



UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Alguns Problemas de Controle Multiobjetivos Governados por Equações Diferenciais Parciais

Francisco Paulo Marques Lopes[†]

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar

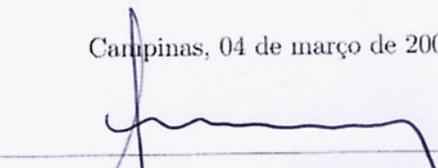
Co-Orientador: Prof. Dr. Francisco Guillén González

[†]Este trabalho teve apoio financeiro da CAPES-PICDT.

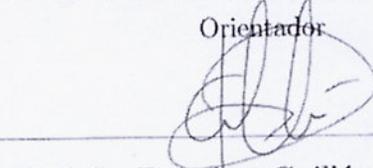
Alguns Problemas de Controle Multiobjetivos Governados por Equações Diferenciais Parciais

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Francisco Paulo Marques Lopes e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 04 de março de 2005.


Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar.

Orientador


Prof. Dr. Francisco Guillén González.

Co-orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar-(Orient.)IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. José Luiz Boldrini-IMECC/UNICAMP

Profa. Dra. Helena Judith Nussenzveig Lopes-IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Luiz Adauto Medeiros-UFRJ/RJ

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva-UNESP/SJRP

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a. / 2116

L88a	Lopes, Francisco Paulo Marques
	Alguns problemas de controle multiobjetivos governados por equações diferenciais parciais / Francisco Paulo Marques Lopes -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.
	Orientadores : Marko Antônio Rojas Medar; Francisco Guillén Gonzáles
	Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Otimização. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Controlabilidade. 4. Controle. I. Rojas Medar, Marko Antônio. II. Guillén Gonzáles, Francisco. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Some problems of multiobjective control governed by partial differential equations

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Optimization; 2. Partial differential equations; 4. Controlability; 4. Control.

Área de concentração: Análise aplicada

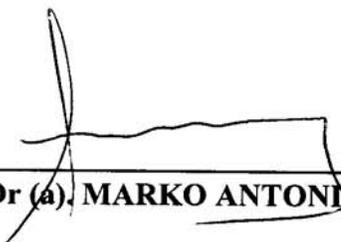
Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar (UNICAMP)
Prof. Dr. José Luiz Boldrini (UNICAMP)
Prof. Dr. Helena Judith Nussenzveig Lopes (UNICAMP)
Prof. Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros (UFRJ)
Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva (UESP)

Data da defesa: 04/03/2005

Tese de Doutorado defendida em 04 de março de 2005 e aprovada

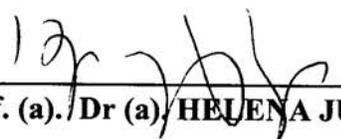
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR



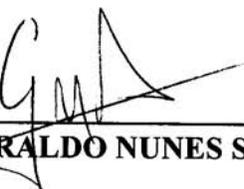
Prof. (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI



Prof. (a). Dr (a). HELENA JUDITH NUSSENZVEIG LOPES



Prof. (a). Dr (a). LUIZ ADAUTO DA JUSTA MEDEIROS



Prof. (a) Dr. (a) GERALDO NUNES SILVA

A meus pais, esposa e filhas

Resumo

Neste trabalho abordaremos basicamente três problemas de controle sujeitos a equações diferenciais parciais. O primeiro problema a ser tratado é um sistema distribuído governado por um modelo de solidificação de um líquido puro, o segundo é um sistema distribuído governado pelas equações de Navier - Stokes e o terceiro é um problema de controle com vários objetivos locais mais um objetivo diferente associado a um controle global. Nos dois primeiros problemas, apresentaremos as condições necessárias de otimalidade local via, o assim chamado, formalismo de Dubovitskii e Milyutin; além disso, apresentaremos alguns resultados sobre os equilíbrios de Nash e de Pareto para os problemas de otimização vetorial associados aos problemas com multiobjetivos. Para finalizar, usaremos alguns resultados da teoria de equações parabólicas e da análise funcional para mostrar a existência de um equilíbrio do tipo Stackelberg - Nash para o terceiro problema.

Abstract

In this work we will investigate basically three control problems subject to partial differential equations. The first problem to be treated is distributed system governed by a model for solidification of a pure liquid; the second is a distributed system governed Navier - Stokes equations and the third, one is control problem with several local objectives plus a different objective associated to a global control. In the first two problems, we will present necessary conditions of local optimality via, the so called, formalism of Dubovitskii and Milyutin; besides, we will introduce some results on the equilibrio of Nash and Pareto for the vector problems optimization associated with the problems case multiobjetive. To conclude we will use some results of the theory of parabolic equations and the functional analysis to show the existence of an equilibrio of the type Stackelberg - Nash for the third problem.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado graças a bondade e misericórdia de Deus e a ajuda de várias pessoas aos quais sou extremamente grato.

Agradeço a meus Pais pelo amor que sempre me dedicaram e por todos os sacrifícios que fizeram para que este momento fosse uma realidade.

Agradeço a minha esposa Rosa e as minhas filhas Gabriela e Manuela pelo amor e companheirismo em todos os momentos desta difícil jornada.

Agradeço a meus irmãos e amigos pela amizade e pela confiança.

Agradeço aos Professores Dr. Marko A. Rojas Medar e Dr. Francisco Guillén Gonzáles por confiarem em meu trabalho e pela oportunidade de conviver com profissionais de grande talento e competência.

Agradeço aos colegas, funcionários e professores do IMECC pela convivência fraterna, pelo apoio e por contribuírem na minha formação.

Agradeço ao Prof. Dr. Francisco Julho S. A. Corrêa pela amizade, pelo incentivo e por ser um marco em minha carreira acadêmica.

Agradeço a Universidade Federal do Pará - UFPa, em particular, ao Departamento de Matemática, por acreditarem e investirem na capacitação de seus docentes.

Finalmente, agradeço a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Campinas, SP.

Francisco Paulo Marques Lopes Março, 2005.

CONTEÚDO

1	Preliminares	5
1.1	Definições e Resultados	6
1.2	Cálculo Explícito dos Cones	8
1.2.1	Algumas Ferramentas do Cálculo Diferencial	9
1.2.2	Direções de Descida	10
1.2.3	Direções Factíveis ou Admissíveis	11
1.2.4	Direções Tangentes	12
1.3	Cálculo dos Cones Duais	12
1.4	Condições Suficientes	13
1.5	O Teorema de Dubovitskii e Milyutin Generalizado	14
1.5.1	Generalização do Teorema de Dubovitskii e Milyutin	14
1.5.2	Condições Necessárias para Otimalidade Pareto	15
1.5.3	Condições Necessárias e Suficientes para Otimalidade Pareto	17
2	Problema de Controle Ótimo para um Modelo de Solidificação	19
2.1	Formulação do Problema	19
2.2	Problema de Otimização e Resultados	27

3	Equilíbrio de Nash para Controle Multiobjetivo de um Modelo de Solidificação	35
3.1	Formulação do Problema	35
3.2	Problema de Otimização - Equilíbrio de Nash	36
4	Otimalidade de Pareto para Controle Multiobjetivo de um Modelo de Solidificação	41
4.1	Formulação do Problema	41
4.2	Problema de Otimização - Ótimo de Pareto	42
5	Problema de Controle Ótimo sobre as equações de Navier-Stokes	49
5.1	Formulação do Problema	49
5.2	Problema de Otimização e Resultados	55
6	Equilíbrio de Nash para Controle Multiobjetivo das Equações de Navier-Stokes	61
6.1	Formulação do Problema	61
6.2	Problema de Otimização - Equilíbrio de Nash	62
7	Otimalidade de Pareto para Controle Multiobjetivo das Equações de Navier-Stokes	77
7.1	Formulação do problema	77
7.2	Problema de Otimização - Ótimo de Pareto	78
8	Equilíbrio de Stackelberg - Nash para Controle Multiobjetivo das Equações de Stokes	85
8.1	Formulação do Problema	86
8.2	Critério para Existência e Unicidade do Equilíbrio de Nash	87
8.3	Controlabilidade Aproximada	90
9	Considerações finais	95
A	Resultados Auxiliares	99

B Alguns Conceitos de Teoria dos Jogos

Introdução

O desenvolvimento de áreas tradicionais de economia e engenharia tem sido caracterizadas nas últimas décadas pelo uso crescente de modelos de otimização como paradigmas para problemas de tomada de decisão. Inicialmente restringidos a problemas que vislumbravam um único objetivo, os modelos de otimização e as técnicas associadas evoluíram, principalmente a partir do começo da década de 70, no sentido de contemplar a situação mais realista onde vários objetivos, em geral conflitivos, concorrem para a solução de um determinado problema.

As formas clássicas de abordagem de problemas de decisão quase sempre exigem previamente a identificação de uma *função de utilidade* que adicione todos os objetivos do problema. Por outro lado, os métodos inspirados em modelos de otimização multiobjetivo se baseiam em procedimentos iterativos que não necessitam de uma função de utilidade explícita e podem ser implementados através de algoritmos de otimização existentes. A ênfase da investigação por novos métodos consiste exatamente em buscar harmonizar teoria da decisão e otimização de sistemas, de maneira que a solução de um determinado problema multiobjetivo reflita as preferências de um ou mais decididores. A existência de um ou mais decididores se torna indispensável devido à perda do conceito usual de otimalidade, induzida pelo conflito natural dos objetivos. Em consequência, a solução final do problema passará a ser caracterizada por um certo grau de subjetividade e, fundamentalmente, pelo tipo de equilíbrio adotado (equilíbrio no sentido de Pareto, Stackelberg, Nash, etc.).

As noções de equilíbrio de problemas multiobjetivos se iniciaram em teoria dos jogos e economia (see [38], [47], [37]). Por isso, em vários momentos deste trabalho estaremos nos referindo a termos específicos dessas áreas como: jogadores, estratégias, custo, controladores, perda, líder, seguidor, metas, etc.; além disso, observamos que nos últimos anos essas noções têm sido usadas com sucesso para tratar sistemas que visam controlar equações diferenciais parciais lineares. Para ilustrar a aplicação dessas estratégias apresentamos alguns trabalhos já publicados. Os artigos de J.L. Lions ([31], [32], [35]) apresentam alguns resultados relativos à equilíbrios de Pareto e Stackelberg. Diaz e Lions [10] dão resultados para estratégias do tipo Stackelberg-Nash. Ramos, Glowinski e Periaux estudam equilíbrio de Nash para sistemas governados por equações diferenciais parciais lineares em [40] e, em [41], fazem o estudo para a equação de Burgers, nestes artigos abordam tanto questões teóricas como algoritmos numéricos. Devemos ressaltar que a forma de abordar estas problemáticas em todos os artigos já citados, é o caminho clássico iniciado por J.L. Lions (ver por exemplo [33]) no contexto mono-objetivo. No artigo [41] se chama a atenção para o problema do equilíbrio de Nash para sistemas governados por equações parciais não lineares. Uma das razões fundamentais para esta observação, é que em muitos casos não há a unicidade da solução da equação (como no caso da solução fraca das equações de Navier-Stokes 3D). Isso impossibilita a aplicação dos argumentos clássicos de Lions, cuja idéia, para obter as condições necessárias de otimalidade, consiste em isolar uma incógnita em função da outra, para posteriormente substituí-la na função objetivo. Assim o “novo” funcional apresenta uma única incógnita e o problema transformado fica sem restrição. Naturalmente, para isolar uma das incógnitas em função da outra, precisamos da unicidade. Outra razão é a dificuldade para tratar com a não linearidade da equação. Nesse trabalho, essas dificuldades são facilmente superadas com a utilização do assim chamado formalismo de Dubovitskii e Milyutin cujos detalhes serão apresentados no Capítulo 1. Para outras aplicações desta técnica em controle de equações diferenciais parciais veja [7], [8], [20], [16], [42], [36], [3], [21].

Para abordar a problemática que nos propomos, estruturamos este trabalho da seguinte maneira:

No Capítulo 1 apresentaremos os conceitos e resultados preliminares para a utilização do formalismo de Dubovitskii e Milyutin apresentado por Girsanov em [18]. Em seguida, usaremos o conceito de ótimo de Pareto apresentado em Teoria dos Jogos (veja [1]) para

estender o formalismo de Dubovitskii e Milyutin à problemas de otimização vetorial (veja [24]).

Nos Capítulos 2, 3 e 4, consideraremos um sistema de equações diferenciais parciais não linear que modela a solidificação de um líquido puro, introduzida por Caginalp em [5] e apresentado por Hoffman e Jiang em [23]. Este sistema é formado pela equação de campo de fases acoplada com uma equação de temperatura,

$$\begin{cases} \partial_t u + l\partial_t \phi = \Delta u + f_1 \chi_{\omega_1} + f_2 \chi_{\omega_2}, & \text{em } Q; \\ \partial_t \phi = \Delta \phi + a\phi + b\phi^2 - \phi^3, & \text{em } Q; \\ u(x, 0) = u_0, \phi(x, 0) = \phi_0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (1)$$

Uma solução (u, ϕ) é um par de funções definidas num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 , onde u é a temperatura, ϕ é o campo de fases, as funções u_0, ϕ_0 são dados iniciais e as funções $f_r, r = 1, 2$, são os controles distribuídos nas regiões ω_1 e ω_2 , respectivamente. Aqui, iremos requerer que essas regiões sejam partes abertas disjuntas de Ω para assegurar que cada objetivo seja perseguido exclusivamente sobre seu próprio conjunto de controles. Denotando por $\mathcal{U}_r, r = 1, 2$, os espaços que contém os controles f_r , definiremos esses objetivos como funcionais $J_r(f_r) : \mathcal{U}_r \rightarrow \mathbb{R}, r = 1, 2$, a serem minimizados. Assim, o problema de controle que consideraremos é encontrar um par de controles (f_1, f_2) e variáveis (u, ϕ) tais que, em algum sentido, os funcionais $(J_1(\cdot), J_2(\cdot))$ sejam minimizados, sujeitos a (1). Para que possamos minimizar os funcionais, acima definidos, no sentido de Nash, primeiramente faremos o estudo do caso mono-objetivo. Isso pode ser visto no Capítulo 2. Neste capítulo, nós abordaremos tanto a questão da existência de solução ótima como as condições necessárias de otimalidade local via formalismo de Dubovitskii e Milyutin. Nos Capítulos 3 e 4, apresentaremos as condições necessárias para um equilíbrio de Nash e um ótimo Pareto, no caso multiobjetivo.

Nos Capítulos 5, 6 e 7, consideraremos um sistema de equações do tipo Navier-Stokes de evolução

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \mathbf{v}^{(1)} \chi_{\omega_1} + \mathbf{v}^{(2)} \chi_{\omega_2}, & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{em } Q; \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega; \\ \mathbf{u}(x, t) = 0, & \text{sobre } \Sigma, \end{cases} \quad (2)$$

onde \mathbf{u} é a velocidade do fluido, p é a pressão hidrostática, $v = cte > 0$ é a viscosidade cinemática, \mathbf{f} é a densidade volumétrica de forças externas, \mathbf{u}_0 é uma função dada. O problema de controle que consideraremos é encontrar controles $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ e o estado \mathbf{u} tais que os funcionais $(J_1(\cdot), J_2(\cdot))$ sejam minimizados no sentido de Nash e de Pareto, sujeitos a (2). Como nos capítulos anteriores, primeiro faremos o estudo do caso mono-objetivo (veja Capítulo 5) para posteriormente, nos Capítulos 6 e 7, abordar o caso multiobjetivo.

Por último, no Capítulo 8, trataremos de um problema de controle governado por um sistema de equações de Stokes de evolução, onde proporemos (por simplicidade) a presença de dois controles $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ atuando na equação, distribuídos em duas regiões abertas disjuntas ω_1 e ω_2 , um controle global $\mathbf{f}(x, t)$ definido sobre a região $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$ e o estado \mathbf{u} tomado como solução do sistema

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - v \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \chi_\omega + \mathbf{v}^{(1)} \chi_{\omega_1} + \mathbf{v}^{(2)} \chi_{\omega_2}, & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{em } Q; \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega; \quad \mathbf{u}|_\Sigma = 0. \end{cases} \quad (3)$$

De acordo com uma formulação apresentada, em Economia, por H. Von Stackelberg em 1934 [47], os controladores locais serão chamados de SEGUIDORES e o controlador global será chamado de LIDER. Nessa direção, assumiremos que o objetivo perseguido pelo lider é do tipo controlabilidade, isto é, conduzir o estado \mathbf{u} do sistema, num tempo T , para perto (no sentido de $\mathbb{L}^2(\Omega)$) de um estado ideal $\mathbf{u}_T(x)$, sem um custo muito alto para o controle $\mathbf{f}(x, t)$, e as metas dos seguidores é não deixar que o estado do sistema se movimente para longe de um estado dado $\mathbf{u}_{i,d}$ numa região de interesse $\omega_{i,d}$. Para resolver este problema, introduziremos o seguinte método: assumindo que $\mathbf{f}(x, t)$ é dada, otimizaremos os critérios $\mathbf{v}^{(i)}, i = 1, 2$, no sentido de Nash, colocaremos cada controle $\mathbf{v}^{(i)}$ em função de \mathbf{f} , substituiremos no sistema e otimizaremos o custo de \mathbf{f} de tal forma que o estado global do sistema, num tempo T , esteja o mais próximo possível de $\mathbf{u}_T(x)$. Para mais informações da técnica empregada, veja por exemplo [9], [10], [35].

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos as definições e resultados que constituem o método que usaremos para obter sistemas de otimalidade dos problemas de otimização. Tal técnica é conhecida como formalismo de Dubovitskii e Milyutin. Vamos considerar inicialmente o problema de minimizar um funcional definido sobre um aberto de um espaço de Banach, sujeito a restrições com interior vazio e não vazio (as chamadas restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente); em geral as restrições de igualdade aparecem como núcleos de operadores não lineares. Mais especificamente, sejam X e Y dois espaços de Banach, $M : X \rightarrow Y$ um operador, $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional e consideremos o seguinte problema de otimização:

$$[P_0] \begin{cases} \min J(x) \\ \text{sujeito a} \\ x \in \mathcal{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathcal{Q}_i \end{cases}$$

onde $\mathcal{Q}_i, i = 1, \dots, n$, são ditas restrições de desigualdades ($\text{int}\mathcal{Q}_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n$) e $\mathcal{Q}_{n+1} = \{x \in X / M(x) = 0\}$ é uma restrição de igualdade ($\text{int}\mathcal{Q}_{n+1} = \emptyset$).

No trabalho de Dubovitskii e Milyutin as condições necessárias de otimalidade local em um ponto $x_0 \in X$ foram obtidas a partir da separação das aproximações cônicas aos conjuntos de restrições $\mathcal{Q}_i, i = 1, \dots, n + 1$ e do conjunto $\{x \in X / J(x) < J(x_0)\}$. Neste

estudo as definições foram feitas de tal forma que se os cones aproximantes fossem não vazios e convexos, então x_0 seria mínimo local do problema $[P_0]$ se, e somente se, não existe um ponto comum a todos os cones aproximantes. Os resultados obtidos por Dubovitskii e Milyutin provam que esta propriedade geométrica da otimalidade local do ponto x_0 pode ser equivalentemente descrita em termos das formas lineares dos correspondentes cones duais ou polares.

Assim, neste capítulo daremos algumas definições preliminares, seguidas de alguns resultados sobre os cones de direções de descida do funcional, de direções factíveis e de direções tangentes. Em seguida, apresentaremos o Teorema de Dubovitskii e Milyutin, que nada mais é do que a regra dos multiplicadores de Lagrange em uma versão funcional. Para a aplicação prática deste teorema, nós daremos alguns resultados que nos permitam calcular os cones aproximantes e seus duais. Para terminar a abordagem da teoria de Dubovitskii e Milyutin, no caso mono-objetivo, apresentaremos um resultado que dá as condições suficientes de otimalidade. Todos os resultados, que serão apresentados nas seções acima citadas, foram apresentados por Girsanov em [18].

A última seção deste capítulo será toda destinada à apresentação de definições e resultados que generalizem o Teorema de Dubovitskii e Milyutin no sentido que este possa ser aplicado a problemas de otimização vetorial. Tais problemas serão definidos da seguinte maneira: dados os espaços de Banach $X, Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n$, os operadores $M_i : X \rightarrow Y_i, i = 1, \dots, n$ e os funcionais $J_i : X \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, s$, consideraremos o problema:

$$[P_1] \left\{ \begin{array}{l} \min J(x) = (J_1(x), \dots, J_s(x)) \\ s.a \\ x \in \mathcal{Q} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{Q}_i, \end{array} \right.$$

onde $\text{int}\mathcal{Q}_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, p$ e $\mathcal{Q}_i = \{x \in X / M_i(x) = 0\}, i = p + 1, \dots, n$. Os resultados apresentados nesta seção foram apresentados por Kotarski em [24].

1.1 Definições e Resultados

Nesta seção, consideraremos os elementos do problema $[P_0]$ e um ponto $x_0 \in X$.

Definição 1.1. Dizemos que um vetor h é uma **direção de descida** do funcional $J(\cdot)$ no ponto x_0 se existe uma vizinhança U de h e um número estritamente negativo $\alpha = \alpha(J, x_0, h)$ tal que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e qualquer $\bar{h} \in U$,

$$J(x_0 + \varepsilon\bar{h}) \leq J(x_0) + \varepsilon\alpha.$$

Definição 1.2. Dizemos que um funcional $J(\cdot)$ é **regularmente de descida** em x_0 se suas direções de descida em x_0 formam um conjunto convexo.

Definição 1.3. Sendo \mathcal{Q}_i dado por restrição de desigualdade, dizemos que o vetor h é uma **direção factível** para \mathcal{Q}_i no ponto $x_0 \in \mathcal{Q}_i$ se existe uma vizinhança U de h tal que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e qualquer $\bar{h} \in U$, os vetores

$$x_0 + \varepsilon\bar{h} \in \mathcal{Q}_i$$

Definição 1.4. Dizemos que uma restrição de desigualdade \mathcal{Q}_i é **regular** no ponto $x_0 \in \mathcal{Q}_i$ se o conjunto das direções factíveis a \mathcal{Q}_i em x_0 é convexo.

Observação 1.5. Se \mathcal{Q}_i for dado por restrição de igualdade, então a definição anterior não tem sentido. Neste caso, precisamos de uma outra definição para as direções factíveis.

Definição 1.6. Dizemos que h é um vetor **tangente unilateral** ou simplesmente **direção tangente** a \mathcal{Q}_i no ponto $x_0 \in \mathcal{Q}_i$ se para qualquer $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ existe um ponto $x(\varepsilon) \in \mathcal{Q}_i$ tal que, se colocarmos $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon)$, então o vetor $r(\varepsilon) \in X$ é tal que, para qualquer vizinhança U de zero, $\frac{1}{\varepsilon}r(\varepsilon) \in U$ para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, ou equivalentemente

$$\|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon).$$

Definição 1.7. Uma restrição de igualdade \mathcal{Q}_i é **regular** no ponto x_0 se o conjunto de suas direções tangentes a \mathcal{Q}_i em x_0 é convexo.

Observação 1.8. Quando o conjunto das direções tangentes é um subespaço vetorial ele é denominado **espaço tangente**.

Definição 1.9. Dizemos que um conjunto K é um **cone** se $\lambda x \in K$ para qualquer $\lambda > 0$ e $x \in K$.

Proposição 1.10.

- (i) As direções de descida geram um cone aberto com vértice em zero.
- (ii) As direções factíveis geram um cone aberto com vértice em zero.
- (iii) As direções tangentes geram um cone com vértice em zero.

Definição 1.11. Se K é um cone em X , seu cone dual denotado por K^* é dado por

$$K^* = \{\varphi \in X^* / \varphi(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in K\}.$$

Observação 1.12. O uso da notação K^* para o cone dual não parece adequado, pois se $K = X$, então $K^* = \{0\} \neq X^*$. Contudo, isto é usual na literatura, não devendo, portanto, causar confusão.

Agora apresentaremos o resultado principal desta secção.

Teorema 1.13. (Dubovitskii e Milyutin) Suponha que $J(\cdot)$ assume um mínimo local em $\mathcal{Q} = \bigcap_{i=1}^{p+1} \mathcal{Q}_i$ no ponto x_0 , J é regularmente de descida em x_0 , com direções de descida K_0 , $\mathcal{Q}_i, i = 1, \dots, p$, é regular em x_0 , com direções factíveis $K_i, i = 1, \dots, p$, e \mathcal{Q}_{p+1} é regular em x_0 , com direções tangentes K_{p+1} . Então existem formas lineares contínuas $\varphi_i \in K_i^*, i = 0, \dots, p+1$, não simultaneamente nulas, tais que

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_p + \varphi_{p+1} = 0.$$

Do teorema anterior, concluímos que, para obter uma caracterização analítica das condições de otimalidade, devemos conseguir calcular os cones associados às diferentes restrições do problema dado e, posteriormente, devemos calcular os cones duais associados. Isso será possível graças aos resultados que apresentaremos nas próximas duas secções.

1.2 Cálculo Explícito dos Cones

Iniciaremos esta secção apresentando algumas definições e resultados que serão utilizados para a construção dos cones desejados. Estes resultados podem ser vistos em [2], § 2.2, Cap.II.

1.2.1 Algumas Ferramentas do Cálculo Diferencial

Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados, U uma vizinhança de um ponto x_0 em X e F uma aplicação de U em Y

Definição 1.14. Dizemos que F tem uma **derivada direcional** no ponto x_0 na direção h , se o limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + \varepsilon h) - F(x_0)}{\varepsilon}$$

existe. Denotaremos por $F'(x_0, h)$.

Definição 1.15. Suponhamos que para todo $h \in X$ a derivada $F'(x_0, h)$ na direção h existe. A aplicação $\delta_+ F(x_0, \cdot) : X \rightarrow Y$ definida por $\delta_+ F(x_0, h) = F'(x_0, h)$ é denominada a **primeira variação** da aplicação F no ponto x_0 .

Definição 1.16. Suponhamos que F possui uma primeira variação no ponto x_0 e que existe um operador linear contínuo $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\delta_+ F(x_0, h) = \Lambda h$. Então o operador Λ é denominado a **derivada de Gâteaux** da aplicação F no ponto x_0 e denotamos por $F'_G(x_0)$.

Assim, $F'_G(x_0)$ é um elemento de $\mathcal{L}(X, Y)$ tal que para cada $h \in X$ temos a relação

$$F(x_0 + \varepsilon h) = F(x_0) + \varepsilon F'_G(x_0)h + o(\varepsilon),$$

quando $\varepsilon \downarrow 0$.

Definição 1.17. Dizemos que o operador F é **Fréchet-diferenciável** em x_0 se, numa vizinhança de x_0 , ele pode ser representado sob a forma

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + \Lambda h + \alpha(h)\|h\|$$

onde $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ e

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|\alpha(h)\| = \|\alpha(0)\| = 0.$$

O operador Λ é chamado derivada de Fréchet (ou simplesmente derivada) da aplicação F no ponto x_0 e é denotado por $F'(x_0)$.

Definição 1.18. Dizemos que o operador $F : X \rightarrow Y$ é **estritamente diferenciável** em x_0 se existe $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todos x_1, x_2 verificando $\|x_1 - x_0\| < \delta$, $\|x_2 - x_0\| < \delta$, temos a seguinte desigualdade

$$\|F(x_1) - F(x_2) - \Lambda(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Definição 1.19. Dizemos que o operador $F : U \subset X \rightarrow Y$ definido sobre um aberto U é **de classe** $C^1(U)$ se ele possui uma derivada em cada ponto $x \in U$ e a aplicação $x \mapsto F'(x)$ é contínua.

Observação 1.20. As seguintes conclusões são satisfeitas:

(i) Se F é Fréchet-diferenciável em x_0 , então F é Gâteaux-diferenciável em x_0 e $F'(x_0) = F'_G(x_0)$.

(ii) Se F é estritamente diferenciável em x_0 , então F é Fréchet-diferenciável em x_0 e $\Lambda = F'(x_0)$.

(iii) Se F é Gâteaux-diferenciável em cada ponto $x \in U$ e a aplicação $x \mapsto F'_G(x)$ é contínua em x_0 , então F é estritamente diferenciável em x_0 .

(iv) Se F é estritamente diferenciável em x_0 , então existe uma vizinhança de x_0 onde F é contínua, de fato, é Lipschitz contínua.

(v) F pode ser Fréchet-diferenciável em x_0 e não ser estritamente diferenciável em x_0 . Considere por exemplo, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

F é Fréchet-diferenciável em $x_0 = 0$, mas não é estritamente diferenciável, pois F só é contínua em $x_0 = 0$.

(vi) Se F é de classe C^1 , então ela é estritamente diferenciável.

1.2.2 Direções de Descida

Teorema 1.21. Seja X um espaço de Banach. Suponha que o funcional $J(\cdot)$ satisfaz uma condição de Lipschitz em uma vizinhança do ponto $x_0 \in X$ e que é direcionalmente diferenciável em x_0 em qualquer direção h . Se $J'(x_0, h)$ é convexa como função de h , então $J(\cdot)$ é regularmente de descida em x_0 e seu cone de direções de descida K_0 vem dado por

$$K_0 = \{h \in X \text{ tal que } J'(x_0, h) < 0\}.$$

Corolário 1.22. Seja X um espaço de Banach.

(i) Se $J(\cdot)$ é um funcional convexo contínuo, então $J(\cdot)$ é regularmente de descida em qual-

quer ponto e

$$K_0 = \{h \in X \text{ tal que } J'(x_0, h) < 0\}.$$

(ii) Se $J(\cdot)$ é Fréchet-diferenciável, então $J(\cdot)$ é regularmente de descida em qualquer ponto e

$$K_0 = \{h \in X \text{ tal que } \langle J'(x_0), h \rangle < 0\}.$$

1.2.3 Direções Factíveis ou Admissíveis

Seja \mathcal{Q} uma restrição de desigualdade e K_a seu cone de direções factíveis. Observamos que os “pontos interessantes” são os da fronteira de \mathcal{Q} . Além disso, admitiremos que \mathcal{Q} possui pontos interiores pois, caso contrário, $K_a = \emptyset$.

Trataremos o caso onde \mathcal{Q} é definido por um funcional $F(x)$, isto é,

$$\mathcal{Q} = \{x \in X \text{ tal que } F(x) \leq F(x_0)\}.$$

Se $F(x)$ é contínuo podemos estudar o caso mais geral

$$\mathcal{Q} = \{x \in X \text{ tal que } F(x) \leq \lambda, \lambda \neq F(x_0)\}.$$

Aqui o cone de direções de descida do funcional $F(\cdot)$ no ponto x_0 será denotado por K_d .

Observação 1.23. Observamos que sempre se verifica $K_d \subset K_a$. A questão que se coloca é: quando $K_a \subset K_d$? Para isto, temos o seguinte resultado

Teorema 1.24. Suponha que $F(\cdot)$ é direcionalmente diferenciável em x_0 em qualquer direção. Se existe \tilde{h} tal que $F'(x_0, \tilde{h}) < 0$, então

$$K_a \subset \{h \in X \text{ tal que } F'(x_0, h) < 0\}.$$

Observação 1.25. Observe que a condição $F'(x_0, \tilde{h}) < 0$ para algum \tilde{h} é equivalente a dizer que $K_d \neq \emptyset$.

