$\|u_t^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} \leq 2\|\mathbf{P}\triangle \mathrm{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} + C_1\|\nabla \mathrm{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}^3 + C\|\nabla \mathrm{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}^2. \qquad (2.11)$$

Então, a desigualdade (2.9) junto com a condição inicial (2.11) para $\mathrm{u}_0 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ pode ser integrada, e pelo uso do Lema 1.9, existem $F(t)$ e $\tilde{F}(t)$ tais que:

$$\begin{aligned}
\|u_t^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq F(t), \qquad (2.12) \\
\int_0^t \|\nabla\partial_\tau u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau &\leq \tilde{F}(t) \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

para $t \in [0,T)$.
Da desigualdade (2.7), isto é, $\|\nabla u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}\|u^k_t\|_{\mathbf{L}^2}$ e (2.12) obtemos a estimativa:

$$\|\nabla u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq G(t). \tag{2.14}$$

O teorema de existência de Kiselev-Ladyzhenskaya é baseado nas estimativas (2.12), (2.13) e (2.14).
Desde que as funções base $\{e_i\}$ sejam as autofunções do problema de autovalores

$$\begin{aligned} -\triangle w &= \lambda w - \nabla p \qquad x \in \Omega, \\ \nabla . w &= 0 \qquad\qquad\quad x \in \Omega, \\ w|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

segue da teoria de regularidade para as Equações de Stokes que as autofunções $\{e_i\}$ pertencem a $\mathbf{H}^2(\Omega)$. Assim, podemos escrever $-\mathbf{P}\triangle e_i = \lambda_i e_i$, onde λ_i é o i-ésimo autovalor. Logo, multiplicando (2.2) por $\lambda_l c_{lk}(t)$ e somando $\sum_{l=1}^k$, temos:

$$\begin{aligned} (u^k_t, \sum_{l=1}^k c_{lk}(t)\lambda_l e_l) - (\triangle u^k, \sum_{l=1}^k c_{lk}(t)\lambda_l e_l) &= -(u^k \nabla u^k, \sum_{l=1}^k c_{lk}\lambda_l e_l), \\ (u^k_t, -\mathbf{P}\triangle(\sum_{l=1}^k c_{lk}(t)e_l)) + (\triangle u^k, \mathbf{P}\triangle(\sum_{l=1}^k c_{lk}(t)e_l)) &= (u^k.\nabla u^k, \mathbf{P}\triangle(\sum_{l=1}^k c_{lk}(t)e_l)), \\ (u^k_t, -\mathbf{P}\triangle u^k) + (\triangle u^k, \mathbf{P}\triangle u^k) &= (u^k \nabla u^k, \mathbf{P}\triangle u^k). \end{aligned}$$

Usando (1.10) e tendo em conta que $\mathbf{P}$ é simétrico e $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, tem-se:

$$(\nabla u^k, \nabla u^k_t) + (\triangle u^k, \mathbf{P}^2\triangle u^k) = (u^k.\nabla u^k, \mathbf{P}\triangle u^k).$$

Logo, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} = (u^k \nabla u^k, \mathbf{P}\triangle u^k). \tag{2.15}$$

É sobre a identidade (2.15) que é baseada a estimativa de Prodi para as aproximações de Galerkin.
O lado direito de (2.15) pode ser estimado usando sucessivamente a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Sobolev (1.3), a desigualdade (1.13) e a desigualdade de Young. De fato:

$$\begin{aligned} |(u^k \nabla u^k, \mathbf{P}\triangle u^k)| &\leq \|u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^3}\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}C_\partial(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u^k\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2})\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C'\|\nabla u^k\|^{\frac{3}{2}}_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle u^k\|^{\frac{3}{2}}_{\mathbf{L}^2} + C'\|\nabla u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C_1\|\nabla u^k\|^6_{\mathbf{L}^2} + \frac{1}{4}\|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + C_2\|\nabla u^k\|^4_{\mathbf{L}^2} + \frac{1}{4}\|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned}$$

Então, $$|(u^k \nabla u^k, \mathbf{P}\triangle u^k)| \leq C_1\|\nabla u^k\|^6_{\mathbf{L}^2} + C_2\|\nabla u^k\|^4_{\mathbf{L}^2} + \frac{1}{2}\|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} \tag{2.16}$$

e levando (2.16) em (2.15) tem-se:

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq 2C_1\|\nabla u^k\|^6_{\mathbf{L}^2} + 2C_2\|\nabla u^k\|^4_{\mathbf{L}^2}. \tag{2.17}$$

Pela ortogonalidade em $\mathcal{H}_1$ das autofunções $\{e_i\}$ no produto interno $(\nabla\phi, \nabla\psi)$, e $u^k(0) = u^k(x,0) = \sum_{i=1}^k c_{ik}(0)e_i(x)$, onde $c_{ik}(0) = (\mathbf{u}_0, e_i) = \frac{(\nabla \mathbf{u}_0, \nabla e_i)}{\|\nabla e_i\|^2_{\mathbf{L}^2}}$, se $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1$, temos uma estimativa para o valor inicial:

$$\|\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}. \tag{2.18}$$

De (2.17), (2.18) e o Lema 1.9, existem $f_0(t)$ e $h_0(t)$ tais que:

$$\|\nabla u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq f_0(t), \tag{2.19}$$

$$\int_0^t \|\mathbf{P}\triangle u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq h_0(t) \tag{2.20}$$

para t em algum intervalo $[0,T)$.
Agora, devemos obter uma estimativa para u_t^k.
Multiplicando (2.2) por $\frac{d}{dt}c_{lk}(t)$ e somando $\sum_{l=1}^k$, e considerando a identidade (1.10) $(-\mathbf{P}\triangle u, v) = (\nabla u, \nabla v)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
(u_t^k, u_t^k) - (\triangle u^k, u_t^k) &= -(u^k\nabla u^k, u_t^k) \\
\|u_t^k\|^2_{\mathbf{L}^2} &= (\mathbf{P}\triangle u^k, u_t^k) - (u^k\nabla u^k, u_t^k).
\end{aligned}$$

Logo, usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Sobolev (1.3), a desigualdade (1.13) e a desigualdade de Young, vem

$$\begin{aligned}
\|u_t^k\|^2_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^3}\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u^k\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}) \\
&= \|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C\|\mathbf{P}\triangle u^k\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u^k\|^{\frac{3}{2}}_{\mathbf{L}^2} + C\|\nabla u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq \|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_1\|\nabla u^k\|^3_{\mathbf{L}^2} + C\|\nabla u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}$$

Então, tem-se a estimativa:

$$\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} \leq 2\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_1\|\nabla u^k\|^3_{\mathbf{L}^2} + C\|\nabla u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} \tag{2.21}$$

e, portanto, usando (2.19) e (2.20) para integrar (2.21), obtem-se:

$$\int_0^t \|\partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \tilde{f}_0(t) \tag{2.22}$$

para $t \in [0,T)$.
Assim, o teorema de existência de Prodi é baseado sobre as estimativas (2.19), (2.20) e (2.22).
As funções f_0, h_0, $\tilde{f}_0$ dependem apenas de $\|\nabla \mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}$ e da regularidade de $\partial\Omega$, e as estimativas (2.12), (2.13) e (2.14), isto é: as funções F, $\tilde{F}$, G dependem de $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}$, $\|\nabla \mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}$, $\|D^2\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}$.

2.2 Existência de Solução

As estimativas (2.19), (2.20) e (2.22) são suficientes para se obter o seguinte teorema de existência.

Teorema 2.1 *Seja Ω domínio limitado contido em $\Re^3$, com $\partial\Omega$ de classe C^3. Seja $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1$. Então existe um intervalo $(0,T)$, e funções $\mathbf{u}(x,t)$, $p(x,t)$ definidos e satisfazendo as equações de Navier-Stokes $u_t + u\nabla u = -\nabla p + \Delta u$, $\nabla . u = 0$ em $\Omega \times (0,T)$, tal que:*

$$\mathbf{u} \in L^\infty([0,T'],\mathcal{H}_1) \qquad \textit{para } 0 < T' < T \tag{2.23}$$

$$\mathbf{u}_t, D_x^2\mathbf{u}, \nabla p \in L^2([0,T'],\mathbf{L}^2(\Omega)) \qquad \textit{para } 0 < T' < T \tag{2.24}$$

$$\|\nabla \mathbf{u}(t) - \nabla \mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} \longrightarrow 0 \qquad \textit{como } t \longrightarrow 0^+ \tag{2.25}$$

Além disso, $T \geq T(\|\nabla \mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}, \partial\Omega)$, o qual depende somente de $\|\nabla \mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}$ e a C^3-regularidade de $\partial\Omega$. A solução $\mathbf{u}$ e as suas derivadas também satisfazem as estimativas (2.19), (2.20) e (2.22).

Prova
Como Ω limitado, então tem-se que as aproximações de Galerkin $\{u^k\}$ satisfazem (2.2), (2.19), (2.20), (2.22) e a desigualdade de Poincaré-Friedrichs $\|u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2$.
De (2.19) e a desigualdade de Poincaré-Friedrichs tem-se que:

$$\int_0^{T'} \|u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{H}^1}^2 d\tau \leq C\int_0^{T'} \|\nabla u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq C\int_0^{T'} f_0(\tau)d\tau < \infty,$$

logo, a sequência $\{u^k\}$ é limitada em $L^2([0,T'],\mathcal{H}_1)$ e de (2.22) tem-se que a sequência $\{u_t^k\}$ é limitada em $L^2([0,T'],\mathbf{L}^2(\Omega))$ para $0 < T' < T$. Então existe uma subsequência $\{u^{k'}\}$ de $\{u^k\}$ convergindo fracamente em $L^2([0,T'],\mathcal{H}_1)$ e $\{u_t^{k'}\}$ convergindo fracamente em $L^2([0,T'],\mathbf{L}^2(\Omega))$. O limite $\mathbf{u}$ e as suas derivadas satisfazem a condição (2.23), (2.24).
De fato:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}(.,t)\|_{\mathbf{H}^1} &\leq \liminf_{k' \longrightarrow \infty} \|u^{k'}(.,t)\|_{\mathbf{H}^1} \leq C \;\Rightarrow\; \mathbf{u} \in L^\infty([0,T'],\mathcal{H}_1), \\
\|\mathbf{u}_t(.,t)\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \liminf_{k' \longrightarrow \infty} \|\mathbf{u}_t^{k'}(.,t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq M \;\Rightarrow\; \mathbf{u}_t \in L^2([0,T'],\mathbf{L}^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Das estimativas (2.19) e (2.20), temos que $\{u^k\}$ é limitada em $L^2([0,T'],\mathbf{H}^2(\Omega))$, e desde que a inclusão $\mathbf{H}^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ é compacta, deduz-se que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ e assim $D_x^2\mathbf{u} \in L^2([0,T'],\mathbf{L}^2(\Omega))$. Também $\mathbf{u}$ satisfaz as estimativas (2.19), (2.20) e (2.22).
Se ϕ^m é qualquer função da forma:

$$\phi^m(x,t) = \sum_{l=1}^{m} c_l(t)e_l(x)$$

com $c_l(t)$ contínuo em [0,T], então (2.2) implica:

$$\begin{aligned} (u_t^k,\phi^m) - (\triangle u^k,\phi^m) + (u^k\nabla u^k,\phi^m) &= 0, \\ \int_0^{T'}\int_\Omega (u_t^k - \triangle u^k + u^k\nabla u^k)\phi^m dxdt &= 0, \end{aligned}$$

para todo $k \geq m$, e $0 < T' < T$. Passando ao limite $k \to \infty$, obtem-se:

$$\int_0^{T'}\int_\Omega (\mathbf{u}_t - \triangle\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u})\phi^m dxdt = 0 \tag{2.26}$$

Usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Sobolev (1.3), a desigualdade (1.13) e a desigualdade de Young, tem-se:

$$\begin{aligned} \|u\nabla u\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^3} &\leq C_\partial\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}) \\ &\leq \|\mathbf{P}\triangle u\|_{\mathbf{L}^2} + C'_\partial\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^3 + C_\partial\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_t - \triangle\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} + \|\triangle\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} + \|\triangle\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} + C'_\partial\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^3 + C_\partial\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2. \end{aligned}$$

Como $\|\triangle u\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|D_x^2 u\|_{\mathbf{L}^2}$, usando (1.12), temos $\|\triangle u\|_{\mathbf{L}^2} \leq C_\partial(\|\mathbf{P}\triangle u\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2})$, vem

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_t - \triangle\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} + C''_\partial\|\mathbf{P}\triangle\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} + C''_\partial\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\quad + C'_\partial\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^3 + C_\partial\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} + (C''_\partial + 1)\|\mathbf{P}\triangle\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} + C'_\partial\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^3 + C_\partial\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &\quad + C''_\partial\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}, \end{aligned}$$

de onde temos que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_t - \triangle\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq C\|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_{1\partial}\|\mathbf{P}\triangle\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_{2\partial}\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^6 \\ &\quad + C_{3\partial}\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^4 + C_{4\partial}\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2. \end{aligned}$$

Logo, integrando no tempo de 0 a T' (com $T' < T$), usando (2.22), (2.20) e (2.19) deduz-se que $\mathbf{u}_t - \triangle\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u} \in L^2([0,T'],\mathbf{L}^2(\Omega))$. De (2.26) e desde que as ϕ^m são densas em $L^2([0,T'],\mathcal{H}_0)$ (pois as autofunções $\{e_l\}$ formam um sistema ortonormal completo em $\mathcal{H}_0$), tem-se que $\mathbf{u}_t - \triangle\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u} \in L^2([0,T'],\mathcal{H}_0^{\perp})$, então existe uma função $p(x,t)$ com $\nabla p \in L^2([0,T'],\mathbf{L}^2(\Omega))$ tal que $\mathbf{u}_t - \triangle\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u} = -\nabla p$.
Agora considere-se a condição inicial (2.25). Como $\mathbf{u}$ satisfaz (2.19), isto é, $\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2} \leq f_0^{\frac{1}{2}}(t)$, e $f_0(0) = \|\nabla\mathbf{u}_0\|^2_{\mathbf{L}^2}$ (é a condição inicial usada para determinar $f_0(t)$) tem-se:

$$\limsup_{t\longrightarrow 0^+} \|\nabla\mathbf{u}(.,t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq f_0^{\frac{1}{2}}(0) = \|\nabla\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} \tag{2.27}$$

Verificaremos agora que $\mathbf{u}(.,t)$ converge fraco para $\mathbf{u}_0$ em $\mathcal{H}_1$, isto é:

$$\int_\Omega \nabla(\mathbf{u}(x,t) - \mathbf{u}_0(x))\nabla e_l dx = (\mathbf{u}(x,t) - \mathbf{u}_0(x), e_l)_{\mathbf{H}^1} \longrightarrow 0 \text{ como } t \longrightarrow 0^+ \quad \forall e_l.$$

Observe-se que:

$$(\mathbf{u}(.,t) - \mathbf{u}_0, e_l)_{\mathbf{H}^1} = (\mathbf{u}(.,t) - u^k(.,t), e_l)_{\mathbf{H}^1} + (u^k(.,t) - u^k(.,0), e_l)_{\mathbf{H}^1} + (u^k(.,0) - \mathbf{u}_0, e_l)_{\mathbf{H}^1} \tag{2.28}$$

Primeiro note-se que:

$$\begin{aligned}
|(u^k(.,t) - u^k(.,0), e_l)_{\mathbf{H}^1}| &= |\int_\Omega \nabla(u^k(t) - u^k(0))\nabla e_l dx| = |(\nabla(u^k(t) - u^k(0)), \nabla e_l)| \\
&= |\int_0^t \frac{d}{d\tau}(\nabla u^k(\tau), \nabla e_l) d\tau| = |\int_0^t (\frac{d}{d\tau}\nabla u^k(\tau), \nabla e_l) d\tau| \\
&= |\int_0^t (\nabla\partial_\tau u^k(\tau), \nabla e_l) d\tau| = |-\int_0^t (\partial_\tau u^k(\tau), \mathbf{P}\triangle e_l) d\tau| \\
&= |\int_0^t [-(\triangle u^k(.,\tau), \mathbf{P}\triangle e_l) + (u^k(.,\tau)\nabla u^k(.,\tau), \mathbf{P}\triangle e_l)] d\tau| \\
&\leq \int_0^t |(\nabla u^k(.,\tau), \nabla\mathbf{P}\triangle e_l) + (u^k(.,\tau)\nabla u^k(.,\tau), \mathbf{P}\triangle e_l)| d\tau \\
&\leq \int_0^t [\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla\mathbf{P}\triangle e_l\|_{\mathbf{L}^2} + \|u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle e_l\|_{\mathbf{L}^3}] d\tau \\
&\leq \int_0^t [\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla\mathbf{P}\triangle e_l\|_{\mathbf{L}^2} + C\|\nabla u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle e_l\|_{\mathbf{L}^3}] d\tau
\end{aligned}$$

e o último termo tende a zero quando $t \longrightarrow 0^+$.
Então, $|(u^k(.,t) - u^k(.,0), e_l)_{\mathbf{H}^1}| \longrightarrow 0$ uniformemente em k, quando $t \longrightarrow 0^+$, é consequência de (2.19) e (2.20). A igualdade $(u^k_t, \mathbf{P}\triangle e_l) = (-\triangle u^k + u^k\nabla u^k, \mathbf{P}\triangle e_l)$ é justificado por (2.2); a integração por partes $(\triangle u^k, \mathbf{P}\triangle e_l) = -(\nabla u^k, \nabla\mathbf{P}\triangle e_l)$ é justificada pois $\mathbf{P}\triangle e_l \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$. Também foi usada a desigualdade $(u^k\nabla u^k, \mathbf{P}\triangle e_l) \leq$

$\|u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle e_l\|_{\mathbf{L}^3} \leq C\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle e_l\|_{\mathbf{L}^3}$.
Assim,

$$(u^k(.,t) - u^k(.,0), e_l)_{\mathbf{H}^1} \longrightarrow 0 \text{ como } t \longrightarrow 0^+ \ , \forall e_l, \tag{2.29}$$

isto é, $u^k(.,t)$ converge fraco para $u^k(.,0)$, quando $t \longrightarrow 0^+$.
A seguir, observe-se que para qualquer fixado $t \in (0,T)$

$$\int_\Omega \nabla(\mathbf{u}(.,t) - u^k(.,t))\nabla e_l dx \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

De fato, pondo $w^k = \mathbf{u} - u^k$ e considerando $h(\tau)$ uma função regular, a qual é definida como

$$h(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau \leq \frac{t}{2} \\ 1 & \text{se } \tau \geq t, \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla w^k(.,t)\nabla e_l dx &= \int_0^t \frac{d}{d\tau}\int_\Omega h(\tau)\nabla w^k(.,\tau)\nabla e_l dx d\tau \\
&= \int_0^t \int_\Omega h_\tau(\tau)\nabla w^k(.,t)\nabla e_l + h(\tau)\nabla w_\tau^k(.,\tau)\nabla e_l dx d\tau \\
&= \int_0^t \int_\Omega h_\tau(\tau)\nabla w^k(.,t)\nabla e_l + h(\tau) w_\tau^k(.,\tau)\mathbf{P}\triangle e_l) dx d\tau,
\end{aligned}$$

e desde que u^k converge fracamente para $\mathbf{u}$, então $\mathbf{u} - u^k = w^k$ converge fracamente para 0 em $L^2([0,t],\mathcal{H}_1)$. Portanto ∇w^k converge fracamente para 0 em $L^2([0,t],\mathbf{L}^2(\Omega))$ e w_t^k converge fracamente para 0 em $L^2([0,t],\mathbf{L}^2(\Omega))$. Assim:

$$\int_\Omega \nabla w^k(.,t)\nabla e_l dx \longrightarrow 0 \text{ quando } k \longrightarrow \infty.$$

Logo,

$$(\mathbf{u}(.,t) - u^k(.,t), e_l)_{\mathbf{H}^1} \longrightarrow 0 \text{ quando } k \longrightarrow \infty, \tag{2.30}$$

isto é, $u^k(.,t)$ converge fracamente para $\mathbf{u}(.,t)$ quando $k \rightarrow \infty$ em $\mathcal{H}_1$.
Finalmente,

$$\int_\Omega \nabla(u^k(.,0) - \mathbf{u}_0)\nabla e_l dx = 0 \text{ para } k \geq l \tag{2.31}$$

Logo usando (2.29), (2.30) e (2.31) em (2.28) obtem-se que $\mathbf{u}(.,t)$ converge fracamente para $\mathbf{u}_0$ em $\mathcal{H}_1$. Então $\nabla\mathbf{u}(.,t)$ converge fracamente para $\nabla\mathbf{u}_0$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, e considerando (2.27), tem-se pela Proposição (1.5) que $\nabla\mathbf{u}(.,t) \rightarrow \nabla\mathbf{u}_0$ fortemente em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ quando $t \rightarrow 0^+$, isto é, $\mathbf{u}$ satisfaz (2.25).

