AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA SOBRE A PRESSÃO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Pedro Danizete Damázio e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 30 de novembro de 1993

Prof. Dr. José Luiz Boldrini

José Luiz Boldrini

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA SOBRE A PRESSÃO

Aluno : Pedro Danizete Damázio

Orientador : Prof. Dr. José Luiz Boldrini

IMECC-UNICAMP
1993

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. José Luiz Boldrini, pela força, amizade e atenção dedicadas.
- Ao Prof. Marko A. Rojas-Medar, pelas sugestões e esclarecimentos.
- Ao CAPES, pelo apoio financeiro.
- Aos amigos da "*turma*", pelo companheirismo.
- À Cristiane M. Alves Pissarra, pela colaboração no latex.

À minha mãe, Leonor e ao meu pai, Eusdédio (in memorian).

Conteúdo

1 **4**

1.1 Introdução 4
1.2 Conceitos básicos sobre espaços de Sobolev 4
1.3 Alguns espaços funcionais importantes para as equações de Navier-Stokes 9

2 **20**

2.1 O problema de Stokes estacionário 20
2.1.1 Formulação variacional 21
2.1.2 Resultados de existência e unicidade 22
2.2 O problema de Navier-Stokes estacionário 27
2.2.1 Formulação variacional 27

3 **33**

3.1 Introdução 33
3.2 Formulação do problema de Stokes 33
3.3 Formulação variacional do problema e resultados de existência e unicidade 35
3.4 Interpretação do problema variacional e propriedades das soluções 39
3.4.1 Equivalência entre os problemas variacional e de fronteira 39
3.4.2 Determinação do fluxo da velocidade sobre as componentes conexas de Γ_2 44
3.4.3 As equações de Stokes com o fluxo imposto sobre as componentes conexas de Γ_2 47
3.4.4 Determinação da derivada normal da pressão sobre Γ_3 . 49

4 **52**

4.1 Introdução 52

4.2 Formulação do problema de Navier-Stokes homogêneo . 52

4.3 Formulação variacional do problema homogêneo e resultado de existência 53

4.3.1 Resultado de unicidade para o problema homogêneo . . 58

4.4 Formulação do problema não homogêneo 59

4.5 Um resultado de existência e de unicidade para o problema não homogêneo 61

4.6 Equivalência entre os problemas variacional e de fronteira 66

4.7 As equações de Navier-Stokes com o fluxo imposto sobre as componentes conexas de Γ_2 69

4.8 Determinação da derivada normal da pressão sobre Γ_3 . . . 73

4.9 Um resultado de existência para o problema de Navier-Stokes não homogêneo 74

A **84**

INTRODUÇÃO

Nesse trabalho, pretendemos fazer um estudo das equações de Navier-Stokes, as quais regem o escoamento de fluidos viscosos incompressíveis, no caso em que são dadas condições de fronteira sobre a pressão que são frequentes em problemas de escoamentos industriais. Consideraremos a situação particular, mas muito importante, onde o fluido é assumido ter densidade constante; deter-nos-emos em estudar o caso estacionário, ou seja, onde as variáveis envolvidas não dependem do tempo.

Mais especificamente, será objeto de nosso estudo o seguinte problema : *achar* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que :*

$$-\nu\Delta u + \rho_0 u \cdot \nabla u + grad\, p = f$$

$$div\, u = 0$$

com condições de contorno a serem descritas posteriormente e onde $u(x) \in \mathbb{R}^n$ é a velocidade do fluido no ponto $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (região de escoamento), $\rho_0 > 0$ é a densidade e $\nu > 0$ é o coeficiente de viscosidade (ambos constantes), f é a densidade de forças externas por unidade de massa, $u \cdot \nabla u$ indica o operador convecção e $p(x)$ é a pressão hidrostática. Observamos que a equação $div\, u = 0$ indica o incompressibilidade do fluido e $u\,|_{\partial\Omega} = 0$ indica que o fluido adere às paredes de Ω, suposto em repouso. Além disso, suporemos Ω limitado e com fronteira regular e consideraremos $n = 2, 3$ pois são os casos fisicamente interessantes, uma vez que no caso $n = 1$, teríamos necessariamente $u(x)$ identicamente nula.

Um passo importante na compreensão do problema anterior é o estudo preliminar do caso linearizado; para tal, consideraremos o chamado **Problema de Stokes Estacionário :** *achar* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *e* $p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que :*

$$-\nu\Delta u + grad\, p = f$$

$$div\, u = 0$$

com condições de contorno similares às anteriores.

O estudo de tais problemas será baseado no artigo de Begue-Conca-Murat-Pironeau [2]. Faremos um detalhamento do mesmo, procurando fornecer gradativamente, os fundamentos matemáticos que se farão necessários no seu estudo. Assim sendo, no capítulo 1, daremos alguns resultados da teoria clássica dos espaços de Sobolev e também algumas propriedades dos espaços funcionais que serão utilizados nas formulações variacionais dos problemas de Stokes e de Navier-Stokes propostos acima.

O objetivo do capítulo 2 será fornecer algumas informações sobre os problemas clássicos, isto é, com condições de contorno apenas sobre a velocidade. Descreveremos, além de resultados de existência e de unicidade das soluções, algo sobre o que se conhece sobre a regularidade de eventuais soluções dos problemas de Stokes e de Navier-Stokes estacionários.

No capítulo 3, já tratando efetivamente do que nos interessa, consideraremos o problema de Stokes com condições de fronteira não habituais. Mais precisamente, consideraremos os casos onde a velocidade é dada sobre uma parte da fronteira, a pressão e a componente tangencial da velocidade dadas sobre uma outra parte da fronteira e onde a velocidade normal e a componente tangencial da vorticidade sendo dadas sobre uma terceira parte da fronteira. Além das formulações variacionais, resultados de existência e unicidade e a "equivalência" entre as formulações variacionais e fortes (tanto no caso de condições de fronteira homogêneas sobre a velocidade, quanto no caso de condições não homogêneas), daremos alguns resultados sobre o fluxo da velocidade sobre certas partes da fronteira e também, um método para determinar a derivada normal da pressão sobre uma outra parte da fronteira.

No capítulo 4, faremos uma generalização para o caso das equações de Navier-Stokes, de alguns resultados obtidos no capítulo anterior, considerando duas versões do problema (uma com condições de fronteira homogêneas e outra com não homogêneas sobre a velocidade). Daremos alguns resultados sobre a existência e a unicidade de soluções com a condição de que os dados do problema sejam pequenos em relação à viscosidade, bem como resultados sobre o fluxo da velocidade e sobre a derivada normal da pressão.

Os resultados anteriores são de Begue-Conca-Murat-Pironneau [2]. Na última seção do capítulo 4, daremos um resultado original, mostrando que, mesmo sem a pequenes dos dados, é possível ainda, sob condições naturais, obter um resultado de existência de soluções para o problema de Navier-Stokes não homogêneo.

No apêndice, daremos alguns exemplos que aparecem com certa frequência, em situações concretas. Veremos também, como adequar a teoria aqui desenvolvida à resolução de tais problemas.

Capítulo 1

RESULTADOS PRELIMINARES

1.1 Introdução

Daremos neste capítulo alguns resultados que nos serão úteis no desenvolver deste trabalho. Por razões técnicas frequentemente omitiremos as demonstrações destes, as quais poderão ser encontradas nas referências citadas. Recomendamos também, uma rápida leitura das propriedades básicas do produto de convolução.

1.2 Conceitos básicos sobre espaços de Sobolev

Consideremos inicialmente, um subconjunto Ω do R^n, aberto, com fronteira Γ . Suporemos, salvo menção contrária, que Γ é localmente lipschitziana, ou seja, Γ é, localmente, o gráfico de uma função lipschitziana.

Seja $D(\Omega)$ o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis, com suporte compacto em Ω e denotemos por $D(\Omega)'$, o espaço dual de $D(\Omega)$, frequentemente chamado o espaço das distribuições sobre Ω. Lembramos que, quando f é uma função localmente integrável, podemos identificá-la à distribuição por ela definida colocando

$$< f, \varphi >= \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx, \ \ \forall\, \varphi \in D(\Omega),$$

onde <.,.> denota o produto de dualidade entre D(Ω)' e D(Ω).

Em seguida, consideremos, para cada inteiro $m \geq 0$ e cada real p com $1 \leq p \leq \infty$, o espaço

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha v \in L^p(\Omega), \ \forall \mid \alpha \mid \leq m\}.$$

O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach (cfe. Adams - [1], pág. 45) com a norma:

$$\| u \|_{m,p,\Omega} = \{ \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \mid \partial^\alpha u(x) \mid^p dx\}^{\frac{1}{p}}, \ \text{ se } \ p < \infty$$

ou

$$\| u \|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|\leq m} \{ \sup_{x\in\Omega} ess \mid \partial^\alpha u(x) \mid \}, \ \text{ se } \ p = \infty.$$

Além disso, se $1 \leq p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ é separável e se $1 < p < \infty$, é reflexivo (cfe. Adams - [1], pág. 47). Podemos ainda, munir tal espaço da seminorma:

$$\mid u \mid_{m,p,\Omega} = \{ \sum_{|\alpha|= m} \int_\Omega \mid \partial^\alpha u(x) \mid^p dx\}^{\frac{1}{p}}, \ \text{ se } \ p < \infty$$

ou

$$\mid u \mid_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|= m} \{ \sup_{x\in\Omega} ess \mid \partial^\alpha u(x) \mid \}, \ \text{ se } \ p = \infty.$$

Lembramos que, quando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ é frequentemente denotado por $H^m(\Omega)$ que é um espaço de Hilbert (cfe. Medeiros - [5], pág. 22) com o seguinte produto interno:

$$(u, v)_{m,\Omega} \ = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u(x)\, \partial^\alpha v(x)\, dx.$$

Como $D(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$, definiremos

$$W_{\circ}^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

ou seja, $W_{\circ}^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $D(\Omega)$ na norma $\| \cdot \|_{m,p,\Omega}$. Em particular, quando $m = 0$, temos o seguinte resultado:

Lema 1.1 *O espaço $D(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.* ∎

O próximo teorema, conhecido como a desigualdade de Poincaré-Friedrichs, afirma que a aplicação $v \mapsto | v |_{m,\Omega}$ é uma norma em $H_{\circ}^m(\Omega)$, equivalente a $\| \cdot \|_{m,\Omega}$.

Teorema 1.2 *Se Ω é conexo e limitado ao menos em uma direção, então, para cada inteiro $m \geq 0$, existe uma constante $K = K(m, \Omega) > 0$ tal que*

$$\| v \|_{m,\Omega} \leq K \, | v |_{m,\Omega} , \quad \forall \, v \in H_{\circ}^m(\Omega). \quad ∎$$

Para demonstração, sugerimos ao leitor Medeiros, Miranda - [5], cap. 3.

Em várias ocasiões, precisaremos de critérios de convergência para sequências de funções. Para tal, o seguinte teorema muito nos será útil; a demonstração deste pode ser encontrada em Adams - [1], pág. 97.

Teorema 1.3 *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira lipschitziana, $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$ e $m, k \in N$ com $k \leq m$. As seguintes imersões ocorrem algébrica e topologicamente:*

$$W^{m,p}(\Omega) \subset \begin{cases} W^{k,q}(\Omega) & se \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m-k}{n} > 0 \\ \\ C^k(\Omega) & se \quad \frac{1}{p} < \frac{m-k}{n}. \end{cases}$$

Além disso, se Ω é limitado, a última inclusão ocorre em $C^k(\overline{\Omega})$ e a imersão de $W^{m,p}(\Omega)$ em $W^{k,q'}(\Omega)$ é compacta para todo $q' \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{cases} 1 \leq q' < \frac{np}{n-(m-k)p} & \textit{quando} \quad n > (m-k)p\,, \\ \\ \textit{ou} \\ \\ 1 \leq q' < \infty & \textit{quando} \quad n = (m-k)p. \end{cases}$$

Também para k ou m negativo, estas imersões compactas ainda ocorrem. ∎

Para $1 \leq p < \infty$, denotaremos $W^{-m,p}(\Omega)$ o espaço dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ normado por:

$$\| f \|_{-m,p',\Omega} = \sup_{\substack{v \in W_0^{m,p}(\Omega), \\ v \neq 0}} \frac{< f, v >}{\| v \|_{m,p,\Omega}}$$

onde p' satisfaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Neste trabalho, restringir-nos-emos aos espaços $H^m(\Omega)$, ou seja, no caso $p = 2$ e para estudarmos os valores de fronteira das funções destes espaços, suporemos que a fronteira Γ de Ω é de classe C^m.