Corolário 1.26. Suponha que qualquer uma das condições abaixo seja satisfeita

(i) X é um espaço de Banach, $F(\cdot)$ satisfaz uma condição de Lipschitz numa vizinhança do ponto $x_0 \in X$ e é direcionalmente diferenciável em x_0 em qualquer direção h , $F'(x_0, h)$ é

convexa como função de h e existe \tilde{h} tal que $F'(x_0, \tilde{h}) < 0$;

(ii) $F(\cdot)$ é um funcional convexo contínuo e existe \tilde{x} tal que $F(\tilde{x}) < F(x_0)$;

(iii) $F(\cdot)$ é Fréchet-diferenciável em x_0 e $F'(x_0) \neq 0$. Então

$$K_a = K_d = \{h \in X \text{ tal que } F'(x_0, h) < 0\}.$$

Proposição 1.27. Se \mathcal{Q} é um conjunto convexo, seu cone de direções factíveis no ponto x_0 é dado por

$$\begin{aligned} K_a &= \{h \in X / h = \lambda(x - x_0), x \in \text{int}\mathcal{Q}, \lambda > 0\} \\ &= \{\lambda(\text{int}\mathcal{Q} - x_0) / \lambda > 0\}. \end{aligned}$$

1.2.4 Direções Tangentes

Teorema 1.28. (Lyusternik) Sejam X, Z espaços de Banach, U uma vizinhança do ponto $x_0 \in X$, $P : U \rightarrow Z$ tal que $P(x_0) = 0$. Se P é estritamente diferenciável no ponto x_0 e $P'(x_0)X = Z$ ($P'(x_0)$ é um epimorfismo), então o conjunto

$$\mathcal{Q} = \{x \in X / P(x) = 0\}$$

tem no ponto x_0 um espaço tangente

$$T_{x_0}(\mathcal{Q}) = \text{Ker}P'(x_0) = \{h \in X / P'(x_0)h = 0\}.$$

1.3 Cálculo dos Cones Duais

Teorema 1.29. Suponha que o cone K é um subespaço vetorial de um espaço normado X . Então

$$K^* = \{\varphi \in X^* \text{ tal que } \varphi(x) = 0, \forall x \in K\}$$

Teorema 1.30. Seja $\varphi \in X^*$,

$$\begin{aligned} K_1 &= \{x \in X \text{ tal que } \varphi(x) = 0\}, \\ K_2 &= \{x \in X \text{ tal que } \varphi(x) \geq 0\}, \\ K_3 &= \{x \in X \text{ tal que } \varphi(x) > 0\}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} K_1^* &= \{\lambda\varphi \text{ tal que } -\infty < \lambda < +\infty\}, \\ K_2^* &= \{\lambda\varphi \text{ tal que } 0 \leq \lambda < +\infty\}, \\ K_3^* &= \begin{cases} X^* & \text{se } \varphi = 0, \\ K_2^* & \text{se } \varphi \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Definição 1.31. Um **funcional suporte** para um subconjunto $A \subset X$ em $x_0 \in A$ é uma forma linear contínua $\varphi \in X^*$ não nula tal que

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) \text{ para todo } x \in A.$$

Sejam $\mathcal{Q} \subset X$, $x_0 \in \mathcal{Q}$, K_a o cone de direções factíveis para \mathcal{Q} em x_0 , K_T o cone das direções tangentes a \mathcal{Q} em x_0 e \mathcal{Q}^* o cone dos funcionais lineares suportes para \mathcal{Q} em x_0 , isto é,

$$\mathcal{Q}^* = \{\varphi \in X^* \text{ tal que } \varphi(x) \geq \varphi(x_0), \forall x \in \mathcal{Q}\}.$$

Teorema 1.32. Se \mathcal{Q} é um convexo fechado, então

$$K_T^* = \mathcal{Q}^*.$$

Se, além disso, $\text{int}\mathcal{Q} \neq \emptyset$, então

$$K_a^* = \mathcal{Q}^*.$$

1.4 Condições Suficientes

Teorema 1.33. Sejam $J(\cdot)$ um funcional convexo contínuo, $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_{n+1}$ conjuntos convexos e suponha que exista um ponto \tilde{x} tal que $\tilde{x} \in \text{int}\mathcal{Q}_i, i = 1, \dots, n, \tilde{x} \in \mathcal{Q}_{n+1}$. Seja $x_0 \in \mathcal{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathcal{Q}_i$; seja K_0 o cone de descida de $J(\cdot)$ em x_0 , K_1, \dots, K_n os cones de direções factíveis para $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_n$ e K_{n+1} o cone tangente para \mathcal{Q}_{n+1} . Então x_0 é um ponto de mínimo para $J(\cdot)$ sobre \mathcal{Q} se, e somente se, existem formas lineares contínuas $\varphi_i \in K_i^*, i = 0, 1, \dots, n+1$, não nulas simultaneamente, tais que

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_{n+1} = 0.$$

1.5 O Teorema de Dubovitskii e Milyutin Generalizado

A seguir usaremos os conceitos de Teoria dos Jogos apresentados no apêndice B para definir o ótimo de Pareto e estender o Teorema de Dubovitskii e Milyutin à problemas de otimização vetorial. Para isto, consideraremos o problema $[P_1]$ apresentado anteriormente.

1.5.1 Generalização do Teorema de Dubovitskii e Milyutin

Definição 1.34. Um ponto $x_0 \in X$ é chamado **ótimo de Pareto** para o problema $[P_1]$ se $x_0 \in \mathcal{Q}$ e não existe $x \neq x_0$, em \mathcal{Q} , tal que $J_i(x) \leq J_i(x_0)$, $i = 1, \dots, s$, com uma desigualdade estrita para pelo menos um i , $1 \leq i \leq s$.

Definição 1.35. Dizemos que um vetor h é uma direção de **não crescimento** do funcional $J_i(\cdot)$ num ponto x_0 se existe uma vizinhança U de h e um número real $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(J_i, x_0, h)$ tal que para todo $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ e qualquer $\bar{h} \in U$,

$$J_i(x_0 + \alpha \bar{h}) \leq J_i(x_0).$$

Definição 1.36. Dizemos que um funcional $J_i(\cdot)$ é **regularmente de não crescimento** se suas direções de não crescimento em um ponto x_0 formam um conjunto convexo.

Proposição 1.37. As direções de não crescimento geram um cone aberto com vértice em zero que inclui ao cone de direções de descida no mesmo ponto.

Definição 1.38. Dizemos que os cones C_i , $i = 1, \dots, n$, estão no **mesmo sentido** se para todo $M > 0$, existem $M_1, M_2, \dots, M_n > 0$ tal que, para todo $x \in B_M \cap \sum_{i=1}^n C_i$, $x = \sum_{i=1}^n x_i$, $x_i \in C_i$, $i = 1, \dots, n$, temos que

$$x_i \in B_{M_i} \cap C_i, i = 1, \dots, n.$$

e não existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tal que

$$0 = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Definição 1.39. Dizemos que os cones C_i , $i = 1, \dots, n$, estão em **sentidos opostos** se existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, $x_i \in C_i$, $i = 1, \dots, n$, tal que

$$0 = \sum_{i=1}^n x_i.$$

1.5.2 Condições Necessárias para Otimalidade Pareto

No que segue, denotaremos por K_i , $i = 1, \dots, s$, D_j , $j = 1, \dots, s$, C_k , $k = 1, \dots, p$, qualquer cone aberto não vazio contido nos cones de descida, não crescimento e factíveis, respectivamente. C_k , $k = p + 1, \dots, n$, para o cone não vazio contido no cone tangente a cada restrição de igualdade e \tilde{C} será um cone não vazio contido no cone tangente à interseção das restrições de igualdade. Todos os cones serão assumidos com vértice em zero.

Lema 1.40. Se x_0 é um ótimo de Pareto local do problema $[P_1]$, então

$$K_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j \neq i}^s D_j \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^p C_k \right) \cap \tilde{C} = \emptyset, \forall i = 1, \dots, s.$$

Teorema 1.41. (Dubovitskii e Milyutin generalizado) Assuma que para o problema $[P_1]$:

- (i) Os cones K_i , $i = 1, \dots, s$, D_j , $j = 1, \dots, s$, C_k , $k = 1, \dots, p$, são abertos e convexos,
- (ii) Os cones C_k , $k = p + 1, \dots, n$, são convexos e fechados,
- (iii) O cone $\tilde{C} = \bigcap_{k=p+1}^n C_k$ está contido no cone tangente ao conjunto $\bigcap_{k=p+1}^n \mathcal{Q}_k$,
- (iv) Os cones C_k^* , $k = p + 1, \dots, n$, estão no mesmo sentido ou em sentido oposto,
- (v) $x_0 \in \bigcap_{k=1}^n \mathcal{Q}_k$ é um ótimo de Pareto local para o problema $[P_1]$.

Então, para cada $i = 1, \dots, s$, existem formas lineares contínuas $h_i \in K_i^*$, $h_j^{(i)} \in D_j^*$, $j = 1, \dots, s, j \neq i$, e $l_k^{(i)} \in C_k^*$, $k = 1, \dots, n$, não simultaneamente nulas, tais que

$$h_i + \sum_{j=1, j \neq i}^s h_j^{(i)} + \sum_{k=1}^n l_k^{(i)} = 0, i = 1, \dots, s.$$

Daqui para frente, usaremos a seguinte notação:

- (a) $T(\mathcal{Q}_k, x_0)$ = cone tangente à restrição \mathcal{Q}_k no ponto x_0 ,
- (b) $F(\mathcal{Q}_k, x_0)$ = cone factível à restrição \mathcal{Q}_k no ponto x_0 ,
- (c) $D(J_i, x_0)$ = cone de descida do funcional J_i no ponto x_0 ,

(d) $NC(J_i, x_0)$ = cone de não crescimento do funcional J_i no ponto x_0 .

Com estas notações temos o seguinte corolário:

Corolário 1.42. *Suponha que:*

(i) *Os cones $F(\mathcal{Q}_k, x_0)$, $k = 1, \dots, p$, $T(\mathcal{Q}_k, x_0)$, $k = p + 1, \dots, n$, $D(J_i, x_0)$, $NC(J_i, x_0)$, $i = 1, \dots, s$, existem e são convexos,*

(ii) $T\left(\bigcap_{k=p+1}^n \mathcal{Q}_k, x_0\right) = \bigcap_{k=p+1}^n T(\mathcal{Q}_k, x_0)$,

(iii) *Os cones $[T(\mathcal{Q}_k, x_0)]^*$ são de mesmo sentido ou de sentidos opostos,*

(iv) $x_0 \in \bigcap_{k=1}^n \mathcal{Q}_k$ *é um ótimo de Pareto local do problema $[P_1]$.*

Então as seguintes “s” equações se verificam

$$h_i + \sum_{j=1, j \neq i}^s h_j^{(i)} + \sum_{k=1}^n l_k^{(i)} = 0, i = 1, \dots, s, \quad (1.1)$$

onde $h_i \in [D(J_i, x_0)]^*$, $h_j^{(i)} \in [NC(J_j, x_0)]^*$, $j = 1, \dots, s$, $j \neq i$, $l_k^{(i)} \in [F(\mathcal{Q}_k, x_0)]^*$, $k = 1, \dots, p$, $l_k^{(i)} \in [T(\mathcal{Q}_k, x_0)]^*$, $k = p + 1, \dots, n$, *são formas lineares contínuas não simultaneamente nulas.*

Observação 1.43. *Se além das hipóteses do teorema anterior, os funcionais J_i são tais que satisfazem, para todo $i = 1, \dots, s$,*

$$[NC(J_i, x_0)]^* = [D(J_i, x_0)]^*,$$

então as “s” equações colapsam em uma única equação

$$\sum_{j=1}^s h_j + \sum_{k=1}^n l_k = 0,$$

onde $h_j \in [D(J_j, x_0)]^*$, $j = 1, \dots, s$, $l_k \in [F(\mathcal{Q}_k, x_0)]^*$, $k = 1, \dots, p$, $l_k \in [T(\mathcal{Q}_k, x_0)]^*$, $k = p + 1, \dots, n$, *são formas lineares contínuas não simultaneamente nulas.*

Para encontrar condições que assegurem que

$$[NC(J_i, x_0)]^* = [D(J_i, x_0)]^*,$$

precisaremos da seguinte definição:

Definição 1.44. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **Ponstein-convexa** se

$$f(x_2) \leq f(x_1) \Rightarrow f(\lambda x_1 + \mu x_2) < f(x_1),$$

$$\forall x_1 \neq x_2, \lambda, \mu > 0, \lambda + \mu = 1.$$

Observação 1.45. Os funcionais **estritamente convexos** são também Ponstein convexos, mas nem todos os funcionais convexos são Ponstein convexos.

Lema 1.46. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e Ponstein convexa. Se $x_0 \in \text{dom}(f)$ e $\inf f(x) < f(x_0)$, então

$$\text{int}\{x/f(x) \leq f(x_0)\} \neq \emptyset$$

e

$$\{x/f(x) < f(x_0)\} = \text{int}\{x/f(x) \leq f(x_0)\}.$$

Lema 1.47. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e Ponstein convexa. Se $x_0 \in \text{dom}(f)$ e $\inf f(x) < f(x_0)$, então

$$[NC(f, x_0)]^* = [D(f, x_0)]^*.$$

1.5.3 Condições Necessárias e Suficientes para Otimalidade Pareto

No proximo teorema daremos condições sob as quais um ótimo de Pareto local é um ótimo Pareto global para o problema $[P_1]$.

Teorema 1.48. Sejam $J_i, i = 1, \dots, s$, funcionais convexos e $\mathcal{Q} \subset X$ um subconjunto convexo. Então todo ótimo de Pareto local de $[P_1]$ é um ótimo de Pareto global.

Teorema 1.49. Suponha que:

- (i) $J_i(\cdot), i = 1, \dots, s$, são funcionais contínuos e Ponstein convexos com $x_0 \in \text{dom}(J_i)$ e $\inf J_i(x) < J_i(x_0), i = 1, \dots, s$,
- (ii) $\mathcal{Q}_k, k = 1, \dots, n$, são convexos,
- (iii) Existe um \tilde{x} tal que $\tilde{x} \in (\bigcap_{k=1}^p \text{int}\mathcal{Q}_k) \cap \bigcap_{k=p+1}^n \mathcal{Q}_k$ (a chamada condição de Slater),
- (iv) Os cones $F(\mathcal{Q}_k, x_0), k = 1, \dots, p, T(\mathcal{Q}_k, x_0), k = p + 1, \dots, n, D(J_i, x_0), NC(J_i, x_0)$, com $i = 1, \dots, s$, existem e são convexos,

$$(v) T\left(\bigcap_{k=p+1}^n \mathcal{Q}_k, x_0\right) = \bigcap_{k=p+1}^n T(\mathcal{Q}_k, x_0),$$

(vi) Os cones $[T(\mathcal{Q}_k, x_0)]^*$ são de mesmo sentido ou de sentidos opostos,

(vii) $x_0 \in \bigcap_{k=1}^n \mathcal{Q}_k$ é um ótimo de Pareto local do problema $[P_1]$.

Então a equação de Euler-Lagrange (1.1) (veja corolário 1.42) se verifica.

CAPÍTULO 2

Problema de Controle Ótimo para um Modelo de Solidificação

Neste capítulo, trataremos do problema de controle ótimo sobre um sistema de equações parciais não lineares que modela a solidificação de um líquido puro. Nossa abordagem consiste em transformar o problema de controle mono-objetivo num problema de otimização abstrato, para, em seguida, mostrar a existência de solução ótima e as condições necessárias de otimalidade local via o formalismo de Dubovitskii e Milyutin.

2.1 Formulação do Problema

Sejam Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 e ω_c , ω_d dois subconjuntos abertos de Ω . Consideremos os seguintes espaços:

$E_1 = W_{2k}^{2,1}(Q)$, $E_2 = W_{2m}^{2,1}(Q)$, $\mathcal{U} = L^{2s}(Q_c)$, $E = E_1 \times E_2 \times \mathcal{U}$, $\tilde{E} = L^{2s}(Q) \times L^{2s}(Q) \times L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$.

Considere o funcional $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(u, \phi, f) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\omega_d} |u - u_d|^{2k} dxdt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \int_{\omega_d} |\phi - \phi_d|^{2m} dxdt + \frac{\mu}{2} \int_0^T \int_{\omega_c} |f|^{2s} dxdt. \quad (2.1)$$

onde $\mu > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ são constantes, u_d e ϕ_d são funções dadas em $L^\infty(Q_d)$, f é o controle que atua na equação distribuído na região ω_c e (u, ϕ) são funções de estado tomadas como solução do sistema

$$\begin{cases} \partial_t u + l \partial_t \phi = \Delta u + f \chi_{\omega_c}, & \text{em } Q; \\ \partial_t \phi = \Delta \phi + F(\phi) + u, & \text{em } Q; \\ u = u_0, \phi = \phi_0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma; \end{cases} \quad (2.2)$$

com $F(\phi)$ dada por

$$F(\phi) = a\phi + b\phi^2 - \phi^3.$$

O problema de controle ótimo que consideraremos nesta seção é encontrar variáveis (u, ϕ) e controle f tal que o funcional (2.1) seja minimizado sujeito a (2.2). Esse funcional mede a diferença entre o estado (u, ϕ) e um estado dado (u_d, ϕ_d) mais um termo que mede o custo do controle f .

A seguir, apresentaremos os teoremas que nos garantem a existência e unicidade de solução das equações de estado (veja [23], Teo. 3.1, Teo. 3.2, Cor. 3.3).

Teorema 2.1. *Suponhamos que $a, b \in L^\infty, f \in L^q(Q_c), q \geq 2$, e $u_0, \phi_0 \in W_\infty^2(\Omega)$ com $\frac{\partial u_0}{\partial \eta} |_{\partial \Omega} = \frac{\partial \phi_0}{\partial \eta} |_{\partial \Omega} = 0$. Além disso, $l > 0$ é uma constante e Ω é um domínio limitado com fronteira C^2 . Então existe uma solução $(u, \phi) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ do sistema (2.2), onde*

$$p = \begin{cases} \left(\frac{1}{q} - \frac{2}{5}\right)^{-1}; & \text{se } 2 \leq q < \frac{5}{2}; \\ q. \text{ real } \geq 1; & \text{se } \frac{5}{2} \leq q < \infty. \end{cases} \quad (2.3)$$

Além disso, a estimativa

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C(\|u_0\|_{W_\infty^2(Q)} + \|\phi_0\|_{W_\infty^2(Q)} + \|f\|_{L^q(Q_c)}) \quad (2.4)$$

ocorre com C dependendo apenas de $\|a\|_{L^\infty(Q)}, \|b\|_{L^\infty(Q)}, T$ e l .

Teorema 2.2. *Sejam $f_i \in L^q(Q), q \geq 2, i = 1, 2$, e (u_i, ϕ_i) as correspondentes soluções do sistema (2.2). Admita que todas as hipóteses do teorema acima são satisfeitas. Então*

$$\|u_1 - u_2\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\phi_1 - \phi_2\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}, \quad (2.5)$$

onde C é uma constante que depende de $\|u_i\|_{W_q^{2,1}(Q)}, \|\phi_i\|_{W_p^{2,1}(Q)}, i = 1, 2$, e p satisfaz (2.3).

Corolário 2.3. *A solução do problema (2.2) é única.*

A seguir, assumiremos que

$$k = \begin{cases} 1, 2, 3; & \text{se } s = 1, \\ \text{qq. int. } \geq 1; & \text{se } s \geq 2; \end{cases} \quad (2.6)$$

e apresentaremos um teorema que garante a existência e unicidade do estado adjunto.

Teorema 2.4. *Sob as hipóteses do Teorema (2.1), se $u_d, \phi_d \in L^\infty(Q_d)$, então existe uma única solução $(r, \delta) \in W_q^{2,1} \times W_q^{2,1}$ para o sistema*

$$\begin{cases} -\partial_t r - \Delta r - \delta = \lambda_1 \alpha k (u - u_d)^{2k-1} \chi_{\omega_d}, & \text{em } Q; \\ -\partial_t \delta - l \partial_t r - \Delta \delta - F'(\phi) \delta = \lambda_1 \beta m (\phi - \phi_d)^{2m-1} \chi_{\omega_d}, & \text{em } Q; \\ r(T) = \delta(T) = 0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial \delta}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma; \end{cases} \quad (2.7)$$

onde λ_1 é uma constante, (u, ϕ) é a solução do sistema (2.2) e vale a estimativa

$$\|r\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\delta\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C [\|(u - u_d)^{2k-1}\|_{L^q(Q)} + \|(\phi - \phi_d)^{2m-1}\|_{L^q(Q)}] \quad (2.8)$$

com C dependendo apenas de $\|u_d\|_{L^\infty(Q)}$, $\|\phi_d\|_{L^\infty(Q)}$, $\|a\|_{L^\infty(Q)}$, $\|b\|_{L^\infty(Q)}$, T e l .

Demonstração:

Existência:

Seja o espaço de Banach $B = L^q(Q) \times L^q(Q)$ e consideremos a aplicação $T_\varepsilon : B \rightarrow B$ definida por

$$\begin{pmatrix} r \\ \delta \end{pmatrix} = T_\varepsilon \begin{pmatrix} w \\ \gamma \end{pmatrix}, \forall \varepsilon \in [0, 1],$$

onde (r, δ) é a solução do seguinte sistema auxiliar:

$$\begin{cases} -\partial_t r - \Delta r = \varepsilon [\gamma + \lambda_1 \alpha k (u - u_d)^{2k-1} \chi_{\omega_d}], & \text{em } Q; \\ -\partial_t \delta - \Delta \delta + (3\phi^2 - 2b\phi - a) \delta = \lambda_1 \beta m (\phi - \phi_d)^{2m-1} \chi_{\omega_d} + l \partial_t r; \\ r(T) = \delta(T) = 0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial \delta}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (2.9)$$

Para provar a existência de solução do sistema (2.7) mostraremos que a aplicação T_1 tem um ponto fixo, via Teorema de Leray-Schauder. Primeiramente observamos que, $\forall \varepsilon \in [0, 1]$, T_ε está bem definida. De fato, consideremos o sistema auxiliar

$$\begin{cases} -\partial_t r - \Delta r = \varepsilon [\gamma + \lambda_1 \alpha k (u - u_d)^{2k-1} \chi_{\omega_d}], & \text{em } Q; \\ r(T) = 0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial r}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (2.10)$$

Usando o Teorema 2.1 e o Lema (de imersão) (A.9), podemos concluir:

(a) se $s = 1$, então $f \in L^{q=2}(Q)$ o que implica $u \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^{10}(Q)$. Logo,

$$(u - u_d)^{2k-1} \chi_{\omega_d} \in L^{\frac{10}{2k-1}}(Q), k = 1, 2, 3. \quad (2.11)$$

(b) se $s \geq 2$, então $f \in L^{q=2s}(Q)$ o que implica $u \in W_\mu^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$, $\mu \geq 4$. Logo,

$$\lambda_1 \alpha k (u - u_d)^{2k-1} \chi_{\omega_d} \in L^\infty(Q), \forall k \geq 1. \quad (2.12)$$

Nos dois casos, segue da teoria L^p de equações parabólicas [[27], Teo.9.1, pp.341], que existe uma única solução $r \in W_q^{2,1}(Q)$, $q \geq 2$ para o sistema (2.10). Além disso, vale a estimativa

$$\|r\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C \|g\|_{L^q(Q)}, \quad (2.13)$$

onde $g = \gamma + \lambda \alpha k (u - u_d)^{2k-1}$. Agora consideremos o sistema

$$\begin{cases} -\partial_t \delta - \Delta \delta + (3\phi^2 - 2b\phi - a)\delta = \lambda_1 \beta m (\phi - \phi_d)^{2m-1} \chi_{\omega_d} + l \partial_t r, & \text{em } Q; \\ \delta(T) = 0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial \delta}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (2.14)$$

Do Teorema 2.1, temos a existência de uma função $\phi \in W_{2m}^{2,1}(Q)$, com

$$m = \begin{cases} 5, & \text{se } k = 1, \\ \text{qq. inteiro. } \geq 1, & \text{se } k \geq 2, \end{cases}$$

o que implica $\phi \in L^\infty(Q)$ (veja lema de imersão (A.9)). Logo,

$$\begin{aligned} (3\phi^2 - 2b\phi - a) &\in L^\infty(Q) \text{ e} \\ \lambda_1 \beta m (\phi - \phi_d)^{2m-1} \chi_{\omega_d} + l \partial_t r &\in L^q(Q), q \geq 2. \end{aligned}$$

Segue da teoria L^p de equações parabólicas ([27], Teo.9.1, pp.341), que existe uma única solução $\delta \in W_q^{2,1}(Q)$ para o sistema (2.14). Além disso, vale a estimativa

$$\|\delta\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\|h\|_{L^q(Q)}, \quad (2.15)$$

onde $h = \lambda_1\beta m(\phi - \phi_d)^{2m-1}\chi_{\omega_d} + l\partial_t r$. Portanto, T_ε está bem definida. Para usar o Teorema de Leray-Schauder, precisamos mostrar que valem as seguintes hipóteses:

- A função T_ε é contínua em (r, δ) , para todo $\varepsilon \in [0, 1]$.
- T_ε é contínua em $\varepsilon \in [0, 1]$, para todo $(r, \delta) \in B$.
- T_ε é compacta.
- T_0 possui um único ponto fixo.
- O conjunto dos pontos fixos de T_ε é limitado.

Primeiramente fixemos $\varepsilon \in [0, 1]$ e consideremos as funções (w_i, γ_i) em $B, i = 1, 2$. Sejam $(r_i, \delta_i), i = 1, 2$ as correspondentes soluções do sistema (2.9). Denotando as diferenças por $r = r_1 - r_2$ e $\delta = \delta_1 - \delta_2$ temos que

$$\begin{cases} -\partial_t r - \Delta r = \varepsilon(\gamma_1 - \gamma_2), & \text{em } Q; \\ -\partial_t \delta - \Delta \delta + (3\phi^2 - 2b\phi - a)\delta = l\partial_t r, & \text{em } Q; \\ r(T) = \delta(T) = 0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial \delta}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (2.16)$$

Considerando o sistema (2.16) e as estimativas (2.13) e (2.15), obtemos as seguintes estimativas

$$\|r_1 - r_2\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^q(Q)} \quad (2.17)$$

e

$$\begin{aligned} \|\delta_1 - \delta_2\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C\|\partial_t r_1 - \partial_t r_2\|_{L^q(Q)} \\ &\leq C\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^q(Q)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Portanto, a função T_ε é claramente contínua em (r, δ) , para todo $\varepsilon \in [0, 1]$. Similarmente segue que T_ε é também contínua em $\varepsilon \in [0, 1]$, para todo $(r, \delta) \in B$. Do lema de imersão compacta (A.5), resulta que T_ε é compacta. Observamos também que, se $\varepsilon = 0$, então,

claramente, o sistema (2.9) tem uma única solução. Portanto, para concluir a prova resta somente estimar o conjunto de todos os pontos fixos de T_ε . Seja (r, δ) um ponto fixo, isto é,

$$\begin{pmatrix} r \\ \delta \end{pmatrix} = T_\varepsilon \begin{pmatrix} r \\ \delta \end{pmatrix}, \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Este ponto fixo é solução do sistema

$$\begin{cases} -\partial_t r - \Delta r = \varepsilon [\delta + \lambda_1 \alpha k (u - u_d)^{2k-1} \chi_{\omega_d}], & \text{em } Q; \\ -\partial_t \delta - \Delta \delta + (3\phi^2 - 2b\phi - a)\delta = \lambda_1 \beta m (\phi - \phi_d)^{2m-1} \chi_{\omega_d} + l \partial_t r, & \text{em } Q; \\ r(T) = \delta(T) = 0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial \delta}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (2.19)$$

Tomando o produto da primeira equação de (2.19) por r , da segunda por $(\delta + lr)$ e integrando-se ambas (x, t) , com $x \in \Omega$ e $0 \leq t < T$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (r(t))^2 dx + \int_t^T \int_{\Omega} |\nabla r(s)|^2 dx ds \leq C \left[\int_t^T \int_{\Omega} (r(s))^2 dx ds + \int_t^T \int_{\Omega} (\delta(s))^2 dx ds \right. \\ \left. + \int_t^T \int_{\Omega} (u - u_d)^{2(2k-1)}(s) dx ds \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\delta + lr)(t)^2 dx + \int_t^T \int_{\Omega} |\nabla \delta(s)|^2 dx ds + l \int_t^T \int_{\Omega} \nabla r \cdot \nabla \delta dx ds \\ + l\theta \int_t^T \int_{\Omega} r \delta dx ds \leq C \left[\int_t^T \int_{\Omega} (\delta(s))^2 dx ds + \int_t^T \int_{\Omega} (r(s))^2 dx ds \right. \\ \left. + \int_t^T \int_{\Omega} (\phi - \phi_d)^{2(2m-1)}(s) dx ds \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde $\theta = \min_{y \in \mathbb{R}, (x,t) \in Q} (3y^2 - 2b(x,t)y - a(x,t))$. Multiplicando (2.20) por uma constante arbitrária A e adicionando com (2.21), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} [((\delta + lr)(t))^2 + A(r(t))^2] dx + \int_t^T \int_{\Omega} [|\nabla \delta(s)|^2 dx ds + l \nabla r(s) \cdot \nabla \delta(s) + A |\nabla r(s)|^2] dx ds \\ \leq C \left[\int_t^T \int_{\Omega} (\delta(s))^2 dx ds + \int_t^T \int_{\Omega} (r(s))^2 dx ds + \int_t^T \int_{\Omega} (u - u_d)^{2(2k-1)}(s) dx ds \right. \\ \left. + \int_t^T \int_{\Omega} (\phi - \phi_d)^{2(2m-1)}(s) dx ds \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Tomando $A = 1 + \frac{1}{2}l^2$, usando a desigualdade de Young e o lema de Gronwall, obtemos

$$\int_{\Omega} [(r(t))^2 + (\delta(t))^2] dx + \int_t^T \int_{\Omega} [|\nabla r(s)|^2 + |\nabla \delta(s)|^2] dx ds \leq C. \quad (2.23)$$

Similarmente, se tomarmos o produto das equações em (2.19), respectivamente por $-\partial_t r$, $-\partial_t \delta$ e depois por $-\Delta r$, $-\Delta \delta$, obtemos as estimativas

$$\int_t^T \int_{\Omega} [(\partial_t r(t))^2 + (\partial_t \delta(t))^2] dx ds + \int_{\Omega} [|\nabla r(s)|^2 + |\nabla \delta(s)|^2] dx \leq C \quad (2.24)$$

e

$$\int_{\Omega} [|\nabla r(s)|^2 + |\nabla \delta(s)|^2] dx + \int_t^T \int_{\Omega} [|\Delta r(s)|^2 + |\Delta \delta(s)|^2] dx ds \leq C, \quad (2.25)$$

onde as constantes C são possivelmente diferentes e dependem somente de $\|a\|_{L^\infty(Q)}$, $\|b\|_{L^\infty(Q)}$, T e l . As estimativas (2.23), (2.24) e (2.25) fornecem

$$\|r\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\delta\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C. \quad (2.26)$$

O lema de imersão (A.9) nos dá uma limitação para todos os pontos fixos de T_ε independente de ε . Portanto, existe uma solução $(r, \delta) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ para

$$\begin{pmatrix} r \\ \delta \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} r \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Agora, como $\delta \in L^{10}(Q)$, obtemos as estimativas abaixo da mesma maneira como obtemos as estimativas (2.13) e (2.15),

$$\|r\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \leq C [\|\delta\|_{L^{10}(Q)} + \|(u - u_d)^{2k-1}\|_{L^q(Q)}] \leq C,$$

onde $\bar{q} = \min\{q, 10\}$, e

$$\|\delta\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \leq C [\|(\phi - \phi_d)^{2m-1}\|_{L^{10}(Q)} + \|\partial_t r\|_{L^{\bar{q}}(Q)}] \leq C.$$

Iterando este procedimento, provamos a existência da solução $(r, \delta) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_q^{2,1}(Q)$ e que a estimativa (2.8) segue destas computações.

