Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Análise Matemática de Problemas de Solidificação com Movimentação do Material

Welington Vieira Assunção

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Boldrini

†Este trabalho contou com apoio financeiro de Capes & CNPq

Análise Matemática de Problemas de Solidificação com Movimentação do Material

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Welington Vieira Assunção** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 03 de Maio de 2011.

Jose Luiz Boldrini

Prof. Dr. José Luiz Boldrini
Orientador

Banca Examinadora:
Prof. Dr. José Luiz Boldrini
Prof. Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros
Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark
Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro
Profa. Dra. Gabriela Del Valle Planas

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Assunção, Welington Vieira
As79a Análise matemática de problemas de solidificação com movimentação do material/Welington Vieira Assunção-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : José Luiz Boldrini.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Equações diferenciais parciais. 2.Mecânica dos fluídos. 3.Solidificação. 4.Elasticidade. I. Boldrini, José Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Mathematical analysis of solidification problems with displacement of the material

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Partial differential equations. 2.Fluid mechanics. 3.Solidification. 4.Elasticity.

Área de concentração: Análise

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. José Luiz Boldrini (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros (UFRJ)
Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark (UFF)
Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro (IMECC – UNICAMP)
Profa. Dra. Gabriela Del Valle Planas (IMECC - UNICAMP)

Data da defesa: 03/05/2011

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 03 de maio de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof(a). Dr(a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS

Prof(a). Dr(a). MARCELO DA SILVA MONTENEGRO

Prof(a). Dr(a). LUIZ ADAUTO DA JUSTA MEDEIROS

Prof(a). Dr(a). HAROLDO RODRIGUES CLARK

Resumo

Neste trabalho analisamos dois sistemas de equações diferenciais parciais não lineares que modelam mudanças de fases em materiais viscoelásticos sujeitos à efeitos térmicos. Tais sistemas apresentam uma equação de balanço de energia interna, responsável pela evolução da temperatura, uma equação de evolução para a variável campo de fases, cujos valores deteREminam a fase do material, e uma equação do balanço de momento que determina os deslocamentos.

Nosso primeiro modelo está relacionado com o de Rocca e Rossi no artigo "Analysis of a nonlinear degenerating PDE system for phase transitions in thermoviscoelastic materials", J. Differential Equations 245 (2008), pp. 3327-3375. Elas provaram a existência de soluções locais no tempo com valores inteiramente contidos na zona de mescla entre sólido e líquido (a chamada "mushy zone"). Com a inclusão de dissipação e calor latente constante, no nosso primeiro modelo provamos a existência global no tempo de soluções que podem tocar as chamadas barreiras de potencial, correspondendo a estados puramente líquido ou sólido. Analisamos também o caso de materiais isocóricos, obtendo resultados semelhantes ao do modelo anterior.

Para provar a existência de soluções, no primeiro modelo primeiramente obtemos soluções de certos problemas regularizados usando argumentos de pontos fixos; em seguida, por métodos de compacidade, passamos ao limite para obtermos soluções do problema original. Na análise do segundo modelo, além da regularização, usamos uma variante do método de compressibilidade artificial.

Abstract

In this work we are interested in analyzing two systems of nonlinear partial differential equations modeling phase changes in viscoelastic materials subject to thermal effects. The systems features an internal energy balance equation, governing the evolution of temperature, an evolution equation for the phase field, whose values determine the state of material, and a moment balance equation governing the displacement.

Our first model is related to the one in Rocca and Rossi's paper "Analysis of a nonlinear degenerating PDE system for phase transitions in thermoviscoelastic materials", J. Differential Equations 245 (2008), pp. 3327-3375). In that paper, they proof the existence of local solutions in time with values contained entirely within the region of mixed beetwen solid and liquid (called "mushy zone"). With the inclusion of dissipation and constant latent heat, in our first model we proof the existence of global solutions in time that may touch the potential barriers, which correspond to pure solid or pure liquid states. We also analyzed the case of isochoric materials, obtaining similar results to the previous model.

To proof the existence of solutions, in the first model we firstly obtain solutions of certain regularized problems using fixed point arguments; next, by compactness methods, we pass to the limit to obtain solutions of the original problem. In the analysis of the second model, in addition to regularization, we use a variant of artificial compressible method.

Agradecimentos

Após quatros anos de estudos, eis que chega ao fim mais uma etapa muito importante da minha vida, que é a conclusão do doutorado. De uma forma ou de outra, muitas pessoas contribuíram para que esse trabalho fosse concluído. O desejo maior é de citar a todos, porém no meu caso é uma tarefa nada trivial. Sendo assim, aos que não forem citados aqui, deixo o meu profundo agradecimento por terem contribuído de alguma maneira para a realização deste trabalho.

Primeiramente, gostaria de agradeçer à Deus, por sempre estar em minha vida, guiando-me no caminho certo. Não chegaria aqui sem ele.

Sou muito grato à minha família pelo amor e apoio todos esses anos: meus irmãos Junior, Francis, Dayana e Israel, minha tia Cássia e seu marido Ricardo, meus primos Vitor e Vinícius, meus tios Luis Carlos, Raimundo e José, minha avó Júlia, minha cunhada Márcia, meu pai Jessé Barbosa e principalmente minha mãe Maria de Fátima, pelo constante apoio por todos esses anos e aturar meu mau humor nos momentos difíceis.

Sou imensamente agradecido ao meu orientador, prof. Boldrini, por sua paciência e orientação extremamente competente não só de um grande profissional, mas também de uma grande pessoa com quem tive o privilégio de trabalhar durante esses anos.

Agradeço às professoras Simone e Suzi, pelo apoio e incentivo desde os tempos de iniciação científica na Unesp de Rio Claro.

Aos moradores e ex-moradores da rep. Hostel: João Paulo, Mateus, Alacyr, Mayk, Gilberlândio, Mazílio, Maurício, Lino, Luis Roberto, Anderson, Diogo, Fábio, Rodrigo Goiano, Marcos Mineiro, Nelson e Luciano.

Aos amigos: Durval, Luís Miranda, Andrea, Ricardo Miranda e sua esposa Juliana, Thiago Ferraiol, Beatriz Motta, Adilson, Olivaine, Fábio Bertoloto, Vagner, Raphael Holtz, os irmãos Lucas e Ricardo Freitas, Lucas Catão, Marquinhos, Elen, Vitão, Adriano, Angelo, Fernando, Ivan, Eduardo, Márcio Gaúcho, Anne, Rodrigo Digão, Thaís Monis, Felix, Grasiele, Ademir, Fábio Natali, Rinaldo, Thiago Castilho, Lucas Felipe, Luiz Alexandre, Eduardo Duzão, dentre outros. Agradeço à todos por contribuirem de alguma forma para a realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, por aceitarem o convite, pelas sugestões e comentários que contribuíram para melhorar o presente trabalho.

À todos os funcionários do IMECC, por todos os serviços prestados.

E finalmente, agradeço à Capes e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Índice

Introdução

Neste trabalho, estamos interessados em estudar modelos de equações diferenciais parciais que descrevem aspectos importantes em fenômenos de transições de fases em materiais viscoelásticos sujeitos a efeitos térmicos. Fenômenos de transição de fases surgem em uma variedade de situações relevantes do mundo real, como por exemplo solidificação e fusão em sistemas sólido-líquido, evaporação, moldagem de metais, combustão, desenvolvimento de cristais, transições de fases em polímeros etc. O interesse prático nestes tipos de fenômenos é evidente e tem profunda influência no desenvolvimento tecnológico de nossa sociedade, sendo fundamental, por exemplo, no aprimoramento de técnicas de produção de novos materiais. O estudo desses fenômenos em geral é uma tarefa não-trivial e a análise matemática rigorosa dos modelos utilizados é importante na fundamentação de simulações numéricas.

Nesse sentido, vamos estudar dois modelos relacionados com situações descritas acima. O primeiro modelo considerado neste trabalho é o seguinte:

$$\theta_t + l\chi_t - \Delta\theta = g \qquad \text{em } \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$\chi_t - \Delta\chi + W'(\chi) \ni \theta - \theta_c + \frac{|\eta(u)|^2}{2} \qquad \text{em } \Omega \times (0,T), \tag{2}$$

$$u_{tt} - \operatorname{div}((1-\chi)\eta(u) + \chi\eta(u_t)) + \nu(-\Delta)^2 u_t = f \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \tag{3}$$

que descreve um fenômeno de transição de fase para um sistema viscoelástico de duas fases, ocupando um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, 3$, durante um intervalo de tempo $[0,T]$.

O segundo modelo considerado é o seguinte:

$$\theta_t + l\chi_t - \Delta\theta = g \qquad \text{em } \Omega \times (0,T), \quad (4)$$

$$\chi_t - \Delta\chi + W'(\chi) \ni \theta - \theta_c + \frac{|\eta(u)|^2}{2} \qquad \text{em } \Omega \times (0,T), \quad (5)$$

$$u_{tt} - \operatorname{div}((1-\chi)\eta(u) + \chi\eta(u_t)) + \nu(-\Delta)^2 u_t + \nabla p = f \qquad \text{em } \Omega \times (0,T), \quad (6)$$

$$\operatorname{div}(u_t) = 0 \qquad \text{em } \Omega \times (0,T), \quad (7)$$

que leva em conta também os efeitos da pressão no material, neste caso considerando pressão em todas as fases do sistema. Materiais com este tipo de comportamento são conhecidos como *isocóricos*, que tem a propriedade de preservar o volume durante o processo de transição.

Nos dois modelos, as variáveis de estado são a temperatura *absoluta* θ do sistema (θ_c denotando a temperatura de equilíbrio), e o parâmetro de ordem χ, denotando a proporção local de uma das duas fases (por exemplo, em um processo de solidificação-fusão temos $\chi = 0$ na fase sólida e $\chi = 1$ na fase líquida). A função u denota o vetor de pequenos deslocamentos, e no caso do segundo modelo, p denota a pressão.

As condições iniciais e de fronteira dos problemas acima serão especificadas nos capítulos posteriores.

Para maiores detalhes de deduções das equações desses tipos de modelos, recomendamos Frémond [14], Rocca-Rossi [28] ou Stefanelli [32]. Sem muitos detalhes, aqui vamos apenas salientar algumas características do primeiro modelo, o segundo segue uma abordagem semelhante. A primeira equação é a equação de balanço de energia interna, onde g é uma fonte de calor conhecida. Do mesmo modo, a terceira equação é a equação de balanço clássico para movimentos macroscópicos (também conhecida como relação estresse-tensão (*stress-strain relation*)), que também descreve as acelerações. Como usual em teoria de elasticidade, $\eta(u)$ denota o tensor de tensão (*strain tensor*) simétrico linearizado, que no caso tridimensional (espacial) é dado por $\eta_{i,j}(u) := (u_{i,j} + u_{j,i})/2,\ i,j = 1,2,3$, enquanto o símbolo "div"denota tanto o operador divergente vetorial quanto o escalar. Além disso, o termo $(-\Delta)^2$ denota o biharmônico e f, do lado direito, pode ser interpretado como um volume de força exterior aplicado no corpo. Seguindo então a perspectiva de Frémond, a primeira e a terceira equações são acopladas com a segunda equação, a equação de movimentos microscópicos para a variável de fase χ (veja Frémond [14], pg. 5), na qual, dentro desta teoria, é obtido de uma escolha particular do funcional de energia livre e do pseudo-potencial de dissipação. Na segunda equação, $|\eta(u)|^2$ é uma abreviação para o "colon product" $\eta(u) : \eta(u)$, enquanto o potencial W é dado pela soma de uma função suave não convexa $\widehat{\gamma}$ e de uma função convexa $\widehat{\beta}$ com domínio limitado. No que se segue, vamos tomar o domínio de $\widehat{\beta}$ como sendo $[0,1]$. Note que, neste sentido, os valores fora de $[0,1]$ (na qual de fato fisicamente não são significantes para o parâmetro de ordem χ, denotando uma proporção da fase) são excluídos. Entretanto, em algumas situações esta análise pode ser estendida ao caso na qual o domínio de $\widehat{\beta}$ é toda a semi-reta $[0,\infty)$. Exemplos típicos de funcionais que podemos incluir em nossa análise são o potencial logarítmico

$$W(r) := r\ln(r) + (1-r)\ln(1-r) - c_1 r^2 - c_2 r - c_3 \quad \forall r \in (0,1),$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas, assim como potencial de obstáculo duplo, dado pela soma da função indicatriz $I_{[0,1]}$ com uma não convexa $\widehat{\gamma}$.

Antes de prosseguir com detalhes a serem discutidos neste trabalho, vamos tentar fazer um descrição delineada da literatura matemática relacionada com os nossos problemas. O interesse científico em fenômenos de transições de fases data, ao menos, do século XIX, no trabalho de Lamé e Clayperon [21], e tem crescido progressivamente. Porém, esses tipos de problemas ganharam notoriedade com as formulações de J. Stefan para encontrar a distribuição de temperatura durante a solidificação da água e derretimento de camadas de gelo, entre outros. Nos problemas clássicos tratados por Stefan, a hipótese fundamental é que, numa temperatura de equilíbrio, as fases do processo podiam coexistir separadas por uma supefície regular, chamada interface. Neste caso, a temperatura satisfaz uma equação de difusão de calor em cada região separada pela interface, juntamente com uma condição inicial e uma condição de fronteira particular, chamada *condição de Stefan*. Entretanto, esses tipos de modelos não incorporam diversos efeitos importantes, como tensão superficial, super-aquecimento e super-resfriamento.

Um método para estudar o problema clássico de Stefan é o chamado *método de entalpia*, que é uma formulação fraca ou variacional do problema de Stefan que incorpora as condições da interface, e começou a ser investigada à partir da década de 60, onde citamos como referência histórica Oleĭnic [25]. Neste tipo de formulação não se faz nenhuma suposição sobre a regularidade da interface, porém este método tem a desvantagem de não incorporar de forma natural alguns efeitos na interface, como super-resfriamento. Para mais informações sobre problema clássicos de Stefan, citamos Rubinstein [30].

Uma formulação alternativa e mais interessante desse tipo de problema é o chamado campo de fases (*phase field*), que permite que se tenha espessura e estrutura interna na interface. Neste tipo de problema usa-se um funcional de energia livre para descrever a cinemática do campo de fases e uma equação de balanço modificada para descrever a condução de calor. Esse tipo de modelo começou a ser estudado à partir da década de 80, onde citamos como referência histórica Caginalp [11]. A vantagem deste tipo de abordagem é que efeitos de tensão superficial e super-resfriamento, por exemplo, são mais fáceis de serem incorporados no modelo. Outros autores que consideraram esse tipo de abordagem foram Hoffman e Jiang [17], e Moroşanu e Motreanu [23].

No entanto, uma coisa em comum entre todas as formulações mencionadas acima é que o meio em que ocorre a mudança de fases é tratado como um corpo rígido, tanto em escala macroscópica como em microscópica (molecular). Entretanto, transições de fases estão relacionadas à algumas mudanças nos arranjos moleculares do processo. Isto quer dizer que a mudança de fases certamente não é rígida numa escala microscópica. Por exemplo, se considerarmos a densidade de volume de ligações ativas entre as granulações microscópicas que constituem um material, movimentos microscópicos são responsáveis pela criação ou ruptura dessas ligações. Neste sentido, a abordagem proposta por Frémond [9, 14] é levar em conta esse tipo de fenômeno. A idéia desenvolvida por Frémond consiste em generalizar o princípio da potência virtual introduzindo a potência das forças microscópicas, em dualidade com as velocidades microscópicas.

A este respeito, existe uma grande literatura que compreende modelos de mudanças de fases que levam em conta movimentos microscópicos propostos por Frémond (veja Stefanelli [32] e suas referências). Porém, grande parte dos modelos com essas características não apresentam uma equação de balanço para movimentos macroscópicos. Em particular, o sistema acoplando a equação (1) com a equação (2) se obtém usualmente pela abordagem de Frémond escolhendo funcionais de enegia livre e pseudo-potencial de dissipação de formas "tradicionais", ou seja, não levam em conta propriedades diferentes das partes viscosas e elásticas do sistema (por exemplo, uma porção líquida viscosa coexistindo com uma porção sólida elástica no caso de um sistema sólido-líquido sofrendo um processo de solidificação-fusão). Portanto, não existe acoplamento entre o sistema constituído pelas equações (1) e (2), e a equação para movimentos macroscópicos, na qual é ignorada.

Neste trabalho, a coexistência das propriedades viscosas e elásticas do sistema tem papel de destaque, sob a hipótese fundamental de que essas propriedades influenciam de fato o processo de transição de fases. Neste sentido, existe uma rica literatura sobre modelos desse tipo onde, dentre tantos, citamos os trabalhos [3, 4, 5, 7, 8, 18]. A análise de um sistema termoviscoelástico sem estar sujeito à mudanças de fases é feita em Bonetti-Bonfanti [3, 4], onde são considerados uma equação de viscoelasticidade linear para o deslocamento u e uma equação de balanço de energia interna para a temperatura θ.

Os trabalhos [5, 7, 8, 18] consideram modelos para fenômenos de danos onde, nestes casos, a variável de fase χ está relacionada à proporção local do material danificado. Em Kuttler [18], é considerado um modelo de evolução de danos reversíveis quase estáticos em materiais visco-plásticos, enquanto que em Bonetti-Bonfanti [5] e Bonetti-Schimperna [7, 8] são considerados processos de danos irreversíveis onde a velocidade microscópica χ_t é forçada a assumir valores não-positivos.

Ainda assim, nenhum desses modelos apresentam possibilidade de fluxo, que em alguns casos é um fenômeno completamente natural, principalmente em fases não sólidas do material. Nesse sentido, podemos citar os trabalhos de Boldrini-Planas [26, 27] e Boldrini-Vaz [34], onde se estudam modelos de solidificação com movimentação na parte não-sólida com possibilidade de fluxo.

Os modelos tratados neste trabalho estão relacionados com aquele proposto por M. Frémond [14] e que foi analisado por Rocca e Rossi em [28]. Para esse modelo de Frémond, E. Rocca e R. Rossi provaram a existência de soluções locais no tempo com valores inteiramente contidos na zona de mescla entre sólido e líquido (a chamada "mushy zone"). Para o primeiro modelo do presente trabalho, que inclui uma dissipação adequada ao modelo de Frémond e calor latente constante, provamos a exitência global no tempo de soluções que podem sair da "mushy zone"e tocar as chamadas barreiras de potencial, que correspondem a estados puramente líquido ou sólido. Para isso, fazemos uma regularização apropriada do problema e usamos o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder para obter solução do problema aproximado. Em seguida, buscamos estimativas *a priori* necessárias para passar o limite no problema aproximado, obtendo assim soluções do problema original.

No modelo seguinte, analisamos materiais viscoelásticos isocóricos, isto é, que satisfazem a restrição de conservação de volume quando submetidos a deformação (materiais como borracha, por exemplo); para tais materiais, a movimentação deve ocorrer com fluxo incompressível e, portanto, tem associado a ele uma pressão que funciona como multiplicador de Lagrange. Para este modelo, usamos uma versão modificada da técnica conhecida como *método de compressibilidade artificial*, que consiste em contornar dificuldades relacionadas com a restrição "div $u_t = 0$"adicionando uma equação que perturba o sistema. Esse sistema perturbado será uma aproximação do modelo com possibilidade de fluxo, e não possui a respectiva condição de incompressibilidade. Contudo, esta "nova"aproximação exigirá outras estimativas *a priori*.

O presente trabalho está dividido como segue. No capítulo 1, introduzimos algumas notações, definições, e enunciamos alguns resultados que serão importantes durante o texto.

O capítulo 2 é dedicado ao estudo do primeiro modelo introduzido aqui, onde começamos fazendo uma formulação abstrata do problema. Em seguida, introduzimos problemas aproximados adequados, onde obtemos existência e regularidade de soluções para tais problemas. Terminamos o capítulo obtendo existência e regularidade de soluções para o problema original.

No capítulo 3, seguimos a mesma linha do capítulo 2, considerando o segundo modelo introduzido aqui, fazendo uma formulação abstrata do problema. Em seguida, além de considerar aproximações similares às do capítulo anterior, introduzimos uma aproximação que é uma variante do método da compressibilidade artificial. Encerramos o capítulo também obtendo existência e regularidade de soluções para o problema original.

Capítulo 1

Preliminares

Dedicamos este capítulo para introdução de algumas notações, definições e resultados que serão importantes ao longo de todo o texto.

1.1 Espaços funcionais, teoremas de imersão e compacidade

Durante todo o texto, vamos supor que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, é um domínio conexo limitado, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^4. Como usual, $L^p(\Omega)$ denota o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráveis f, definidas sobre Ω, pela qual

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty,$$

cuja norma é dada por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráveis f, definidas sobre Ω, que são essencialmente limitdas, com a norma dada por

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Se $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Ao longo do texto denotaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço de Banach de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que, para todo $|j| \leq m$, $D^j u \in L^p(\Omega)$, sendo $D^j u$ a derivada no sentido das distribuições, munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|j|\leq m} \|D^j u\|_{L^p(\Omega)}, \ \ 1 \leq p \leq \infty.$$

Quando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|j|\leq m} (D^j u, D^j v)_{L^2(\Omega)}.$$

Vamos denotar por $H_0^m(\Omega)$ e $H_N^m(\Omega)$ os seguintes espaços

$$H_0^m(\Omega) := \{v \in H^m(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\} \tag{1.1}$$

$$H_N^m(\Omega) := \{v \in H^m(\Omega); \partial_n v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}, \tag{1.2}$$

munidos da norma de $H^m(\Omega)$. Além disso, vamos identificar $L^2(\Omega)$ com seu espaço dual $L^2(\Omega)'$, de modo que temos, por exemplo, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)'$ com imersões contínua e densa, como pode ser visto no Teorema abaixo, que pode ser encontrado, por exemplo, em Adams [1] pg. 144, ou Medeiros-Miranda [22] pg. 79:

Teorema 1.1 *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe $\mathcal{C}^m$ e considere $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são contínuas e compactas:*

i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$, *se* $mp < n$;

ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, *se* $mp = n$;

iii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$, $k < m - \frac{n}{p} \leq k + 1$ *se* $mp > n$ *onde* k *é um inteiro não negativo.*

O resultado abaixo ém uma consequência imediata do teorema acima, e pode ser encontrada também em Adams [1] pg. 144, ou Medeiros-Miranda [22] pg. 82:

Corolário 1.1 *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, Ω de classe $\mathcal{C}^{m+1}$, e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são contínuas e compactas:*

i) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$, *se* $p < n$;

ii) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, *se* $p = n$;

iii) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m}(\Omega)$, *se* $p > n$.