Consideraremos ds como a medida de superfície sobre Γ e $L^2(\Gamma)$ como o espaço das funções de quadrado integrável sobre Γ com respeito à medida ds, munido da norma

$$\| u \|_{0,\Gamma} = \{ \int_\Gamma | u(s) |^2 \, ds \}^{\frac{1}{2}}.$$

Os resultados abaixo, cujas demonstrações são encontradas em Treves - [9], seção 26, caracterizam o traço das funções de $H^m(\Omega)$.

Teorema 1.4 *Seja m qualquer inteiro não negativo. Então a restrição a Ω das funções de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ formam um subespaço denso de $H^m(\Omega)$.* ∎

Observamos que este subespaço denso é o espaço $C^\infty(\overline{\Omega})$ das funções indefinidamente diferenciáveis em Ω, cujas derivadas de todas as ordens podem ser estendidas ao fecho de Ω com continuidade. Para qualquer função de $C^\infty(\overline{\Omega})$ podemos definir seus valores sobre a fronteira e chamaremos de traço sobre Γ, o qual é simplesmente a sua restrição à Γ.

Teorema 1.5 *Se $m \geq 1$, então o traço sobre Γ, definido inicialmente sobre $C^\infty(\overline{\Omega})$, pode ser estendido de forma única, como uma aplicação linear contínua e sobrejetiva de $H^m(\Omega)$ em $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.* ■

Denotaremos o traço de u sobre Γ por $\gamma_\circ u$ ou poderemos eventualmente, usar $u\mid_\Gamma$, sem que haja aviso prévio; lembramos ainda que, se $u \in H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $m \geq 1$, então

$$\| u \|_{m-\frac{1}{2},\Gamma} = \inf_{\substack{v \in H^m(\Omega), \\ \gamma_\circ v = u}} \| v \|_{m,\Omega}$$

define uma norma em $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, com a qual torna-se um espaço de Hilbert.

Corolário 1.6 *Se $m \geq 1$, então existe uma constante $K > 0$, independente de u tal que*

$$\| \gamma_\circ u \|_{m-\frac{1}{2},\Gamma} \leq K \| u \|_{m,\Omega}\,, \ \ \forall\, u \in H^m(\Omega). \ \blacksquare$$

Consideremos $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) =$ espaço dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, munido da norma:

$$\| u' \|_{-\frac{1}{2},\Gamma} = \sup_{\substack{u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ u \neq 0}} \frac{|< u', u >|}{\| u \|_{\frac{1}{2},\Gamma}},$$

onde $< \cdot,\cdot >$ denota a dualidade entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ e $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Lembramos que $< \cdot,\cdot >$ é uma extensão do produto escalar de $L^2(\Gamma)$ no sentido de que se $u \in L^2(\Gamma)$, então podemos identificar $< u, v >$ com $\int_\Gamma u(s)\, v(s)\, ds$.

Como a fronteira Γ de Ω é suposta pelo menos lipschitziana, temos que a normal exterior $\mathbf{n}$ está definida em quase toda parte da fronteira e portanto faz sentido definir derivadas normais. Para $v \in H^m(\Omega)$, definiremos a derivada normal de v por :

$$\frac{\partial v}{\partial \mathrm{n}} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{n}_i \gamma_o(\frac{\partial v}{\partial x_i})$$

onde $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \cdots, \mathbf{n}_n)$ é a normal exterior unitária à fronteira.

Temos, então, os seguintes resultados:

Lema 1.7 A aplicação $u \longmapsto \{\gamma_o u, \partial u/\partial \mathrm{n}\}$ definida de $H^m(\Omega)$ em $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ é sobrejetiva. ∎

Observação 1: No caso $m = 1$, temos o seguinte resultado (cfe. Girault, Raviart - [4], pág. 24):

Seja $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$, satisfazendo $\int_\Gamma g \cdot \mathrm{n}\, ds = 0$. Então existe uma função $u \in H^1(\Omega)^n$, única a menos de uma função aditiva tal que

$$div\, u = 0 \;\; em \;\; \Omega \;\; e \;\; u = g \; sobre \;\; \Gamma.$$

1.3 Alguns espaços funcionais importantes para as equações de Navier-Stokes

Assumiremos neste parágrafo (salvo menção contrária), que Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3, com fronteira Γ lipschitziana.

Consideremos os seguintes espaços:

$$\mathcal{A} = \{\varphi \in D(\Omega)^n \mid div\, \varphi = 0\} \tag{1.1}$$

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1_o(\Omega)^n \mid div\, v = 0\} \tag{1.2}$$

$$H(div;\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^n \mid div\, v \in L^2(\Omega)\} \tag{1.3}$$

$$H(curl;\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^n \mid curl\, v \in L^2(\Omega)^n\} \tag{1.4}$$

Observamos primeiramente, que usaremos $div\, u$ ou $\nabla \cdot u$ para denotar o divergente de u, $curl\, u$ ou $\nabla \times u$ para o rotacional de u e $grad\, u$ ou ∇u para o gradiente de u.

Notamos que munindo o espaço $H(div;\Omega)$ do produto interno

$$(u,v)_{H(div;\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)^n} + (div\, u, div\, v)_{L^2(\Omega)}$$

e o espaço $H(curl;\Omega)$ do produto interno

$$(u,v)_{H(curl;\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)^n} + (\nabla \times u, \nabla \times v)_{L^2(\Omega)^n},$$

vemos que tais espaços são de Hilbert e consideraremos as normas induzidas por tais produtos internos.

O seguinte lema nos será bastante útil no desenvolver deste trabalho; para a demonstração sugerimos Girault, Raviart - [4], pág. 25.

Lema 1.8 *Se $f \in H^{-1}(\Omega)^n$ satisfaz*

$$< f, v > = 0 \ \ \forall\, v \in \mathcal{V}\ ,$$

então existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$f = grad\, p\,.$$

Quando Ω é conexo, p é única a menos de uma constante aditiva. ■

Para um estudo detalhado da relação de densidade entre estes espaços, bem como das demonstrações dos dois teoremas que se seguem, recomendamos a leitura da seção 1.2 de Girault, Raviart - [4].

Teorema 1.9 *Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ simplesmente conexo. Uma função $u \in L^2(\Omega)^n$ satisfaz*

$$curl\, u = 0 \quad em \quad \Omega$$

se, e somente se, existe uma única função $\dot{p} \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que

$$u = grad\, \dot{p}. \quad \blacksquare$$

Observamos que $\dot{p}$ é, na verdade, uma classe de funções e que se Ω não for simplesmente conexo, a última igualdade é satisfeita ao menos localmente.

Podemos agora, definir o traço tangencial sobre Γ das funções de $H(curl; \Omega)$. Lembramos que no caso bidimensional, se a normal unitária exterior é dada por $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$, então podemos deduzir que a tangencial unitária é dada por $\tau = (\text{-}\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1)$.

A prova do resultado que se segue pode ser encontrada em Girault, Raviart - [4], pág. 34.

Teorema 1.10 *A aplicação $\gamma_\tau : v \longmapsto v \cdot \mathbf{n} \,|_\Gamma$ para $n = 2$ ou $\gamma_\tau : v \longmapsto v \times \mathbf{n} \,|_\Gamma$ para $n = 3$ definida em $D(\overline{\Omega})^n$ pode ser estendida a uma aplicação linear e contínua, ainda denotada por γ_τ, de $H(curl; \Omega)$ sobre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ se $n = 2$ ou sobre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ se $n = 3$. Além disso, a seguinte fórmula de Green é satisfeita:*

$$(curl\, v, \varphi) - (v, curl\, \varphi) = - < \gamma_\tau v, \varphi >_\Gamma \tag{1.5}$$

$\forall\, v \in H(curl; \Omega)$ *e* $\forall\, \varphi \in H^1(\Omega)^3$ *se* $n = 3$ *ou* $\forall\, \varphi \in H^1(\Omega)$ *se* $n = 2$. $\blacksquare$

Consideremos agora, os espaços a serem utilizados na resolução dos problemas de Stokes e de Navier-Stokes clássicos:

$$\tilde{\mathcal{V}} = \text{ fecho de } \mathcal{A} \text{ em } H_0^1(\Omega)^n \tag{1.6}$$

$$H = \text{ fecho de } \mathcal{A} \text{ em } L^2(\Omega)^n \tag{1.7}$$

onde $\mathcal{A}$ é o espaço definido em (1.1).

Para uma melhor caracterização do espaço $\tilde{\mathcal{V}}$, observamos que as funções deste espaço têm divergente nulo no sentido de $L^2(\Omega)$ e se anulam na fronteira de Ω num sentido generalizado.

Usando a caracterização de $\tilde{\mathcal{V}}$ dada em Temam - [8], pág. 18, concluiremos que $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$ (definido em (1.2)) e, portanto, utilizaremos sempre a notação $\mathcal{V}$ quando nos referirmos a tal espaço.

Com relação ao espaço H, vemos que as funções deste espaço têm divergente nulo no sentido de distribuição e componente normal nula num sentido generalizado na fronteira de Ω.

Nas formulações variacionais dos problemas de Stokes e de Navier-Stokes que serão exibidas nos capítulos 3 e 4, serão de grande importância os espaços V, V_0, V_1 e a forma bilinear contínua $a(\cdot,\cdot)$ que definiremos abaixo.

Suporemos que existem três abertos regulares de Γ, $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$, satisfazendo:

$$\begin{aligned} &a) \quad \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3 \text{ são de classe } C^{1,1} \\ &b) \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \ \forall\, i,j = 1,2,3, i \neq j \\ &c) \quad \Gamma = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} \cup \overline{\Gamma_3} \end{aligned} \tag{1.8}$$

e cada Γ_i com um número finito de componentes conexas; denotaremos por $\Gamma_{2_1}, \ldots, \Gamma_{2_r}$ as componentes conexas de Γ_2.

Consideremos, então, os seguintes espaços:

$$\begin{aligned} V = \{ \quad & v \in H^1(\Omega)^3 \mid \nabla \cdot v = 0 \text{ em } \Omega,\ v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \\ & v \times \mathrm{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_2,\ v \cdot \mathrm{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_3\} \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$V_\circ = \{v_\circ \in V \mid \int_{\Gamma_{2_i}} v_\circ \cdot \mathrm{n}\, ds = 0 \ \ \forall\, i = 1, ..., r\} \qquad (1.10)$$

os quais muniremos com o produto interno de $H^1(\Omega)^3$. Como estes são espaços fechados de $H^1(\Omega)^3$, são espaços de Hibert.

Observamos (usando o teorema de Stokes) que o traço normal das funções de V tem média nula sobre Γ_2, uma vez que $\nabla \cdot v = 0$.

Sejam $a(\cdot,\cdot) : H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)^3$ a forma bilinear contínua definida por

$$a(\cdot,\cdot) \ = \ \nu \int_\Omega (\nabla \times u)\,(\nabla \times v) \ \ \forall\, u, v \in H^1(\Omega)^3, \qquad (1.11)$$

e V_1 o subespaço de V definido por:

$$V_1 = \{w \in V \mid a(w, v_\circ) = 0 \ \ \forall\, v_\circ \in V_\circ\} \qquad (1.12)$$

Lembramos que uma forma bilinear $a(\cdot,\cdot) : M \times M \longrightarrow I\!R$, onde M é um espaço de Hilbert, é dita M-elítica (ou M-coerciva) se existe uma constante $\alpha = \alpha(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \alpha \parallel v \parallel_M^2, \ \ \forall\, v \in M. \qquad (1.13)$$

Considerando a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ definida em (1.11), diremos que $a(\cdot,\cdot)$ é $V_\circ$-elítica com núcleo V_1 se as seguintes condições forem verificadas:

a) $a(\cdot,\cdot)$ é $V_\circ$-elítica, isto é, existe $\alpha_\circ = \alpha_\circ(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) > 0$

$$a(v_0, v_0) = \nu \int_\Omega |\nabla \times v_0|^2\, dx \geq \alpha_0 \nu \parallel v_0 \parallel_{H^1(\Omega)^3}^2, \ \forall\, v_\circ \in V_\circ \qquad (1.14)$$

b) $N(a) = V_1$

onde $N(a)$ denota o núcleo de $a(\cdot,\cdot)$ em V, ou seja,

$$N(a) = \{v \in V \mid a(v, w) = 0 \ \ \forall\, w \in H^1(\Omega)^3\} \qquad (1.15)$$

É interessante notar que se $\Gamma_2 = \emptyset$ ou Γ_2 tem somente uma componente conexa, então $V_\circ = V$ e, portanto, as noções de V-eliticidade e $V_\circ$-eliticidade coincidem. Observamos que se $w \in N(a)$, então $a(w,w) = 0$ e, assim, $\nabla \times w = 0$ em Ω; por outro lado, é óbvio que se $w \in V$ e $\nabla \times w = 0$ em Ω então $w \in N(a)$. Concluímos então, que o núcleo de $a(\cdot,\cdot)$ em V é o subespaço de V das funções de rotacional nulo em Ω, ou seja,

$$N(a) = \{w \in V \mid \nabla \times w = 0 \text{ em } \Omega\}. \tag{1.16}$$

Lembramos que se tivermos Ω não simplesmente conexo, Γ de classe C^2 e $\Gamma = \Gamma_3$, então a dimensão de $N(a)$ é estritamente positiva e como $V = V_\circ$, a forma $a(\cdot,\cdot)$ não é V-elítica, nem $V_\circ$-elítica com núcleo V_1.