Unicidade:

Começaremos mostrando uma estimativa de estabilidade da solução do sistema (2.7) com

respeito a solução do sistema (2.2). A saber, dados $f_i \in L^q(Q_c), i = 1, 2$, sejam $(u_i, \phi_i) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q), i = 1, 2$, as respectivas soluções do sistema (2.2) e $(r_i, \delta_i), i = 1, 2$, as respectivas soluções do sistema (2.7). Denotando as diferenças por $r = r_1 - r_2$ e $\delta = \delta_1 - \delta_2$ temos que

$$\begin{cases} -\partial_t r - \Delta r = -\delta + \lambda_1 \alpha K[(u_1 - u_d)^{2k-1} - (u_2 - u_d)^{2k-1}] \chi_{\omega_d}, & \text{em } Q; \\ r(T) = 0 \text{ em } \Omega, \quad \frac{\partial r}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma \end{cases} \quad (2.27)$$

e

$$\begin{cases} -\partial_t \delta - \Delta \delta = (D_1 \delta_1 - D_2 \delta_2) + l \partial_t r + \lambda_1 \beta m [(\phi_1 - \phi_d)^{2m-1} - (\phi_2 - \phi_d)^{2m-1}] \chi_{\omega_d}, & \text{em } Q; \\ \delta(T) = 0 \text{ em } \Omega, \quad \frac{\partial \delta}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma; \end{cases} \quad (2.28)$$

onde $D_i = a + 2b\phi_i - 3\phi_i^2, i = 1, 2$. Observe que uma simples aplicação da desigualdade de Young nos dá que $D_i \leq \max_{\bar{Q}}(a + cb^2) \leq \|a\|_{L^\infty(Q)} + c\|b\|_{L^\infty(Q)}^2$, onde c é uma constante positiva. Aqui nos concentraremos no caso $2 \leq q < \frac{5}{2}$, para o caso $q \geq \frac{5}{2}$ a prova é similar. Observe que, neste caso, lembrando o que diz em (2.11), só podemos admitir $k = 1, 2$ ou 3 . Do sistema 2.27, obtemos

$$\begin{aligned} \|r\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C\|\delta\|_{L^q(Q)} + C\|\sum_{j=0}^{2k-2}(u_1^{2k-1-j} - u_2^{2k-1-j})u_d^j\|_{L^q(Q)} \\ &\leq C\|\delta\|_{L^q(Q)} + C\sum_{j=0}^{2k-2}\|(u_1^{2k-1-j} - u_2^{2k-1-j})\|_{L^q(Q)}\|u_d^j\|_{L^\infty(Q)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

e do sistema 2.28, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} \|\delta\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C\|\delta\|_{L^q(Q)} + C\|\partial_t r\|_{L^q(Q)} + C\|\sum_{j=0}^{2k-2}(\phi_1^{2k-1-j} - \phi_2^{2k-1-j})\phi_d^j\|_{L^q(Q)} \\ &\leq C\|r\|_{W_q^{2,1}(Q)} + C\sum_{j=0}^{2k-2}\|(\phi_1^{2k-1-j} - \phi_2^{2k-1-j})\|_{L^q(Q)}\|\phi_d^j\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq C\|\delta\|_{L^q(Q)} + C\sum_{j=0}^{2k-2}\|(u_1^{2k-1-j} - u_2^{2k-1-j})\|_{L^q(Q)}\|u_d^j\|_{L^\infty(Q)} \\ &+ C\sum_{j=0}^{2k-2}\|(\phi_1^{2k-1-j} - \phi_2^{2k-1-j})\|_{L^q(Q)}\|\phi_d^j\|_{L^\infty(Q)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Do Lema A.4, segue que para cada $\eta > 0$ existe alguma constante C_η tal que

$$\|\delta\|_{L^q(Q)} \leq \eta\|\delta\|_{W_q^{2,1}(Q)} + C_\eta\|\delta\|_{L^2(Q)}. \quad (2.31)$$

Segue de (2.29) e (2.30) que

$$\begin{aligned} \|\delta\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C\left(\eta\|\delta\|_{W_q^{2,1}(Q)} + C_\eta\|\delta\|_{L^2(Q)} + \sum_{j=0}^{2k-2}\|(u_1^{2k-1-j} - u_2^{2k-1-j})\|_{L^q(Q)}\|u_d^j\|_{L^\infty(Q)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{2k-2}\|(\phi_1^{2k-1-j} - \phi_2^{2k-1-j})\|_{L^q(Q)}\|\phi_d^j\|_{L^\infty(Q)}\right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Tomando η suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned} \|r\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C\|\delta\|_{L^q(Q)} \leq C\|\delta\|_{W_q^{2,1}(Q)} \\ &\leq C\left(\|\delta\|_{L^2(Q)} + \sum_{j=0}^{2k-2} \|(u_1^{2k-1-j} - u_2^{2k-1-j})\|_{L^q(Q)} \|u_d^j\|_{L^\infty(Q)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{2k-2} \|(\phi_1^{2k-1-j} - \phi_2^{2k-1-j})\|_{L^q(Q)} \|\phi_d^j\|_{L^\infty(Q)}\right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Agora, para estimar $\|\delta\|_{L^2(Q)}$, retornamos aos sistemas (2.27), (2.28) e usamos a técnica padrão já utilizada anteriormente: consideramos o produto das equações em (2.27) e (2.28) por Ar e $(\delta + lr)$, respectivamente, onde A é um parâmetro arbitrário, integramos ambas em $(x, t) \in Q$, somamos os resultados, usamos a desigualdade de Young e depois usamos o lema de Gronwall, para obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(r(t))^2 + (\delta(t))^2] dx + \int_t^T \int_{\Omega} [|\nabla r(s)|^2 + |\nabla \delta(s)|^2] dx ds \\ \leq C \sum_{j=0}^{2k-2} \|u_1^{2k-1-j} - u_2^{2k-1-j}\|_{L^q(Q)}^2 \|u_d^j\|_{L^\infty(Q)}^2 \\ + C \sum_{j=0}^{2k-2} \|\phi_1^{2k-1-j} - \phi_2^{2k-1-j}\|_{L^q(Q)}^2 \|\phi_d^j\|_{L^\infty(Q)}^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Substituindo (2.34) em (2.33), obtemos a seguinte estimativa de estabilidade

$$\begin{aligned} \|r_1 - r_2\|_{W_q^{1,2}(Q)} + \|\delta_1 - \delta_2\|_{W_q^{1,2}(Q)} &\leq C \left[\sum_{j=0}^{2k-2} \|u_1^{2k-1-j} - u_2^{2k-1-j}\|_{L^q(Q)} \right. \\ &\quad + \sum_{j=0}^{2k-2} \|\phi_1^{2k-1-j} - \phi_2^{2k-1-j}\|_{L^q(Q)} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{2k-2} \|u_1^{2k-1-j} - u_2^{2k-1-j}\|_{L^q(Q)}^2 \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{2k-2} \|\phi_1^{2k-1-j} - \phi_2^{2k-1-j}\|_{L^q(Q)}^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Assim, da unicidade da solução do sistema (2.2) e de (2.35), podemos concluir que a solução do sistema (2.7) é única. \blacksquare

2.2 Problema de Otimização e Resultados

Podemos concluir facilmente que o problema de controle enunciado anteriormente pode ser equivalentemente representado pelo seguinte problema de otimização

$$(P_2) \quad \min_{(u, \phi, f) \in \mathcal{Q}} J(u, \phi, f),$$

onde \mathcal{Q} é dado por uma restrição de igualdade $\mathcal{Q} = \{(u, \phi, f) : M(u, \phi, f) = 0\}$ e a aplicação $M : E \rightarrow \tilde{E}$ é um operador definido da seguinte maneira: $M(u, \phi, f) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ se, e

somente se,

$$\begin{cases} u_t + l\phi_t - \Delta u - f\chi_\omega = \psi_1, & \text{em } Q; \\ \phi_t - \Delta\phi - F(\phi) - u = \psi_2, & \text{em } Q; \\ u(0) - u_0 = \psi_3, \phi(0) - \phi_0 = \psi_4, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T). \end{cases}$$

Definição 2.5. O conjunto admissível \mathcal{U}_{ad} é definido por

$$\mathcal{U}_{ad} = \{(z, \varphi, h) \text{ tal que } M(z, \varphi, h) = 0 \text{ e } J(z, \varphi, h) < \infty\}.$$

Definição 2.6. $(u, \phi, f) \in \mathcal{U}_{ad}$ é chamado uma solução ótima (local) de (P_2) , se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$J(u, \phi, f) \leq J(z, \varphi, h), \forall (z, \varphi, h) \in \mathcal{U}_{ad},$$

satisfazendo

$$\|z - u\|_{W_{2k}^{2,1}} + \|\varphi - \phi\|_{W_{2m}^{2,1}} + \|h - f\|_{L^{2s}} < \varepsilon.$$

Teorema 2.7. Sob as hipóteses do Teorema 2.1, O problema (P_2) possui uma solução ótima.

Demonstração: Vamos mostrar em primeiro lugar que $\mathcal{U}_{ad} \neq \emptyset$. Do Teorema 1, temos a existência de uma solução $(u, \phi, f) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times L^q(Q)$ ($q \geq 2$) para o sistema (2.2). Em particular, existe $(\tilde{u}, \tilde{\phi}) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ satisfazendo (2.2) com $f \equiv 0$. Além disso,

$$J(\tilde{u}, \tilde{\phi}, 0) \leq c_1 \|\tilde{u} - u_d\|_{L^{2k}(Q)}^{2k} + c_2 \|\tilde{\phi} - \phi_d\|_{L^{2m}(Q)}^{2m} \leq 2M < \infty,$$

onde

$$M = \max \{c_1 (\|u_0\|_{W_\infty^{2,1}} + \|\phi_0\|_{W_\infty^{2,1}} + \|u_d\|_{L^{2k}})^{2k}, c_2 (\|u_0\|_{W_\infty^{2,1}} + \|\phi_0\|_{W_\infty^{2,1}} + \|\phi_d\|_{L^{2m}})^{2m}\}.$$

Assim, temos que $\mathcal{U}_{ad} \neq \emptyset$. Agora, seja a sequência $\{(u_n, \phi_n, f_n)\} \subset \mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n, \phi_n, f_n) = \inf_{(u, \phi, f) \in \mathcal{U}_{ad}} J(u, \phi, f).$$

Como

$$J(u_n, \phi_n, f_n) \leq C,$$

então segue da definição de $J(\cdot, \cdot, \cdot)$ que

$$\|f_n\|_{L^{2s}(Q)} \leq C, s \geq 1$$

e em vista de (2.4), temos que a estimativa

$$\|u_n\|_{W_{2k}^{2,1}(Q)} + \|\phi_n\|_{W_{2m}^{2,1}(Q)} \leq C$$

ocorre, $\forall n \geq 1$. Portanto, podemos escolher, se necessário, uma subsequência $\{(u_n, \phi_n, f_n)\}$ tal que

$$\begin{aligned} f_n &\rightharpoonup f \text{ fraco em } L^{2s}(Q), \\ u_n &\rightharpoonup u \text{ fraco em } W_{2s}^{2,1}(Q), \\ \phi_n &\rightharpoonup \phi \text{ fraco em } W_{2m}^{2,1}(Q). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Pelo Lema A.5, obtemos

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ forte em } L^{2k}(Q), \\ \phi_n &\rightarrow \phi \text{ forte em } L^{2m}(Q). \end{aligned} \tag{2.37}$$

onde

$$k = \begin{cases} 1, 2 \text{ ou } 3; & \text{se } s = 1 \\ \text{qq. inteiro;} & \text{se } s \geq 2. \end{cases} \tag{2.38}$$

Agora, escrevemos o sistema (2.2) para as sequências u_n, ϕ_n e f_n , tomamos o produto das equações do sistema por uma função teste conveniente e integramos por partes. As convergências em (2.36) e (2.37) garantem que podemos passar ao limite para concluir que $(u, \phi, f) \in \mathcal{U}_{ad}$. Como o funcional $J(\cdot, \cdot, \cdot)$ é fracamente semicontínuo inferiormente, então

$$J(u, \phi, f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n, \phi_n, f_n)$$

e temos o resultado desejado. ■

O próximo teorema apresenta as condições necessárias para a otimalidade do problema (P_2) .

Teorema 2.8. *Se $(u, \phi, f) \in E_1 \times E_2 \times \mathcal{U}$ é uma solução ótima local do problema (P_2) , então existem funções $(r, \delta) \in E_1 \times E_2$ e uma constante $\lambda_1 > 0$ tais que (u, ϕ, f) satisfazem (2.2), (r, δ, λ) satisfazem o sistema adjunto (2.7) e o controle é dado por*

$$f = \left(-\frac{1}{\lambda_1 s \mu} r \chi_{\omega_c}\right)^{\frac{1}{2s-1}}, \text{ q.t.p. em } t \in [0, T].$$

Antes de fazer a prova deste teorema, apresentaremos alguns lemas fundamentais para a aplicação o formalismo de Dubovitskii e Milyutin.

Sabemos que a derivada do funcional $J(\cdot, \cdot, \cdot)$ no ponto (u, ϕ, f) e na direção (z, φ, h) é dada por

$$J'(u, \phi, f)(z, \varphi, h) = \alpha k \int_0^T \int_{\omega_d} (u - u_d)^{2k-1} z dx dt + \beta m \int_0^T \int_{\omega_d} (\phi - \phi_d)^{2m-1} \varphi dx dt + \mu s \int_0^T \int_{\omega_c} (f)^{2s-1} h dx dt.$$

Lema 2.9. *O cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot, \cdot, \cdot)$ no ponto (u, ϕ, f) é dado por*

$$DC(J, (u, \phi, f)) = \{(z, \varphi, h) \in E_1 \times E_2 \times \mathcal{U}; J'(u, \phi, f)(z, \varphi, h) < 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[DC(J)]^* = \{g_1 \in E'_1 \times E'_2 \times \mathcal{U}'; g_1(z, \varphi, h) = -\lambda_1 J'(u, \phi, f)(z, \varphi, h) \text{ para algum } \lambda_1 \geq 0\}$$

(veja Corolário 1.22 e Teorema 1.29 no Capítulo 1).

Lema 2.10.

(i) *A aplicação $M(\cdot, \cdot, \cdot)$ é Gâteaux-diferenciável e a derivada de Gâteaux de M no ponto (u, ϕ, f) é definida por $M'_G(u, \phi, f)(z, \varphi, h) = (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3, \tilde{\psi}_4)$ se, e somente se,*

$$\begin{cases} \partial_t z + l \partial_t \varphi - \Delta z - h \chi_{\omega_c} = \tilde{\psi}_1, & \text{em } Q; \\ \partial_t \varphi - \Delta \varphi - z = a\varphi + 2b\phi\varphi - 3\phi^2\varphi + \tilde{\psi}_2, & \text{em } Q; \\ z(0) = \tilde{\psi}_3, \varphi(0) = \tilde{\psi}_4, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (2.39)$$

(ii) *A aplicação $M(\cdot, \cdot, \cdot)$ é estritamente diferenciável e o operador $M'(u, \phi, f) = M'_G(u, \phi, f)$ é sobrejetivo.*

Demonstração: Por simplicidade, começaremos provando (ii). Supondo que vale (i), para provar que M é estritamente diferenciável, basta mostrar que a função $(u, \phi, f) \mapsto M'(u, \phi, f)$ é contínua e usar a conclusão (iii) da Observação 1.20 no Capítulo 1. Mas, claramente, a continuidade da aplicação acima segue da continuidade da função $\phi \mapsto a\varphi + 2b\phi\varphi - 3\phi^2\varphi$,

portanto a afirmação é verdadeira. Agora, para todo $(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3, \tilde{\psi}_4)$ em \tilde{E} , o Teorema 2.1 garante a existência de solução para o sistema (2.39). Logo, o operador $M'(u, \phi, f)$ é sobrejetivo e temos (ii). Para terminar a prova, mostraremos que de fato vale (i). Por definição de derivada de Gâteaux, devemos provar que

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \left\| \frac{M(u + kz, \phi + k\varphi, f + kh) - M(u, \phi, f)}{k} - (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3, \tilde{\psi}_4) \right\|_{\tilde{E}} = 0.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} [M(u + kz, \phi + k\varphi, f + kh) - M(u, \phi, f)] &= \frac{1}{k} [(\partial_t(u + kz) + l\partial_t(\phi + k\varphi) - \Delta(u + kz) \\ &\quad - (f + kh)\chi_{\omega_c}, \partial_t(\phi + k\varphi) - \Delta(\phi + k\varphi) - F(\phi + k\varphi) - (u + kz), \\ &\quad (u + kz)(0) - u_0, (\phi + k\varphi)(0) - \phi_0) - (\partial_t u + l\partial_t \phi - \Delta u - f\chi_{\omega_c}, \\ &\quad \partial_t \phi - \Delta \phi - F(\phi) - u, u(0) - u_0, \phi(0) - \phi_0)]. \end{aligned}$$

Cancelando adequadamente os termos da identidade anterior e depois usando (2.39), obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k} [M(u + kz, \phi + k\varphi, f + kh) - M(u, \phi, f)] = \\ &= (\partial_t z + l\partial_t \varphi - \Delta z - h\chi_{\omega_c}, \partial_t \varphi - \Delta \varphi - \frac{F(\phi + k\varphi) - F(\phi)}{k} - z, z(0), \varphi(0)) \\ &= (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2 + (a\varphi + 2b\phi\varphi - 3\phi^2\varphi) - \frac{F(\phi + k\varphi) - F(\phi)}{k}, \tilde{\psi}_3, \tilde{\psi}_4). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0^+} \left\| \frac{M(u + kz, \phi + k\varphi, f + kh) - M(u, \phi, f)}{k} - (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3, \tilde{\psi}_4) \right\|_{\tilde{E}} &= \\ = \lim_{k \rightarrow 0^+} \left\| (a\varphi + 2b\phi\varphi - 3\phi^2\varphi) - \frac{F(\phi + k\varphi) - F(\phi)}{k} \right\|_{\tilde{E}} &= 0 \end{aligned}$$

pois, de fato, $F'_G(\phi)\varphi = F'(\phi)\varphi = a\varphi + 2b\phi\varphi - 3\phi^2\varphi$. ■

Lema 2.11. *O cone tangente ao conjunto \mathcal{Q} no ponto (u, ϕ, f) é o subespaço vetorial*

$$TC(\mathcal{Q}, (u, \phi, f)) = \{(z, \varphi, h) \in E_1 \times E_2 \times \mathcal{U}; M'(u, \phi, f)(z, \varphi, h) = 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[TC(\mathcal{Q})]^* = \{g_2 \in E'_1 \times E'_2 \times \mathcal{U}' / g_2(z, \varphi, h) = 0, \forall (z, \varphi, h) \in TC(\mathcal{Q}, (u, \phi, f))\}.$$

Demonstração: A prova segue do Lema 2.10 e do Teorema de Lyusternik (veja Teoremas 1.28 e 1.29 no Capítulo 1). ■

Agora, estamos em condições de demonstrar o teorema principal.

Demonstração:(do Teorema 2.8) Como $(u, \phi, f) \in E_1 \times E_2 \times \mathcal{U}$ é solução ótima de (P_2) , então

$$DC(J, (u, \phi, f)) \cap TC(\mathcal{Q}, (u, \phi, f)) = \emptyset.$$

Segue do Teorema de Dubovitskii e Milyutin (veja Teorema 1.13 no Capítulo 1), que existem funcionais lineares contínuos $g_1 \in [DC(J)]^*$, $g_2 \in [TC(\mathcal{Q})]^*$, não simultaneamente nulos tais que vale a equação de Euler-Lagrange

$$g_1 + g_2 = 0. \quad (2.40)$$

Seja h um controle arbitrário e seja (z, φ, h) uma solução do sistema

$$\begin{cases} \partial_t z + l\partial_t \varphi - \Delta z = h\chi_{\omega_c}, & \text{em } Q; \\ \partial_t \varphi - \Delta \varphi - F'(\phi)\varphi = z, & \text{em } Q; \\ z(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0 & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (2.41)$$

Neste caso, temos que $(z, \varphi, h) \in TC(\mathcal{Q}, (u, \phi, f))$ e conseqüentemente $g_2(z, \varphi, h) = 0$. Segue da equação (2.40) que, para algum $\lambda_1 \geq 0$,

$$\begin{aligned} g_1(z, \varphi, h) = & -\lambda_1 \alpha k \int_0^T \int_{\omega_d} (u - u_d)^{2k-1} z dx dt - \lambda_1 \beta m \int_0^T \int_{\omega_d} (\phi - \phi_d)^{2m-1} \varphi dx dt \\ & - \lambda_1 \mu s \int_0^T \int_{\omega_c} (f)^{2s-1} h dx dt = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Observamos que λ_1 é estritamente positivo, pois se $\lambda_1 = 0$, então $g_1 = 0$ e da equação (2.40) temos que $g_2 = 0$. Isso contradiz o Teorema de Dubovitskii e Milyutin. Seja (q, δ) a solução do sistema adjunto (2.7). Pelo Teorema 2.4 este sistema tem uma única solução. Somando as equações do sistema (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \alpha k \int_0^T \langle (u - u_d)^{2k-1} \chi_{\omega_d}, z \rangle dt - \lambda_1 \beta m \int_0^T \langle (\phi - \phi_d)^{2m-1} \chi_{\omega_d}, \varphi \rangle dt = \\ = \int_0^T \langle \partial_t r + \Delta r + \delta, z \rangle dt + \int_0^T \langle \partial_t \delta + l\partial_t r + \Delta \delta + F'(\phi)\delta, \varphi \rangle dt. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Agora, integramos por partes, observando que $z(0) = \varphi(0) = r(T) = \delta(T) = 0$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \alpha k \int_0^T \langle (u - u_d)^{2k-1} \chi_{\omega_d}, z \rangle dt - \lambda_1 \beta m \int_0^T \langle (\phi - \phi_d)^{2m-1} \chi_{\omega_d}, \varphi \rangle dt = \\ = \int_0^T \langle r, \partial_t z - \Delta z + l \partial_t \varphi \rangle dt + \int_0^T \langle -\delta, \partial_t \varphi - z - \Delta \varphi - F'(\phi) \varphi \rangle dt. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Comparando (2.44) com a soma das equações do sistema (2.41), temos

$$-\lambda_1 \alpha k \int_0^T \langle (u - u_d)^{2k-1} \chi_{\omega_d}, z \rangle dt - \lambda_1 \beta m \int_0^T \langle (\phi - \phi_d)^{2m-1} \chi_{\omega_d}, \varphi \rangle dt = \int_0^T \langle -r \chi_{\omega_c}, h \rangle_{\omega_c} dt. \quad (2.45)$$

De (2.45) e (2.42), segue que

$$\lambda_1 \mu s \int_0^T \langle (f)^{2s-1}, h \rangle_{\omega_c} dt = \int_0^T \langle -r \chi_{\omega_c}, h \rangle_{\omega_c} dt.$$

como h é arbitrário, então

$$f = \left(-\frac{1}{\lambda_1 s \mu} r \chi_{\omega_c} \right)^{\frac{1}{2s-1}}, \text{ q.t.p. em } t \in [0, T].$$

■

CAPÍTULO 3

Equilíbrio de Nash para Controle Multiobjetivo de um Modelo de Solidificação

Neste capítulo, trataremos do equilíbrio de Nash para um problema de controle com dois-objetivos governado por um sistema de equações parciais, como apresentado no Capítulo 2. Nossa abordagem consiste em transformar o problema de controle num problema de otimização vetorial abstrato para, em seguida, provar as condições necessárias para um equilíbrio de Nash.

3.1 Formulação do Problema

Sejam ω_1, ω_2 duas regiões abertas de Ω com $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$, $\omega_{1,d}$ e $\omega_{2,d}$ dois subconjuntos abertos de Ω e consideremos os seguintes espaços:

$$E_1 = W_{2s}^{2,1}(Q), E_2 = W_{2m}^{2,1}(Q), \mathcal{U}_r = L^{2s}(Q_r) = L^{2s}(\omega_r \times (0, T)), E = E_1 \times E_2 \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2, \tilde{E} = L^{2s}(Q) \times L^{2m}(Q) \times L^{2s}(\Omega) \times L^{2m}(\Omega).$$

Consideremos os funcionais $J_r : E \rightarrow \mathbb{R}$, $r = 1, 2$, dados por

$$J_r(u, \phi, f_1, f_2) = \frac{\alpha_r}{2} \int_0^T \int_{\omega_{r,d}} |u - u_{r,d}|^{2k} dxdt + \frac{\beta_r}{2} \int_0^T \int_{\omega_{r,d}} |\phi - \phi_{r,d}|^{2m} dxdt + \frac{\mu_r}{2} \int_0^T \int_{\omega_r} |f_r|^{2s} dxdt. \quad (3.1)$$

onde $\mu_r > 0$, $\alpha_r \geq 0$, $\beta_r \geq 0$, $r = 1, 2$, são constantes, $u_{r,d}$ e $\phi_{r,d}$ são funções dadas em $L^{2s}(Q_{r,d}) = L^{2s}(\omega_{r,d} \times (0, T))$, $r = 1, 2$, as funções f_r são os controles tomados em \mathcal{U}_r e os estados (u, ϕ) são soluções das equações

$$\begin{cases} \partial_t u + l \partial_t \phi = \Delta u + f_1 \chi_{\omega_1} + f_2 \chi_{\omega_2}, & \text{em } Q; \\ \partial_t \phi = \Delta \phi + F(\phi) + u, & \text{em } Q; \\ u = u_0, \phi = \phi_0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (3.2)$$

O problema de controle que consideraremos é encontrar um par de controles (f_1, f_2) e variáveis (u, ϕ) tais que os funcionais em (3.1) sejam minimizados no sentido de Nash sujeitos a (3.2). Esses funcionais medem a diferença, numa região $\omega_{r,d}$, entre o estado real (u, ϕ) e um estado ideal dado $(u_{r,d}, \phi_{r,d})$, mais um termo que mede o custo do controle f_r .

3.2 Problema de Otimização - Equilíbrio de Nash

Consideremos o seguinte problema

$$(P_3) \quad \min_{(z, \varphi, h_1, h_2) \in \mathcal{Q}} (J_1(z, \varphi, h_1, h_2), J_2(z, \varphi, h_1, h_2)),$$

onde \mathcal{Q} é dado por uma restrição de igualdade $\mathcal{Q} = \{(u, \phi, f_1, f_2) \in E; M(z, \varphi, h_1, h_2) = 0\}$ e $M : E \rightarrow \tilde{E}$ é um operador definido da seguinte maneira: $M(z, \varphi, h_1, h_2) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \partial_t z + l \partial_t \varphi - \Delta z - h_1 \chi_{\omega_1} - h_2 \chi_{\omega_2} = \psi_1, & \text{em } Q; \\ \partial_t \varphi - \Delta \varphi - F(\varphi) - z = \psi_2, & \text{em } Q; \\ z(0) - z_0 = \psi_3, \varphi(0) - \varphi_0 = \psi_4, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma; \end{cases}$$

Observamos que o problema (P_3) é um problema de otimização vetorial com dois funcionais objetivos definidos sobre conjuntos de controles distintos. Este problema pode ser tratado como um jogo de dois-jogadores e, desta forma, podemos lançar mão dos conceitos da teoria dos jogos para abordá-lo. Observe que os funcionais podem ser tratados como os custos alocados aos jogadores e os controles são as possíveis estratégias utilizadas pelos jogadores para atingirem suas metas. Uma solução de Nash para tal problema consiste em minimizar cada objetivo sobre sua própria estratégia, fixando uma estratégia para o outro jogador, até que todos os objetivos tenham sido minimizados. Assim, obteremos um sistema de otimalidade acoplado cuja solução será usada para caracterizar o equilíbrio de Nash.

Observação 3.1.

(i) Devemos resaltar que os mesmos resultados podem ser estendidos a um número qualquer n de funcionais objetivos.

(ii) Por todo este capítulo, o subíndice r assumirá os inteiros 1, 2.

Agora, trabalharemos no sentido de obter uma solução para o nosso problema de otimização.

Se fixarmos primeiro o controle $h_2 \in \mathcal{U}_2$, então podemos considerar o seguinte problema auxiliar

$$(P)_{h_1} \min_{(z_1, \varphi_1, h_1) \in \mathcal{Q}_1} \tilde{J}_1(z_1, \varphi_1, h_1), \quad (3.3)$$

onde $\tilde{J}_1(\cdot, \cdot, \cdot) = J_1(\cdot, \cdot, \cdot, h_2)$, $M_1(\cdot, \cdot, \cdot) = M(\cdot, \cdot, \cdot, h_2)$ e

$$\mathcal{Q}_1 = \{(z_1, \varphi_1, h_1); M_1(z_1, \varphi_1, h_1) = 0\}.$$

Da mesma forma, podemos fixar o controle $h_1 \in \mathcal{U}_1$ e considerar o problema

$$(P)_{h_2} \min_{(z_2, \varphi_2, h_2) \in \mathcal{Q}_2} \tilde{J}_2(z_2, \varphi_2, h_2), \quad (3.4)$$

onde $\tilde{J}_2(\cdot, \cdot, \cdot) = J_1(\cdot, \cdot, h_1, \cdot)$, $M_2(\cdot, \cdot, \cdot) = M(\cdot, \cdot, h_1, \cdot)$ e

$$\mathcal{Q}_2 = \{(z_2, \varphi_2, h_2); M_2(z_2, \varphi_2, h_2) = 0\}.$$

O próximo teorema apresenta as condições necessárias para a otimalidade dos problemas $(P)_{h_r}$, $r = 1, 2$.

Teorema 3.2. *Se $(u_r, \phi_r, f_r) \in E_1 \times E_2 \times \mathcal{U}_r$ é uma solução ótima do problema $(P)_{h_r}$, então existem funções $(q_r, \delta_r) \in E_1 \times E_2$ e constantes $\lambda_r > 0$ tais que as funções u_r, ϕ_r, f_r satisfazem o sistema (3.2), q_r, δ_r, λ_r satisfazem o sistema adjunto*

$$\begin{cases} -\partial_t q^{(r)} - \Delta q^{(r)} - \delta^{(r)} = \lambda_r \alpha_r k(u_r - u_{r,d})^{2k-1} \chi_{\omega_{r,d}}, & \text{em } Q; \\ -\partial_t \delta^{(r)} - \Delta \delta^{(r)} - l \partial_t q^{(r)} - F'(\phi) \delta^{(r)} = \lambda_r \beta_r m(\phi_r - \phi_{r,d})^{2m-1} \chi_{\omega_{r,d}}, & \text{em } Q; \\ q^{(r)}(T) = \delta^{(r)}(T) = 0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial q^{(r)}}{\partial n} = \frac{\partial \delta^{(r)}}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma; \end{cases} \quad (3.5)$$

e os controles são dados por

$$f_r = \left(-\frac{1}{\lambda_r s \mu_r} q_r \chi_{\omega_r} \right)^{\frac{1}{2s-1}}, \quad \text{q.t.p em } t \in [0, T];$$

onde $F'(\phi) \delta^{(r)} = (3\phi^2 - 2b\phi - a) \delta^{(r)}$ (veja Teorema 2.8 no Capítulo 2).

Agora, podemos caracterizar o equilíbrio de Nash para o problema (P_3) da seguinte maneira:

Definição 3.3. *Um par de controles $(f_1, f_2) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ é um equilíbrio de Nash para o problema (P_3) se existem funções de estado $(u, \phi) \in E_1 \times E_2$, tais que as ternas $(u, \phi, f_r) \in E_1 \times E_2 \times \mathcal{U}_r, r = 1, 2$, sejam soluções ótimas dos problemas $(P)_{h_r}$ (veja o Apêndice B).*

Considerando o teorema anterior e a definição acima, os candidatos a equilíbrio de Nash para o problema (P_3) , são os pares (f_1, f_2) tais existem funções de estado (u, ϕ) , estados adjuntos $(q^{(r)}, \delta^{(r)}) \in W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q), r = 1, 2$, e constantes $\lambda_r > 0, r = 1, 2$, satisfazendo o seguinte sistema

$$f_r = \left(-\frac{1}{\lambda_r s \mu_r} q^{(r)} \chi_{\omega_r} \right)^{\frac{1}{2s-1}}, \quad \text{q.t.p em } t \in [0, T]; \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \partial_t u + l \partial_t \phi = \Delta u + f_1 \chi_{\omega_1} + f_2 \chi_{\omega_2}, & \text{em } Q; \\ \partial_t \phi = \Delta \phi + F(\phi) + u, & \text{em } Q; \\ u(0) = u_0, \phi(0) = \phi_0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} -\partial_t q^{(r)} - \Delta q^{(r)} - \delta^{(r)} = \lambda_r \alpha_r k(u - u_{r,d})^{2k-1} \chi_{\omega_{r,d}}, & \text{em } Q; \\ -\partial_t \delta^{(r)} - l \partial_t q^{(r)} - \Delta \delta^{(r)} - F'(\phi_r) \delta^{(r)} = \lambda_r \beta_r m(\phi - \phi_{r,d})^{2m-1} \chi_{\omega_{r,d}}, & \text{em } Q; \\ q^{(r)}(T) = \delta^{(r)}(T) = 0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial q^{(r)}}{\partial n} = \frac{\partial \delta^{(r)}}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (3.8)$$

Teorema 3.4. *Admitindo as hipóteses dos Teoremas 2.1 e 2.4, existe pelo menos um candidato a equilíbrio de Nash para o problema (P_3) .*

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos fazer a prova considerando $\lambda_r = 1, r = 1, 2$. Seja o espaço de Banach $B = L^3 \times L^9 \times L^3 \times L^3$ e consideremos a aplicação $T_\varepsilon : B \rightarrow B$ definida por

$$\begin{pmatrix} u \\ \phi \\ q^{(r)} \\ \delta^{(r)} \end{pmatrix} = T_\varepsilon \begin{pmatrix} z \\ \varphi \\ p^{(r)} \\ \rho^{(r)} \end{pmatrix}, \forall \varepsilon \in [0, 1]$$

onde $(u, \phi, q^{(r)}, \delta^{(r)})$ é solução do seguinte problema auxiliar:

$$f_r = \left(-\frac{1}{s\mu_r} p^{(r)} \chi_{\omega_r} \right)^{\frac{1}{2s-1}}; \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = -l\partial_t \phi + f_1 \chi_{\omega_1} + f_2 \chi_{\omega_2}, & \text{em } Q; \\ \partial_t \phi - \Delta \phi + (\phi^3 - b\phi^2 - a\phi) = \varepsilon z, & \text{em } Q; \\ u(0) = u_0, \phi(0) = \phi_0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma; \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} -\partial_t q^{(r)} - \Delta q^{(r)} = \varepsilon [\rho^{(r)} + \alpha_r k(u - u_{r,d})^{2k-1} \chi_{\omega_{r,d}}], & \text{em } Q; \\ -\partial_t \delta^{(r)} - \Delta \delta^{(r)} + (3\phi^2 - 2b\phi - a)\delta^{(r)} = \beta_r m(\phi - \phi_{r,d})^{2m-1} \chi_{\omega_{r,d}} + l\partial_t q^{(r)}; \\ q^{(r)}(T) = \delta^{(r)}(T) = 0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial q^{(r)}}{\partial n} = \frac{\partial \delta^{(r)}}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (3.11)$$

Para provar o teorema é suficiente mostrar que a aplicação T_1 tem um ponto fixo. Nesse sentido, mostraremos as hipóteses que possibilitarão a utilização do Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder. Claramente, para cada $r = 1, 2$, dado $p^{(r)} \in L^3(Q)$, existe uma única função $f_r \in L^3(Q)$ satisfazendo a equação (3.9). Agora, como nas provas dos Teoremas 2.1 e 2.4 no Capítulo 2, sabemos que existem únicas funções $\phi, u \in W_3^{1,2}(Q) \cap L^\infty(Q)$ que satisfazem o sistema (3.10) e únicas funções $q, \delta \in W_3^{1,2}(Q) \cap L^\infty(Q)$ que satisfazem o sistema (3.11). Portanto, para todo $\varepsilon \in [0, 1]$, a aplicação T_ε está bem definida; além disso, tomando as funções $(z_i, \varphi_i, p_i^{(r)}, \rho_i^{(r)}) \in L^3(Q) \times L^9(Q) \times L^3(Q) \times L^3(Q)$ e $f_i^{(r)}, (u_i, \phi_i), (q_i^{(r)}, \delta_i^{(r)})$, com

$i = 1, 2$, as correspondentes soluções dos sistemas (3.9), (3.10) e (3.11), obtemos as seguintes estimativas

$$\|f_1^{(r)} - f_2^{(r)}\|_{L^3(Q_r)} \leq C \|p_1^{(r)} - p_2^{(r)}\|_{L^3(Q_r)}, \quad (3.12)$$

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_{W_3^{2,1}(Q)} \leq C \|z_1 - z_2\|_{L^3(Q)}, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{W_3^{2,1}(Q)} &\leq C [\|\partial_t \phi_1 - \partial_t \phi_2\|_{L^3(Q)} + \|f_1^{(1)} - f_2^{(1)}\|_{L^3(Q_1)} \\ &\quad + \|f_1^{(2)} - f_2^{(2)}\|_{L^3(Q_2)}] \\ &\leq C [\|z_1 - z_2\|_{L^3(Q)} + \|p_1^{(1)} - p_2^{(1)}\|_{L^3(Q_r)} \\ &\quad + \|p_1^{(2)} - p_2^{(2)}\|_{L^3(Q_r)}], \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\|q_1^{(r)} - q_2^{(r)}\|_{W_3^{2,1}} \leq C \|\rho_1^{(r)} - \rho_2^{(r)}\|_{L^3} + C \sum_{j=0}^{2k-2} \|u_1^{2k-1-j} - u_2^{2k-1-j}\|_{L^3} \quad (3.15)$$

e

$$\begin{aligned} \|\delta_1^{(r)} - \delta_2^{(r)}\|_{W_3^{2,1}} &\leq C \|\partial_t q_1^{(r)} - \partial_t q_2^{(r)}\|_{L^3} \\ &\quad + C \sum_{j=0}^{2k-2} \|\phi_1^{2k-1-j} - \phi_2^{2k-1-j}\|_{L^3}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde as constantes C são possivelmente diferentes e não dependem de ε . Segue das estimativas acima que a aplicação T_ε é contínua em $(u, \phi, q^{(r)}, \delta^{(r)})$, para todo $\varepsilon \in [0, T]$. Similarmente, podemos mostrar que, para todo $(u, \phi, q^{(r)}, \delta^{(r)}) \in B$, a aplicação T_ε é contínua em $\varepsilon \in [0, 1]$. Agora, do Lema A.5 no Apêndice A, podemos concluir que T_ε é compacta e da teoria das equações parabólicas temos que dado $(z, \varphi, p^{(r)}, \rho^{(r)}) \in B$, se $\varepsilon = 0$, então o sistema (3.9)-(3.11) tem uma única solução. Assim, para concluir que a função T_1 tem um ponto fixo, resta somente mostrar que o conjunto dos pontos fixos de T_ε é limitado em B . Como nas provas dos Teoremas 2.1 e 2.4 no Capítulo 2, podemos provar que se $(u, \phi, q^{(r)}, \delta^{(r)})$ é um tal ponto fixo, então

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \quad (3.17)$$

e

$$\|q^{(r)}\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\delta^{(r)}\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C. \quad (3.18)$$

O Lema A.9 no Apêndice A, dá uma limitação para todo ponto fixo de T_ε em B independente de ε . A conclusão da prova segue como nas demonstrações dos teoremas (2.1) e (2.4) no Capítulo 2. ■

CAPÍTULO 4

Otimidade de Pareto para Controle Multiobjetivo de um Modelo de Solidificação

Neste capítulo, trataremos do ótimo de Pareto para o mesmo problema estudado no capítulo anterior. Aquí, transformaremos o problema de controle num problema de otimização vetorial e depois usaremos o formalismo de Dubovitskii e Milyutin generalizado para obter as condições necessárias de otimalidade local.