Seja X um espaço de Banach, equipado com uma norma $\|\cdot\|_X$. Definimos o espaço $L^p(0,T;X)$ como sendo o conjunto das funções $u : [0,T] \to X$ que satisfazem

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty$$

para $1 \leq p < \infty$, e

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \operatorname*{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Definimos também o espaço $C(0,T;X)$ como sendo o de todas as funções contínuas $u : [0,T] \to X$ tais que

$$\|u\|_{C(0,T;X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Definimos ainda o espaço de Sobolev $W^{m,p}(0,T;X)$, com $1 \leq p \leq \infty$, como sendo o conjunto de todas as funções $u : [0,T] \to X$ tais que

$$u \in L^p(0,T;X) \ \text{ e } \ \frac{d^j u}{dt^j} \in L^p(0,T;X), \quad 1 \leq j \leq m.$$

Munimos $W^{m,p}(0,T;X)$ da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} := \left(\sum_{j=0}^{m} \int_0^T \left\| \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right\|_X^p dt \right)^{1/p}$$

para $1 \leq p < \infty$ e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(0,T;X)} := \sum_{j=0}^{m} \operatorname*{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right\|_X .$$

Quando $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(0,T;X) := H^m(0,T;X)$.

Vamos enunciar a seguir um resultado importante que será usado constantemente no texto, que pode ser encontrado em Simon [31]. Considere X, B e Y espaços de Banach que satisfazem

$$X \subset B \subset Y, \text{ com a imersão } X \to B \text{ sendo compacta.} \tag{1.3}$$

Temos então

Proposição 1.1 *Suponha (1.3). Seja F um conjunto limitado em $L^p(0,T;X)$ onde $1 \le p < \infty$, e $\partial F/\partial t = \{\partial f/\partial t; f \in F\}$ limitado em $L^1(0,T;Y)$. Então F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$.*

Seja F um conjunto limitado em $L^\infty(0,T;X)$ onde $1 \le p < \infty$, e $\partial F/\partial t = \{\partial f/\partial t; f \in F\}$ limitado em $L^r(0,T;Y)$, onde $r > 1$. Então F é relativamente compacto em $C(0,T;B)$.

Denotemos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço das funções $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ de suporte compacto. Consideremos o espaço

$$\mathcal{V} := \{u \in \mathcal{D}(\Omega); \operatorname{div} u = 0\}$$

Definimos os espaços

$$H := \overline{\mathcal{V}}^{L^2(\Omega)}, \quad V := \overline{\mathcal{V}}^{H_0^1(\Omega)}$$

O espaço V ainda pode ser escrito como (veja Teman [33] pg. 18)

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega); \operatorname{div} u = 0\}$$

1.2 Operadores maximais monótonos

Seja H um espaço de Hilbert. Um operador multivalorado é uma aplicação de H em $\mathcal{P}(H)$ (partes de H). Se A é um operador multivalorado, o domínio e a imagem de A são, respectivamente,

$$\operatorname{dom}(A) = \{x \in H; Ax \neq \emptyset\} \text{ e } R(A) = \bigcup_{x \in H} Ax.$$

Podemos identificar A com seu gráfico em $H \times H$:

$$\{[x, y] \in H \times H; y \in Ax\}.$$

Dizemos que A é *monótono* se para cada $x_1, x_2 \in \text{dom}(A)$, temos $(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \geq 0$, ou mais precisamente, $\forall y_1 \in Ax_1$, $\forall y_2 \in Ax_2$,

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0.$$

O operador monótono A é dito *monótono maximal* se seu gráfico não está propriamente contido em qualquer outro subconjunto monótono de $H \times H$, isto é, A é monótono e para todo $[x, y] \in H \times H$ tal que $(y - A\xi, x - \xi) \geq 0$ $\forall \xi \in \text{dom}(A)$, então $y \in Ax$.

Um exemplo particular de operador maximal monótono que será usado aqui é o seguinte: seja φ uma função convexa própria sobre H. Se φ é semicontínua inferiormente, então seu subdiferencial $\partial\varphi$ é maximal monótono (veja Brézis [10] pg. 25)

Um propriedade importante dos operadores maximais monótonos, e que pode ser encontrada em Barbu [2] pg. 29, é a seguinte:

Proposição 1.2 *Seja A um operador maximal monótono. Então A é fracamante-fortemente fechado em $H \times H$, isto é, se $y_n = Ax_n$, $x_n \rightharpoonup x$ em H, e $y_n \to y$ em H, então $[x, y] \in A$.*

Vamos agora estabelecer alguns fatos sobre aproximação de Yosida de operadores maximais monótonos.

Seja A um operador maximal monótono. Denotamos por $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ o *resolvente* de A que pode-se verificar, para todo $\lambda > 0$, que é uma contração de H em H (veja Brézis [10] pg. 23). Dessa forma, definimos a *aproximação de Yosida* como sendo

$$A_\lambda = \frac{I - J_\lambda}{\lambda}.$$

Definição 1.1 *Chamamos de* **seção principal** *de A todo operador unívoco $A' \subset A$ com $dom(A) = dom(A')$ e tal que para todo $[x, y] \in \overline{dom(A)} \times H$, a desigualdade*

$$(A'\xi - y, \xi - x) \geq 0 \quad \forall\, \xi \in dom(A)$$

implica $y \in Ax$.

Denotamos $A^0x = proj_{Ax}0$, ou seja, A^0x é o elemento de norma minimal em Ax. Temos assim as seguintes propriedades (veja Barbu [2] pg. 38 e Brézis [10] pg. 28):

Proposição 1.3 *i)* A_λ *é univaluado, monótono maximal, limitado e Lipschitz, com constante de Lipschitz de razão* $\frac{1}{\lambda}$*;*
ii) Para todo $x \in dom(A)$*, temos* $|A_\lambda x| \uparrow |A^0x|$ *e* $A_\lambda x \to A^0x$ *quando* $\lambda \downarrow 0$ *com* $|A_\lambda x - A^0x|^2 \leq |A^0x|^2 - |A_\lambda x|^2$.

Podemos encontrar também em Brézis [10] pg. 29:

Proposição 1.4 *O operador* A^0 *é uma seção principal de* A.

O próximo resultado pode ser encontrado em Barbu [2] pg. 48:

Teorema 1.2 *Seja* B *um espaço de Banach reflexivo e estritamente convexo com dual estritamente convexo. Sejam* $\varphi : B \to \overline{\mathbb{R}}$ *uma função s.c.i., convexa, própria e* $A = \partial\varphi \subset B \times B^*$*. Então a função* φ_λ *é convexa, contínua, Gâteaux diferenciável, e* $\partial\varphi_\lambda = A_\lambda$ *para todo* $\lambda > 0$*. Se* B *é um espaço de Hilbert (não necessariamente identificado com seu dual), então* φ_λ *é Fréchet diferenciável sobre* B.

1.3 Uma família de problemas viscoelásticos e notações operacionais

A fim de estabelecer uma formulação variacional do problema de Cauchy para a equações consideradas neste trabalho, precisamos introduzir algumas notações e propriedades.

Seja $\phi : \Omega \to [0,1]$ uma função mensurável e consideremos as formas bilineares simétricas contínuas $a_\phi, b_\phi : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$a_\phi(u,v) := \alpha_1 \int_\Omega \phi div(u)div(v) + 2\alpha_2 \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \phi\eta_{ij}(u)\eta_{ij}(v) \quad \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega), \quad (1.4)$$

$$b_\phi(u,v) := \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \phi b_{ij}\eta_{ij}(u)\eta_{ij}(v) \quad \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega), \quad (1.5)$$

que estão relacionadas com problemas de elasticidade mais gerais. Aqui, α_1 e α_2 estão relacionados às propriedades elásticas do material e são chamadas constantes de Lamé. A matriz (b_{ij}) é positiva definida e chamada matriz de viscosidade, também relacionada com propriedades do material.

Como $\phi(x) \leq 1$ para todo $x \in \Omega$, temos que existe uma constante positiva K_a, dependendo apenas de α_1 e α_2, tal que

$$|a_\phi(u,v)| \leq K_a \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.6}$$

O seguinte resultado, que pode ser encontrado em Ciarlet [12] pg. 291, garante propriedades de elipticidade para as formas $a_\phi(\cdot,\cdot)$ e $b_\phi(\cdot,\cdot)$:

Teorema 1.3 (Desigualdade de Korn). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira Lipschitz. Para cada $v = (v_i) \in H^1(\Omega)$, seja*

$$\eta(v) = \left(\frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})\right) \in L^2(\Omega).$$

Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta(v)\|^2_{L^2(\Omega)}), \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

e portanto, sobre o espaço $H^1(\Omega)$, a aplicação

$$v \to (\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta(v)\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$$

é uma norma, equivalente à norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Assim, pela desigualdade de Korn, as formas $a_\phi(\cdot,\cdot)$ e $b_\phi(\cdot,\cdot)$ são $H_0^1(\Omega)$-elípticas, isto é, existem $C_a, C_b > 0$ tais que para $u \in H_0^1(\Omega)$

$$a_\phi(u,u) \geq \inf_{x\in\Omega}(\phi(x)) C_a \|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{1.7}$$

$$b_\phi(u,u) \geq \inf_{x\in\Omega}(\phi(x)) C_b \|u\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{1.8}$$

Se $S : \Omega \to \mathbb{S}^3$ é um tensor simétrico suficientemente suave e $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ é uma função suficientemente suave, temos a seguinte *identidade de Green*, que pode ser encontrada em Ciarlet [12] pg. 288:

$$\int_\Omega \operatorname{div} S \cdot v dx = -\int_\Omega S : \eta(v) dx + \int_{\partial\Omega} Sn \cdot v da. \tag{1.9}$$

Denotamos por $\mathcal{H}(\phi\cdot) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ e $\mathcal{K}(\phi\cdot) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ os operadores associados com a_ϕ e b_ϕ, respectivamente, a saber

$$\langle \mathcal{H}(\phi v), w\rangle = a_\phi(v, w) \text{ and } \langle \mathcal{K}(\phi v), w\rangle = b_\phi(v, w) \quad \forall\, v, w \in H_0^1(\Omega). \tag{1.10}$$

Pode ser verificado por um argumento de aproximação que o seguinte resultado de regularidade é válido:

$$\text{se } \phi \in H^2(\Omega) \text{ e } v \in H_0^2(\Omega), \text{ então } \mathcal{H}(\phi v), \mathcal{K}(\phi v) \in L^2(\Omega). \tag{1.11}$$

Além disso, vamos introduzir o operador $A_N : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)'$ compreendendo o operador de Laplace $-\Delta$ com condição de fronteira de Neumann homogêneas, definido por

$$\langle A_N u, v\rangle := (\nabla u, \nabla v) \quad \forall\, u, v \in H^1(\Omega), \tag{1.12}$$

o operador $A^2 : H^2(\Omega) \to H^2(\Omega)'$ que realiza o biharmônico Δ^2 com as condições de Navier (isto é, $u = \Delta u = 0$ sobre $\partial\Omega \times [0, T]$), definido por

$$\langle A^2 u, v\rangle := (\Delta u, \Delta v), \quad \forall u, v \in H^2(\Omega), \tag{1.13}$$

e o operador $\Lambda : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ realizando o operador de Laplace $-\Delta$ com condição de fronteira de Dirichlet, definido por

$$\langle \Lambda u, v\rangle := (\nabla u, \nabla v), \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.14}$$

Denotamos por J o operador de dualidade $A_N + I : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)'$ (I sendo o operador identidade); no que se segue, faremos uso das relações

$$\langle Ju, u\rangle = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \;\; \forall\, u \in H^1(\Omega), \qquad \langle J^{-1} v, v\rangle = \|v\|^2_{H^1(\Omega)'} \;\; \forall\, v \in H^1(\Omega)'. \tag{1.15}$$

1.4 Definições e resultados adicionais

Consideremos agora o seguinte problema de valor inicial e de fronteira

$$\delta\chi_t - \epsilon\Delta\chi + \beta(\chi) + \sigma'(\chi) \ni f \quad \text{q.t.p. em } \Omega \times (0,T) \tag{1.16}$$

$$\partial_n \chi = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T) \tag{1.17}$$

$$\chi(0) = \chi_0 \quad \text{em } \Omega, \tag{1.18}$$

onde temos as seguintes hipóteses para (1.16)-(1.18):

A1) β é o subdiferencial de uma função semicontínua inferiormente convexa própria e não negativa $\widehat{\beta} : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ tal que $\widehat{\beta}(0) = 0$. Denotamos por K o fecho $\overline{D(\beta)}$ do domínio efetivo de β em $\mathbb{R}$. O conjunto K é assumido sendo limitado se $\epsilon = 0$.

A2) $\sigma \in C^1(K)$ e $\sigma' \in C^{0,1}(K)$ com $S := \|\sigma''\|_{L^\infty(K)}$.

A3) $\chi_0 \in L^2(\Omega)$ e $\widehat{\beta}(\chi_0) \in L^1(\Omega)$. Além disso, $\chi_0 \in H^1(\Omega)$ quando $\epsilon > 0$.

A4) δ, ϵ são constantes positivas e $f \in L^2(\Omega)$.

Temos assim o seguinte resultado, que pode ser encontrado em Colli-Laurençot [13]:

Proposição 1.5 *Suponha A1 - A4. Então existe uma única função $\chi =: \mathcal{B}f$ satisfazendo $\chi \in dom(\beta)$ q.t.p. em Q,*

$$\chi \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap C^0([0,T];H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$$

e satisfazendo

$$\delta\chi_t - \epsilon\Delta\chi + \xi + \sigma'(\chi) = f \quad \textit{q.t.p. em } \Omega \times (0,T) \tag{1.19}$$

$$\partial_n \chi = 0 \quad \textit{sobre } \partial\Omega \times (0,T) \tag{1.20}$$

$$\chi(0) = \chi_0 \quad \textit{em } \Omega, \tag{1.21}$$

para $\xi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ com $\xi \in \beta(\chi)$ q.t.p. em Q. Além disso, podemos determinar uma constante C, dependendo apenas de δ, $|\sigma'(0)|$, S, $|\Omega|$ e T, tal que

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{2}\|\chi_t\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} + \frac{\epsilon}{2}\|\nabla\chi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \widehat{\beta}(\chi(t)) \le C(1 + \|\chi_0\|^2_{L^2(\Omega)})\\ + \frac{\epsilon}{2}\|\nabla\chi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \widehat{\beta}(\chi_0) + C\int_0^t \|\chi_t\|^2_{L^2(0,s;L^2(\Omega))} + \int_0^t\int_\Omega f\chi_t,\end{aligned}$$

para qualquer $t \in [0,T]$.

Necessitaremos de um resultado da teoria L^p de equações diferenciais parabólicas lineares. Para isso, considere o seguinte problema parabólico linear:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t) & \text{em } Q, \\ \partial_n u = 0 & \text{em } S, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{1.22}$$

Temos então o seguinte resultado, que pode ser encontrado em Ladyzhenskaya *et al* [20], pg. 351 numa versão mais elaborada:

Teorema 1.4 *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente suave. Suponha que $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u_0 \in H^1(\Omega)$ e $\partial_n u_0 = 0$ em $\partial\Omega$. Então, existe uma única solução $u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ do problema (1.22) satisfazendo a seguinte estimativa:*

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_0\|_{H^1(\Omega)}), \tag{1.23}$$

com C uma constante dependendo de T e Ω.

Vamos precisar também de um resultado da teoria L^p de operadores poliharmônicos. Para isso, considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{em } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.24}$$

Temos então o seguinte resultado, que pode ser encontrado numa versão mais elaborada em Gazzola *et al* [16], pg. 46:

Proposição 1.6 *Seja $1 < p < \infty$ e suponha que $\partial\Omega \in \mathcal{C}^4$. Então para toda $f \in L^2(\Omega)$, o problema (1.24) admite uma única solução $u \in H^4(\Omega)$; além disso, existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de Ω, tal que*

$$\|u\|_{H^4(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.25}$$

Desta vez vamos estabelecer alguns fatos sobre regularidade elíptica. Para isso, consideremos um sistema

$$A_{rs} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{rs}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + b^{rs}, i, j = 1, 2, ..., N, r, s = 1, 2, ..., M, \tag{1.26}$$

$$a_{i,j}^{\alpha\beta} \in C^{0,1}(\overline{\Omega}), b^{rs} \in L^\infty(\Omega), a_{ij}^{\alpha\beta} = a_{ji}^{\alpha\beta}, a_{ij}^{\alpha\beta} = a_{ij}^{\beta\alpha}. \tag{1.27}$$

Suponha que o sistema (1.26) é fortemente elíptico, isto é, existe uma constante $e > 0$ tal que

$$\text{para cada } \xi \in \mathbb{R}^N,\ \eta \in \mathbb{R}^M,\ a_{ij}^{rs}\xi_i\xi_j\eta_r\eta_s \geq e\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2\right)\left(\sum_{r=1}^{M}\eta_r^2\right). \tag{1.28}$$

Por simplicidade, consideramos ainda

$$\eta \in \mathbb{R}^M \Rightarrow b^{rs}\eta_r\eta_s \geq 0, \tag{1.29}$$

$$\varphi_r \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega \left(a_{ij}^{rs}\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_j} + b^{rs}\varphi_r\varphi_s\right)dx \geq c_1\sum_{i=1}^{M}|\varphi_r|_{H^1(\Omega)}^2, \tag{1.30}$$

Com isso, temos o seguinte resultado, que pode ser encontrado em Nečas [24] pg. 260:

Lema 1.1 *Sejam Ω um domínio com fronteira de classe $\mathcal{C}^\infty$, A_{rs} o sistema (1.26)-(1.30), $g \in [H^{3/2}(\partial\Omega)]^M$, $f \in [L^2(\Omega)]^M$, u uma solução do problema $A_{rs}u_s = f_r$ em Ω, $r = 1, 2, ..., M$, $u = g$ sobre $\partial\Omega$. Então*

$$\|u\|_{[H^2(\Omega)]^M} \leq C(\|f\|_{[L^2(\Omega)]^M}^2 + \|g\|_{[H^{3/2}(\partial\Omega)]^M}^2)^{1/2}. \tag{1.31}$$

Um resultado muito importante que faremos uso, e que pode ser encontrado em Ladyzhenskaya [19], pg. 293, ou Friedman [15] pg. 189, é Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder, que enunciamos a seguir:

Teorema 1.5 (Leray-Schauder) *Sejam X um espaço de Banach e $T : [a, b] \times X \to X$ uma transformação tal que $y = T(\lambda, x)$ com $x, y \in X$ e $\lambda \in [a, b]$. Suponha que:*

a) *$T(\lambda, x)$ está definida $\forall x \in X$ e $\forall \lambda \in [a, b]$;*

b) *Para λ fixo, $T(\lambda, x)$ é contínua em X;*

c) *Para $x \in A$, $A \subset X$ limitado, $T(\lambda, x)$ é contínua em λ, uniformemente com respeito a $x \in A$;*

d) *Para λ fixo, $T(\lambda, x)$ é uma transformação compacta;*

e) *Existe uma constante M tal que toda possível solução x de $x = T(\lambda, x)$ satisfaz $\|x\|_X \leq M$;*

f) *A equação $x = T(a, x)$ tem uma única solução em X.*

Então, existe uma solução da equação $x = T(b, x)$.

Um resultado útil que usaremos com frequência é o seguinte:

Lema 1.2 *Seja H um espaço de Hilbert e $u \in H^1(0, T; H)$, com $u(0) = u_0$. Temos a seguinte desigualdade:*

$$\int_0^t \|u(s)\|_H^2 ds \leq C \left(\|u_0\|_H^2 + \int_0^t \left(\int_0^s \|u_t(r)\|_H^2 dr \right) ds \right). \tag{1.32}$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 &= \frac{d}{dt}(u(t), u(t)) \\ &= 2(u_t(t), u(t)) \\ &\leq 2\|u_t(t)\|_H \|u(t)\|_H \\ &\leq \|u_t(t)\|_H^2 + \|u(t)\|_H^2 \end{aligned}$$

Integrando em t, temos

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \|u_0\|_H^2 + \int_0^t \|u_t(s)\|_H^2 ds + \int_0^t \|u(s)\|_H^2 ds,$$

e usando o Lema de Gronwall, obtemos

$$\|u(t)\|_H^2 \leq e^T \left(\|u_0\|_H^2 + \int_0^t \|u_t(s)\|_H^2 ds \right). \tag{1.33}$$

Integrando novamente em t, concluímos

$$\int_0^t \|u(t)\|_H^2 \leq C \left(\|u_0\|_H^2 + \int_0^t \left(\int_0^s \|u_t(r)\|_H^2 dr \right) ds \right).$$

$\square$

Finalmente, um resultado conhecido e que será usado constantemento no texto, podendo ser encontrado por exemplo em Brézis [10] pg. 156, é o seguinte:

Lema 1.3 (Gronwall-Bellman) *Sejam* $\psi \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ *tal que* $\psi \geq 0$ *q.t.p. sobre* $(0,T)$*, e* α *uma constante não negativa.*

Seja $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua satisfazendo*

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_0^t \psi(s)\phi(s)ds, \quad \textit{para todo } t \in [0,T].$$

Então

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\int_0^t \psi(s)ds}, \quad \textit{para todo } t \in [0,T].$$

Capítulo 2

Solidificação de material viscoelástico: um modelo simplificado

Neste capítulo apresentaremos resultados de existência e regularidade para o primeiro sistema apresentado na introdução, ou seja, um modelo matemático que descreve mudanças de fases com propriedades de viscoelasticidade, neste caso sem a possibilidade de fluxo. Para isso, começamos especificando as condições iniciais e de fronteira, e as hipóteses sobre os parâmetros. Em seguida, introduzimos duas aproximações adequadas do sistema, primeiro a de Yosida, depois uma por truncamentos. Para o primeiro problema aproximado, obteremos existência de soluções por meio de argumentos de ponto fixo de Leray-Schauder. Para essas soluções, através de estimativas *a priori*, obteremos subsequências convergentes, cujos limites serão soluções do segundo problema aproximado. Finalmente, por um processo análogo para se obter soluções do segundo problema aproximado, obteremos soluções do problema original.

2.1 Formulação do problema

Como dito antes, estaremos interessados em estudar o seguinte problema:

$$\theta_t + l\chi_t - \Delta\theta = g \qquad \text{em } \Omega \times (0,T), \tag{2.1}$$

$$\chi_t - \Delta\chi + W'(\chi) \ni \theta - \theta_c + \frac{|\eta(u)|^2}{2} \qquad \text{em } \Omega \times (0,T), \tag{2.2}$$

$$u_{tt} - div((1-\chi)\eta(u) + \chi\eta(u_t)) + \nu(-\Delta)^2 u_t = f \qquad \text{em } \Omega \times (0,T), \tag{2.3}$$

sujeito às seguintes condições iniciais:

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad \text{em } \Omega, \tag{2.4}$$

$$\chi(0) = \chi_0 \qquad \text{em } \Omega, \tag{2.5}$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = v_0 \qquad \text{em } \Omega, \tag{2.6}$$

e às seguintes condições de fronteira:

$$u = \Delta u = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.7}$$

$$\partial_n \chi = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.8}$$

$$\partial_n \theta = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.9}$$

onde, como especificado na introdução, θ denota a temperatura, χ a proporção local de uma das duas fases (ou simplesmente o campo de fases), e u o vetor de pequenos deslocamentos.