Exibiremos, a seguir um resultado devido a LAX- MILGRAM, o qual é de grande utilidade na obtenção de soluções e de estimativas em problemas lineares.

Lema 1.11 *Sejam X um espaço de Hilbert real com norma $\|\cdot\|$, $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva e $f \in X'$ (dual de X). Então existe um único $u \in X$ tal que $a(u,v) = f(v)$, $\forall\, v \in X$. Além disso, tem-se que $\| u \| \leq \frac{1}{\alpha} \| f \|_{X'}$.* ■

O próximo lema nos fornecerá uma decomposição do espaço V.

Lema 1.12 *Se $a(\cdot,\cdot)$ é V-elítica ou $V_\circ$-elítica com núcleo V_1, então $V = V_\circ \oplus V_1$, sendo V_1 fechado em V e existe uma base $\{w_1, \cdots, w_{r-1}\}$ de V_1 tal que :*

$$\begin{aligned} &a)\quad \int_{\Gamma_{2_j}} w_i \cdot \mathbf{n}\, ds = \delta_{ij} \quad \forall\, i,j = 1,...,r-1 \\ &b)\quad \int_{\Gamma_{2_r}} w_i \cdot \mathbf{n}\, ds = -1 \quad \forall\, i = 1,...,r-1 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Demonstração: Mostraremos primeiramente, que V_1 é o complementar topológico de $V_\circ$ em V. Como $a(\cdot,\cdot)$ é contínua em V e V_1 é a imagem inversa do subconjunto fechado $\{0\}$ de $\mathbb{R}$, então V_1 é um subespaço fechado de V.

Mostremos agora, que $V = V_\circ \oplus V_1$. Suponha que $w \in V_\circ \cap V_1$; então $a(w,w) = 0$ e como $a(\cdot,\cdot)$ é $V_\circ$-elítica temos que $w = 0$. Logo, $V_\circ \cap V_1 = \{0\}$.

Temos que mostrar que, se $v \in V$, então existem únicos $v_o \in V_o$, $v_1 \in V_1$ tal que:

$$v = v_o + v_1.$$

Como $a(\cdot,\cdot)$ é V_o-elítica, é suficiente definir v_o (com v fixo) como a única solução (cfe. lema 1.11) do seguinte problema:

$$\begin{cases} \text{Achar } \; v_o \in V_o \; \text{ tal que :} \\ \\ a(v_o, z) = a(v, z), \;\; \forall\, z \in V_o \end{cases}$$

e definir v_1 por:

$$v_1 = v - v_o.$$

Utilizando as definições de V_1 e de v_o, deduzimos que $a(v_1, z) = 0$, $\forall\; z \in V_o$ e assim, $v_1 \in V_1$. Isto conclui a demonstração de que V_1 é um complementar topológico de V_o em V.

Mostraremos agora, que V_1 tem dimensão finita.

Seja $\Phi : V_1 \longrightarrow I\!R^r$ a aplicação linear contínua definida por:

$$\Phi(w) = (\int_{\Gamma_{2_1}} w \cdot \mathrm{n}\, ds, \ldots, \int_{\Gamma_{2_r}} w \cdot \mathrm{n}\, ds).$$

Se $w \in V_1$ é tal que $\Phi(w) = 0$, então $w \in V_o$ e assim $w = 0$. Logo, Φ é injetiva. Por outro lado, como as funções de V_1 têm divergente nulo em Ω, temos :

$$\sum_{i=1}^{r} \int_{\Gamma_{2_i}} w \cdot \mathrm{n}\, ds \; = \int_{\Gamma} w \cdot \mathrm{n}\, ds \; = 0 \;\; \forall\, w \in V_1.$$

Como $dim\; \Phi(V_1) \leq r - 1$ e Φ é injetiva, deduzimos que

$$dim\, V_1 \leq r - 1. \tag{1.18}$$

Sejam $z_1, \dots, z_{r-1}$ (r-1) funções de V verificando as condições:

$$\begin{aligned} &a) \quad \int_{\Gamma_{2_j}} z_i \cdot \mathrm{n}\, ds = \delta_{ij} \quad \forall\, i,j = 1,...,r-1. \\ &b) \quad \int_{\Gamma_{2_r}} z_i \cdot \mathrm{n}\, ds = -1 \quad \forall\, i = 1,...,r-1. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Observamos que a existência de tais funções é garantida pela observação do lema 1.7. Para cada $i = 1,...,r-1$, associamos à z_i a função w_{i_o} de V_o solução única (cfe. lema 1.11) do problema:

$$\begin{cases} \text{Achar} \quad w_{i_o} \in V_o \ \text{ tal que :} \\ \\ a(w_{i_o}, v_o) = -\,a(z_i, v_o), \ \ \forall\, v_o \in V_o, \end{cases} \tag{1.20}$$

e definimos w_i por:

$$w_i = w_{i_o} + z_i, \quad i = 1,...,r-1. \tag{1.21}$$

Utilizando (1.19) e (1.20), verificamos facilmente que $w_i \in V_1$, para $i = 1,...,r-1$ e satisfaz (1.17). Por outro lado, a condição (1.17a) implica que as funções w_i são linearmente independentes. Deduzimos então de (1.18), que a dimensão de V_1 é exatamente igual a $(r-1)$ e que o conjunto $\{w_1, \dots, w_{r-1}\}$ é uma base de V_1 que satisfaz (1.17). ■

Daremos a seguir, um resultado que é uma consequência direta do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e nos será útil para garantir a existência de soluções dos problemas aproximados não lineares.

Lema 1.13 *Seja X um espaço de Hilbert de dimensão finita com produto interno $(\cdot,\cdot)$ e norma $|\cdot|$ e seja P uma aplicação contínua de X em X satisfazendo*

$$(P(\xi), \xi) > 0 \quad \textit{para} \quad |\, \xi \,| = K > 0. \tag{1.22}$$

Então existe $\xi \in X$, com $|\xi| \leq K$ tal que $P(\xi) = 0$.

Demonstração: Suponhamos que P não se anule na bola $B_K(0) \subset X$. Então a aplicação $S : B_K(0) \longrightarrow B_K(0)$ definida por:

$$S(\xi) = -K\frac{P(\xi)}{|P(\xi)|}$$

é contínua em $B_K(0)$. Pelo Teorema de Brouwer sabemos que S tem um ponto fixo em $B_K(0)$, ou seja, existe $\xi_\circ \in B_K(0)$ tal que

$$-K\frac{P(\xi_\circ)}{|P(\xi_\circ)|} = \xi_\circ.$$

Tomando a norma dos dois lados desta equação, vemos que $|\xi_\circ| = K$, e se calcularmos o produto interno com $\xi_\circ$ teremos :

$$|\xi_\circ|^2 = K^2 = -K\frac{(P(\xi_\circ), \xi_\circ)}{|P(\xi_\circ)|}.$$

Mas isto contradiz (1.22) e portanto $P(\xi)$ deve se anular em algum ponto de $B_K(0)$. ■

Conforme veremos nos capítulos seguintes, após obtermos uma estimativa uniforme para a sequência de soluções aproximadas, precisaremos de algum critério de convergência para podermos fazer a passagem ao limite. O lema abaixo nos fornecerá tal critério. Apesar de não apresentarmos sua demonstração, recomendamos a leitura de Brezis - [3], cap. 3.

Lema 1.14 *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge fracamente para $x \in E$.* ■

No final dos capítulos 3 e 4, daremos uma fórmula que permite calcular a derivada normal da pressão sobre a parte Γ_3 da fronteira Γ de Ω. Para isto precisaremos do conceito de *divergente tangencial* no sentido de distribuições e começaremos dando algumas condições para que tal conceito possa ser estabelecido.

Consideremos $\varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ e Φ_1 e Φ_2 duas extensões de φ, isto é,

$$\Phi_1, \Phi_2 \in H^2(\Omega),\ \Phi_1 = \Phi_2 = \varphi \ \text{ sobre } \ \Gamma.$$

Lembramos que, como Γ é de classe $C^{1,1}$, o lema 1.7 garante a existência de tais extensões.

Seja $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ tal que:

$$g \cdot \mathrm{n} = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma. \tag{1.23}$$

Como $\Phi_1 = \Phi_2$ sobre Γ, então $\nabla\Phi_1 \times \mathrm{n} = \nabla\Phi_2 \times \mathrm{n}$ sobre Γ, e assim:

$$< g, \nabla\Phi_1 >_\Gamma = < g, \nabla\Phi_2 >_\Gamma .$$

Isto mostra que para φ dada, $< g, \nabla\Phi >_\Gamma$ não depende da extensão $\Phi \in H^2(\Omega)$ de φ. Como

$$|< g, \nabla\Phi >_\Gamma| \leq \| g \|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} \| \Phi \|_{H^2(\Omega)},$$

obteremos:

$$\begin{aligned} |< g, \nabla\Phi >_\Gamma| &\leq \| g \|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} \inf_{\substack{\Phi \in H^2(\Omega) \\ \Phi = \varphi \, sobre \, \Gamma}} \| \Phi \|_{H^2(\Omega)} \\ &= \| g \|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} \| \varphi \|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} . \end{aligned}$$

Isto nos permite introduzir a seguinte definição:

Seja g uma distribuição em $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ satisfazendo (1.21). Chamamos de *divergente tangencial* de g à distribuição $\nabla_t \cdot g \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ definida por

$$\ll \nabla_t \cdot g, \varphi \gg_\Gamma = - < g, \nabla\Phi >_\Gamma \quad \forall\, \varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), \tag{1.24}$$

onde Φ é uma extensão qualquer de φ em $H^2(\Omega)$ e $\ll \cdot,\cdot \gg_\Gamma$ denota a dualidade entre $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ e $H_o^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$.

Observação 2: É interessante lembrar que se g é uma função suficientemente regular definida em $\overline{\Omega}$ com valores em $\mathbb{R}^3$ e satisfazendo (1.23), um cálculo explícito (cfe. Murat, Simon - [6], lema 4.9 ou Simon - [7], seção 4) mostra que:

$$\nabla_t \cdot g = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} n_i n_j \quad \text{sobre } \Gamma.$$

Daremos, finalmente, alguns resultados que serão usados no apêndice deste trabalho, para uma outra caracterização do espaço V definido em (1.9); as provas destes podem ser encontradas em Girault, Raviart - [4], p. 51-54.

Consideremos os seguintes espaços:

$$\mathcal{W} = H(div;\Omega) \cap H_o(curl;\Omega)$$

$$\mathcal{U} = H_o(div;\Omega) \cap H(curl;\Omega),$$

onde $H_o(curl;\Omega) = \overline{D(\Omega)^n}^{\mathrm{H(curl;\Omega)}}$ e $H_o(div;\Omega) = \overline{D(\Omega)^n}^{\mathrm{H(div;\Omega)}}$.

Temos então :

Teorema 1.15 *O espaço $\mathcal{W}$ está continuamente imerso em $H^1(\Omega)$.* ■

Teorema 1.16 *Suponhamos que Ω seja limitado e tenha fronteira de classe $C^{1,1}$ ou seja um poliedro convexo. Então $\mathcal{U}$ está continuamente imerso em $H^1(\Omega)^3$.* ■

Capítulo 2

RESULTADOS SOBRE OS PROBLEMAS CLÁSSICOS DE STOKES E DE NAVIER- STOKES ESTACIONÁRIOS

2.1 O problema de Stokes estacionário

As equações de Stokes são a forma estacionária linearizada das equações de Navier-Stokes. Faremos, neste parágrafo, duas formulações variacionais e um resultado de existência e unicidade para o problema:

$$\begin{cases} \text{Achar } u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n (n = 2 \text{ ou } 3),\ p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tais que :} \\ \\ -\nu \Delta u + grad\, p = f \\ \\ div\, u = 0,\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{2.1}$$

É conveniente observar que, apesar de na formulação dos problemas de Stokes e de Navier-Stokes aparecer a densidade ρ_o, não há perda de generalidade ao se tomar $\rho_o = 1$. Além disso, gostaríamos de observar que a pressão p é única a menos de constantes aditivas e para fixá-la suporemos sempre que $p \in L_0^2(\Omega)$, ou seja, p é quadrado integrável e possui média nula sobre Ω.