4.1 Formulação do Problema

Como antes, ω_1, ω_2 denotarão duas regiões abertas de Ω , $\omega_{1,d}$ e $\omega_{2,d}$ dois subconjuntos abertos de Ω e consideraremos os seguintes espaços: $E_1 = W_{2s}^{2,1}(Q)$, $E_2 = W_{2m}^{2,1}(Q)$, $\mathcal{U}_r = L^{2s}(Q_r)$, $E = E_1 \times E_2 \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\tilde{E} = L^{2s}(Q) \times L^{2m}(Q) \times L^{2s}(\Omega) \times L^{2m}(\Omega)$.

Sejam os funcionais $J_r : E \rightarrow \mathbb{R}$, $r = 1, 2$, dados por

$$J_r(u, \phi, f_1, f_2) = \frac{\alpha_r}{2} \int_0^T \int_{\omega_{r,d}} |u - u_{r,d}|^{2k} dxdt + \frac{\beta_r}{2} \int_0^T \int_{\omega_{r,d}} |\phi - \phi_{r,d}|^{2m} dxdt + \frac{\mu_r}{2} \int_0^T \int_{\omega_r} |f_r|^{2s} dxdt. \quad (4.1)$$

onde $\mu_r > 0$, $\alpha_r \geq 0$, $\beta_r \geq 0$, $r = 1, 2$, são constantes, $u_{r,d}$ e $\phi_{r,d}$ são funções dadas em $L^{2s}(\omega_{r,d} \times (0, T))$, f_r são os controles tomados em \mathcal{U}_r e as funções (u, ϕ) são os estados tomados como soluções das equações

$$\begin{cases} \partial_t u + l \partial_t \phi = \Delta u + f_1 \chi_{\omega_1} + f_2 \chi_{\omega_2}, & \text{em } Q; \\ \partial_t \phi = \Delta \phi + F(\phi) + u, & \text{em } Q; \\ u = u_0, \phi = \phi_0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (4.2)$$

Como no capítulo anterior, o problema de controle que consideraremos é encontrar controles (f_1, f_2) e estados (u, ϕ) tais que os funcionais em (4.1) sejam minimizados no sentido de Pareto sujeitos a (4.2).

4.2 Problema de Otimização - Ótimo de Pareto

Consideremos o seguinte problema de otimização vetorial

$$(P_4) \quad \min_{(u, \phi, f_1, f_2) \in \mathcal{Q}} (J_1, J_2)(u, \phi, f_1, f_2)$$

onde \mathcal{Q} é dado por uma restrição de igualdade $\mathcal{Q} = \{(u, \phi, f_1, f_2) \in E; M(u, \phi, f_1, f_2) = 0\}$ e $M : E \rightarrow \tilde{E}$ é um operador definido da seguinte maneira: $M(u, \phi, f_1, f_2) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \partial_t u + l \partial_t \phi - \Delta u - f_1 \chi_{\omega_1} - f_2 \chi_{\omega_2} = \psi_1, & \text{em } Q; \\ \partial_t \phi - \Delta \phi - F(\phi) - u = \psi_2, & \text{em } Q; \\ u(0) - u_0 = \psi_3, \phi(0) - \phi_0 = \psi_4, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases}$$

Observação 4.1.

(i) Devemos ressaltar que os mesmos resultados podem ser estendidos a um número qualquer n de funcionais objetivos.

(ii) Por todo este capítulo, o subíndice r assumirá os inteiros 1, 2.

Definição 4.2. Um par de controles $(f_1, f_2) \in E$ é chamado ótimo de Pareto para o problema (P_4) se existe um estado (u, ϕ) tal que $(u, \phi, f_1, f_2) \in \mathcal{Q}$, e não existe um ponto $(z, \varphi, h_1, h_2) \in \mathcal{Q}$ com $(h_1, h_2) \neq (f_1, f_2)$ tal que $J_r(z, \varphi, h_1, h_2) \leq J_r(u, \phi, f_1, f_2)$, $r = 1, 2$, com pelo menos uma desigualdade estrita (veja a Definição 1.34 no Capítulo 1).

Agora, usaremos o formalismo de Dubovitskii e Milyutin generalizado para obter as condições necessárias para que o par (f_1, f_2) seja um ótimo de Pareto.

Teorema 4.3. Se $\inf J_r(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot) < J_r(u, \phi, f_1, f_2)$, $r = 1, 2$. Então uma condição necessária que o ponto (f_1, f_2) seja um ótimo de Pareto para o problema (P_4) é que existam escalares estritamente positivos $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e multiplicadores $(q, \delta) \in E_1 \times E_2$ tais que as funções u, ϕ, f_1, f_2 satisfazem o sistema (4.2), o sistema adjunto abaixo é verificado,

$$\begin{cases} \partial_t q + \Delta q + \delta = -\lambda_1 \alpha_1 k(u - u_{1,d})^{2k-1} \chi_{\omega_{1,d}} - \lambda_2 \alpha_2 k(u - u_{2,d})^{2k-1} \chi_{\omega_{2,d}}, & \text{em } Q; \\ \partial_t \delta + l \partial_t q + \Delta \delta + F'(\phi) \delta = -\lambda_1 \beta_1 m(\phi - \phi_{1,d})^{2m-1} \chi_{\omega_{1,d}} - \lambda_2 \beta_2 m(\phi - \phi_{2,d})^{2m-1} \chi_{\omega_{2,d}}; \\ q(T) = \delta(T) = 0, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial q}{\partial n} = \frac{\partial \delta}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma; \end{cases} \quad (4.3)$$

e os controles são dados por

$$f_1 = \left(-\frac{1}{\lambda_1 s \mu_1} q \chi_{\omega_1}\right)^{\frac{1}{2s-1}} \quad e \quad f_2 = \left(-\frac{1}{\lambda_2 s \mu_2} q \chi_{\omega_1}\right)^{\frac{1}{2s-1}}, \quad \text{q.t.p. em } [0, T].$$

Antes de fazer a prova deste teorema, apresentaremos alguns lemas técnicos.

Sabemos que a derivada do funcional $J_r(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ no ponto (u, ϕ, f_1, f_2) e na direção (z, φ, h_1, h_2) é dada por

$$\begin{aligned} J'_r(u, \phi, f_1, f_2)(z, \varphi, h_1, h_2) = & \alpha_r k \int_0^T \int_{\omega_{r,d}} (u - u_{r,d})^{2k-1} z dx dt + \beta_r m \int_0^T \int_{\omega_{r,d}} (\phi - \phi_{r,d})^{2m-1} \varphi \\ & + \mu_r s \int_0^T \int_{\omega_r} (f_r)^{2s-1} h_r dx dt. \end{aligned}$$

Lema 4.4. *O cone de direções de descida associado ao funcional $J_r(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ no ponto (u, ϕ, f_1, f_2) é dado por*

$$DC(J_r, (u, \phi, f_1, f_2)) = \{(z, \varphi, h_1, h_2) \in E; J'_r(u, \phi, f_1, f_2)(z, \varphi, h_1, h_2) < 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[DC(J_r)]^* = \{\varphi_r \in E'; \exists \lambda_r \geq 0; \varphi_r(z, \varphi, h_1, h_2) = -\lambda_r J'_r(u, \phi, f_1, f_2)(z, \varphi, h_1, h_2)\}$$

(veja o Lema 2.9 no Capítulo 2).

Lema 4.5. *Se $NC(J_r, (u, \phi, f_1, f_2))$ é o cone de não crescimento associado ao funcional $J_r(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ no ponto (u, ϕ, f_1, f_2) , então seu cone dual é dado por*

$$[NC(J_r)]^* = [DC(J_r)]^*.$$

Demonstração: Sabemos que os funcionais são definidos por normas em espaços L^p , $1 < p < \infty$ o que implica eles serem uniformemente convexos e portanto estritamente convexos (veja [19]). Segue da observação 1.45 no Capítulo 1, que os funcionais são Ponstein convexos (tal observação pode ser encontrada em [24]; pp.98). Como por hipótese $\inf J_r(z, \varphi, h_1, h_2) < J_r(u, \phi, f_1, f_2)$, $r = 1, 2$, então a conclusão da prova segue do Lema 1.47 no Capítulo 1.

Sabemos que o operador derivada de Gâteaux da aplicação $M(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ no ponto (u, ϕ, f_1, f_2) é definido por $M'_G(u, \phi, f_1, f_2)(z, \varphi, h_1, h_2) = (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3, \tilde{\psi}_4)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \partial_t z + l\partial_t \varphi - \Delta z - h_1 \chi_{\omega_1} - h_2 \chi_{\omega_2} = \tilde{\psi}_1, & \text{em } Q; \\ \partial_t \varphi - \Delta \varphi - F'_G(\phi)\varphi - z = \tilde{\psi}_2, & \text{em } Q; \\ z(0) = \tilde{\psi}_3, \quad \varphi(0) = \tilde{\psi}_4, & \text{em } \Omega; \\ \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $F'_G(\phi)\varphi = F'(\phi)\varphi = a\varphi + 2b\phi\varphi - 3\phi^2\varphi$ ■

Lema 4.6.

(i) *A aplicação $M(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ é estritamente diferenciável.*

(ii) *O operador $M'(u, \phi, f_1, f_2) = M'_G(u, \phi, f_1, f_2)$ é sobrejetivo.*

(veja o Lema 2.10 no Capítulo 2.)

Lema 4.7. *O cone tangente ao conjunto \mathcal{Q} no ponto (u, ϕ, f_1, f_2) é o subespaço vetorial*

$$TC(\mathcal{Q}, (u, \phi, f_1, f_2)) = \{(z, \varphi, h_1, h_2) \in E : M'(u, \phi, f_1, f_2)(z, \varphi, h_1, h_2) = 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[TC(\mathcal{Q})]^* = \{\varphi \in E^1; \varphi(z, \varphi, h_1, h_2) = 0, (z, \varphi, h_1, h_2) \in TC(\mathcal{Q}, (u, \phi, f_1, f_2))\}.$$

(veja o Lema 2.11 no Capítulo 2).

Lema 4.8.

(i) *Os cones $DC(J_r) = DC(J_r, (u, \phi, f_1, f_2))$, $NC(J_r) = NC(J_r, (u, \phi, f_1, f_2))$, com $r = 1, 2$, são abertos e convexos.*

(ii) *O cone $TC(\mathcal{Q}) = TC(\mathcal{Q}, (u, \phi, f_1, f_2))$ é convexo e fechado.*

Demonstração: A prova segue da diferenciabilidade dos funcionais e do operador que define a restrição de igualdade (veja os resultados no Capítulo 1). ■

Agora, estamos preparados para demonstrar o teorema principal.

Demonstração: (Teorema 4.3) Considerando que (u, ϕ, f_1, f_2) é um ótimo de Pareto para o problema (P_4) , segue do Lema 1.40 no Capítulo 1, que

$$DC(J_1) \cap NC(J_2) \cap TC(Q) = \emptyset$$

e

$$DC(J_2) \cap NC(J_1) \cap TC(Q) = \emptyset.$$

Considerando os Lemas 4.8 e 4.5, segue do Teorema Dubovitskii e Milyutin generalizado (veja Observação 1.43 no Capítulo 1) que existem funcionais lineares contínuos $g_1 \in [DC(J_1)]^*$, $g_2 \in [DC(J_2)]^*$, $g_3 \in [TC(Q)]^*$, não nulas simultaneamente, tais que vale a equação de Euler-Lagrange

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0. \tag{4.5}$$

Seja $(h_1, h_2) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ um par de controles arbitrários e seja (z, φ, h_1, h_2) uma solução do sistema (4.4), com $(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3, \tilde{\psi}_4) = (0, 0, 0, 0)$. Neste caso, temos que $(z, \varphi, h_1, h_2) \in TC(\mathcal{Q}, (u, \phi, f_1, f_2))$ e conseqüentemente $g_3(z, \varphi, h_1, h_2) = 0$. Segue da equação de Euler-Lagrange (4.5) que

$$(g_1 + g_2)(z, \varphi, h_1, h_2) = 0. \tag{4.6}$$

Do Lema 4.4, sabemos que existem escalares $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tais que

$$g_1(z, \varphi, h_1, h_2) = -\lambda_1 \left[\alpha_1 k \int_0^T \int_{\omega_{1,d}} (u - u_{1,d})^{2k-1} z dx dt + \beta_1 m \int_0^T \int_{\omega_{1,d}} (\phi - \phi_{1,d})^{2m-1} \varphi dx dt \right. \\ \left. + \mu_1 s \int_0^T \int_{\omega_1} (f_1)^{2s-1} h_1 dx dt \right]$$

e

$$g_2(z, \varphi, h_1, h_2) = -\lambda_2 \left[\alpha_2 k \int_0^T \int_{\omega_{2,d}} (u - u_{2,d})^{2k-1} z dx dt + \beta_2 m \int_0^T \int_{\omega_{2,d}} (\phi - \phi_{2,d})^{2m-1} \varphi dx dt \right. \\ \left. + \mu_2 s \int_0^T \int_{\omega_2} (f_2)^{2s-1} h_2 dx dt \right].$$

Substituindo esses funcionais em (4.6), temos a identidade

$$\begin{aligned} & -\lambda_1 \alpha_1 k \int_0^T \int_{\omega_{1,d}} (u - u_{1,d})^{2k-1} z dx dt - \lambda_2 \alpha_2 k \int_0^T \int_{\omega_{2,d}} (u - u_{2,d})^{2k-1} z dx dt \\ & -\lambda_1 \beta_1 m \int_0^T \int_{\omega_{1,d}} (\phi - \phi_{1,d})^{2m-1} \varphi dx dt - \lambda_2 \beta_2 m \int_0^T \int_{\omega_{2,d}} (\phi - \phi_{2,d})^{2m-1} \varphi dx dt \quad (4.7) \\ & -\lambda_1 \mu_1 s \int_0^T \int_{\omega_1} (f_1)^{2s-1} h_1 dx dt - \lambda_2 \mu_2 s \int_0^T \int_{\omega_2} (f_2)^{2s-1} h_2 dx dt = 0. \end{aligned}$$

Seja (q, δ) a solução do sistema adjunto (4.3). Tomando o produto das equações de (4.3) por (z, φ) e somando os resultados, obtemos a expressão

$$\begin{aligned} & -\lambda_1 \alpha_1 k \int_0^T \langle (u - u_{1,d})^{2k-1} \chi_{\omega_{1,d}}, z \rangle dt - \lambda_2 \alpha_2 k \int_0^T \langle (u - u_{2,d})^{2k-1} \chi_{\omega_{2,d}}, z \rangle dt \\ & -\lambda_1 \beta_1 m \int_0^T \langle (\phi - \phi_{1,d})^{2m-1} \chi_{\omega_{1,d}}, \varphi \rangle dt - \lambda_2 \beta_2 m \int_0^T \langle (\phi - \phi_{2,d})^{2m-1} \chi_{\omega_{2,d}}, \varphi \rangle dt \quad (4.8) \\ & = \int_0^T \langle \partial_t q + \Delta q + \delta, z \rangle dt + \int_0^T \langle \partial_t \delta + l \partial_t q + \Delta \delta + F'(\varphi) \delta, \varphi \rangle dt. \end{aligned}$$

Integramos por partes, observando que $u(0) = \phi(0) = q(T) = \delta(T) = 0$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} & -\lambda_1 \alpha_1 k \int_0^T \langle (u - u_{1,d})^{2k-1} \chi_{\omega_{1,d}}, z \rangle dt - \lambda_2 \alpha_2 k \int_0^T \langle (u - u_{2,d})^{2k-1} \chi_{\omega_{2,d}}, z \rangle dt \\ & -\lambda_1 \beta_1 m \int_0^T \langle (\phi - \phi_{1,d})^{2m-1} \chi_{\omega_{1,d}}, \varphi \rangle dt - \lambda_2 \beta_2 m \int_0^T \langle (\phi - \phi_{2,d})^{2m-1} \chi_{\omega_{2,d}}, \varphi \rangle dt \quad (4.9) \\ & = \int_0^T \langle -q, \partial_t z - \Delta z + l \partial_t \varphi \rangle dt + \int_0^T \langle -\delta, \partial_t \varphi - z - \Delta \varphi - F'(\phi) \varphi \rangle dt. \end{aligned}$$

Comparando (4.9) com a soma das equações do sistema (4.4) com $(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3, \tilde{\psi}_4) = (0, 0, 0, 0)$, temos que

$$\begin{aligned} & -\lambda_1 \alpha_1 k \int_0^T \langle (u - u_{1,d})^{2k-1} \chi_{\omega_{1,d}}, z \rangle dt - \lambda_2 \alpha_2 k \int_0^T \langle (u - u_{2,d})^{2k-1} \chi_{\omega_{2,d}}, z \rangle dt \\ & -\lambda_1 \beta_1 m \int_0^T \langle (\phi - \phi_{1,d})^{2m-1} \chi_{\omega_{1,d}}, \varphi \rangle dt - \lambda_2 \beta_2 m \int_0^T \langle (\phi - \phi_{2,d})^{2m-1} \chi_{\omega_{2,d}}, \varphi \rangle dt \quad (4.10) \\ & = \int_0^T \langle -q \chi_{\omega_1}, h_1 \rangle_{\omega_1} dt + \int_0^T \langle -q \chi_{\omega_2}, h_2 \rangle_{\omega_2} dt. \end{aligned}$$

De (4.10) e (4.7), segue que

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \mu_1 s \int_0^T \langle (f_1)^{2s-1}, h_1 \rangle_{\omega_1} dt + \lambda_2 \mu_2 s \int_0^T \langle (f_2)^{2s-1}, h_2 \rangle_{\omega_2} dt \\ & = \int_0^T \langle -q \chi_{\omega_1}, h_1 \rangle_{\omega_1} dt + \int_0^T \langle -q \chi_{\omega_2}, h_2 \rangle_{\omega_2} dt. \end{aligned}$$

De onde segue que

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mu_1 s \int_0^T \langle (f_1)^{2s-1}, h_1 \rangle_{\omega_1} dt &= \int_0^T \langle -q \chi_{\omega_1}, h_1 \rangle_{\omega_1} dt, \\ \lambda_2 \mu_2 s \int_0^T \langle (f_2)^{2s-1}, h_2 \rangle_{\omega_2} dt &= \int_0^T \langle -q \chi_{\omega_2}, h_2 \rangle_{\omega_2} dt, \end{aligned}$$

para todo $h_r \in \mathcal{U}_r, r = 1, 2$. Portanto, para $\lambda_r \neq 0, r = 1, 2$,

$$f_1 = \left(-\frac{1}{\lambda_1 s \mu_1} q \chi_{\omega_1} \right)^{\frac{1}{2s-1}} \quad \text{e} \quad f_2 = \left(-\frac{1}{\lambda_2 s \mu_2} q \chi_{\omega_2} \right)^{\frac{1}{2s-1}}, \quad \text{q.t.p. em } t \in [0, T].$$

Observe que de fato $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ pois, se por exemplo $\lambda_1 = 0$, então $g_1 \equiv 0$. Substituindo g_1 na equação (4.6), temos que $\lambda_2 = 0$ e portanto $g_2 \equiv 0$. Agora, voltamos para a equação (4.5) para concluir que $g_1 = g_2 = g_3 \equiv 0$ o que contradiz o Teorema de Dubovitskii e Milyutin. Portanto, os escalares λ_1 e λ_2 são estritamente positivos e temos a conclusão da prova. ■

CAPÍTULO 5

Problema de Controle Ótimo sobre as equações de Navier-Stokes

Neste capítulo, trataremos do problema de controle mono-objetivo para sistemas governados pelas equações de Navier-Stokes, abordando tanto a questão da existência de um controle ótimo, como as condições necessárias de otimalidade local via formalismo de Dubovitskii e Milyutin.

5.1 Formulação do Problema

Seja Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 , ω_c e ω_d duas regiões abertas de Ω e seja W o espaço funcional definido por

$$W = \{ \mathbf{v} \in L^2(0, T; V); \partial_t \mathbf{v} \in L^2(0, T; V') \},$$

com a norma $\|\mathbf{v}\|_W = \|\mathbf{v}\|_{L^2(0, T; V)} + \|\partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(0, T; V')} < +\infty$. Ou por

$$W = \{ \mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbb{H}^2); \partial_t \mathbf{v} \in L^2(0, T; H) \},$$

com a norma $\|\mathbf{v}\|_W = \|\mathbf{v}\|_{L^2(0, T; \mathbb{H}^2)} + \|\partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(0, T; H)} < +\infty$. Quando necessário, especificaremos a definição a ser considerada.

Denotamos por $\mathcal{U}_c = L^2(0, T; H(\omega_c))$ o espaço que contém os controles distribuídos na região ω_c e definimos o funcional objetivo $J : W \times \mathcal{U}_c \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\omega_d} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_d|^2 dxdt + \frac{\mu}{2} \int_0^T \int_{\omega_c} |\mathbf{v}|^2 dxdt; \quad (5.1)$$

onde $\mu > 0, \alpha \geq 0$, são constantes, \mathbf{u}_d é uma função dada em $L^2(0, T; H(\omega_d))$, a função \mathbf{v} é o controle tomado no subconjunto K_c , que assumiremos ser convexo, fechado, com interior não vazio de \mathcal{U}_c e a função de estado \mathbf{u} é tomada como solução da equação

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - v \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \mathbf{v} \chi_{\omega_c}, & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{em } Q; \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega; \quad \mathbf{u} = 0, & \text{em } \Sigma; \end{cases} \quad (5.2)$$

onde \mathbf{u} é a velocidade do fluido, p é a pressão hidrostática, $v = cte > 0$ é a viscosidade cinemática, \mathbf{f} é a densidade volumétrica de forças externas, \mathbf{u}_0 é uma função dada.

O problema de controle ótimo que consideraremos é encontrar um controle \mathbf{v} e um estado \mathbf{u} tais que o funcional (5.1) seja minimizado sujeito a equação (5.2). Como nos capítulos anteriores, esse funcional mede a diferença entre um estado real \mathbf{u} e um estado ideal \mathbf{u}_d , mais um termo que mede o custo do controle \mathbf{v} . Agora, para obter a existência das funções de estado representamos a equação de estado em sua forma operacional, a qual nos permite definir o operador $M : W \times \mathcal{U}_c \rightarrow L^2(0, T; H) \times H$ da seguinte maneira: $M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\Psi_1, \Psi_2)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + v A \mathbf{u} + B(\mathbf{u}) = \mathbf{f} + \mathbf{v} \chi_{\omega_c} + \Psi_1, & \text{em } Q; \\ \mathbf{u}|_{t=0} - \mathbf{u}_0 = \Psi_2, & \text{em } \Omega; \end{cases}$$

onde o operador $A : V \rightarrow V'$ é definido por

$$\langle A \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle A^* \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

e o operador $B : V \rightarrow V'$ é definido por

$$\langle B(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Lembremos os seguintes fatos:

(F1) V e H são espaços de Hilbert com as normas denotadas por $\|\cdot\|_1, |\cdot|_2$ e produtos

escalares $((\cdot, \cdot)), (\cdot, \cdot)$. Além disso, $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ algebricamente e topologicamente com injeções compactas.

(F2) O operador $A \in L(V, V')$ é contínuo, simétrico, coercivo e $D(A) = \{\mathbf{u} \in V; A\mathbf{u} \in H\}$.

(F3) $b : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma trilinear contínua satisfazendo.

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Consideremos as seguinte hipóteses:

(H1) $\mathbf{f} \in L^2(0, T; H)$ e $\mathbf{u}_d \in L^2(0, T; H(\omega_d))$.

(H2) $\mathbf{u}_0 \in H$.

Teorema 5.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$. Sob as hipóteses (H1), (H2), existe ao menos uma função \mathbf{u} tal que*

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H); \quad \partial_t \mathbf{u} \in L^1(0, T; V')$$

e a equação é verificada

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + v A\mathbf{u} + B(\mathbf{u}) = \mathbf{f} + \mathbf{v}\chi_{\omega_c}, & \text{em } Q; \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega; \end{cases} \quad (5.3)$$

(veja [45], pp.282, Teo.3.1).

Além das hipóteses mencionadas, considere ainda que:

(H3) $\mathbf{u}_0 \in V$.

(H4) Existe uma constante $\delta > 0$ tal que $\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0, T; H(\omega_c))} \leq \delta, \forall \mathbf{v} \in K_c$.

Teorema 5.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sob as hipóteses (H1), (H3), existe uma única função u tal que*

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}^2(\Omega)), \quad \partial_t \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H)$$

e a equação (5.3) é verificada.

(veja [45], pp. 314, Teo. 3.10).

Fazendo $z(t) = |\nabla \mathbf{u}_m(t)|_2^2$, temos a seguinte desigualdade diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z(t) & \leq C_1(v)(\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(H)}^2 + \delta) - C_3(v, \Omega)z(t) + C_2(v, \Omega)z^3(t) \\ z(0) & = |\nabla \mathbf{u}_{m0}|_2^2 \leq |\nabla \mathbf{u}_0|_2^2. \end{cases} \quad (5.8)$$

Observe que para $\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(H)}^2$ e δ suficientemente pequenos a equação diferencial correspondente a (5.8) possui pelo menos um ponto de equilíbrio e, se tivermos $|\nabla \mathbf{u}_0|_2^2$ menor do que o valor deste ponto de equilíbrio, então a solução da equação existe em $[0, T]$ e é limitada pelo valor deste ponto de equilíbrio. Assim, da Teoria das Desigualdades Diferenciais (veja [22]; pp.30), temos que

$$|\nabla \mathbf{u}_m(t)|_2^2 < +\infty, \forall t \in [0, T], \forall m. \quad (5.9)$$

Integrando a desigualdade (5.6) em $t, 0 \leq t \leq T$ e usando (5.9), obtemos

$$|\nabla \mathbf{u}_m(t)|_2^2 + v \int_0^T |P\Delta \mathbf{u}_m(t)|_2^2 \leq C, \forall m. \quad (5.10)$$

Daí, concluímos que existem as soluções aproximadas em $[0, T]$; além disso, obtemos as seguintes estimativas

$$\|\mathbf{u}_m\|_{L^\infty(0, T; V)} \leq C, \forall m. \quad (5.11)$$

e

$$\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0, T; \mathbb{H}^2)} \leq C, \forall m. \quad (5.12)$$

Agora, da equação (5.4), obtemos

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}) & \leq |\mathbf{f}(t)| |\mathbf{w}|_2 + |\mathbf{v}(t)\chi_{\omega_c}|_2 |\mathbf{w}|_2 + |P\Delta \mathbf{u}_m(t)|_2 |\mathbf{w}|_2 \\ & \quad + |B\mathbf{u}_m(t)|_2 |\mathbf{w}|_2, \forall \mathbf{w} \in H. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Usando a estimativa

$$|B\mathbf{u}_m(t)|_2 \leq C |\nabla \mathbf{u}_m(t)|_2^{\frac{3}{2}} |P\Delta \mathbf{u}_m(t)|_2^{\frac{1}{2}} \quad (5.14)$$

(veja [45], lema 3.8, pp.313), juntamente com (5.11)-(5.13), obtemos a seguinte estimativa

$$\|\partial_t \mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(0, T; H)} \leq C, \forall m. \quad (5.15)$$

Como a injeção de V em H é compacta, então a sequência $\{\mathbf{u}_m\}$ está imersa compactamente em $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H)$. Assim, usando as estimativas obtidas e escolhendo outras sequências, se necessário, temos as convergências

$$\mathbf{v}_m \rightharpoonup \mathbf{v}_m \text{ fraco em } L^2(0, T; H(\omega_r)); \quad (5.16)$$

$$\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ fraco em } L^\infty(0, T; V); \quad (5.17)$$

$$\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ fraco em } L^2(0, T; D(A)); \quad (5.18)$$

$$\partial_t \mathbf{u}_m \rightharpoonup \partial_t \mathbf{u} \text{ fraco em } L^2(0, T; H); \quad (5.19)$$

$$\mathbf{u}_m \rightarrow \mathbf{u} \text{ forte em } L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H). \quad (5.20)$$

Além dessas convergências, afirmamos que

$$B\mathbf{u}_m \rightarrow B\mathbf{u} \text{ forte em } L^2(0, T; H). \quad (5.21)$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned} |(B\mathbf{u}_m - B\mathbf{u}, \mathbf{w})| &\leq |b(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}, \mathbf{u}_m, \mathbf{w})| + |b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m - \mathbf{u}, \mathbf{w})| \\ &\leq |\mathbf{u}_m - \mathbf{u}|_\infty |\nabla \mathbf{u}_m|_2 |\mathbf{w}|_2 + |\mathbf{u}_m|_6 |\nabla(\mathbf{u}_m - \mathbf{u})|_3 |\mathbf{w}|_2 \\ &\leq C \left[|P\Delta(\mathbf{u}_m - \mathbf{u})|_2^{\frac{1}{2}} |\mathbf{u}_m - \mathbf{u}|_6^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_m\|_1 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{u}_m\|_1 |P\Delta(\mathbf{u}_m - \mathbf{u})|_2^{\frac{1}{2}} |\mathbf{u}_m - \mathbf{u}|_2^{\frac{1}{2}} \right] |\mathbf{w}|_2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

para todo $\mathbf{w} \in H$. Agora, integrando em $0 < t < T$, usando a desigualdade (5.11) e a desigualdade de Schwartz, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T |B\mathbf{u}_m - B\mathbf{u}|^2 dt &\leq C \int_0^T \|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}\|_1 |P\Delta(\mathbf{u}_m - \mathbf{u})|_2 dt \\ &\leq C \left(\int_0^T \|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}\|_1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |P\Delta(\mathbf{u}_m - \mathbf{u})|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

que nos dá a convergência (5.21) quando $m \rightarrow +\infty$. De maneira usual, usamos as convergências (5.16)-(5.21) para passar ao limite nos problemas aproximados e concluir o resultado desejado. \blacksquare

Agora, consideraremos o operador $B'(\mathbf{u}) : V \rightarrow V'$ definido por

$$\langle B'(\mathbf{u})\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}), \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \text{ e } \forall \mathbf{w} \in H, \mathbf{v} \in D(A).$$

e seu operador adjunto $[B'(\mathbf{u})]^* : V \rightarrow V'$ dado por

$$\langle [B'(\mathbf{u})]^*\mathbf{q}, \mathbf{w} \rangle = b(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{q}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{q}), \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \text{ e } \forall \mathbf{w} \in H, \mathbf{q} \in D(A).$$

Assim, podemos considerar a equação linearizada de (5.3) dada por

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{z} + vA\mathbf{z} + B'(\mathbf{u})\mathbf{z} = \mathbf{h}\chi_{\omega_c}, & \text{em } Q; \\ \mathbf{z}(0) = 0, & \text{em } \Omega; \end{cases} \quad (5.23)$$

e sua adjunta dada por

$$\begin{cases} -\partial_t \mathbf{q} + vA\mathbf{q} + [B'(\mathbf{u})]^*\mathbf{q} = -\alpha(\mathbf{u} - \mathbf{u}_d)\chi_{\omega_d}, & \text{em } Q; \\ \mathbf{q}(T) = 0, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (5.24)$$

Um resultado de existência padrão para equações de evolução linear [veja [15], Teo.5.2, pp.70 ou veja [14]], garante que os problemas de Cauchy (5.23) e (5.24) têm únicas soluções fracas \mathbf{z}, \mathbf{q} no conjunto $\{\mathbf{v} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H); \partial_t \mathbf{v} \in L^2(0, T; V')\}$, desde que $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$, $\mathbf{u}_d \in L^2(0, T; H(\omega_d))$ e $\mathbf{h} \in \mathcal{U}_c$.