Vamos supor que o potencial W satisfaz as seguintes condições em (2.2):

$$W = \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}, \tag{2.10}$$

onde

$$\widehat{\gamma} \in C^2([0,1]) \quad \text{e} \tag{2.11}$$

$$\widehat{\beta} : [0,1] \to [0,+\infty] \text{ é própria, s.c.i., convexa, com } \beta(0) \ni 0, \tag{2.12}$$

$$\widehat{\beta}|_{(0,1)} \in C^{1,1}_{loc}(0,1). \tag{2.13}$$

Observação 2.1 *A condição (2.12) implica em particular que existe uma constante positiva $M < \infty$ tal que*

$$-M \leq \widehat{\beta}(x) \quad \textit{para qualquer } x \in [0,1].$$

Temos, por exemplo, a função logarítmica $\widehat{\beta}(r) = r\ln(r) + (1-r)\ln(1-r)$, para $r \in (0,1)$, e a função indicadora $\widehat{\beta} = I_{[0,1]}$ do intervalo $[0,1]$ satisfazendo (2.12)-(2.13) (como visto na introdução). A seguir, por uma questão de simplicidade, trataremos ambas $\partial\widehat{\beta}$ e ∂W como funções β and W'. Vamos definir também $\gamma := \widehat{\gamma}'$, de modo que (2.10) pode ser escrito como

$$W' = \beta + \gamma.$$

Como é usual, por composição β induz um operador maximal monótono, na qual ainda denota

$$\beta : \operatorname{dom}(\beta) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) \to L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

com $\beta(g)(x,t) = \beta(g(x,t))$ para $g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $\operatorname{dom}(\beta) = \{g \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) : \beta(g) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$.

Finalmente, sem perda de generalidade e também por simplicidade de exposição, tomamos $\theta_c = 0$.

Portanto, em vista do anterior, da identidade de Green (1.9), e de (1.4)-(1.5) e (1.10)-(1.13), podemos escrever o sistema (2.1)-(2.3) na seguinte forma abstrata:

$$\begin{gathered}
\theta_t + l\chi_t + A_N\theta = g, \\
\chi_t + A_N\chi + \xi + \gamma(\chi) = \theta + \frac{|\eta(u)|^2}{2}, \\
u_{tt} + \mathcal{H}((1-\chi)u) + \mathcal{K}(\chi u_t) + \nu A^2 u_t = f,
\end{gathered}$$

para algum $\xi \in \beta(\chi)$, e no caso especial em que as constantes de Lamé são $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ e a matriz de viscosidade dada por $b_{ii} = 1$ e $b_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $i,j = 1,2,3$.

Esta formulação nos diz que o sistema (2.1)-(2.3) pode ser considerado como um caso especial de um contexto mais geral. De fato, não apenas a parte elástica pode ser generalizada, tomando diferentes matrizes elásticas e constantes de Lamé, mas também os operadores A e A_N podem ser operadores uniformemente elípticos de segunda ordem lineares com coeficientes suficientemente suaves independente do tempo.

Entretanto, estas generalizações não mudarão substancialmente os argumentos matemáticos e, por simplicidade de exposição, vamos considerar a formulação abstrata correspondente ao primeiro problema descrito na introdução

Nesse sentido, estaremos interessados em resolver então o seguinte problema de valor inicial e de fronteira abstrato:

Problema 2.1 *Encontrar funções* $\theta, \chi, \xi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *e* $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$ *satisfazendo as condições iniciais (2.4)-(2.6), as condições de fronteira (2.7)-(2.9),*

$$\chi(x,t) \in dom(\beta) \quad e \quad \xi \in \beta(\chi) \quad q.t.p. \ em\, \Omega \times (0,T),$$

e as equações

$$\theta_t + l\chi_t + A_N\theta = g, \tag{2.14}$$

$$\chi_t + A_N\chi + \xi + \gamma(\chi) = \theta + \frac{|\eta(u)|^2}{2}, \tag{2.15}$$

$$u_{tt} + \mathcal{H}((1-\chi)u) + \mathcal{K}(\chi u_t) + \nu A^2 u_t = f. \tag{2.16}$$

As hipóteses sobre as funções dadas e condições iniciais são

$$g \in H^1(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.17}$$

$$f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.18}$$

$$\theta_0 \in H^2_N(\Omega), \tag{2.19}$$

$$\chi_0 \in H^2_N(\Omega), \tag{2.20}$$

$$u_0 \in H^4(\Omega), \quad v_0 \in H^2(\Omega). \tag{2.21}$$

Além disso, permitimos que χ_0 *"toque as barreiras de potencial", isto é,*

$$0 \leq \min_{x\in\overline{\Omega}} \chi_0(x) \leq \max_{x\in\overline{\Omega}} \chi_0(x) \leq 1. \tag{2.22}$$

satisfazendo

$$\chi_0 \in dom(\beta). \tag{2.23}$$

Nestas condições, podemos provar o seguinte resultado, o qual é o principal deste capítulo:

Teorema 2.1 *Suponha (2.11)-(2.13) e (2.17)-(2.23). Então existe* (θ, χ, ξ, u) *resolvendo o Problema 2.1 com a seguinte regularidade:*

$$\theta \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$
$$\chi \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$
$$\xi \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad \xi \in \beta(\chi),$$
$$u \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega)).$$

2.2 Problemas aproximados

Introduzimos nesta seção um problema aproximado que na verdade é uma versão regularizada das equações (2.14)-(2.16), cujo limite será solução do Problema 2.1. Provaremos existência e unicidade de solução para este problema aproximado.

Introduzimos inicialmente dois operadores de truncamento $T_{1/\epsilon}$ e τ, definidos como segue:

$$T_{1/\epsilon}(s) = \begin{cases} s & \text{se } s \in [-\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}] \\ \frac{1}{\epsilon}\text{sign}(s) & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{2.24}$$

e

$$\tau(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < 0 \\ s & \text{se } s \in [0,1] \\ 1 & \text{se } s > 1. \end{cases} \tag{2.25}$$

Dado $\mu > 0$, vamos considerar a aproximação de Yosida do operador maximal monótono β, que denotaremos por β_μ. Desse modo, vamos considerar a seguinte versão regularizada e truncada do Problema 2.1:

Problema 2.2 *Seja* $\epsilon > 0$ *fixo. Dado* $\mu > 0$*, encontrar* θ^μ*,* χ^μ*:* $\Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *e* u^μ*:* $\Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$ *satisfazendo*

$$\theta^\mu_t + \chi^\mu_t + A_N \theta^\mu = g, \tag{2.26}$$
$$\chi^\mu_t + A_N \chi^\mu + \beta_\mu(\chi^\mu) + \gamma(\chi^\mu) = \theta^\mu + T_{1/\epsilon}\Big(\frac{|\eta(u^\mu)|^2}{2}\Big), \tag{2.27}$$
$$u^\mu_{tt} - \mathcal{H}(\tau(1-\chi^\mu)u^\mu) + \mathcal{K}(\tau(\chi^\mu)u^\mu_t) + \nu A^2 u^\mu_t = f, \tag{2.28}$$

sujeito às mesmas condições iniciais e de fronteira do Problema 2.1.

Para este problema, através de argumentos de ponto fixo de Leray-Schauder, vamos provar o seguinte resultado:

Proposição 2.1 *Suponha (2.11)-(2.13) e (2.17)-(2.23). Então existe* $(\theta^\mu, \chi^\mu, u^\mu)$ *resolvendo o sistema (2.2) com a regularidade*

$$\begin{aligned} \theta^\mu &\in H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)), \\ \chi^\mu &\in H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)), \\ u^\mu &\in H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)). \end{aligned}$$

Note que as soluções θ^μ, χ^μ e u^μ dependem dos truncamentos, em particular dependem de ϵ. Entretanto, vamos omitir a dependência de ϵ, para facilitar a notação.

Após provarmos existência de solução para o Problema 2.2, através de estimativas independentes de μ, passaremos ao limite quando $\mu \to 0^+$, encontrando assim funções θ^ϵ, χ^ϵ, ξ^ϵ e u^ϵ, dependendo de ϵ, que satisfazem $\chi^\epsilon \in dom(\beta)$ e $\xi^\epsilon \in \beta(\chi^\epsilon)$. Este último fato implica em particular que $0 \le \chi^\epsilon \le 1$, $\forall\ (x,t) \in \Omega \times [0,T]$, e portanto $\tau(\chi^\epsilon) = \chi^\epsilon$ e $\tau(1-\chi^\epsilon) = 1-\chi^\epsilon$; isto é, podemos desconsiderar o operador de truncamento τ quando trabalharmos com estas funções limites.

Usando estes resultados, provaremos facilmente que θ^ϵ, χ^ϵ, ξ^ϵ e u^ϵ são soluções do seguinte problema:

Problema 2.3 *Para qualquer* $\epsilon > 0$, *encontrar* $\theta^\epsilon, \chi^\epsilon, \xi^\epsilon : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *e* $u^\epsilon : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$ *satisfazendo*

$$\theta^\epsilon_t + l\chi^\epsilon_t + A_N\theta^\epsilon = g, \tag{2.29}$$

$$\chi^\epsilon_t + A_N\chi^\epsilon + \xi^\epsilon + \gamma(\chi^\epsilon) = \theta^\epsilon + T_{1/\epsilon}\left(\frac{|\eta(u^\epsilon)|^2}{2}\right), \tag{2.30}$$

$$\xi^\epsilon \in \beta(\chi^\epsilon)$$

$$u^\epsilon_{tt} - \mathcal{H}((1-\chi^\epsilon)u^\epsilon) + \mathcal{K}(\chi^\epsilon u^\epsilon_t) + \nu A^2 u^\epsilon_t = f. \tag{2.31}$$

sujeito às mesmas condições iniciais e de fronteira como no Problema 2.1.

Como próximo passo, obteremos estimativas adequadas independente de ϵ. Estas estimativas permitirão, quando $\epsilon \to 0^+$, extrair subsequências θ^ϵ, χ^ϵ, ξ^ϵ e u^ϵ que convergem para soluções do Problema 2.1 original.

2.3 Existência de soluções para o Problema 2.2

Aplicaremos o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder. Para isso, vamos construir um operador T_λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, sobre o espaço de Banach $B := H^1(0,T;L^2(\Omega)) \times H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega))$, que será a composição de outros dois operadores, definidos como segue.

2.3.1 Construção do operador solução do Problema 2.2

Começamos considerando o seguinte problema de valor inicial associado com a segunda equação do Problema 2.2:

Problema 2.4 *Dados $(\overline{\theta}^\mu, \overline{u}^\mu) \in B$, encontrar $\chi^\mu : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ satisfazendo a condição inicial (2.5) e a equação*

$$\chi_t^\mu + A_N \chi^\mu + \beta_\mu(\chi^\mu) + \gamma(\chi^\mu) = \lambda(\overline{\theta}^\mu + T_{1/\epsilon}(\frac{|\eta(\overline{u}^\mu)|^2}{2}))\mathit{em}\ \ \Omega \times (0,T). \qquad (2.32)$$

Temos então o

Lema 2.1 *Suponha (2.11)-(2.13), (2.20) e (2.22)-(2.23). Então, para cada $(\overline{\theta}^\mu, \overline{u}^\mu) \in B$, o Problema 2.4 possui uma única solução χ^μ satisfazendo*

$$\chi^\mu \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)). \qquad (2.33)$$

Demonstração. Por simplicidade de notação, denotemos

$$\varpi^\mu := \overline{\theta}^\mu + T_{1/\epsilon}(\frac{|\eta(\overline{u}^\mu)|^2}{2}).$$

Agora, note que para todo $(\overline{\theta}^\mu, \overline{u}^\mu) \in B$ temos

$$\varpi^\mu \in H^1(0,T;L^2(\Omega)). \qquad (2.34)$$

Em particular, $\overline{\omega}^\mu \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, e portanto, pela Proposição 1.5, o problema (2.4) tem uma única solução

$$\chi^\mu \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap C^0([0,T];H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2_N(\Omega)). \tag{2.35}$$

Assim, em vista de (2.11) e (2.35), temos que

$$\gamma(\chi^\mu) \in H^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.36}$$

Procedemos então como na demonstração de Rocca-Rossi [28], Lema 4.2, ou seja, testamos a equação em (2.32) por $(A_N\chi^\mu + \beta_\mu(\chi^\mu))_t$ e integramos no tempo. Portanto, temos

$$\begin{aligned}\int_0^t \|\nabla\chi^\mu_t\|^2_{L^2(\Omega)} \quad &+ \quad \frac{1}{2}\|A_N\chi^\mu(t) + \beta_\mu(\chi^\mu(t))\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega \beta'{}_\mu(\chi^\mu)|\chi^\mu_t|^2 \\ &\leq \quad \|\chi_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \|\beta_\mu(\chi_0)\|^2_{L^2(\Omega)} + I_0,\end{aligned} \tag{2.37}$$

onde estimamos I_0 como segue

$$\begin{aligned} I_0 \quad &= \quad \left|\int_0^t\int_\Omega (\lambda\overline{\omega}^\mu - \gamma(\chi^\mu))(A_N\chi^\mu + \beta_\mu(\chi^\mu))_t\right| \\ &\leq \quad \int_0^t\int_\Omega |(\lambda\overline{\omega}^\mu_t - \gamma'(\chi^\mu)\chi^\mu_t)(A_N\chi^\mu + \beta_\mu(\chi^\mu))| \\ &\quad + \int_\Omega |(\lambda\overline{\omega}^\mu(t) - \gamma(\chi^\mu(t)))(A_N\chi^\mu(t) + \beta_\mu(\chi^\mu(t)))| \\ &\quad + \int_\Omega |(\lambda\overline{\omega}^\mu(0) - \gamma(\chi_0))(A_N\chi_0 + \beta_\mu(\chi_0))| \\ &\leq \quad \frac{1}{4}(\|\chi_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \|\beta_\mu(\chi_0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|A_N\chi^\mu(t) + \beta_\mu(\chi^\mu(t))\|^2_{L^2(\Omega)}) \\ &\quad +2\|\overline{\omega}^\mu + \gamma(\chi^\mu)\|^2_{C^0(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\int_0^t \|A_N\chi^\mu + \beta_\mu(\chi^\mu)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\overline{\omega}^\mu + \gamma(\chi^\mu)\|^2_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}\right),\end{aligned} \tag{2.38}$$

a última desigualdade seguindo de (2.34) e (2.36). Notando, pela Proposição 1.3 *ii*), que $|\beta_\mu(\chi_0)| \leq |\beta_0(\chi_0)|$, temos $\beta_\mu(\chi_0) \in L^\infty(\Omega)$, independente de μ. Além disso, como β é monótono, temos que β_μ é monótono, e portanto $\beta'_\mu(\chi^\mu) \geq 0$. Com essas observações, usando (2.37)-(2.38), podemos aplicar o Lema de Gronwall e usar a estimativa da Proposição 1.5 para χ^μ e obter

$$\|A_N\chi^\mu + \beta_\mu(\chi^\mu)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\chi^\mu_t\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C. \tag{2.39}$$

Agora, usando a monotonicidade de β_μ, temos

$$\int_\Omega A_N\chi^\mu(t)\cdot\beta_\mu(\chi^\mu(t)) = \int_\Omega |\nabla\chi^\mu(t)|^2\beta'(\chi^\mu(t)) \geq 0, \quad \forall\, t\in[0,T],$$

o que nos permite obter a seguinte desigualdade:

$$\|A_N\chi^\mu + \beta_\mu(\chi^\mu)\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \geq \|A_N\chi^\mu\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\beta_\mu(\chi^\mu)\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}. \quad (2.40)$$

Portanto, de (2.39) e usando regularidade elíptica, temos uma estimativa para χ^μ em $L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega))$. Além disso, de (2.39), temos uma limitação para $\|\chi^\mu_t\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$.

Escrevendo a equação em (2.32) como

$$\chi^\mu_t = -A_N\chi^\mu - \beta_\mu(\chi^\mu) - \gamma(\chi^\mu) + \lambda(\overline{\theta}^\mu + T_{1/\epsilon}(\frac{|\eta(\overline{u}^\mu)|^2}{2})),$$

notando que $\gamma(\chi^\mu) \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, pois $\chi^\mu \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, e usando as estimativas obtidas acima, obtemos uma limitação para $\|\chi^\mu_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$, e portanto a regularidade desejada. □

Observação 2.2 *Quando χ^μ é limitado em $H^1(0,T;L^2(\Omega))$ em relação à μ, temos o mesmo para $\gamma(\chi^\mu)$. Além disso, quando temos θ^μ também limitado em $H^1(0,T;L^2(\Omega))$ em relação à μ, como $T_{1/\epsilon}(|\eta(u^\mu)|^2/2)$ é limitado independente de μ, temos que as estimativas (2.37)-(2.40), valem independentes de μ. Mais adiante veremos que χ^μ e θ^μ cumprem as limitações citadas.*

Defina $X := W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega))$. Concluímos do Lema 2.1 que o operador solução T^1_λ associado ao Problema 2.4 está bem definido de B em X para todo $\lambda\in[0,1]$.

Continuamos agora considerando o seguinte problema de valor inicial associado à primeira e terceira equações do Problema 2.2:

Problema 2.5 *Dado $\chi^\mu \in X$, encontrar $\theta^\mu : \Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$ e $u^\mu : \Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}^3$ satisfazendo as condições iniciais (2.4) e (2.6) e as equações*

$$\theta^\mu_t + l\chi^\mu_t + A_N\theta^\mu = \lambda g \qquad em\ \Omega\times(0,T), \quad (2.41)$$

$$u^\mu_{tt} + \mathcal{H}(\tau(1-\chi^\mu)u^\mu) + \mathcal{K}(\tau(\chi^\mu)u^\mu_t) + \nu A^2 u^\mu_t = \lambda f \quad em\ \Omega\times(0,T). \quad (2.42)$$

Temos assim o seguinte resultado:

Lema 2.2 *Suponha (2.17)-(2.19) e (2.21). Então para cada $\chi^\mu \in X$, existe uma única dupla (θ^μ, u^μ) que é solução do Problema 2.5 com a seguinte regularidade:*

$$\theta^\mu \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.43}$$

$$u^\mu \in H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)). \tag{2.44}$$

Demonstração. Como as duas equações são desacopladas, vamos analisá-las separadamente. Por simplicidade, vamos omitir temporariamente o índice μ na equação. Existência de solução para a equação (2.42) segue do método de Galerkin. De fato, seja $\{w_i\}_{i\geq 1}$ uma base "especial"para $H^2(\Omega)$, isto é, autofunções associadas ao problema

$$(A^2 w_i, v) = \lambda_i^2 (w_i, v), \quad \forall v, w_i \in H^2(\Omega),$$
$$|w_i| = 1, \quad \lambda_i^2 \nearrow +\infty.$$

Seja V^m o espaço gerado por $w_1, ..., w_m$. Para cada $m \geq 1$, estaremos interessados em encontrar uma solução aproximada u^m da segunda equação de (2.42) com suas respectivas condições iniciais, no seguinte sentido:

$$u^m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{i,m}(t) w_i \tag{2.45}$$

satisfazendo a seguinte equação,

$$(u_{tt}^m, v^m) + a_{\tau(1-\chi^\mu)}(u^m, v^m) + b_{\tau(\chi^\mu)}(u_t^m, v^m) + \nu(A^2 u_t^m, v^m) = (f, v^m), \tag{2.46}$$

$$u^m(0) = u_{0m} \tag{2.47}$$

$$u_t^m(0) = v_{0m}, \tag{2.48}$$

$$\forall v^m \in V^m,$$

onde u_{0m} e v_{0m} são projeções ortogonais em $H^2(\Omega)$ de u_0 e v_0 respectivamente, sobre o espaço V^m.

Desse modo, obtemos um sistema de equações diferenciais ondinárias de segunda ordem, pela qual tem única solução na teoria de equações diferenciais ordinárias usual.