2.3 Propriedades das Soluções Aproximadas

Para obter uma solução clássica na próxima seção e para obter estimativas de erro no próximo capítulo, necessitaremos das estimativas do teorema seguinte:

Teorema 2.2 *Seja o valor inicial* $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1$. *Então sobre um (possívelmente pequeno) intervalo de tempo [0,T], o problema de Navier-Stokes*

$$\begin{aligned} u_t - \mathbf{P}\triangle u &= -\mathbf{P}(u.\nabla u) \quad em\ \Omega \\ \nabla . u &= 0 \qquad\qquad\quad em\ \Omega\ ,\ t>0 \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \qquad\qquad\quad t \geq 0 \\ u(.,0) &= \mathbf{u}_0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

tem uma única solução forte $\mathbf{u}$. *As derivadas parciais de* $\mathbf{u}$ *e as suas aproximações de Galerkin* u^k *satisfazem as estimativas:*

$$\|\nabla u(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|\partial_\tau u(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq F_0(t) \leq F_{0,0} \tag{2.33}$$

$$\int_0^t \|\mathbf{P}\triangle u(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq h_0(t) \quad sobre\ [0,T] \tag{2.34}$$

$$\|\nabla \partial_t^n u(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_\varepsilon^t \|\partial_\tau^{n+1} u(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq F_n(t,\varepsilon) \tag{2.35.n}$$

$$\int_\varepsilon^t \|\mathbf{P}\triangle \partial_\tau^n u(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq h_n(t,\varepsilon) \tag{2.36.n}$$

$$\|\partial_t^n u(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_\varepsilon^t \|\nabla \partial_\tau^n u(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq G_n(t,\varepsilon) \tag{2.37.n}$$

$$\|\mathbf{P}\triangle \partial_t^n u(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq g_n(t,\varepsilon) \leq g_{n,\varepsilon} \tag{2.38.n}$$

sobre $[\varepsilon, T]$ *para qualquer* ε *num intervalo aberto* $(0,T)$ *e qualquer* $n = 0,1,2,3,\ldots$. *Além disso, no caso* $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2$ *tem-se:*

$$\|\partial_t u(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|\nabla \partial_\tau u(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq G_1(t) \tag{2.39}$$

$$\|\mathbf{P}\triangle u(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq g_0(t) \leq g_{0,0} \tag{2.40}$$

sobre [0,T]. As funções do lado direito dependem apenas de t ou (t,ε), *de n, T e da norma Dirichlet* $\|\nabla \mathbf{u}_0\|^2_{\mathbf{L}^2}$. *No caso em que* $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2$ *dependem de* $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}^2}$ *também. Sobre o intervalo correspondente estas funções são contínuas na variável t, e as funções* h_0, F_n, G_n *são continuamente diferenciáveis com respeito a t pela sua definição.*

Prova
A prova da existência de solução forte é dada pelo Teorema 2.1.

As estimativas para as aproximações u^k serão obtidas usando-se três sequências infinitas de identidades:
A primeira sequência de identidades é:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} &= (u^k\nabla u^k, \mathbf{P}\triangle u^k) && (2.41.0)\\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle \partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} &= (\partial_t u^k\nabla u^k, \mathbf{P}\triangle \partial_t u^k) + (u^k\nabla \partial_t u^k, \mathbf{P}\triangle \partial_t u^k) && (2.41.1)\\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \partial_t^2 u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle \partial_t^2 u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} &= (\partial_t^2 u^k\nabla u^k, \mathbf{P}\triangle \partial_t^2 u^k) + 2(u_t^k\nabla u_t^k, \mathbf{P}\triangle \partial_t^2 u^k)\\
&\quad +(u^k\nabla \partial_t^2 u^k, \mathbf{P}\triangle \partial_t^2 u^k) && (2.41.2)\\
&\ \ \vdots\\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \partial_t^n u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle \partial_t^n u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} &= (\partial_t^n u^k\nabla u^k + C_1\partial_t^{n-1}u^k\nabla u_t^k + C_2\partial_t^{n-2}u^k\nabla\partial_t^2 u^k + ...\\
&\quad +C_{n-1}u_t^k\nabla\partial_t^{n-1}u^k + u^k\nabla\partial_t^n u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t^n u^k) && (2.41.n)
\end{aligned}
$$

A igualdade (2.41.0) é obtida multiplicando (2.2) por $\lambda_l c_{lk}$, somando $\sum_{l=1}^k$, e observando que $(\partial_t u^k, \mathbf{P}\triangle u^k) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}$; (2.41.1) é obtida derivando (2.2) com respeito a t, multiplicando por $\lambda_l \frac{dc_{lk}}{dt}$, somando $\sum_{l=1}^k$, e observando que $(\partial_t^2 u^k, \mathbf{P}\triangle \partial_t u^k) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}$; (2.41.2) é obtida derivando (2.2) duas vezes com respeito a t, multiplicando por $\lambda_l \frac{d^2c_{lk}}{dt^2}$, somando $\sum_{l=1}^k$ e observando que $(\partial_t^3 u^k, \mathbf{P}\triangle \partial_t^2 u^k) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \partial_t^2 u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}$. Similarmente a n-ésima identidade (2.41.n) é obtida derivando (2.2) n-vezes com respeito a t, multiplicando por $\lambda_l \frac{d^nc_{lk}}{dt^n}$, somando $\sum_{l=1}^k$, e observando que $(\partial_t^{n+1} u^k, \mathbf{P}\triangle \partial_t^n u^k) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \partial_t^n u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}$.
A segunda sequência de identidades é:

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} &= (\mathbf{P}\triangle u^k, \partial_t u^k) - (u^k\nabla u^k, \partial_t u^k) && (2.42.1)\\
\|\partial_t^2 u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} &= (\mathbf{P}\triangle u_t^k, \partial_t^2 u^k) - (\partial_t u^k\nabla u^k, \partial_t^2 u^k) - (u^k\nabla\partial_t u^k, \partial_t^2 u^k) && (2.42.2)\\
\|\partial_t^3 u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} &= (\mathbf{P}\triangle \partial_t^2 u^k, \partial_t^3 u^k) - (\partial_t^2 u^k\nabla u^k, \partial_t^3 u^k) - 2(u_t^k\nabla u_t^k, \partial_t^3 u^k)\\
&\quad -(u^k\nabla\partial_t^2 u^k, \partial_t^3 u^k) && (2.42.3)\\
&\ \ \vdots\\
\|\partial_t^n u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} &= (\mathbf{P}\triangle \partial_t^{n-1} u^k, \partial_t^n u^k) - (\partial_t^{n-1} u^k\nabla u^k + C_1\partial_t^{n-2}u^k\nabla u_t^k + C_2\partial_t^{n-3}u^k\nabla\partial_t^2 u^k + ...\\
&\quad +C_{n-2}u_t^k\nabla\partial_t^{n-2}u^k + u^k\nabla\partial_t^{n-1}u^k, \partial_t^n u^k) && (2.42.n)
\end{aligned}
$$

A identidade (2.42.1) é obtida multiplicando (2.2) por $\frac{dc_{lk}}{dt}$, somando $\sum_{l=1}^k$, e observando que $(\triangle u^k, \partial_t u^k) = (\mathbf{P}\triangle u^k, \partial_t u^k)$; (2.42.2) é obtida derivando (2.2) com respeito a t, multiplicando por $\frac{d^2c_{lk}}{dt^2}$ somando $\sum_{l=1}^k$, e observando que $(\triangle u_t^k, \partial_t^2 u^k) = (\mathbf{P}\triangle \partial_t u^k, \partial_t^2 u^k)$; (2.42.3) é obtida derivando (2.2) duas vezes com respeito a t, multiplicando por $\frac{d^3c_{lk}}{dt^3}$, somando $\sum_{l=1}^k$, e observando que $(\triangle \partial_t^2 u^k, \partial_t^3 u^k) = (\mathbf{P}\triangle \partial_t^2 u^k, \partial_t^3 u^k)$. A n-ésima identidade

(2.42.n) é obtida derivando (2.2) $n-1$ vezes com respeito a t, multiplicando por $\frac{d^n}{dt^n}c_{lk}$, somando $\sum_{l=1}^k$, e observando que $(\Delta\partial_t^{n-1}u^k, \partial_t^n u^k) = (\mathbf{P}\Delta\partial_t^{n-1}u^k, \partial_t^n u^k)$.
A terceira sequência de identidades é:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= 0 && (2.43.0)\\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla \partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= -(\partial_t u^k \nabla u^k, \partial_t u^k) && (2.43.1)\\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla \partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= -(\partial_t^2 u^k \nabla u^k, \partial_t^2 u^k) - 2(\partial_t u^k \nabla \partial_t u^k, \partial_t^2 u^k) && (2.43.2)\\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla \partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= -(\partial_t^3 u^k \nabla u^k, \partial_t^3 u^k) - 3(\partial_t^2 u^k \nabla u_t^k, \partial_t^3 u^k) \\
&\quad -3(u_t^k \nabla \partial_t^2 u^k, \partial_t^3 u^k) && (2.43.3)\\
&\vdots \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t^n u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla \partial_t^n u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= -(\partial_t^n u^k \nabla u^k + C_1\partial_t^{n-1}u^k\nabla u_t^k + C_2\partial_t^{n-2}u^k\nabla\partial_t^2 u^k + \ldots \\
&\quad + C_{n-1}\partial_t u^k \nabla \partial_t^{n-1}u^k, \partial_t^n u^k) && (2.43.n)
\end{aligned}
$$

A identidade (2.43.0) é obtida multiplicando (2.2) por c_{lk}, somando $\sum_{l=1}^k$, e observando que $(u^k\nabla u^k, u^k) = 0$; (2.43.1) é obtida derivando (2.2) com respeito a t, multiplicando por $\frac{dc_{lk}}{dt}$, somando $\sum_{l=1}^k$, e observando que $(u^k\nabla\partial_t u^k, \partial_t u^k) = 0$. A n-ésima identidade (2.43.n) é obtida derivando (2.2) n vezes com respeito a t, multiplicando por $\frac{d^n c_{lk}}{dt^n}$, somando $\sum_{l=1}^k$, e observando que $(u^k\nabla\partial_t^n u^k, \partial_t^n u^k) = 0$.
O objetivo agora é obter desigualdades diferenciais a partir destas identidades, obtendo estimativas do lado direito. Detalharemos no caso $n = 0, 1, 2$ e logo generalizaremos por indução sobre n.
Comecemos com o caso $n = 0$
De (2.41.0) temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\mathbf{P}\Delta u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 = (u^k\nabla u^k, \mathbf{P}\Delta u^k)$$

da estimativa feita em (2.16) e condição inicial dado em (2.18) chegamos a:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\mathbf{P}\Delta u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq C_{1\partial}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^6 + C_{2\partial}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^4\\
\|\nabla u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 1.9, existem $f_0(t)$ e $h_0(t)$ contínuas, tais que sobre algum intervalo [0,T) mantem-se:

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq f_0(t), && (2.44)\\
\int_0^t \|\mathbf{P}\Delta u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau &\leq h_0(t) \quad \text{isto é } (2.34).
\end{aligned}
$$

Para $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^t \|\mathbf{P}\triangle u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \le \int_0^t \|\mathbf{P}\triangle u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \le h_0(t).$$

Então, sobre $[\varepsilon, T]$ para qualquer $\varepsilon \in (0,T)$:

$$\int_\varepsilon^t \|\mathbf{P}\triangle u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \le h_0(t,\varepsilon) \quad \text{isto é } (2.36.0).$$

De (2.42.1):

$$\|\partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} = (\mathbf{P}\triangle u^k, \partial_t u^k) - (u^k \nabla u^k, \partial_t u^k),$$

e da estimativa feita em (2.21) temos:

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2} &\le 2\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_1\|\nabla u^k\|^3_{\mathbf{L}^2} + C\|\nabla u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}, \\
\|\partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} &\le C_2\|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + C_3\|\nabla u^k\|^6_{\mathbf{L}^2} + C_4\|\nabla u^k\|^4_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}$$

Considerando as estimativas (2.44) e (2.34) para $t \in [0,T)$ na última equação, integramos obtendo:

$$\int_0^t \|\partial_\tau u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \le C_2 h_0(t) + C_3 \int_0^t f_0^3(\tau) d\tau + C_4 \int_0^t f_0^2(\tau) d\tau = \tilde{f}_0(t). \tag{2.45}$$

Logo, somando (2.44) e (2.45), isto é:

$$\|\nabla u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|\partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \le f_0(t) + \tilde{f}_0(t) = F_0(t),$$

obtemos (2.33).
Para $\varepsilon > 0$. usando (2.45) tem-se:

$$\int_\varepsilon^t \|\partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \le \int_0^t \|\partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \le \tilde{f}_0(t)$$

e logo

$$\|\nabla u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_\varepsilon^t \|\partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \le F_0(t,\varepsilon),$$

obtendo-se (2.35.0).
De (2.43.0), da estimativa obtida em (2.4) temos:

$$\|u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|\nabla u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \le \|\mathrm{u}_0\|^2_{\mathbf{L}^2} = G_0(t)$$

e então para $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in (0,T)$ temos

$$\|u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_\varepsilon^t \|\nabla u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \le G_0(t,\varepsilon),$$

obtendo assim (2.37.0).
De (2.43.1) vem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 = -(\partial_t u^k.\nabla u^k, \partial_t u^k).$$

Da estimativa obtida em (2.8) e a condição inicial (2.11) para $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq C\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}^2\|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}^4 \\
\|\partial_t u^k(0)\|_{\mathbf{L}^2} &\leq 2\|\mathbf{P}\triangle\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} + C'\|\nabla\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}^3 + C\|\nabla\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}^2.
\end{aligned}$$

Integrando e usando Lema 1.9, existem $H_1(t)$ e $\tilde{H}_1(t)$ tais que:

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq H_1(t), \\
\int_0^t \|\nabla\partial_\tau u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau &\leq \tilde{H}_1(t),
\end{aligned} \tag{2.46}$$

sobre um intervalo [0,T). Logo,

$$\|\partial_t u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_0^t \|\nabla\partial_\tau u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq H_1(t) + \tilde{H}_1(t) = G_1(t),$$

obtendo-se (2.39).
Desde que $-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 = -(\nabla\partial_t u^k, \nabla u^k) = (\partial_t u^k, \mathbf{P}\triangle u^k)$, então de (2.41.0) tem-se que $-(\partial_t u^k, \mathbf{P}\triangle u^k) + \|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 = (u^k\nabla u^k, \mathbf{P}\triangle u^k)$. Logo:

$$\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 = (\partial_t u^k, \mathbf{P}\triangle u^k) + (u^k\nabla u^k, \mathbf{P}\triangle u^k).$$

Agora, devemos encontrar uma estimativa para o lado direito da igualdade acima. Usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Sobolev (1.3), a desigualdade (1.13) e a desigualdade de Young, tem-se:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq \|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^3}\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}) \\
&\leq \|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{3}{2}}\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} + C\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
&\leq \|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_1\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^3 + \frac{1}{2}\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2.
\end{aligned}$$

Então

$$\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} \leq 2\|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_2\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^3 + C_3\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2,$$

logo, elevando ao quadrado e considerando as estimativas (2.46) e (2.35.0), obtemos:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} &\leq C_4\|\partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + C_5\|\nabla u^k\|^6_{\mathbf{L}^2} + C_6\|\nabla u^k\|^4_{\mathbf{L}^2}\\ &\leq C_4 H_1(t) + C_5 F_0^3(t,\varepsilon) + C_6 F_0^2(t,\varepsilon) = g_0(t,\varepsilon).\end{aligned}$$

Portanto

$$\|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq g_0(t,\varepsilon), \quad \text{e obtemos} \quad (2.38.0).$$

Se $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$, então

$$\|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq C_4 H_1(t) + C_5 f_0^3(t) + C_6 f_0^2(t) = g_0(t) \text{ e obtemos } \quad (2.40).$$

Passamos a analisar o caso $n = 1$.
De (2.41.1) temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle\partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} = (\partial_t u^k \nabla u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t u^k) + (u^k\nabla\partial_t u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t u^k).$$

Agora, devemos encontrar uma estimativa para o lado direito de (2.41.1). Usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade (1.16) ($\sup_\Omega |u^k| \leq C_1(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2})$), a desigualdade de Sobolev (1.3), a desigualdade (1.15) e a desigualdade de Young, temos:

$$\begin{aligned}&|(u_t^k\nabla u^k, \mathbf{P}\triangle u_t^k) + (u^k\nabla u_t^k, \mathbf{P}\triangle u_t^k)| \leq\\ &\leq \|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^3}\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} + \sup_\Omega |u^k|\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\\ &\leq C\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2})\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\\ &\quad + C_1(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2})\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\\ &\leq C_2\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}[\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}]\\ &\leq \frac{1}{2}\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + C_3\|\nabla u_t^k\|^2_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2})^2\\ &\leq \frac{1}{2}\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + C_4\|\nabla u_t^k\|^2_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}).\end{aligned}$$

Levando isto para equação (2.41.1), obtemos:

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle\partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq C_5(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|^2_{\mathbf{L}^2})\|\nabla\partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}. \tag{2.47}$$

Para poder integrar a desigualdade (2.47) devemos encontrar uma estimativa independente de k, para o valor inicial de $\|\nabla\partial_t u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}$, para isso usamos (2.42.1) e (2.43.1) para obter estimativas para $\|\nabla\partial_t u^k(.,\varepsilon)\|_{\mathbf{L}^2}$, em valores arbitrariamente pequenos de ε. Assim, apenas precisamos assumir que $\mathrm{u}_0 \in \mathcal{H}_1$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\{\varepsilon_n\}$ uma sequência tal

que $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_3<...<\varepsilon$.
De (2.45), isto é:

$$\int_0^t \|\partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \tilde{f}_0(t),$$

como o integrando é contínuo, pelo Teorema do Valor Médio, para todo inteiro positivo k, existe um número τ_k , $0<\tau_k<\varepsilon_1<\varepsilon$, tal que:

$$\|\partial_t u^k(.,\tau_k)\|^2_{\mathbf{L}^2} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \|\partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \frac{\tilde{f}_0(\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{2.48}$$

Também, o lado direito de (2.43.1) pode ser estimado usando (2.6):

$$|(\partial_t u^k \nabla u^k, \partial_t u^k)| \leq C_1 \|\nabla u^k\|^4_{\mathbf{L}^2} \|\partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + \frac{1}{2}\|\nabla \partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}. \tag{2.49}$$

Então, levando (2.49) em (2.43.1), obtemos:

$$\frac{d}{dt}\|\partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla \partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq C_2 \|\nabla u^k\|^4_{\mathbf{L}^2} \|\partial_t u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}, \tag{2.50}$$

a qual é uma desigualdade diferencial, quando (2.44) é considerado. Logo, usando (2.48) podemos integrar (2.50) sobre o intervalo $[\tau_k, t]$, de acordo com o Lema 1.10, obtendo:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_1}^t \|\nabla \partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau &\leq \int_{\tau_k}^t \|\nabla \partial_t u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \bar{G}_1(t,\varepsilon_1), & (2.51)\\ \|\partial_t u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} &\leq \tilde{G}_1(t,\varepsilon_1) \quad \text{para} \ \ \varepsilon_1 < t < T. & (2.52) \end{aligned}$$

Como $\varepsilon_1<\varepsilon$, temos que $[\varepsilon,T]\subset[\varepsilon_1,T]$, então (2.51) e (2.52) continua sendo válido com ε em vez de ε_1.
Logo, de (2.51) e (2.52) temos

$$\|\partial_t u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_\varepsilon^t \|\nabla \partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq G_1(t,\varepsilon), \quad \text{obtendo assim (2.37.1).}$$