Observação 5.4. *Como na prova dos teoremas (5.2) e (5.3), podemos obter as chamadas soluções fortes*

$$\mathbf{z}, \mathbf{q} \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}^2(\Omega)) \text{ com } \partial_t \mathbf{z}, \partial_t \mathbf{q} \in L^\infty(0, T; H).$$

5.2 Problema de Otimização e Resultados

Agora, observamos que o problema de controle ótimo considerado anteriormente, pode ser equivalentemente representado pelo seguinte problema de otimização: encontrar as funções (\mathbf{u}, \mathbf{v}) tais que

$$(P_5) \quad J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \min_{(\mathbf{z}, \mathbf{h}) \in \mathcal{Q}} J(\mathbf{z}, \mathbf{h}),$$

onde

$$\mathcal{Q} = \{(\mathbf{z}, \mathbf{h}) \in W \times \mathcal{U}_c; M(\mathbf{z}, \mathbf{h}) = 0\}.$$

Definição 5.5. *O conjunto admissível para o problema (P_5) , é definido por*

$$\mathcal{U}_{ad} = \{(\mathbf{z}, \mathbf{h}) \in \mathcal{Q} \text{ tal que } \mathbf{h} \in K_c \text{ e } J(\mathbf{z}, \mathbf{h}) < +\infty\}.$$

Definição 5.6. *$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{U}_{ad}$ é chamado uma solução ótima local para o problema (P_5) se existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq J(\mathbf{z}, \mathbf{h}),$$

para todo $(\mathbf{z}, \mathbf{h}) \in \mathcal{U}_{ad}$ satisfazendo

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{u}\|_W + \|\mathbf{h} - \mathbf{v}\|_{\mathcal{U}_c} < \varepsilon.$$

Teorema 5.7. *Sob as hipóteses dos teoremas anteriores, o problema (P_5) possui uma solução ótima local.*

Demonstração: Observamos primeiramente que $\mathcal{U}_{ad} \neq \emptyset$, pois dos teoremas (5.1), (5.2) e (5.3), temos a existência de uma solução $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in W \times \mathcal{U}_c$ para o sistema $M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Substituindo esta solução no funcional $J(\cdot, \cdot)$, obtemos

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|_{L^2(\omega_d \times (0, T))}^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\omega_c \times (0, T))}^2 < +\infty.$$

Agora, seja a sequência $\{(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n)\}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) = \inf_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Como $(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n)$ satisfaz a equação

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_n + v A \mathbf{u}_n + B \mathbf{u}_n = \mathbf{f} + \mathbf{v}_n, & \text{em } Q; \\ \mathbf{u}_n(0) = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega; \end{cases} \quad (5.25)$$

então tomando o produto desta equação por $A \mathbf{u}_n$, teremos as mesmas estimativas obtidas na demonstração dos teoremas de existência de solução da seção anterior; conseqüentemente as mesmas convergências. Isso será suficiente para fazer $n \rightarrow +\infty$ em (5.25) e mostrar que o limite (\mathbf{u}, \mathbf{v}) é uma solução de (P_5) e que

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \inf_{(\mathbf{z}, \mathbf{h}) \in \mathcal{U}_{ad}} J(\mathbf{z}, \mathbf{h}).$$

■

Teorema 5.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, e considere as hipóteses dos teoremas (5.1), (5.2) e (5.3), se (\mathbf{u}, \mathbf{v}) é uma solução do problema (P_5) , então existe um multiplicador $\mathbf{q} \in W$ e uma constante $\lambda_1 > 0$ tal que*

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + v A \mathbf{u} + B(\mathbf{u}) = \mathbf{f} + \mathbf{v} \chi_{\omega_c}, & \text{em } Q; \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (5.26)$$

$$\begin{cases} -\partial_t \mathbf{q} + vA\mathbf{q} + [B'(\mathbf{u})]^* \mathbf{q} = -\lambda_1 \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{u}_d) \chi_{\omega_d}, & \text{em } Q; \\ \mathbf{q}(T) = 0, & \text{em } \Omega; \end{cases} \quad (5.27)$$

e vale o princípio de mínimo

$$(\mathbf{q} \chi_{\omega_c} - \lambda_1 \mu \mathbf{v}, \mathbf{w} - \mathbf{v})_{L^2(\omega_c \times (0, T))} \leq 0, \forall \mathbf{w} \in K_c. \quad (5.28)$$

Antes de fazer a prova deste teorema, apresentaremos alguns lemas fundamentais para a aplicação do Formalismo de Dubovitskii e Milyutin. Sabemos que a derivada direcional do funcional $J(\cdot, \cdot)$ no ponto (\mathbf{u}, \mathbf{v}) é dada por

$$J'(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{z}, \mathbf{h}) = \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{u}_d, \mathbf{z})_{\omega_d \times (0, T)} + \mu(\mathbf{v}, \mathbf{h})_{\omega_c \times (0, T)}.$$

Lema 5.9. *O cone de direções de descida associado a $J(\cdot, \cdot)$ no ponto (\mathbf{u}, \mathbf{v}) é dado por*

$$DC(J, (\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \{(\mathbf{z}, \mathbf{h}) \in W \times \mathcal{U}_c \text{ tal que } J'(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{z}, \mathbf{h}) < 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[DC(J)]^* = \{f_1 \in W' \times \mathcal{U}_c; \exists \lambda_1 \geq 0; f_1(\mathbf{z}, \mathbf{h}) = -\lambda_1 J'(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{z}, \mathbf{h})\}$$

(veja Corolário 1.22 e Teorema 1.29 no Capítulo 1).

Lema 5.10. *Se $AC(W \times K_c, (\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ é o cone admissível associado à restrição de desigualdade $\mathbf{h} \in K_c$ no ponto (\mathbf{u}, \mathbf{v}) , então seu cone dual é dado por*

$$[AC(W \times K_c)]^* = \left\{ (0, \tilde{f}_2); \tilde{f}_2 \in L^2(0, T; H(\omega_c)) \text{ é um func. suporte para } K_c \text{ em } \mathbf{v} \right\}$$

(veja o Teorema 1.32 no Capítulo 1).

Lema 5.11.

(i) *A aplicação $M(\cdot, \cdot)$ é Gâteaux-diferenciável e a derivada de Gâteaux de M no ponto (\mathbf{u}, \mathbf{v}) é definida por*

$$M'(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{z}, \mathbf{h}) = (\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t \mathbf{z} + vA\mathbf{z} + B'_G(\mathbf{u})\mathbf{z} = \mathbf{h} \chi_{\omega_c} + \tilde{\Psi}_1, & \text{em } Q; \\ \mathbf{z}(0) = \tilde{\Psi}_2, & \text{em } \Omega; \end{cases} \quad (5.29)$$

(ii) *A aplicação $M(\cdot, \cdot)$ é estritamente diferenciável e o operador $M'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = M'_G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é sobrejetivo.*

Demonstração: Por simplicidade, começaremos provando (ii), considerando que (i) ocorre. Para provar que M é estritamente diferenciável, basta mostrar que a função $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow M'(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é contínua e usar a conclusão (iii) da observação (1.20) no Capítulo 1. Mas, claramente, a continuidade da aplicação acima segue da continuidade da função $\mathbf{u} \mapsto B'_G(\mathbf{u}) = B'(\mathbf{u})$ (que é contínua graças a continuidade da forma trilinear $b(\cdot, \cdot, \cdot)$). Portanto, a afirmação é verdadeira. Agora, para todo $(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$ em $L^2(0, T; H) \times H$, sabemos que existe solução para o sistema (5.29) (da mesma maneira que existe para 5.23). Logo, o operador $M'(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é sobrejetivo e temos (ii). Para terminar a prova, mostraremos que vale (i). Por definição de derivada de Gâteaux, é suficiente provar que

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \left\| \frac{M(\mathbf{u} + k\mathbf{z}, \mathbf{v} + k\mathbf{h}) - M(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{k} - (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) \right\|_{L^2(0, T; H) \times H} = 0.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} [M(\mathbf{u} + k\mathbf{z}, \mathbf{v} + k\mathbf{h}) - M(\mathbf{u}, \mathbf{v})] &= \frac{1}{k} [(\partial_t(\mathbf{u} + k\mathbf{z}) + vA(\mathbf{u} + k\mathbf{z}) + B(\mathbf{u} + k\mathbf{z}) - \mathbf{f} \\ &\quad - (\mathbf{v} + k\mathbf{h})\chi_{\omega_c} - \partial_t\mathbf{u} - vA\mathbf{u} - B(\mathbf{u}) + \mathbf{f} + \mathbf{v}\chi_{\omega_c}, (\mathbf{u} + k\mathbf{z})(0) - \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}(0) + \mathbf{u}_0)]. \end{aligned}$$

Cancelando adequadamente os termos da identidade anterior e depois usando (5.29), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} [M(\mathbf{u} + k\mathbf{z}, \mathbf{v} + k\mathbf{h}) - M(\mathbf{u}, \mathbf{v})] &= (\partial_t\mathbf{z} + vA\mathbf{z} + \frac{1}{k}[B(\mathbf{u} + k\mathbf{z}) - B(\mathbf{u})] - \mathbf{h}\chi_{\omega_c}, \mathbf{z}(0)) \\ &= (\tilde{\psi}_1 - B'_G(\mathbf{u})\mathbf{z} + \frac{1}{k}[B(\mathbf{u} + k\mathbf{z}) - B(\mathbf{u})], \tilde{\psi}_2). \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \left\| \frac{M(\mathbf{u} + k\mathbf{z}, \mathbf{v} + k\mathbf{h}) - M(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{k} - (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) \right\| = \lim_{k \rightarrow 0^+} \left\| \frac{1}{k}[B(\mathbf{u} + k\mathbf{z}) - B(\mathbf{u})] - B'_G(\mathbf{u})\mathbf{z} \right\| = 0$$

pois, de fato, $\langle B'_G(\mathbf{u})\mathbf{z}, \cdot \rangle = \langle B'(\mathbf{u})\mathbf{z}, \cdot \rangle = b(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \cdot) + b(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \cdot)$ é a derivada do operador B no ponto \mathbf{u} na direção \mathbf{z} . ■

Lema 5.12. *O cone tangente ao conjunto \mathcal{Q} no ponto (\mathbf{u}, \mathbf{v}) é dado por*

$$TC(\mathcal{Q}, (\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \{(\mathbf{z}, \mathbf{h}); M'(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{z}, \mathbf{h}) = 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[TC(\mathcal{Q})]^* = \{f_3 \in W' \times \mathcal{U}_c; f_3(\mathbf{z}, \mathbf{h}) = 0, \forall (\mathbf{z}, \mathbf{h}) \in TC(\mathcal{Q}, (\mathbf{u}, \mathbf{v}))\}.$$

Demonstração: A prova deste lema segue do Lema 5.11 e do Teorema de Lyusternik (veja Teorema 1.28 no capítulo 1).

Agora, estamos preparados para demonstrar o teorema principal.

Demonstração: (Teorema 5.8) Como (\mathbf{u}, \mathbf{v}) é uma solução do problema (P_5) , então

$$DC(J, (\mathbf{u}, \mathbf{v})) \cap AC(W \times K_c, (\mathbf{u}, \mathbf{v})) \cap TC(\mathcal{Q}, (\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \emptyset.$$

Segue do Teorema de Dubovitskii-Milyutin (veja Teorema 1.13 no capítulo 1) que existem funcionais $f_1 \in [DC(J)]^*$, $f_2 \in [AC(W \times K_c)]^*$, $f_3 \in [TC(\mathcal{Q})]^*$, não nulos simultaneamente, tais que vale a equação de Euler-Lagrange

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0. \quad (5.30)$$

Seja $\mathbf{h} \in \mathcal{U}_c$ um controle arbitrário e consideremos a função \mathbf{z} como uma solução da equação

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{z} + vA\mathbf{z} + B'(\mathbf{u})\mathbf{z} = \mathbf{h}\chi_{\omega_c}, & \text{em } Q; \\ \mathbf{z}(0) = 0, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (5.31)$$

Então, para estas funções, $f_3(\mathbf{z}, \mathbf{h}) = 0$ e segue da equação de Euler-Lagrange que

$$(f_1 + f_2)(\mathbf{z}, \mathbf{h}) = 0 \quad (5.32)$$

Agora, lembremos que $f_2(\mathbf{z}, \mathbf{h}) = \tilde{f}_2(\mathbf{h})$ e $f_1(\mathbf{z}, \mathbf{h}) = -\lambda_1[\alpha(\mathbf{u} - \mathbf{u}_d, \mathbf{z})_{\omega_d \times (0, T)} + \mu(\mathbf{v}, \mathbf{h})_{\omega_c \times (0, T)}]$, para algum $\lambda_1 \geq 0$. De fato λ_1 é estritamente positivo, pois se $\lambda_1 = 0$, então $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ o que contradiz o Teorema de Dubovitskii e Milyutin. Substituindo os funcionais acima em (5.32), obtemos

$$\tilde{f}_2(\mathbf{h}) = \lambda_1 \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{u}_d, \mathbf{z})_{\omega_d \times (0, T)} + \lambda_1 \mu(\mathbf{v}, \mathbf{h})_{\omega_c \times (0, T)}. \quad (5.33)$$

Seja a função $\mathbf{q} \in W$ uma solução da equação adjunta (5.27). Tomando o produto desta equação pela função \mathbf{z} e integrando por partes, obtemos

$$(\mathbf{q}, \partial_t \mathbf{z}) + v(\mathbf{q}, A\mathbf{z}) + (\mathbf{q}, B'(\mathbf{u})\mathbf{z}) = -\lambda_1 \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{u}_d, \mathbf{z})_{\omega_d \times (0, T)}. \quad (5.34)$$

Tomando o produto da equação (5.31) pela função \mathbf{q} e comparando o resultado com a equação em (5.34), obtemos

$$\lambda_1 \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{u}_d, \mathbf{z})_{\omega_d \times (0, T)} = -(\mathbf{h}, \mathbf{q})_{\omega_c \times (0, T)}. \quad (5.35)$$

Substituindo (5.35) em (5.33), obtemos

$$\tilde{f}_2(\mathbf{h}) = -(\mathbf{h}, \mathbf{q})_{\omega_c \times (0, T)} + \lambda_1 \mu(\mathbf{v}, \mathbf{h})_{\omega_c \times (0, T)}$$

o que implica

$$\tilde{f}_2(\mathbf{h}) = (-\mathbf{q}\chi_{\omega_c} + \lambda_1 \mu \mathbf{v}, \mathbf{h})_{\omega_c \times (0, T)}. \quad (5.36)$$

Como $\tilde{f}_2(\cdot)$ é um funcional suporte para K_c em \mathbf{v} , então

$$(\mathbf{q}\chi_{\omega_c} - \lambda_1 \mu \mathbf{v}, \mathbf{h} - \mathbf{v})_{\omega_c \times (0, T)} \leq 0, \forall \mathbf{h} \in K_c. \quad (5.37)$$

Assim, concluímos a prova. ■

CAPÍTULO 6

Equilíbrio de Nash para Controle Multiobjetivo das Equações de Navier-Stokes

Neste capítulo, trataremos do equilíbrio de Nash para um problema de controle com dois-objetivos governado pelas equações de Navier - Stokes. Nossa abordagem consiste em associar o problema de otimização que representa o problema de controle, com a noção de jogo com dois jogadores. Dessa forma, poderemos definir o equilíbrio de Nash de acordo com a definição apresentada no apêndice B e, em seguida, obter as condições necessárias para sua existência.

6.1 Formulação do Problema

Sejam Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 , ω_1, ω_2 são partes abertas de Ω com $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$ e $\omega_{1,d}, \omega_{2,d}$ são subconjuntos abertos de Ω .

Sejam W o espaço das funções de estado, definido como no Capítulo 5, $\mathcal{U}_r = L^2(0, T; H(\omega_r))$

o espaço dos controles e $J_r : W \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ os funcionais objetivos

$$J_r(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) = \frac{\alpha_r}{2} \int_0^T \int_{\omega_{r,d}} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{r,d}|^2 dxdt + \frac{\mu_r}{2} \int_0^T \int_{\omega_r} |\mathbf{v}^{(r)}|^2 dxdt, r = 1, 2; \quad (6.1)$$

onde $\mu_r > 0$, $\alpha_r \geq 0$, $r = 1, 2$, são constantes, $\mathbf{u}_{r,d}$ são funções dadas em $L^2(0, T; H(\omega_{r,d}))$, $r = 1, 2$, as funções $\mathbf{v}^{(r)}$ são os controles tomados nos subconjuntos K_r , que assumiremos serem convexos, fechados com interiores não vazios de \mathcal{U}_r , $r = 1, 2$, e o estado \mathbf{u} é dado como solução da equação

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - v \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \mathbf{v}^{(1)} \chi_{\omega_1} + \mathbf{v}^{(2)} \chi_{\omega_2}, & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{em } Q; \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega; \quad \mathbf{u} = 0, & \text{em } \Sigma; \end{cases} \quad (6.2)$$

onde \mathbf{u} é a velocidade do fluido, p é a pressão hidrostática, $v = cte > 0$ é a viscosidade cinemática, \mathbf{f} é a densidade volumétrica de forças externas, \mathbf{u}_0 é uma função dada.

Podemos representar a equação dada em sua forma operacional, a qual nos permite definir o operador $M : W \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow L^2(0, T; H) \times H$ da seguinte maneira: $M(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) = (\Psi_1, \Psi_2)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + v A \mathbf{u} + B(\mathbf{u}) = \mathbf{f} + \mathbf{v}^{(1)} \chi_{\omega_1} + \mathbf{v}^{(2)} \chi_{\omega_2} + \Psi_1, & \text{em } Q; \\ \mathbf{u}|_{t=0} - \mathbf{u}_0 = \Psi_2, & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

O problema de controle ótimo que consideraremos é encontrar controles $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ e o estado \mathbf{u} tais que os funcionais em (6.1) sejam minimizados no sentido de Nash sujeitos a (6.2).

6.2 Problema de Otimização - Equilíbrio de Nash

Consideremos o seguinte problema

$$(P_6) \quad \begin{aligned} & \min && (J_1, J_2)(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}). \\ & M(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) = 0, \\ & \mathbf{v}^{(1)} \in K_1, \mathbf{v}^{(2)} \in K_2 \end{aligned}$$

Observamos que este é um problema de otimização vetorial com dois objetivos, uma restrição de igualdade e duas restrições de desigualdades. Além disso, é fácil observar que cada funcional objetivo está definido sobre um conjunto de controles que chamaremos de estratégias.

Uma solução de Nash para tal problema consiste em minimizar cada objetivo sobre sua própria estratégia até que todos os objetivos tenham sido minimizados. Em seguida, obtem-se um sistema de otimalidade acoplado cuja solução dá uma caracterização necessária para um equilíbrio de Nash.

Observação 6.1.

(i) Devemos ressaltar que os mesmos resultados podem ser estendidos a um número qualquer n de funcionais objetivos.

(ii) Por todo este capítulo, o subíndice r assumirá os inteiros 1, 2.

Agora, trabalharemos no sentido de obter um tal ponto de equilíbrio.

Se fixarmos primeiro o controle $\mathbf{h}^{(2)} \in \mathcal{U}_2$, então podemos considerar o seguinte problema auxiliar

$$(P)_{\mathbf{h}^{(1)}} \quad \min_{(\mathbf{z}_1, \mathbf{h}^{(1)}) \in \mathcal{Q}_1, \mathbf{h}^{(1)} \in K_1} \tilde{J}_1(\mathbf{z}_1, \mathbf{h}^{(1)}), \quad (6.3)$$

onde $\tilde{J}_1(\cdot, \cdot) = J_1(\cdot, \cdot, \mathbf{h}^{(2)})$ y $\mathcal{Q}_1 = \{(\mathbf{z}_1, \mathbf{h}^{(1)}) \in W \times \mathcal{U}_1 / M_1(\mathbf{z}_1, \mathbf{h}^{(1)}) = 0\}$ com $M_1(\cdot, \cdot) = M(\cdot, \cdot, \mathbf{h}^{(2)})$. Da mesma forma, podemos fixar o controle $\mathbf{h}^{(1)} \in \mathcal{U}_1$ e considerar o problema

$$(P)_{\mathbf{h}^{(2)}} \quad \min_{(\mathbf{z}_2, \mathbf{h}^{(2)}) \in \mathcal{Q}_2, \mathbf{h}^{(2)} \in K_2} \tilde{J}_2(\mathbf{z}_2, \mathbf{h}^{(2)}), \quad (6.4)$$

onde $\tilde{J}_2(\cdot, \cdot) = J_2(\cdot, \cdot, \mathbf{h}^{(1)})$ y $\mathcal{Q}_2 = \{(\mathbf{z}_2, \mathbf{h}^{(2)}) \in W \times \mathcal{U}_2 / M_2(\mathbf{z}_2, \mathbf{h}^{(2)}) = 0\}$ com $M_2(\cdot, \cdot) = M(\cdot, \cdot, \mathbf{h}^{(1)})$.

Definição 6.2. Os conjuntos admissíveis para os problemas $(P)_{\mathbf{h}^{(r)}}$, $r = 1, 2$, são definidos por

$$\mathcal{U}_{ad}^{(r)} = \left\{ (\mathbf{z}_r, \mathbf{h}^{(r)}) \in \mathcal{Q}_r / \mathbf{h}^{(r)} \in K_r \text{ e } \tilde{J}_r(\mathbf{z}_r, \mathbf{h}^{(r)}) < +\infty \right\}$$

Definição 6.3. $(\mathbf{u}_r, \mathbf{v}^{(r)}) \in \mathcal{U}_{ad}^{(r)}$ é chamado uma solução ótima local para o problema $(P)_{\mathbf{h}^{(r)}}$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\tilde{J}_r(\mathbf{u}_r, \mathbf{v}^{(r)}) \leq \tilde{J}_r(\mathbf{z}_r, \mathbf{h}^{(r)}),$$

para todo $(\mathbf{z}_r, \mathbf{h}^{(r)}) \in \mathcal{U}_{ad}^{(r)}$ satisfazendo

$$\|\mathbf{z}_r - \mathbf{u}_r\|_W + \|\mathbf{h}^{(r)} - \mathbf{v}^{(r)}\|_{\mathcal{U}_r} < \varepsilon, r = 1, 2.$$

Observem que a existência de solução ótima local dos problemas $(P)_{\mathbf{h}^{(r)}}, r = 1, 2$, é garantida pelo Teorema 5.7 no Capítulo 5. A seguir, daremos as condições necessárias de otimalidade dos problemas $(P)_{\mathbf{h}^{(r)}}$ e caracterizaremos o equilíbrio de Nash para (P_6) .

Teorema 6.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$, e considere as hipóteses do Teorema 5.8, se $(\mathbf{u}_r, \mathbf{v}^{(r)})$ é uma solução ótima local do problema $(P)_{\mathbf{h}^{(r)}}$, para $r = 1, 2$, então existem multiplicadores $\mathbf{q}^{(r)} \in W$ e constantes $\lambda_r > 0$ tais que*

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_r + v A \mathbf{u}_r + B(\mathbf{u}_r) = \mathbf{f} + \mathbf{v}^{(1)} \chi_{\omega_1} + \mathbf{v}^{(2)} \chi_{\omega_2}, & \text{em } Q; \\ \mathbf{u}_r|_{t=0} = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega; \\ -\partial_t \mathbf{q}^{(r)} + v A \mathbf{q}^{(r)} + [B'(\mathbf{u}_r)]^* \mathbf{q}^{(r)} = -\lambda_r \alpha_r (\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_{r,d}) \chi_{\omega_{r,d}}, & \text{em } Q; \\ \mathbf{q}^{(r)}(T) = 0, & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e vale o princípio de mínimo

$$(\mathbf{q}^{(r)} \chi_{\omega_r} - \lambda_r \mu_r \mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{w} - \mathbf{v}^{(r)})_{L^2(\omega_r \times (0, T))} \leq 0, \forall \mathbf{w} \in K_r$$

(veja a prova do Teorema 5.8 no Capítulo 5).

Definição 6.5. *Um par de controles $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ é um equilíbrio de Nash para o problema (P_6) se existe um estado $\mathbf{u} \in W$, tal que os pares $(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(r)})$ são soluções ótimas dos problemas $(P)_{\mathbf{h}^{(r)}}, r = 1, 2$, respectivamente (veja Apêndice B).*

Considerando o teorema anterior e a definição acima, os candidatos a equilíbrio de Nash para o problema (P_6) , são os pares $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ tais existem um estado $\mathbf{u} \in W$, estados adjuntos $\mathbf{q}^{(r)}, r = 1, 2$, e constantes $\lambda_r > 0, r = 1, 2$, satisfazendo o seguinte sistema

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + v A \mathbf{u} + B(\mathbf{u}) = \mathbf{f} + \mathbf{v}^{(1)} \chi_{\omega_1} + \mathbf{v}^{(2)} \chi_{\omega_2}, & \text{em } Q; \\ -\partial_t \mathbf{q}^{(r)} + v A \mathbf{q}^{(r)} + [B'(\mathbf{u})]^* \mathbf{q}^{(r)} = -\lambda_r \alpha_r (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{r,d}) \chi_{\omega_{r,d}}, & \text{em } Q; \\ (\mathbf{q}^{(r)} \chi_{\omega_r} - \lambda_r \mu_r \mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{w} - \mathbf{v}^{(r)})_{\omega_r \times (0, T)} \leq 0, \forall \mathbf{w} \in K_r; \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0; \mathbf{q}^{(r)}(T) = 0, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (6.5)$$

Agora, sem perda de generalidade, fixaremos $\lambda_r = 1$ e mostraremos as condições necessárias para a existência de um equilíbrio de Nash. Para este resultado, consideraremos o espaço das soluções fracas das equações de Navier-Stokes

$$W = \{\mathbf{v} \in L^2(0, T; V); \partial_t \mathbf{v} \in L^2(0, T; H)\}.$$

Teorema 6.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sob as hipóteses do Teorema 6.4, existe pelo menos um candidato a equilíbrio de Nash para o problema (P_6) . Isto é, existem funções*

$(\mathbf{u}, \mathbf{q}^{(r)}, \mathbf{v}^{(r)}), r = 1, 2$, tais que

(i) $\mathbf{u} \in W$, $\mathbf{q}^{(r)} \in W$, $\mathbf{v}^{(r)} \in K_r$.

(ii) $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{q}^{(r)}(T) = 0$.

(iii) o sistema (6.5) é verificado, $\forall T > 0$.

Demonstração: Inicialmente observemos que em vista de (i), as condições em (ii) fazem sentido, pois do Lema A.13 do Apêndice A, temos que $\mathbf{u} \in C(0, T; H)$ e $\mathbf{q}^{(r)} \in C(0, T; H)$. Também por conveniência eliminamos a pressão nas duas primeiras equações do sistema (6.5) (em [45], Temam apresenta o problema da existência e regularidade de uma distribuição p tal que a equação de Navier-Stokes ocorre). Agora definiremos uma solução aproximada para o sistema (6.5). Como \mathcal{V} é denso em V que é um espaço de Hilbert separável, podemos escolher uma base de Schauder $\{\mathbf{w}_j\}_{j=1}^\infty$ em V , tal que

$$\mathbf{w}_m \in C^1(\overline{\Omega})^d, \forall m \geq 1, \text{ e } (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = \delta_{ij}, \forall i, j \geq 1.$$

Desta forma, $\{\mathbf{w}_j\}_{j=1}^\infty$ é um sistema ortonormal completo em H . Seja V_m o subespaço de V gerado por $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$. Do fato que $C(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)^d)$ está imerso denso em $L^2(\Omega \times (0, T))$ e como $\mathbf{f} \in L^2(\Omega \times (0, T))$, segue que podemos encontrar uma sequência $\{\mathbf{f}_m\}$ em $C(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)^d)$ tal $\mathbf{f}_m \rightarrow \mathbf{f}$ em $L^2(\Omega \times (0, T))$. Obviamente

$$\|\mathbf{f}_m\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} \leq C,$$

onde C é uma constante que independe de m . Nestas condições, para cada $r = 1, 2$, diremos que $\mathbf{q}_m^{(r)}, \mathbf{v}_m^{(r)}, \mathbf{u}_m$ é uma m -ésima solução aproximada do sistema (6.5), se

$$\mathbf{q}_m^{(r)} \in W, \mathbf{v}_m^{(r)} \in L^2(\omega_r \times (0, T)), \mathbf{u}_m \in C^1(0, T; V_m) \quad (6.6)$$

e verificam:

$$-\partial_t \mathbf{q}_m^{(r)} + \nu A \mathbf{q}_m^{(r)} + [B'(\mathbf{u}_m)]^* \mathbf{q}_m^{(r)} = -\alpha_r (\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_{r,d}) \chi_{\omega_{r,d}}, \text{ em } Q; \quad (6.7)$$

$$(\mathbf{q}_m^{(r)} \chi_{\omega_r} - \mu_r \mathbf{v}_m^{(r)}, \mathbf{w} - \mathbf{v}_m^{(r)})_{\omega_r \times (0, T)} \leq 0, \forall \mathbf{w} \in K_r; \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}) + v(\nabla \mathbf{u}_m, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) &= \langle \mathbf{f}_m(t), \mathbf{v} \rangle + (\tilde{\mathbf{v}}_{m,\varepsilon}^{(1)}, \mathbf{v}) \\ &+ (\tilde{\mathbf{v}}_{m,\varepsilon}^{(2)}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V_m, \text{ em } Q; \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\mathbf{q}_m^r(T) = 0, \text{ em } \Omega; \quad (6.10)$$

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0,m}, \text{ em } \Omega, \quad (6.11)$$

onde $\tilde{\mathbf{v}}_{m,\varepsilon}^{(r)}$, $\varepsilon > 0$, é um “mollifier” de $\mathbf{v}_m^{(r)} \chi_{\omega_r}$, $r = 1, 2$, com $\varepsilon = \frac{1}{m}$, e $\mathbf{u}_{0,m} \in V_m$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{u}_0 \in H$.