Buscaremos agora estimativas *a priori* para u^μ independentes de m. Considerando então em (2.46) u_t^m como função teste, obtemos, integrando no tempo, usando desigualdade de Young, (1.6), (1.8) e regularidade elíptica,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}\|v_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon\int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^1(\Omega)} \\ &+ C_\epsilon\left(\int_0^t \|u^m\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^t \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Escolhendo ϵ suficientemente pequeno, usando a desigualdade (1.32) e o Lema de Gronwall, temos

$$u_t^m \text{ limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \tag{2.50}$$

e portanto, usando desta vez a desigualdade (1.33) na demonstração do Lema 1.2, obtemos

$$u^m \text{ limitado em } W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega)). \tag{2.51}$$

Agora, consideremos em (2.46) $A^2 u_t^m$ como função teste. Obtemos, integrando no tempo, as seguintes estimativas:

$$\int_0^t (u_{tt}^m, A^2 u_t^m) = \frac{1}{2}\|Au_t^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|Av_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.52}$$

$$\int_0^t \int_\Omega \mathcal{H}(\tau(1-\chi^\mu)u^m) \cdot A^2 u_t^m = I_1 + I_2, \tag{2.53}$$

onde

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left|\int_0^t \int_\Omega \tau(1-\chi^\mu) div(\eta(u^m)) \cdot A^2 u_t^m\right| \\ &\leq C\int_0^t \|u^m\|_{H^2(\Omega)}\|A^2 u_t^m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\int_0^t \|u_t^m\|_{H^4(\Omega)}\|u^m\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \epsilon\int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^4(\Omega)} + C_\epsilon\int_0^t \|u^m\|^2_{H^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.54}$$

e

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left|\int_0^t \int_\Omega \nabla\tau(1-\chi^\mu)\eta(u^m)\cdot A^2u_t^m\right| \\
&\leq C\int_0^t \|A^2u_t^m\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\chi^\mu\|_{L^3(\Omega)}\|\eta(u^m)\|_{L^6(\Omega)} \\
&\leq C\int_0^t \|u_t^m\|_{H^4(\Omega)}\|\chi^\mu\|_{H^2(\Omega)}\|u^m\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq \epsilon\int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^4(\Omega)} + C_\epsilon\int_0^t \|u^m\|^2_{H^2(\Omega)} \qquad (2.55)
\end{aligned}$$

A última estimativa segue do fato que $\chi^\mu \in X$ e de imersão contínua do Teorema 1.1. Além disso, temos

$$\int_0^t \int_\Omega \mathcal{K}(\tau(\chi^\mu)u_t^m)\cdot A^2u_t^m = I_3 + I_4, \qquad (2.56)$$

onde

$$\begin{aligned}
|I_3| &= \left|\int_0^t \int_\Omega \tau(\chi^\mu)div(\eta(u^m))\cdot A^2u_t^m\right| \\
&\leq C\int_0^t \|u_t^m\|_{H^2(\Omega)}\|A^2u_t^m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \epsilon\int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^4(\Omega)} + C_\epsilon\int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^2(\Omega)}, \qquad (2.57)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|I_4| &= \left|\int_0^t \int_\Omega A^2u_t^m\cdot\eta(u_t^m)\nabla(\tau(\chi^\mu))\right| \\
&\leq C\int_0^t \|A^2u_t^m\|_{L^2(\Omega)}\|u_t^m\|_{H^2(\Omega)}\|\chi^\mu\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq \epsilon\int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^4(\Omega)} + C_\epsilon\int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^2(\Omega)}. \qquad (2.58)
\end{aligned}$$

Temos ainda, por (1.25), que

$$\int_0^t \int_\Omega A^2u_t^m\cdot A^2u_t^m = \int_0^t \|A^2u_t^m\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C\int_0^t \|u_t^m\|_{H^4(\Omega)}. \qquad (2.59)$$

Finalmente,

$$\int_0^t \int_\Omega f\cdot A^2u_t^m \leq \epsilon\int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^4(\Omega)} + C_\epsilon\int_0^t \|f\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (2.60)$$

Logo, somando (2.52)-(2.60) e usando a desigualdade (1.32), obtemos

$$C\|u_t^m(t)\|^2_{H^2(\Omega)} + C\int_0^t \|u_t^m\|_{H^4(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|Av_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)} + 5\epsilon\int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^4(\Omega)}$$
$$+C_\epsilon\left(\int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^2(\Omega)} + \|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^t\left(\int_0^s \|u_t^m(r)\|^2_{H^2(\Omega)}dr\right)\right).$$

Desse modo, podemos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e aplicar o Lema de Gronwall para concluir que

$$u^m \text{ é limitada em } W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)). \tag{2.61}$$

Escolhendo u_{tt}^m como função teste na equação (2.46), obtemos facilmente

$$||u_{tt}^m||_{L^2(\Omega)} \leq C|| - \mathcal{H}(\tau(1-\chi^\mu)u^m) - \mathcal{K}(\tau(\chi^\mu)u_t^m) - \nu A^2 u_t^m + \lambda f||_{L^2(\Omega)}.$$

Usando as estimativas obtidas acima e observando que $\chi^\mu \in X$, temos

$$u_{tt}^m \text{ limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.62}$$

Notando que temos as imersões compactas

$$H^4(\Omega) \subset H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

podemos então usar os métodos de compacidade da Proposiçã 1.1, obtendo assim a existência de uma subsequência de u^m, que por simplicidade não renomearemos, e uma função u^μ tal que as seguintes convergências são válidas:

$$u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u^\mu \text{ in } H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \tag{2.63}$$
$$u^m \rightharpoonup u^\mu \text{ in } H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \tag{2.64}$$
$$u^m \to u^\mu \text{ in } C^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega)). \tag{2.65}$$

Essas convergências nos permite ainda passar o limite quando $m \to +\infty$ na equação (2.46) e concluir que u^μ é uma solução da equação (2.42). Usando uma imersão do Corolário 1.1, concluímos ainda que $u^\mu \in H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega))$.

Para provar unicidade, considere duas soluções u_1^μ, u_2^μ de (2.42) e defina u^μ : $u_1^\mu - u_2^\mu$; a função u^μ satisfaz a seguinte equação:

$$u_{tt}^\mu + \mathcal{H}(\tau(1-\chi^\mu)u^\mu) + \mathcal{K}(\tau(\chi^\mu)u_t^\mu) + \nu A^2 u_t^\mu = 0. \tag{2.66}$$

Multiplicando (2.66), por u_t^μ, integrando e usando (1.6) e (1.8), temos

$$\frac{1}{2}\|u_t^\mu(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t \|u_t^\mu\|^2_{H^2(\Omega)} \leq \epsilon\int_0^t \|u_t^\mu\|^2_{H^2(\Omega)} + C_\epsilon\int_0^t \|u^\mu\|^2_{H^2(\Omega)}. \qquad (2.67)$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, usando a desigualdade (1.32) e o Lema de Gronwall, obtemos

$$\frac{1}{2}\|u_t^\mu(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t \|u_t^\mu\|^2_{H^2(\Omega)} \leq 0,$$

ou seja, $u_t^\mu = 0$ q.t.p. em $\Omega \times [0,T]$. Assim, podemos concluir, da desigualdade (1.33) da demonstração do Lema 1.2, que $u^\mu = 0$ e portanto a equação (2.42) possui única solução.

Resta então analizar a primeira equação (2.41). Como $\chi^\mu \in X$, em particular temos $\lambda g - l\chi_t^\mu \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, e portanto pelo Teorema 1.4 (Regularidade Parabólica), existe uma única solução θ^μ da equação (2.41) com a seguinte regularidade:

$$\theta^\mu \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

□

Seja T_λ^2 o operador solução do Problema 2.5. Do Lema 2.2 acima, temos $(\theta^\mu, u^\mu) \in B$ e portanto o operador T_λ^2 está bem definido para todo $\lambda \in [0,1]$.

Definimos assim a família de operadores $T_\lambda : B \to B$ como a composição $T_\lambda := T_\lambda^2 \circ T_\lambda^1$. Os resultados acima permitem concluir que T_λ está bem definido para todo $\lambda \in [0,1]$.

2.3.2 Propriedades do operador T_λ

Nesta seção vamos provar algumas propriedades do operador definido na seção anterior que serão necessárias para a aplicação do teorema do ponto fixo de Leray-Schauder.

Começamos com o seguinte:

Lema 2.3 *O operador T_λ definido na seção anterior é contínuo em relação à λ, uniformemente em subconjuntos limitados de B.*

Demonstração. Consideremos $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$, $\chi_i^\mu = T^1_{\lambda_i}(\overline{\theta}^\mu, \overline{u}^\mu)$, $(\theta_i^\mu, u_i^\mu) = T^2_{\lambda_i}(\chi_i^\mu)$, e defina $(\theta^\mu, \chi^\mu, u^\mu) := (\theta_1^\mu - \theta_2^\mu, \chi_1^\mu - \chi_2^\mu, u_1^\mu - u_2^\mu)$. Temos assim a tripla $(\theta^\mu, \chi^\mu, u^\mu)$ satisfazendo q.t.p. em $\Omega \times (0, T)$ as equações

$$\theta_t^\mu + l\chi_t^\mu + A_N\theta^\mu = (\lambda_1 - \lambda_2)g \tag{2.68}$$

$$\chi_t^\mu + A_N\chi^\mu + \beta_\mu(\chi_1^\mu) - \beta_\mu(\chi_2^\mu) + \gamma(\chi_1^\mu) - \gamma(\chi_2^\mu) = (\lambda_1 - \lambda_2)\overline{\omega} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned} u_{tt}^\mu + \mathcal{H}(\tau(1-\chi_1^\mu)u^\mu) + \mathcal{H}((\tau(1-\chi_1^\mu) - \tau(1-\chi_2^\mu))u_2^\mu) + \mathcal{K}(\tau(\chi_1^\mu)u_t^\mu) \\ + \mathcal{K}((\tau(\chi_1^\mu) - \tau(\chi_2^\mu))\partial_t u_2^\mu) + \nu A^2 u_t^\mu = (\lambda_1 - \lambda_2)f \end{aligned} \tag{2.70}$$

e as condições iniciais

$$\theta^\mu(0) = \chi^\mu(0) = u^\mu(0) = u_t^\mu(0) = 0.$$

Buscaremos agora estimativas para χ^μ, θ^μ e u^μ que dependam da diferença $\lambda_1 - \lambda_2$, o que implicará na continuidade do operador T_λ em relação à λ.

Começamos testanto a equação (2.69) por χ^μ e integrando no tempo. Usando o fato que β_μ e γ são funções Lipschitz, temos

$$\int_\Omega (\chi^\mu(t))^2 + \int_0^t \int_\Omega |\nabla\chi^\mu|^2 \leq C \int_0^t \int_\Omega (\chi^\mu)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \int_0^t \int_\Omega \overline{\omega}^2,$$

e então, usando o Lema de Gronwall, obtemos

$$\int_\Omega (\chi^\mu(t))^2 + \int_0^t \int_\Omega |\nabla\chi^\mu|^2 \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|^2. \tag{2.71}$$

Agora, testamos a equação (2.69) por χ_t^μ e integramos no tempo para obter

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\chi_t^\mu\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla\chi^\mu(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C \int_0^t \int_\Omega |\chi_t^\mu||\chi^\mu| + (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^t \int_\Omega |\overline{\omega}||\chi_t^\mu| \\ &\leq \epsilon \int_0^t \|\chi_t^\mu\|_{L^2(\Omega)} + C_\epsilon \int_0^t \|\chi^\mu\|_{L^2(\Omega)} + C_\epsilon(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \int_0^t \int_\Omega |\overline{\omega}|^2. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno em (2.72) e usando (2.71), concluímos que

$$\|\chi^\mu\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2| \tag{2.73}$$

Testamos agora a equação (2.69) por $A\chi^\mu$ e integramos no tempo:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\chi^\mu(t)|^2 + \int_0^t\int_\Omega |A\chi^\mu|^2 &\leq C\int_0^t\int_\Omega |\chi^\mu||A\chi^\mu| + |\lambda_1-\lambda_2|\int_0^t\int_\Omega |\overline{\omega}||A\chi^\mu| \\
&\leq \epsilon\int_0^t\int_\Omega |A\chi^\mu|^2 + C_\epsilon\int_0^t\int_\Omega |\chi^\mu|^2 \\
&+ C_\epsilon|\lambda_1-\lambda_2|^2\int_0^t\int_\Omega |\overline{\omega}|^2. \qquad (2.74)
\end{aligned}
$$

Obtemos que

$$
\|\chi^\mu\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C|\lambda_1-\lambda_2|. \qquad (2.75)
$$

Desta vez, testamos a equação (2.69) por $(A\chi^\mu + \beta_\mu(\chi_1^\mu) - \beta(\chi_2^\mu))_t$ e integramos no tempo:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \|\nabla\chi_t^\mu\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega \chi_t^\mu(\beta_\mu'(\chi_1^\mu)\partial_t\chi_1^\mu - \beta_\mu'(\chi_2^\mu)\partial_t\chi_2^\mu) \\
+\frac{1}{2}\|A\chi^\mu(t) + \beta_\mu(\chi_1^\mu(t)) - \beta_\mu(\chi_2^\mu(t))\|^2_{L^2(\Omega)} \\
= \int_0^t\int_\Omega [(\lambda_1-\lambda_2)\overline{\omega} - (\gamma(\chi_1^\mu) - \gamma(\chi_2^\mu))](A\chi^\mu + \beta_\mu(\chi_1^\mu) - \beta_\mu(\chi_2^\mu))_t. \qquad (2.76)
\end{aligned}
$$

Integrando por partes, temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^t\int_\Omega [(\lambda_1-\lambda_2)\omega_t - (\gamma'(\chi_1^\mu)\partial_t\chi_1^\mu - \gamma'(\chi_2^\mu)\partial_t\chi_2^\mu)](A\chi^\mu + \beta_\mu(\chi_1^\mu) - \beta_\mu(\chi_2^\mu)) \\
+\int_\Omega [(\lambda_1-\lambda_2)\overline{\omega}(t) - (\gamma(\chi_1^\mu(t)) - \gamma(\chi_2^\mu(t)))](A\chi^\mu(t) + \beta_\mu(\chi_1^\mu(t)) - \beta_\mu(\chi_2^\mu(t))) \\
\leq |\lambda_1-\lambda_2|\int_0^t \|\overline{\omega}_t\|_{L^2(\Omega)}\|A\chi^\mu + \beta_\mu(\chi_1^\mu) - \beta_\mu(\chi_2^\mu)\|_{L^2(\Omega)} \\
+C\int_0^t \|\partial_t\chi^\mu\|_{L^2(\Omega)}\|A\chi^\mu + \beta_\mu(\chi_1^\mu) - \beta_\mu(\chi_2^\mu)\|_{L^2(\Omega)} \\
+C\int_0^t \|\chi^\mu\|_{H^2(\Omega)}\|A\chi^\mu + \beta_\mu(\chi_1^\mu) - \beta_\mu(\chi_2^\mu)\|_{L^2(\Omega)} \\
+\|(\lambda_1-\lambda_2)\overline{\omega}(t) - (\gamma(\chi_1^\mu(t)) - \gamma(\chi_2^\mu(t)))\|^2_{L^2(\Omega)} \\
+\frac{1}{4}\|A\chi^\mu(t) + \beta_\mu(\chi_1^\mu(t)) - \beta_\mu(\chi_2^\mu(t))\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (2.77)
\end{aligned}
$$

Usando o Lema de Gronwall, que γ é Lipschitz, que β_μ' é limitada (pois β_μ é Lipschitz), (2.73) e (2.75), não é difícil concluir que

$$
\|\chi^\mu\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))\cap H^1(0,T;H^1(\Omega))} \leq C|\lambda_1-\lambda_2|. \qquad (2.78)
$$

Agora, testamos a equação (2.68) por θ^μ e integramos no tempo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega |\theta^\mu(t)|^2 + \int_0^t\int_\Omega |\nabla\theta^\mu|^2 &\leq |\lambda_1-\lambda_2|^2\int_0^t\int_\Omega g^2 + C\int_0^t\int_\Omega (\chi_t^\mu)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega (\theta^\mu)^2 \end{aligned} \tag{2.79}$$

onde, pelo Lema de Gronwall e por (2.78), temos

$$\|\theta^\mu\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C|\lambda_1-\lambda_2| \tag{2.80}$$

Testamos desta vez a equação (2.68) por θ_t^μ e integramos no tempo:

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega |\theta_t^\mu|^2 + \int_\Omega |\nabla\theta^\mu(t)|^2 &\leq C_\epsilon|\lambda_1-\lambda_2|^2\int_0^t\int_\Omega g^2 + C_\epsilon\int_0^t\int_\Omega (\chi_t^\mu)^2 \\ &+ \epsilon\int_0^t\int_\Omega |\theta_t^\mu|^2 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, somando (2.79) e (2.81), usando o Lema de Gronwall e (2.78), concluímos que

$$\|\theta^\mu\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq C|\lambda_1-\lambda_2| \tag{2.82}$$

Finalmente, testamos a equação (2.70) por $A^2u_t^\mu$, integramos no tempo e estimamos termo a termo:

$$\int_0^t\int_\Omega u_{tt}^\mu\cdot A^2u_t^\mu = \frac{1}{2}\|Au_t^\mu(t))\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{2.83}$$

$$\int_0^t\int_\Omega \mathcal{H}(\tau(1-\chi_1^\mu)u^\mu)\cdot A^2u_t^\mu = I_1 + I_2, \tag{2.84}$$

onde, usando que $\tau(1-\chi^\mu) \leq 1-\chi^\mu$, temos

$$\begin{aligned}|I_1| &= \left|\int_0^t\int_\Omega \tau(1-\chi_1^\mu)div(\eta(u^\mu))\cdot A^2u_t^\mu\right| \\ &\leq \int_0^t\int_\Omega |\tau(1-\chi_1^\mu)||div(\eta(u^\mu))||A^2u_t^\mu| \\ &\leq C\int_0^t \|1-\chi_1^\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\|A^2u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)}\|u^\mu\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \epsilon\int_0^t \|A^2u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_\epsilon\int_0^t \|1-\chi_1^\mu\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|u^\mu\|_{H^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \tag{2.85}$$

e

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left|\int_0^t\int_\Omega A^2u_t^\mu\cdot\eta(u^\mu)\nabla(\tau(1-\chi_1^\mu))\right| \\
&\leq \int_0^t\int_\Omega |A^2u_t^\mu||\eta(u^\mu)||\nabla(\tau(1-\chi_1^\mu))| \\
&\leq \int_0^t \|A^2u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)}\|\eta(u^\mu)\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla\chi_1^\mu\|_{L^3(\Omega)} \\
&\leq C\int_0^t \|A^2u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\chi_1^\mu\|_{L^3(\Omega)}\|\eta(u^\mu)\|_{L^6(\Omega)} \\
&\leq C\int_0^t \|A^2u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)}\|u^\mu\|_{H^2(\Omega)}\|\chi_1^\mu\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq \epsilon\int_0^t \|A^2u_t^\mu\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\epsilon\|\chi_1^\mu\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}\int_0^t\|u^\mu\|^2_{H^2(\Omega)}, \qquad (2.86)
\end{aligned}$$

$$\int_0^t\int_\Omega \mathcal{H}((\tau(1-\chi_1^\mu)-\tau(1-\chi_2^\mu))u_2^\mu)\cdot A^2u_t^\mu = I_3+I_4, \qquad (2.87)$$

onde, similarmente, podemos estimar

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq C\int_0^t \|\chi^\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\|A^2u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)}\|u_2^\mu\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq \epsilon\int_0^t \|A^2u_t^\mu\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\epsilon\|u_2^\mu\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}\int_0^t\|\chi^\mu\|^2_{H^2(\Omega)} \qquad (2.88)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|I_4| &\leq C\int_0^t \|u_2^\mu\|_{H^2(\Omega)}\|\chi^\mu\|_{H^2(\Omega)}\|A^2u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \epsilon\int_0^t \|A^2u_t^\mu\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\epsilon\|u_2^\mu\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}\int_0^t\|\chi^\mu\|^2_{H^2(\Omega)}. \qquad (2.89)
\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\int_0^t\int_\Omega \mathcal{K}(\tau(\chi_1^\mu)u_t^\mu)\cdot A^2u_t^\mu = I_5+I_6 \qquad (2.90)$$

onde

$$\begin{aligned}
|I_5| &= \left|\int_0^t\int_\Omega \tau(\chi_1^\mu)div(\eta(u_t^\mu))\cdot A^2u_t^\mu\right| \\
&\leq C\int_0^t \|u_t^\mu\|_{H^2(\Omega)}\|A^2u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \epsilon\int_0^t \|u_t^\mu\|^2_{H^4(\Omega)} + C_\epsilon\int_0^t\|u_t^\mu\|^2_{H^2(\Omega)}, \qquad (2.91)
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
|I_6| &= \left| \int_0^t \int_\Omega A^2 u_t^\mu \cdot \eta(u_t^\mu) \nabla(\tau(\chi_1^\mu)) \right| \\
&\leq \int_0^t \|A^2 u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)} \|\eta(u_t^\mu)\|_{L^3(\Omega)} \|\nabla \chi_1^\mu\|_{L^6(\Omega)} \\
&\leq C \int_0^t \|u_t^\mu\|_{H^2(\Omega)} \|A^2 u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \epsilon \int_0^t \|u_t^\mu\|_{H^4(\Omega)}^2 + C_\epsilon \int_0^t \|u_t^\mu\|_{H^2(\Omega)}^2, \qquad (2.92)
\end{aligned}
$$

e temos

$$
\int_0^t \int_\Omega \mathcal{K}((\tau(\chi_1^\mu) - \tau(\chi_2^\mu)) \partial_t u_2^\mu) \cdot A^2 u_t^\mu = I_7 + I_8, \qquad (2.93)
$$

onde

$$
\begin{aligned}
|I_7| &= \left| \int_0^t \int_\Omega (\tau(\chi_1^\mu) - \tau(\chi_2^\mu)) div(\eta(\partial_t u_2^\mu)) \cdot A^2 u_t^\mu \right| \\
&\leq C \int_0^t \int_\Omega |\chi^\mu| |div(\eta(\partial_t u_2^\mu))| |A^2 u_t^\mu| \\
&\leq C \int_0^t \|\chi^\mu\|_{H^2(\Omega)} \|\partial_t u_2^\mu\|_{H^2(\Omega)} \|A^2 u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \epsilon \int_0^t \|A^2 u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_\epsilon \|\chi^\mu\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \int_0^t \|\partial_t u_2^\mu\|_{H^2(\Omega)}^2 \qquad (2.94)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
|I_8| &= \left| \int_0^t \int_\Omega A^2 u_t^\mu \cdot \eta(\partial_t u_2^\mu) \nabla(\tau(\chi_1^\mu) - \tau(\chi_2^\mu)) \right| \\
&\leq C \int_0^t \int_\Omega |A^2 u_t^\mu| |\eta(\partial_t u_2^\mu)| |\nabla \chi^\mu| \\
&\leq \epsilon \int_0^t \|A^2 u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_\epsilon \|\chi^\mu\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \int_0^t \|\partial_t u_2^\mu\|_{H^2(\Omega)}^2. \qquad (2.95)
\end{aligned}
$$

Temos também

$$
\nu \int_0^t \int_\Omega A^2 u_t^\mu \cdot A^2 u_t^\mu = \nu \int_0^t \|A^2 u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)}^2. \qquad (2.96)
$$

Finalmente,

$$
(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^t \int_\Omega f \cdot A^2 u_t^\mu \leq C_\epsilon |\lambda_1 - \lambda_2| \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \epsilon \int_0^t \|A^2 u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 \qquad (2.97)
$$

Somamos (2.83)-(2.97), usamos a desigualdade (1.32), imersões do Teorema 1.1, e aplicamos o Lema de Gronwall para concluir que

$$\|u^\mu\|_{H^1(0,T;H^4(\Omega))} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|, \tag{2.98}$$

e portanto, novamente por imersão do Teorema 1.1,

$$\|u^\mu\|_{H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega))} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|. \tag{2.99}$$

Por (2.82) e (2.99), concluímos que T_λ é contínua em λ, uniformemente em subconjuntos limitados de B. $\square$

Lema 2.4 *Cada possível ponto fixo de T_λ é limitado em $B := H^1(0,T;L^2(\Omega)) \times H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega))$, para todo $\lambda \in [0,1]$.*

Demonstração Vamos estimar agora o conjunto de todos os pontos fixos de T_λ em B. Cada ponto fixo $(\theta^\mu, u^\mu) \in B$ satisfaz o seguinte problema:

$$\theta^\mu_t + l\chi^\mu_t + A_N\theta^\mu = \lambda g \quad \text{em } \Omega \times (0,T) \tag{2.100}$$

$$\chi^\mu_t + A_N\chi^\mu + \beta_\mu(\chi^\mu) + \gamma(\chi^\mu) = \lambda(\theta^\mu + T_{1/\epsilon}(\tfrac{|\eta(u^\mu)|^2}{2})) \quad \text{em } \Omega \times (0,T) \tag{2.101}$$

$$u^\mu_{tt} - \mathcal{H}(\tau(1-\chi^\mu)u^\mu) + \mathcal{K}(\tau(\chi^\mu)u^\mu_t) + \nu A^2 u^\mu_t = \lambda f \quad \text{em } \Omega \times (0,T) \tag{2.102}$$

sujeito às condições iniciais

$$\theta^\mu(0) = \theta_0 \ \text{ em } \Omega,$$

$$\chi^\mu(0) = \chi_0 \ \text{ em } \Omega,$$

$$u^\mu(0) = u_0, \ u^\mu_t(0) = v_0 \ \text{ em } \Omega,$$

e às mesmas condições de fronteira do Problema 2.1.