2.1.1 Formulação variacional

Para obtermos uma formulação fraca de (2.1), tomemos uma função arbitrária $v : \Omega \longrightarrow I\!R^n$ suficientemente regular tal que $v|_\Gamma = 0$ e multipliquemos a primeira equação de (2.1) por v. Uma integração por partes sobre Ω e a condição de fronteira nos dará:

$$\nu \int_\Omega grad\, u \cdot grad\, v\, dx - \int_\Omega p \cdot div\, v\, dx = \int_\Omega f \cdot v\, dx.$$

Tomemos agora uma função $q : \Omega \longrightarrow I\!R^n$ suficientemente regular tal que $\int_\Omega q\, dx = 0$ e multipliquemos a segunda equação de (2.1). Integrando sobre Ω teremos:

$$\int_\Omega q \cdot div\, u\, dx = 0.$$

Recordemos os seguintes espaços funcionais:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \quad &= \{\varphi \in D(\Omega)^n \mid div\, \varphi = 0\} \\
\mathcal{V} \quad &= \text{fecho de } \mathcal{A} \text{ em } H_0^1(\Omega)^n \\
H \quad &= \text{fecho de } \mathcal{A} \text{ em } L^2(\Omega)^n \\
L_0^2(\Omega) \quad &= \{g \in L^2(\Omega) \mid \textstyle\int_\Omega g(x)\, dx = 0\}
\end{aligned}$$

Definamos as seguintes formas bilineares:

$$\begin{aligned}
a_1 :\ & H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow I\!R \\
& a_1(u, v) = \nu(grad\, u, grad\, v)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
b :\ & H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \longrightarrow I\!R \\
& b(w, q) \ = \ -(q, div\, w)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno de $L^2(\Omega)$ usual.

Temos, então uma formulação variacional para o problema (2.1):

$$\begin{cases} \text{Dada } f \in H^{-1}(\Omega)^n, \text{ achar } (u,p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \text{ tal que :} \\ \\ a_1(u,v) + b(v,p) = < f, v >, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)^n \\ \\ b(u,q) = 0, \quad \forall\, q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \tag{2.4}$$

onde $< \cdot, \cdot >$ denota o produto de dualidade entre $H^{-1}(\Omega)^n$ e $H_0^1(\Omega)^n$.

Podemos ainda, dar uma formulação fraca onde não apareça a pressão p. Para tal, basta restringir a forma bilinear em (2.2) ao subespaço $\mathcal{V}$ de $H_0^1(\Omega)^n$, pois assim, teremos $b(v,p) = 0$, $\forall\, v \in \mathcal{V}$ e o seguinte problema :

$$\begin{cases} \text{Dada } f \in H^{-1}(\Omega)^n, \text{ achar } (u,p) \text{ tal que :} \\ \\ a_1(u,v) = < f, v >, \ \forall\, v \in \mathcal{V} \end{cases} \tag{2.5}$$

Mostraremos posteriormente, que as duas formulações são equivalentes.

2.1.2 Resultados de existência e unicidade

Notamos primeiramente, que a forma bilinear definida em (2.2) é contínua, pois

$$| a_1(u,v) | \leq \| grad\, u \|_{L^2} \| grad\, v \|_{L^2} \leq C(\nu) \| u \|_1 \| v \|_1$$

e também coerciva, pois usando a desigualdade de Poincaré-Fredrichs (teorema 1.2), temos :

$$| a_1(v,v) | = \nu \| gradv \|_{L^2}^2 \geq \alpha(\Omega, \nu) \| v \|_1^2 .$$

Assim, se tomarmos $l(v) = < f, v >$ teremos que $l \in \mathcal{V}'$ e $\| l \|_{\mathcal{V}'} \leq \| f \|_{H^{-1}(\Omega)^n}$ e portanto (2.5) está nas condições do lema 1.11.

Logo, existe uma única solução $u \in \mathcal{V}$ de (2.5) satisfazendo

$$\| u \|_1 \leq \frac{1}{\alpha(\nu, \Omega)} \| f \|_{H^{-1}(\Omega)^n} . \tag{2.6}$$

Precisamos agora recuperar a pressão p. Para isto vamos mostrar que as formulações (2.4) e (2.5) são equivalentes. Notamos que se (u, p) é solução de (2.4) então u é solução de (2.5). Temos que mostrar que, se u é solução de (2.5), então existe p tal que (u, p) é solução de (2.4).

Seja $g : H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow I\!R$ a forma linear definida por

$$g(v) \ = \ < f, v > - a_1(u, v) \tag{2.7}$$

Temos que $g(v) = 0, \ \forall \ v \in \mathcal{V}$, isto é, $g \in \mathcal{V}^\circ = \{h \in H^{-1}(\Omega)^n \mid h(v) = 0, \ \forall \ v \in \mathcal{V} \ \}$, o conjunto polar de V. Assim temos que mostrar que existe $p \in L_0^2(\Omega)$ tal que

$$b(v, p) \ = \ g(v), \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega)^n. \tag{2.8}$$

Para isto, precisaremos do resultado seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em Girault, Raviart - [4], pág. 58.

Lema 2.1 *Sejam X, M espaços de Hilbert reais e $b : X \times M \longrightarrow I\!R$ uma forma bilinear contínua. Consideremos os operadores $B \in L(X, M')$ e $B' \in L(M, X')$ definidos por*

$$< B'q, v > = < Bv, q > = \ b(v, q), \ \forall \ q \in M, \ \forall \ v \in X$$

onde $< \cdot, \cdot >$ denota o produto de dualidade entre X' e X e M' e M. Seja, ainda, $\mathcal{V} = kerB = \{v \in X \mid b(v, q) = 0, \ \forall \ q \in M\}$. Então são equivalentes:

(i) existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v,q)}{\| v \|_X \| q \|_M} \geq \beta \tag{2.9}$$

(ii) o operador B' é um isomorfismo de M sobre $\mathcal{V}^\circ = \{h \in X' \mid h(v) = 0, \forall v \in \mathcal{V}\}$ e $\| B'q \|_{X'} \geq \beta \| q \|_M$, $\forall q \in M$.

(iii) o operador B é umisomorfismo de $\mathcal{V}^\perp$ sobre M' e $\| Bv \|_{M'} \geq \beta \| v \|_X$, $\forall v \in \mathcal{V}^\perp = \{w \in X \mid < w, v >= 0, \forall v \in \mathcal{V}\}$. ∎

A forma bilinear definida em (2.3) é contínua pois

$$| b(w,q) | \leq \| q \|_{L^2(\Omega)} \| div\, w \|_{L^2(\Omega)} \leq \| q \|_{L^2(\Omega)} \| w \|_{H^1(\Omega)}$$

e neste caso os operadores B e B' associados a b são

$$\begin{aligned} B &= -div \quad : H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow L_0^2(\Omega) \\ B' &= grad \quad : L_0^2(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)^n \end{aligned}$$

Além disso, $ker B = \{v \in H_0^1(\Omega)^n : B(v) = div\, v = 0\} = \mathcal{V}$ (definido na seção anterior). A equação (2.8) é então, equivalente a achar $p \in L_0^2(\Omega)$ tal que

$$B'p = g \in \mathcal{V}^\circ \tag{2.10}$$

Pelo lema anterior, para achar a pressão basta mostrar que a forma bilinear de (2.3) satisfaz a condição (2.9), isto é, que existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)^n} \frac{(\varphi, div\, v)}{| v |_1} \geq \beta \| \varphi \|_{L^2}, \forall \varphi \in L_0^2(\Omega). \tag{2.11}$$

Para isto, necessitamos ainda do resultado abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em Giraul, Raviart - [4], pág. 24.

Lema 2.2 *O operador divergente é um isomorfismo de $\mathcal{V}^{\perp}$ (complemento ortogonal de $\mathcal{V}$ em $H_o^1(\Omega)^n$ com o produto $(grad\,\cdot, grad\,\cdot)$) sobre $L_o^2(\Omega)$.* ∎

Assim, dada $\varphi \in L_o^2(\Omega)$, existe $v \in \mathcal{V}^{\perp}$ tal que $\varphi = div\, v$ e $| v |_1 \leq C \| \varphi \|_{L^2}$, $C > 0$ independente de φ.

Assim,

$$\frac{(\varphi, div\, v)}{| v |_1} = \frac{(\varphi,\varphi)}{| v |_1} = \frac{\| \varphi \|_{L^2}^2}{| v |_1} \geq \frac{1}{C} \| \varphi \|_{L^2}$$

Tomando-se $\beta = \frac{1}{C} > 0$ temos (2.11) e, portanto, $B' = grad$ é um isomorfismo sobre $\mathcal{V}^{\circ}$ de acordo com o lema (2.1). Logo, existe $p \in L_o^2(\Omega)$ satisfazendo (2.10) e

$$\begin{aligned} \| p \|_{L^2} &\leq C \| B'p \|_{H^{-1}(\Omega)^n} = C \| g \|_{H^{-1}(\Omega)^n} \\ &\leq C_1(\| f \|_{H^{-1}(\Omega)^n} + \nu \| u \|_1) \leq C_2(1 + \nu\beta) \| f \|_{H^{-1}(\Omega)^n} \end{aligned}$$

Concluímos assim, que as formulações (2.4) e (2.5) são equivalentes . Observamos que uma outra possibilidade para recuperarmos a pressão seria considerarmos que

$$-\nu\Delta u + f \in H^{-1}(\Omega)^n.$$

Pelo lema 1.8, teríamos que existe uma função $p \in L_{loc}^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que (u,p) é solução de (2.5).

Podemos então, resumir os resultados anteriores no seguinte

Teorema 2.3 *Dado $f \in H^{-1}(\Omega)^n$, existe uma única solução $(u,p) \in H_o^1(\Omega)^n \times L_o^2(\Omega)$ de (2.4). Além disso, temos a estimativa*

$$\| u \|_1 + \| p \|_{L^2} \leq C(\alpha, \nu) \| f \|_{H^{-1}(\Omega)^n} . \blacksquare$$

Antes de terminarmos esta seção, gostaríamos de comentar sobre a regularidade do problema de Stokes não homogêneo (válida também para o caso homogêneo). Um resultado consequente do paper de Agmon, Douglis, Nirenberg, o qual fornece estimativas a priori de soluções de sistemas elíticos gerais, mostra que se tivermos Ω suficientemente regular, com a solução (u, p) e os dados satisfazendo

$$u \in W^{2,\alpha}(\Omega),\ p \in W^{1,\alpha}(\Omega) \text{ com } 1 < \alpha < \infty,$$
$$f \in W^{m,\alpha}(\Omega),\ g \in W^{m+1,\alpha}(\Omega) \text{ e } \Phi \in W^{m+2-\frac{1}{\alpha}}(\Gamma) \text{ com } m > 0,$$

então

$$u \in W^{m+2,\alpha}(\Omega), \quad p \in W^{m+1,\alpha}(\Omega)$$

e existe uma constante $k = k(\alpha, \nu, m, \Omega)$ tal que

$$\| u \|_{W^{m+2,\alpha}(\Omega)} + \| p \|_{W^{m+1,\alpha}(\Omega)/\mathbb{R}}$$
$$\leq k\{\| f \|_{W^{m,\alpha}(\Omega)} + \| g \|_{W^{m+1,\alpha}(\Omega)} + \| \Phi \|_{W^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\Gamma)} + d_\alpha \| u \|_{L^\alpha(\Omega)}\}$$

onde $d_\alpha = 0$ para $\alpha \geq 2$ e $d_\alpha = 1$ para $1 < \alpha < 2$.

Observamos que este resultado não garante a existência mas apenas a regularidade de uma eventual solução. Entretanto, no caso $n = 2$ ou 3 é possível obter um resultado de existência e regularidade; para tal, indicamos Temam - [8], pág. 35.