Observação 6.7. *Observe que (6.9) é uma equação variacional (em dimensão finita), enquanto que (6.7) é uma edp. (em dimensão infinita) e (6.8) é uma desigualdade integral. Isto é devido a que, considerando \mathbf{u}_m como dado, o problema de Cauchy (6.7), (6.10) possui única solução fraca e conseqüentemente a desigualdade integral (6.8) também possui solução única; assim, poderemos obter uma solução aproximada para o nosso sistema via teorema de fixo. A esta forma de colocar as equações aproximadas se costuma chamar uma “semi-discretização” de Galerkin.*

Agora, consideraremos uma linearização do problema aproximado, admitindo que nos encontramos na m -ésima etapa do processo de aproximação. Por simplicidade de notação, omitiremos na medida do possível o subíndice m . Consideremos o problema auxiliar (P_a) definido da seguinte maneira: dado $\mathbf{z} \in C(0, T; V_m)$, encontrar $\mathbf{q}^{(r)} \in W$, $\mathbf{v}^{(r)} \in \mathcal{U}_r$ e $\mathbf{u} \in C^1(0, T; V_m)$ tais que

$$-\partial_t \mathbf{q}^{(r)} + v A \mathbf{q}^{(r)} + [B'(\mathbf{z})]^* \mathbf{q}^{(r)} = -\alpha_r (\mathbf{z} - \mathbf{u}_{r,d}) \chi_{\omega_{r,d}}, \text{ em } Q; \quad (6.12)$$

$$(\mathbf{q}^{(r)} \chi_{\omega_r} - \mu_r \mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{w} - \mathbf{v}^{(r)})_{\omega_r \times (0, T)} \leq 0, \forall \mathbf{w} \in K_r; \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + v(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{z} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \langle \mathbf{f}_m(t), \mathbf{v} \rangle + (\tilde{\mathbf{v}}_{m,\varepsilon}^{(1)}, \mathbf{v}) \\ &+ (\tilde{\mathbf{v}}_{m,\varepsilon}^{(2)}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V_m, \text{ em } Q; \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{q}^r(T) = 0, \text{ em } \Omega; \quad (6.15)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_{0,m}, \text{ em } \Omega. \quad (6.16)$$

Obviamente, diremos que a função $(\mathbf{q}^{(r)}, \mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{u})$ que é solução de (P_a) com dada \mathbf{z} é uma m -ésima solução aproximada “linearizada”. Agora mostraremos que existe uma única solução aproximada linearizada. De fato, com as hipóteses consideradas, podemos usar o mesmo

resultado que garante a existência e unicidade da solução do sistema (5.24), para concluir que existe uma única solução $\mathbf{q}^{(r)} \in W$ para o problema (6.12),(6.15). A dependência contínua da solução $\mathbf{q}^{(r)}$ com respeito a \mathbf{z} é obtida da seguinte maneira: se $\mathbf{z}_n \rightarrow \mathbf{z}$ em $C(0, T; V_m)$ e $\mathbf{q}_n^{(r)}$ são as soluções do problema (6.12),(6.15) para cada \mathbf{z}_n dada, então escreve-se a equação verificada pela diferença $\mathbf{q}_n^{(r)} - \mathbf{q}^{(r)}$ e toma-se o produto desta equação pela função $\mathbf{q}_n^{(r)} - \mathbf{q}^{(r)}$. Daí, usando argumentos usuais, obtemos estimativas que garantem que $\mathbf{q}_n^{(r)} \rightarrow \mathbf{q}^{(r)}$ em W . Para encontrar uma função $\mathbf{v}^{(r)}$ que verifique a desigualdade (6.13), recordemos que os conjuntos $K_r, r = 1, 2$, são convexos, fechados não vazios de $L^2(\omega_r \times (0, T))$. Assim, do Teorema da Projeção sobre um Convexo Fechado (veja [4]), temos que dado $\mathbf{q}^{(r)} \in L^2(\Omega \times (0, T))$ existe uma única função $\mathbf{v}^{(r)} \in K_r$ tal que

$$\mu_r \left(\frac{1}{\mu_r} \mathbf{q}^{(r)} \chi_{\omega_r} - \mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{w} - \mathbf{v}^{(r)} \right)_{\omega_r \times (0, T)} \leq 0, \forall \mathbf{w} \in K_r, r = 1, 2. \quad (6.17)$$

Neste caso, a dependência contínua pode ser vista em [4]. A saber, considera-se $\mathbf{v}_1^{(r)}, \mathbf{v}_2^{(r)}$ as soluções correspondentes a $\mathbf{q}_1^{(r)}, \mathbf{q}_2^{(r)}$, respectivamente, e obtem-se a estimativa de estabilidade

$$|\mathbf{v}_1^{(r)} - \mathbf{v}_2^{(r)}|_{L^2(0, T; H(\omega_r))} \leq C |\mathbf{q}_1^{(r)} - \mathbf{q}_2^{(r)}|_{L^2(0, T; H(\omega_r))}. \quad (6.18)$$

Agora, de posse das funções $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ obtidas acima, nós determinamos $(\tilde{\mathbf{v}}_{m, \varepsilon}^{(1)}, \tilde{\mathbf{v}}_{m, \varepsilon}^{(2)})$ e seguimos para obter a solução \mathbf{u} do problema variacional (6.14),(6.16). Pomos

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m h_i(t) \mathbf{w}_i, \quad (6.19)$$

com $h_i \in C^1[0, T]$, e substituímos (6.19) na equação (6.14); assim, $\forall j = 1, \dots, m$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \frac{d}{dt} h_i(t) + \left[v \sum_{i=1}^m ((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)) + \sum_{i=1}^m b(\mathbf{z}, \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \right] h_i(t) \\ = \langle \mathbf{f}_m(t), \mathbf{w}_j \rangle + (\tilde{\mathbf{v}}_{m, \varepsilon}^{(1)}, \mathbf{w}_j) + (\tilde{\mathbf{v}}_{m, \varepsilon}^{(2)}, \mathbf{w}_j), \end{aligned} \quad (6.20)$$

Invertendo a matriz não singular $[(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)], 1 \leq i, j \leq m$, podemos escrever as equações diferenciais ordinárias na forma usual

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h_i(t) = \left[v \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} + \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \right] h_j(t) + \sum_{j=1}^m \beta_{ij} [(\mathbf{f}_m(t), \mathbf{w}_j) \\ + \sum_{j=1}^m (\tilde{\mathbf{v}}_{m, \varepsilon}^{(1)}, \mathbf{w}_j) + \sum_{j=1}^m (\tilde{\mathbf{v}}_{m, \varepsilon}^{(2)}, \mathbf{w}_j)]; \end{aligned} \quad (6.21)$$

onde $\alpha_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in C([0, T])$. Assim, obtemos um sistema com m edo's lineares em $h_i(t)$ com $h_i(0) = a$ i -ésima componente de $\mathbf{u}_{0,m}$, para $i = 1, \dots, m$, que permite usar a teoria clássica das edo's para obter a Existência e Unicidade de solução para (6.14),(6.16). Além disso, observa-se que a solução \mathbf{u} obtida depende continuamente de $\mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{q}^{(r)}$ e de \mathbf{z} . Na verdade, dados \mathbf{z} e \mathbf{z}_n , se $(\mathbf{q}^{(r)}, \mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{u})$ e $(\mathbf{q}_n^{(r)}, \mathbf{v}_n^{(r)}, \mathbf{u}_n)$ são as soluções aproximadas linearizadas, então tem-se que $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$ em $C^1(0, T; V_m)$. Agora, observe que se considerarmos $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ em (6.14), obtemos a estimativa

$$|\mathbf{u}(t)|_2^2 + \frac{v}{2} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_1^2 ds \leq C \left(\|\mathbf{f}_m\|_{L^2(Q)}^2, \|\tilde{\mathbf{v}}_{m,\varepsilon}^{(1)}\|_{L^2(Q)}^2, \|\tilde{\mathbf{v}}_{m,\varepsilon}^{(2)}\|_{L^2(Q)}^2, |\mathbf{u}_0|_2^2 \right); \quad (6.22)$$

onde C é uma constante positiva que depende somente de v e dos elementos do parêntese. Como \mathbf{v} , \mathbf{f}_m e $\tilde{\mathbf{v}}_{m,\varepsilon}^{(r)}$, $r = 1, 2$, são limitadas, temos que

$$\mathbf{u} \text{ é limitada em } C(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)^d) \text{ (independente de } \mathbf{z}\text{)}. \quad (6.23)$$

De (6.23) e da expressão (6.19) em \mathbf{u} (onde $\{w_i\}$ é ortogonal em H), obtemos que

$$\sum_{j=1}^m |h_j(t)|^2 = \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \leq C. \quad \forall t \in [0, T]; \quad (6.24)$$

portanto, as funções h_i são limitadas em $C([0, T])$. Isto implica, por uma parte, que

$$\mathbf{u} \text{ é limitada em } C(0, T; V_m) \text{ (independente de } \mathbf{z}\text{)} \quad (6.25)$$

e por outra, considerando a regularidade dos coeficientes das edo's (6.21), se \mathbf{z} está num limitado de $C([0, T]; V_m)$, então

$$\frac{d}{dt} h_i(t) \text{ é limitada em } C(0, T),$$

o que equivale, graças a (6.19), a que

$$\frac{d}{dt} h_i(t) \text{ seja limitada em } C(0, T; V_m). \quad (6.26)$$

Unindo (6.26) e (6.25), obtemos que para \mathbf{z} limitada em $C([0, T]; V_m)$,

$$\mathbf{u} \text{ é limitada em } C^1(0, T; V_m). \quad (6.27)$$

Agora, usaremos o Teorema de Ponto Fixo de Schauder para mostrar que existe uma única solução aproximada. Até o momento, sabemos que, dado $\mathbf{z} \in C([0, T]; V_m)$, existem únicas funções $\mathbf{q}^{(r)} \in W$, $\mathbf{v}^{(r)} \in \mathcal{U}_r$ soluções de (6.12) e (6.13), respectivamente; além disso, conhecidas $\mathbf{q}^{(r)}$ e $\mathbf{v}^{(r)}$, existe uma única função $\mathbf{u} \in C([0, T]; V_m)$ solução de (6.14), limitada em $C([0, T]; V_m)$ (indep. de \mathbf{z}) e limitada em $C^1(0, T; V_m)$ se \mathbf{z} o é em $C([0, T]; V_m)$. Portanto, existem constantes $C, C_1 > 0$ tais que

$$\|\mathbf{u}\|_{C([0, T]; V_m)} \leq C \text{ para cada } \mathbf{z} \in C([0, T]; V_m)$$

e

$$\|\mathbf{u}\|_{C^1([0, T]; V_m)} \leq C_1 \text{ se } \|\mathbf{z}\|_{C([0, T]; V_m)} \leq C.$$

Chamando B a bola fechada de raio C em $C([0, T]; V_m)$ e B_1 a bola de raio C_1 em $C^1([0, T]; V_m)$, definimos uma aplicação

$$\mathbf{z} \in B \subset C([0, T]; V_m) \rightarrow \mathbf{u} \in C^1([0, T]; V_m).$$

Claramente esta aplicação está bem definida e é contínua (pela dependência contínua de \mathbf{u} com respeito a \mathbf{z}). Além disso, graças ao Teorema de Ascoli-Arzelà, B_1 se injeta compactamente em $C([0, T]; V_m)$. Logo, temos bem definida a aplicação $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{u}$ da bola B em si mesma e esta aplicação é contínua e compacta. Como B é um convexo, fechado e limitado do espaço de Banach $C([0, T]; V_m)$, podemos aplicar o Teorema de Ponto fixo de Schauder e deduzir a existência de um ponto fixo. Chamando \mathbf{u}_m o dito ponto fixo e $\mathbf{q}_m^{(r)}, \mathbf{v}_m^{(r)}$ as correspondentes soluções de (6.12) e (6.13). Resulta que $(\mathbf{q}_m^{(r)}, \mathbf{v}_m^{(r)}, \mathbf{u}_m)$ é a m -ésima solução aproximada de (6.5), isto é, $(\mathbf{q}_m^{(r)}, \mathbf{v}_m^{(r)}, \mathbf{u}_m)$ satisfaz (6.6)-(6.11). Agora buscaremos estimativas que nos permitam passar ao limite no problema aproximado (6.6)-(6.11). Lembremos que da estimativa (6.22) e do fato que \mathbf{f}_m e $\tilde{\mathbf{v}}_{m, \varepsilon}^{(r)}$ são limitadas independentes de m , temos as já conhecidas estimativas

$$\|\mathbf{u}_m\|_{L^\infty(0, T; H)}^2 \leq C, \forall m, \quad (6.28)$$

$$\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0, T; V)}^2 \leq C, \forall m \quad (6.29)$$

e

$$\|\partial_t \mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(0, T; V')} \leq C, \forall m. \quad (6.30)$$

Agora, da equação (6.7), obtemos a também já conhecida estimativa, $\forall 0 < t < T$,

$$|\mathbf{q}_m^{(r)}(t)|_2^2 + \frac{\nu}{2} \int_t^T \|\mathbf{q}_m^{(r)}(s)\|_1^2 \leq C \left(\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(H)}^2 + \|\mathbf{u}_{r,d}\|_{L^2(Q)}^2 + \int_t^T \|\mathbf{u}_m(s)\|_2^2 |\mathbf{q}_m^{(r)}(s)|_2^2 \right). \quad (6.31)$$

Aplicando o Lema de Gronwall, obtemos

$$\|\mathbf{q}_m^{(r)}\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 \leq C, \forall m, \quad (6.32)$$

$$\|\mathbf{q}_m^{(r)}\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq C, \forall m, \quad (6.33)$$

e da mesma maneira que (6.30), podemos obter

$$\|\partial_t \mathbf{q}_m^{(r)}(t)\|_{L^2(0,T;V')} \leq C, \forall m. \quad (6.34)$$

Usando as estimativas acima podemos eleger, se necessário, novas sequências tais que:

$$\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ fraco}^* \text{ em } L^\infty(0, T; H), \quad (6.35)$$

$$\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ fraco em } L^2(0, T; V), \quad (6.36)$$

$$\mathbf{q}_m^{(r)} \rightharpoonup \mathbf{q}^{(r)} \text{ fraco}^* \text{ em } L^\infty(0, T; H), \quad (6.37)$$

$$\mathbf{q}_m^{(r)} \rightharpoonup \mathbf{q}^{(r)} \text{ fraco em } L^2(0, T; V), \quad (6.38)$$

$$\mathbf{u}_m \longrightarrow \mathbf{u} \text{ forte em } L^2(0, T; H), \quad (6.39)$$

$$\mathbf{q}_m^{(r)} \longrightarrow \mathbf{q}^{(r)} \text{ forte em } L^2(0, T; H). \quad (6.40)$$

Além destas convergências, afirmamos que

$$[B'(\mathbf{u}_m)]^* \mathbf{q}_m^{(r)} \rightarrow [B'(\mathbf{u})]^* \mathbf{q}^{(r)} \text{ em distribuição.} \quad (6.41)$$

De fato, temos que, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$,

$$\begin{aligned} \langle [B'(\mathbf{u}_m)]^* \mathbf{q}_m^{(r)} - [B'(\mathbf{u})]^* \mathbf{q}^{(r)}, \varphi \rangle &= b(\mathbf{u}_m, \varphi, \mathbf{q}_m^{(r)}) + b(\varphi, \mathbf{u}_m, \mathbf{q}_m^{(r)}) - b(\mathbf{u}, \varphi, \mathbf{q}^{(r)}) - b(\varphi, \mathbf{u}, \mathbf{q}^{(r)}) \\ &= b(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}, \varphi, \mathbf{q}_m^{(r)} - \mathbf{q}) + b(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}, \varphi, \mathbf{q}^{(r)}) + b(\mathbf{u}, \varphi, \mathbf{q}_m^{(r)} - \mathbf{q}) \\ &\quad - b(\varphi, \mathbf{u}_m - \mathbf{u}, \mathbf{q}_m^{(r)} - \mathbf{q}) - b(\varphi, \mathbf{u}_m - \mathbf{u}, \mathbf{q}^{(r)}) - b(\mathbf{u}, \varphi, \mathbf{q}_m^{(r)} - \mathbf{q}). \end{aligned}$$

O que implica, $\forall t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
& \int_t^T \|[B'(\mathbf{u}_m)]^* \mathbf{q}_m^{(r)} - [B'(\mathbf{u})]^* \mathbf{q}^{(r)}\|_{\mathcal{D}(\bar{\Omega})} \leq \left(\int_t^T |\mathbf{u}_m - \mathbf{u}|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^T |\mathbf{q}_m^{(r)} - \mathbf{q}^{(r)}|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_t^T |\mathbf{u}_m - \mathbf{u}|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^T |\mathbf{q}^{(r)}|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_t^T |\mathbf{u}|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^T |\mathbf{q}_m^{(r)} - \mathbf{q}^{(r)}|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_t^T \|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^T |\mathbf{q}_m^{(r)} - \mathbf{q}^{(r)}|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_t^T |\mathbf{u}_m - \mathbf{u}|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^T \|\mathbf{q}^{(r)}\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_t^T |\mathbf{u}|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^T |\mathbf{q}_m^{(r)} - \mathbf{q}^{(r)}|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Usando as convergências obtidas para $\{\mathbf{u}_m\}$ e $\{\mathbf{q}_m^{(r)}\}$, na estimativa anterior, obtemos a convergência (6.41). De posse dessas convergências, passamos ao limite na equação (6.7) e assim, concluímos que a segunda equação de sistema (6.5) (equação adjunta) é verificada em distribuição. As convergências (6.35), (6.36) e (6.39) nos permitem passar ao limite na equação (6.9) (veja [45]) para obter a verificação da primeira equação de (6.5). Para terminar, resta-nos passar ao limite na desigualdade (6.8) para verificar a desigualdade integral em (6.5). Para isso, observe que usando a convergência (6.40) em (6.18), obtemos que

$$\mathbf{v}_m^{(r)} \longrightarrow \mathbf{v}^{(r)} \text{ forte em } L^2(0, T; H(\omega_r)). \quad (6.42)$$

Agora, usando as convergências (6.42) e (6.40), podemos passar ao limite em (6.8) e concluir a prova. \blacksquare

O próximo resultado nos dará as condições necessárias para a existência de um equilíbrio de Nash para o caso de considerarmos as funções de estado como soluções fortes das equações de Navier-Stokes. Isto é, o espaço das soluções dado por

$$W = \{\mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbb{H}^2(\Omega)); \partial_t \mathbf{v} \in L^2(0, T; H)\}.$$

Teorema 6.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$. Sob as hipóteses do Teorema 6.4, existe pelo menos um candidato a equilíbrio de Nash para o problema (P_6) . Isto é, o sistema (6.5) possui solução.*

Demonstração: Consideremos inicialmente o seguinte problema auxiliar (P_a) : Dados $\bar{\mathbf{q}}^{(r)} \in L^2(Q)$, encontrar $\mathbf{v}^{(r)} \in K_r, \mathbf{u} \in W, \mathbf{q}^{(r)} \in W$, tais que

$$(\bar{\mathbf{q}}^{(r)} \chi_{\omega_r} - \mu_r \mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{w} - \mathbf{v}^{(r)})_{\omega_r} \leq 0, \forall \mathbf{w} \in K_r; \quad (6.43)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + vA\mathbf{u} + B(\mathbf{u}) = \mathbf{f} + \mathbf{v}^{(1)}\chi_{\omega_1} + \mathbf{v}^{(2)}\chi_{\omega_2}, \text{ em } Q; \quad (6.44)$$

$$-\partial_t \mathbf{q}^{(r)} + vA\mathbf{q}^{(r)} + [B'(\mathbf{u})]^* \mathbf{q}^{(r)} = -\alpha_r(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{r,d})\chi_{\omega_{r,d}}, \text{ em } Q; \quad (6.45)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0; \quad \mathbf{q}^{(r)}(T) = 0, \text{ em } \Omega. \quad (6.46)$$

Recordemos que os conjuntos $K_r, r = 1, 2$, são convexos, fechados com interiores não vazios de \mathcal{U}_r . Então pelo Teorema da Projeção sobre um Convexo Fechado (veja [4]), dado $\frac{1}{\mu_r} \bar{\mathbf{q}}^{(r)} \in L^2(Q)$, existe uma única função $\mathbf{v}^{(r)} \in K_r$, tais que

$$\mu_r \left(\frac{1}{\mu_r} \bar{\mathbf{q}}^{(r)} \chi_{\omega_r} - \mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{w} - \mathbf{v}^{(r)} \right)_{\omega_r} \leq 0, \forall \mathbf{w} \in K_r. \quad (6.47)$$

Segue dos teoremas (5.2) e (5.3), considerando as funções $\mathbf{v}^{(r)}, r = 1, 2$, obtidas acima, que existe uma única função $\mathbf{u} \in W$ solução de (6.44) e conseqüentemente únicas funções $\mathbf{q}^{(r)} \in W, r = 1, 2$, soluções das equações (6.45). Assim, podemos concluir que existem únicas funções $\mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{u}, \mathbf{q}^{(r)}, r = 1, 2$, que satisfazem o problema (P_a) . Agora, usaremos o Teorema de Ponto Fixo de Schauder para mostrar que o sistema (6.5) possui solução. Para isso, definamos a aplicação

$$\Psi : L^2(Q) \times L^2(Q) \rightarrow L^2(Q) \times L^2(Q)$$

por $\Psi(\bar{\mathbf{q}}^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}^{(2)}) = (\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)})$ se existem as funções $\mathbf{v}^{(r)} \in K_r, \mathbf{u} \in W, r = 1, 2$, tais que $\mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{u}, \mathbf{q}^{(r)}, r = 1, 2$, satisfazem (P_a) . É claro que Ψ está bem definida. Portanto, para obtermos um ponto fixo, devemos buscar estimativas que nos permitam definir adequadamente os elementos necessários para aplicar o Teorema de Schauder. Tomando o produto da equação (6.45) por $A\mathbf{q}^{(r)}$, obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla \mathbf{q}^r(t)|_2^2 + v |A\mathbf{q}^r(t)|_2^2 &\leq \alpha_r |\mathbf{u}(t)|_{\omega_{r,d}} |A\mathbf{q}^r(t)|_2 \\ &+ \alpha_r |\mathbf{u}_{r,d}(\mathbf{t})|_{\omega_{r,d}} |A\mathbf{q}^r(t)|_2 \\ &+ |b(A\mathbf{q}^r(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{q}^r(t))|_2 \\ &+ |b(\mathbf{u}(t), A\mathbf{q}^r(t), \mathbf{q}^r(t))|_2. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Como

$$|b(A\mathbf{q}^r(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{q}^r(t))|_2 \leq C(\Omega) |\nabla \mathbf{q}^r(t)|_2^{\frac{3}{2}} |A\mathbf{q}^r(t)|_2^{\frac{1}{2}} |\mathbf{u}(t)|_2$$

(veja [45], lema 3.8, pp.313), então temos

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla \mathbf{q}^r(t)|_2^2 + v |A\mathbf{q}^r(t)|_2^2 &\leq C(v) |\mathbf{u}(t)|_{\omega_{r,d}}^2 + \frac{v}{6} |A\mathbf{q}^r(t)|_2^2 \\
&+ C(v) |\mathbf{u}_{r,d}(t)|_{\omega_{r,d}}^2 + \frac{v}{6} |A\mathbf{q}^r(t)|_2^2 \\
&+ \frac{v}{6} |A\mathbf{q}^r(t)|_2^2 + C(\Omega) |\mathbf{u}(t)|_2^{\frac{4}{3}} |\nabla \mathbf{q}^r(t)|_2^2.
\end{aligned} \tag{6.49}$$

de onde segue

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt} |\nabla \mathbf{q}^r(t)|_2^2 + v |A\mathbf{q}^r(t)|_2^2 &\leq C(v) [|\mathbf{u}(t)|_{\omega_{r,d}}^2 + |\mathbf{u}_{r,d}(t)|_{\omega_{r,d}}^2] \\
&+ C(\Omega) |\mathbf{u}(t)|_2^{\frac{4}{3}} |\nabla \mathbf{q}^r(t)|_2^2.
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Agora, considerando a desigualdade diferencial

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt} |\nabla \mathbf{q}^r(t)|_2^2 &\leq C(v) [|\mathbf{u}(t)|_{\omega_{r,d}}^2 + |\mathbf{u}_{r,d}(t)|_{\omega_{r,d}}^2] \\
&+ C(\Omega) |\mathbf{u}(t)|_2^{\frac{4}{3}} |\nabla \mathbf{q}^r(t)|_2^2
\end{aligned} \tag{6.51}$$

e integrando em $t, 0 \leq t < T$, temos

$$\begin{aligned}
|\nabla \mathbf{q}^r(t)|_2^2 &\leq C(v) [\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(H(\omega_{r,d}))}^2 + \|\mathbf{u}_{r,d}(t)\|_{L^2(H(\omega_{r,d}))}^2] \\
&+ \int_t^T C(\Omega) |\mathbf{u}(s)|_2^{\frac{4}{3}} |\nabla \mathbf{q}^r(s)|_2^2 ds.
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (6.52) e usando (6.50), obtemos as estimativas

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{q}^r\|_{\mathbb{L}^\infty(V)}^2 &\leq C(v) (\|\mathbf{u}\|_{L^2(H(\omega_{r,d}))}^2 + \|\mathbf{u}_{r,d}\|_{L^2(H(\omega_{r,d}))}^2) e^{C(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{L^2(H)}^{\frac{4}{3}}} \\
&= R_1 < +\infty.
\end{aligned} \tag{6.53}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{q}^r\|_{L^2(\mathbb{H}^2)}^2 &\leq C(v) (\|\mathbf{u}\|_{L^2(H(\omega_{r,d}))}^2 + \|\mathbf{u}_{r,d}\|_{L^2(H(\omega_{r,d}))}^2) [1 + \\
&+ e^{C(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{L^2(H)}^{\frac{4}{3}}} \|\mathbf{q}^r\|_{L^2(0,T;V)}^2] = R_2 < +\infty.
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Agora, tomando o produto da equação (6.45) por uma função arbitrária $w \in H$, teremos

$$\begin{aligned}
(\partial_t \mathbf{q}^{(r)}(t), w) &\leq \alpha_r |\mathbf{u}(t)|_{\omega_{r,d}} |w|_2 + \alpha_r |\mathbf{u}_{r,d}(t)|_{\omega_{r,d}} |w|_2 + \\
&+ v |A^* \mathbf{q}^{(r)}(t)|_2 |w|_2 + |[B^1(\bar{\mathbf{u}}_1)]^* \mathbf{q}^{(r)}(t)|_2 |w|_2;
\end{aligned} \tag{6.55}$$

$$\begin{aligned}
\|\partial_t \mathbf{q}^{(r)}(t)\|_H &\leq \alpha_r |\mathbf{u}(t)|_{\omega_{r,d}} + \alpha_r |\mathbf{u}_{r,d}(t)|_{\omega_{r,d}} + v |A^* \mathbf{q}^{(r)}(t)|_2 \\
&+ |[B^1(\bar{\mathbf{u}}_1)]^* \mathbf{q}^{(r)}(t)|_2.
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Integrando o quadrado de ambos os membros da desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \|\partial_t \mathbf{q}^{(r)}\|_{L^2(0,T;H)}^2 &\leq C(\|\mathbf{u}\|_{L^2(H(\omega_{r,d}))}^2 + \|\mathbf{u}_{r,d}\|_{L^2(H(\omega_{r,d}))}^2 \\ &\quad + \nu \|\mathbf{q}^{(r)}\|_{L^2(\mathbb{H}^2)} + 2 \int_0^T |\mathbf{u}(t)|_6^2 |\nabla \mathbf{q}^r(t)|_3^2 dt). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Como

$$|\nabla \mathbf{q}^r(t)|_3 \leq C(\Omega) |\nabla \mathbf{q}^r(t)|_2^{\frac{1}{2}} |\nabla \mathbf{q}^r(t)|_6^{\frac{1}{2}},$$

então temos

$$\begin{aligned} \|\partial_t \mathbf{q}^{(r)}\|_{L^2(H)}^2 &\leq C(\|\mathbf{u}\|_{L^2(H(\omega_{r,d}))}^2 + \|\mathbf{u}_{r,d}\|_{L^2(H(\omega_{r,d}))}^2 + \|\mathbf{q}^{(r)}\|_{L^2(\mathbb{H}^2)} \\ &\quad + \|\mathbf{u}\|_{L^8(V)}^8 + \|\mathbf{q}^{(r)}\|_{L^4(V)}^4 + \|\mathbf{q}^{(r)}\|_{L^2(\mathbb{H}^2)}^2) \\ &= R_3 < +\infty. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Das estimativas (6.53), (6.54) e (6.58), temos

$$\|\mathbf{q}^r\|_{L^\infty(V)}^2 + \|\mathbf{q}^r\|_{L^2(\mathbb{H}^2)}^2 + \|\partial_t \mathbf{q}^{(r)}\|_{L^2(H)}^2 \leq R_1 + R_2 + R_3 = R.$$

Como R é independente das funções $\bar{\mathbf{q}}^{(r)}$, $r = 1, 2$, dadas, então podemos definir

$$\Psi : B_R \times B_R \rightarrow B_R \times B_R$$

onde B_R é a bola de raio R do espaço W . Como W está imerso compactamente em $L^2(Q)$ (veja Lema A.5 no Apêndice A), então $B_R \times B_R$ é um subconjunto compacto de $L^2(Q) \times L^2(Q)$ e $\Psi(\cdot, \cdot)$ é compacta. Para mostrar que Ψ possui um ponto fixo resta provar que Ψ é continua na topologia de $L^2(Q) \times L^2(Q)$. Seja a sequência $(\bar{\mathbf{q}}_k^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}_k^{(2)})$ em $L^2(Q) \times L^2(Q)$ tal que $\bar{\mathbf{q}}_k^{(1)} \rightarrow \bar{\mathbf{q}}^{(1)}$ e $\bar{\mathbf{q}}_k^{(2)} \rightarrow \bar{\mathbf{q}}^{(2)}$. Provaremos que $\Psi(\bar{\mathbf{q}}_k^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}_k^{(2)}) = (\mathbf{q}_k^{(1)}, \mathbf{q}_k^{(2)}) \rightarrow (\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}) = \Psi(\bar{\mathbf{q}}^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}^{(2)})$ fortemente em $L^2(Q) \times L^2(Q)$. Seja $(\bar{\mathbf{q}}_n^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}_n^{(2)})$ uma subsequência qualquer de $(\bar{\mathbf{q}}_k^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}_k^{(2)})$. Como $(\bar{\mathbf{q}}_n^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}_n^{(2)})$ é uniformemente limitada, então podemos escolher outra subsequência, se necessário, tal que

$$(\bar{\mathbf{q}}_n^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}_n^{(2)}) \rightharpoonup (\bar{\mathbf{q}}^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}^{(2)}) \text{ fraco em } L^2(Q) \times L^2(Q). \quad (6.59)$$

Sejam $(\mathbf{v}_n^{(r)}, \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n^{(r)})$ e $(\mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{u}, \mathbf{q}^{(r)})$ as soluções de (P_a) correspondentes, respectivamente, aos dados $(\bar{\mathbf{q}}_n^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}_n^{(2)})$ e $(\bar{\mathbf{q}}^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}^{(2)})$. Usando o fato que K_r , $r = 1, 2$, são conjuntos limitados de $L^2(\omega_r \times (0, T))$ e as estimativas (5.11), (5.12), (5.15), (6.53), (6.54), (6.58), temos a existência de outras subsequências, se necessário, tais que

$$\mathbf{u}_n \rightarrow \tilde{\mathbf{u}} \text{ forte em } L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad (6.60)$$

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}} \text{ fraco em } L^2(0, T; D(A)), \quad (6.61)$$

$$\partial_t \mathbf{u}_n \rightharpoonup \partial_t \tilde{\mathbf{u}} \text{ fraco em } L^2(0, T; H), \quad (6.62)$$

$$\mathbf{q}_n^r \rightarrow \tilde{\mathbf{q}}^{(r)} \text{ forte em } L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad (6.63)$$

$$\mathbf{q}_n^{(r)} \rightharpoonup \tilde{\mathbf{q}}^{(r)} \text{ fraco em } L^2(0, T; D(A)), \quad (6.64)$$

$$\partial_t \mathbf{q}_n^{(r)} \rightharpoonup \partial_t \tilde{\mathbf{q}}^{(r)} \text{ fraco em } L^2(0, T; H); \quad (6.65)$$

além disso, da mesma forma que (6.42), obtemos a convergência

$$\mathbf{v}_n^{(r)} \rightharpoonup \tilde{\mathbf{v}}^{(r)} \text{ fraco em } L^2(0, T; H(\omega_r)). \quad (6.66)$$

Agora, usando as convergências obtidas, podemos passar ao limite em (P_a) , com as subsequências $\mathbf{v}_n^{(r)}, \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n^{(r)}$ no lugar de $\mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{u}, \mathbf{q}^{(r)}$, para mostrar que $(\tilde{\mathbf{v}}^{(r)}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{q}}^{(r)}), r = 1, 2$, é também uma solução de (P_a) com os dados $(\bar{\mathbf{q}}^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}^{(2)})$. O que implica que $\Psi(\bar{\mathbf{q}}^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}^{(2)}) = (\tilde{\mathbf{q}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{q}}^{(2)})$. Como $\Psi(\bar{\mathbf{q}}^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}^{(2)}) = (\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)})$, então $(\tilde{\mathbf{q}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{q}}^{(2)}) = (\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)})$. Usando um argumento padrão, concluímos que a sequência inteira $(\mathbf{q}_k^{(1)}, \mathbf{q}_k^{(2)})$ converge para $(\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)})$ na norma de $L^2(Q) \times L^2(Q)$. Portanto, $\Psi(\cdot, \cdot)$ é contínua e isso conclui a prova. ■

CAPÍTULO 7

Otimidade de Pareto para Controle Multiobjetivo das Equações de Navier-Stokes

Neste capítulo, trataremos do ótimo de Pareto para um problema de controle com dois-objetivos governado pelo sistema de equações de Navier-Stokes estudado no Capítulo 6. Nossa abordagem consiste em transformar o problema de controle num problema de otimização vetorial, para, em seguida, provar as condições necessárias de otimalidade local dos ótimos de Pareto via formalismo de Dubovitskii e Milyutin generalizado.

7.1 Formulação do problema

Consideremos os funcionais $J_r : W \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $r = 1, 2$, dados por

$$J_r(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) = \frac{\alpha_r}{2} \int_0^T \int_{\omega_{r,d}} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{r,d}|^2 dx dt + \frac{\mu_r}{2} \int_0^T \int_{\omega_r} |\mathbf{v}^{(r)}|^2 dx dt, \quad (7.1)$$

onde $\mu_r > 0$, $\alpha_r \geq 0$, $r = 1, 2$, são constantes, $\mathbf{u}_{r,d}$ são funções dadas em $L^2(0, T; H(\omega_{r,d}))$, $r = 1, 2$, as funções $\mathbf{v}^{(r)}$ são os controles tomados em K_r , $r = 1, 2$, que são subconjuntos

convexos, fechados com interiores não vazios de $\mathcal{U}_r, r = 1, 2$, e o estado \mathbf{u} é tomado como solução da equação de Navier - Stokes

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \mathbf{v}^{(1)} \chi_{\omega_1} + \mathbf{v}^{(2)} \chi_{\omega_2}, & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{em } Q; \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega; \mathbf{u} = 0, & \text{sobre } \Sigma; \end{cases} \quad (7.2)$$

Como no Capítulo 6, podemos representar a equação de estado em sua forma operacional, a qual nos permite definir o operador $M : W \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow L^2(0, T; H) \times H$ da seguinte maneira: $M(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) = (\Psi_1, \Psi_2)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \nu A \mathbf{u} + B(\mathbf{u}) = \mathbf{f} + \mathbf{v}^{(1)} \chi_{\omega_1} + \mathbf{v}^{(2)} \chi_{\omega_2} + \Psi_1, & \text{sobre } Q; \\ \mathbf{u}|_{t=0} - \mathbf{u}_0 = \Psi_2, & \text{sobre } \Omega; \end{cases}$$

onde os operadores $A : V \rightarrow V'$ e $B : V \rightarrow V'$ são os já definidos no capítulo anterior.

O problema de controle que consideraremos é encontrar controles $(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$ e o estado \mathbf{u} tais que os funcionais em (7.1) sejam minimizados no sentido de Pareto sujeitos a (7.2).