Começamos testando a equação (2.101) por χ^μ e integramos no tempo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega |\chi^\mu(t)|^2 + \int_0^t\int_\Omega |\nabla\chi^\mu|^2 &\leq C_1 + C\int_0^t\int_\Omega (\chi^\mu)^2 \\ &+ \int_0^t\int_\Omega \theta^\mu\chi^\mu + \frac{1}{2}\|\chi_0\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.103}$$

Agora, testamos a equação (2.100) por $\theta^\mu + l\chi^\mu$ e integramos no tempo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega |\theta^\mu(t) + l\chi^\mu(t)|^2 + \int_0^t\int_\Omega |\nabla\theta^\mu|^2 + l\int_0^t\int_\Omega \nabla\theta^\mu\nabla\chi^\mu \\ = \frac{1}{2}\|\theta_0 + l\chi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega g(\theta^\mu + l\chi^\mu).\end{aligned} \tag{2.104}$$

Multiplicando (2.103) por $1+\frac{1}{2}l^2$ e somando com (2.104) obtemos sem muita dificuldade

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left(\frac{1}{6}(\theta^\mu(t))^2 + \frac{1}{2}(\chi^\mu(t))^2\right) &+ \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega(|\nabla\theta^\mu|^2 + |\nabla\chi^\mu|^2) \\ &\le C(1 + \|\theta_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\chi_0\|^2_{L^2(\Omega)}) + \int_0^t \|g\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ C\int_0^t\int_\Omega(|\theta^\mu|^2 + |\chi^\mu|^2).\end{aligned} \tag{2.105}$$

Aplicando o Lema de Gronwall, temos

$$\chi^\mu, \theta^\mu \text{ limitados em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{2.106}$$

sendo a limitação (2.106) independente de μ.

Testamos agora a equação (2.101) por χ^μ_t e integramos no tempo:

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega |\chi^\mu_t|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\chi^\mu(t)|^2 + \int_\Omega \widehat{\beta}_\mu(\chi^\mu) \le C + \epsilon\int_0^t\int_\Omega |\chi^\mu_t|^2 \\ + C_\epsilon\left(\int_0^t\int_\Omega |\chi^\mu|^2 + \int_0^t\int_\Omega |\theta^\mu|^2\right).\end{aligned} \tag{2.107}$$

Usando (2.106), a Observação 2.1 para $\widehat{\beta}$ e o Teorema 1.2 (lembrando que $\beta = \partial\widehat{\beta}$), temos

$$-\int_\Omega \widehat{\beta}_\mu(\chi^\mu) \le M|\Omega| < +\infty$$

e portanto, usando o Lema de Gronwall, obtemos

$$\chi^\mu_t \text{ limitado em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.108}$$

com a limitação (2.108) também independente de μ.

Testamos a equação (2.100) por θ_t^μ e integramos no tempo:

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega |\theta_t^\mu|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\theta^\mu(t)|^2 \ &\leq \ \|\nabla\theta_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega |\theta_t^\mu|^2 \\ &+ \ l\int_0^t\int_\Omega |\chi_t^\mu|^2 + \int_0^t\int_\Omega g^2. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Por (2.108), temos $\theta_t^\mu \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, e portanto

$$\theta^\mu \ \text{ limitado } \ H^1(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.110}$$

com a limitação (2.110) também independente de μ. Vamos buscar agora estimativas para u^μ. Antes disso, precisamos de mais uma estimativa para χ^μ. Do fato de θ^μ, χ^μ serem limitados em $H^1(0,T;L^2(\Omega))$ e de $T_{1/\epsilon}(\frac{|\eta(u^\mu)|}{2})$ ser limitado, de forma similar à feita em (2.37)-(2.40), temos

$$\chi^\mu \ \text{ limitado em } \ L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)). \tag{2.111}$$

Procedendo de forma semelhante à (2.83)-(2.97) e usando (2.111), temos u^μ limitado em $H^1(0,T;H^4(\Omega))$, e portanto

$$u^\mu \ \text{ limitado em } \ H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega)). \tag{2.112}$$

Assim, podemos concluir de (2.110)-(2.112) que existe $M > 0$ tal que

$$\|(\theta^\mu, u^\mu)\|_B \leq M.$$

$\square$

Observação 2.3 *Como visto na demonstração do Lema 2.4 acima, as limitações (2.106), (2.108) e (2.110) independem de μ. Segue desse fato então que as limitações da Observação 2.2 são válidas.*

Além disso, se temos $T_{1/\epsilon}(|\eta(u^\epsilon)|^2/2)$ limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ em relação à ϵ, então as estimativas (2.103)-(2.105), (2.107) e (2.109) não dependem de ϵ, ou seja, as limitações (2.106), (2.108) e (2.110) também não dependem de ϵ.

Lema 2.5 *O operador T_λ é contínuo e compacto sobre B, para cada $\lambda \in [0,1]$.*

Demonstração Antes de mostrar continuidade e compacidade de T_λ sobre B, vamos buscar algumas estimativas adicionais. Começamos diferenciando a equação de χ^μ do Problema 2.4, testamos por $J^{-1}(\chi^\mu_{tt})$, e integramos no tempo:

$$\int_0^t \|\chi^\mu_{tt}\|^2_{H^1(\Omega)'} \leq I_9 + I_{10} + I_{11} + I_{12}, \tag{2.113}$$

onde

$$I_9 = \left|\int_0^t \int_\Omega \nabla\chi^\mu_t \nabla J^{-1}(\chi^\mu_{tt})\right| \leq C\int_0^t \|\chi^\mu_t\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{4}\int_0^t \|\chi^\mu_{tt}\|^2_{H^1(\Omega)'}, \tag{2.114}$$

$$\begin{aligned}
I_{10} &= \left|\int_0^t \int_\Omega (\beta'_\mu(\chi^\mu) + \gamma'(\chi^\mu))\chi^\mu_t J^{-1}(\chi^\mu_{tt})\right| \\
&\leq \|\beta'_\mu(\chi^\mu) + \gamma'(\chi^\mu)\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))}\int_0^t \|J^{-1}(\chi^\mu_{tt})\|_{L^2(\Omega)}\|\chi^\mu_t\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{4}\int_0^t \|\chi^\mu_{tt}\|^2_{H^1(\Omega)'} + C\int_0^t \|\chi^\mu_t\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.115}$$

de modo que, para estimar I_{10} usamos que β_μ e γ são Lipschitz, e que $\chi^\mu \in L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega))$;

$$I_{11} = \left|\int_0^t \int_\Omega \theta^\mu_t J^{-1}(\chi^\mu_{tt})\right| \leq \frac{1}{8}\int_0^t \|\chi^\mu_{tt}\|^2_{H^1(\Omega)'} + 2\int_0^t \|\theta^\mu_t\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.116}$$

e

$$\begin{aligned}
I_{12} &= \left|\int_0^t \int_\Omega T'_{1/\epsilon}\left(\frac{|\eta(u^\mu)|^2}{2}\right)\eta(u^\mu_t)\eta(u^\mu)J^{-1}(\chi^\mu_{tt})\right| \\
&\leq C\|\eta(u^\mu)\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))}\int_0^t \|\eta(u^\mu_t)\|_{L^4(\Omega)}\|\chi^\mu_{tt}\|_{H^1(\Omega)'} \\
&\leq \frac{1}{8}\int_0^t \|\chi^\mu_{tt}\|^2_{H^1(\Omega)'} + C\|u^\mu\|^2_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}\int_0^t \|u^\mu_t\|^2_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Somando (2.113)-(2.117), concluímos que

$$\chi^\mu \text{ limitado em } H^2(0,T;H^1(\Omega)'). \tag{2.118}$$

Diferenciamos agora a equação (2.41) do Problema 2.5, multiplicamos por $J^{-1}(\theta_{tt}^{\mu})$, integramos no tempo e usamos (2.118), obtendo de forma semelhante à feita em (2.113)-(2.117)

$$\theta^{\mu} \text{ limitado em } H^2(0,T;H^1(\Omega)'). \tag{2.119}$$

Desta vez, testamos a equação (2.41) do Problema 2.5 por θ_t^{μ} e integramos no tempo:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega (\theta_t^\mu)^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\theta^\mu(t)|^2 &\leq \frac{1}{2}\|\nabla\theta^\mu(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\int_0^t\int_\Omega g^2 \\ &+ \frac{1}{4}\int_0^t\int_\Omega(\theta_t^\mu)^2 + C\int_0^t\int_\Omega(\chi_t^\mu)^2 \\ &+ \frac{1}{4}\int_0^t\int_\Omega(\theta_t^\mu)^2. \end{aligned} \tag{2.120}$$

Recordando a desigualdade (2.39) para χ^{μ}, obtemos

$$\theta^{\mu} \text{ limitado em } L^\infty(0,T;H^1(\Omega)). \tag{2.121}$$

Agora, testamos a equação (2.41) por $A_N\theta_t^{\mu}$ e integramos:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega |\nabla\theta_t^\mu|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |A_N\theta^\mu(t)|^2 &\leq \frac{1}{2}\|A_N\theta^\mu(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left|\int_0^t\int_\Omega gA_N\theta_t^\mu\right| \\ &+ \left|\int_0^t\int_\Omega l\chi_t^\mu A_N\theta_t^\mu\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\|\theta_0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left|\int_0^t\int_\Omega g_tA_N\theta^\mu\right| + \left|\int_\Omega g(t)A_N\theta^\mu(t)\right| \\ &+ \left|\int_\Omega g(0)A_N\theta^\mu(0)\right| + \left|l\int_0^t\int_\Omega \nabla\chi_t^\mu\cdot\nabla\theta_t^\mu\right| \\ &\leq \|\theta_0\|_{H^2(\Omega)}^2 + C\|g\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega|A_N\theta^\mu|^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega|A_N\theta^\mu(t)|^2 \\ &+ C\int_0^t\int_\Omega|\nabla\chi_t^\mu|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega|\nabla\theta_t^\mu|^2. \end{aligned} \tag{2.122}$$

Recordando novamente a desigualdade (2.39) para χ^{μ}, usando regularidade elíptica e o Lema de Gronwall, obtemos

$$\theta^{\mu} \text{ limitado em } H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_N^2(\Omega)). \tag{2.123}$$

Agora, escrevendo a primeira equação do Problema 2.5 como

$$\theta_t^\mu = -l\chi_t^\mu - A_N\theta^\mu + \lambda g$$

e usando as estimativas obtidas acima, obtemos

$$\theta_t^\mu \text{ limitado em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.124}$$

Finalmente, procedendo numa forma semelhante à feita em (2.49)-(2.62), obtemos

$$u^\mu \text{ limitado em } H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)). \tag{2.125}$$

Vamos agora à demonstração do Lema. A compacidade de T_λ sobre B segue diretamente das estimativas (2.119)-(2.125) e por métodos de compacidade da Proposição 1.1. De fato, seja (θ_n^μ, u_n^μ) uma sequência limitada em $H^1(0,T;L^2(\Omega)) \times H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega))$. De (2.119)-(2.124), temos

$$\begin{aligned}\theta_n^\mu \text{ limitada em } H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega))\\ \cap L^\infty(0,T;H_N^2(\Omega))\end{aligned}$$

e a limitação (2.125) para u_n^μ, ambas independentes de n. Notando novamente que temos as imersões compactas

$$H^4(\Omega) \subset H^2(\Omega) \subset W^{1,4}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

podemos usar então os métodos de compacidade da Proposição 1.1 para obter uma subsequência (que por simplicidade não renomearemos) e funções θ^μ e u^μ tais que as seguintes convergências são válidas, para todo $1 \le p < \infty$ e para todo $\rho > 0$:

$$\begin{aligned}\theta_n^\mu \to \theta^\mu \text{ em } W^{1,p}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^{1-\rho}(\Omega)) \cap L^p(0,T;H_N^2(\Omega)),\\ u_n^\mu \to u^\mu \text{ em } H^1(0,T;H^{4-\rho}(\Omega)) \cap W^{1,p}(0,T;H^2(\Omega)) \cap C^1(0,T;H^{2-\rho}(\Omega)).\end{aligned}$$

Em particular, temos $(\theta_n^\mu, u_n^\mu) \to (\theta^\mu, u^\mu)$ em $H^1(0,T;L^2(\Omega)) \times H^(0,T;W^{1,4}(\Omega)$, e portanto o operador T_λ é compacto.

Para provar que T_λ é contínua sobre B, tomamos uma sequência $\{(\overline{\theta}_n^\mu, \overline{u}_n^\mu)\}$ em B tal que

$$(\overline{\theta}_n^\mu, \overline{u}_n^\mu) \to (\overline{\theta}, \overline{u}) \text{ fortemente em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \times H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega)), \tag{2.126}$$

e consideramos $\chi_n^\mu := T_\lambda^1(\overline{\theta}_n^\mu, \overline{u}_n^\mu)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De (2.35), (2.39)-(2.40) e (2.118), temos

$$\chi_n^\mu \text{ limitada em } H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \\ \cap L^\infty(0,T;H_N^2(\Omega)).$$

Segue dos métodos de compacidade da Proposição 1.1, que existe uma subsequência, que por simplicidade não renomearemos, e uma função χ^μ tal que as seguintes convergências são válidas, para todo $1 \le p < \infty$ e para todo $\rho > 0$:

$$\begin{aligned} \chi_n^\mu \to \chi^\mu &\text{ em } C^1(0,T;H^1(\Omega)') \cap C^0(0,T;H^{2-\rho}(\Omega)), \\ \chi_n^\mu \to \chi^\mu &\text{ em } W^{1,p}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^{1-\rho}(\Omega)) \cap L^p(0,T;H_N^2(\Omega)), \\ \chi_n^\mu \rightharpoonup \chi^\mu &\text{ em } H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_N^2(\Omega)), \\ \chi_n^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \chi^\mu &\text{ em } H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \\ &\cap L^\infty(0,T;H_N^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.127}$$

Além disso, das convergências acima se conclui facilmente que χ^μ satisfaz a condição inicial (2.5). Usando (2.126)-(2.127), é fácil passar o limite na equação do Problema 2.4 e concluir que

$$\chi^\mu = T_\lambda^1(\overline{\theta}^\mu, \overline{u}^\mu).$$

Portanto, concluímos que as convergências em (2.127) valem ao longo de toda sequência $\{\chi_n^\mu\}$.

Consideramos agora a sequência $(\theta_n^\mu, u_n^\mu) := T_\lambda^2(\chi_n^\mu) = T_\lambda(\overline{\theta}_n^\mu, \overline{u}_n^\mu)$. De (2.119)-(2.124), obtemos

$$\theta_n^\mu \text{ limitada em } H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \\ \cap L^\infty(0,T;H_N^2(\Omega)).$$

Em vista de (2.125) e por métodos de compacidade da Proposição 1.1, deduzimos que existem subsequências adequadas (as quais não renomearemos) de $\{\theta_n^\mu\}$ e $\{u_n^\mu\}$, e duas funções limites θ^μ e u^μ tais que para todo $1 \le p < \infty$ e para todo $\rho > 0$:

$$\begin{aligned} u_n^\mu \to u^\mu &\text{ em } H^1(0,T;H^{4-\rho}(\Omega)) \cap W^{1,p}(0,T;H^2(\Omega)) \cap C^1(0,T;H^{2-\rho}(\Omega)), \\ u_n^\mu \rightharpoonup u^\mu &\text{ em } H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \\ u_n^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u^\mu &\text{ em } H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \end{aligned} \tag{2.128}$$

enquanto que, para $\{\theta_n^\mu\}$ e θ^μ, as mesmas convergências como em (2.127) são válidas. Em particular, $u_n^\mu \to u^\mu$ em $H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega))$, e portanto

$$(\theta_n^\mu, u_n^\mu) \to (\theta^\mu, u^\mu) \text{ fortemente em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \times H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega)). \tag{2.129}$$

As convergências em (2.128) e (2.127) relativas à θ_n^μ permitem concluir facilmente que θ^μ e u^μ cumprem as condições iniciais (2.4) e (2.6) respectivamente.

Observe que, pela definição do operador τ, temos

$$|\tau(\chi_n^\mu) - \tau(\chi^\mu)| \leq |\chi_n^\mu - \chi^\mu|,$$

e pelas convergências (2.127) de χ_n^μ, temos em particular que

$$\tau(\chi_n^\mu) \to \tau(\chi^\mu) \text{ em } C(0,T;H^1(\Omega)),$$

o mesmo valendo para $1-\chi_n^\mu$. Com isso e as convergências (2.128) para u_n^μ, facilmente se passa o limite na segunda equação do Problema 2.5 e conclui-se que o par (u^μ, χ^μ) satisfaz esta mesma equação sobre $\Omega \times (0,T)$.

De forma semelhante, as convergências (2.127) para $\{\chi_n^\mu\}$ e $\{\theta_n^\mu\}$ nos permite concluir que (θ^μ, χ^μ) satisfazem a primeira equação no Problema 2.5 sobre $\Omega \times (0,T)$. Concluímos dessa forma que

$$(\theta^\mu, u^\mu) = T_\lambda^2(\chi^\mu) = T_\lambda(\overline{\theta}^\mu, \overline{u}^\mu),$$

e que (2.129) valem ao longo de toda a sequência $\{(\theta_n^\mu, u_n^\mu)\}$.

Mostramos assim que o operador T_λ é contínuo e compacto em relação à B. $\square$

Observação 2.4 *Das Observações 2.2 e 2.3, temos que χ^μ é limitado em $H^1(0,T;H^1(\Omega))$ em relação à μ. Logo, as estimativas (2.120)-(2.122) são independendentes de μ, e portanto as limitações (2.123) e (2.124) independem de μ.*

2.3.3 Demonstração da Proposição 2.1

Para podermos aplicar o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder, falta ainda observar que para $\lambda = 0$, o Problema 2.4 possui única solução devido à Proposição 1.5. Com essa informação, é fácil ver que, para $\lambda = 0$, a primeira equação do

Problema 2.5 possui única solução pela teoria de equações parabólicas (Teorema 1.4), e que a segunda equação do Problema 2.5 possui única solução pelo método de Galerkin (conforme demonstração do Lema 2.2).

Com isso, e os Lemas provados anteriormente, estamos em condições de usar o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder para concluir que o operador T_λ tem um ponto fixo (θ^μ, u^μ) em $\lambda = 1$, isto é, existe uma tripla $(\theta^\mu, \chi^\mu, u^\mu)$ que satisfaz o Problema 2.2 com as seguintes regularidades:

$$\theta^\mu \in H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)), \tag{2.130}$$

$$\chi^\mu \in H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)), \tag{2.131}$$

$$u^\mu \in H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)). \tag{2.132}$$

2.4 Demonstração do Teorema 2.1

2.4.1 Existência de soluções para o Problema 2.3

Vamos buscar agora estimativas independentes de μ sobre a solução do Problema 2.2, que nos permitirá passar o limite quando $\mu \downarrow 0$.

Pelas Observações 2.2, 2.3 e 2.4, temos

$$\chi^\mu, \theta^\mu \text{ limitadas em } W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)), \tag{2.133}$$

e, em particular, a limitação

$$\beta_\mu(\chi^\mu) \ \text{ limitada em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Agora, procedendo de maneira similar à (2.52)-(2.62), obtemos

$$u^\mu \text{ limitada em } H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)). \tag{2.134}$$

Assim, pelos métodos de compacidade da Proposição 1.1, temos as seguintes convergências (ao longo de subsequências) em μ:

$$\theta^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \theta^\epsilon \text{ em } W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)), \tag{2.135}$$

$$\theta^\mu \rightharpoonup \theta^\epsilon \text{ em } H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2_N(\Omega)), \tag{2.136}$$

$$\theta^\mu \to \theta^\epsilon \text{ em } C(0,T;H^1(\Omega)), \tag{2.137}$$

$$\chi^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \chi^\epsilon \text{ em } W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)), \tag{2.138}$$

$$\chi^\mu \rightharpoonup \chi^\epsilon \text{ em } H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2_N(\Omega)), \tag{2.139}$$

$$\chi^\mu \to \chi^\epsilon \text{ em } C(0,T;H^1(\Omega)), \tag{2.140}$$

$$\beta_\mu(\chi^\mu) \rightharpoonup \xi^\epsilon \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.141}$$

$$u^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u^\epsilon \text{ em } H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \tag{2.142}$$

$$u^\mu \rightharpoonup u^\epsilon \text{ em } H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \tag{2.143}$$

$$u^\mu \to u^\epsilon \text{ em } C^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega)). \tag{2.144}$$

Além disso, pela monotonicidade de β_μ, temos

$$(\beta_\mu(\chi) - \beta_\mu(\chi^\mu)\, , \chi - \chi^\mu) \geq 0 \quad \forall \chi \in \operatorname{dom}(\beta). \tag{2.145}$$

Usando (2.140) and (2.141) e tomando $\mu \to 0+$ na inequação (2.145), obtemos

$$(\beta^0(\chi) - \xi^\epsilon\, , \chi - \chi^\epsilon) \geq 0 \quad \forall \chi \in \operatorname{dom}(\beta),$$

onde $\beta^0(\chi)$ denota o elemento de $\beta(\chi)$ com norma minimal, e usamos o fato de que β_μ é a aproximação de Yosida de β e a Proposição 1.3 (ii), sobre propriedades de convergência da aproximação de Yosida.

Mas β^0 é a seção principal de β, de acordo com a Preposição 1.4 (veja também a Definição 1.1) sobre seções principais, e logo a última desigualdade implica

$$\chi^\epsilon \in \operatorname{dom}(\beta) \quad \text{e} \quad \xi^\epsilon \in \beta(\chi^\epsilon). \tag{2.146}$$

Usando argumentos similares aos usados para provar que o operador T_λ é contínuo e compacto, podemos passar o limite quando $\mu \to 0^+$ nas equações do Problema

2.2, e obter a quádrupla $(\theta^\epsilon, \chi^\epsilon, \xi^\epsilon, u^\epsilon)$ satisfazendo

$$\theta^\epsilon \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)), \tag{2.147}$$

$$\chi^\epsilon \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)), \tag{2.148}$$

$$\xi^\epsilon \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad \xi^\epsilon \in \beta(\chi^\epsilon), \tag{2.149}$$

$$u^\epsilon \in H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \tag{2.150}$$

e além disso resolvendo o Problema 2.3 "truncado"(veja (2.29)-(2.31)), visto que (2.146) implica que $\tau(\chi^\epsilon) = \chi^\epsilon$ e $\tau(1-\chi^\epsilon) = 1-\chi^\epsilon$, e com as convergências obtidas, é fácil verificar que satisfazem suas respectivas condições iniciais.