Além disso, de (2.51), para todo inteiro positivo k, pelo Teorema do Valor Médio, existe um σ_k , $\varepsilon_1<\sigma_k<\varepsilon_2<\varepsilon$, tal que:

$$\|\nabla \partial_t u^k(.,\sigma_k)\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq \frac{1}{(\varepsilon-\varepsilon_1)}\int_{\varepsilon_1}^\varepsilon \|\nabla \partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \frac{1}{(\varepsilon-\varepsilon_1)}\bar{G}_1(\varepsilon,\varepsilon_1). \tag{2.53}$$

Assim, usando (2.53) podemos integrar (2.47) sobre o intervalo $[\sigma_k, t]$ de acordo com o Lema 1.10, obtendo:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_2}^t \|\mathbf{P}\triangle \partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau &\leq \int_{\sigma_k}^t \|\mathbf{P}\triangle \partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq h_1(t,\varepsilon_2), & (2.54)\\ \|\nabla \partial_t u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} &\leq f_1(t,\varepsilon_2) \quad \text{para} \ \ \varepsilon_2 < t < T. & (2.55) \end{aligned}$$

Como $[\varepsilon, T] \subset [\varepsilon_2, T]$, então, em (2.54), pondo ε em vez de ε_2 temos:

$$\int_\varepsilon^t \|\mathbf{P}\triangle\partial_\tau u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq h_1(t,\varepsilon),$$

obtendo assim (2.36.1).
De (2.42.2):

$$\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 = (\mathbf{P}\triangle u_t^k, \partial_t^2 u^k) - (u_t^k \nabla u^k, \partial_t^2 u^k) - (u^k \nabla u_t^k, \partial_t^2 u^k).$$

Usando a desigualdade de Hölder, as desigualdades (1.16), (1.13), (1.3) e a desigualdade de Young, na identidade acima temos:

$$\begin{aligned}
\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq \|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|u_t^k \nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|u^k \nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|u_t^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^3} + \|u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^3} \\
&\leq \|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_1\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}) \\
&\quad + C_2\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}) \\
&\leq \|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_1\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_1\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\quad + C_2\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} + C_2\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq 2\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_1\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_3\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\quad + C_4\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq 2\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_5\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}[\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2].
\end{aligned}$$

Logo, elevando ao quadrado e tendo em conta (2.55), (2.38.0), e (2.44), obtemos:

$$\begin{aligned}
\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq C_6\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_7\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2[\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^4] \\
&\leq C_6\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_7 f_1(t,\varepsilon_2)(g_0(t,\varepsilon) + f_0(t) + f_0^2(t)).
\end{aligned}$$

Assim, integrando sobre $[\varepsilon_2, T]$ e usando (2.54), obtemos:

$$\int_{\varepsilon_2}^t \|\partial_\tau^2 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq C_6 h_1(t,\varepsilon_2) + \tilde{G}_1(t,\varepsilon_2) = \tilde{f}_1(t,\varepsilon_2). \tag{2.56}$$

Pondo em (2.56) ε em vez de ε_2 (pois $[\varepsilon, T] \subset [\varepsilon_2, T]$), temos:

$$\int_\varepsilon^t \|\partial_\tau^2 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq C_6 h_1(t,\varepsilon) + \tilde{G}_1(t,\varepsilon) = \tilde{f}_1(t,\varepsilon). \tag{2.57}$$

Logo, somando (2.55) e (2.57) resulta:

$$\|\nabla u_t^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_\varepsilon^t \|\partial_\tau^2 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq f_1(t,\varepsilon) + \tilde{f}_1(t,\varepsilon) = F_1(t,\varepsilon),$$

obtendo-se assim (2.35.1).
De (2.43.2):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 = -(\partial_t^2 u^k \nabla u^k, \partial_t^2 u^k) - 2(\partial_t u^k \nabla \partial_t u^k, \partial_t^2 u^k).$$

Devemos achar estimativas para o lado direito de (2.43.2). Usando a desigualdade de Hölder, as desigualdades (1.3), (1.15) e a desigualdade de Young, tem-se:

$$\begin{aligned}
&|(\partial_t^2 u^k \nabla u^k, \partial_t^2 u^k) + 2(u_t^k \nabla u_t^k, \partial_t^2 u^k)| \leq \\
&\leq \|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^3}\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} + 2\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^3}\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq C_1\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}) \\
&\quad +\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} C_2\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}) \\
&\leq \frac{1}{2}\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_3\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) \\
&\quad +\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_4\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) \\
&\leq \frac{1}{2}\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_5\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2[\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
&\quad +\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2] + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2.
\end{aligned}$$

Logo, em (2.43.2):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq C_6[\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
&\quad +\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2]\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_7\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2, \qquad (2.58)
\end{aligned}$$

a qual é uma desigualdade diferencial, quando (2.38.0), (2.44), (2.36.1) e (2.55) são considerados. Agora precisamos da condição inicial para $\|\partial_t^2 u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2$. De (2.56)

$$\int_{\varepsilon_2}^{t}\|\partial_\tau^2 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \tilde{f}_1(t,\varepsilon_2),$$

sendo o integrando contínuo, pelo Teorema do Valor Médio, para todo inteiro k, existe δ_k , $\varepsilon_2 < \delta_k < \varepsilon_3 < \varepsilon$, tal que:

$$\|\partial_t^2 u^k(.,\delta_k)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \frac{1}{(\varepsilon-\varepsilon_2)}\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon}\|\partial_\tau^2 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \frac{\tilde{f}_1(\varepsilon,\varepsilon_2)}{(\varepsilon-\varepsilon_2)}. \qquad (2.59)$$

Logo, podemos integrar (2.58) com a condição inicial (2.59) sobre um intervalo $[\delta_k, t]$ de acordo com o Lema 1.10, obtendo:

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon_3}^{t}\|\nabla\partial_\tau^2 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau &\leq \int_{\delta_k}^{t}\|\nabla\partial_t^2 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \tilde{G}_2(t,\varepsilon_3), \qquad (2.60) \\
\|\partial_t^2 u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq \tilde{G}_2(t,\varepsilon_3) \quad \text{para } \varepsilon_3 < t < T. \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

Desde que $[\varepsilon, T] \subset [\varepsilon_3, T]$, então (2.60) e (2.61) é válido com ε em vez de ε_3.
De (2.41.1) vem

$$\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 = (\partial_t^2 u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t u^k) + (\partial_t u^k \nabla u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t u^k) + (u^k\nabla\partial_t u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t u^k).$$

Para encontrar uma estimativa do lado direito, usamos a desigualdade de Hölder, as desigualdades (1.16), (1.3), (1.15):

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq \|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^3}\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\quad + \sup_{\Omega} |u^k| \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}, \\
\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_1\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}) + C_2(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\quad + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2})\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}, \\
\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_3\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}), \\
\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq C_4\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_5\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2).
\end{aligned}$$

Logo, usando (2.61), (2.35.1), (2.38.0) e (2.35.0), vem
$\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C_4\tilde{G}_2(t,\varepsilon) + C_5F_1(t,\varepsilon)[g_0(t,\varepsilon) + F_0(t,\varepsilon)] = g_1(t,\varepsilon)$ obtendo assim (2.38.1).

Passamos a analisar o caso $n = 2$.
De (2.60), para todo inteiro positivo k, pelo Teorema do Valor Médio, existe γ_k, $\varepsilon_3 < \gamma_k < \varepsilon_4 < \varepsilon$, tal que:

$$\|\nabla\partial_t^2 u^k(.,\gamma_k)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon_3)}\int_{\varepsilon_3}^{\varepsilon} \|\nabla\partial_\tau^2 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \frac{\tilde{G}_2(\varepsilon,\varepsilon_3)}{(\varepsilon-\varepsilon_3)}. \tag{2.62}$$

De (2.41.2), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= (\partial_t^2 u^k \nabla u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k) + 2(u_t^k\nabla u_t^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k) \\
&\quad + (u^k\nabla\partial_t^2 u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k),
\end{aligned}$$

encontraremos uma estimativa para o lado direito de (2.41.2). Usando as desigualdades de Hölder, (1.3), (1.15), (1.16) e a desigualdade de Young, tem-se:

$$\begin{aligned}
|(\partial_t^2 u^k\nabla u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k) &+ 2(u_t^k\nabla u_t^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k) + (u^k\nabla\partial_t^2 u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k)| \\
&\leq [\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^3} + 2\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^3}]\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\quad + \sup_{\Omega}|u^k|\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq [C_1(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2})\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_2(\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\quad + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2})\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}]\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq \frac{1}{2}\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_3\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) \\
&\quad + C_4\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2).
\end{aligned}$$

Levando esta estimativa para (2.41.2), tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq C_5(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2)\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
&\quad + C_6\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2). \quad (2.63)
\end{aligned}$$

Logo podemos integrar (2.63), usando (2.62) sobre um intervalo $[\gamma_k, t]$ de acordo com o Lema 1.10, obtendo:

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon_4}^t \|\mathbf{P}\triangle\partial_\tau^2 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau &\leq \int_{\gamma_k}^t \|\mathbf{P}\triangle\partial_\tau^2 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq h_2(t,\varepsilon_4), &(2.64)\\
\|\nabla\partial_t^2 u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq f_2(t,\varepsilon_4) \text{ para } \varepsilon_4 < t < T. &(2.65)
\end{aligned}$$

Como $[\varepsilon, T] \subset [\varepsilon_4, T]$, então (2.64) e (2.65) é válido sobre $[\varepsilon, T]$.
Logo em (2.64), pondo ε em vez de ε_4, fornece:

$$\int_\varepsilon^t \|\mathbf{P}\triangle\partial_\tau^2 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq h_2(t,\varepsilon),$$

obtendo-se assim (2.36.2).
Somando (2.60) e (2.61) com ε em vez de ε_3, tem-se:

$$\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_\varepsilon^t \|\nabla\partial_\tau^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \tilde{G}_2(t,\varepsilon) + \bar{G}_2(t,\varepsilon) = G_2(t,\varepsilon),$$

obtendo-se (2.37.2).
De (2.42.3) vem

$$\|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 = (\mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k, \partial_t^3 u^k) - (\partial_t^2 u^k \nabla u^k, \partial_t^3 u^k) - 2(u_t^k \nabla u_t^k, \partial_t^3 u^k) - (u^k \nabla\partial_t^2 u^k, \partial_t^3 u^k).$$

Para encontrar uma estimativa do lado direito, usamos as desigualdades de Hölder, (1.3), (1.15) e (1.16), isto é:

$$\begin{aligned}
\|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}) \\
&\quad + C_1\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}) \\
&\quad + C_2(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2})\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}, \\
&\leq \|\mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_3\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}) \\
&\quad + C_1\|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}), \\
\|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq \|\mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_4\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) \\
&\quad + C_5\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2).
\end{aligned}$$

Integramos no tempo, considerando (2.64), (2.37.2), (2.36.0), (2.37.0), (2.37.1) e (2.36.1), para obter:

$$\int_{\varepsilon_4}^{t} \|\partial_\tau^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq h_2(t,\varepsilon_4) + C_4 G_2(t,\varepsilon_4)[(h_0+G_0)(t,\varepsilon_4)] + C_5 G_1(t,\varepsilon_4)[(g_1+G_1)(t,\varepsilon_4)].$$

Logo,

$$\int_{\varepsilon_4}^{t} \|\partial_\tau^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \tilde{f}_2(t,\varepsilon_4). \tag{2.66}$$

Pondo ε em vez de ε_4 temos

$$\int_{\varepsilon}^{t} \|\partial_\tau^3 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \tilde{f}_2(t,\varepsilon). \tag{2.67}$$

Então, de (2.65) e (2.67), tem-se:

$$\|\nabla \partial_t^2 u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_{\varepsilon}^{t} \|\partial_\tau^3 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq f_2(t,\varepsilon) + \tilde{f}_2(t,\varepsilon) = F_2(t,\varepsilon),$$

obtendo-se assim (2.35.2).
Agora, de (2.43.3) vem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla \partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 = -(\partial_t^3 u^k \nabla u^k, \partial_t^3 u^k) - 3(\partial_t^2 u^k \nabla u_t^k, \partial_t^3 u^k) - 3(u_t^k \nabla \partial_t^2 u^k, \partial_t^3 u^k)$$

Estimemos o lado direito: usando as desigualdades de Hölder, (1.3), (1.15) e a desigualdade de Young temos:

$$\begin{aligned}
&|(\partial_t^3 u^k \nabla u^k, \partial_t^3 u^k) - 3(\partial_t^2 u^k \nabla u_t^k, \partial_t^3 u^k) - 3(u_t^k \nabla \partial_t^2 u^k, \partial_t^3 u^k)| \leq \\
&\qquad \leq C\|\nabla \partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\Delta u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2})\|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\qquad\quad + C_1\|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla \partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\Delta \partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla \partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}) \\
&\qquad\quad + C_2\|\nabla \partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\Delta \partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla \partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2})\|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\|\nabla \partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_3(\|\mathbf{P}\Delta u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2)\|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
&\qquad\quad + \|\nabla \partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_4\|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\Delta u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
&\qquad\quad + C_5\|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\Delta \partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla \partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2).
\end{aligned}$$

Levando esta estimativa em (2.43.3), resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla \partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq\ & [C_6(\|\mathbf{P}\Delta u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) + C_7(\|\mathbf{P}\Delta u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) \\
& + C_8(\|\mathbf{P}\Delta \partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla \partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2)]\|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\|\nabla \partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
& + 2\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2,
\end{aligned} \tag{2.68}$$

a qual é uma desigualdade diferencial, quando (2.38.0), (2.35.0), (2.38.1), (2.35.1), (2.36.2) e (2.64) são considerados. De (2.66), pelo Teorema do Valor Médio, para todo inteiro positivo k, existe β_k , $\varepsilon_4 < \beta_k < \varepsilon_5 < \varepsilon$, tal que:

$$\|\partial_t^3 u^k(.,\beta_k)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{1}{(\varepsilon-\varepsilon_4)}\int_{\varepsilon_4}^{\varepsilon}\|\partial_\tau^3 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \frac{1}{(\varepsilon-\varepsilon_4)}\tilde{f}_2(\varepsilon,\varepsilon_4). \tag{2.69}$$

Então, podemos integrar (2.68) com a condição inicial (2.69), sobre um intervalo $[\beta_k, t]$. de acordo com o Lema 1.10, obtendo:

$$\int_{\varepsilon_5}^{t}\|\nabla\partial_\tau^3 u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \tilde{G}_3(t,\varepsilon_5), \tag{2.70}$$

$$\|\partial_t^3 u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \tilde{G}_3(t,\varepsilon_5), \tag{2.71}$$

para $\varepsilon_5 < t < T$. Também (2.70) e (2.71) são válidos com ε em vez de ε_5, desde que $[\varepsilon, T] \subset [\varepsilon_5, T]$.
De(2.41.2):

$$\begin{aligned}\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= (\partial_t^3 u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k) + (\partial_t^2 u^k \nabla u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k) + 2(u_t^k\nabla u_t^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k)\\ &\quad + (u^k\nabla\partial_t^2 u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k).\end{aligned}$$

Estimemos o lado direito, usando as desigualdades (1.3), (1.15), (1.16) e a desigualdade de Young, isto é:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_1\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2})\\ &\quad + C_2\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2})\\ \|\mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq C_3\|\partial_t^3 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_4\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2)\\ &\quad + C_5\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2).\end{aligned}$$

Logo, de (2.71), (2.35.2), (2.38.0), (2.35.0), (2.35.1) e (2.38.1), tem-se:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq C_3\tilde{G}_3(t,\varepsilon) + C_4 F_2(t,\varepsilon)(g_0(t,\varepsilon) + F_0(t,\varepsilon))\\ &\quad + C_5 F_1(t,\varepsilon)(g_1(t,\varepsilon) + F_1(t,\varepsilon)) = g_2(t,\varepsilon),\end{aligned}$$

obtendo-se (2.38.2).
Por indução suponhamos que todas as estimativas do Teorema 2.2 são válidas até $n = m$ e provaremos para $n = m + 1$.
Da identidade $(2.42.m + 1)$, temos:

$$\begin{aligned}\|\partial_t^{m+1} u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= (\mathbf{P}\triangle\partial_t^m u^k, \partial_t^{m+1} u^k) - (\partial_t^m u^k\nabla u^k + C_1\partial_t^{m-1}u^k\nabla u_t^k + \ldots\\ &\quad \ldots + C_{m-1}\partial_t u^k\nabla\partial_t^{m-1}u^k + u^k\nabla\partial_t^m u^k, \partial_t^{m+1}u^k).\end{aligned}$$

Encontraremos uma estimativa para o lado direito. Usando a desigualdade de Hölder obtem-se:

$$\begin{aligned}\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\mathbf{P}\Delta\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^3} + C_1\|\partial_t^{m-1}u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^3} \\ &+ ... + C_{m-1}\|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla\partial_t^{m-1}u^k\|_{\mathbf{L}^3} + \|u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^3}.\end{aligned}$$

Logo, usando as desigualdades (ver (1.3) e (1.15)):

$$\|\partial_t^j u^k\|_{\mathbf{L}^6} \leq C\|\nabla\partial_t^j u^k\|_{\mathbf{L}^2} \quad \text{e} \quad \|\nabla\partial_t^j u^k\|_{\mathbf{L}^3} \leq C_\partial(\|\mathbf{P}\Delta\partial_t^j u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla\partial_t^j u^k\|_{\mathbf{L}^2}), \quad (2.72)$$

tem-se:

$$\begin{aligned}\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\mathbf{P}\Delta\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_\partial\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\Delta u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}) \\ &+ C_{1\partial}\|\nabla\partial_t^{m-1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\Delta\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}) + ... \\ &... + C_{(m-1)\partial}\|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\Delta\partial_t^{m-1}u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla\partial_t^{m-1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}) \\ &+ C_{m\partial}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\Delta\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}), \\ \|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq C_1\|\mathbf{P}\Delta\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\partial\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\Delta u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) \\ &+ C'_{1\partial}\|\nabla\partial_t^{m-1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\Delta\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) + ... \\ &... + C'_{(m-1)\partial}\|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\Delta\partial_t^{m-1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t^{m-1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) \\ &+ C'_{m\partial}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\Delta\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2). \quad (2.73)\end{aligned}$$

Pela hipótese indutiva tem-se a existência de f_n e h_n tais que,

$$\|\nabla\partial_t^n u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq f_n(t,\varepsilon_{2n}) \quad \text{e} \quad \int_{\varepsilon_{2n}}^t \|\mathbf{P}\Delta\partial_\tau^n u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq h_n(t,\varepsilon_{2n}) \quad (2.74)$$

para $t \in [\varepsilon_{2n}, T)$ e para todo $n = 1, 2, 3, ..., m$. Como $[\varepsilon, T] \subset [\varepsilon_{2n}, T]$, então

$$\|\nabla\partial_t^n u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq f_n(t,\varepsilon) \quad (2.75)$$

$$\int_\varepsilon^t \|\mathbf{P}\Delta\partial_\tau^n u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq h_n(t,\varepsilon) \quad (2.76)$$

para $t \in [\varepsilon, T)$ e para todo $n = 1, 2, 3, ..., m$.
Logo, pode-se integrar (2.73) sobre $[\varepsilon_{2m}, T)$, obtendo-se:

$$\int_{\varepsilon_{2m}}^t \|\partial_\tau^{m+1}u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \tilde{f}_m(t,\varepsilon_{2m}),$$

onde $\tilde{f}_m(t,\varepsilon_{2m})$ é uma função contínua de $t \in [\varepsilon_{2m}, T)$.
Como o integrando é contínuo, então pelo Teorema do Valor Médio, existe um número α_k, $\varepsilon_{2m} < \alpha_k < \varepsilon_{2m+1} < \varepsilon$, tal que:

$$\|\partial_t^{m+1}u^k(.,\alpha_k)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon_{2m})}\tilde{f}_m(\varepsilon,\varepsilon_{2m}). \quad (2.77)$$

Da identidade $(2.43.m+1)$ tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= -(\partial_t^{m+1}u^k\nabla u^k+C_1\partial_t^m u^k\nabla\partial_t u^k+\ldots\\ &\quad \ldots+C_m\partial_t u^k\nabla\partial_t^m u^k,\partial_t^{m+1}u^k).\end{aligned}$$