7.2 Problema de Otimização - Ótimo de Pareto

O problema de controle considerado acima pode ser representado pelo seguinte problema de otimização vetorial:

$$(P_7) \quad \begin{aligned} & \min && (J_1, J_2)(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}), \\ & && (\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) \in \mathcal{Q}, \\ & && \mathbf{h}^{(1)} \in K_1, \mathbf{h}^{(2)} \in K_2 \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{Q} = \{(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) \in W \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2; M(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) = 0\}$$

Definição 7.1. *Um par de controles $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ é chamado ótimo de Pareto para o problema (P_7) se existe um estado $\mathbf{u} \in W$ tal que*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) \in \mathcal{Q}, \quad \mathbf{v}^{(1)} \in K_1, \quad \mathbf{v}^{(2)} \in K_2$$

e não existe um par $(\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) \neq (\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ e um estado \mathbf{z} correspondente a $(\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)})$, com $(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)})$ satisfazendo as mesmas restrições acima, tal que

$$J_r(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) \leq J_r(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}), r = 1, 2,$$

com pelo menos uma desigualdade estrita (veja a Definição 1.34 no Capítulo 1).

Teorema 7.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$, e considere as hipóteses dos teoremas (5.1), (5.2) e (5.3). Se $\inf J_r(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) < J_r(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}), r = 1, 2$. Então as condições necessárias para que o ponto $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ seja um ótimo de Pareto do problema (P_7) é que existam escalares $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$, não nulos simultaneamente, e uma função $\mathbf{q} \in W$ tais que o sistema abaixo seja verificado,*

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + vA\mathbf{u} + B(\mathbf{u}) = \mathbf{f} + \mathbf{v}^{(1)}\chi_{\omega_1} + \mathbf{v}^{(2)}\chi_{\omega_2}, & \text{em } Q; \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega; \\ -\partial_t \mathbf{q} + vA\mathbf{q} + [B'(\mathbf{u})]^* \mathbf{q} = -\lambda_1 \alpha_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{1,d}) \chi_{\omega_{1,d}} - \lambda_2 \alpha_2 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{2,d}) \chi_{\omega_{2,d}}, & \text{em } Q; \\ \mathbf{q}(T) = 0, & \text{em } \Omega; \end{cases}$$

e vale o seguinte princípio de mínimo

$$(\mathbf{q}\chi_{\omega_r} - \lambda_r \mu_r \mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{w} - \mathbf{v}^{(r)})_{L^2(\omega_r \times (0,T))} \leq 0, \forall \mathbf{w} \in K_r, r = 1, 2.$$

Para fazer a prova deste teorema, necessitamos de alguns lemas técnicos que são fundamentais para a aplicação do formalismo de Dubovitskii e Milyutin Generalizado.

Sabemos que a derivada do funcional $J_r(\cdot, \cdot, \cdot)$ no ponto $(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ e na direção $(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)})$ é dada por

$$J'_r(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) = \alpha_r (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{r,d}, \mathbf{z})_{\omega_{r,d} \times (0,T)} + \mu_r (\mathbf{v}^{(r)}, \mathbf{h}^{(r)})_{\omega_r \times (0,T)}.$$

Lema 7.3. *O cone de direções de descida do funcional $J_r(\cdot, \cdot, \cdot)$ no ponto $(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ é dado por*

$$DC(J_r, (\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})) = \{(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) \text{ tal que } J'_r(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})(\mathbf{z}_1, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) < 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[DC(J_r)]^* = \{\varphi_r / \varphi_r(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) = -\lambda_r J'_r(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}), p / \text{algum } \lambda_r \geq 0\}.$$

(veja o Lema 5.9 no Capítulo 5).

Lema 7.4. *Se $NC(J_r, (\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}))$ é o cone de não crescimento associado ao funcional $J_r(\cdot, \cdot, \cdot)$ no ponto $(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$, então seu cone dual é dado por*

$$[NC(J_r)]^* = [DC(J_r)]^*$$

Demonstração: Temos por hipótese que $\inf J_r(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) < J_r(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$, $r = 1, 2$. Como os funcionais são definidos por normas em espaços de Hilbert, eles são estritamente convexos e consequentemente Ponstein convexos (veja a Observação 1.45 no Capítulo 1). Logo, o resultado segue do Lema 1.47 no Capítulo 1. ■

Lema 7.5. *Se $AC(W \times K_1 \times \mathcal{U}_2, (\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}))$ e $AC(W \times \mathcal{U}_1 \times K_2, (\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}))$ são os cones admissíveis associados às restrições de desigualdades $\mathbf{h}^{(1)} \in K_1$ e $\mathbf{h}^{(2)} \in K_2$, respectivamente, no ponto $(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$, então seus cones duais são dados por*

$$[AC(W \times K_1 \times \mathcal{U}_2)]^* = \{(0, \tilde{\varphi}_3, 0)/\tilde{\varphi}_3 \text{ é um func. suporte } p/ K_1 \text{ em } \mathbf{v}^{(1)}\}$$

e

$$[AC(W \times \mathcal{U}_1 \times K_2)]^* = \{(0, 0, \tilde{\varphi}_4)/\tilde{\varphi}_4 \text{ é um func. suporte } p/ K_2 \text{ em } \mathbf{v}^{(2)}\}.$$

(veja o Lema 5.10 no Capítulo 5).

Agora observamos que a derivada de Gâteaux da aplicação $M(\cdot, \cdot, \cdot)$ no ponto $(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ é definida por $M'_G(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) = (\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{z} + vA\mathbf{z} + B'_G(\mathbf{u})\mathbf{z} = \mathbf{h}^{(1)}\chi_{\omega_1} + \mathbf{h}^{(2)}\chi_{\omega_2} + \tilde{\Psi}_1, & \text{em } Q; \\ \mathbf{z}(0) = \tilde{\Psi}_2, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (7.3)$$

Lema 7.6.

(i) *A aplicação $M(\cdot, \cdot, \cdot)$ é estritamente diferenciável,*

(ii) *O operador $M'(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) = M'_G(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ é sobrejetivo,*

(veja o Lema 5.11 no Capítulo 5).

Lema 7.7. *O cone tangente ao conjunto \mathcal{Q} no ponto $(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ é dado por*

$$TC(\mathcal{Q}, (\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})) = \{(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)})/M'(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) = 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[TC(\mathcal{Q})]^* = \{\varphi_5/\varphi_5(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) = 0 \text{ para todo } (\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) \in TC(\mathcal{Q}, (\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}))\}$$

(veja o Lema 5.12 no Capítulo 5).

Lema 7.8.

- (i) Os cones $DC(J_r) = DC(J_r, (\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}))$, $NC(J_r) = NC(J_r, (\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}))$,
 $AC(K_1) = AC(W \times K_1 \times \mathcal{U}_2, (\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}))$, $AC(K_2) = AC(W \times \mathcal{U}_1 \times K_2, (\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}))$, $r = 1, 2$, são abertos e convexos.
- (ii) O cone $TC(\mathcal{Q}) = TC(\mathcal{Q}, (\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}))$ é convexo e fechado.

Demonstração: A prova segue das hipóteses sobre as restrições aos controles e da diferenciabilidade dos funcionais e do operador que define a restrição de igualdade (veja os detalhes no Capítulo 1). ■

Agora, demonstraremos o teorema principal.

Demonstração:(Teorema 7.2) Considerando que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ é um Ótimo de Pareto para o problema (P_7) , segue, do Lema 1.40 no Capítulo 1, que

$$DC(J_1) \cap NC(J_2) \cap AC(K_1) \cap AC(K_2) \cap TC(Q) = \emptyset$$

e

$$NC(J_1) \cap DC(J_2) \cap AC(K_1) \cap AC(K_2) \cap TC(Q) = \emptyset.$$

Considerando os Lemas 7.8 e 7.4, segue do Teorema Dubovitskii e Milyutin generalizado (veja Obs. 1.43 no Capítulo 1) que existem funcionais lineares contínuos $\varphi_1 \in [DC(J_1)]^*$, $\varphi_2 \in [DC(J_2)]^*$, $\varphi_3 \in [AC(K_1)]^*$, $\varphi_4 \in [AC(K_2)]^*$, $\varphi_5 \in [TC(Q)]^*$, não nulos simultaneamente, tais que vale a equação de Euler-Lagrange

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 = 0. \quad (7.4)$$

Sejam $(\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ controles arbitrários e consideremos a função \mathbf{z} definida como a solução da equação

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{z} + v \mathbf{A} \mathbf{z} + B'(\mathbf{u}) \mathbf{z} = \mathbf{h}^{(1)} \chi_{\omega_1} + \mathbf{h}^{(2)} \chi_{\omega_2}, & \text{em } Q; \\ \mathbf{z}(0) = 0, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (7.5)$$

Então, para estas funções, $\varphi_5(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) = 0$ e segue da equação de Euler-Lagrange que

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0. \quad (7.6)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}\varphi_1(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) &= -\lambda_1 [\alpha_1(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{1,d}, \mathbf{z})_{\omega_{1,d} \times (0,T)} + \mu_1(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{h}^{(1)})_{\omega_1 \times (0,T)}], \\ \varphi_2(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) &= -\lambda_2 [\alpha_2(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{2,d}, \mathbf{z})_{\omega_{2,d} \times (0,T)} + \mu_2(\mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{h}^{(2)})_{\omega_2 \times (0,T)}], \\ \varphi_3(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) &= \tilde{\varphi}_2(\mathbf{h}^{(1)}) \quad \text{e} \quad \varphi_4(\mathbf{z}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) = \tilde{\varphi}_4(\mathbf{h}^{(2)}); \end{aligned} \quad (7.7)$$

com $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ não nulos simultaneamente. De fato, se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, então $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 0$. Como, para todo par $(\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ a equação (7.5) possui solução, então $\varphi_5 \equiv 0$. Segue de (7.6) que $\tilde{\varphi}_3(\mathbf{h}^{(1)}) + \tilde{\varphi}_4(\mathbf{h}^{(2)}) = 0$ o que implica $\tilde{\varphi}_3 \equiv \tilde{\varphi}_4 \equiv 0$. Logo, $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_3 \equiv \varphi_4 \equiv \varphi_5 \equiv 0$ o que contradiz o Teorema de Dubovitskii-Milyutin. Portanto, $\lambda_1 > 0$ ou $\lambda_2 > 0$. Agora, substituindo os funcionais em (7.7) na equação (7.6), obtemos a identidade

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_3(\mathbf{h}^{(1)}) + \tilde{\varphi}_4(\mathbf{h}^{(2)}) &= \lambda_1 [\alpha_1(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{1,d}, \mathbf{z})_{\omega_{1,d} \times (0,T)} + \mu_1(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{h}^{(1)})_{\omega_1 \times (0,T)}] \\ &+ \lambda_2 [\alpha_2(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{2,d}, \mathbf{z})_{\omega_{2,d} \times (0,T)} + \mu_2(\mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{h}^{(2)})_{\omega_2 \times (0,T)}]. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Seja a função $\mathbf{q} \in W$ a única solução da equação adjunta

$$\begin{cases} -\partial_t \mathbf{q} + vA\mathbf{q} + [B'(\mathbf{u})]^* \mathbf{q} = -\lambda_1 \alpha_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{1,d}) \chi_{\omega_{1,d}} - \lambda_2 \alpha_2 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{2,d}) \chi_{\omega_{2,d}}, & \text{em } Q; \\ \mathbf{q}(T) = 0, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (7.9)$$

Tomando o produto desta equação pela função \mathbf{z} e fazendo as integrações necessárias, obtemos

$$(\mathbf{q}, \partial_t \mathbf{z}) + v(\mathbf{q}, A\mathbf{z}) + (\mathbf{q}, B'(\mathbf{u})\mathbf{z}) = -\lambda_1 \alpha_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{1,d}, \mathbf{z})_{\omega_{1,d} \times (0,T)} - \lambda_2 \alpha_2 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{2,d}, \mathbf{z})_{\omega_{2,d} \times (0,T)}. \quad (7.10)$$

Tomando o produto da equação (7.5) pela função \mathbf{q} e comparando com (7.10), obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_1 \alpha_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{1,d}, \mathbf{z})_{\omega_{1,d} \times (0,T)} + \lambda_2 \alpha_2 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{2,d}, \mathbf{z})_{\omega_{2,d} \times (0,T)} &= -(\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{q} \chi_{\omega_1})_{\omega_1 \times (0,T)} \\ &- (\mathbf{h}^{(2)}, \mathbf{q} \chi_{\omega_2})_{\omega_2 \times (0,T)}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Substituindo (7.11) em (7.8), obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_3(\mathbf{h}^{(1)}) + \tilde{\varphi}_4(\mathbf{h}^{(2)}) &= -(\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{q} \chi_{\omega_1})_{\omega_1 \times (0,T)} - (\mathbf{h}^{(2)}, \mathbf{q} \chi_{\omega_2})_{\omega_2 \times (0,T)} \\ &+ \lambda_1 \mu_1 (\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{h}^{(1)})_{\omega_1 \times (0,T)} + \lambda_2 \mu_2 (\mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{h}^{(2)})_{\omega_2 \times (0,T)}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

o que implica

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_3(\mathbf{h}^{(1)}) + \tilde{\varphi}_4(\mathbf{h}^{(2)}) &= (-\mathbf{q} \chi_{\omega_1} + \lambda_1 \mu_1 \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{h}^{(1)})_{\omega_1 \times (0,T)} \\ &+ (-\mathbf{q} \chi_{\omega_2} + \lambda_2 \mu_2 \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{h}^{(2)})_{\omega_2 \times (0,T)}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

para todo $\mathbf{h}^{(r)} \in \mathbb{L}^2(0, T; H(\omega_r))$, $r = 1, 2$. Portanto,

$$\tilde{\varphi}_3(\mathbf{h}^{(1)}) = (-\mathbf{q}\chi_{\omega_1} + \lambda_1\mu_1\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{h}^{(1)})_{\omega_1 \times (0, T)}$$

e

$$\tilde{\varphi}_4(\mathbf{h}^{(2)}) = (-\mathbf{q}\chi_{\omega_2} + \lambda_2\mu_2\mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{h}^{(2)})_{\omega_2 \times (0, T)}.$$

Como os funcionais $\tilde{\varphi}_3$ e $\tilde{\varphi}_4$ são suportes para K_1 e K_2 em $\mathbf{v}^{(1)}$ e $\mathbf{v}^{(2)}$, então

$$(-\mathbf{q}\chi_{\omega_1} + \lambda_1\mu_1\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{h}^{(1)} - \mathbf{v}^{(1)})_{\omega_1 \times (0, T)} \geq 0, \forall \mathbf{h}^{(1)} \in K_1$$

e

$$(-\mathbf{q}\chi_{\omega_2} + \lambda_2\mu_2\mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{h}^{(2)} - \mathbf{v}^{(2)})_{\omega_2 \times (0, T)} \geq 0, \forall \mathbf{h}^{(2)} \in K_2,$$

o que conclui a prova. ■

CAPÍTULO 8

Equilíbrio de Stackelberg - Nash para Controle Multiobjetivo das Equações de Stokes

Neste capítulo, trataremos de um sistema distribuído governado por um conjunto de equações de Stokes de evolução, onde proporemos (por simplicidade) a presença de dois agentes controladores locais (chamados de SEGUIDORES), cada um decidindo sua própria política (representada pelos controles $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}$) para intervir no sistema, e a presença de uma ação diferente $\mathbf{f}(x, t)$ tomada por um agente controlador global (chamado de LIDER). Nossa estratégia consiste em fixar o controle $\mathbf{f}(x, t)$ e otimizar os critérios de $\mathbf{v}^{(i)}, i = 1, 2$, no sentido de Nash. Em seguida, colocaremos cada controle $\mathbf{v}^{(i)}$ em função de \mathbf{f} e otimizaremos o custo de \mathbf{f} de tal forma que o estado real do sistema associado a esses controles, num tempo T , esteja o mais próximo possível de um estado ideal dado. Para referência desta técnica veja [10].

8.1 Formulação do Problema

Sejam Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 , ω uma região aberta de Ω , ω_1, ω_2 partes abertas disjuntas de ω e $\omega_{1,d}, \omega_{2,d}$ subconjuntos abertos de Ω .

Consideremos os seguintes funcionais

$$J_i(\mathbf{f}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) = \frac{\alpha_i}{2} \int_0^T \int_{\omega_{i,d}} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{i,d}|^2 dxdt + \frac{\mu_i}{2} \int_0^T \int_{\omega_i} |\mathbf{v}^{(i)}|^2 dxdt \quad (8.1)$$

e

$$J(\mathbf{f}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} |\mathbf{f}|^2 dxdt, \quad (8.2)$$

onde $i = 1, 2$, $\mu_i > 0$, $\alpha_i \geq 0$ são constantes, $\mathbf{u}_{i,d}$ são funções dadas em $L^2(\omega_{i,d} \times (0, T))$, a função $\mathbf{f} \in L^2(\omega \times (0, T))$ é o controle global e $\mathbf{v}^{(i)} \in L^2(\omega_i \times (0, T))$ são os controles locais do sistema. O estado \mathbf{u} é definido como solução da equação

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - v \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \chi_{\omega} + \mathbf{v}^{(1)} \chi_{\omega_1} + \mathbf{v}^{(2)} \chi_{\omega_2}, & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{em } Q; \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega; \quad \mathbf{u}|_{\Sigma} = 0; \end{cases} \quad (8.3)$$

onde \mathbf{u} é a velocidade do fluido, p é a pressão hidrostática, $v = cte > 0$ é a viscosidade cinemática e \mathbf{u}_0 é uma função dada em H .

O problema de controle que consideraremos é encontrar controles $(\mathbf{f}, \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$ e um estado \mathbf{u} tais que os funcionais em (8.1) sejam minimizados no sentido de Nash sujeitos a (8.3) e o funcional em (8.2) seja minimizado sujeito a seguinte restrição de controlabilidade $\mathbf{u}(x, T, \mathbf{f}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) \in (\mathbf{u}_T + \alpha B)$, onde \mathbf{u}_T é uma função dada em H , B denota a bola unitária de H e $\alpha > 0$ é um número dado. Este problema de controle pode ser equivalentemente representado pelo seguinte problema de otimização:

$$(P_8) \quad \begin{aligned} & \min && (J, J_1, J_2)(\mathbf{f}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}). \\ & \mathbf{u} \text{ e } (\mathbf{f}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) \text{ s. a. } && (8.3), \\ & \mathbf{u}(x, T, \mathbf{f}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) \in && (\mathbf{u}_T + \alpha B) \end{aligned}$$

Para empregar o método proposto, devemos considerar os seguintes problemas auxiliares:

Problema 1. fixado o líder \mathbf{f} , encontrar controles $(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$ (dependendo de \mathbf{f}) e o estado \mathbf{u}

tais que os funcionais em (8.1) sejam minimizados no sentido de Nash sujeitos a (8.3). Isto é, dado \mathbf{f} , encontrar $(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$ (um equilíbrio de Nash) tal que

$$J_1(\mathbf{f}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) = \min_{\mathbf{h}^{(1)}} J_1(\mathbf{f}, \mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) \quad (8.4)$$

e

$$J_2(\mathbf{f}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) = \min_{\mathbf{h}^{(2)}} J_2(\mathbf{f}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) \quad (8.5)$$

sujeitos a equação (8.3). Esses funcionais medem a diferença entre o estado real \mathbf{u} e um estado ideal $\mathbf{u}_{i,d}$ numa região de interesse $\omega_{i,d}$ mais um termo que mede o custo do controle \mathbf{v}^i sobre ω_i .

Problema 2. depois de encontrar os controles $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^1(\mathbf{f})$, $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^2(\mathbf{f})$ e o estado $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}, \mathbf{v}^1(\mathbf{f}), \mathbf{v}^2(\mathbf{f}))$, procuraremos um controle \mathbf{f} tal que

$$J(\mathbf{f}) = \min_{\mathbf{g}} J(\mathbf{g}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) \quad (8.6)$$

sujeito a restrição de controlabilidade aproximada

$$\mathbf{u}(x, T; \mathbf{g}, \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{g}), \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{g})) \in \mathbf{u}_T + \alpha B, \quad (8.7)$$

Observação 8.1. *Note que em geral é impossível satisfazer os problemas 1 e 2 para o mesmo \mathbf{f} .*

8.2 Critério para Existência e Unicidade do Equilíbrio de Nash

Consideremos espaços: $\mathcal{H}_i = L^2(\omega_i \times (0, T))$, $i = 1, 2$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ e definamos os operadores $L_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i, L^2(\Omega \times (0, T)))$ por:

$$L_i \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{u}_i \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_i - v \Delta \mathbf{u}_i + \nabla p_i = \mathbf{v}^{(i)} \chi_{\omega_i} \text{ em } Q; \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0, \text{ em } Q; \\ \mathbf{u}_i(0) = 0, \text{ em } \Omega, \mathbf{u}_i|_{\Sigma} = 0. \end{cases}$$

Para \mathbf{f} fixado, podemos escrever a solução do sistema (8.3) na forma

$$\mathbf{u} = L_1 \mathbf{v}^{(1)} + L_2 \mathbf{v}^{(2)} + \mathbf{q}$$

onde \mathbf{q} é a solução de

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{q} - v \Delta \mathbf{q} + \nabla r = \mathbf{f} \chi_\omega, & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \mathbf{q} = 0, & \text{em } Q; \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega, \mathbf{q}|_\Sigma = 0. \end{cases}$$

Com estas notações podemos reescrever os funcionais definidos em (8.1) por

$$\begin{aligned} J_i(\mathbf{f}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) &= \frac{\alpha_i}{2} \int_0^T \int_{\omega_{i,d}} |L_1 \mathbf{v}^{(1)} + L_2 \mathbf{v}^{(2)} - (\mathbf{u}_{i,d} - \mathbf{q})|^2 dx dt \\ &\quad + \frac{\mu_i}{2} \int_0^T \int_{\omega_i} |\mathbf{v}^{(i)}|^2 dx dt \end{aligned} \quad (8.8)$$

Assim, o vetor $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se, para todo par de controles $\mathbf{w} = (\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)})$,

$$\alpha_i (L_1 \mathbf{v}^{(1)} + L_2 \mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{y}_i, L_i \mathbf{w}^{(i)})_{\omega_{i,d} \times (0,T)} + \mu_i (\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{w}^{(i)})_{\omega_i \times (0,T)} = 0, \quad (8.9)$$

onde $\mathbf{y}_i = \mathbf{u}_{i,d} - \mathbf{q}$, $i = 1, 2$. Segue que

$$\alpha_i (L_i^* (L_1 \mathbf{v}^{(1)} + L_2 \mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{y}_i) \chi_{\omega_{i,d}}, \mathbf{w}^{(i)})_{\omega_{i,d} \times (0,T)} + \mu_i (\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{w}^{(i)})_{\omega_i \times (0,T)} = 0, \quad (8.10)$$

onde $L_i^* \in \mathcal{L}(L^2(\Omega \times (0, T)), \mathcal{H}_i)$ é o adjunto de L_i . Assim, temos

$$\alpha_i L_i^* ((L_1 \mathbf{v}^{(1)} + L_2 \mathbf{v}^{(2)}) \chi_{\omega_{i,d}}) + \mu_i \mathbf{v}^{(i)} = L_i^* (\mathbf{y}_i \chi_{\omega_{i,d}}), \quad i = 1, 2; \quad (8.11)$$

ou equivalentemente, se definimos o operador

$$\begin{aligned} L &\in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \\ L\mathbf{w} &= \text{dado em } \mathcal{H} \text{ onde} \\ (L\mathbf{w})_i &= \mu_i \mathbf{w}^{(i)} + \alpha_i L_i^* ((L_1 \mathbf{w}^{(1)} + L_2 \mathbf{w}^{(2)}) \chi_{\omega_{i,d}}), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (8.12)$$

então $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ é um equilíbrio de Nash se $L\mathbf{v} = \mathbf{z} := (L_i^* \mathbf{y}_i \chi_{\omega_{i,d}})_{i=1,2}$.

Proposição 8.2. *Assuma que*

$$\alpha_1 \|L_2\|^2 < 4\mu_2 \quad e \quad \alpha_2 \|L_1\|^2 < 4\mu_1. \quad (8.13)$$

Então L é invertível. Em particular, existe um único equilíbrio de Nash para os funcionais em (8.1).

Demonstração: Observe que

$$(L\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^2 \mu_i \|\mathbf{w}^{(i)}\|_{L^2(\omega_i \times (0,T))}^2 + \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 L_j \mathbf{w}^{(j)}, \alpha_i L_i \mathbf{w}^{(i)} \right)_{L^2(\omega_{i,d} \times (0,T))}. \quad (8.14)$$

Desenvolvendo os somatórios que aparecem no segundo membro da identidade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 L_j \mathbf{w}^{(j)}, \alpha_i L_i \mathbf{w}^{(i)} \right) &= \alpha_1 \|L_1 \mathbf{w}^{(1)}\|^2 + \alpha_1 (L_2 \mathbf{w}^{(2)}, L_1 \mathbf{w}^{(1)}) \\ &\quad + \alpha_2 \|L_2 \mathbf{w}^{(2)}\|^2 + \alpha_2 (L_1 \mathbf{w}^{(1)}, L_2 \mathbf{w}^{(2)}). \end{aligned}$$

Supondo que os produtos internos que aparecem no segundo membro da expressão acima são negativos, usamos a desigualdade de Young e substituímos na identidade (8.14), para obter

$$(L\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \sum_{i=1}^2 \mu_i \|\mathbf{w}^{(i)}\|_{L^2(\omega_i \times (0,T))}^2 - \frac{\alpha_1}{4} \|L_2 \mathbf{w}^{(2)}\|^2 - \frac{\alpha_2}{4} \|L_1 \mathbf{w}^{(1)}\|^2$$

Usando a hipótese em (8.13), temos que

$$(L\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \gamma \|\mathbf{w}\|^2, \text{ para algum } \gamma > 0. \quad (8.15)$$

Agora, definimos a aplicação $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{h}) = (L\mathbf{w}, \mathbf{h})_{\mathcal{H}}.$$

Claramente, da definição do operador L e da desigualdade (8.15), a aplicação $a(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear, contínua e coerciva. Logo, do Teorema de Lax-Milgram, para todo $\varphi \in \mathcal{H}'$ existe um único $\mathbf{w} \in \mathcal{H}$ tal que

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{h}) = (L\mathbf{w}, \mathbf{h})_{\mathcal{H}} = \langle \varphi, \mathbf{h} \rangle_{\mathcal{H}', \mathcal{H}}, \forall \mathbf{h} \in \mathcal{H}.$$

Daí, temos a conclusão da prova. ■

Observação 8.3. *Os resultados obtidos podem ser estendidos para um número qualquer N de controles locais e consequentemente N objetivos locais. Para generalizar a proposição 8.2, basta substituir a hipótese (8.13) por*

$$C(N) \left(\sum_{j \neq i} \alpha_j \right) \|L_i\|^2 < 4\mu_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (8.16)$$

para uma certa constante $C(N)$, desenvolver o somatório

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N L_j \mathbf{w}^{(j)}, \alpha_i L_i \mathbf{w}^{(i)} \right)_{L^2(\omega_{i,d} \times (0,T))}$$

e usar desigualdade de Young para provar a coercividade do operador L . A conclusão segue do Teorema de Lax-Milgram como na prova da proposição.

8.3 Controlabilidade Aproximada

Aqui apresentaremos um resultado que assegura que existe controlabilidade aproximada do sistema quando uma estratégia do tipo Stackelberg - Nash é empregada. Tal resultado é necessário para garantir que o problema 2 faça sentido.

Considere o seguinte sistema acoplado de equações de Stokes:

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - v \Delta \varphi + \nabla s = \alpha_1 \phi_1 \chi_{\omega_{1,d}} + \alpha_2 \phi_2 \chi_{\omega_{2,d}}, & \text{em } Q; \\ \partial_t \phi_i - v \Delta \phi_i + \nabla \delta_i = -\frac{1}{\mu_i} \varphi \chi_{\omega_i}, & \text{em } Q; \\ \varphi(x, T) = \mathbf{h}, \quad \phi_i(x, 0) = 0, & \text{em } \Omega; \\ \operatorname{div} \varphi = \operatorname{div} \phi_i = 0 & \text{em } Q; \quad \varphi|_{\Sigma} = \phi_i|_{\Sigma} = 0. \end{cases} \quad (8.17)$$

Lema 8.4. Dado $\mathbf{h} \in H$. A existência e unicidade de funções $(\varphi, s, \phi_i, \delta_i)$ satisfazendo o sistema (8.17) é equivalente a existência e unicidade de um equilíbrio de Nash (\bar{w}_1, \bar{w}_2) para o seguinte problema de otimização auxiliar (P_a) : minimizar os funcionais

$$J_i(w_1, w_2) = \frac{\alpha_i}{2} \int_0^T \int_{\omega_i} |\varphi|_2^2 dx dt + \frac{\mu_i}{2} \int_0^T \int_{\omega_{i,d}} |w_i|_2^2 dx dt, \quad i = 1, 2. \quad (8.18)$$

sobre (w_1, w_2) com o estado φ sujeito à seguinte equação

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - v \Delta \varphi + \nabla s = w_1 \chi_{\omega_{1,d}} + w_2 \chi_{\omega_{2,d}}, & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \varphi = 0 & \text{em } Q; \\ \varphi(x, T) = \mathbf{h}, & \text{em } \Omega; \quad e \varphi|_{\Sigma} = 0. \end{cases} \quad (8.19)$$

Demonstração: Inicialmente mostraremos que, de fato, esses problemas são equivalentes. Seja (θ_i, r_i) as soluções das equações

$$\begin{cases} -\partial_t \theta_i - v \Delta \theta_i + \nabla r_i = w_i \chi_{\omega_{1,d}}, & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \theta_i = 0 & \text{em } Q; \\ \theta_i(x, T) = 0, & \text{em } \Omega; \quad e \theta_i|_{\Sigma} = 0, \end{cases} \quad (8.20)$$

e consideremos a seguinte equação adjunta

$$\begin{cases} \partial_t \phi_i - v \Delta \phi_i + \nabla \delta_i = -\frac{1}{\mu_i} \varphi \chi_{\omega_i}, & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \phi_i = 0 & \text{em } Q; \\ \phi_i(x, T) = 0, & \text{em } \Omega; \text{ e } \phi_i|_{\Sigma} = 0. \end{cases} \quad (8.21)$$

multiplicando a equação (8.21) por θ_i e integrando convenientemente, levando em conta que $\phi_i(x, 0) = \theta_i(x, T) = 0$, obtemos a seguinte identidade

$$(\phi_i, -\partial_t \theta_i - v \Delta \theta_i)_{\omega_{i,d} \times (0,T)} = -\frac{1}{\mu_i} (\varphi, \theta_i)_{\omega_i \times (0,T)}; \quad (8.22)$$

o que implica

$$(\phi_i, w_i)_{\omega_{i,d} \times (0,T)} = -\frac{1}{\mu_i} (\varphi, \theta_i)_{\omega_i \times (0,T)}. \quad (8.23)$$

Por outro lado, (\bar{w}_1, \bar{w}_2) é um equilíbrio de Nash para (P_a) se, e somente se, para todo (w_1, w_2) ,

$$\frac{\partial J_i}{\partial w_i}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)(w_1, w_2) = 0, \quad i = 1, 2; \quad (8.24)$$

de onde segue que

$$\alpha_i (\varphi, \theta_i)_{\omega_i \times (0,T)} + \mu_i (\bar{w}_1, w_1)_{\omega_{i,d} \times (0,T)} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (8.25)$$

Comparando as identidades (8.25) e (8.23), obtemos

$$-\alpha_i \mu_i (\phi_i, w_i)_{\omega_{i,d} \times (0,T)} + \mu_i (\bar{w}_1, w_1)_{\omega_{i,d} \times (0,T)} = 0, \quad i = 1, 2; \quad (8.26)$$

o que implica

$$\bar{w}_i = \alpha_i \phi_i \chi_{\omega_{i,d}}, \quad i = 1, 2. \quad (8.27)$$

Portanto, a condição necessária e suficiente para que (\bar{w}_1, \bar{w}_2) seja um equilíbrio de Nash para (P_a) é que existam funções (φ, s) e multiplicadores (ϕ_i, δ_i) tais que:

$$\bar{w}_i = \alpha_i \phi_i \chi_{\omega_{i,d}}, \quad i = 1, 2. \quad (8.28)$$

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - v \Delta \varphi + \nabla s = \bar{w}_1 \chi_{\omega_{1,d}} + \bar{w}_2 \chi_{\omega_{2,d}}, & \text{em } Q; \\ \partial_t \phi_i - v \Delta \phi_i + \nabla \delta_i = -\frac{1}{\mu_i} \varphi \chi_{\omega_i}, & \text{em } Q; \\ \varphi(x, T) = \mathbf{h}, \quad \phi_i(x, 0) = 0, & \text{em } \Omega; \\ \operatorname{div} \varphi = \operatorname{div} \phi_i = 0 & \text{em } Q; \quad \varphi|_{\Sigma} = \phi_i|_{\Sigma} = 0. \end{cases} \quad (8.29)$$

Isso conclui a primeira parte da prova. Agora, mostraremos que existe um único equilíbrio de Nash para o problema (P_a) . Sejam os espaços: $\mathcal{H}_i = L^2(\omega_{i,d} \times (0, T))$, $i = 1, 2$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ e definimos os operadores $L_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i, L^2(\Omega \times (0, T)))$ por:

$$L_i w_i = \theta_i \Leftrightarrow (\theta_i, r_i, w_i) \text{ satisfazem a equação (8.20).}$$

Assim, podemos escrever a solução da equação (8.19) como:

$$\varphi = L_1 w_1 + L_2 w_2 - G$$

onde G é a solução da equação

$$\begin{cases} -\partial_t G - v \Delta G + \nabla P = 0, & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} G = 0 & \text{em } Q; \\ G(x, T) = -\mathbf{h}, & \text{em } \Omega; \text{ e } G|_{\Sigma} = 0, \end{cases} \quad (8.30)$$