2.4.2 Existência de soluções para o Problema 2.1

Para provarmos o Teorema 2.1, resta apenas buscar estimativas independentes de ϵ.

Para isto, primeiramente, testamos a equação (2.31) por u_t^ϵ e integramos no tempo para obter, em vista das desigualdades (1.6) e (1.8), e imersões do Teorema 1.1,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t^\epsilon(t)|^2 + C\int_0^t \|u_t^\epsilon\|^2_{H^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{2}\int_0^t \|u_t^\epsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \\ &+ \frac{K_a^2}{C}\int_0^t \|u^\epsilon\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{C}\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.\end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall e a desigualdade (1.32) do Lema 1.2, obtemos

$$u^\epsilon \text{ limitada em } W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega)). \tag{2.151}$$

Devido à (2.151), temos $T_{1/\epsilon}(|\eta(u^\epsilon)|^2/2)$ limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Logo, pela Observação 2.3, temos

$$\theta^\epsilon, \chi^\epsilon \text{ limitadas em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{2.152}$$

Ainda, testanto a equação (2.30) do Problema 2.3 por $A_N\chi^\epsilon + \xi^\epsilon$ e integrando, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \|A_N\chi^\epsilon + \xi^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \epsilon\int_0^t \|A_N\chi^\epsilon + \xi^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+C_\epsilon\left(\int_0^t \|\chi_t^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\chi^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\theta^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|u^\epsilon\|^4_{H^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Em vista das estimativas obtidas acima e da monotonicidade de β, temos então

$$\xi^\epsilon \text{ limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Portanto, novamente pelos métodos de compacidade da Proposição 1.1, temos as seguintes convergências:

$$\theta^\epsilon \rightharpoonup \theta \text{ em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{2.153}$$

$$\theta^\epsilon \to \theta \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.154}$$

$$\chi^\epsilon \rightharpoonup \chi \text{ em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{2.155}$$

$$\chi^\epsilon \to \chi \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.156}$$

$$\xi^\epsilon \rightharpoonup \xi \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.157}$$

$$u^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega)), \tag{2.158}$$

$$u^\epsilon \rightharpoonup u \text{ em } H^1(0,T;H^2(\Omega)), \tag{2.159}$$

$$u^\epsilon \to u \text{ em } C(0,T;H^1(\Omega)). \tag{2.160}$$

Agora, observe que quando $v \in L^1(\Omega)$, usando o teorema da convergência dominada, obtemos facilmente que $T_{1/\epsilon}(v) \to v$ (pois $|T_{1/\epsilon}(v)| \leq |v|$). Quando, além disso, temos uma sequência $v^\epsilon \to v$ em $L^1(\Omega)$, usando que

$$|v(x,t) - T_{1/\epsilon}(v^\epsilon)(x,t)| \leq |v(x,t) - T_{1/\epsilon}(v)(x,t)| + |T_{1/\epsilon}(v)(x,t) - T_{1/\epsilon}(v^\epsilon)(x,t)|$$

e que

$$|T_{1/\epsilon}(v)(x,t) - T_{1/\epsilon}(v^\epsilon)(x,t)| \leq |v(x,t) - v^\epsilon(x,t)|,$$

concluímos que $T_{1/\epsilon}(v^\epsilon) \to v$ em $L^1(\Omega)$.

Como a convergência (2.160) implica $|\eta(u^\epsilon)|^2/2 \to |\eta(u)|^2/2$ em $C(0,T;L^1(\Omega))$, podemos usar a observação acima para obter

$$T_{1/\epsilon}(|\eta(u^\epsilon)|^2/2) \to |\eta(u)|^2/2 \;\text{ em }\; L^1(\Omega).$$

As convergências obtidas para ϵ e a observação acima nos permite então passar o limite quando $\epsilon \to 0^+$ em todos os termos das equações (2.29)-(2.31) do Problema 2.5. Além disso, usando (2.156) e (2.157) e procedendo como em (2.146), obtemos

$$\xi \in \beta(\chi).$$

Ademais, com as convergências obtidas, é fácil ver que θ, χ e u satisfazem suas respectivas condições iniciais.

Com isso, concluímos que (θ, χ, ξ, u) são soluções do Problema 2.1 e portanto o Teorema 2.1 está provado.

Capítulo 3

Solidificação de material viscoelástico isocórico

Este capítulo é voltado para o estudo do segundo modelo matemático citado na introdução, ou seja, de um modelo que descreve mudanças de fases em materiais isocóricos, isto é, aqueles que possuam a característica de que ao sofrerem deformações, o fazem de forma a preservar o volume (materiais como borracha, por exemplo). Neste caso, a movimentação do material deve se dar por fluxo incompressível e, portanto, ter associado a ele uma pressão que funciona como multiplicador de Lagrange.

Apresentaremos um resultado de existência e regularidade de soluções para este modelo. A demonstração disso seguirá uma linha semelhante àquela do capítulo anterior; especificaremos as condições iniciais e de fronteira, e as hipótoses sobre os dados do problema. À seguir, introduziremos problemas aproximados adequados que, além da dependência dos parâmetros do truncamento e da aproximação de Yosida como no capítulo anterior, dependerá também de um terceiro parâmetro associado à variante do método da compressibilidade artificial que utilizaremos. Como antes, obteremos a existência de soluções para este primeiro problema aproximado e a seguir iremos passando ao limite, um parâmetro por vez e em uma ordem adequada, para construir soluções de outros problemas aproximados em que os parâmetros vão sendo eliminados. Finalmente, obteremos uma solução do problema original.

3.1 Formulação do problema

Neste capítulo, consideramos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais não lineares, as quais são semelhantes às do capítulo anterior, mas com a condição adicional de incompressibilidade do fluxo associado à movimentação do material:

$$\theta_t + l\chi_t - \Delta\theta = g, \tag{3.1}$$

$$\chi_t - \Delta\chi + W'(\chi) \ni \theta - \theta_c + \frac{|\eta(u)|^2}{2}, \tag{3.2}$$

$$u_{tt} - div((1-\chi)\eta(u) + \chi\eta(u_t)) + \nu(-\Delta)^2 u_t + \nabla p = f, \tag{3.3}$$

$$div(u_t) = 0, \tag{3.4}$$

sujeito às seguintes condições de fronteira

$$u = \Delta u = 0 \qquad \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.5}$$

$$\partial_n \chi = 0 \qquad \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.6}$$

$$\partial_n \theta = 0 \qquad \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.7}$$

às condições iniciais

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad \text{em } \Omega, \tag{3.8}$$

$$\chi(0) = \chi_0 \qquad \text{em } \Omega, \tag{3.9}$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = v_0 \qquad \text{em } \Omega, \tag{3.10}$$

onde, como especificado na introdução, θ denota a temperatura, χ o campo de fases, u o vetor de pequenos deslocamentos, e p a pressão.

Vamos supor que o potencial W é como no capítulo anterior, ou seja,

$$W' = \beta + \gamma,$$

com $\beta := \partial\widehat{\beta}$ e $\gamma := \partial\widehat{\gamma}$, onde $\widehat{\beta}$ e $\widehat{\gamma}$ satisfazem

$$\widehat{\gamma} \in C^2([0,1]) \tag{3.11}$$

$$\widehat{\beta} : [0,1] \to [0,+\infty] \text{ é própria, s.c.i., convexa,} \tag{3.12}$$

$$\widehat{\beta}|_{(0,1)} \in C^{1,1}_{loc}(0,1). \tag{3.13}$$

As notações (1.4)-(1.5) e (1.10) à (1.13), e a identidade de Green (1.9) permitem escrever as equações (3.1)-(3.3) da seguinte forma abstrata:

$$\begin{aligned}
&\theta_t + l\chi_t + A_N\theta = g\\
&\chi_t + A_N\chi + \xi + \gamma(\chi) = \theta + \frac{|\eta(u)|^2}{2}\\
&u_{tt} + \mathcal{H}((1-\chi)u) + \mathcal{K}(\chi u_t) + \nu A^2 u_t + \nabla p = f,\\
&div(u_t) = 0,
\end{aligned}$$

para algum $\xi \in \beta(\chi)$,

Como no capítulo anterior, o problema que motiva o trabalho corresponde ao caso especial em que as contantes de Lamé são $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ e a matriz de viscosidade é dada por $b_{ii} = 1$ e $b_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $i, j = 1, 2, 3$. Também como no capítulo anterior e sem perda de generalidade matemática, tomamos $\theta_c = 0$.

Sendo assim, estaremos interessados em resolver o seguinte problema de valor inicial abstrato:

Problema 3.1 *Encontrar funções $\theta, \chi, \xi, p : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ e $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^3$ satisfazendo as condições iniciais (3.8)-(3.4), as condições de fronteira (3.5)-(3.7),*

$$\chi \in dom(\beta) \quad e \quad \xi \in \beta(\chi),$$

e as equações

$$\theta_t + l\chi_t + A_N\theta = g, \tag{3.14}$$

$$\chi_t + A_N\chi + \xi + \gamma(\chi) = \theta + \frac{|\eta(u)|^2}{2}, \tag{3.15}$$

$$u_{tt} + \mathcal{H}((1-\chi)u) + \mathcal{K}(\chi u_t) + \nu A^2 u_t + \nabla p = f. \tag{3.16}$$

$$div(u_t) = 0. \tag{3.17}$$

As hipóteses sobre as funções dadas e condições iniciais são

$$g \in H^1(0, T; L^2(\Omega)), \tag{3.18}$$

$$f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \tag{3.19}$$

$$\theta_0 \in H^2_N(\Omega), \tag{3.20}$$

$$\chi_0 \in H^2_N(\Omega), \tag{3.21}$$

$$u_0 \in H^4(\Omega), \quad v_0 \in H^2(\Omega), \tag{3.22}$$

Além disso, permitimos que χ_0 "toque as barreiras de potencial", isto é,

$$0 \leq \min_{x \in \overline{\Omega}} \chi_0(x) \leq \max_{x \in \overline{\Omega}} \chi_0(x) \leq 1. \tag{3.23}$$

satisfazendo

$$\chi_0 \in dom(\beta). \tag{3.24}$$

Nas condições do Problema 3.1, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Suponha (3.11)-(3.13) e (3.18)-(3.24). Então existe $(\theta, \chi, \xi, u, p)$ resolvendo o Problema 3.1, com θ, χ, ξ e u possuindo a seguinte regularidade:*

$$\begin{aligned} \theta &\in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)), \\ \chi &\in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)), \\ \xi &\in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad \xi \in \beta(\chi), \\ u &\in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega)). \end{aligned}$$

3.2 Problemas aproximados e um problema perturbado

Nesta seção introduzimos uma aproximação do problema descrito acima na qual usamos técnicas semelhantes àquelas já utilizadas no capítulo anterior, isto é, regularização de Yosida do operador proveniente do potencial e truncamentos, mas agora conjuntamente com uma variante da técnica da compressibilidade artificial para poder dar conta da restrição isocórica. Em outras palavras, este método tenta contornar dificuldades computacionais relacionadas com o termo de restrição "$\mathrm{div}\, u_t = 0$"substituindo-o em um problema aproximado por uma equação de evolução para a pressão p que seja adequada ao problema, tornando-o "mais fácil de ser analisado".

Consideramos os mesmos operadores de truncamento do capítulo anterior:

$$T_{1/\epsilon}(s) = \begin{cases} s & \text{se } s \in [-\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}] \\ \frac{1}{\epsilon}\mathrm{sign}(s) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para $\epsilon > 0$, e

$$\tau(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < 0 \\ s & \text{se } s \in [0,1] \\ 1 & \text{se } s > 1. \end{cases}$$

Também, dado $\mu > 0$, vamos considerar a aproximação de Yosida correspondente ao operador maximal monótono β, que vamos denotar por β_μ.

O primeiro problema aproximado dependerá de três parâmetros, cada um associado a uma das técnicas empregadas na aproximação. Ele é o seguinte:

Problema 3.2 *Fixemos $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$. Para cada $\mu > 0$ queremos encontrar funções θ^μ, χ^μ, p^μ: $\Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ e u^μ: $\Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$ satisfazendo*

$$\begin{cases} \theta_t^\mu + l\chi_t^\mu + A_N\theta^\mu = g, \\ \chi_t^\mu + A_N\chi^\mu + \beta_\mu(\chi^\mu) + \gamma(\chi^\mu) = \theta^\mu + T_{1/\epsilon}(\dfrac{|\eta(u)|^2}{2}), \\ u_{tt}^\mu - \mathcal{H}(\tau(1-\chi^\mu)u^\mu) + \mathcal{K}(\tau(\chi^\mu)u_t^\mu) + \nu A^2 u_t^\mu + \nabla p^\mu = f, \\ \delta p_t^\mu + \delta\Lambda p^\mu + div(u_t^\mu) = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Aqui, os operadores envolvidos são aqueles definidos no primeiro capítulo, isto é, $\mathcal{H}$ é operador associado à parte elástica, $\mathcal{K}$ é o operador associado à parte viscosa e Λ é o operador associado ao Laplaceano com condições de Dirichlet homogêneas.

Este problema está sujeito às condições de fronteira (3.5)-(3.7) e iniciais (3.8)-(3.10) para θ^μ, χ^μ e u^μ, e p^μ satisfazendo à condição inicial

$$p^\mu(0) = p_0 \ \text{ em } \Omega \tag{3.26}$$

e à condição de fronteira

$$p^\mu = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T). \tag{3.27}$$

Observe que a condição inicial p_0 não é dada no Problema 3.1; ela pode ser tomada independente de μ, ϵ e δ como segue:

$$p_0 \in H_0^1(\Omega). \tag{3.28}$$

Note que θ^μ, χ^μ, u^μ e p^μ, também dependem de ϵ e δ, mas por simplicidade de notação omitiremos os índices correspondentes a eles até se fazerem necessários.

As condições acima descritas no Problema 3.2 nos permitem provar o seguinte resultado:

Proposição 3.1 *Suponha (3.11)-(3.13) e (3.18)-(3.24). Então existem* $(\theta^\mu, \chi^\mu, u^\mu, p^\mu)$ *que são soluções do Problema 3.2 com as seguintes regularidades:*

$$\theta^\mu \in H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)),$$
$$\chi^\mu \in H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)),$$
$$u^\mu \in H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)),$$
$$p^\mu \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)).$$

Seguindo os passos do problema do capítulo anterior, por meio de estimativas independentes de μ para θ^μ, χ^μ, u^μ e p^μ, passaremos ao limite quando $\mu \to 0^+$ nas equações do Problema 3.2, obtendo θ^ϵ, χ^ϵ, ξ^ϵ, u^ϵ e p^ϵ (note que essas funções também dependem de δ), satisfazendo $\chi^\epsilon \in dom(\beta)$ e $\xi^\epsilon \in \beta(\chi^\epsilon)$. Neste caso também teremos em particular que $\tau(\chi^\epsilon) = \chi^\epsilon$ e $\tau(1-\chi^\epsilon) = 1-\chi^\epsilon$ e portanto poderemos desconsiderar o operador de truncamento τ.

Além disso, com os resultados obtidos para θ^ϵ, χ^ϵ, ξ^ϵ, u^ϵ e p^ϵ, será fácil provar que estas funções são soluções do seguinte problema, agora com apenas um operador de truncamento $T_{1/\epsilon}$:

Problema 3.3 *Fixemos $\delta > 0$. Para cada $\epsilon > 0$, queremos encontrar funções θ^ϵ, χ^ϵ, ξ^ϵ: $\Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ e u^ϵ: $\Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$ tais que*

$$\theta^\epsilon_t + l\chi^\epsilon_t + A_N\theta^\epsilon = g, \tag{3.29}$$
$$\chi^\epsilon_t + A_N\chi^\epsilon + \xi^\epsilon + \gamma(\chi^\epsilon) = \theta^\epsilon + T_{1/\epsilon}(\frac{|\eta(u^\epsilon)|^2}{2}), \tag{3.30}$$
$$\xi^\epsilon \in \beta(\chi^\epsilon)$$
$$u^\epsilon_{tt} - \mathcal{H}((1-\chi^\epsilon)u^\epsilon) + \mathcal{K}(\chi^\epsilon u^\epsilon_t) + v\nu A^2 u^\epsilon_t + \nabla p^\epsilon = f, \tag{3.31}$$
$$\delta p^\epsilon_t + \delta\Lambda p^\epsilon + div(u^\epsilon_t) = 0, \tag{3.32}$$

sujeito às mesmas condições iniciais e de fronteira do Problema 3.2.

Como próximo passo, de estimativas que obteremos independente de ϵ para θ^ϵ, χ^ϵ, ξ^ϵ, u^ϵ e p^ϵ, passaremos agora ao limite quando $\epsilon \to 0^+$ nas equações do Problema 3.3, obtendo assim θ^δ, χ^δ, ξ^δ, u^δ e p^δ, satisfazendo também $\chi^\delta \in dom(\beta)$ e $\xi^\delta \in \beta(\chi^\delta)$.

Ainda, da mesma forma que ocorreu com as aproximações em ϵ, será fácil provar que as funções θ^δ, χ^δ, ξ^δ, u^δ e p^δ são soluções do seguinte problema, agora sem truncamentos:

Problema 3.4 *Dado qualquer $\delta > 0$, queremos encontrar funções θ^δ, χ^δ, ξ^δ: $\Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ e u^δ: $\Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$ tais que*

$$\theta_t^\delta + l\chi_t^\delta + A_N\theta^\delta = g, \tag{3.33}$$

$$\chi_t^\delta + A_N\chi^\delta + \xi^\delta + \gamma(\chi^\delta) = \theta^\delta + \frac{|\eta(u^\delta)|^2}{2}, \tag{3.34}$$

$$\xi^\delta \in \beta(\chi^\delta)$$

$$u_{tt}^\delta - \mathcal{H}((1-\chi^\delta)u^\delta) + \mathcal{K}(\chi^\delta u_t^\delta) + \nu A^2 u_t^\delta + \nabla p^\delta = f, \tag{3.35}$$

$$\delta p_t^\delta + \delta\Lambda p^\delta + div(u_t^\delta) = 0, \tag{3.36}$$

sujeito às mesmas condições iniciais e de fronteira do Problema 3.2.

Finalmente, como último passo, vamos obter estimativas independente de δ.

Com estas estimativas, vamos extrair subsequências θ^δ, χ^δ, ξ^δ e u^δ, e uma especial envolvendo p^δ, que, quando $\delta \to 0^+$, convergem para soluções do Problema 3.1 original, além de satisfazer a condição de restrição "div$(u_t) = 0$".

3.3 Existência de soluções para o Problema 3.2

Como antes, usaremos argumentos do teorema do ponto fixo de Leray-Schauder. Para isto, vamos seguir os passos do capítulo anterior, com a diferença de que desta vez vamos construir um operador T_λ, $0 \leq \lambda \leq 1$ (sem risco de confusão, neste capítlo usamos a mesma notação do anterior para a família de operadores), sobre o espaço de Banach $B := H^1(0,T;L^2(\Omega)) \times H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

3.3.1 Construção do operador solução do Problema 3.2

Vamos construir agora um operador semelhante ao problema do capítulo anterior. Para isso, considere o seguinte problema, associado à segunda equação do Problema 3.2:

Problema 3.5 *Dados* $(\overline{\theta}^{\mu}, \overline{u}^{\mu}, \overline{p}^{\mu}) \in B$*, encontrar* $\chi^{\mu} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *satisfazendo a condição inicial (3.9) e a equação*

$$\chi_t^{\mu} + A_N \chi^{\mu} + \beta_{\mu}(\chi^{\mu}) + \gamma(\chi^{\mu}) = \lambda(\overline{\theta}^{\mu} + T_{1/\epsilon}(\frac{|\eta(\overline{u}^{\mu})|^2}{2})) em \ \Omega \times (0,T) \qquad (3.37)$$

Temos assim:

Lema 3.1 *Suponha (3.11)-(3.13), (3.21) e (3.18)-(3.24). Então, para cada* $(\overline{\theta}^{\mu}, \overline{u}^{\mu}, \overline{p}^{\mu}) \in B$*, o Problema 2.4 possui uma única solução* χ^{μ} *com*

$$\chi^{\mu} \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T; H^1(\Omega)) \cap L^{\infty}(0,T; H_N^2(\Omega)) \qquad (3.38)$$

Demonstração. Veja demonstração do Lema 2.1 do capítulo anterior. □

Considere agora o operador $T_{\lambda}^1 : B \to X$, onde definimos $X := W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T; H^1(\Omega)) \cap L^{\infty}(0,T; H_N^2(\Omega))$, que para cada $(\overline{\theta}^{\mu}, \overline{u}^{\mu}, \overline{p}^{\mu}) \in B$, leva na solução χ^{μ} do Problema 3.5.

O Lema 3.1 acima afirma que este operador está bem definido de B em X, para todo $\lambda \in [0,1]$.