Estimaremos o lado direito. Usando a desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq \|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^4}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^4}\\ &\quad +C_1\|\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^3}\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}+\ldots\\ &\quad +C_m\|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^3}\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2} \qquad (2.78)\end{aligned}$$

o primeiro termo sobre o lado direito pode ser estimado usando a desigualdade Sobolev (1.4) ($\|u\|_{\mathbf{L}^4}^4\leq C\|u\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^3$), e a desigualdade de Young (com $p=4$ e $q=\frac{4}{3}$). Então, aplicando as desigualdades mencionadas tem-se:

$$\begin{aligned}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^4}^2 &\leq C_1\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{3}{2}}\\ &\leq C\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^4\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2+\frac{1}{2}\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2. \qquad (2.79)\end{aligned}$$

Para os outros termos, usando as desigualdades (2.72) e logo a desigualdade de Young, obtem-se:

$$\begin{aligned}&\|\partial_t^{m+1-j}u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla\partial_t^j u^k\|_{\mathbf{L}^3}\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}\leq\\ &\quad\leq C_\partial\|\nabla\partial_t^{m+1-j}u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^j u^k\|_{\mathbf{L}^2}+\|\nabla\partial_t^j u^k\|_{\mathbf{L}^2})\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}\\ &\quad\leq C_{j\partial}\|\nabla\partial_t^{m+1-j}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^j u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|\nabla\partial_t^j u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2)+\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2. \qquad (2.80)\end{aligned}$$

Assim, levando as estimativas (2.79) e (2.80) em (2.78) tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq [C\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^4+m]\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2\\ &\quad +C_{1\partial}\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2)+\ldots\\ &\quad +C_{m\partial}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) \qquad (2.81)\end{aligned}$$

a qual é uma desigualdade diferencial quando (2.75) e (2.76) são considerados. Logo (2.81) pode ser integrada com a condição inicial (2.77) sobre um intervalo $[\alpha_k,t]$ de acordo com o Lema 1.10, obtendo:

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon_{2m+1}}^t\|\nabla\partial_\tau^{m+1}u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2d\tau &\leq \int_{\alpha_k}^t\|\nabla\partial_\tau^{m+1}u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2d\tau\leq\tilde{G}_{m+1}(t,\varepsilon_{2m+1}), \qquad (2.82)\\ \|\partial_t^{m+1}u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq \tilde{G}_{m+1}(t,\varepsilon_{2m+1}), \qquad (2.83)\end{aligned}$$

para $t \in [\varepsilon_{2m+1}, T)$, onde $\bar{G}_{m+1}(t, \varepsilon_{2m+1})$ é uma função contínua de $t \in [\varepsilon_{2m+1}, T)$. Como $[\varepsilon, T] \subset [\varepsilon_{2m+1}, T]$, então de (2.82) e (2.83) com ε em vez de ε_{2m+1}, tem-se:

$$\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_\varepsilon^t \|\nabla\partial_\tau^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \tilde{G}_{m+1}(t,\varepsilon) + \bar{G}_{m+1}(t,\varepsilon) = G_{m+1}(t,\varepsilon),$$

obtendo-se (2.37.$m+1$).
Além disso, de (2.82), pelo Teorema do Valor Médio, para todo inteiro k, existe um β_k , $\varepsilon_{2m+1} < \beta_k < \varepsilon_{2m+2} = \varepsilon_{2(m+1)} < \varepsilon$, tal que:

$$\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k(.,\beta_k)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon_{2m+1})}\bar{G}_{m+1}(\varepsilon, \varepsilon_{2m+1}). \tag{2.84}$$

De (2.41.$m+1$) temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= (\partial_t^{m+1}u^k\nabla u^k + C_1\partial_t^m u^k\nabla u_t^k + \ldots \\ &\quad + C_m u_t^k\nabla\partial_t^m u^k + u^k\nabla\partial_t^{m+1}u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k).\end{aligned}$$

Encontraremos uma estimativa para o lado direito da igualdade anterior. Usando a desigualdade de Hölder obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq \|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^3}\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\quad + C_1\|\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^3}\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \ldots \\ &\quad + C_m\|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^3}\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\quad + \sup_\Omega |u^k|\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}.\end{aligned}$$

Logo, usando as desigualdades (2.72), (1.16) e a desigualdade de Young, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq C_\partial\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) \\ &\quad + C_{1\partial}\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) + \ldots \\ &\quad + \ldots + C_{m\partial}\|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &\quad + \|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2).\end{aligned} \tag{2.85}$$

Então, (2.85) pode ser integrada com a condição inicial (2.84), de acordo com o Lema 1.10, num intervalo $[\beta_k, t]$, obtendo:

$$\int_{\varepsilon_{2(m+1)}}^t \|\mathbf{P}\triangle\partial_\tau^{m+1}u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \int_{\beta_k}^t \|\mathbf{P}\triangle\partial_\tau^{m+1}u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq h_{m+1}(t, \varepsilon_{2(m+1)}) \tag{2.86}$$

$$\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq f_{m+1}(t, \varepsilon_{2(m+1)}), \tag{2.87}$$

para $t\in[\varepsilon_{2(m+1)},T)$. Como $[\varepsilon,T]\subset[\varepsilon_{2(m+1)},T]$, então (2.86) e (2.87) continua válido com ε em vez de $\varepsilon_{2(m+1)}=\varepsilon_{2m+2}$.
Logo, de (2.86) pondo ε em vez de ε_{2m+2}, tem-se:

$$\int_{\varepsilon}^{t}\|\mathbf{P}\triangle\partial_\tau^{m+1}u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau\leq h_{m+1}(t,\varepsilon),$$

obtendo assim $(2.36.m+1)$.
De $(2.42.m+2)$ vem

$$\begin{aligned}\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= (\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k,\partial_t^{m+2}u^k)-(\partial_t^{m+1}u^k\nabla u^k+C_1\partial_t^m u^k\nabla u_t^k+\ldots.\\ &\quad +C_m u_t^k\nabla\partial_t^m u^k+u^k\nabla\partial_t^{m+1}u^k,\partial_t^{m+2}.u^k).\end{aligned}$$

Estimaremos o lado direito, usando as desigualdades de Hölder, (1.3), (1.15) e (1.16), temos:

$$\begin{aligned}\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}+C_\partial\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}+\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2})\\ &\quad +C_{1\partial}\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}+\|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2})+\ldots\\ &\quad +C_{m\partial}\|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}+\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}).\end{aligned}$$

Assim, elevando ao quadrado, tem-se:

$$\begin{aligned}\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq C_2\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2+C_\partial'\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2)\\ &\quad +C_{1\partial}'\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2)+\ldots\ldots\\ &\quad +C_{m\partial}'\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2).\end{aligned}\tag{2.88}$$

De (2.74), (2.86) e (2.87), tem-se:

$$\|\nabla\partial_t^n u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2\leq f_n(t,\varepsilon_{2n})\quad\text{e}\quad\int_{\varepsilon_{2n}}^{t}\|\mathbf{P}\triangle\partial_\tau^n u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau\leq h_n(t,\varepsilon_{2n})$$

para todo $n=1,2,...,m+1$, e assim pode-se integrar (2.88) sobre $[\varepsilon_{2m+2},T)$, obtendo-se:

$$\int_{\varepsilon_{2m+2}}^{t}\|\partial_\tau^{m+2}u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau\leq\tilde{f}_{m+1}(t,\varepsilon_{2m+2})\tag{2.89}$$

e logo, de (2.87) e (2.89), pondo ε em vez de ε_{2m+2} tem-se:

$$\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2+\int_{\varepsilon}^{t}\|\partial_\tau^{m+2}u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau\leq f_{m+1}(t,\varepsilon)+\tilde{f}_{m+1}(t,\varepsilon)=F_{m+1}(t,\varepsilon),$$

obtendo $(2.35.m+1)$.
De $(2.43.m+2)$ vem

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2+\|\nabla\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= -(\partial_t^{m+2}u^k\nabla u^k+C_1\partial_t^{m+1}u^k\nabla\partial_t u^k+\ldots\\ &\quad +C_m\partial_t^2 u^k\nabla\partial_t^m u^k+C_{m+1}\partial_t u^k\nabla\partial_t^{m+1}u^k,\partial_t^{m+2}u^k).\end{aligned}$$

Estimaremos o lado direito, usando sucessivamente a desigualdade de Hölder, a desigualdade (2.72) e a desigualdade de Young, obtemos:

$$
\begin{aligned}
|(\partial_t^{m+2}u^k\nabla u^k + C_1\partial_t^{m+1}u^k\nabla\partial_t u^k + \ldots + C_m\partial_t^2 u^k\nabla\partial_t^m u^k + C_{m+1}u_t^k\nabla\partial_t^{m+1}u^k, \partial_t^{m+2}u^k)| \leq \\
\leq\ & [\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^3} + C_1\|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^3} + \ldots \\
& + C_m\|\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^3} + C_{m+1}\|u_t^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}]\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
\leq\ & C_\partial\|\nabla\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\Delta u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2})\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
& + C_{1\partial}\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\Delta\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2})\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \ldots \\
& + C_{m\partial}\|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\Delta\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2})\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
& + C_{(m+1)\partial}\|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\Delta\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2})\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2} \\
\leq\ & \frac{1}{2}\|\nabla\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C'_\partial\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\Delta u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) \\
& + C'_{1\partial}\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\Delta u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) + \|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \ldots \\
& + C'_{m\partial}\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\Delta\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) + \|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
& + C'_{(m+1)\partial}\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\Delta\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2.
\end{aligned}
$$

Assim:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \\
\leq\ & [C'_\partial(\|\mathbf{P}\Delta u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) + C'_{1\partial}(\|\mathbf{P}\Delta u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) \\
& + \ldots\ldots + C'_{m\partial}(\|\mathbf{P}\Delta\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) \\
& + C'_{(m+1)\partial}(\|\mathbf{P}\Delta\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2)]\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
& + (\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \ldots + \|\nabla\partial_t^2 u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2). \quad (2.90)
\end{aligned}
$$

De (2.89), pelo Teorema do Valor Médio, para todo inteiro k, existe θ_k , $\varepsilon_{2m+2} < \theta_k < \varepsilon_{2m+3} < \varepsilon$, tal que:

$$
\|\partial_t^{m+2}u^k(.,\theta_k)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon_{2m+2})}\tilde{f}_{m+1}(\varepsilon, \varepsilon_{2m+2}), \quad (2.91)
$$

logo, podemos integrar a desigualdade diferencial (2.90) com a condição inicial (2.91) de acordo com o Lema 1.10, sobre um intervalo $[\theta_k, t]$, obtendo:

$$
\begin{aligned}
\int_{\varepsilon_{2m+3}}^t \|\nabla\partial_\tau^{m+2}u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau &\leq \int_{\theta_k}^t \|\nabla\partial_\tau^{m+2}u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \bar{G}_{m+2}(t, \varepsilon_{2m+3}), \quad (2.92) \\
\|\partial_t^{m+2}u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq \tilde{G}_{m+2}(t, \varepsilon_{2m+3}), \quad (2.93)
\end{aligned}
$$

para $\varepsilon_{2m+3} < t < T$, onde $\bar{G}_{m+2}(t, \varepsilon_{2m+3})$ é uma função contínua de $t \in [\varepsilon_{2m+3}, T)$. Também (2.92) e (2.93) é válido com ε em vez de ε_{2m+3}, desde que $[\varepsilon, T] \subset [\varepsilon_{2m+3}, T]$.

De $(2.41.m+1)$ temos:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= (\partial_t^{m+2}u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k) + (\partial_t^{m+1}u^k\nabla u^k + C_1\partial_t^m u^k\nabla u_t^k + \ldots \\
&\quad + C_m\partial_t u^k\nabla\partial_t^m u^k + u^k\nabla\partial_t^{m+1}u^k, \mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k).
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Hölder, (1.3), (1.15) e (1.16), tem-se:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq [\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^3} + C_1\|\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^3} + \ldots \\
&\quad + C_m\|\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^3} + \sup_\Omega |u^k|\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}]\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}, \\
\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2} + C_\partial\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}) \\
&\quad + C_{1\partial}\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}) + \ldots \\
&\quad + C_{m\partial}\|\nabla\partial_t u^k\|_{\mathbf{L}^2}(\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}).
\end{aligned}$$

Então, elevando ao quadrado, logo usando (2.93), $(2.35.m+1)$ e as estimativas da hipótese indutiva, tem-se:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq C\|\partial_t^{m+2}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C'_\partial\|\nabla\partial_t^{m+1}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) \\
&\quad + C'_{1\partial}\|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2) + \ldots \\
&\quad + C'_{m\partial}\|\nabla u_t^k\|_{\mathbf{L}^2}^2(\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t^m u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2), \\
&\leq C\tilde{G}_{m+2}(t,\varepsilon) + C'_\partial F_{m+1}[g_0 + F_0](t,\varepsilon) + C'_{1\partial}F_m[g_1 + F_1](t,\varepsilon) \\
&\quad + \ldots + C'_{m\partial}F_1[g_m + F_m](t,\varepsilon) = g_{m+1}(t,\varepsilon),
\end{aligned}$$

obtendo-se $(2.38.m+1)$.
Completa-se assim, a prova do Teorema 2.2.

2.4 Soluções Clássicas Obtidas Como Limites de Soluções Aproximadas

Usando somente as estimativas (2.19), (2.20), (2.22), mostrou-se no Teorema 2.1, que as aproximações de Galerkin convergem para uma solução generalizada, isto é, se $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1$, existe uma solução local forte $\mathbf{u} \in L^\infty([0,T'],\mathcal{H}_1)$ com $\mathbf{u}_t, D_x^2\mathbf{u}, \nabla p \in L^2([0,T'],\mathbf{L}^2(\Omega))$ para $0 < T' < T$ (para isto sómente precisamos da convergência de uma subsequência das aproximações de Galerkin, o que é provado com argumentos de compacidade, e assim toda a sequência de aproximações converge). Primeiro, se estabelece a regularidade de u com respeito ao tempo t; mais precisamente quer-se mostrar que $\mathbf{u} \in C^\infty((0,T),\mathbf{H}^2(\Omega))$. De fato, por definição

$$\|\partial_t^n u\|_{\mathbf{H}^2}^2 = \|\partial_t^n u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t^n u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|D_x^2\partial_t^n u\|_{\mathbf{L}^2}^2; \tag{2.94}$$

da desigualdade (1.12) do Capítulo 1, tem-se:

$$\|D_x^2\partial_t^n u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C_\partial(\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^n u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla\partial_t^n u\|_{\mathbf{L}^2}^2). \tag{2.95}$$

Então, levando (2.95) em (2.94), tem-se

$$\|\partial_t^n u\|_{\mathbf{H}^2}^2 \leq \|\partial_t^n u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_{1\partial}\|\nabla\partial_t^n u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\partial\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^n u\|_{\mathbf{L}^2}^2.$$

Usando as estimativas do Teorema 2.2-(2.37.n), (2.35.n) e (2.38.n), tem-se:

$$\|\partial_t^n u(.,t)\|_{\mathbf{H}^2}^2 \leq G_n(t,\varepsilon) + C_{1\partial}F_n(t,\varepsilon) + C_\partial g_n(t,\varepsilon)$$

sobre $[\varepsilon, T]$, com $\varepsilon \in (0,T)$. Portanto,

$$\max_{t\in(0,T)} \|\partial_t^n \mathbf{u}(.,t)\|_{\mathbf{H}^2} < \infty \quad , \text{ logo} \quad \partial_t^n \mathbf{u} \in C((0,T),\mathbf{H}^2(\Omega)) \qquad \forall n = 0,1,\ldots.$$

Assim,

$$\mathbf{u} \in C^\infty((0,T),\mathbf{H}^2(\Omega)).$$

Além disso, pelo resultado (2.23) do Teorema 2.1, e a estimativa do Teorema 2.2-(2.38.0), temos que

$$\mathbf{u} \in L^\infty([0,T'],\mathbf{H}^2(\Omega)).$$

Então

$$\mathbf{u} \in C^\infty((0,T),\mathbf{H}^2(\Omega)) \cap L^\infty([0,T'],\mathbf{H}^2(\Omega)).$$

Queremos a regularidade de uma solução clássica, isto é mostrar que $\mathbf{u} \in C(\bar{\Omega} \times [0,T))$:
Do Teorema 2.1-(2.25), tem-se que $\mathbf{u}(.,t) \to \mathbf{u}_0$ fortemente em $\mathcal{H}_1$ quando $t \to 0^+$, e desde que $\mathbf{u} \in L^\infty([0,T'],\mathbf{H}^2(\Omega))$, então $\mathbf{u}(.,t) \to \mathbf{u}_0$ fracamente em $\mathbf{H}^2(\Omega)$. Do Teorema 1.9, a inclusão $\mathbf{H}^2(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ é compacta; logo, segue-se que $\mathbf{u}(.,t) \to \mathbf{u}_0$ fortemente em $C(\bar{\Omega}$, isto é, $\mathbf{u}(\bar{x},t) \to \mathbf{u}_0(x)$ continuamente como $(\bar{x},t) \to (x,0)$. Assim, se $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ tem-se que $\mathbf{u} \in C(\bar{\Omega} \times [0,T))$.

2.5 A Existência de Subsequência Uniformemente Convergente das Aproximações de Galerkin

Como uma consequência do Teorema 2.2 tem-se

Corolário 2.2 *Para qualquer número natural $n = 0,1,2,\ldots$, e qualquer $\varepsilon \in (0,T)$ existe uma subsequência $\{u^{k^*}\}$ das aproximações de Galerkin $\{u^k\}$ de (2.1), $k = 1,2,\ldots$, a qual converge em $\mathbf{H}^m(\Omega)$ uniformemente sobre $[\varepsilon,T]$ para a solução $\mathbf{u}$ do problema de Navier-Stokes, $m = 0,1$. Igualmente, esta convergência mantem-se para todas as suas derivadas com respeito ao tempo até a ordem n. No caso $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1$ e $n = m = 0$ ou $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ e $n = 0$, $m = 0,1$, a convergência é uniforme sobre [0,T].*

Prova

De acordo com o Teorema de Ascoli-Arzelá tem-se que mostrar que $\{u^k\}$ é equicontínua e uniformemente limitada.

$\{u^k\}$ é equicontínua em $\mathcal{H}_m$: de fato, para $s, t \in [\varepsilon, T]$ no caso $m = 0$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se

$$\begin{aligned}(u^k(x,t) - u^k(x,s))^2 &= [\int_s^t 1.(\partial_\tau u^k(.,\tau))d\tau]^2 \leq (\int_s^t d\tau)\ (\int_s^t (\partial_\tau u^k(.,\tau))^2 d\tau) \\ &\leq |t-s||\int_s^t (\partial_\tau u^k(.,\tau))^2 d\tau| \qquad \text{quase sempre sobre } \Omega.\end{aligned}$$

Integrando sobre Ω, vem

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u^k(x,t) - u^k(x,s))^2 dx &\leq |t-s| \int_\Omega |\int_s^t (\partial_\tau u^k(x,\tau))^2 d\tau| dx \\ \|u^k(.,t) - u^k(.,s)\|^2_{\mathbf{L}^2} &\leq |t-s| \int_s^t \int_\Omega |\partial_\tau u^k(x,\tau)|^2 dx d\tau \\ &\leq |t-s| \int_s^t \|\partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau.\end{aligned}$$

Usando agora o Teorema 2.2-(2.35.0), temos

$$\|u^k(.,t) - u^k(.,s)\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq |t-s| F_0(T,\varepsilon).$$

Então $\{u^k(.,t)\}$ é equicontínua em $\mathcal{H}_0 = \overline{\mathbf{D}}^{L^2}$. No caso $m = 1$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, para $t, s \in [\varepsilon, T]$, tem-se: :

$$\begin{aligned}(\nabla u^k(x,t) - \nabla u^k(x,s))^2 &= (\int_s^t \partial_\tau \nabla u^k(x,\tau)\ d\tau)^2 = (\int_s^t \nabla \partial_\tau u^k(x,\tau)\ d\tau)^2 \\ &\leq |t-s||\int_s^t (\nabla \partial_\tau u^k(x,\tau))^2 d\tau| \qquad \text{quase sempre sobre } \Omega\end{aligned}$$

e integrando sobre Ω

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\nabla u^k(x,t) - \nabla u^k(x,s))^2 dx &\leq |t-s| \int_\Omega \int_s^t |\nabla \partial_\tau u^k(x,\tau)|^2 d\tau dx \\ &\leq |t-s| \int_s^t \|\nabla \partial_\tau u^k(x,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau.\end{aligned}$$

Do Teorema 2.2- (2.37.1), tem-se

$$\|\nabla u^k(.,t) - \nabla u^k(.,s)\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq |t-s| G_1(T,\varepsilon).$$

Como $\|u^k\|_{\mathbf{H}^1}$ é equivalente a $\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}$, deduz-se que $\{u^k(.,t)\}$ é equicontínua em $\mathcal{H}_1$.