2.2 O problema de Navier-Stokes estacionário

Daremos neste parágrafo, formulações fracas e um resultado de existência para o problema de Navier-Stokes estacionário. O resultado de existência será obtido por construção de soluções aproximadas usando o método de Galerkin e passando ao limite. Na passagem ao limite dos termos não lineares precisaremos de algumas propriedades de convergência forte que obteremos por métodos de compacidade. Trabalharemos, então, com o seguinte problema :

$$\begin{cases} \text{Achar } \ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \,,\ p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ tal que :} \\ -\nu\Delta u + u\cdot\nabla u + grad\, p \;=\; f \\ div\, u \;=\; 0, \;\; u\,|_\Gamma = \;0 \end{cases} \tag{2.12}$$

2.2.1 Formulação variacional

Procedendo como no parágrafo anterior, teremos uma primeira formulação variacional :

$$\begin{cases} \text{Dado } f \in H^{-1}(\Omega)^n, \text{ achar } (u,p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \text{ tal que :} \\ a_1(u,v) + a_2(u,u,v) + b(v,p) \;= \;< f, v >, \; \forall v \in H_0^1(\Omega)^n \\ b(u,q) \;=\; 0, \;\; \forall\, q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \tag{2.13}$$

onde $a_2 : H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é a forma trilinear definida por:

$$a_2(u,v,w) \;=\; \int_\Omega (u\cdot\nabla v)\cdot w \;=\; \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j.$$

Se restringirmos a forma bilinear ao subespaço $\mathcal{V}$ de $H_0^1(\Omega)^n$, teremos que $b(v,q) = 0$, $\forall\, v \in \mathcal{V}$ e uma nova formulação variacional :

$$\begin{cases} \text{Achar } \; u \in \mathcal{V} \; \text{ tal que :} \\ \\ a_1(u,v) + a_2(u,u,v) \; = < f, v >, \; \forall\, v \in \mathcal{V} \end{cases} \tag{2.14}$$

Como no parágrafo anterior, pode-se mostrar a equivalência entre os problemas (2.13) e (2.14) usando o mesmo método, e, portanto, vamos nos concentrar em mostrar a existência de solução para o problema (2.14).

A esta altura se faz necessário observar algumas propriedades da forma trilinear $a_2(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Lema 2.4 i) *A forma trilinear* $a_2(\cdot,\cdot,\cdot)$ *é contínua em* $H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n$;
ii) Se $u \in \mathcal{V}$, *e* $v, w \in H_0^1(\Omega)^n$, *então* $a_2(u,v,w) \; = \; -a_2(u,w,v)$. *Em particular,* $a_2(u,v,v) \; = \; 0$.

Demonstração : i) Usando a desigualdade de Hölder, teremos que :

$$\left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \right| \leq \; C(n) \; \| \, u \, \|_{L^4(\Omega)^n} \, \| \, grad\, v \, \|_{L^2(\Omega)^n} \, \| \, w \, \|_{L^4(\Omega)^n}$$

e, como, pelo teorema 1.3, $H^1(\Omega)^n$ está compactamente imerso em $L^4(\Omega)^n$, segue-se que :

$$| \, a_2(u,v,w) \, | \leq \; C \; \| \, u \, \|_{H^1(\Omega)^n} \, \| \, v \, \|_{H^1(\Omega)^n} \, \| \, w \, \|_{H^1(\Omega)^n} \, .$$

ii) Sejam $v, w \in D(\Omega)^n$ e $u \in \mathcal{A}$; teremos que :

$$\begin{aligned} 0 \; &= \; \int_\Omega \sum_{j=1}^n (div\, u) v_j w_j \, dx \; = \; \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i}(v_j w_j)\, dx \\ &= \; \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx \; + \; \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} v_j \, dx \end{aligned}$$

Portanto, $a_2(u,v,w) = -a_2(u,w,v)$, com $v,w \in D(\Omega)^n$ e $u \in \mathcal{A}$. Usando a densidade de $D(\Omega)^n$ em $H_0^1(\Omega)^n$ e de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{V}$, teremos verificado o resultado. ■

Para provar a existência de solução do problema (2.14) usaremos a seguir o método de Galerkin.

1a. Etapa : Construção da solução aproximada

Como $\mathcal{V}$ é separável (subespaço fechado de um separável) existe uma sequência de elementos linearmente independentes $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ em $\mathcal{V}$ tal que as combinações lineares finitas são densas em $\mathcal{V}$. Seja $\mathcal{V}_k$ o subespaço de $\mathcal{V}$ gerado por $w_1, ..., w_k$. Consideremos os seguintes problemas aproximados de (2.14) :

$$\begin{cases} \text{Achar } \ u_k \in \mathcal{V}_k \ \text{ tal que :} \\ \\ a_1(u_k, v) + a_2(u_k, u_k, v) \ = < f, v >, \ \ \forall\, v \in \mathcal{V}_k. \end{cases} \tag{2.15}$$

O problema (2.15) é não linear em um subespaço de $\mathcal{V}$ de dimensão finita e para mostrar que ele tem solução usaremos o lema 1.13 com a aplicação $P_k : \mathcal{V}_k \longrightarrow \mathcal{V}_k$ definida, para cada $v \in \mathcal{V}_k$, por :

$$(P_k(v), w_i) \ = \ a_1(v, w_i) + a_2(v, v, w_i) - \ < f, w_i >$$

para todo $i = 1, ..., k$.

Verifiquemos a continuidade de P_k. Seja $\{v_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{V}_k$ convergindo para $v \in \mathcal{V}_k$. Como $v_m \longrightarrow v$ em $H_0^1(\Omega)^n$, o qual está continuamente imerso em $L^4(\Omega)^n$ (e, portanto, em $L^2(\Omega)^n$), temos que :

$$\begin{array}{ccccc} v_m & \longrightarrow & v & & \text{em } \ L^4(\Omega)^n \\ \\ grad\, v_m & \longrightarrow & grad\, v & & \text{em } \ L^2(\Omega)^n. \end{array}$$

Assim sendo, teremos :

$$\lim_{m\to\infty} a_1(v_m, w_i) = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \nabla v_m \cdot \nabla w_i = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w_i = a_1(v, w_i)$$

$$\lim_{m\to\infty} a_2(v_m, v_m, w_i) = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega (v_m \cdot \nabla v_m) \cdot w_i = \int_\Omega (v \cdot \nabla v) \cdot w_i = a_2(v, v, w_i)$$

pois $w_i \in H_0^1(\Omega)^n \hookrightarrow L^4(\Omega)^n$. Então, para todo $i = 1, ..., k$, teremos :

$$\begin{aligned}(\lim_{m\to\infty} P_k(v_m), w_i) &= \lim_{m\to\infty} [a_1(v_m, w_i) + a_2(v_m, v_m, w_i) - < f, w_i >] \\ &= a_1(v, w_i) + a_2(v, v, w_i) - < f, w_i > = (P_k(v), w_i).\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{m\to\infty} P_k(v_m) = P_k(v)$ e P_k é contínua.
Temos também, que :

$$\begin{aligned}(P_k(v), v) &= a_1(v, v) + a_2(v, v, v) - < f, v > \\ &\geq \alpha \| v \|_1^2 + 0 - \| f \|_{H^{-1}(\Omega)^n} \cdot \| v \|_1 > 0\end{aligned}$$

para $\| v \|_1 = R = \frac{1}{\alpha} \| f \|_{H^{-1}(\Omega)^n}$.

Assim, P_k está nas condições do lema 1.13 e, portanto, existe $u_k \in \mathcal{V}_k$ tal que $P_k(u_k) = 0$, ou seja, u_k é solução de (2.15). Além disso, temos a estimativa em $H_0^1(\Omega)^n$:

$$\| u_k \|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \| f \|_{H^{-1}(\Omega)^n} ,$$

que é independente de k.

2a. Etapa : Passagem ao limite

Nesta etapa mostraremos que existe solução para o problema (2.14). Consideremos a sequência de soluções aproximadas $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ construída na etapa anterior. Como ela está limitada em $H_0^1(\Omega)^n$ que está compactamente imerso em $L^4(\Omega)^n$ (conforme teorema 1.3), podemos extrair uma subsequência, que ainda denotaremos por $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, tal que :

$$\begin{aligned} u_k &\longrightarrow \text{ fraco em } \; H_0^1(\Omega)^n \\ u_k &\longrightarrow \text{ forte em } \; L^4(\Omega)^n \text{ (e, portanto, em } L^2(\Omega)^n). \end{aligned}$$

Fixando w_i e usando o resultado ii) do lema 2.4, temos :

$$\lim_{k\to\infty} a_1(u_k, w_i) = a_1(u, w_i)$$

$$\lim_{k\to\infty} a_2(u_k, u_k, w_i) = -\lim_{k\to\infty} a_2(u_k, w_i, u_k)$$

$$= -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (u_k \cdot \nabla w_i) \cdot u_k = -\int_\Omega (u \cdot \nabla w_i) \cdot u$$

$$= -a_2(u, w_i, u) = a_2(u, u, w_i).$$

Portanto, de $a_1(u_k, w_i) + a_2(u_k, u_k, w_i) = < f, w_i >$, tomando o limite em k, segue-se que :

$$a_1(u, w_i) + a_2(u, u, w_i) = < f, w_i > .$$

Como w_i foi tomado arbitrariamente e as combinações lineares finitas são densas em $\mathcal{V}$, temos que u é solução de (2.14), ou seja,

$$a_1(u, v) + a_2(u, u, v) = < f, v >, \;\; \forall\, v \in \mathcal{V}.$$

Segue da estimativa uniforme de u_k em $H_0^1(\Omega)^n$ e da convergência fraca para u no mesmo espaço, que u também satisfaz a mesma estimativa. Usando o mesmo argumento que no parágrafo anterior recuperamos a pressão.

Temos então provado o seguinte resultado :

Teorema 2.5 *Dado* $f \in H^{-1}(\Omega)^n$, *existe uma solução* $(u,p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ *do problema* (2.13). *Além disso, temos :*

$$\| u \|_{H^1(\Omega)^n} + \| p \|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega, \nu) \| f \|_{H^{-1}(\Omega)^n} . \blacksquare$$

Observação 1 : Não obtivemos a unicidade da solução e de fato, ela não é, em geral, única. Entretanto, se $\frac{1}{\alpha} \| f \|_{H^{-1}(\Omega)^n}$ for suficientemente pequeno, pode-se provar que a solução dada pelo teorema 2.5 é única.

Com relação à regularidade da solução do problema de Navier-Stokes homogêneo, obtemos melhores resultados que no problema linearizado. Supondo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3, limitado e de classe C^∞ e $f \in C^\infty$, teremos que qualquer solução $(u,p) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \times C^\infty(\overline{\Omega})$; se Ω é ilimitado, o resultado continua válido para todo compacto $K \subset \overline{\Omega}$. Obviamente, se f for menos regular, assim o será u também.

Para o caso não homogêneo obteremos o mesmo resultado se colocarmos a hipótese adicional sobre o dado ϕ da fronteira de que $\phi \in C^\infty(\Gamma)$.

Capítulo 3

O PROBLEMA DE STOKES COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA SOBRE A PRESSÃO

3.1 Introdução

Estudaremos neste capítulo, as equações de Stokes com as seguintes condições de fronteira : velocidade dada sobre uma parte da fronteira, pressão e componente tangencial da velocidade dadas sobre uma outra parte da fronteira, velocidade normal e componente tangencial da vorticidade dadas sobre uma terceira parte da fronteira. Nosso objetivo será dar uma formulação variacional deste problema e em seguida demonstrar os resultados de existência e unicidade.

3.2 Formulação do problema de Stokes

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^3$, limitado, conexo (não necessariamente simplesmente conexo), com fronteira Γ localmente lipschitziana. Vamos supor que existem abertos regulares Γ_1, Γ_2 e Γ_3 cada um com um número finito de componentes conexas tais que :

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \Gamma_1,\ \Gamma_2 \ \text{e}\ \Gamma_3 \ \text{são de classe } C^{1,1} \\
&b) \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \ \forall\, i,j = 1,2,3,\ i \neq j \\
&c) \quad \Gamma = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} \cup \overline{\Gamma_3}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Notaremos por Γ_{2_j} a j-ésima componente conexa de Γ_2 e por $\mathbf{n}$ a normal exterior à Γ. Uma vez que Γ é localmente lipschitziana, a normal está definida em quase toda parte de Γ. Além disso, $\mathbf{n}$ é lipschitziana sobre qualquer componente de Γ.