Agora, vamos considerar o seguinte problema de valor inicial e de fronteira associado à primeira, terceira e quarta equações de (3.2):

Problema 3.6 *Dado* $\chi^{\mu} \in X$*, encontrar* $\theta^{\mu}, p^{\mu} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *e* $u^{\mu} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$ *satisfazendo as condições iniciais (3.20), (3.22) e (3.28), e as equações*

$$\theta_t^{\mu} + l\chi_t^{\mu} + A_N \theta^{\mu} = \lambda g, \qquad (3.39)$$

$$u_{tt}^{\mu} + \mathcal{H}(\tau(1-\chi^{\mu})u^{\mu}) + \mathcal{K}(\tau(\chi^{\mu})u_t^{\mu}) + \nu A^2 u_t^{\mu} + \nabla p^{\mu} = \lambda f, \qquad (3.40)$$

$$\delta p_t^{\mu} + \delta \Lambda p^{\mu} + div(u_t^{\mu}) = 0. \qquad (3.41)$$

Como no capítulo anterior, temos o seguinte:

Lema 3.2 *Suponha (3.18)-(3.20) e (3.22). Então para cada $\chi^\mu \in X$, existe uma única tripla $(\theta^\mu, u^\mu, p^\mu)$ que é solução do Problema 3.6 com a seguinte regularidade:*

$$\theta^\mu \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$u^\mu \in H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)),$$
$$p^\mu \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)).$$

Demonstração. Seguimos numa forma parecida com a demonstração do Lema 2.2 do capítulo anterior. A primeira equação é desacoplada das duas últimas equações, portanto podemos analisar estas duas últimas equações separadamente da primeira. Começamos com as duas últimas. Como no problema anterior, existência de soluções para essas equações seguem do método de Galerkin. Para provar isso, escolhemos bases "especiais"$\{w_i\}_{i\geq 1}$ e $\{r_i\}_{i\geq 1}$ de $H^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, respectivamente, isto é, autofunções associadas aos problemas

$$\begin{aligned}(A^2 w_i, v) = \lambda_i^2 (w_i, v), \quad & \forall v, w_i \in H^2(\Omega),\\ |w_i| = 1, \quad & \lambda_i^2 \nearrow +\infty,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\Lambda r_i, q) = \lambda_i (r_i, q), \quad & \forall q, r_i \in H_0^1(\Omega),\\ |r_i| = 1, \quad & \lambda_i \nearrow +\infty.\end{aligned}$$

Denotemos por V^m e U^m os espaços gerados por $w_1, ..., w_m$ e $r_1, ..., r_m$, respectivamente. Como antes, estaremos interessados em buscar soluções aproximadas u^m e p^m para a segunda e terceira equação do Problema 3.6, respectivamente, cumprindo suas respectivas condições iniciais, no seguinte sentido:

$$u^m(t) = \sum_{i=1}^m g_{i,m}(t) w_i \quad \text{e} \quad p^m(t) = \sum_{j=1}^m \xi_{j,m}(t) r_j \tag{3.42}$$

satisfazendo as equações,

$$(u^m_{tt}, v^m) + a_{\tau(1-\chi)}(u^m, v^m) + b_{\tau(\chi)}(u^m_t, v^m) + (A^2 u^m_t, v^m)$$
$$+(\nabla p^m, v^m) = (\lambda f, v^m), \tag{3.43}$$
$$\delta(p^m_t, q^m) + \delta(\Lambda p^m, q^m) + (div(u^m_t), q^m) = 0 \tag{3.44}$$
$$u^m(0) = u_{0m} \tag{3.45}$$
$$u^m_t(0) = v_{0m}, \tag{3.46}$$
$$p^m(0) = p_{0m} \tag{3.47}$$
$$\forall v^m \in V^m, \ \text{ e } \ \forall q^m \in U^m,$$

onde u_{0m} e v_{0m} são projeções ortogonais em $H^2(\Omega)$ de u_0 e v_0, respectivamente, sobre o espaço V^m, e p_{0m} é a projeção ortogonal em $H^1_0(\Omega)$ de p_0 sobre o espaço U^m.

Desta forma, obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias linear, que possui única solução pela teoria de equações diferenciais ordinárias usual. O próximo passo então é buscar estimativas *a priori* para u^m e p^m independentes de m. Consideramos para isso, na primeira equação, u^m_t como função teste, e integramos no tempo, obtendo assim

$$\frac{1}{2}\|u^m_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t \|u^m_t\|^2_{H^2(\Omega)} + \int_0^t (\nabla p^m, u^m_t)_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|v_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\epsilon\int_0^t \|u^m_t\|^2_{H^1(\Omega)} + C_\epsilon \int_0^t \|u^m\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^t \|f\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.48}$$

Na segunda equação consideramos p^m como função teste e integramos em t,

$$\frac{\delta}{2}\|p^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\int_0^t \|\nabla p^m\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_0^t (\nabla p^m, u^m_t)_{L^2(\Omega)} = \frac{\delta}{2}\|p_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.49}$$

Somando (3.48)-(3.49) obtemos

$$\frac{1}{2}\|u^m_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t \|u^m_t\|^2_{H^2(\Omega)} + \frac{\delta}{2}\|p^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}c + \delta\int_0^t \|\nabla p^m\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq \frac{\delta}{2}\|p_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon\int_0^t \|u^m_t\|^2_{H^1(\Omega)}$$
$$+C_\epsilon\int_0^t \|u^m\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^t \|f\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.50}$$

Escolhendo ϵ suficientemente pequeno, usando a desigualdade (1.32) do Lema 1.2 e o Lema de Gronwall, obtemos então

$$u^m \text{ limitada em } W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega)) \tag{3.51}$$

$$p^m \text{ limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.52}$$

Desta vez, escolhemos $A^2u_t^m$ como função teste na primeira equação e integramos no tempo, obtendo assim

$$\int_0^t (u_{tt}^m, A^2u_t^m) = \frac{1}{2}\|Au_t^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}\|Av_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{3.53}$$

$$\int_0^t \int_\Omega \mathcal{H}(\tau(1-\chi^\mu)u^m) \cdot A^2u_t^m = I_1 + I_2, \tag{3.54}$$

onde

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_0^t \int_\Omega \tau(1-\chi^\mu) div(\eta(u^m)) \cdot A^2u_t^m \right| \\ &\leq C \int_0^t \|u^m\|_{H^2(\Omega)} \|A^2u_t^m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \int_0^t \|u_t^m\|_{H^4(\Omega)} \|u^m\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \epsilon \int_0^t \|u_t^m\|_{H^4(\Omega)}^2 + C_\epsilon \int_0^t \|u^m\|_{H^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \tag{3.55}$$

e

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_0^t \int_\Omega \nabla\tau(1-\chi^\mu)\eta(u^m) \cdot A^2u_t^m \right| \\ &\leq C \int_0^t \|A^2u_t^m\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\chi^\mu\|_{L^3(\Omega)} \|\eta(u^m)\|_{L^6(\Omega)} \\ &\leq C \int_0^t \|u_t^m\|_{H^4(\Omega)} \|\chi^\mu\|_{H^2(\Omega)} \|u^m\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \epsilon \int_0^t \|u_t^m\|_{H^4(\Omega)}^2 + C_\epsilon \int_0^t \|u^m\|_{H^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \tag{3.56}$$

A última estimativa segue do fato que $\chi^\mu \in X$ e de imersão do Teorema 1.1. Além disso, temos

$$\int_0^t \int_\Omega \mathcal{K}(\tau(\chi^\mu)u_t^m) \cdot A^2 u_t^m = I_3 + I_4, \tag{3.57}$$

onde

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \int_0^t \int_\Omega \tau(\chi^\mu) div(\eta(u^m)) \cdot A^2 u_t^m \right| \\ &\leq C \int_0^t \|u_t^m\|_{H^2(\Omega)} \|A^2 u_t^m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \epsilon \int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^4(\Omega)} + C_\epsilon \int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} |I_4| &= \left| \int_0^t \int_\Omega A^2 u_t^m \cdot \eta(u_t^m) \nabla(\tau(\chi^\mu)) \right| \\ &\leq C \int_0^t \|A^2 u_t^m\|_{L^2(\Omega)} \|u_t^m\|_{H^2(\Omega)} \|\chi^\mu\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \epsilon \int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^4(\Omega)} + C_\epsilon \int_0^t \|u_t^m\|^2_{H^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.59}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega A^2 u_t^m \cdot A^2 u_t^m = \int_0^t \|A^2 u_t^m\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \geq C \int_0^t \|u_t^m\|_{H^4(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega f \cdot A^2 u_t^m + \int_0^t (\nabla p^m, A^2 u_t^m)_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon \int_0^t \|A^2 u_t^m\|^2_{L^2(\Omega)} \\ + C_\epsilon \int_0^t \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\epsilon \int_0^t \|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Na segunda equação, consideramos $\delta \Lambda p^m$ como função teste e integramos no tempo, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{2} \|\nabla p^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta^2 \int_0^t \|\Lambda p^m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \delta^2 \epsilon \int_0^t \|\Lambda p^m\|^2_{L^2(\Omega)} \\ + C_\epsilon \int_0^t \|div(u_t^m)\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta^2}{2} \|\nabla p_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.62}$$

Somando (3.53)-(3.62) e aplicando imersões do Teorema 1.1 e o Lema de Gronwall, obtemos

$$u_t^m \text{ limitada em } W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \tag{3.63}$$

$$p^m \text{ limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)). \tag{3.64}$$

Escolhendo u_{tt}^m como função teste na primeira equação, obtemos facilmente

$$||u_{tt}^m||_{L^2(\Omega)} \le || - \mathcal{H}(\tau(1-\chi^\mu)u^m) - \mathcal{K}(\tau(\chi^\mu)u_t^m) - \nu A^2 u_t^m - \nabla p^m + \lambda f||_{L^2(\Omega)}.$$

Do fato de $\chi^\mu \in X$, das estimativas obtidas para u^m e p^m, e das propriedades (1.11) para $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$, concluímos que

$$u_{tt}^m \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.65}$$

Usando as estimativas obtidas acima para u_t^m e p^m, obtemos

$$p_t^m \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.66}$$

Finalmente, escolhendo p_t^m como função teste na segunda equação, obtemos

$$\|p_t^m\|_{L^2(\Omega)} \le C(\delta)(\|\Lambda p^m\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}(u_t)\|_{L^2(\Omega)}).$$

Assim, usando os métodos de compacidade da Proposição 1.1, obtemos

$$u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u^\mu \text{ em } H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \tag{3.67}$$

$$u^m \rightharpoonup u^\mu \text{ em } H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \tag{3.68}$$

$$u^m \to u^\mu \text{ em } C^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega)), \tag{3.69}$$

$$p^m \overset{*}{\rightharpoonup} p^\mu \text{ em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \tag{3.70}$$

$$p^m \rightharpoonup p^\mu \text{ em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)). \tag{3.71}$$

As convergências obtidas acima para u^m e p^m permitem passar o limite quando $m \to +\infty$ nas equações (3.43) e (3.44) e concluir que u^μ e p^μ são soluções das equações (3.40)-(3.41). Além disso, usando imersão do Teorema 1.1 e (3.67)-(3.71), concluímos que $u^\mu \in H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega))$ e que $p^\mu \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Para provar a unicidade, considere duas soluções u_1^μ, u_2^μ de (3.43) e p_1^μ, p_2^μ de (3.44), e defina $u^\mu := u_1^\mu - u_2^\mu$ e $p^\mu := p_1^\mu - p_2^\mu$. Temos que u^μ e p^μ satisfazem as seguintes equações:

$$u_{tt}^\mu + \mathcal{H}(\tau(1-\chi^\mu)u^\mu) + \mathcal{K}(\tau(\chi^\mu)u_t^\mu) + \nu A^2 u_t^\mu + \nabla p^\mu = 0, \tag{3.72}$$

$$\delta p_t^\mu + \delta \Lambda p^\mu + \operatorname{div}(u_t^\mu) = 0. \tag{3.73}$$

Multiplicando (3.72), por u_t^μ, integrando e usando (1.6) e (1.8), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_t^\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\int_0^t \|u_t^\mu\|_{H^2(\Omega)}^2 + \int_0^t (\nabla p^\mu, u_t^\mu)_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon \int_0^t \|u_t^\mu\|_{H^2(\Omega)}^2 \\ + C_\epsilon \int_0^t \|u^\mu\|_{H^2(\Omega)}^2.\end{aligned} \tag{3.74}$$

Agora, multiplicando a equação (3.73) por p^μ e integrando, obtemos

$$\frac{\delta}{2}\|p^\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta\int_0^t \|\nabla p^\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_0^t (\nabla p^\mu, u_t^\mu)_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{3.75}$$

Somando (3.74)-(3.75) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_t^\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\int_0^t \|u_t^\mu\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2}\|p^\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 c + \delta\int_0^t \|\nabla p^\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \epsilon\int_0^t \|u_t^\mu\|_{H^2(\Omega)}^2 + C_\epsilon \int_0^t \|u^\mu\|_{H^1(\Omega)}^2\end{aligned} \tag{3.76}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, usando a desigualdade (1.32) e o Lema de Gronwall, obtemos

$$\frac{1}{2}\|u_t^\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\int_0^t \|u_t^\mu\|_{H^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2}\|p^\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 c + \delta\int_0^t \|\nabla p^\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0,$$

ou seja, $u_t^\mu = p^\mu = 0$ q.t.p. em $\Omega \times [0,T]$. Além disso, podemos concluir, da desigualdade (1.33) da demonstração do Lema 1.2, que $u^\mu = 0$ e portanto as equações (3.40)-(3.41) possuem soluções únicas.

Vamos analisar agora a primeira equação do Problema 3.6. Como $\chi^\mu \in X$, em particular temos $\lambda g - l\chi_t^\mu \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, e portanto por Regularidade Parabólica do Teorema 1.4, existe uma única solução θ^μ da primeira equação do Problema 3.6 com a seguinte regularidade:

$$\theta^\mu \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.77}$$

Concluímos assim a demonstração do lema. $\square$

Seja agora $T_\lambda^2 : T_\lambda^1(B) \subseteq X \to B$ o operador solução que leva cada $\chi^\mu \in T_\lambda^1(B)$ na solução $(\theta^\mu, u^\mu, p^\mu) \in B$ do Problema 3.6. De acordo com o Lema 3.2, T_λ^2 está bem definido de $T_\lambda^1(B)$ em B.

Definindo $T_\lambda : B \to B$ como o operador composição $T_\lambda := T_\lambda^2 \circ T_\lambda^1$, os Lemas 3.1 e 3.2 nos garantem que T_λ está bem definido para todo $\lambda \in [0,1]$.

3.3.2 Propriedades do operador solução

Na mesma linha do capítulo anterior, provaremos algumas propriedades do operador de Leray-Schauder T_λ definido acima, para então podermos aplicar o teorema de ponto fixo de Leray-Schauder.

Começamos com o

Lema 3.3 *O operador T_λ definido na seção anterior é contínuo em relação à λ, uniformemente em subconjuntos limitados de B.*

Demonstração. Para provar esse fato, começamos considerando $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$, $\chi_i^\mu = T_{\lambda_i}^1(\overline{\theta}^\mu, \overline{u}^\mu, \overline{p}^\mu)$, $(\theta_i^\mu, u_i^\mu, p_i^\mu) = T_{\lambda_i}^2(\chi_i^\mu)$, e definimos $(\theta^\mu, \chi^\mu, u^\mu, p^\mu) := (\theta_1^\mu - \theta_2^\mu, \chi_1^\mu - \chi_2^\mu, u_1^\mu - u_2^\mu, p_1^\mu - p_2^\mu)$. Temos então a quádrupla $(\theta^\mu, \chi^\mu, u^\mu, p^\mu)$ satisfazendo q.t.p. em $\Omega \times (0,T)$ as equações

$$\theta_t^\mu + l\chi_t^\mu + A_N\theta^\mu = (\lambda_1 - \lambda_2)g \tag{3.78}$$

$$\chi_t^\mu + A_N\chi^\mu + \beta_\mu(\chi_1^\mu) - \beta_\mu(\chi_2^\mu) + \gamma(\chi_1^\mu) - \gamma(\chi_2^\mu) = (\lambda_1 - \lambda_2)\overline{\omega} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned} u_{tt}^\mu + \mathcal{H}(\tau(1-\chi_1^\mu)u^\mu) + \mathcal{H}((\tau(1-\chi_1^\mu) - \tau(1-\chi_2^\mu))u_2^\mu) \\ +\mathcal{K}(\tau(\chi_1^\mu)u_t^\mu) + \mathcal{K}((\tau(\chi_1^\mu) - \tau(\chi_2^\mu))\partial_t u_2^\mu) \\ +\nu A^2 u_t^\mu + \nabla p^\mu = (\lambda_1 - \lambda_2)f \end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\delta p_t^\mu + \delta\Lambda p^\mu + div(u_t^\mu) = 0, \tag{3.81}$$

onde denotamos $\overline{\omega}^\mu := \overline{\theta}^\mu + T_{1/\epsilon}(\frac{|\eta(\overline{u}^\mu)|^2}{2})$.

Como as duas primeiras equações (3.78) e (3.79) são idênticas às equações (2.68) e (2.69) da demonstração do Lema 2.1, obtemos de forma imediata as seguintes estimativas para θ^μ e χ^μ:

$$\|\chi^\mu\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))\cap H^1(0,T;H^1(\Omega))} \le C|\lambda_1 - \lambda_2| \tag{3.82}$$

e

$$\|\theta^\mu\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega))} \le C|\lambda_1 - \lambda_2|. \tag{3.83}$$

Agora, testamos a equação (3.80) por u_t^μ e integramos no tempo, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_t^\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu\int_0^t \|u_t^\mu\|_{H^2(\Omega)}^2 + \int_0^t (\nabla p^\mu, u_t^\mu)_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{2}\|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ +|\lambda_1 - \lambda_2|\int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_t^\mu\|_{L^2(\Omega)} + I_{14} + I_{15}, \end{aligned} \tag{3.84}$$

onde

$$\begin{aligned} I_{14} = -\int_0^t \mathcal{H}(\tau(1-\chi_1^\mu)u^\mu)\cdot u_t^\mu \le C\int_0^t \|1-\chi_1\|_{L^\infty(\Omega)}\|u^\mu\|_{H^1(\Omega)}\|u_t^\mu\|_{H^1(\Omega)} \\ \le \epsilon\int_0^t \|u_t^\mu\|_{H^1(\Omega)}^2 + C_\epsilon\int_0^t \|u^\mu\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.85}$$

e

$$
\begin{aligned}
I_{15} = -\int_0^t (\mathcal{H}((\tau(1-\chi_1^\mu) - \tau(1-\chi_2^\mu))u_2^\mu) + \mathcal{K}((\tau(\chi_1^\mu) - \tau(\chi_2^\mu))\partial_t u_2^\mu)) \cdot u_t^\mu \\
\leq C\int_0^t (\|u_2^\mu\|_{W^{1,4}(\Omega)} + \|\partial_t u_2^\mu\|_{W^{1,4}(\Omega)})\|\chi^\mu\|_{L^4(\Omega)}\|u_t^\mu\|_{H^1(\Omega)} \\
\leq \epsilon\int_0^t \|u_t^\mu\|^2_{H^1(\Omega)} + C_\epsilon\int_0^t (\|u_2^\mu\|_{W^{1,4}(\Omega)} + \|\partial_t u_2^\mu\|_{W^{1,4}(\Omega)})^2\|\chi^\mu\|^2_{H^1(\Omega)}. \quad (3.86)
\end{aligned}
$$

Testamos agora equação (3.81) por p^μ e integramos no tempo,

$$
\frac{\delta}{2}\|p^\mu(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\int_0^t \|\nabla p^\mu\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_0^t (\nabla p^\mu, u_t^\mu)_{L^2(\Omega)} = \frac{\delta}{2}\|p_0\|^2_{L^2(\Omega)} \quad (3.87)
$$

Somando (3.84)-(3.87), escolhendo ϵ suficientemente pequeno, e usando a desigualdade (1.32) do Lema 1.2, imersões do Teorema 1.1, (3.82) e Lema de Gronwall, obtemos

$$
\|u^\mu\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))\cap H^1(0,T;H^2(\Omega))} + \|p^\mu\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|. (3.88)
$$

Portanto, por imersão do Teorema 1.1,

$$
\|u^\mu\|_{H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega))} + \|p^\mu\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|. \quad (3.89)
$$

Concluímos assim, por (3.83) e (3.89), que T_λ é contínua em λ, uniformemente em subconjuntos limitados de B. □

Lema 3.4 *Cada possível ponto fixo de T_λ é limitado em $B := H^1(0,T;L^2(\Omega)) \times H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, para todo $\lambda \in [0,1]$.*

Demonstração. Vamos estimar o conjunto de todos os possíveis pontos fixos de T_λ em B. Cada ponto fixo $(\theta^\mu, u^\mu, p^\mu) \in B$ satisfaz o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
\theta_t^\mu + l\chi_t^\mu + A_N\theta^\mu &= \lambda g && \text{em } \Omega \times (0,T) \quad (3.90) \\
\chi_t^\mu + A_N\chi^\mu + \beta_\mu(\chi^\mu) + \gamma(\chi^\mu) &= \lambda(\theta^\mu + T_{1/\epsilon}(\tfrac{|\eta(u)|^2}{2})) && \text{em } \Omega \times (0,T) \quad (3.91) \\
u_{tt}^\mu - \mathcal{H}(\tau(1-\chi^\mu)u^\mu) + \mathcal{K}(\tau(\chi^\mu)u_t^\mu) & && \\
+\nu A^2 u_t^\mu + \nabla p^\mu &= \lambda f && \text{em } \Omega \times (0,T) \quad (3.92) \\
\delta p_t^\mu + \delta\Lambda p^\mu + div(u_t^\mu) &= 0 && \text{em } \Omega \times (0,T) \quad (3.93)
\end{aligned}
$$

sujeito às condições

$$\theta^\mu(0) = \theta_0 \ \text{ em } \Omega,$$

$$\chi^\mu(0) = \chi_0 \ \text{ em } \Omega,$$

$$u^\mu(0) = u_0, \ u_t^\mu(0) = v_0 \ \text{ em } \Omega.$$

$$p^\mu(0) = p_0 \ \text{ em } \Omega,$$

Como no lema anterior, as duas primeiras equações são idênticas às duas primeiras do problema do capítulo anterior. Assim, do Lema 2.4, sabemos que

$$\theta^\mu \ \text{ limitado em } \ H^1(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.94}$$

e portanto, da limitação de $T_{1/\epsilon}$, que

$$\chi^\mu \ \text{ limitado em } \ L^\infty(0,T;H_N^2(\Omega)). \tag{3.95}$$

Procedendo de forma semelhante à (3.49)-(3.62) e usando (3.95), temos $u^\mu \in H^1(0,T;H^4(\Omega))$, ou ainda, por imersão do Teorema 1.1,

$$u^\mu \ \text{ limitado em } \ H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega)), \tag{3.96}$$

e

$$p^\mu \ \text{ limitado em } \ L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.97}$$

De (3.94), (3.96) e (3.97), concluímos então que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|(\theta^\mu, u^\mu, p^\mu)\|_B \leq M$$

e o lema está provado. $\square$

Lema 3.5 *O operador T_λ é contínuo e compacto sobre B, para cada $\lambda \in [0,1]$.*

Demonstração. Vamos provar que T_λ é contínuo e compacto sobre B, para todo $\lambda \in [0,1]$, seguindo as idéias feitas no Lema 2.5. Inicialmente, deste mesmo lema, temos as seguintes limitações para θ^μ e χ^μ:

$$\begin{aligned}\theta^\mu, \chi^\mu \ \text{ limitados em } \ & H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \\ & \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_N^2(\Omega))\end{aligned} \tag{3.98}$$

Procedendo como em (3.49)-(3.62), obtemos também as limitações

$$u^\mu \text{ limitado em } H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \quad (3.99)$$
$$p^\mu \text{ limitado em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)). (3.100)$$

Com as limitações (3.98), (3.99), (3.100) e os métodos de compacidade da Proposição 1.1, procedendo de forma similar à feita no Lema 2.5 do caítulo anterior, a compacidade de T_λ em B é simples de ser obtida.