$\{u^k(.,t)\}$ é uniformemente limitada em $\mathcal{H}_m$. De fato:

Observando as estimativas do Teorema 2.2-(2.38.0), obtem-se estimativas em $\mathbf{H}^2(\Omega)$ por meio da desigualdade de Cattabriga, isto é:

$$\|u^k(.,t)\|_{\mathbf{H}^2} \leq C\|\mathbf{P}\Delta u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq Cg_{0,\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$$

No caso $m = 0$ tem-se que $\mathbf{H}^2(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$, logo, $\exists\, C_1 > 0$ tal que $\|u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C_1\|u^k(.,t)\|_{\mathbf{H}^2} \leq C_2 g_{0,\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$, então $\{u^k(.,t)\}$ é uniformemente limitada em $\mathcal{H}_0$.
No caso $m = 1$, $\mathbf{H}^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$, então $\|u^k(.,t)\|_{\mathbf{H}^1} \leq C_3 g_{0,\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$, logo $\{u^k(.,t)\}$ é uniformemente limitada em $\mathcal{H}_1$.
Logo, considerando $\partial_t^j u^k$ em vez de u^k e assim por diante para $j = 1, 2, ...$, usando as estimativas do Teorema 2.2-(2.35.j), (2.37.j), mostra-se que $\{\partial_t^j u^k\}$ é equicontínua e uniformemente limitada na norma de $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_1$.
De fato:
Do Teorema 2.2, a estimativa (2.35.j) implica que $\{\partial_t^j u^k\}$ é equicontínua em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, e pela estimativa (2.37.j) tem-se que $\{\partial_t^j u^k\}$ é uniformemente limitada em $\mathbf{L}^2(\Omega)$.
Por outro lado, a estimativa (2.37.j) implica que $\{\partial_t^j u^k\}$ é equicontínua em $\mathbf{H}^1(\Omega)$ e pela estimativa (2.35.j) resulta que $\{\partial_t^j u^k\}$ é uniformemente limitada em $\mathbf{H}^1(\Omega)$.
Então, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, em cada passo selecionando uma subsequência apropriada, obtem-se uma subsequência $\{u^{k^*}\}$ de $\{u^k\}$, a qual converge na norma de $\mathcal{H}_m$ $(m = 0, 1)$ uniformemente sobre $[\varepsilon, T]$ junto com a sequência de todas as suas derivadas $\{\partial_t^j u^{k^*}\}$ até a ordem n. Como os u^{k^*} são contínuas e a covergência é uniforme, por um teorema conhecido em espaços de Banach, o limite $\partial_t^j \lim_{k^*\to\infty} u^{k^*} = \lim_{k^*\to\infty} \partial_t^j u^{k^*}$ existe em $C([\varepsilon, T], \mathcal{H}_0)$ para $j = 0, 1, 2, ..., n$.
No caso $\mathrm{u}_0 \in \mathcal{H}_1$ e $n = m = 0$, do Teorema 2.2-(2.33), tem-se que $\{u^k(.,t)\}$ é equicontínua na norma de $\mathcal{H}_0$ e se, além disso, usamos o fato que $\|u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C\|\nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2$, temos que $\{u^k(.,t)\}$ é uniformemente limitada sobre $[0, T]$ na norma de $\mathcal{H}_0$. Então, $\{u^{k^*}\}$ converge uniformemente em $\mathcal{H}_0$ sobre $[0, T]$.
No caso $\mathrm{u}_0 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ e $n = 0$, $m = 0, 1$:
Se $n = 0$ e $m = 0$, desde que $\mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega) \subset \mathcal{H}_1$, estamos no caso acima.
Se $n = 0$ e $m = 1$, do Teorema 2.2-(2.39), $\forall s, t \in [0, T]$ temos

$$\|\nabla u^k(.,t) - \nabla u^k(.,s)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq |t - s| \int_0^t \|\nabla \partial_\tau u^k(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq |t - s| G_1(T).$$

Logo, $\{u^k\}$ é equicontínua em $\mathbf{H}^1(\Omega)$; e do Teorema 2.2-(2.40), junto com a desigualdade de Cattabriga, tem-se

$$\|u^k(.,t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 \leq \|u^k(.,t)\|_{\mathbf{H}^2}^2 \leq \|\mathbf{P}\Delta u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq Cg_{0,0},$$

a qual implica que $\{u^k\}$ é uniformemente limitada em $\mathbf{H}^1(\Omega)$ sobre $[0, T]$. Então, $\{u^{k^*}\}$ converge uniformemente em $\mathcal{H}_m, m = 0, 1$ sobre $[0, T]$.

Seja $u^* \epsilon C([0,T],\mathcal{H}_0)$ o limite dos u^{k^*}, usando as estimativas (2.19), (2.20), (2.22) para as aproximações de Galerkin como no Teorema 2.1, temos que u^* e qualquer outro ponto de acumulação de $\{u^k\}$ em $L^2([0,T],\mathcal{H}_0)$ (com respeito à convergência uniforme forte) é uma solução de (2.1), a qual satisfaz todas as propriedades listadas no Teorema 2.2. Da unicidade de tal solução temos que $u^*(.,t) = \mathbf{u}(.,t)$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, e a sequência $\{u^k\}$ pode ter no máximo um ponto de acumulação em $L^2([0,T],\mathcal{H}_0)$. Portanto, toda a sequência $\{u^k(.,t)\}$ converge para $\mathbf{u}(.,t)$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ uniformemente com respeito a t.
Também, a sequência $\{\partial_t^j u^k(.,t)\}$ converge (fortemente) em $\mathcal{H}_m$ para o respectivo limite $\partial_t^j \mathbf{u}(.,t)$ uniformemente sobre $[\varepsilon,T]$ e sobre $[0,T]$ nos casos especiais acima mencionados.

Capítulo 3

Estimativas de Erro

3.1 Estimativa de Erro em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ para as Soluções Aproximadas

Seja [0,T] o intervalo de tempo sobre o qual o problema de Navier-Stokes

$$
\begin{aligned}
\partial_t u - \Delta u + \nabla p &= -u.\nabla u && \text{em } \Omega \,\mathrm{x}\, (0,\infty) \\
\nabla . u &= 0 && \text{em } \Omega \,\mathrm{x}\, (0,\infty) \\
u|_{\partial\Omega} &= 0 && \forall t \geq 0 \\
u &= \mathrm{u}_o && \text{para } t = 0,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

tem uma única solução forte u.
Seja ainda $\{e_i\}$ o sistema de autofunções correspondentes a os autovalores $\{\lambda_i\}$ do problema linear de Stokes:

$$
-\mathbf{P}\Delta v = h \quad \text{com } h \,\epsilon\, \mathcal{H}_0 \;\text{ e }\; v \,\epsilon\, \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)
$$

Do Lema 1.3, os $\{e_i\}$ formam um sistema ortonormal completo em $\mathcal{H}_0$. Vai-se mostrar

Teorema 3.1 *Suponhamos que a velocidade inicial* $\mathrm{u}_0 \,\epsilon\, \mathcal{H}_1$. *Então as aproximações de Galerkin*

$$
u^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t) e_i(x) \tag{3.2}
$$

da solução u *de (3.1) satisfazem a estimativa de erro:*

$$
\|\mathrm{u}(.,t) - u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|\nabla \mathrm{u}(.,\tau) - \nabla u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}} \tag{3.3}
$$

para qualquer $t \in [0,T]$. *A função contínua* F_0^* *da variável* t *depende apenas de* T *e a norma Dirichlet de* $\mathbf{u}_0$ ($\|\nabla \mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}$). *(3.3) vale também com qualquer* u^l *em vez de* $\mathbf{u}$, $l > k$.

Prova

Sejam u^k e u^l, com $l > k$, duas aproximações de Galerkin (3.2) da solução $\mathbf{u}$ de (3.1). Das equações aproximadas:

$$\begin{aligned} \partial_t u^j - \mathbf{P}\triangle u^j &= -\mathbf{P}_j(u^j \nabla u^j) \quad \text{em } \Omega \text{ e } t > 0, \\ u^j(0) &= \mathbf{P}_j \mathbf{u}_0 \quad \text{para } t = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

para $j = k$ e l, por subtração obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_t u^l - \partial_t u^k - \mathbf{P}\triangle u^l + \mathbf{P}\triangle u^k &= -\mathbf{P}_l(u^l \nabla u^l) + \mathbf{P}_k(u^k \nabla u^k) \\ \partial_t(u^l - u^k) - \mathbf{P}\triangle(u^l - u^k) &= -\mathbf{P}_l(u^l \nabla u^l) + \mathbf{P}_k(u^l \nabla u^l) - \mathbf{P}_k(u^l \nabla u^l) + \mathbf{P}_k(u^k \nabla u^k) \end{aligned}$$

Pondo $w = u^l - u^k$, temos que $w(.,0) = u^l(0) - u^k(0) = \mathbf{P}_l \mathbf{u}_0 - \mathbf{P}_k \mathbf{u}_0 = (\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)\mathbf{u}_0$. Logo, na equação acima, tem-se:

$$\begin{aligned} \partial_t w - \mathbf{P}\triangle w &= -(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l \nabla u^l) - \mathbf{P}_k(u^l \nabla u^l - u^k \nabla u^k) \\ &= -(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l \nabla u^l) - \mathbf{P}_k(u^l \nabla u^l - u^l \nabla u^k + u^l \nabla u^k - u^k \nabla u^k) \\ &= -(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l \nabla u^l) - \mathbf{P}_k(u^l \nabla w + w \nabla u^k). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \partial_t w - \mathbf{P}\triangle w &= -(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l \nabla u^l) - \mathbf{P}_k(u^l \nabla w + w \nabla u^k), \\ w(.,0) &= (\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)\mathbf{u}_0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Sabendo que $\int_\Omega(-\mathbf{P}\triangle u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v$, e tomando o produto interno de (3.5) por w em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, obtemos:

$$\begin{aligned} (\partial_t w, w) - (\mathbf{P}\triangle w, w) &= -((\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l \nabla u^l) + \mathbf{P}_k(u^l \nabla w + w \nabla u^k), w), \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= -\int_\Omega [(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l \nabla u^l) + \mathbf{P}_k(u^l \nabla w + w \nabla u^k)] w dx, \\ \frac{d}{dt}\|w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= -2[\int_\Omega (\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l \nabla u^l) w dx + \int_\Omega \mathbf{P}_k(u^l \nabla w) w dx \\ &\quad + \int_\Omega \mathbf{P}_k(w \nabla u^k) w dx], \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\|w(.,0)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \|(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}^2. \tag{3.7}$$

Estimaremos os termos do lado direito de (3.6) um após de outro. Utilizando o Lema 1.6 Teorema 2.2-(2.33), e desde que $u^k = \mathbf{P}_k u^l$ se $l > k$, temos:

$$\|w(.,0)\|^2_{\mathbf{L}^2} = \|u^l(.,0) - u^k(.,0)\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq \frac{\|\nabla u^l(.,0)\|^2_{\mathbf{L}^2}}{\lambda_{k+1}} \leq \frac{F_0(0)}{\lambda_{k+1}}$$

Então,

$$\|w(.,0)\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq \frac{F_0(0)}{\lambda_{k+1}}. \tag{3.8}$$

Observe-se que $\mathbf{P}_l, \mathbf{P}_k$ e $\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k$ são projeções ortogonais de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e a equação

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)w &= (\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l - u^k) = \mathbf{P}_l u^l - \mathbf{P}_l u^k - \mathbf{P}_k u^l + \mathbf{P}_k u^k \\ &= u^l - u^k - \mathbf{P}_k u^l + u^k = u^l - \mathbf{P}_k u^l = (I - \mathbf{P}_k)u^l \text{ para } l > k.\end{aligned}$$

Assim, para qualquer $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, tem-se:

$$\int_\Omega [(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)f]w dx = \int_\Omega f[(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)w dx] = \int_\Omega f(I - \mathbf{P}_k)u^l dx.$$

Logo, na primeira integral de (3.6), temos:

$$\int_\Omega [(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l \nabla u^l)]w dx = \int_\Omega (u^l \nabla u^l)(I - \mathbf{P}_k)u^l dx. \tag{3.9}$$

Encontraremos agora uma estimativa para o fator $u^l \nabla u^l$:
Para qualquer $f \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$, do Teorema de imersão de Sobolev sobre regiões limitadas tri-dimensionais, tem-se: $\mathbf{H}^2(\Omega) \subset \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, logo existe $C_1 > 0$ tal que:

$$\|f\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C_1 \|f\|_{\mathbf{H}^2}. \tag{3.10}$$

Da desigualdade de Cattabriga

$$\|f\|_{\mathbf{H}^2} \leq C_2 \|\mathbf{P}\triangle f\|_{\mathbf{L}^2}. \tag{3.11}$$

Então de (3.10) e (3.11) tem-se:

$$\|f\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C_3 \|\mathbf{P}\triangle f\|_{\mathbf{L}^2}. \tag{3.12}$$

Portanto, para arbitrários $g \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ e $h \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, usando a desigualdade de Cauchy Schwarz e (3.12), obtemos a estimativa:

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (f\nabla g)h dx\right| &\leq \|f\nabla g\|_{\mathbf{L}^2}\|h\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^\infty}\|\nabla g\|_{\mathbf{L}^2}\|h\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C_3\|\mathbf{P}\triangle f\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla g\|_{\mathbf{L}^2}\|h\|_{\mathbf{L}^2}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Aplicando a desigualdade de Young em (3.13) tem-se:

$$|\int_\Omega (f\nabla g)h dx| \leq \delta\|\nabla g\|^2_{\mathbf{L}^2} + C_\delta\|\mathbf{P}\triangle f\|^2_{\mathbf{L}^2}\|h\|^2_{\mathbf{L}^2}, \tag{3.14}$$

$$|\int_\Omega (f\nabla g)h dx| \leq \delta\|h\|^2_{\mathbf{L}^2} + C_\delta\|\mathbf{P}\triangle f\|^2_{\mathbf{L}^2}\|\nabla g\|^2_{\mathbf{L}^2}, \tag{3.15}$$

onde C_δ depende apenas do arbitrário valor de $\delta > 0$. Agora estimamos o lado direito de (3.9) usando (3.13), isto é:

$$|\int_\Omega (u^l\nabla u^l)(I-\mathbf{P}_k)u^l dx| \leq C_3\|\mathbf{P}\triangle u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|(I-\mathbf{P}_k)u^l\|_{\mathbf{L}^2}. \tag{3.16}$$

Do Lema 1.7, temos que:

$$\|(I-\mathbf{P}_k)u^l\|^2_{\mathbf{L}^2} = \|u^l - \mathbf{P}_k u^l\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq \frac{1}{\lambda^2_{k+1}}\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2} \tag{3.17}$$

e aplicando (3.17) e Teorema 2.2-(2.33) em (3.16):

$$|\int_\Omega (u^l\nabla u^l)(I-\mathbf{P}_k)u^l dx| \leq \frac{C_3}{\lambda_{k+1}}\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u^l\|_{\mathbf{L}^2} \leq \frac{C_3}{\lambda_{k+1}}\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}F^{\frac{1}{2}}_{0,0}.$$

Assim, considerando (3.9), obtemos a estimativa

$$|\int_\Omega [(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l\nabla u^l)]w dx| \leq \frac{C_3}{\lambda_{k+1}}\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}F^{\frac{1}{2}}_{0,0} \tag{3.18}$$

para a primeira integral em (3.6).
Para encontrar uma estimativa para a segunda integral de (3.6) observe-se que, sendo $\mathbf{P}_k$ projeção ortogonal em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, para qualquer $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$:

$$\|\mathbf{P}_k f\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^2}. \tag{3.19}$$

Então, com a ajuda de (3.19),(3.13) e (3.14):

$$\begin{aligned} |\int_\Omega [\mathbf{P}_k(u^l\nabla w)]w dx| &\leq \|\mathbf{P}_k(u^l\nabla w)\|_{\mathbf{L}^2}\|w\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u^l\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}\|w\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C_3\|\mathbf{P}\triangle u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2}\|w\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq \delta\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} + C_\delta\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}\|w\|^2_{\mathbf{L}^2}, \end{aligned}$$

e obtemos

$$|\int_\Omega [\mathbf{P}_k(u^l\nabla w)]w dx| \leq \delta\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} + C_\delta\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}\|w\|^2_{\mathbf{L}^2}. \tag{3.20}$$

Para a terceira integral de (3.6), precisamos de uma estimativa contendo $||\nabla w||_{\mathbf{L}^2}$, o qual é estimado pelo segundo termo do lado esquerdo de (3.6). Primeiro aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, logo (3.19), para obter:

$$|\int_\Omega [\mathbf{P}_k(f\nabla g)]h dx| \leq ||\mathbf{P}_k(f\nabla g)||_{\mathbf{L}^2}||h||_{\mathbf{L}^2} \leq ||f\nabla g||_{\mathbf{L}^2}||h||_{\mathbf{L}^2}, \tag{3.21}$$

da desigualdade de Hölder, para $f \in \mathbf{L}^6(\Omega)$ e $\nabla g \in \mathbf{L}^3(\Omega)$, temos:

$$||f\nabla g||_{\mathbf{L}^2} \leq ||f||_{\mathbf{L}^6}||\nabla g||_{\mathbf{L}^3}. \tag{3.22}$$

Na desigualdade de Sobolev $||\phi||_{\mathbf{L}^3} \leq C(||\nabla\phi||_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}||\phi||_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} + ||\phi||_{\mathbf{L}^2})$ [5,pag 27] para funções $\phi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, substituimos ∇g em vez de ϕ e usamos a desigualdade de Cattabriga (3.11) para $g \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$, isto é:

$$\begin{aligned} ||\nabla g||_{\mathbf{L}^3} &\leq C(||\nabla(\nabla g)||_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}||\nabla g||_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} + ||\nabla g||_{\mathbf{L}^2}) \leq C_1(||D^2 g||_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}}||\nabla g||_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} + ||\nabla g||_{\mathbf{L}^2}) \\ &\leq C_1(||g||_{\mathbf{H}^2}^{\frac{1}{2}}||g||_{\mathbf{H}^2}^{\frac{1}{2}} + ||g||_{\mathbf{H}^2}) = 2C_1||g||_{\mathbf{H}^2} \leq C_4||\mathbf{P}\triangle g||_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned}$$

Obtemos, para todo $g \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$:

$$||\nabla g||_{\mathbf{L}^3} \leq C_4||\mathbf{P}\triangle g||_{\mathbf{L}^2}. \tag{3.23}$$

Usando a desigualdade de Sobolev (1.3) ($||f||_{\mathbf{L}^6} \leq C_5||\nabla f||_{\mathbf{L}^2}$) e (3.23) em (3.22), tem-se:

$$||f\nabla g||_{\mathbf{L}^2} \leq C_6||\nabla f||_{\mathbf{L}^2}||\mathbf{P}\triangle g||_{\mathbf{L}^2} \tag{3.24}$$

e, substituindo (3.24) em (3.21), vem

$$|\int_\Omega [\mathbf{P}_k(f\nabla g)]h dx| \leq C_6||\nabla f||_{\mathbf{L}^2}||\mathbf{P}\triangle g||_{\mathbf{L}^2}||h||_{\mathbf{L}^2}. \tag{3.25}$$

De acordo com a desigualdade de Young, para $f \in \mathcal{H}_1$, $h \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ e $g \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$:

$$|\int_\Omega [\mathbf{P}_k(f\nabla g)]h dx| \leq \delta||\nabla f||_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\delta||\mathbf{P}\triangle g||_{\mathbf{L}^2}^2||h||_{\mathbf{L}^2}^2, \tag{3.26}$$

$$|\int_\Omega [\mathbf{P}_k(f\nabla g)]h dx| \leq \delta||h||_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\delta||\nabla f||_{\mathbf{L}^2}^2||\mathbf{P}\triangle g||_{\mathbf{L}^2}^2; \tag{3.27}$$

novamente o coeficiente $C_\delta > 0$ depende apenas do (arbitrário) valor $\delta > 0$.
De (3.26) temos, para a terceira integral de (3.6):

$$\int_\Omega [\mathbf{P}_k(w\nabla u^k)]w dx| \leq \delta||\nabla w||_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\delta||\mathbf{P}\triangle u^k||_{\mathbf{L}^2}^2||w||_{\mathbf{L}^2}^2. \tag{3.28}$$

Substituindo (3.18), (3.20) e (3.28) em (3.6), fornece

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|w\|^2_{\mathbf{L}^2} + 2\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} &\leq \frac{2C_3}{\lambda_{k+1}}\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}F^{\frac{1}{2}}_{0,0} + 4\delta\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} + 2C_\delta[\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2} \\
&\quad + \|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}]\|w\|^2_{\mathbf{L}^2}, \\
\frac{d}{dt}\|w\|^2_{\mathbf{L}^2} + (2-4\delta)\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} &\leq \frac{2C_3}{\lambda_{k+1}}\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}F^{\frac{1}{2}}_{0,0} \\
&\quad + 2C_\delta[\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}]\|w\|^2_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}$$

Agora, assumimos $\delta \in (0, \frac{1}{4}]$, temos $1 \leq 2 - 4\delta$, logo:

$$\frac{d}{dt}\|w\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq 2C_\delta[\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}]\|w\|^2_{\mathbf{L}^2} + \frac{2C_3}{\lambda_{k+1}}\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}F^{\frac{1}{2}}_{0,0}. \quad (3.29)$$

Desde que pelo Teorema 2.2-(2.34) tem-se que $\int_0^t \|\mathbf{P}\triangle u^l(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2}d\tau \leq h_0(t)$, então (3.29) com a condição inicial (3.8) é uma desigualdade diferencial e pode ser integrada com respeito a t, de acordo com o Lema 1.10, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
\|w(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|\nabla w(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2}d\tau &\leq 2C_\delta \int_0^t (\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2})\|w\|^2_{\mathbf{L}^2}d\tau \\
&\quad + \frac{2C_3}{\lambda_{k+1}}F^{\frac{1}{2}}_{0,0}\int_0^t \|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}d\tau + \|w(.,0)\|^2_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq \int_0^t 2C_\delta(\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2})\|w(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2}d\tau \\
&\quad + \frac{2C_3F^{\frac{1}{2}}_{0,0}h_0(t) + F_0(0)}{\lambda_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\|w(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|\nabla w(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2}d\tau \leq \frac{a(t)}{\lambda_{k+1}} + \int_0^t b(\tau)\|w(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2}d\tau, \quad (3.30)$$

contendo as funções contínuas:

$$\begin{aligned}
a(t) &= F_0(0) + 2C_3F^{\frac{1}{2}}_{0,0}h_0(t), \\
b(t) &= 2C_\delta[\|\mathbf{P}\triangle u^l(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2}], \quad (3.31) \\
\int_0^t b(\tau)d\tau &\leq 2C_\delta[h_0(t) + h_0(t)] = 4C_\delta h_0(t).
\end{aligned}$$

Observe-se que a(t) é continuamente diferenciável (pois $h_0(t)$ é continuamente diferenciável).