Propor-nos-emos a estudar então, as equações de Stokes (estacionárias) :

$$
\begin{aligned}
&a) \quad -\nu\Delta u + \nabla p = f \text{ sobre } \Omega \\
&b) \quad \nabla \cdot u = 0 \text{ sobre } \Omega \\
&\qquad \text{com as seguintes condições de fronteira :} \\
&c) \quad u = u_0 \text{ sobre } \Gamma_1 \\
&d) \quad u \times \mathbf{n} = a \times \mathbf{n} \text{ sobre } \Gamma_2 \\
&e) \quad p = p_0 \text{ sobre } \Gamma_2 \\
&f) \quad u \cdot \mathbf{n} = b \cdot \mathbf{n} \text{ sobre } \Gamma_3 \\
&g) \quad (\nabla \times u) \times \mathbf{n} = h \times \mathbf{n} \text{ sobre } \Gamma_3
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

onde u $\times$n e $\nabla\times$ u $\times$ n denotam as componentes tangenciais da velocidade e da vorticidade, respectivamente e, ν, f, u_0, a, b, p_0, e h são os dados do problema satisfazendo :

$$\nu > 0 \tag{3.3}$$

$$f \in L^2(\Omega)^3,\ \nabla \cdot f \in L^2(\Omega),\ \nabla \times f \in L^2(\Omega)^3. \tag{3.4}$$

e suporemos que existe uma extensão $U_0 \in H^1(\Omega)^3$ tal que :

$$\begin{aligned} &a) \quad \nabla \cdot U_0 = 0 \text{ sobre } \Omega \\ &b) \quad U_0 = u_0 \text{ sobre } \Gamma_1 \\ &c) \quad U_0 \times \mathrm{n} = a \times \mathrm{n} \text{ sobre } \Gamma_2 \\ &d) \quad U_0 \cdot \mathrm{n} = b \cdot \mathrm{n} \text{ sobre } \Gamma_3 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$p_0 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)/\mathbb{R} \tag{3.6}$$

$$h \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)^3 \tag{3.7}$$

Lembramos que a condição (3.5) é uma hipótese de regularidade sobre as funções u_0, a e b. Sendo dados $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)^3$, a $\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^3$ e b $\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)^3$, a existência de uma função $U_0 \in H^1(\Omega)^3$ verificando (3.5) não é evidente a priori. Entretanto, se tomarmos $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ tal que $g = u_0$ sobre Γ_1 , $g = a$ sobre Γ_2 , $g = b$ sobre Γ_3 e satisfazendo $\int_\Gamma g \cdot \mathrm{n}\, ds = 0$, então pela observação 1, cap. 1, teremos que existe $U_0 \in H^1(\Omega)^3$ tal que :

$$div\ U_0 = 0 \text{ em } \Omega \text{ e } U_0 = g \text{ sobre } \Gamma.$$

3.3 Formulação variacional do problema e resultados de existência e unicidade

Começaremos recordando os seguintes espaços funcionais :

$$\begin{aligned} V = \{ \quad & v \in H^1(\Omega)^3 \mid \nabla \cdot v = 0 \text{ em } \Omega, v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \\ & v \times \mathrm{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_2,\ v \cdot \mathrm{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_3\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$V_0 = \{ v_0 \in V \mid \int_{\Gamma_{2_i}} v_0 \cdot \mathrm{n}\, ds = 0, \quad \forall\, i = 1, ..., r\} \tag{3.9}$$

Munindo-os do produto interno de $H^1(\Omega)^3$, fica claro que que V e V_0 são subespaços fechados de $H^1(\Omega)^3$ e, portanto, espaços de Hilbert.

Seja a$(\cdot,\cdot)$: $H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ a forma bilinear contínua definida por:

$$a(u,v) = \nu \int_\Omega (\nabla \times u)(\nabla \times v)\, dx, \quad \forall\, u,v \in H^1(\Omega)^3 \tag{3.10}$$

Consideremos o seguinte subespaço de V definido por :

$$V_1 = \{w \in V \mid a(w,v_0) = 0, \quad \forall\, v_0 \in V_0\} \tag{3.11}$$

Como veremos a seguir, os espaços V, V_0 e V_1 e a forma bilinear a$(\cdot,\cdot)$ definidos acima serão a base da formulação variacional e da resolução do problema (3.2).

Consideremos agora, o seguinte problema variacional :

$$\begin{cases} a) & \text{Achar} \quad u \in H^1(\Omega)^3 \text{ tal que :} \\ b) & (u - U_0) \in V \\ c) & a(u,v) = L(v), \;\; \forall\, v \in V \end{cases} \tag{3.12}$$

onde V é o espaço definido em (3.8), $a(\cdot,\cdot)$ é definida por (3.10) e $L(\cdot)$ é a forma linear sobre $H^1(\Omega)^3$ definida por :

$$L(v) = \int_\Omega f \cdot v\, dx + \nu < h \times \mathrm{n}, v >_{\Gamma_3} - < p_0, v \cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2} \;\; \forall\, v \in H^1(\Omega)^3 \tag{3.13}$$

com $< \cdot,\cdot >_\gamma$ denotando o produto de dualidade entre $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)^n$ e $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)^n$, $n = 1$ ou 3 e γ um aberto de Γ.

Consideremos, para todo $v \in H^1(\Omega)^3$, as seguintes desigualdades :

$$|< f, v >| \leq \| f \|_{H^{-1}(\Omega)^3} \cdot \| v \|_{H^1(\Omega)^3} = C_1 \| v \|_{H^1(\Omega)^3}$$

$$| \nu < h \times \mathrm{n}, v >_{\Gamma_3}| \leq \nu \| h \times \mathrm{n} \|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)^3} \cdot \| v \|_{H^1(\Omega)^3} = C_2 \| v \|_{H^1(\Omega)^3}$$

$$|< p_0, v \cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2}| \leq \| p_0 \|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} \cdot \| v \cdot \mathrm{n} \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} = C_3 \| v \|_{H^1(\Omega)^3}$$

Como para todo $v \in H^1(\Omega)^3$ vale :

$$| L(v) | \leq |< f, v >| + | \nu < h \times \mathrm{n}, v >_{\Gamma_3}| + |< p_0, v \cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2}|$$

temos então :

$$| L(v) | \leq C \| v \|_{H^1(\Omega)^3}$$

e portanto, L é contínua sobre $H^1(\Omega)^3$.

Usando as definições de $a(\cdot, \cdot)$ e de $L(\cdot)$ o problema (3.12) se escreve :

$$\begin{cases} a) & \text{Achar } u \in H^1(\Omega)^3 \text{ tal que :} \\ b) & (u - U_0) \in V \\ c) & \nu \int_\Omega (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx + \nu < h \times \mathrm{n}, v >_{\Gamma_3} \\ & \quad - < p_0, v \cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2}, \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{3.14}$$

Temos que se a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ for V-elítica, o lema 1.11 (Lax-Milgram) garante não só a existência mas também a unicidade de solução do problema (3.14). Entretanto, se a forma $a(\cdot,\cdot)$ for apenas V_0-elítica com núcleo em V_1, veremos que ainda teremos a existência mas não mais a unicidade de sclução em V do problema (3.14), conforme mostra o resultado abaixo.

Teorema 3.1 *Suponhamos que a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ seja V_0-elítica com núcleo em V_1 e a forma $L(\cdot)$ verifique a condição adicional :*

$$L(w) = 0, \quad \forall\, w \in V_1. \tag{3.15}$$

Seja y_0 a única solução do seguinte problema variacional :

$$\begin{cases} a) & \text{Achar } y_0 \in H^1(\Omega)^3 \text{ tal que :} \\ b) & (y_0 - U_0) \in V_0 \\ c) & a(y_0, v_0) = L(v_0), \quad \forall\, v_0 \in V_0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Então para todo $w \in V_1$, a função $u = y_0 + w$ é uma solução do problema (3.12)*e toda solução do problema* (3.12)*é desta forma. Reciprocamente, se o problema* (3.12)*admite uma solução, então $L(w) = 0$, $\forall\, w \in V_1$.*

Demonstração : Tomemos $u = y_0 + w$, com y_0 solução de (3.16) e $w \in V_1$. Está claro que $u \in H^1(\Omega)^3$ e $(u - U_0) \in V$. Seja v uma função qualquer de V. Usando o lema 1.12, podemos decompor v na forma :

$$v = z_0 + z_1, \quad z_0 \in V_0, z_1 \in V_1.$$

Como V_1 é o núcleo de a($\cdot,\cdot$), temos que :

$$a(u, v) = a(y_0, z_0).$$

Assim, (3.15) e (3.16) implicam que :

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V.$$

Suponhamos agora, que z seja uma solução de (3.12). De (3.12c) e (3.16c) deduzimos, fazendo a diferença, que :

$$a(z - y_0, v_0) = 0, \quad \forall\, v_0 \in V_0.$$

Assim $z - y_0 = w \in V_1$ e, portanto, $z = y_0 + w$, com $w \in V_1$. Reciprocamente, se o problema (3.12) admite uma solução u, então tomando-se em (3.12c) as funções testes $v = w$, com $w \in V_1$, o fato de V_1 ser o núcleo de $a(\cdot,\cdot)$ implica que $L(\cdot)$ é identicamente nula em V_1. ■

Observamos que o teorema acima é um pouco mais geral : sua conclusão permanece válida se V é um espaço de Banach reflexivo, V_0 um subespaço fechado de V e $a(\cdot,\cdot)$ é uma forma bilinear contínua e simétrica satisfazendo :

- $a(\cdot,\cdot)$ é V_0-elítica
- $V_1 = \{w \in V \mid a(w, v_0), \ \forall\, v_0 \in V_0\}$ é o núcleo de $a(\cdot,\cdot)$ em V.

Veremos no apêndice deste trabalho, alguns exemplos que se constituem casos de aplicação deste teorema que é uma variante do lema LAX-MILGRAM.

3.4 Interpretação do problema variacional e propriedades das soluções

Começaremos este parágrafo mostrando que toda solução do problema de fronteira (3.2) é solução do problema variacional (3.14) e que toda solução do problema variacional (3.14) é solução (num certo sentido) do problema de fronteira (3.2).

3.4.1 Equivalência entre os problemas variacional e de fronteira

Começaremos com o seguinte resultado :

Teorema 3.2 *Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e $p \in C^2(\overline{\Omega})$ são soluções clássicas do problema de fronteira* (3.2),*então u é solução do problema variacional* (3.14).

Demonstração : A demonstração é feita da forma habitual. Multiplicamos a equação (3.2a) por uma função v qualquer de V, integramos por partes em Ω, utilizando a seguinte fórmula :

$$-\Delta u = \nabla \times (\nabla \times u) - \nabla(\nabla \cdot u) \tag{3.17}$$

e obteremos :

$$\int_\Omega \nu(\nabla \times (\nabla \times u) - \nabla(\nabla \cdot u)) \cdot v\, dx = \int_\Omega f \cdot v\, dx + \int_\Omega p\, div\, v\, dx - \int_\Gamma p\, (v \cdot \mathrm{n}) dS$$

de onde (usando a fórmula de Green) segue :

$$\nu \int_\Omega (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v)\, dx - \nu \int_\Gamma ((\nabla \times u) \times \mathrm{n}) \cdot v\, dS - \nu \int_\Omega \nabla(\nabla \cdot u) \cdot v\, dx$$

$$= \int_\Omega f \cdot v\, dx + \int_\Omega p\, div\, v\, dx - \int_\Gamma p\, (v \cdot \mathrm{n})\, dS$$

Usando o fato de $\nabla \cdot u = 0$ e $\nabla \cdot v = 0$, teremos :

$$\nu \int_\Omega (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v)\, dx = \int_\Omega f \cdot v\, dx + \nu \int_\Gamma ((\nabla \times u) \times \mathrm{n}) \cdot v\, dS - \int_\Gamma p\, (v \cdot \mathrm{n})\, dS$$

Assim, usando as condições de fronteira que verificam as funções de V sobre Γ, teremos :

$$\nu \int_\Omega (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v)\, dx = \int_\Omega f \cdot v\, dx + \nu \int_{\Gamma_3} ((\nabla \times u) \times \mathrm{n}) \cdot v\, dS - \int_{\Gamma_2} p\, (v \cdot \mathrm{n})\, dS$$

de onde, utilizando o fato de $p = p_0$ sobre Γ_2 e $(\nabla \times u) \times \mathrm{n} = h \times \mathrm{n}$ sobre Γ_3 , deduzimos que u verifica (3.14c). Além disso, utilizando o fato de $u \in C^2(\overline{\Omega})$ (e, portanto, $u \in H^1(\Omega)^3$), deduzimos de (3.2b-f) e de (3.5) que $u - U_0 \in$ V.