Vamos mostrar agora que T_λ é contínuo em B. Para isso, considere uma sequência $\{(\overline{\theta}_n^\mu, \overline{u}_n^\mu, \overline{p}_n^\mu)\}$ tal que

$$(\overline{\theta}_n^\mu, \overline{u}_n^\mu, \overline{p}_n^\mu) \to (\overline{\theta}^\mu, \overline{u}^\mu, \overline{p}^\mu) \text{ forte em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \times H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad (3.101)$$

e defina $\chi_n^\mu := T_\lambda^1(\overline{\theta}_n^\mu, \overline{u}_n^\mu, \overline{p}_n^\mu)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Do Lema 2.5 do capítulo anterior, sabemos que existe uma subsequência de $\{\chi_n^\mu\}$, que por simplicidade não renomearemos, e uma função χ^μ tal que as seguintes convergências são válidas, para todo $1 \leq p < \infty$ e para todo $\rho > 0$:

$$\begin{aligned}
\chi_n^\mu &\to \overline{\chi}^\mu \text{ em } C^1(0,T;H^1(\Omega)') \cap C^0(0,T;H^{2-\rho}(\Omega)), \\
\chi_n^\mu &\to \overline{\chi}^\mu \text{ em } W^{1,p}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^{1-\rho}(\Omega)) \cap L^p(0,T;H_N^2(\Omega)), \\
\chi_n^\mu &\rightharpoonup \overline{\chi}^\mu \text{ em } H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_N^2(\Omega)), \\
\chi_n^\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\chi}^\mu \text{ em } H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \\
&\qquad \cap L^\infty(0,T;H_N^2(\Omega)), \quad (3.102)
\end{aligned}$$

com χ^μ satisfazendo a condição inicial (3.9). Usando (3.101)-(3.102), facilmente se passa o limite na equação do Problema 3.5 para concluir que

$$\chi^\mu = T_\lambda^1(\overline{\theta}^\mu, \overline{u}^\mu, \overline{p}^\mu).$$

Portanto, concluímos que a convergência em (3.102) é válida em toda a sequência $\{\chi_n^\mu\}$.

Vamos considerar agora a sequência $(\theta_n^\mu, u_n^\mu, p_n^\mu) := T_\lambda^2(\chi_n^\mu) = T_\lambda(\overline{\theta}_n^\mu, \overline{u}_n^\mu, \overline{p}_n^\mu)$. Em vista das limitações (3.98), (3.99) e (3.100), e dos métodos de compacidade da

Proposição 1.1, deduzimos que existem subsequências (que não renomearemos) de $\{\theta_n^\mu\}$, $\{u_n^\mu\}$ e $\{p_n^\mu\}$ e funções limites θ^μ, u^μ e p^μ tais que para todo $1 \leq p < \infty$ e para todo $\rho > 0$, valem as convergências:

$$
\begin{aligned}
u_n^\mu \to u^\mu \ \text{ em } \ & H^1(0,T;H^{4-\rho}(\Omega)) \cap W^{1,p}(0,T;H^2(\Omega)) \cap C^1(0,T;H^{2-\rho}(\Omega)),\\
u_n^\mu \rightharpoonup u^\mu \ \text{ em } \ & H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)),\\
u_n^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u^\mu \ \text{ em } \ & H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \quad (3.103)\\
p_n^\mu \to p^\mu \ \text{ em } \ & L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0(0,T;L^2(\Omega)),\\
p_n^\mu \rightharpoonup p^\mu \ \text{ em } \ & H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)),\\
p_n^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} p^\mu \ \text{ em } \ & H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \quad (3.104)
\end{aligned}
$$

enquanto que, para $\{\theta_n^\mu\}$ e θ^μ, temos as mesmas convergências encontradas em (3.102). Em particular, $u_n^\mu \to u^\mu$ in $H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega))$, logo

$$
\begin{aligned}
(\theta_n^\mu, u_n^\mu, p_n^\mu) \to (\theta^\mu, u^\mu, p^\mu) \ \text{ forte em } \ & H^1(0,T;L^2(\Omega)) \times H^1(0,T;W^{1,4}(\Omega))\\
& \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \quad (3.105)
\end{aligned}
$$

Segue de (3.103)-(3.104) que u^μ e p^μ satisfazem as condições iniciais (3.10) e (3.28). Combinando (3.102), (3.103) e (3.104), e argumentando de maneira semelhante ao Lema 2.5, facilmente se deduz que a tripla (u^μ, χ^μ, p^μ) satisfaz a segunda e terceira equações do Problema 3.6 sobre $\Omega \times (0,T)$, e que u^μ e p^μ satisfazem as condições iniciais (3.10) e (3.26), respectivamente.

Da mesma forma, as convergências (3.102) para $\{\chi_n^\mu\}$ e $\{\theta_n^\mu\}$ permitem concluir que (θ^μ, χ^μ) satisfaz a primeira equação do Problema 3.6 sobre $\Omega \times (0,T)$, e que θ^μ satisfaz a condição inicial (3.8). Finalmente, deduzimos que

$$
(\theta^\mu, u^\mu, p^\mu) = T_\lambda^2(\chi^\mu) = T_\lambda(\overline{\theta}^\mu, \overline{u}^\mu, \overline{p}^\mu),
$$

e que (3.105) vale ao longo de toda a sequência $\{(\theta_n^\mu, u_n^\mu, p^\mu)\}$.

Com isso, mostramos que o operador T_λ é contínuo e compacto sobre B. □

3.3.3 Demonstração da Proposição 3.1

Antes de prosseguirmos com o argumento de ponto fixo de Leray-Schauder, observemos que, para $\lambda = 0$, a equação do Problema 3.5 tem solução única pela

Proposição 1.5, a primeira equação do Problema 3.6 tem solução única pela teoria de equações parabólicas (Teorema 1.4) e a segunda e terceira equações do Problema 3.6 possuem soluções únicas pelo método de Galerkin utilizado anteriormente na demonstração do Lema 3.2.

Dessa forma, estamos em condições de utilizar o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder para concluir que o operador T_λ tem um ponto fixo $(\theta^\mu, u^\mu, p^\mu)$ em $\lambda = 1$, isto é, existe uma quádrupla $(\theta^\mu, \chi^\mu, u^\mu, p^\mu)$ que satisfaz o Problema 3.2 aproximado, com as seguintes regularidades:

$$\begin{aligned} \theta^\mu \in H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \\ \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)), \end{aligned} \tag{3.106}$$

$$\begin{aligned} \chi^\mu \in H^2(0,T;H^1(\Omega)') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \\ \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)), \end{aligned} \tag{3.107}$$

$$u^\mu \in H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)) \tag{3.108}$$

$$p^\mu \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)). \tag{3.109}$$

3.4 Demonstração do Teorema 3.1

3.4.1 Existência de soluções para o Problema 3.3

Buscaremos agora estimativas para as soluções do Problema 3.2 independentes de μ, que nos permitirá passar o limite quando $\mu \searrow 0$.

Como as duas primeiras equações no Problema 3.2 são idênticas às do Problema 2.2 do capítulo anterior, temos em particular as seguintes limitações para θ^μ e χ^μ independentes de μ:

$$\begin{aligned} \theta^\mu, \chi^\mu \text{ limitadas em } W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \\ \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)). \end{aligned} \tag{3.110}$$

Além disso temos, em particular, a limitação

$$\beta_\mu(\chi^\mu) \text{ limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Agora, para u^μ e p^μ, procedemos como em (3.48)-(3.62), obtendo assim as seguintes limitações:

$$u^\mu \text{ limitada em } H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)) \quad (3.111)$$

e

$$p^\mu \text{ limitada em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)). \quad (3.112)$$

Em vista de (3.110), (3.111), (3.112) e dos métodos de compacidade da Proposição 1.1, obtemos as seguintes convergências (em subsequências):

$$\theta^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \theta^\epsilon \text{ em } W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_N^2(\Omega)), \quad (3.113)$$
$$\theta^\mu \rightharpoonup \theta^\epsilon \text{ em } H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_N^2(\Omega)), \quad (3.114)$$
$$\theta^\mu \to \theta^\epsilon \text{ em } C(0,T;H^1(\Omega)), \quad (3.115)$$
$$\chi^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \chi^\epsilon \text{ em } W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_N^2(\Omega)), \quad (3.116)$$
$$\chi^\mu \rightharpoonup \chi^\epsilon \text{ em } H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_N^2(\Omega)), \quad (3.117)$$
$$\chi^\mu \to \chi^\epsilon \text{ em } C(0,T;H^1(\Omega)), \quad (3.118)$$
$$\beta_\mu(\chi^\mu) \rightharpoonup \xi^\epsilon \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad (3.119)$$
$$u^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u^\epsilon \text{ em } H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \quad (3.120)$$
$$u^\mu \rightharpoonup u^\epsilon \text{ em } H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \quad (3.121)$$
$$u^\mu \to u^\epsilon \text{ em } C(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad (3.122)$$
$$p^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} p^\epsilon \text{ em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \quad (3.123)$$
$$p^\mu \rightharpoonup p^\epsilon \text{ em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \quad (3.124)$$
$$p^\mu \to p^\epsilon \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0(0,T;L^2(\Omega)). \quad (3.125)$$

Temos ainda, pela monotonicidade de β_μ, que

$$(\beta_\mu(\chi) - \beta_\mu(\chi^\mu)\,, \chi - \chi^\mu) \geq 0 \quad \forall \chi \in \mathrm{dom}(\beta),$$

e usando (3.118)-(3.119), tomamos o limite $\mu \to 0+$ na última inequação, obtendo assim

$$(\beta^0(\chi) - \xi^\epsilon\,, \chi - \chi^\epsilon) \geq 0 \quad \forall \chi \in \mathrm{dom}(\beta),$$

onde $\beta^0(\chi)$ denota o elemento de $\beta(\chi)$ com norma minimal. Como no capítulo anterior, usamos a Proposição 1.3 (ii), sobre propriedades de convergência da aproximação de Yosida, notando que β_μ é a aproximação de Yosida de β.

Como β^0 é a seção principal de β, de acordo com a Preposição 1.4 (veja também a Definição 1.1) sobre seções principais, a última desigualdade implica em particular que

$$\chi^\epsilon \in \mathrm{dom}(\beta) \quad \text{e} \quad \xi^\epsilon \in \beta(\chi^\epsilon). \tag{3.126}$$

De forma análoga à feita na prova de que o operador T_λ é contínuo e compacto, podemos passar o limite quando $\mu \to 0^+$ nas equações do Problema 3.2, e obter a quádrupla $(\theta^\epsilon, \chi^\epsilon, u^\epsilon, p^\epsilon)$ satisfazendo o Problema 3.3 aproximado, pois de (3.126) temos $\tau(1-\chi^\epsilon) = 1-\chi^\epsilon$ e $\tau(\chi^\epsilon) = \chi^\epsilon$, e ainda possuindo a seguinte regularidade:

$$\theta^\epsilon \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)) \tag{3.127}$$

$$\chi^\epsilon \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2_N(\Omega)) \tag{3.128}$$

$$\xi^\epsilon \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \xi^\epsilon \in \beta(\chi^\epsilon), \tag{3.129}$$

$$u^\epsilon \in H^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^4(\Omega)), \tag{3.130}$$

$$p^\epsilon \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)). \tag{3.131}$$

3.4.2 Existência de soluções para o Problema 3.4

Desta vez procedemos buscando estimativas independentes de ϵ. De forma análoga à (3.48)-(3.49), obtemos

$$u^\epsilon \text{ limitada em } W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega)) \tag{3.132}$$

$$p^\epsilon \text{ limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1_0(\Omega)), \tag{3.133}$$

e portanto, como as duas primeiras equações do Problema 3.3 são idênticas às do sistema considerado no capítulo anterior, obtemos em particular

$$\theta^\epsilon, \chi^\epsilon \text{ limitadas em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)) \tag{3.134}$$

e

$$\xi^\epsilon \text{ limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Em vista dos métodos de compacidade da Proposição 1.1, obtemos as seguintes convergências (em subsequências):

$$\theta^\epsilon \rightharpoonup \theta^\delta \text{ em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{3.135}$$

$$\theta^\epsilon \to \theta^\delta \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.136}$$

$$\chi^\epsilon \rightharpoonup \chi^\delta \text{ em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{3.137}$$

$$\chi^\epsilon \to \chi^\delta \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.138}$$

$$\xi^\epsilon \rightharpoonup \xi^\delta \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.139}$$

$$u^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u^\delta \text{ em } W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega)), \tag{3.140}$$

$$u^\epsilon \rightharpoonup u^\delta \text{ em } H^1(0,T;H^2(\Omega)), \tag{3.141}$$

$$u^\epsilon \to u^\delta \text{ em } C(0,T;H^1(\Omega)), \tag{3.142}$$

$$p^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} p^\delta \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.143}$$

$$p^\epsilon \rightharpoonup p^\delta \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.144}$$

Como visto no capítulo anterior, por (3.142), temos para $T_{1/\epsilon}$ a seguinte convergência:

$$T_{1/\epsilon}(|\eta(u^\epsilon)|^2/2) \to |\eta(u^\delta)|^2/2 \ \text{ em } \ L^1(\Omega).$$

Além disso, usando (3.138) e (3.139), e procedendo como em (3.126), obtemos

$$\xi^\delta \in \beta(\chi^\delta).$$

As observações acima e as convergências obtidas para ϵ nos permitem passar o limite quando $\epsilon \to 0^+$ nas equações do Problema 3.3, e concluir que $(\theta^\delta, \chi^\delta, \xi^\delta, u^\delta, p^\delta)$ satisfazem as equações do Problema 3.4 perturbado.

3.4.3 Existência de solução para o Problema 3.1

Resta agora obter estimativas independente de δ. Inicialmente, observamos pelo que foi feito em (3.48)-(3.49), que temos

$$u^\delta \ \text{ limitada em } \ W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega)) \tag{3.145}$$

e

$$\sqrt{\delta}p^{\delta} \text{ limitada em } L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.146}$$

Procedendo como feito nas estimativas para ϵ, obtemos ainda

$$\theta^{\delta}, \chi^{\delta} \text{ limitadas em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.147}$$

e

$$\xi^{\delta} \text{ limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Dessa forma, por métodos de compacidade da Proposição 1.1, obtemos as seguintes convergências:

$$\theta^{\delta} \rightharpoonup \theta \text{ em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{3.148}$$

$$\theta^{\delta} \to \theta \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.149}$$

$$\chi^{\delta} \rightharpoonup \chi \text{ em } H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{3.150}$$

$$\chi^{\delta} \to \chi \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.151}$$

$$\xi^{\delta} \rightharpoonup \xi \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.152}$$

$$u^{\delta} \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^2(\Omega)), \tag{3.153}$$

$$u^{\delta} \rightharpoonup u \text{ em } H^1(0,T;H^2(\Omega)), \tag{3.154}$$

$$u^{\delta} \to u \text{ em } C(0,T;H^1(\Omega)), \tag{3.155}$$

$$\sqrt{\delta}p^{\delta} \overset{*}{\rightharpoonup} \zeta \text{ em } L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.156}$$

$$\sqrt{\delta}p^{\delta} \rightharpoonup \zeta \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.157}$$

De (3.156), temos

$$\sqrt{\delta}\frac{d}{dt}(p^{\delta},q) \to \frac{d}{dt}(\zeta,q)$$

e

$$\sqrt{\delta}(\nabla p^{\delta},\nabla q) \to (\nabla\zeta,\nabla q),$$

para todo $q \in H_0^1(\Omega)$. Logo

$$\delta\frac{d}{dt}(p^{\delta},q) \to 0$$

e

$$\delta(\nabla p^\delta, \nabla q) \to 0.$$

Com essas observações e em vista de (3.153), passamos o limite na quarta equação do Problema 3.4, obtendo

$$(\mathrm{div}(u_t), q) = 0 \ \ \forall q \in H_0^1(\Omega), \tag{3.158}$$

ou seja, obtemos $\mathrm{div}(u_t) = 0$.

Considere agora $v \in H^2(\Omega) \cap V$. Podemos escrever então a terceira equação do Problema 3.4 como

$$\langle u_{tt}^\delta, v\rangle = \langle f - \mathcal{H}((1-\chi^\delta)u^\delta) - \mathcal{K}(\chi^\delta u_t^\delta) - A^2 u_t^\delta, v\rangle$$

Pelas limitações obtidas acima em δ, temos

$$u_{tt}^\delta \text{ limitada em } L^2(0,T;(H^2(\Omega)\cap V)').$$

Portanto, podemos considerar que também vale:

$$u_{tt}^\delta \overset{*}{\rightharpoonup} u_{tt}.$$

Agora, para a pressão podemos proceder como no método clássico de compressibilidade artificial para as equações de Navier-Stokes (Temam [33], p. 299).

Escrevemos

$$\nabla p^\delta = f - u_{tt}^\delta - \mathcal{H}((1-\chi^\delta)u^\delta) - \mathcal{K}(\chi^\delta u_t^\delta) - \nu A^2 u_t^\delta.$$

A seguir tomamos outra vez $v \in H^2(\Omega) \cap V$ arbitrário e observamos que

$$0 = \langle \nabla p^\delta, v\rangle = \langle f - u_{tt}^\delta - \mathcal{H}((1-\chi^\delta)u^\delta) - \mathcal{K}(\chi^\delta u_t^\delta) - \nu A^2 u_t^\delta, v\rangle.$$

Passando ao limite na identidade acima quando $\delta \to 0+$, utilizando as convergências já obtidas, concluímos que

$$0 = \langle f - u_{tt} - \mathcal{H}((1-\chi)u) - \mathcal{K}(\chi u_t) - \nu A^2 u_t, v\rangle.$$

Como a última identidade vale para $v \in H^2(\Omega) \cap V$ arbitrários, concluímos que existe p tal que

$$\nabla p = f - u_{tt} - \mathcal{H}((1-\chi)u) - \mathcal{K}(\chi u_t) - \nu A^2 u_t,$$

e do argumento anterior, quando $\delta \to 0^+$, temos

$$\nabla p^\delta \stackrel{*}{\rightharpoonup} \nabla p \ \text{ em } L^2(0,T;(H^2(\Omega) \cap V)').$$

As convergências que temos também permitem como fizemos anteriormente passar ao limite quando $\delta \to 0^+$ em todos os termos das outras equações do Problema 3.4, conforme se espera. Como feito para ϵ, usando (3.151) e (3.152), e procedendo como em (3.126), obtemos

$$\xi \in \beta(\chi).$$

As convergências obtidas também nos permitem de forma usual concluir que θ, χ e u satisfazem suas respectivas condições iniciais.

Portanto, (θ, χ, ξ, u) são soluções do Problema 3.1 e portanto o Teorema 3.1 está provado. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Acad. Press, 1975.

[2] V. Barbu, *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, 2010.

[3] E. Bonetti, G. Bonfanti, *Existence and uniqueness of the solution to a 3D thermoviscoelastic system*, Electron. J. Differential Equations 2003 (50) (2003), 15pp. (electronic).

[4] E. Bonetti, G. Bonfanti, *Asymptotic analysis for vanishing acceleration in a thermoviscoelastic system*, Abstr. Appl. Anal. 2005 (2) (2005) 105-120.

[5] E. Bonetti, G. Bonfanti, *Well-posedness results for a model of damage in thermoviscoelastic materials*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire (2008), doi: 10.1016/j.anihpc.2007.05.009.

[6] E. Bonetti, G. Bonfanti, R. Rossi, *Global existence for a contact problem with adhesion*, Math. Methods Appl. Sci. 31 (2008) 1-36.

[7] E. Bonetti, G. Schimperna, *Local existence to Frémond's model for damaging in elastic materials*, Contin. Mech. Thermodyn. 16 (2004) 319-335.

[8] E. Bonetti, G. Schimperna, E. Segatti *On a doubly nonlinear model for the evolution of damaging in viscoelastic materials*, J. Differential Equations 218 (2005) 91-116.

[9] G. Bonfanti, M. Frémond, L. Luterotti *Global solution to a nonlinear system for irreversible phase changes*, Adv. Math. Sci. Appl. 10 (2000) 1-24.

[10] H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Sémi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland Math. Stud., vol. 5, North-Holland Publishing Co./American Elsevier Publishing Co., Inc., Amsterdam, London/New York, 1973.

[11] G. Caginalp, *An analysis of a phase field model of a free boundary*, Arch. Rational Mech. Anal., 92:205-245, 1986.

[12] P. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol. I: Three-Dimensional Elasticity*, Stud. Math. Appl., vol. 20, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.

[13] P. Colli, P. Laurençot, *Weak solutions to the Penrose-Fife phase field model for a class of admissible heat flux laws*, Phys. D 111 (1998) 311-334.

[14] M. Frémond, *Non-smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, 2002.

[15] A. Friedman, *Partial Differential Equation of Parabolic Type*, Prentice Hall, 1964.

[16] F. Gazzola, H. C. Grunau, G. Sweers, *Polyharmonic boundary value problems*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2010.

[17] K. H. Hoffman, L. Jiang, *Optimal control of a phase field model for solidification*, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 13 (1 & 2), 1992, pp. 11-27.

[18] K.L. Kuttler, *Quasistatic evolution of damage in an elastic-viscoplastic material*, Electron. J. Differential Equations 2005 (147) (2005), 25 pp. (electronic).

[19] O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York, 1968.

[20] O. A. Ladyzhenskaya, V. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, 1968.

[21] G. Lamé, B. P. Clayperon, *Mémoire sur la solidification par refroidissement d'une globe solide*, Ann. Chem. Phys., 47:250-256, 1831.

[22] L. A. Medeiros, M. M. Miranda, *Espaços de Sobolev e Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos*, Rio de Janeiro, UFRJ. IM, 2000.

[23] C. Moroşanu e D. Motreanu, *A generalized phase field system*, Journal of Math. Analysis and Applic. 237, 1999, pp. 515-540.

[24] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967.

[25] O. A. Oleĭnic, *A method of solution of the general Stefan problem*, Soviet Math. Dokl., 1:1350-1354, 1960.

[26] G. Planas, J.L. Boldrini, *A bidimensional phase-field model with convection for change phase of an alloy*, J. Math. Anal. Appl. 303 (2005), no. 2, 669-687.

[27] G. Planas, J.L. Boldrini, *Weak solutions of a phase-field model with convection for solidification of an alloy*, Commun. Appl. Anal. 8 (2004), no. 4, 503-532.

[28] E. Rocca, R. Rossi, *Analysis of a nonlinear degenerating PDE system for phase transitions in thermoviscoelastic materials*, J. Differential Equations 245 (2008) 3327-3375.

[29] E. Rocca, R. Rossi, *Global existence of strong solutions to the one-dimensional full model for phase transitions in thermoviscoelastic materials*, Appl. Math. 53 (2008), no. 5, 485-520.

[30] L. Rubinstein, *The Stefan Problem*, Amer. Math. Society., Providence, 1971.

[31] J. Simon, *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 146 (1987) 65-96.

[32] U. Stefanelli, *Models of phase change with microscopic movements*, PhD thesis, University of Pavia, 2003.

[33] R. Temam, *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*, AMS Chelsea Publishing, 2001.

[34] C. L. D. Vaz, J. L. Boldrini, *Existence and regularity of solutions of a phase field model for solidification with convection of pure materials in two dimensions*, Electron. J. Differential Equations 2003, No. 109, 25 pp. (electronic).