Considerando (3.30), a Proposição 1.7, fornece:

$$\|w(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \frac{a(t)exp(\int_0^t b(\tau)d\tau)}{\lambda_{k+1}}[1 + \int_0^t b(\tau)d\tau] = \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}},$$

onde, de (3.31),

$$F_0^*(t) = [F_0(0) + 2C_3 F_{0,0}^{\frac{1}{2}} h_0(t)] e^{4C_\delta h_0(t)}(1 + 4C_\delta h_0(t)). \tag{3.32}$$

Assim,

$$\|u^l(.,t) - u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_0^t \|\nabla(u^l(.,\tau) - u^k(.,\tau))\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}}, \tag{3.33}$$

sendo $\frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}}$ independente da particular aproximação de Galerkin u^l , $l > k$.
Desde que $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1$, por Corolário 2.2, existe uma subsequência $\{u^{l'}(.,t)\}$ de $\{u^l(.,t)\}$, tal que $\{u^{l'}(.,t)\}$ converge em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ uniformemente sobre [0,T] para a solução de Navier-Stokes $\mathbf{u}(.,t)$. Portanto,

$$\lim_{l'\to\infty} \|u^{l'}(.,t) - u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \|\mathbf{u}(.,t) - u^k(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2$$

De (3.33) temos que $\|\nabla(u^l - u^k)\|_{L^2([0,t],\mathbf{L}^2(\Omega))} = \int_0^t \|\nabla(u^l - u^k)(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau$ é uniformemente limitada. Então $\{\nabla(u^{l'} - u^k)\}$ converge fracamente para $\nabla(\mathbf{u} - u^k)$ em $L^2([0,t],\mathbf{L}^2(\Omega))$ para qualquer $t \in (0,T)$. Assim, temos:

$$\int_0^t \|\nabla(\mathbf{u} - u^k)(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \limsup_{l'\to\infty} \int_0^t \|\nabla(u^{l'} - u^k)(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau$$

e logo,

$$\limsup_{l'\to\infty} \int_0^t \|\nabla(u^{l'} - u^k)(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \limsup_{l\to\infty} \int_0^t \|\nabla(u^l - u^k)(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau,$$

$$\|(\mathbf{u} - u^k)(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \lim_{l'\to\infty} \|(u^{l'} - u^k)(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \limsup_{l\to\infty} \|(u^l - u^k)(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2.$$

Então passando ao limite (3.33), temos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_0^t \|\nabla\mathbf{u} - u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau &\leq \lim_{l'\to\infty} \|u^{l'} - u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \limsup_{l'\to\infty} \int_0^t \|\nabla(u^{l'} - u^k)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \\ &\leq \limsup_{l\to\infty} \|u^l - u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \limsup_{l\to\infty} \int_0^t \|\nabla(u^l - u^k)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \\ &\leq \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}}, \end{aligned}$$

o que prova que

$$\|(\mathbf{u} - u^k)(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_0^t \|\nabla(\mathbf{u} - u^k)(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}}.$$

3.2 Estimativa de Erro na Norma de Dirichlet para as Soluções Aproximadas das Equações de Navier-Stokes

Seja [0,T] um intervalo de tempo sobre o qual o problema (3.1) tem uma única solução forte $\mathbf{u}$, e as afirmações do Teorema 2.2 são satisfeitas. Dando mais regularidade à velocidade inicial $\mathbf{u}_0$ obtem-se outra estimativa de erro na norma $\mathbf{H}^1(\Omega)$, como mostra o seguinte teorema:

Teorema 3.2 *Suponhamos que a velocidade inicial* $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$. *Então, as aproximações de Galerkin (3.2), da solução* $\mathbf{u}$ *de (3.1), satisfazem a estimativa de erro:*

$$\|\nabla \mathbf{u}(.,t) - \nabla u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|\partial_\tau \mathbf{u}(.,\tau) - \partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \frac{G^*(t)}{\lambda_{k+1}} \tag{3.34}$$

para qualquer $t \in [0,T]$. *A função contínua* G^* *da variável* t *depende apenas de* T *e* $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}^2}$. *Também (3.34) vale com qualquer* u^l *em vez de* $\mathbf{u}$, $l > k$.

Prova
Seja $w = u^l - u^k$ a diferença de duas aproximações de Galerkin (3.2) com $l > k$ da solução $\mathbf{u}$ de (3.1). Fazemos o produto interno de (3.5) com $\partial_t w \in \mathcal{H}_1$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, e usamos (1.10), para obter

$$\|\partial_t w\|^2_{\mathbf{L}^2} + (\nabla w, \nabla \partial_t w) = -\int_\Omega [(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l \nabla u^l) + \mathbf{P}_k(u^l \nabla w + w \nabla u^k)] \partial_t w dx.$$

Agora, tendo em consideração que ∇ e ∂_t comutam, temos:

$$\|\partial_t w\|^2_{\mathbf{L}^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} = -\int_\Omega [(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l \nabla u^l) + \mathbf{P}_k(u^l \nabla w + w \nabla u^k)] \partial_t w dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} + 2\|\partial_t w\|^2_{\mathbf{L}^2} &= -2[\int_\Omega [(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l \nabla u^l)] \partial_t w dx + \int_\Omega [\mathbf{P}_k(u^l \nabla w)] \partial_t w dx \\ &\quad + \int_\Omega [\mathbf{P}_k(w \nabla u^k)] \partial_t w \, dx] \end{aligned} \tag{3.35}$$

e além disso, temos a condição inicial

$$\|\nabla w(.,0)\|^2_{\mathbf{L}^2} = \|\nabla(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)\mathbf{u}_0\|^2_{\mathbf{L}^2}. \tag{3.36}$$

Para que (3.35) se transforme em uma desigualdade diferencial, devemos encontrar estimativas para o lado direito. Estas estimativas serão determinadas termo por termo.
O Lema 1.8, e Teorema 2.2-(2.40), fornece:

$$\|\nabla u^l - \nabla u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}}\|\mathbf{P}\triangle u^l\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{g_0(t)}{\lambda_{k+1}}$$

e assim temos a desigualdade

$$\|\nabla w(.,0)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{g_0(0)}{\lambda_{k+1}}. \tag{3.37}$$

As projeções ortogonais $\mathbf{P}_l$ e $\mathbf{P}_k$ comutam com a derivada com respeito ao tempo, isto é, $\mathbf{P}_l\partial_t = \partial_t\mathbf{P}_l$. Então, de (3.9), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_\Omega[(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l\nabla u^l)]\partial_t w dx &= \int_\Omega(u^l\nabla u^l)[(I-\mathbf{P}_k)\partial_t u^l]dx \\ &= \int_\Omega(u^l\nabla u^l)\partial_t(I-\mathbf{P}_k)u^l dx. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Integrando por partes com respeito a $t\,\epsilon\,[0,T]$, temos:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^t\int_\Omega[(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l\nabla u^l)]\partial_\tau w dx\, d\tau &= \int_\Omega[(u^l\nabla u^l)(I-\mathbf{P}_k)u^l|_\varepsilon^t)dx \\ &\quad -\int_\varepsilon^t\int_\Omega[\partial_\tau(u^l\nabla u^l)][(I-\mathbf{P}_k)u^l]dx\, d\tau \end{aligned} \tag{3.39}$$

para qualquer $\varepsilon\,\epsilon\,[0,T]$. Usando a desigualdade triangular, a desigualdade de Hölder, (3.24), (3.13) e Lema 1.7, obtemos:

$$\begin{aligned} |\int_\Omega \partial_t(u^l\nabla u^l)(I-\mathbf{P}_k)u^l dx| &\leq |\int_\Omega(\partial_t u^l\nabla u^l)(I-\mathbf{P}_k)u^l dx| + |\int_\Omega(u^l\nabla\partial_t u^l)(I-\mathbf{P}_k)u^l dx| \\ &\leq C_6\|\nabla\partial_t u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|(I-\mathbf{P}_k)u^l\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\quad +C_3\|\mathbf{P}\triangle u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla\partial_t u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|(I-\mathbf{P}_k)u^l\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq \frac{(C_6+C_3)}{\lambda_{k+1}}\|\mathbf{P}\triangle u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla\partial_t u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle u^l\|_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$|\int_\Omega[\partial_t(u^l\nabla u^l)](I-\mathbf{P}_k)u^l dx| \leq \frac{C_7}{\lambda_{k+1}}\|\mathbf{P}\triangle u^l(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2\|\nabla\partial_t u^l(.,t)\|_{\mathbf{L}^2} \tag{3.40}$$

e do Teorema 2.2-(2.38.0) temos que $\|\mathbf{P}\triangle u^l(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq g_{0,\varepsilon}$. Então:

$$|\int_\Omega[\partial_t(u^l\nabla u^l)](I-\mathbf{P}_k)u^l dx| \leq \frac{C_7}{\lambda_{k+1}}g_{0,\varepsilon}\|\nabla\partial_t u^l(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}.$$

Usando a desigualdade de Young $\|\nabla\partial_t u^l(.,t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\|\nabla\partial_t u^l(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2}$, tem-se:

$$|\int_\Omega [\partial_t(u^l\nabla u^l)](I-\mathbf{P}_k)u^l dx| \leq \frac{C_7}{\lambda_{k+1}} g_{0,\varepsilon}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\|\nabla\partial_t u^l(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2}] \tag{3.41}$$

e logo, integrando (3.41) de ε a t, temos:

$$\begin{aligned} |\int_\varepsilon^t \int_\Omega [\partial_\tau(u^l\nabla u^l)][(I-\mathbf{P}_k)u^l] dx d\tau| &\leq \int_\varepsilon^t |\int_\Omega [\partial_\tau(u^l\nabla u^l)](I-\mathbf{P}_k)u^l dx| d\tau \\ &\leq \frac{C_7 g_{0,\varepsilon}}{2\lambda_{k+1}} \int_\varepsilon^t [1 + \|\nabla\partial_\tau u^l(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2}] d\tau \\ &\leq \frac{C_8 g_{0,\varepsilon}}{\lambda_{k+1}}[(t-\varepsilon) + \int_\varepsilon^t \|\nabla\partial_\tau u^l(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau]. \end{aligned}$$

Portanto, usando $G_1(t,\varepsilon)$ de Teorema 2.2-(2.37.1), temos:

$$|\int_\varepsilon^t \int_\Omega [\partial_\tau(u^l\nabla u^l)](I-\mathbf{P}_k)u^l dx d\tau| \leq \frac{C_8 g_{0,\varepsilon}}{\lambda_{k+1}}[(t-\varepsilon) + G_1(t,\varepsilon)]. \tag{3.42}$$

Novamente, de (3.13), Lema 1.7, e usando a desigualdade de Young tem-se:

$$\begin{aligned} |\int_\Omega [(u^l\nabla u^l)(I-\mathbf{P}_k)u^l|_{t_0}^t] dx| &\leq 2|\int_\Omega (u^l\nabla u^l)(I-\mathbf{P}_k)u^l dx| \\ &\leq 2C_3\|\mathbf{P}\Delta u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|(I-\mathbf{P}_k)u^l\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq 2C_3\|\mathbf{P}\Delta u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u^l\|_{\mathbf{L}^2}\frac{1}{\lambda_{k+1}}\|\mathbf{P}\Delta u^l\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq \frac{2C_3}{\lambda_{k+1}}\|\mathbf{P}\Delta u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}\|\nabla u^l\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq \frac{2C_3}{\lambda_{k+1}}[\frac{1}{2}\|\mathbf{P}\Delta u^l\|^4_{\mathbf{L}^2} + \frac{1}{2}\|\nabla u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}]. \end{aligned}$$

Finalmente obtemos a estimativa

$$|\int_\Omega [(u^l\nabla u^l)(I-\mathbf{P}_k)u^l|_{t_0}^t] dx| \leq \frac{C_3}{\lambda_{k+1}}[\|\mathbf{P}\Delta u^l\|^4_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}] \tag{3.43}$$

para qualquer $t_0 \in [0,t]$. Logo, em (3.39), usando (3.43) e (3.42), tem-se a estimativa

$$\begin{aligned} |\int_\varepsilon^t \int_\Omega [(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(u^l\nabla u^l)]\partial_\tau w dx d\tau| &\leq \frac{C_3}{\lambda_{k+1}}[\|\mathbf{P}\Delta u^l\|^4_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}] \\ &\quad + \frac{C_8\, g_{0,\varepsilon}}{\lambda_{k+1}}[(t-\varepsilon) + G_1(t,\varepsilon)] \end{aligned} \tag{3.44}$$

para a primeira integral de (3.35).
Para a segunda e terceira integral de (3.35), considerando (3.19) e usando (3.15), (3.27) temos:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega [\mathbf{P}_k(u^l\nabla w)]\partial_t w dx\right| &\leq \delta\|\partial_t w\|^2_{\mathbf{L}^2} + C_\delta\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2}, &(3.45)\\
\left|\int_\Omega [\mathbf{P}_k(w\nabla u^k)]\partial_t w dx\right| &\leq \delta\|\partial_t w\|^2_{\mathbf{L}^2} + C_\delta\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2}, &(3.46)
\end{aligned}
$$

onde o coeficiente C_δ depende apenas do (arbitrário) valor $\delta > 0$.
Agora, assumimos $\delta \in (0, \frac{1}{4}]$, e como $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$, de acordo com a última parte do Teorema 2.2, podemos considerar $\varepsilon = 0$. Logo de acordo com o Lema 1.10, usando as estimativas (3.44), (3.45), (3.46); integramos (3.35) com respeito a $t \in [0, T]$, para obter:

$$
\begin{aligned}
\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} + 2\int_0^t \|\partial_\tau w\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau &\leq 2[\frac{C_3}{\lambda_{k+1}}(\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^4_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}) + \frac{C_8\ g_{0,0}}{\lambda_{k+1}}(t - G_1(t,0))]\\
&+2C_\delta\int_0^t (\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2})\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau\\
&+4\delta\int_0^t \|\partial_t w\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau + \|\nabla w(.,0)\|^2_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}
$$

Como $0 < \delta \leq \frac{1}{4}$ então $2 - 4\delta > 1$, e obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|\partial_\tau w\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau &\leq 2[\frac{C_3}{\lambda_{k+1}}(\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^4_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}) + \frac{C_8\ g_{0,0}}{\lambda_{k+1}}(t - G_1(t,0))]\\
&+2C_\delta\int_0^t (\|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{P}\triangle u^k\|^2_{\mathbf{L}^2})\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau\\
&+\|\nabla w(.,0)\|^2_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}
$$

De Teorema 2.2-(2.40), (2.35.0) e a condição inicial (3.37), tem-se:

$$
\begin{aligned}
\|\nabla w(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|\partial_\tau w(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau &\leq \frac{[2C_3(g_{0,0}^2 + F_0(t) + 2C_8\ g_{0,0}(t - G_1(t)) + g_0(0)]}{\lambda_{k+1}}\\
&+4C_\delta\ g_{0,0}\int_0^t \|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau.
\end{aligned}
$$

Então, sobre [0,T] vale

$$
\|\nabla w(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|\partial_\tau w(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \frac{a(t)}{\lambda_{k+1}} + b\int_0^t \|\nabla w(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau, \tag{3.47}
$$

com funções continuamente diferenciáveis:

$$
\begin{aligned}
a(t) &= 2C_3(g_{0,0}^2 + F_0(t)) + 2C_8\ g_{0,0}(t - G_1(t)) + g_0(0),\\
b &= 4C_\delta\ g_{0,0}.
\end{aligned}
$$

Em (3.47) aplicando a Proposição 1.7, fornece:

$$\|\nabla u^l(.,t) - \nabla u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|\partial_\tau u^l(.,\tau) - \partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \frac{G^*(t)}{\lambda_{k+1}} \tag{3.48}$$

onde $G^*(t) = (1+bt)a(t)\mathrm{e}^{bt}$. Como $\frac{G^*(t)}{\lambda_{k+1}}$ é independente da particular aproximação de Galerkin u^l, por Corolário 2.2 (com $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$) existe $\{u^{l'}(.,t)\}$ subsequência de $\{u^l(.,t)\}$ convergindo em $\mathbf{H}^1(\Omega)$ para $\mathbf{u}(.,t)$ uniformemente sobre [0,T]. Desde que $\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}$ é equivalente a $\|u\|_{\mathbf{H}^1}$(pois Ω limitado) tem-se que $\{\nabla u^{l'}(.,t)\}$ converge para $\nabla \mathbf{u}(.,t)$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ uniformemente sobre [0,T]. Então, passando ao limite

$$\lim_{l'\to\infty} \|\nabla u^{l'}(.,t) - \nabla u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} = \|\nabla \mathbf{u}(.,t) - \nabla u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2}$$

De (3.48) temos que $\|\partial_t(u^l - u^k)\|_{L^2([0,t],\mathbf{L}^2(\Omega))} = \int_0^t \|\partial_\tau u^l(.,\tau) - \partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau$ é uniformemente limitada e desde que por Corolário 2.2, $\{\partial_t u^{l'}(.,t)\}$ converge para $\partial_t \mathbf{u}(.,t)$, tem-se que $\{\partial_t u^{l'} - \partial_t u^k\}$ converge para $(\partial_t \mathbf{u} - \partial_t u^k)$ em $L^2([0,t],\mathbf{L}^2(\Omega))$ para qualquer $t \in (0,T)$. Assim, temos:

$$\int_0^t \|\partial_\tau(\mathbf{u} - u^k)(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \limsup_{l'\to\infty} \int_0^t \|\partial_\tau(u^{l'} - u^k)(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau.$$

Além disso, vale

$$\limsup_{l'\to\infty} \int_0^t \|\partial_\tau(u^{l'} - u^k)(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \limsup_{l\to\infty} \int_0^t \|\partial_\tau(u^l - u^k)(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau,$$

$$\|\nabla(\mathbf{u} - u^k)(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} = \lim_{l'\to\infty} \|\nabla(u^{l'} - u^k)(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq \limsup_{l\to\infty} \|\nabla(u^l - u^k)(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2}.$$

Então, passando ao limite em (3.48), temos:

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\mathbf{u} - u^k)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|\partial_\tau(\mathbf{u} - u^k)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \;&\leq\; \lim_{l'\to\infty} \|\nabla(u^{l'} - u^k)(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} \\
&\quad + \limsup_{l'\to\infty} \int_0^t \|\partial_\tau(u^{l'} - u^k)(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \\
&\leq\; \limsup_{l\to\infty} \|\nabla(u^l - u^k)(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} \\
&\quad + \limsup_{l\to\infty} \int_0^t \|\partial_\tau(u^l - u^k)(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \\
&\leq\; \frac{G^*(t)}{\lambda_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\nabla \mathbf{u}(.,t)-\nabla u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2}+\int_0^t\|\partial_\tau \mathbf{u}(.,\tau)-\partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2}d\tau\leq \frac{G^*(t)}{\lambda_{k+1}},$$

onde $G^*(t)$ é uma função contínua, dependendo apenas de T e $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}^2}$, como mostra a construção e o Teorema 2.2.
Sem a restrição $\mathbf{u}_0\,\epsilon\,\mathbf{H}^2(\Omega)$, não temos a estimativa inicial para $\|\nabla w(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2}$ em $t=0$. Usando apenas a primeira parte do Teorema 2.2, prova-se:

Corolário 3.2 *Supondo que a velocidade inicial* $\mathbf{u}_0\,\epsilon\,\mathcal{H}_1$*.Então as aproximações de Galerkin* u^k *de (3.2) da solução* $\mathbf{u}$ *de (3.1), satisfazem:*

$$\|\nabla \mathbf{u}(.,t)-\nabla u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2}+\int_\varepsilon^t\|\partial_\tau \mathbf{u}(.,\tau)-\partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2}d\tau\leq \frac{G_0^*(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} \tag{3.49}$$

para qualquer $t\,\epsilon\,[\varepsilon,T]$ *e* $\varepsilon>0$. G_0^* *é contínua com respeito a t, dependendo apenas de* t,ε,T, *e* $\|\nabla\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}$. *Também (3.49) é satisfeito com qualquer* u^l *em vez de* $\mathbf{u}$, $l>k$.