Logo, u é solução do problema (3.14). ■

Reciprocamente, temos o seguinte

Teorema 3.3 *Suponhamos que as condições* (3.4-7) *são verificadas. Seja u uma solução do problema variacional* (3.14). *Então* $(\nabla \times u) \in H(\Delta, \Omega)^3$ *e existe* $p \in H(\Delta, \Omega)/I\!R$ *tal que u e p são soluções do problema de fronteira* (3.2) *no seguinte sentido :*

$$\begin{aligned}
&a) \quad -\nu \Delta u + \nabla p = f \text{ no sentido de distribuição sobre } \Omega \\
&b) \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{no sentido de distribuição em } \Omega \\
&c) \quad u \text{ satisfaz } (4.2\text{c,d,f}) \text{ no sentido de traço} \\
&\qquad \text{das funções de } H^1(\Omega)^3 \\
&d) \quad p \text{ e } (\nabla \times u) \text{ satisfazem } (3.2\text{e,g}) \text{ no seguinte sentido :}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\int_\Omega (-\nu\Delta u + \nabla p) \cdot v \, dx \; - \; \nu \int_\Omega (\nabla \times u)(\nabla \times v) \, dx = -\nu < h \times \mathrm{n} \, , v >_{\Gamma_3}$$
$$+ < p_0, v \cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2}, \; \forall \, v \in \mathrm{V}$$

Além disso, se $\nabla \times (\nabla \times u) \in L^2(\Omega)^3$, *então* (3.2d) *implica :*

$$\begin{aligned}
&a) \quad p = p_0 \text{ sobre } \Gamma_2 \text{ no sentido de } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)/I\!R \\
&b) \quad (\nabla \times u) \times \mathrm{n} = h \times \mathrm{n} \text{ sobre } \Gamma_3 \text{ no sentido de } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)^3.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Demonstração : Seja u uma solução de (3.14). O fato de $(u - U_0) \in \mathrm{V}$ e U_0 verificar (3.5) implicam que u satisfaz (3.2b) no sentido de distribuições em Ω e u verifica as condições de fronteira (3.2c, d, f) no sentido de traços sobre o bordo de Ω das funções de $H^1(\Omega)^3$. Isto demonstra (3.18b) e (3.18c).

Para demonstrar (3.18a) tomamos como função teste em (3.14c), uma função $v \in D(\Omega)^3$ com divergente nulo. Utilizando a definição de derivada no sentido de distribuições temos que :

$$< \nu \nabla \times (\nabla \times u), v > = \int_\Omega f \cdot v \, dx \ , \quad \forall v \in D(\Omega)^3, \ \nabla \cdot v \ = \ 0 \text{ em } \Omega,$$

onde $< \cdot, \cdot >$ denota a dualidade de $(D(\Omega)^3)'$ e $D(\Omega)^3$. Como Γ é localmente lipschitziana, deduzimos pelo lema 1.8, que existe (uma classe de funções) $p \in L^2(\Omega)/I\!R$ tal que :

$$\nu \nabla \times (\nabla \times u) + \nabla p = f \tag{3.20}$$

no sentido de distribuições em Ω; isto prova (3.18a.)

Aplicando o operador divergente à equação (3.20) teremos :

$$\Delta p = \nabla \cdot f \tag{3.21}$$

no sentido de distribuições em Ω.

Por outro lado, aplicando o operador rotacional a (3.18a), teremos :

$$\nu \nabla \times (\Delta u) = \nu \Delta (\nabla \times u) = -\nabla \times f \tag{3.22}$$

no sentido de distribuições em Ω.

Como f verifica (3.4), a equação em (3.21) implica que $p \in H(\Delta, \Omega)$ e (3.22) implica que $\nabla \times u \in H(\Delta, \Omega)^3$.

Agora, multiplicando (3.20) por $v \in \mathrm{V}$ e utilizando (3.14c), obteremos por diferença :

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\Omega (\nu \nabla \times (\nabla \times u) + \nabla p) \cdot v \, dx \ - \ \nu \int_\Omega (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) \, dx \\ &= -\nu < h \times \mathrm{n}, v >_{\Gamma_3} + < p_0, v \cdot \ \mathrm{n} >_{\Gamma_2}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

para todo $v \in \mathrm{V}$, o que demonstra (3.18d).

As condições de fronteira (3.2e) e (3.2g) estão contidas implicitamente em (3.23). Para demonstrá-las deveremos poder integrar por partes o primeiro termo da esquerda em (3.23). Precisaremos supor então que $\nabla \times (\nabla \times u) \in L^2(\Omega)^3$ e usando (3.4) e (3.20) obteremos que $\nabla p \in L^2(\Omega)^3$ (e, portanto, $p \in H^1(\Omega)$).

Fazendo então, a integração por partes naquele termo, teremos :

$$\{\nu \int_\Omega (\nabla\times u)\cdot(\nabla\times v)\, dx - \nu \int_\Gamma ((\nabla\times u)\times \mathrm{n})\cdot v\, dx - \int_\Omega p\, div\, v\, dx + \int_\Gamma p\,(v\times \mathrm{n})\, dS\}$$

$$-\nu \int_\Omega (\nabla\times u)\cdot(\nabla\times v)\, dx = -\nu < h\times \mathrm{n}, v >_{\Gamma_3} + < p_0, v\cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2},\ \forall \in \mathrm{V}.$$

Como $div\, v = 0$ em Ω e usando as propriedades das funções de V, teremos :

$$-\nu \int_{\Gamma_3} ((\nabla\times u)\times \mathrm{n})\cdot v\, dx + \int_{\Gamma_2} p\,(v\cdot \mathrm{n})\, dS =$$

$$\nu < h\times \mathrm{n}, v >_{\Gamma_3} + < p_0, v\cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2},\ \forall v \in \mathrm{V}$$

e usando a notação de distribuição,

$$-\nu < (\nabla\times u)\times \mathrm{n}, v >_{\Gamma_3} + < p, v\cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2}$$

$$= -\nu < h\times \mathrm{n}, v >_{\Gamma_3} + < p_0, v\cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2},\ \forall v \in \mathrm{V}.$$

Tomando-se nesta expressão, as funções testes com suporte compacto em Γ_3, obteremos (3.19b) e tomando-as com suporte compacto em Γ_2 e usando o fato de que o traço normal das funções de V tem média nula sobre Γ_2, obteremos (3.19a). ∎

3.4.2 Determinação do fluxo da velocidade sobre as componentes conexas de Γ_2

Estudaremos agora, o fluxo das soluções do problema variacional (3.14), utilizando as funções w_i da base de V_1 (conforme lema 1.12). No que segue, denotaremos por F_{2_j} e $F_{2_j}^0$ o fluxo sobre Γ_{2_j} de u e U_0 respectivamente, ou seja :

$$F_{2_j} = \int_{\Gamma_{2_j}} u \cdot \mathrm{n}\, dS\,, \quad F_{2_j}^0 = \int_{\Gamma_{2_j}} U_0 \cdot \mathrm{n}\, dS\,, \quad \forall\, j = 1, ..., r \qquad (3.24)$$

Temos então a seguinte

Proposição 3.4 *Suponhamos que $a(\cdot,\cdot)$ seja V-elítica ou V_0-elítica com núcleo V_1 e sejam satisfeitas as hipóteses* (3.3) *a* (3.7). *Se u é uma solução do problema variacional* (3.12) *com fluxo F_{2_j} então :*

$$\sum_{j=1}^{r-1} (F_{2_j} - F_{2_j}^0)\, a(w_i, w_j) = L(w_i) - a(U_0, w_i), \quad \forall\, i = 1, ..., r-1, \qquad (3.25)$$

onde as funções w_i são os elementos da base de V_1.

Demonstração : Observamos inicialmente que, usando a definição de $L(\cdot)$ (conforme (3.13)), a relação (3.25) se escreve :

$$\sum_{j=1}^{r-1} (F_{2_j} - F_{2_j}^0)\, a(w_i, w_j) = \int_\Omega f \cdot w_i\, dx + \nu < h \times \mathrm{n}, w_i >_{\Gamma_3}$$
$$- < p_0, w_i \cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2} - a(U_0, w_i)\,, \ \forall\, i = 1, ..., r-1$$

Tomando-se $v = w_i$ em (3.12c), teremos :

$$a(u, w_i) = L(w_i)$$

que implicará :

$$a(u - U_0, w_i) = L(w_i) - a(U_0, w_i)$$

Pelo lema 1.12 temos que $u - U_0$ pode ser escrito na forma :

$$u - U_0 = v_0 + \sum_{j=1}^{r-1} (F_{2_j} - F_{2_j}^0) w_i \quad , \text{com } v_0 \in V_0.$$

Uma vez que $a(v_0, w_i) = 0$, combinando as duas últimas identidades, obteremos (3.25).∎

Notamos que se $a(\cdot,\cdot)$ é V-elítica, os coeficientes $a(w_i, w_j)$, $i, j = 1, ..., r-1$ definem uma matriz simétrica, definida positiva e assim é possível calcular os fluxos $F_{2_1}, ..., F_{2_{r-1}}$ de u sobre as $r-1$ primeiras componentes de Γ_2 a partir dos dados do problema e determinar o fluxo F_{2_r} a partir dos fluxos $F_{2_1}, ..., F_{2_{r-1}}$, da condição (3.2b) e das condições de fronteira (3.2c) e (3.2f), ou seja :

$$F_{2_r} = -\left(\int_{\Gamma_1} u_0 \cdot \mathrm{n}\, dS + \int_{\Gamma_3} b \cdot \mathrm{n}\, dS + \sum_{j=1}^{r-1} F_{2_j} \right)$$

Consideremos agora, o caso onde $a(\cdot,\cdot)$ é V_0-elítica com núcleo V_1. Conforme teorema 3.1 , para que o problema variacional (3.12) admita ao menos uma solução é necessário que os dados verifiquem a condição de compatibilidade (3.15). Utilizando o fato de $\{w_1, ..., w_{r-1}\}$ ser uma base de V_1, tal condição se escreve :

$$L(w_i) = 0 \,, \quad \forall\, i = 1, ..., r-1 \tag{3.26}$$

ou seja :

$$\int_\Omega f \cdot w_i \, dx + \nu < h \times \mathrm{n}, w_i >_{\Gamma_3} - < p_0, w_i \cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2} = 0 \,, \forall\, i = 1, ..., r-1$$

Por outro lado, uma vez que V_1 é o núcleo de $a(\cdot,\cdot)$, os termos $a(U_0, w_i)$ e $a(w_i, w_j)$, para $i = 1, ...r-1$, são todos nulos e a condição (3.25) é a mesma de (3.26). Além disso , quando a condição (3.26) é verificada, as soluções do problema variacional (3.12) se escrevem :

$$u = y_0 + w \,,$$

onde $w \in \mathrm{V}_1$ e y_0 é solução única do problema :

$$\begin{cases} a) \quad \text{Achar } y_0 \in H^1(\Omega)^3 \text{ tal que :} \\ b) \quad y_0 - U_0 \in \mathrm{V}_0 \\ c) \quad \int_\Omega (\nabla \times y_0)(\nabla \times v_0)\, dx = \int_\Omega f \cdot v_0 \, dx + \nu < h \times \mathrm{n}, v_0 >_{\Gamma_3} \\ \qquad\qquad - < p_0, v_0 \cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2} \,, \forall\, v_0 \in \mathrm{V}_0 \end{cases} \tag{3.27}$$

Lembramos ainda, que é sempre possível escolher w de forma que a solução $u = y_0 + w$ de (3.12) tenha os fluxos fixados $F_{2_1}, ..., F_{2_r}$ sobre as componentes conexas de Γ_2, basta escolher w da forma :

$$w = \sum_{j=1}^{r-1} (F_{2_j} - F_{2_j}^0)\, w_j. \tag{3.28}$$

3.4.3 As equações de Stokes com o fluxo imposto sobre as componentes conexas de Γ_2

Suporemos agora que a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ é V-elítica ou V_0-elítica com núcleo V_1 e consideraremos a seguinte variante do problema de fronteira (3.2) :

Achar u, p e as constantes $C_1, ..., C_r$ definidas a menos de uma constante global (isto é, se $C_1, ..., C_r$ são soluções então $C_1 + d, ..., C_r + d$ são também soluções com d constante) tais que :

$$
\begin{array}{lll}
a) & -\nu\Delta u + \nabla p = f & \text{em } \Omega \\
b) & \nabla \cdot u = 0 & \text{em } \Omega \\
c) & u = u_0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\
d) & u \times \mathrm{n} = a \times \mathrm{n} & \text{sobre } \Gamma_2 \\
e) & p = \overline{p}_{0_i} + C_i & \text{sobre } \Gamma_{2_i}, i = 1, ..., r \\
f) & u \cdot \mathrm{n} = b \cdot \mathrm{n} & \text{sobre } \Gamma_3 \\
g) & (\nabla \times u) \times \mathrm{n} = h \times \mathrm{n} & \text{sobre } \Gamma_3 \\
h) & \int_{\Gamma_{2_j}} u \cdot \mathrm{n}\, dS = F_{2_j} & \forall\, j = 1, ..., r
\end{array}
\tag{3.29}
$$

onde os dados do problema são ν, f, u_0, a, $\overline{p}_0$, b, h e os fluxos $F_{2_1}, ..., F_{2_r}$. Notamos que a única diferença entre este novo problema de fronteira e o problema (3.2) é que neste, o fluxo faz parte dos dados e as constantes C_i são incógnitas do problema, ao passo que, no problema de fronteira (3.2) tínhamos a situação inversa.