Com estas notações, podemos reescrever os funcionais definidos em (8.18) da seguinte maneira:

$$J_i(w_1, w_2) = \frac{\alpha_i}{2} \int_0^T \int_{\omega_i} |L_1 w_1 + L_2 w_2 - G|_2^2 dx dt + \frac{\mu_i}{2} \int_0^T \int_{\omega_{i,d}} |w_i|_2^2 dx dt. \quad (8.31)$$

Assim, (\bar{w}_1, \bar{w}_2) é um equilíbrio de Nash se, e somente se, para todo par (w_1, w_2) ,

$$\alpha_i (L_1 \bar{w}_1 + L_2 \bar{w}_2 - G, L_i w_i)_{\omega_i \times (0, T)} + \mu_i (\bar{w}_i, w_i)_{\omega_{i,d} \times (0, T)} = 0, \quad (8.32)$$

o que implica

$$\alpha_i (L_i^* (L_1 \bar{w}_1 + L_2 \bar{w}_2) \chi_{\omega_i}) + \mu_i \bar{w}_i \chi_{\omega_{i,d}} = L_i^* (G \chi_{\omega_i}), \quad i = 1, 2; \quad (8.33)$$

onde $L_i^* \in \mathcal{L}(L^2(\Omega \times (0, T)), \mathcal{H}_i)$ é o adjunto de L_i . A conclusão da prova segue similarmente a prova do resultado anterior. \blacksquare

Teorema 8.5. *Quando \mathbf{f} percorre $L^2(\omega \times (0, T))$, as funções $\mathbf{u}(T) = \mathbf{u}(x, T; \mathbf{f}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ descrevem um subconjunto denso de H .*

Antes de fazer a prova deste teorema, observamos que o equilíbrio de Nash obtido para o problema 1 pode ser caracterizado da seguinte maneira: o par $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$\alpha_i (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{i,d}, \mathbf{z}_i)_{\omega_{i,d} \times (0, T)} + \mu_i (\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{h}_i)_{\omega_i \times (0, T)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (8.34)$$

onde

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{z}_i - v \Delta \mathbf{z}_i + \nabla p_i = \mathbf{h}^{(i)} \chi_{\omega_i} & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \mathbf{z}_i = 0, & \text{em } Q; \\ \mathbf{z}_i(0) = 0, & \text{em } \Omega, \mathbf{z}_i|_{\Sigma} = 0. \end{cases} \quad (8.35)$$

Para expressar (8.34) numa forma mais conveniente, nós introduzimos o estado adjunto $\mathbf{q}_i, i = 1, 2$, por

$$\begin{cases} -\partial_t \mathbf{q}_i - v \Delta \mathbf{q}_i + \nabla r_i = \alpha_i (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{i,d}) \chi_{\omega_{i,d}} & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \mathbf{q}_i = 0, & \text{em } Q; \\ \mathbf{q}_i(T) = 0, & \text{em } \Omega, \mathbf{q}_i|_{\Sigma} = 0. \end{cases} \quad (8.36)$$

Multiplicando a equação em (8.36) por \mathbf{z}_i , e integrando convenientemente, obtemos

$$(\mathbf{q}_i, \partial_t \mathbf{z}_i - v \Delta \mathbf{z}_i) = \alpha_i (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{i,d}, \mathbf{z}_i)_{\omega_{i,d} \times (0,T)}$$

e

$$(\mathbf{q}_i, \mathbf{h}^{(i)})_{\omega_i \times (0,T)} = \alpha_i (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{i,d}, \mathbf{z}_i)_{\omega_{i,d} \times (0,T)}.$$

Substituindo a identidade acima em (8.34), obtemos

$$(\mathbf{q}_i, \mathbf{h}^{(i)})_{\omega_i \times (0,T)} + \mu_i (\mathbf{v}_i, \mathbf{h}_i)_{\omega_i \times (0,T)} = 0, \forall \mathbf{h}_i.$$

Equivalentemente, temos

$$\mathbf{v}_i = -\frac{1}{\mu_i} \mathbf{q}_i \chi_{\omega_i}, i = 1, 2.$$

Assim, se $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ é o equilíbrio de Nash obtido anteriormente, temos que

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - v \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \chi_{\omega} - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\mu_i} \mathbf{q}_i \chi_{\omega_i}, & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{em } Q; \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0, & \text{em } \Omega, \mathbf{u}|_{\Sigma} = 0. \end{cases} \quad (8.37)$$

$$\begin{cases} -\partial_t \mathbf{q}_i - v \Delta \mathbf{q}_i + \nabla r_i = \alpha_i (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{i,d}) \chi_{\omega_{i,d}} & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \mathbf{q}_i = 0, & \text{em } Q; \\ \mathbf{q}_i(T) = 0, & \text{em } \Omega, \mathbf{q}_i|_{\Sigma} = 0. \end{cases} \quad (8.38)$$

Demonstração:(Teorema 8.5) Queremos mostrar que o conjunto descrito por $\mathbf{u}(T)$ é denso em H quando \mathbf{f} percorre $L^2(\omega \times (0, T))$, onde \mathbf{u} é a solução dada por (8.37), (8.38). Seja \mathbf{h} uma função dada em H e assumamos que

$$(\mathbf{u}(T), \mathbf{h}) = 0, \forall \mathbf{f} \in L^2(\omega \times (0, T)). \quad (8.39)$$

Mostraremos que $\mathbf{h} \equiv 0$. Seja $\{\varphi, s, \phi_i, \delta_i\}$ a solução do sistema (8.17) dada pelo Lema 8.4. Tomando o produto das respectivas equações do sistema (8.17) por \mathbf{u} , \mathbf{q}_i e fazendo as integrações convenientes, obtemos

$$(\alpha_1 \phi_1 \chi_{\omega_{1,d}} + \alpha_2 \phi_2 \chi_{\omega_{2,d}}, \mathbf{u}) = -(\mathbf{h}, \mathbf{u}(T)) + (\varphi, \mathbf{f} \chi_\omega - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\mu_i} \mathbf{q}_i \chi_{\omega_i}) \quad (8.40)$$

e

$$\left(-\frac{1}{\mu_i} \varphi \chi_{\omega_i}, \mathbf{q}_i\right) = \alpha_i (\phi_i, \mathbf{u} - \mathbf{u}_{i,d})_{\omega_{i,d} \times (0,T)}. \quad (8.41)$$

Sem perda de generalidade, assumimos por um momento que $\mathbf{u}_{i,d} \equiv 0$ (depois para o caso geral podemos usar um argumento de translação). Segue da identidade (8.41) que

$$\left(\varphi, -\frac{1}{\mu_i} \mathbf{q}_i \chi_{\omega_i}\right) = (\alpha_i \phi_i \chi_{\omega_{i,d}}, \mathbf{u}). \quad (8.42)$$

O que implica

$$\left(\varphi, -\sum_{i=1}^2 \frac{1}{\mu_i} \mathbf{q}_i \chi_{\omega_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i \phi_i \chi_{\omega_{i,d}}, \mathbf{u}\right). \quad (8.43)$$

Comparando as identidades (8.40) e (8.43), obtemos

$$(\mathbf{h}, \mathbf{u}(T)) = (\varphi, \mathbf{f} \chi_\omega), \forall \mathbf{f} \in L^2(\omega \times (0, T)). \quad (8.44)$$

Da identidade anterior e da condição (8.39), obtemos

$$\varphi \equiv 0, \text{ em } \omega \times (0, T). \quad (8.45)$$

Segue de (8.45) e da segunda equação do sistema (8.17), que $\phi_i \equiv 0$ em todo Q . Substituindo esse resultado na primeira equação do sistema (8.17), obtemos o seguinte problema de Stokes

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - v \Delta \varphi + \nabla s = 0, & \text{em } Q; \\ \operatorname{div} \varphi = 0 & \text{em } Q; \\ \varphi(x, T) = \mathbf{h}, & \text{em } \Omega; \text{ e } \varphi|_\Sigma = 0. \end{cases} \quad (8.46)$$

Segue de (8.45), de (8.46) e do Teorema de Continuação Única do Problema de Stokes que

$$\varphi \equiv 0 \text{ em } Q.$$

Portanto, $\mathbf{h} \equiv 0$. Como queríamos demonstrar. ■

CAPÍTULO 9

Considerações finais

Neste trabalho, apresentamos resultados sobre equilíbrios de Nash e Pareto para dois problemas de controle com multiobjetivos, usando como ferramenta principal o formalismo de Dubovitskii e Milyutin; além disso, apresentamos uma estratégia do tipo Stackelberg - Nash para controle multiobjetivo das equações de Stokes de evolução. Neste último, usamos alguns resultados da análise funcional e da teoria das equações de Stokes.

O primeiro problema estudado foi um sistema distribuído governado por um modelo de solidificação. Iniciamos nosso estudo abordando o caso mono-objetivo. Neste caso, introduzimos, na equação, um controle definido numa região aberta do domínio e o associamos a um funcional cuja meta era obter o estado real perto (no sentido de L^2) de um estado dado, sem um custo muito alto para o controle. Concluímos o caso mono-objetivo apresentando um resultado de existência de solução ótima e as condições necessárias de otimalidade. Devemos ressaltar que estes resultados foram originalmente apresentados por Hoffman e Jiang, em [23], utilizando as técnicas da análise clássica. Os apresentamos novamente para exemplificar a simplicidade da técnica adotada e a vantagem obtida. De fato, podemos verificar facilmente que em nenhum momento foi requerido a unicidade da solução da equação de estado. Por outro lado, esses resultados foram usados para definir o equilíbrio de Nash nos problemas com mais de um objetivo.

No caso multiobjetivo, Introduzimos, por simplicidade, dois controles distribuídos na equação em duas regiões abertas disjuntas do domínio e os associamos a dois funcionais idênticos ao definido anteriormente. O desenvolvimento do estudo foi feito no sentido de relacionar o problema de controle dois-objetivos com um jogo de dois-jogadores. Dessa forma, conseguimos caracterizar o equilíbrio de Nash e o ótimo de Pareto, e mostramos as condições necessárias para existência desses pontos. A dificuldade em mostrar a suficiência se deveu exclusivamente ao fato de não conseguirmos mostrar que o conjunto das soluções admissíveis é convexo, haja vista que os funcionais objetivos os são. Também não conseguimos mostrar que há qualquer relação entre esses equilíbrios. Olhando para as definições apresentadas, observamos que, no máximo, poderíamos tentar mostrar que equilíbrio de Nash implica ótimo Pareto. No entanto, nos parece que isto só pode ocorrer em casos muito especiais. No nosso caso, é impossível tentar fazer tal prova sem uma caracterização suficiente.

O segundo problema estudado foi um sistema distribuído com controles atuando sobre as equações de Navier - Stokes. Da mesma forma que no problema anterior, Iniciamos nosso estudo abordando o caso mono-objetivo. Neste caso, apresentamos resultados de existência de solução ótima local e as condições necessárias de otimalidade local procurando as funções de estado tanto no espaço das soluções fracas das equações de Navier - Stokes, como no espaço das soluções fortes. Em ambos os casos, consideramos o controle restrito a um subconjunto convexo, fechado, limitado com interior não vazio. Devemos ressaltar, no entanto, que os resultados apresentados poderiam ser obtidos sem essa restrição ao controle, o que nos remete ao seguinte questionamento: Qual foi a finalidade de se introduzir tal hipótese? A resposta vem ao se estudar o caso multiobjetivo. Acontece que para mostrar a existência de possíveis equilíbrios de Nash, tivemos que mostrar a existência de solução para um sistema de otimalidade formado pela equação de Navier - Stokes acoplada com a equação adjunta, mais uma desigualdade integral que relaciona os controles com os estados adjuntos. Como pode ser visto, a hipótese em questão teve papel indispensável na prova dos resultados de existência de solução para tal sistema. Apesar disso, ao considerarmos a função de estado no espaço das soluções fracas, vimos que só foi possível mostrar o resultado no caso 2-dimensional. Este resultado foi conseguido usando uma técnica de ponto fixo aplicado sobre um problema aproximado, mais um processo de passagem ao limite. No caso 3-dimensional a dificuldade apareceu somente no processo de passagem ao limite, pois, para

isso, necessitamos de estimativas a priori para o estado aproximado \mathbf{u}_m e para os estados adjuntos $\mathbf{q}_m^{(r)}$. Graças a hipótese citada, obtemos uma estimativa para \mathbf{u}_m do tipo $L^2(0, T; V)$ o que, no caso 2-dimensional, foi suficiente para obtermos uma estimativa do mesmo tipo para $\mathbf{q}_m^{(r)}$ e fazer a passagem ao limite. No entanto, não tivemos a mesma sorte no caso 3-dimensional. Neste caso, para obter tal estimativa para $\mathbf{q}_m^{(r)}$, necessitaríamos de alguma hipótese que nos permitisse uma estimativa a priori para \mathbf{u}_m pelo menos do tipo $L^4(0, T; V)$. Essa exigência é necessária para que se consiga controlar os termos extras que aparecem no segundo membro da desigualdade de energia, vindos da derivada do termo não linear. Observamos também que o fato de termos aplicado o Teorema de Ponto Fixo de Schauder sobre um problema aproximado, nos permitiu o uso da unicidade da solução do sistema e.d.o's associado para definir o operador “do ponto fixo”. Com isso, a não unicidade da solução da equação de Navier - Stokes 3-dimensional não foi uma barreira para que tivéssemos os resultados pretendidos.

O terceiro problema estudado foi um sistema distribuído sobre as equações de Stokes, onde foi introduzido um controle $\mathbf{f}(x, t)$, atuando na equação numa região ω , mais dois controles $\mathbf{v}^{(1)}$ e $\mathbf{v}^{(2)}$, com atuações diferentes da de \mathbf{f} , atuando localmente em ω_1 e ω_2 , respectivamente. Vimos que o objetivo sobre $\mathbf{f}(x, t)$ era o de conduzir o estado \mathbf{u} do sistema, num tempo T , para perto (no sentido de $L^2(\Omega)$) de um estado ideal $\mathbf{u}_T(x)$, sem um custo muito alto, e os objetivos sobre os controles locais era o de não deixar que o estado do sistema se movimentasse para longe dos estados dados $\mathbf{u}_{1,d}$ e $\mathbf{u}_{2,d}$, nas regiões de interesse $\omega_{1,d}$ e $\omega_{2,d}$. Observe que a priori não foi exigida qualquer restrição para as regiões $\omega_{1,d}$ e $\omega_{2,d}$, sendo que elas poderiam até mesmo assumir o domínio todo Ω . Isso poderia ser feito desde que fosse introduzido uma função suave positiva, no termo principal do funcional, que assumisse o valor 1 nas regiões onde estão definidos os controles locais. A vantagem que tivemos por não fazer dessa maneira, foi que, ao mostrar o critério para a existência e unicidade do equilíbrio de Nash, nós usamos uma hipótese relativamente mais simples do que a usada por Diaz e Lions ao mostrarem esse mesmo resultado para um sistema distribuído sobre uma equação de Cauchy abstrata (veja [10]).

De modo geral, é de nosso interesse aprofundar os estudos sobre as possíveis estratégias para abordar problemas de controle com multiobjetivos, buscando apresentar caracterizações suficientes para os equilíbrios, fazer um tratamento numérico (sempre que possível) e apri-

morar nossas técnicas de tal forma a dar continuidade à pesquisa.

APÊNDICE A

Resultados Auxiliares

Neste apêndice, apresentaremos alguns resultados clássicos da análise funcional e da teoria de equações diferenciais parciais.

Lema A.1. *Seja Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n com fronteira suficientemente suave ($\partial\Omega$ de classe C^m). Se k, m e p são inteiros e $p \geq 1$, então as seguintes imersões são contínuas:*

$$\begin{aligned} W_p^k &\rightarrow L^{p^*}(\Omega), \text{ para } kp < n \text{ e } p^* = \frac{np}{(n-kp)} \\ W_p^k &\rightarrow C^m(\bar{\Omega}), \text{ para } 0 \leq m < k - \frac{n}{p}. \end{aligned}$$

Lema A.2. *Seja Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n com fronteira suficientemente suave ($\partial\Omega$ de classe C^m) e $r \geq 1, p < \infty$. Se j, m são inteiros tais que $0 \leq j < m$ e*

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{r} + \frac{j}{n} - \frac{m}{n},$$

então a seguinte imersão é compacta:

$$W_r^m \rightarrow W_p^j.$$

Observação A.3. *As imersões anteriores são também válidas para $W_{0,q}^p$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ arbitrário.*

O próximo lema pode ser encontrado em [45], cap.3, pp.270.

Lema A.4. *Sejam X_0 , X e X_1 três espaços de Banach tais que $X_0 \rightarrow X \rightarrow X_1$ com imersões contínuas e $X_0 \rightarrow X$ compacta. Então, para cada $\eta > 0$, existe alguma constante C_η dependendo de η e dos espaços X_0 , X , X_1 tal que:*

$$\|\mathbf{v}\|_X \leq \eta \|\mathbf{v}\|_{X_0} + C_\eta \|\mathbf{v}\|_{X_1}, \forall \mathbf{v} \in X_0.$$

O seguinte, é um resultado de compacidade que relaciona distintos espaços de funções na variável temporal $t \in (0, T)$ com valores num espaço de Banach. Essa versão foi apresentada por J. Simon em [44].

Lema A.5. *Sejam X , B e Y espaços de Banach tais que $X \rightarrow B \rightarrow Y$ com imersões contínuas e $X \rightarrow B$ compacta. Têm-se as seguintes imersões compactas:*

$$(i) L^q(0, T; X) \cap \left\{ \phi; \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^1(0, T; Y) \right\} \rightarrow L^q(0, T; B) \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

$$(ii) L^\infty(0, T; X) \cap \left\{ \phi; \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^r(0, T; Y) \right\} \rightarrow C([0, T]; B) \quad 1 < r \leq \infty.$$

Lema A.6. *Sejam X , B e Y espaço de Banach reflexivos tais que $X \rightarrow B \rightarrow Y$ com imersões contínuas e $X \rightarrow B$ compacta. Então, a seguinte imersão é compacta:*

$$L^\infty(0, T; X) \cap \{u; D_t u \in L^r(0, T; Y)\} \rightarrow C(0, T; B), \quad 1 < r \leq \infty.$$

O proximo resultado é um caso particular do Lema 3.3 em Ladyzenskaja([27], pp.80) com $l = 1$ e $r = s = 0$.

Lema A.7. *Seja Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente suave (com a propriedade do cone). Então para qualquer função $u \in W_q^{2,1}(Q)$ valem as seguintes desigualdades:*

$$\mathbf{a)} \quad \|u\|_{p,Q} \leq M \|u\|_{q,Q}^{(2)} \quad \text{com } p \geq q \text{ e } 2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)(n+2) \geq 0$$

$$\mathbf{b)} \quad |u|_Q(\tau) \leq M \|u\|_{q,Q}^{(2)} \quad \text{com } q > \frac{n+2}{2} \text{ e } 0 \leq \tau = 2 - \left(\frac{n+2}{q}\right)$$

onde M é uma constante que depende de p , q , n e Ω .

Observação A.8. *Para $q > n + 2$ no lema anterior, temos que as derivadas da função $u \in W_q^{2,1}(Q)$ com relação a x_i também satisfazem uma condição de Hölder em x e t e a desigualdade **b**).*

Em particular, estamos interessados nos casos $n = 2, 3$ e vamos reescrever o Lema A.7 como segue:

Lema A.9. *Seja Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente suave (com a propriedade do cone). Então a imersão $W_q^{2,1}(Q) \rightarrow L^p(Q)$ é contínua e existe uma constante M que depende de p, q e Ω tal que*

$$\|u\|_{p,Q} \leq M \|u\|_{q,Q}^{(2)}$$

com p dado, para $n = 2$, por

$$p = \begin{cases} \infty & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{1}{2} < 0 \\ \forall p \geq 1 & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{1}{2} = 0 \\ (\frac{1}{q} - \frac{1}{2})^{-1} & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

e com p dado, para $n = 3$, por

$$p = \begin{cases} \infty & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{5} < 0 \\ \forall p \geq 1 & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{5} = 0 \\ (\frac{1}{q} - \frac{2}{5})^{-1} & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{5} > 0 \end{cases}$$

O próximo resultado é o conhecido Teorema de Arzela-Ascoli e pode ser encontrado em Friedman([11]; pp.112, Teo.3.6.4).

Lema A.10. *Seja \mathcal{K} uma família de funções equicontínuas e uniformemente limitadas definidas num espaço métrico X . Então, qualquer sequência $\{u_n\}$ de funções de \mathcal{K} tem uma subsequência que converge uniformemente em X para uma função contínua.*

Agora, enunciaremos o Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder que pode ser encontrado em Friedman([12]; pp.189, Teo.3)

Lema A.11. *Sejam X um espaço de Banach e $T : [a, b] \times X \rightarrow X$ uma transformação tal que $y = T(\varepsilon, x)$ com $x, y \in X$ e $\varepsilon \in [a, b]$. Suponha que:*

- a)** $T(\varepsilon, x)$ está definida para todo $x \in X$ e para todo $\varepsilon \in [a, b]$.
- b)** Para todo ε fixo, $T(\varepsilon, x)$ é contínua em X .
- c)** Para todo $x \in A$, $A \subset X$ limitado, $T(\varepsilon, x)$ é uniformemente contínua em ε .
- d)** Para todo ε fixo, $T(\varepsilon, x)$ é uma transformação compacta.
- e)** Existe uma constante (finita) M tal que toda possível solução x de $x = T(\varepsilon, x)$ satisfaz

$$\|x\|_X \leq M.$$

f) A equação $x = T(a, x)$ têm uma única solução em X .

Então, existe uma única solução para a equação $x = T(b, x)$.

O seguinte resultado é clássico da teoria matemática dos fluidos incompressíveis para o problema de Stokes.

Teorema A.12. Dados $\mathbf{f} \in L^2(0, T; V')$ e $\mathbf{u}_0 \in H$ existe uma única solução \mathbf{u} satisfazendo:

(i) $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$, $\partial_t \mathbf{u} \in L^2(0, T; V')$

(ii) $\partial_t \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}$ em $L^2(0, T; V')$; $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$. Além disso, $\mathbf{u} \in C(0, T; H)$.

(veja Temam [45]; pp.254, Teorema 1.1)

O próximo lema é um caso particular do Teorema geral de Interpolações de Lions - Magenes [34] e pode ser encontrado em [45]; pp.260, Lema 1.2.

Lema A.13. Sejam V , H e V' três espaços de Hilbert, tais que V é denso em H e $V \rightarrow H \equiv H' \rightarrow V'$ com imersões contínuas (V' e H' são os duais de V e H , respectivamente).

Se a função \mathbf{u} pertence a $L^2(0, T; V)$ e sua derivada $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ pertence a $L^2(0, T; V')$, então \mathbf{u} é quase sempre igual a uma função contínua de $[0, T]$ em H . Além disso, temos a seguinte desigualdade, que ocorre no sentido da distribuição escalar sobre $(0, T)$:

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{u}|^2 = 2 \langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle.$$

Lema A.14. Sob as hipóteses do Teorema A.12, existe uma distribuição p em Q tal que a função \mathbf{u} definida no Teorema A.12 e p satisfazem o sistema de Stokes

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}(x, t), \text{ em } Q; \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \text{ em } Q; \\ \mathbf{v} = 0, \text{ sobre } \Sigma; \\ \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0, \text{ em } \Omega. \end{array} \right.$$

no sentido das distribuições (veja [45]; pp.266, Proposição 1.1).

APÊNDICE B

Alguns Conceitos de Teoria dos Jogos

Os conceitos que apresentaremos a seguir podem ser encontrados em [1]. Por simplicidade, nós descreveremos o Jogo com 2-jogadores na forma normal em termos dos seguintes itens:

- (i) $N = \{1, 2\}$ conjunto de jogadores.
- (ii) X, Y conjuntos de estratégias dos jogadores 1 e 2, respectivamente.
- (iii) $\mathcal{U} \subset X \times Y$ subconjunto de pares factíveis de estratégias.
- (iv) Um operador biperda $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa a cada par de estratégias $\{x, y\} \in \mathcal{U}$ a biperda $\{F_1(x, y), F_2(x, y)\}$, onde $F_1(x, y)$ é a perda do primeiro jogador e $F_2(x, y)$ é a perda do segundo jogador.

Dizemos que um par de estratégias $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ é **individualmente estável**, se nem o jogador 1 nem o jogador 2 tem qualquer incentivo para modificar sua própria estratégia com uma ação unilateral, mas somente com os outros jogadores modificando suas escolhas. Isto significa que

$$F_1(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{x \in X} F_1(x, \bar{y}) \quad \text{e} \quad F_2(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{y \in Y} F_2(\bar{x}, y).$$

Neste caso, dizemos que $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ é um **equilíbrio não-cooperativo**. Dizemos que é **coletivamente instável**, se ambos jogadores podem achar um par de estratégias $\{x, y\} \in \mathcal{U}$ tal que

$$F_1(x, y) < F_1(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{e} \quad F_2(x, y) < F_2(\bar{x}, \bar{y}).$$

Dizemos que $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ é coletivamente estável se não existe um par de estratégias $\{x, y\} \in \mathcal{U}$ tal que

$$F_1(x, y) \leq F_1(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{e} \quad F_2(x, y) \leq F_2(\bar{x}, \bar{y}).$$

e pelo menos uma das desigualdades é estrita.

Os pares individualmente estáveis de estratégias são chamados **equilíbrios de Nash** e os pares coletivamente estáveis são chamados **ótimos de Pareto**. A situação ideal ocorre quando existe um único par de estratégias $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ que é individualmente e coletivamente estável, isto é, um equilíbrio não-cooperativo que é ótimo Pareto. Infelizmente esta situação é muito excepcional.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Aubin, J. P., *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, North-Holland Publishing Company, 1979.
- [2] Alexeév, V., Fomine, S., Tikomirov, V. *Commande Optimale*. Moscou, Mir, 1982.
- [3] Brandão, A. J. V., Rojas-Medar, M. A., Optimal control for the stationary Navier-Stokes equations: Dubovitskii- Milyutin approach, *Anais da 1a. Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle*, EESC/USP- S-o Carlos, ABCM, SBMAC, 217-220, 2001.
- [4] Brezis, H., *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*. Paris, Masson, (Collection *Mathématiques appliqués pour la maitrise*, 1987.
- [5] Caginalp, G., An Analysis of a Phase Field Model of a Free Boundary, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 92, pp.205-245, 1986.
- [6] Censor, Y., Pareto Optimality in Multiobjective Problems, *Applied Mathematics and Optimization* 4, pp.41-59, 1977.
- [7] De Aguiar, R., *Contribuições em controle ótimo distribuido via formalismo de Dubovitskii-Milyutin*. Aspectos teóricos, numéricos e aplicados. Tese de Doutorado, DMA- IMECC- UNICAMP, 2002.

- [8] De Aguiar, R., Ortega, J., Rojas-Medar, M. D., Rojas-Medar, M. A., Optimal control problem for the generalized bioconvective flow, *Submetido a publicación*, 2004.
- [9] Dautray, R., Diaz, J. I., *Agir Pour Conserver L'environnement?: Réflexions Générales et Analyse Mathématique de Deux Problèmes Concrets*, Apuntes de la Escuela Jacques-Louis Lions Hispano - Francesa Sobre Simulación Numérica en Física y Ingeniería, pp.77-118, Cádiz/ES, 2004.
- [10] Diaz, J. I., Lions, J. L., On the Approximate Controllability of Stalckelberg - Nash Strategies, In, *Ocean Circulation and Pollution Control. A mathematical and Numerical Inquiry*, (J.I.Dias ed.). Lecture Notes, Proceedings of the Diderot Videoconference Amsterdam-Madrid-Venice, Lecture Notes, Springer Verlag, pp.17-28, 2003.
- [11] Friedman, A., *Foundations of Modern Analysis*, Hold, Rinehart and Winston, INC, 1970.
- [12] Friedman, A., *Partial Differential Equation of Parabolic Type*, Prentice-Hall. 1964.
- [13] Fursikov, A., On Some Control Problems and Results Concerning the Unique Solvability of a Mixed Boundary Value Problems for the Three-Dimensional Navier-Stokes and Euler Systems, *Soviet Math. Dokl.*, 21, pp.889-893, 1980.
- [14] Fursikov, A., Optimal Control Problems for Navier-Stokes System with Distributed Control Function, *Optimal Control of Viscous Flow VI*, SIAM, Philadelphia, pp.109-150., 1998.
- [15] Fursikov, A., Gunzburger, M.D., Inhomogeneous Boundary Value Problems for the Three-Dimensional Evolutionary Navier-Stokes Equations, *J. Math. Fluid Mech.* 4, pp.45-75., 2002.
- [16] Gayte, I., Guillén-González, F., Rojas-Medar, M.A., El formalismo de Dubovitskii-Milyutin aplicado a un problema de control óptimo con restricción la ecuación del calor retrógrada con control distribuido, *Pre-printer*, Universidad de Sevilla, 2002.
- [17] Gengsheng Wang, Optimal Controls of 3-Dimensional Navier-Stokes Equations With State Constraints, *SIAM J. Control Optim.* 41, No. 2, pp. 583-606, 2002.

- [18] Girsanov, I. V., Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems. New York, Springer, 1972. (Lectures notes in economics and mathematical systems, 67).
- [19] Guiles, J., Convex Analysis with applications in the differentiation of Convex Functions, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1982.
- [20] Guillén-González, F., Aplicacion del Formalismo de Dubovskii-Milyutin para Obtener Sistemas de Optimalidad en Problemas de Control Óptimo com Ecuaciones En Derivadas Parciales, Conferencia en el CNMAC, 2003.
- [21] Guillén González, F., Rojas-Medar, M. A., Lopes, F. P. M., Gayte, I., Optimal Control and PDE, preprint publicado em Ata do Congresso: Workshop Sobre “Avances recientes en el analisis y Control de ecuaciones diferenciales no lineales”, Córdoba, Fevereiro de 2004.
- [22] Hale, J., Ordinary Differential Equations, Krieger, 1980.
- [23] Hoffman, K.H., Jiang, L., Optimal Control of a Phase Field Model for Solidification, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 13, pp.11-27, 1992.
- [24] Kotarski, W., Characterization of Pareto Optimal Points in Problems with Multi-Equality Constraints, Optimization 20, pp.93-106, 1989.
- [25] Kotarski, W., Furter Generalization of the Dubovitskii-Milyutin Theorem, J. of Optimization Theory and Applications; 54, N.3, 1987.
- [26] Kotarski, W., On Some Specification of the Dubovitskii-Milyutin Theorem for Pareto Optimal Problems; Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, Vol. 14, N. 3, pp. 287-291, 1990.
- [27] Ladyženskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Ural' Ceva, N. N., Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Vol.23, American Mathematical Society, 1968.
- [28] Lasiecka, I., Conical Approximations of Sets in Optimization, Control and Cybernetics, Vol. 4, N. 3-4, 1975.

- [29] Lasiecka, I., Generalization of the Dubovitskii- Milyutin Optimality Conditions, J. of Optimization Theory and Applications; Vol. 24, N. 3, 1978.
- [30] Lions, J. L., Control of Distributed Singular Systems, Gautier-Villars, 1985.
- [31] Lions, J. L., Contrôle de Pareto de Systèmes Distribués. Le cas stationaire. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 302, Série I, n^o 6, 1986.
- [32] Lions, J. L., Contrôle de Pareto de Systèmes Distribués. Le cas d'évolution. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 302, Série I, n^o 11, 1986.
- [33] Lions, J. L., Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer, 1970.
- [34] Lions, J. L., Magenes, E., Problèmes aux Limites Non Homogeneous et Applications, Paris, 1968.
- [35] Lions, J. L., Some Remarks on Stalckelberg's Optimization Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 4, pp. 477-487, 1994.
- [36] Magalhães, P. M. D., Brandão, A. J. V., Rojas-Medar, M. A., Fernández-Cara, E., Optimal control for the FitzHugh-Nagumo equations, in preparation.
- [37] Nash, J. F., Noncooperative games, Annals of Mathematics, 54, pp. 286-295, 1951.
- [38] Pareto, V., Cours d'économie politique, Rouge, Laussane, Switzerland, 1896.
- [39] Ponstein, J., Seven Kinds of Convexity, SIAM REVIEW, vol.9, 1, pp.115-119, 1967.
- [40] Ramos, A. M., Glowinski, R., Periaux, J., Nash Equilibria for the Multiobjective Control of Linear Partial Differential Equations, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 112, pp. 457-498, 2002.
- [41] Ramos, A. M., Glowinski, R., Periaux, J., Pointwise Control of the Burgers Equation and Related Nash Equilibria Problems: A Computational Approach, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 112, pp. 499-516, 2002.
- [42] Rojas-Medar, M.A., Vectorial optimization problems, Conferencia en el CNMAC, 2003.

- [43] Saut, A. M., Scheurer, B., Unique Continuation for Some Evolution Equations, *J. Differential Equations*, 66, 118-139, 1987.
- [44] Simon, J., Compact sets in the space $L^p(O, T; B)$, *Annali Mat. Pura Appl., Serie IV*, v.146 (1987), 65–96.
- [45] Temam, R., *Navier-Stokes equations*, Noth-Holland, Amsterdam, Rev. Edit. 1979.
- [46] Vaz, C., L.,D., *Análise de um Modelo Matemático de Condução-Convecção do Tipo Campo de Fases Para Solidificação*, Tese de Doutorado, V477a, IMECC-UNICAMP, 2000.
- [47] Von Stalckelberg, H., *Marktform und Gleichgewicht*, Springer, Berlin, Germany, 1934.
- [48] Walczak, S., Some Properties of Cones in Normed Spaces and their Application to Investigating Extremal Problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 42, N. 4, pp. 561-582, 1984.