Prova
Primeiro estabeleceremos um equivalente à condição inicial (3.36).
Seja $w=u^l-u^k$ com $l>k$, a diferença de duas aproximações de Galerkin.
Dado $\varepsilon>0$, do Teorema 3.1, obtemos:

$$\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon}\|\nabla(u^l-u^k)(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2}d\tau\leq\frac{F_0^*(\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} \tag{3.50}$$

sendo o integrando contínuo. Portanto, o Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral. assegura a existência de pelo menos um $t_*\,\epsilon\,(\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon)$ tal que:

$$\|\nabla w(.,t_*)\|^2_{\mathbf{L}^2}=\frac{2}{\varepsilon}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon}\|\nabla w(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2}d\tau$$

. Logo, usando (3.50) com $t_*\,\epsilon\,(\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon)$, tem-se:

$$\|\nabla w(.,t_*)\|^2_{\mathbf{L}^2}\leq\frac{2F_0^*(\varepsilon)}{\varepsilon\lambda_{k+1}} \tag{3.51}$$

As desigualdades (3.44), (3.45) e (3.46), foram provadas independentemente da restrição $\mathbf{u}_0\epsilon\mathbf{H}^2(\Omega)$.
Assim, assumindo $\delta\,\epsilon\,(0,\frac{1}{4}]$, substituindo as estimativas do Teorema 2.2-(2.33), (2.37.1),

(2.38.0), e tendo em conta as estimativas (3.44), (3.45), (3.46) junto com a condição inicial (3.51), integramos (3.35) de t_* a t, obtendo a desigualdade integral:

$$\|\nabla w(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_{t_*}^{t} \|\partial_\tau w(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \frac{a(t)}{\lambda_{k+1}} + b\int_{t_*}^{t} \|\nabla w(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \tag{3.52}$$

sobre $[t_*, T]$, com as funções continuamente diferenciáveis:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{2F_0^*(\varepsilon)}{\varepsilon} + 2C_8 g_{0,\varepsilon}[(t-\frac{\varepsilon}{2}) - G_1(t,\frac{\varepsilon}{2})] + 2C_3[g_{0,\varepsilon}^2 + F_0(t)], \\ b &= 4C_6 g_{0,\varepsilon}. \end{aligned}$$

Para calcular $a(t)$ temos usado o fato que a integral do lado direito de (3.40) é uma função monótonamente decrescente de seu limite inferior, isto é: como $\frac{\varepsilon}{2} < t_* < \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \int_{t_*}^{t} \frac{C_7}{\lambda_{k+1}} \|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2} \|\nabla \partial_\tau u^l\|_{\mathbf{L}^2} d\tau &\leq \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{t} \frac{C_7}{\lambda_{k+1}} \|\mathbf{P}\triangle u^l\|^2_{\mathbf{L}^2} \|\nabla \partial_\tau u^l\|_{\mathbf{L}^2} d\tau \\ &\leq \frac{C_8}{\lambda_{k+1}} g_{0,\varepsilon} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{t} [1 + \|\nabla \partial_t u^l\|^2_{\mathbf{L}^2}] d\tau \\ &\leq \frac{C_8}{\lambda_{k+1}} g_{0,\varepsilon}[(t-\frac{\varepsilon}{2}) + G_1(t,\frac{\varepsilon}{2})]. \end{aligned}$$

Assim, usando Proposição 1.7 em (3.52), sobre $[t_*, T]$ tem-se:

$$\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_{\varepsilon}^{t} \|\partial_\tau w(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_{t_*}^{t} \|\partial_\tau w(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \frac{A(t)}{\lambda_{k+1}},$$

com $A(t) = (1 + \int_{t_*}^{t} b d\tau) a(t) exp(\int_{t_*}^{t} b d\tau) = [1 + b(t-t_*)]a(t)exp[b(t-t_*)]$, e como $\frac{\varepsilon}{2} < t_* < \varepsilon$, temos que $t - t_* < t - \frac{\varepsilon}{2}$, e assim $exp(t-t_*) < exp(t-\frac{\varepsilon}{2})$. Portanto $A(t) \leq [1 + b(t-\frac{\varepsilon}{2})]a(t)exp[b(t-\frac{\varepsilon}{2})]$.
Então,

$$\|\nabla w\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_{\varepsilon}^{t} \|\partial_\tau w(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \frac{G_0^*(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} \tag{3.53}$$

com $G_0^*(t,\varepsilon) = [1 + b(t-\frac{\varepsilon}{2})]a(t)exp[b(t-\frac{\varepsilon}{2})]$.
Logo o corolário se segue passando ao limite $l \to \infty$ como na prova do Teorema 3.2.

Observação:

Se $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$, podem-se encontrar estimativas de erro uniforme no tempo para as aproximações de Galerkin espectral, nas normas $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Assim, o lado esquerdo de (3.3) tem uma estimativa proporcional a $\frac{1}{\lambda_{k+1}^2}$ para todo $t \geq 0$, isto é,

$$\|\mathbf{u}(.,t) - u^k(.,t)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}(.,\tau) - \nabla u^k(.,\tau)\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq \frac{C_1}{\lambda_{k+1}^2}.$$

e também

$$\|\nabla \mathrm{u}(.,t) - \nabla u^k(.,t)\|^2_{\mathrm{L}^2} + \int_0^t \|\partial_\tau \mathrm{u}(.,\tau) - \partial_\tau u^k(.,\tau)\|^2_{\mathrm{L}^2} d\tau \leq \frac{C_2}{\lambda_{k+1}},$$

para todo $t \geq 0$, com C_1 e C_2 independente de t.
Estos resultados encontram-se em [15].

3.3 Estimativa de Erro em $\mathbf{H}^1(\Omega)$ para as Derivadas Temporais das Soluções Aproximadas

Exibiremos um sistema infinito de estimativas de erro para as aproximações de Galerkin u^k e das suas derivadas com respeito ao tempo de quaisquer ordem na norma de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Teorema 3.3 *Suponhamos que a velocidade inicial satisfaz* $\mathrm{u}_0 \in \mathcal{H}_1$.*Então as aproximações de Galerkin (3.2) da solução* u *de (3.1), satisfazem o sistema infinito de estimativas:*

$$\|\partial_t^m(\mathrm{u} - u^k)(.,t)\|^2_{\mathrm{L}^2} + \int_\varepsilon^t \|\nabla \partial_\tau^m(\mathrm{u} - u^k)(.,\tau)\|^2_{\mathrm{L}^2} d\tau \leq \frac{F_m^*(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}, \qquad (3.54.m)$$

$$\|\nabla \partial_t^m(\mathrm{u} - u^k)(.,t)\|^2_{\mathrm{L}^2} + \int_\varepsilon^t \|\partial_\tau^{m+1}(\mathrm{u} - u^k)(.,\tau)\|^2_{\mathrm{L}^2} d\tau \leq \frac{G_m^*(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}, \qquad (3.55.m)$$

sobre $[\varepsilon, T]$ *para qualquer* $\varepsilon > 0$. *As funções* G_m^* *e* F_m^* *são contínuas com respeito a* t *e monótonas crescentes em* t *e* $m = 1, 2, \ldots.$. *Além,* G_m^* *e* F_m^* *dependem apenas de* t, ε, m, T *e* $\|\nabla \mathrm{u}_0\|_{\mathrm{L}^2}$. *Também, (3.54.m) e (3.55.m) são satisfeitos com qualquer* u^l *em vez de* u, $l > k$.

Prova
O Teorema será provado por indução sobre m.
Para $m = 0$, por Teorema 3.1 a equação (3.54.0) é verdadeira para qualquer $\varepsilon \in [0, T]$ e (3.55.0) mantem-se pelo Corolário 3.2.
Agora suponhamos que as equações(3.54.m) e (3.55.m) sejam verdadeiras para todo $m = 1, 2, ..., n-1$, provaremos para $m = n$.
Como as soluções $c_{ik}(t)$ da equação diferencial (3.4) têm derivadas de quaisquer ordem, podemos derivar (3.5) para a diferença $w = u^l - u^k$ (de duas aproximações de Galerkin (3.2) com $l > k$) n vezes com respeito a t. De acordo com a regra de Leibniz $\partial^n(fg) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}$, e observando que $\mathbf{P}_k$ e ∂_t^n comutam, obtemos a equação diferencial:

$$\begin{aligned} \partial_t^{n+1} w - \mathbf{P} \Delta \partial_t^n w &= -\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} [(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)((\partial_t^j u^l) \nabla \partial_t^{n-j} u^l) \\ &\quad + \mathbf{P}_k((\partial_t^j u^l) \nabla \partial_t^{n-j} w) + \mathbf{P}_k((\partial_t^j w) \nabla \partial_t^{n-j} u^k)]. \qquad (3.54) \end{aligned}$$

Usando (1.10) ($\int_\Omega(-\mathbf{P}\triangle f)g = \int_\Omega \nabla f \nabla g$) e fazendo o produto interno de (3.54) com $\partial_t^n w \in \mathcal{H}_1$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, resulta a identidade diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\|\nabla\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= -2\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\int_\Omega[(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)((\partial_t^j u^l)\nabla\partial_t^{n-j}u^l) \\ &+\mathbf{P}_k((\partial_t^j u^l)\nabla\partial_t^{n-j}w) + \mathbf{P}_k((\partial_t^j w)\nabla\partial_t^{n-j}u^k)]\partial_t^n w dx. \quad (3.55)\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\varepsilon_n = (1 - \frac{1}{2^n})\varepsilon$, então cada ε_n depende de ε e $\{\varepsilon_n\}$ é uma sequência crescente, isto é, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \dots < \varepsilon$.
Agora, precisamos de uma estimativa para o valor inicial da função $\|\partial_t^n w(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2$ num ponto $t_* \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
Da afirmação de que ($3.55.n-1$) é verdadeira com ε_1 no lugar de ε (hipótese indutiva), temos:

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon}\|\partial_\tau^n w(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \frac{G_{n-1}^*(\varepsilon,\varepsilon_1)}{\lambda_{k+1}}, \quad (3.56)$$

onde o integrando é uma função contínua pela sua definição. Assim, o Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral, garante que existe $t_* \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset (\varepsilon_1, \varepsilon)$ talque:

$$\|\partial_t^n w(.,t_*)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \frac{1}{(\varepsilon-\varepsilon_1)}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon}\|\partial_\tau^n w(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau,$$

logo, aplicando (3.56) obtem-se a estimativa

$$\|\partial_t^n w(.,t_*)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{G_{n-1}^*(\varepsilon,\varepsilon_1)}{(\varepsilon-\varepsilon_1)\lambda_{k+1}} \quad (3.57)$$

para pelo menos um $t_* \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset (\varepsilon_1, \varepsilon)$.
Reescrevemos o primeiro termo da integral em (3.55) de acordo a (3.9):

$$\int_\Omega(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(\partial_t^j u^l\nabla\partial_t^{n-j}u^l)\partial_t^n w dx = \int_\Omega(\partial_t^j u^l\nabla\partial_t^{n-j}u^l)[(I-\mathbf{P}_k)\partial_t^n u^l]dx$$

e usando (3.13) no lado direito da equação acima, temos:

$$|\int_\Omega(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(\partial_t^j u^l\nabla\partial_t^{n-j}u^l)\partial_t^n w dx| \leq C_3\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^j u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla\partial_t^{n-j}u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|(I-\mathbf{P}_k)\partial_t^n u^l\|_{\mathbf{L}^2}. \quad (3.58)$$

Das estimativas do Teorema 2.2-($2.35.n-j$), ($2.38.n$), isto é:

$$\|\nabla\partial_t^{n-j}u^l\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq F_{n-j}(t,\varepsilon) \quad \text{e} \quad \|\mathbf{P}\triangle\partial_t^n u^l\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq g_{n,\varepsilon}$$

e, fazendo uso do Lema 1.7 em (3.58), temos:

$$\begin{aligned}
|\int_\Omega [(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)((\partial_t^j u^l)\nabla\partial_t^{n-j}u^l)]\partial_t^n w dx| &\leq \frac{C_3}{\lambda_{k+1}} g_{j,\varepsilon}^{\frac{1}{2}} F_{n-j}^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon)\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^n u^l\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq \frac{C_3}{\lambda_{k+1}} g_{j,\varepsilon}^{\frac{1}{2}} F_{n-j}^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon) g_{n,\varepsilon}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como $g_{m,\varepsilon}$ e F_m são funções monótonas crescentes com respeito a m, temos que $g_{j,\varepsilon} \leq g_{n,\varepsilon}$ e $F_{n-j}(t,\varepsilon) \leq F_n(t,\varepsilon)$, então:

$$|\int_\Omega [(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)((\partial_t^j u^l)\nabla\partial_t^{n-j}u^l)]\partial_t^n w dx| \leq \frac{C_3}{\lambda_{k+1}} F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon) g_{n,\varepsilon}. \tag{3.59}$$

Para o segundo e terceiro termos da integral de (3.55), notemos que $\mathbf{P}_k$ é a projeção ortogonal em $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Então, com a ajuda de (3.14), obtemos:

$$|\int_\Omega [\mathbf{P}_k(\partial_t^j u^l \nabla\partial_t^{n-j} w)]\partial_t^n w dx| \leq \delta\|\nabla\partial_t^{n-j}w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\delta\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^j u^l\|_{\mathbf{L}^2}^2\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2,$$

com $C_\delta > 0$ dependendo apenas do (arbitrário) valor $\delta > 0$.
Portanto, usando a estimativa do Teorema 2.2-(2.38.j), no caso $j = 0$, temos:

$$|\int_\Omega \mathbf{P}_k(u^l\nabla\partial_t^n w)\partial_t^n w dx| \leq \delta\|\nabla\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\delta g_{o,\varepsilon}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 \tag{3.60}$$

e, no caso $j > 0$, usamos as estimativas de (3.55.$n-j$) e Teorema 2.2-(2.38.j), obtendo:

$$|\int_\Omega [\mathbf{P}_k(\partial_t^j u^l \nabla\partial_t^{n-j} w)]\partial_t^n w dx| \leq \delta\frac{G_{n-j}^*(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} + C_\delta g_{j,\varepsilon}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2,$$

como $1 \leq j \leq n$, temos $n-j \leq n-1$, logo $G_{n-j}^* \leq G_{n-1}^*$ e $g_{j,\varepsilon} \leq g_{n,\varepsilon}$ (pois G_m^* e $g_{m,\varepsilon}$ são monótonas crescentes em m). Então, para $j > 0$

$$|\int_\Omega [\mathbf{P}_k(\partial_t^j u^l \nabla\partial_t^{n-j} w)]\partial_t^n w dx| \leq \delta\frac{G_{n-1}^*(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} + C_\delta g_{n,\varepsilon}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2. \tag{3.61}$$

Para o terceiro termo da integral em (3.55) usando (3.26), resulta:

$$|\int_\Omega \mathbf{P}_k(\partial_t^j w\nabla\partial_t^{n-j}u^k)\partial_t^n w dx| \leq \delta\|\nabla\partial_t^j w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\delta\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{n-j}u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2,$$

com $C_\delta > 0$ dependendo apenas do (arbitrário) valor $\delta > 0$.
Para o caso $j = n$ usando a estimativa do Teorema 2.2-(2.38.0):

$$|\int_\Omega \mathbf{P}_k(\partial_t^n w\nabla u^k)\partial_t^n w dx| \leq \delta\|\nabla\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\delta g_{0,\varepsilon}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2. \tag{3.62}$$

Para o caso $j < n$, usando a estimativa (3.55.j) e Teorema 2.2-(2.38.$n-j$), temos:

$$|\int_\Omega \mathbf{P}_k(\partial_t^j w \nabla \partial_t^{n-j} u^k)\partial_t^n w dx| \leq \delta \frac{G_j^*(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} + C_\delta g_{n-j,\varepsilon}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2$$

e, como $j < n$ implica $j \leq n-1$, temos $G_j \leq G_{n-1}$ e $g_{n-j,\varepsilon} \leq g_{n,\varepsilon}$. Então:

$$|\int_\Omega \mathbf{P}_k(\partial_t^j w \nabla \partial_t^{n-j} u^k)\partial_t^n w dx| \leq \delta \frac{G_{n-1}^*(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} + C_\delta g_{n,\varepsilon}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2, \tag{3.63}$$

onde o coeficiente $C_\delta > 0$ depende apenas do (arbitrário) valor $\delta > 0$.
Levando as estimativas (3.59) até (3.63) em (3.55) temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\|\nabla\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq\; & 2\{\frac{C_3}{\lambda_{k+1}} F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon) g_{n,\varepsilon}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} + \delta\|\nabla\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
& + C_\delta g_{0,\varepsilon}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + [\frac{\delta G_{n-1}^*(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} + C_\delta g_{n,\varepsilon}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2]\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j} \\
& + [\frac{\delta G_{n-1}^*(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} + C_\delta g_{n,\varepsilon}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2]\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j} \\
& + [\delta\|\nabla\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\delta g_{0,\varepsilon}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2]\} \\
\leq\; & 2[\frac{C_3}{\lambda_{k+1}} F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon) g_{n,\varepsilon} 2^n + 2\delta\|\nabla\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2C_\delta g_{0,\varepsilon}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2] \\
& + 4[\frac{\delta G_{n-1}^*(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} + C_\delta g_{n,\varepsilon}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2](2^n - 1) \\
\leq\; & \frac{2^{n+1}C_3}{\lambda_{k+1}} F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon) g_{n,\varepsilon} + 4\delta\|\nabla\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 4C_\delta g_{0,\varepsilon}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
& + 4(2^n - 1)[\frac{\delta G_{n-1}^*(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} + C_\delta g_{n,\varepsilon}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2] \\
\leq\; & \frac{2^{n+1}}{\lambda_{k+1}}[C_3 F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon) g_{n,\varepsilon} + 2\delta G_{n-1}^*(t,\varepsilon)] + 4\delta\|\nabla\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
& + [4C_\delta g_{0,\varepsilon} + 2^n(4C_\delta) g_{n,\varepsilon}]\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2.
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + (2-4\delta)\|\nabla\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq\; & \frac{2^{n+1}}{\lambda_{k+1}}[C_3 F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon) g_{n,\varepsilon} + 2\delta G_{n-1}^*(t,\varepsilon)] \\
& + [4C_\delta g_{0,\varepsilon} + 2^n(4C_\delta) g_{n,\varepsilon}]\|\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2.
\end{aligned}$$

Agora, assumimos $\delta \in (0, \frac{1}{4}]$ e então $1 < 2-4\delta$, assim (3.55) transforma-se na desigualdade diferencial:

$$\frac{d}{dt}\|\partial_t^n w\|_{L^2}^2 + \|\nabla\partial_t^n w\|_{L^2}^2 \leq \frac{a(t)}{\lambda_{k+1}} + b\|\partial_t^n w\|_{L^2}^2, \tag{3.64}$$

para a função continuamente diferenciável $\|\partial_t^n w\|_{L^2}^2$ com coeficientes contínuos:

$$\begin{aligned} a(t) &= 2^{n+1}[C_3 F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon) g_{n,\varepsilon} + 2\delta G_{n-1}^*(t,\varepsilon)], \\ b &= 4C_\delta[g_{0,\varepsilon} + 2^n g_{n,\varepsilon}], \end{aligned} \tag{3.65}$$

sobre $[\varepsilon_1, T]$.

Como $t_* \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset (\varepsilon_1, \varepsilon)$, então a desigualdade (3.64), junto com a estimativa inicial (3.57) e a Proposição 1.8, fornece:

$$\|\partial_t^n w\|_{L^2}^2 + \int_\varepsilon^t \|\nabla\partial_\tau^n w(.,\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq \frac{A(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} \tag{3.66}$$

sobre $t \in [\varepsilon, T]$, onde

$$\begin{aligned} A(t,\varepsilon) &= \frac{G_{n-1}^*(\varepsilon,\varepsilon_1)}{(\varepsilon-\varepsilon_1)} + \int_{\varepsilon_1}^t [a(\tau) + b(\tau)\psi(\tau,\varepsilon)]d\tau \quad e \\ \psi(t,\varepsilon) &= [\frac{G_{n-1}^*(\varepsilon,\varepsilon_1)}{(\varepsilon-\varepsilon_1)} + \int_{\varepsilon_1}^t a(\tau) exp(-\int_\varepsilon^t b(\sigma)d\sigma)d\tau] exp(\int_{\varepsilon_1}^t b(\tau)d\tau) \end{aligned}$$

são funções contínuas, monótonas crescentes na variável t.

Observe-se que A, $a(t)$ e b são independentes da particular aproximação de Galerkin u^l, $l > k$. Portanto, sobre $[\varepsilon, T]$ tem-se:

$$\|\partial_t^n(u^l(.,t) - u^k(.,t))\|_{L^2}^2 + \int_\varepsilon^t \|\nabla\partial_\tau^n(u^l(.,\tau) - u^k(.,\tau))\|_{L^2}^2 d\tau \leq \frac{A(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}. \tag{3.67}$$

De acordo com o Corolário 2.2, existe uma subsequência $\{u^{l'}(.,t)\}$ convergindo junto com todos os $\{\partial_t^j u^{l'}(.,t)\}$, ($j = 0,1,...,n$) em $\mathbf{H}^1(\Omega)$ para o respectivo limite $\partial_t^j \mathrm{u}(.,t)$ uniformemente sobre $[\varepsilon, T]$. Então em (3.67) podemos passar para o limite $l' \to \infty$ obtendo:

$$\|\partial_t^n(\mathrm{u} - u^k)(.,t)\|_{L^2}^2 + \int_\varepsilon^t \|\nabla\partial_\tau^n(\mathrm{u} - u^k)(.,\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq \frac{A(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}},$$

como $\frac{A(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}$ é monótona crescente em t, definindo $F_n^*(t,\varepsilon) = \max\{ A(t,\varepsilon) , F_{n-1}^*(t,\varepsilon) \}$ a sequência $\{F_m^*\}$ é monótona crescente em t e $m = 0,1,...,n$. Logo, temos

$$\|\partial_t^n(\mathrm{u} - u^k)(.,t)\|_{L^2}^2 + \int_\varepsilon^t \|\nabla\partial_\tau^n(\mathrm{u} - u^k)(.,\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq \frac{F_n^*(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}$$

que é (3.54.n). Provando assim, a primeira parte do teorema.
Para provar (3.55.n), fazemos o produto interno de (3.54) em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ com a função vetorial $\partial_t^{n+1} w \in \mathcal{H}_1$, obtendo a aquação diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\nabla\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\|\partial_t^{n+1} w\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= -2\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\int_\Omega [(\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(\partial_t^j u^l \nabla \partial_t^{n-j} u^l) \\ &\quad + \mathbf{P}_k(\partial_t^j u^l \nabla \partial_t^{n-j} w) + \mathbf{P}_k(\partial_t^j w \nabla \partial_t^{n-j} u^k)]\partial_t^{n+1} w dx \quad (3.68) \end{aligned}$$

para a função $\|\nabla\partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2$.
De (3.54.n) temos:

$$\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon} \|\nabla\partial_\tau^n w(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \le \frac{F_n^*(\varepsilon,\varepsilon_2)}{\lambda_{k+1}}.$$

Sendo o integrando uma função contínua, pelo Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral, existe um $t^* \in (\varepsilon_2, \varepsilon_3) \subset (\varepsilon_2, \varepsilon)$ tal que:

$$\|\nabla\partial_t^n w(.,t^*)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \frac{1}{(\varepsilon-\varepsilon_2)}\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon} \|\nabla\partial_\tau^n w(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau.$$

Então, para pelo menos um $t^* \in (\varepsilon_2, \varepsilon_3) \subset (\varepsilon_2, \varepsilon)$, mantem-se:

$$\|\nabla\partial_t^n w(.,t^*)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \le \frac{F_n^*(\varepsilon,\varepsilon_2)}{(\varepsilon-\varepsilon_2)\lambda_{k+1}}. \quad (3.69)$$

De acordo a (3.9), reescrevemos o primeiro termo da integral em (3.68) e logo usamos (3.13), isto é:

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega (\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(\partial_t^j u^l \nabla\partial_t^{n-j} u^l)\partial_t^{n+1} w\right| &= \left|\int_\Omega (\partial_t^j u^l \nabla\partial_t^{n-j} u^l)(I - \mathbf{P}_k)\partial_t^{n+1} u^l dx\right| \\ &\le C_3\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^j u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla\partial_t^{n-j} u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|(I-\mathbf{P}_k)\partial_t^{n+1} u^l\|_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned}$$

Agora, usando Lema 1.7, as estimativas do Teorema 2.2-(2.35.$n-j$), (2.38.j), (2.38.$n+1$), tem-se:

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega (\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(\partial_t^j u^l \nabla\partial_t^{n-j} u^l)\partial_t^{n+1} w dx\right| &\le \frac{C_3}{\lambda_{k+1}}\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^j u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla\partial_t^{n-j} u^l\|_{\mathbf{L}^2}\|\mathbf{P}\triangle\partial_t^{n+1} u^l\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\le \frac{C_3}{\lambda_{k+1}} g_{j,\varepsilon}^{\frac{1}{2}} F_{n-j}^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon) g_{n+1,\varepsilon}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Desde que, $g_{m,\varepsilon}$ e F_m são monótonas crescentes com respeito a m, então $g_{j,\varepsilon} \le g_{n+1,\varepsilon}$ e $F_{n-j} \le F_n$. Assim,

$$\left|\int_\Omega (\mathbf{P}_l - \mathbf{P}_k)(\partial_t^j u^l \nabla\partial_t^{n-j} u^l)\partial_t^{n+1} w dx\right| \le \frac{C_3}{\lambda_{k+1}} F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon) g_{n+1,\varepsilon}. \quad (3.70)$$

Para o segundo e o terceiro termo da integral em (3.68) lembremos $\|\mathbf{P}_k F\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|F\|_{\mathbf{L}^2}$, e usando (3.15) obtemos:

$$|\int_\Omega \mathbf{P}_k(\partial_t^j u^l \nabla \partial_t^{n-j} w)\partial_t^{n+1} w dx| \leq \delta \|\partial_t^{n+1} w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\delta \|\mathbf{P}\triangle \partial_t^j u^l\|_{\mathbf{L}^2}^2 \|\nabla \partial_t^{n-j} w\|_{\mathbf{L}^2}^2.$$

No caso $j = 0$, usamos as estimativas do Teorema 2.2-(2.38.0), então:

$$\begin{aligned} |\int_\Omega \mathbf{P}_k(u^l \nabla \partial_t^n w)\partial_t^{n+1} w dx| &\leq \delta \|\partial_t^{n+1} w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\delta \|\mathbf{P}\triangle u^l\|_{\mathbf{L}^2}^2 \|\nabla \partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &\leq \delta \|\partial_t^{n+1} w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\delta g_{0,\varepsilon} \|\nabla \partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2. \end{aligned} \tag{3.71}$$

No caso $j > 0$, usamos a estimativa de (3.55.$n-j$) e a estimativa do Teorema 2.2-(2.38.j). Então:

$$\begin{aligned} |\int_\Omega \mathbf{P}_k(\partial_t^j u^l \nabla \partial_t^{n-j} w)\partial_t^{n+1} w dx| &\leq \delta \|\partial_t^{n+1} w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\delta g_{j,\varepsilon} \|\nabla \partial_t^{n-j} w\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &\leq \delta \|\partial_t^{n+1} w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{C_\delta}{\lambda_{k+1}} g_{j,\varepsilon} G_{n-j}^*(t,\varepsilon). \end{aligned}$$

Como $g_{m,\varepsilon}$ e G_m^* são monótonas crescentes, temos:

$$|\int_\Omega \mathbf{P}_k(\partial_t^j u^l \nabla \partial_t^{n-j} w)\partial_t^{n+1} w| \leq \delta \|\partial_t^{n+1} w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{C_\delta}{\lambda_{k+1}} g_{n,\varepsilon} G_{n-1}^*(t,\varepsilon). \tag{3.72}$$

Com a ajuda de (3.27), para o terceiro termo da integral em (3.68) obtemos:

$$|\int_\Omega \mathbf{P}_k(\partial_t^j w \nabla \partial_t^{n-j} u^k)\partial_t^{n+1} w dx| \leq \delta \|\partial_t^{n+1} w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\delta \|\nabla \partial_t^j w\|_{\mathbf{L}^2}^2 \|\mathbf{P}\triangle \partial_t^{n-j} u^k\|_{\mathbf{L}^2}^2,$$

com coeficiente $C_\delta > 0$ dependendo apenas do (arbitrário) valor $\delta > 0$.
No caso $j = n$, substituindo a estimativa do Teorema 2.2-(2.38.0), tem-se:

$$|\int_\Omega \mathbf{P}_k(\partial_t^n w \nabla u^k)\partial_t^{n+1} w dx| \leq \delta \|\partial_t^{n+1} w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C_\delta \|\nabla \partial_t^n w\|_{\mathbf{L}^2}^2 g_{0,\varepsilon}. \tag{3.73}$$

No caso $j < n$, usamos a estimativa (3.55.j) e Teorema 2.2-(2.38.$n-j$), obtendo:

$$\begin{aligned} |\int_\Omega \mathbf{P}_k(\partial_t^j w \nabla \partial_t^{n-j} u^k)\partial_t^{n+1} w dx| &\leq \delta \|\partial_t^{n+1} w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{C_\delta}{\lambda_{k+1}} G_j^*(t,\varepsilon) g_{n-j,\varepsilon}; \\ \text{logo}, \quad |\int_\Omega \mathbf{P}_k(\partial_t^j w \nabla \partial_t^{n-j} u^k)\partial_t^{n+1} w dx| &\leq \delta \|\partial_t^{n+1} w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{C_\delta}{\lambda_{k+1}} G_{n-1}^*(t,\varepsilon) g_{n,\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Substituindo as estimativas (3.70) até (3.74) em (3.68), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\nabla\partial_t^n w\|_{L^2}^2 + 2\|\partial_t^{n+1}w\|_{L^2}^2 &\leq 2[\frac{2^n C_3}{\lambda_{k+1}}F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon)g_{n+1,\varepsilon} + 2\delta\|\partial_t^{n+1}w\|_{L^2}^2 \\
&\quad +2C_\delta g_{0,\varepsilon}\|\nabla\partial_t^n w\|_{L^2}^2 + (2^n-1)(2\delta\|\partial_t^{n+1}w\|_{L^2}^2 \\
&\quad +\frac{2C_\delta}{\lambda_{k+1}}G_{n-1}^*(t,\varepsilon)g_{n,\varepsilon})] \\
&\leq \frac{2^{n+1}}{\lambda_{k+1}}[C_3F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon)g_{n+1,\varepsilon} + 2C_\delta G_{n-1}^*(t,\varepsilon)g_{n,\varepsilon}] \\
&\quad +4C_\delta g_{0,\varepsilon}\|\nabla\partial_t^n w\|_{L^2}^2 + 4\delta(1+2^n)\|\partial_t^{n+1}w\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\nabla\partial_t^n w\|_{L^2}^2 + [2-4\delta(2^n+1)]\|\partial_t^{n+1}w\|_{L^2}^2 \leq \\
&\qquad \leq \frac{2^{n+1}}{\lambda_{k+1}}(C_3F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon)g_{n+1,\varepsilon} + 2C_\delta G_{n-1}^*(t,\varepsilon)g_{n,\varepsilon}) + 4C_\delta g_{0,\varepsilon}\|\nabla\partial_t^n w\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Agora, assumimos $\delta\in(0,2^{-(n+3)}]$, logo $0<\delta<\frac{1}{2^{n+3}}$, então $4\delta<\frac{1}{2^{n+1}}$. Assim, $4\delta(2^{n+1})<1$, logo $4\delta(2^n+1)\leq 4\delta(2^{n+1})<1$, e assim $2-4\delta(2^n+1)>1$. Usando isto, tem-se a desigualdade diferencial:

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\partial_t^n w\|_{L^2}^2 + \|\partial_t^{n+1}w\|_{L^2}^2 \leq \frac{a(t)}{\lambda_{k+1}} + b\|\nabla\partial_t^n w\|_{L^2}^2 \tag{3.75}$$

sobre $[\varepsilon_2,T]$ para a função continuamente diferenciável $\|\nabla\partial_t^n w\|_{L^2}^2$ com os coeficientes contínuos:

$$\begin{aligned}
a(t) &= 2^{n+1}(C_3F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon)g_{n+1,\varepsilon} + 2C_\delta G_{n-1}^*(t,\varepsilon)g_{n,\varepsilon}), \\
b &= 4C_\delta g_{0,\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Logo, como $t^*\in[\varepsilon_2,\varepsilon]$, de acordo com a Proposição 1.8 (com $\varepsilon_0=\varepsilon_2$), a desigualdade diferencial (3.75) junto com a condição inicial (3.69) fornece:

$$\|\nabla\partial_t^n(u^l(.,t)-u^k(.,t))\|_{L^2}^2 + \int_\varepsilon^t \|\partial_\tau^{n+1}(u^l(.,\tau)-u^k(.,\tau))\|_{L^2}^2 d\tau \leq \frac{A(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}$$

sobre $t\in[\varepsilon,T]$, onde

$$\begin{aligned}
A(t,\varepsilon) &= \frac{F_n^*(\varepsilon,\varepsilon_2)}{(\varepsilon-\varepsilon_2)} + \int_{\varepsilon_2}^t [a(\tau)+b(\tau)\psi(\tau,\varepsilon)]d\tau \quad e \\
\psi(t,\varepsilon) &= [\frac{F_n^*(\varepsilon,\varepsilon_2)}{(\varepsilon-\varepsilon_2)} + \int_{\varepsilon_2}^t a(\tau)exp(-\int_\varepsilon^t b(\sigma)d\sigma)d\tau]exp(\int_{\varepsilon_2}^t b(\tau)d\tau)
\end{aligned}$$

são funções contínuas, monótonas crescentes na variável t.
Observe que as funções $A(t,\varepsilon)$ e $\psi(t,\varepsilon)$ são independentes da particular aproximação de Galerkin u^l, $l > k$. Portanto sobre $[\varepsilon, T]$, tem-se:

$$\|\nabla\partial_t^n(u^l(.,t) - u^k(.,t))\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_\varepsilon^t \|\partial_\tau^{n+1}(u^l(.,\tau) - u^k(.,\tau))\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \frac{A(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}. \tag{3.76}$$

Pelo Corolário 2.2, existe uma subsequência $\{u^{l'}(.,t)\}$ convergindo junto com todas as suas derivadas $\partial_t^m u^{l'}(.,t)$, $(m = 0, 1, ..., n+1)$ em $\mathbf{H}^1(\Omega)$ para $\partial_t^m \mathbf{u}(.,t)$ respectivamente. Desde que a convergência é uniforme sobre $[\varepsilon, T]$, em (3.76) podemos passar ao limite $l' \longrightarrow \infty$, obtendo

$$\|\partial_t^n(\mathbf{u} - u^k)(.,t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_\varepsilon^t \|\partial_\tau^{n+1}(\mathbf{u} - u^k)(.,\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \frac{A(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}$$

desde que $\frac{A(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}$ é monótona crescente, definindo $G_n^*(t,\varepsilon) = \max\{\ A(t,\varepsilon)\ ,\ G_{n-1}^*(t,\varepsilon)\}$ temos que a sequência $\{G_m^*\}$ é monótona crescente em t e $m = 0, 1, ..., n$. Logo

$$\|\nabla\partial_t^n(u^l(.,t) - u^k(.,t))\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_\varepsilon^t \|\partial_\tau^{n+1}(u^l(.,\tau) - u^k(.,\tau))\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \frac{G_n^*(t,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}$$

mostrando (3.55.n).
Assim, a prova do teorema esta completo.

Bibliografia

[1] Adams Robert A. *Sobolev Spaces.* Academic Press Publisher.

[2] Brezis Haïm *Analyse Fonctionnelle.* ©Masson, Paris, 1966.

[3] Coddington Earl A. *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill Book Company, 1955

[4] Griffel D. H. *Applied Funtional Analysis.* Ellis Horwood Limited Publisher.

[5] Friedman Avner. *Partial differential Equations.* Holt Rinehart and Winston, Inc.

[6] Fujita H. and Kato T. *On the Navier-Stokes initial value problem*, I, Arch. Rational Mech. Anal. 16 (1964), 269-315.

[7] Hale Jack K. *Ordinary Differential Equations.* John Wiley & Sons. Inc.

[8] Heywood John G. *Classical Solutions of the Navier-Stokes Equations.* Approximations Methods for Navier-Stokes Problems, Serie *Lectures and Notes in Mathematics*. Volume 771, pages 235–248.Springer Verlag Publisher

[9] Heywood John G. *The Navier-Stokes Equations: On the Existence, Regularity and Decay of Solutions.* Indiana University Mathematics Journal. 1980, Volume 29, Number 5, pages 629–666.

[10] Hopf E. *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen.* Math. Nachr. 4 (1951), 213-231.

[11] Kiselev A. A. and Ladyzhenskaya O. A. *On the existence and uniqueness of the solution of the nonstationary problem for a viscous incompressible fluid.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 21 (1957), 655-680.

[12] Ladyzhenskaya O. A. *On the classicality of generalized solutions of the general nonlinear nonstationary Navier-Stokes equations*, Trudy Mat. Inst. Steklov 92 (1966), 100-115.

[13] Rautmann Reimund. *On the Convergencia Rate of Nonstationary Navier-Stokes Approximations.* Approximations Methods for Navier-Stokes Problems, Serie *Lectures and Notes in Mathematics.* Volume 771, pages 425–499. Springer-Verlag Publisher.

[14] Reed Michael and Simon Barry. *Functinal Analysis.* Academic Press New York.

[15] Rojas-Medar and Boldrini J. L. *Spectral Galerkin approximations for the Navier-Stokes equations: Uniform in time error estimates.* Revista de Matemáticas Aplicadas. ©1993 Universidad de Chile. Departamento de Ingeniería Matemática.

[16] Taylor Angus E. *Introduction to Functional Analysis.* John Wiley & Sons. Inc.

[17] Temam Roger. *Navier-Stokes Equations (Theory and Numerical Analysis).* North-Holland Publishing Company.

[18] Yosida Kôsaku. *Functional Analysis.* Springer-Verlag Publisher.