Para estudarmos o novo problema são necessárias as hipóteses (3.3) a (3.7) com excessão de (3.6) que substituiremos por :

$$\overline{p}_{0_i} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{2_i}), \ \forall\, i = 1, ..., r \tag{3.30}$$

onde $\overline{p}_{0_i} = \overline{p}_0|_{\Gamma_{2_i}}$.

Integrando por partes (3.29b), veremos que uma condição necessária de existência de uma solução de (3.29) é a de *fluxo global nulo*, ou seja :

$$\int_{\Gamma_1} u_0 \cdot \mathbf{n}\, dS + \sum_{j=1}^{r} F_{2_j} + \int_{\Gamma_3} b \cdot \mathbf{n}\, dS = 0, \tag{3.31}$$

que suporemos verificada.

Utilizando o teorema 3.2 e a proposição 3.4, é fácil ver que se $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $p \in C^1(\overline{\Omega})$ e $C_1, ..., C_r$ são uma solução do problema (3.29), então u e as constantes C_i são soluções do seguinte problema variacional :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a) & \text{Achar } u \in H^1(\Omega)^3 \text{ e constantes } C_1, ..., C_r \text{ tais que :} \\ b) & (u - U_1) \in \mathrm{V}_0 \\ c) & a(u, v_0) = \overline{L}(v_0)\ ,\ \forall\, v_0 \in \mathrm{V}_0 \\ d) & C_i - C_r = \overline{L}(w_i) - a(U_0, w_i) - \sum_{j=1}^{r-1}(F_{2_j} - F_{2_j}^0)a(w_i, w_j), \\ & \quad \text{para todo } i = 1, ..., r-1. \end{array} \right. \tag{3.32}$$

onde $\overline{L}(\cdot)$ é a forma linear definida por :

$$\overline{L}(v) = \int_\Omega f \cdot v\, dx + \nu < h \times \mathbf{n}, v >_{\Gamma_3} - < \overline{p}_0, v \cdot \mathbf{n} >_{\Gamma_2},\ \forall v \in H^1(\Omega)^3 \tag{3.33}$$

e $U_1 \in H^1(\Omega)^3$ definida por :

$$U_1 = U_0 + \sum_{j=1}^{r-1} (F_{2_j} - F_{2_j}^0)\, w_j. \tag{3.34}$$

Reciprocamente, se u e $C_1, ..., C_r$ são soluções de (3.32), utilizando a decomposição $\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 \oplus \mathrm{V}_1$ (conforme lema 1.12) e definindo :

$$p_0 = \overline{p}_{0_i} + C_i \quad \text{sobre } \Gamma_{2_i}, \ \forall i = 1,...,r, \tag{3.35}$$

verificamos facilmente que u é solução do problema variacional (3.12). Pelo teorema de interpretação 3.3 existe $p \in H(\Delta,\Omega)/I\!R$ tal que u, p e as constantes $C_1, ..., C_r$ são soluções das equações (3.29a),...,(3.29g) no sentido dado neste teorema. Por outro lado, a velocidade u verifica as condições de fluxo (3.29h), pois $(u - U_1) \in V_0$ e a condição (3.31) é verificada.

A existência e a unicidade de uma solução do problema variacional (3.32) é evidente : notamos que o problema está desacoplado entre, de uma parte, (3.32b) e (3.32c) que dão a existência e a unicidade de u e, de outra parte, (3.32d) que determina as diferenças $C_i - C_r$. Temos então demonstrado o seguinte

Teorema 3.5 *Suponhamos que $a(\cdot,\cdot)$ seja V-elítica ou V_0-elítica com núcleo V_1 e as hipóteses* (3.3) *a* (3.7), (3.30) *e* (3.31) *sejam satisfeitas. Então o problema variacional* (3.32) *admite uma única solução. A interpretação deste problema variacional é a mesma do problema de fronteira* (3.29). ∎

É interessante lembrar que se $a(\cdot,\cdot)$ é V_0-elítica com núcleo V_1 a equação (3.32d) se escreve :

$$C_i - C_r = \overline{L}(w_i) \ , \ \forall i = 1,..., r-1. \tag{3.36}$$

3.4.4 Determinação da derivada normal da pressão sobre Γ_3

Nesta seção, voltaremos ao problema (3.2) cuja formulação variacional é dada em (3.14). Sob certas hipóteses de regularidade mostraremos que a derivada normal da pressão sobre Γ_3 é determinada explicitamente a partir dos dados do problema. Suporemos que a fronteira Γ de Ω satisfaz a condição de regularidade :

$$\Gamma \text{ é de classe } C^{1,1}, \tag{3.37}$$

e denotaremos por $\ll \cdot,\cdot \gg$ o produto de dualidade entre $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ e $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$.

Consideremos o seguinte espaço :

$$X = \{\, \Phi \in H^2(\Omega) \mid \Phi = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \,\} \tag{3.38}$$

Sejam u uma solução do problema variacional (3.14) e p a pressão correspondente. Pelo que foi visto na demonstração do teorema 3.3, u e p são soluções das seguintes equações :

$$\begin{aligned} &a) \quad \nu \nabla \times (\nabla \times u) + \nabla p = f \\ &b) \quad \Delta p = \nabla \cdot f \end{aligned} \tag{3.39}$$

no sentido de distribuições em Ω. Assim, se $\Phi \in X$, multiplicando-se (3.39a) por $\nabla \Phi$ e (3.39b) por Φ , teremos :

$$\begin{aligned} &a) \quad \int_\Omega (\nu \nabla \times (\nabla \times u) + \nabla p) \cdot \nabla \Phi \, dx = \int_\Omega f \cdot \nabla \Phi \, dx \,, \ \forall\, \Phi \in X \\ &b) \quad \int_\Omega \Delta p \cdot \Phi \, dx = \int_\Omega (\nabla \cdot f) \cdot \Phi \, dx \,, \quad \forall\, \Phi \in X \end{aligned} \tag{3.40}$$

Estas duas últimas relações contém implicitamente a propriedade de p que nos interessa. Para interpretá-la é preciso integrar por partes os termos da esquerda em (3.40a) e (3.40b). Para isto, suporemos :

$$\nabla \times (\nabla \times u) \in L^2(\Omega)^3. \tag{3.41}$$

Isto implicará que $p \in H^1(\Omega) \cap H(\Delta, \Omega)$ e assim, poderemos integrar e utilizando a fórmula de Green (1.5), obteremos :

$$
\begin{aligned}
&a) \quad -\nu < (\nabla \times u) \times \mathrm{n}, \nabla \Phi >_\Gamma + \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \Phi \, dx = \int_\Omega f \cdot \nabla \Phi \, dx, \\
&b) \quad -\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \Phi \, dx + \ll \tfrac{\partial p}{\partial \mathrm{n}}, \Phi \gg_\Gamma = -\int_\Omega f \cdot \nabla \Phi \, dx + < f \cdot \mathrm{n}, \Phi >_\Gamma,
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

para toda $\Phi \in X$, de onde deduziremos que :

$$
\ll \frac{\partial p}{\partial \mathrm{n}}, \Phi \gg_\Gamma = < f \cdot \mathrm{n}, \Phi >_\Gamma + \nu < (\nabla \times u) \times \mathrm{n}, \nabla \Phi >_\Gamma, \tag{3.43}
$$

Usando a definição de *divergente tangencial* (1.24), teremos :

$$
\ll \frac{\partial p}{\partial \mathrm{n}}, \Phi \gg_\Gamma = < f \cdot \mathrm{n}, \Phi >_\Gamma - < \nabla_t \cdot ((\nabla \times u) \times \mathrm{n}), \Phi >_\Gamma, \tag{3.44}
$$

para toda $\Phi \in X$.

Consideremos $\Psi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ com suporte compacto em Γ_3 e $\Phi \in H^2(\Omega)$ uma extensão de Ψ. Como $\Phi \in X$ e usando a condição de fronteira $(\nabla \times u) \times \mathrm{n}$ sobre Γ_3 teremos :

$$
\ll \frac{\partial p}{\partial \mathrm{n}}, \Psi \gg_{\Gamma_3} = < f \cdot \mathrm{n}, \Psi >_{\Gamma_3} - \nu < \nabla_t \cdot (h \times \mathrm{n}), \Psi >_{\Gamma_3}
$$

onde $\ll \cdot, \cdot \gg_{\Gamma_3}$ denota o produto de dualidade entre $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_3)$ e $H_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma_3)$.

Temos assim, demonstrada a seguinte

Proposição 3.6 *Suponhamos que as condições* (3.3) *a* (3.7) *são verificadas. Se u é uma solução do problema variacional* (3.14) *que satisfaz* (3.41), *então a pressão associada a u satisfaz a seguinte condição de fronteira :*

$$
\frac{\partial p}{\partial \mathrm{n}} = f \cdot \mathrm{n} - \nu \nabla_t \cdot (h \times \mathrm{n}) \quad \textit{no sentido de } H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_3). \qquad \blacksquare
$$

Capítulo 4

O PROBLEMA DE NAVIER-STOKES COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA SOBRE A PRESSÃO

4.1 Introdução

Generalizaremos, neste capítulo, certos resultados do capítulo anterior para o caso das equações de Navier-Stokes. Estudaremos duas versões (com condições de fronteira homogêneas, depois não homogêneas sobre a velocidade) do problema de Navier-Stokes associado ao problema (3.2).

4.2 Formulação do problema de Navier-Stokes homogêneo

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^3$, limitado, conexo, cuja fronteira Γ é localmente lipschitziana. Suporemos que Γ se decompõe em abertos $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ satisfazendo (3.1).

Estudaremos as equações de Navier-Stokes (estacionárias) :

$$
\begin{aligned}
&a) \quad -\nu\,\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f && \text{em } \Omega \\
&b) \quad \nabla\cdot u = 0 && \text{em } \Omega
\end{aligned}
$$

com as seguintes condições de fronteira :

$$
\begin{aligned}
&c) \quad u = 0 && \text{sobre } \Gamma_1 \\
&d) \quad u \times \mathrm{n} = 0 && \text{sobre } \Gamma_2 \\
&e) \quad p + \tfrac{1}{2}\mid u\mid^2 = p_0 && \text{sobre } \Gamma_2 \\
&f) \quad u\cdot \mathrm{n} = 0 && \text{sobre } \Gamma_3 \\
&g) \quad (\nabla\times u)\times \mathrm{n} = h\times \mathrm{n} && \text{sobre } \Gamma_3
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

onde ν, f, p_0 e h são os dados do problema. Suporemos que estes satisfazem as condições (3.3) a (3.7).

Notamos que a condição (4.1e) é sobre a pressão dinâmica do fluido (definida por $p + \frac{1}{2}\mid u\mid^2$) ao passo que no problema de Stokes a condição de fronteira é sobre a pressão estática. Observamos ainda, que há a perda da linearidade da condição de fronteira ao se tomar a pressão dinâmica.

4.3 Formulação variacional do problema homogêneo e resultado de existência

Consideremos o seguinte problema variacional :

$$
\begin{cases}
a) \quad \text{Achar } u \in \mathrm{V} \text{ tal que :} \\
b) \quad a(u,v) + b(u,u,v) = L(v)\,,\ \forall\, v \in \mathrm{V}\,,
\end{cases}
\tag{4.2}
$$

onde V é o espaço definido por (3.8), $a(\cdot,\cdot)$ é a forma bilinear definida por (3.10), $L(\cdot)$ é a forma linear definida por (3.13) e $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ é a forma trilinear definida por :

$$b(\cdot,\cdot,\cdot) : H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$b(u,v,w) = \int_\Omega ((\nabla \times u) \times v) \cdot w \, dx \, , \ \forall \, u,v,w \in H^1(\Omega)^3. \tag{4.3}$$

Lembramos que se u, v, $w \in H^1(\Omega)^3$, então $\nabla \times u \in L^2(\Omega)^3$, $v \in L^4(\Omega)^3$, $w \in L^4(\Omega)^3$ porque , em dimensão 3, o espaço $H^1(\Omega)^3$ está imerso em $L^4(\Omega)^3$, com imersão compacta (cfe. teorema 1.3). Assim $((\nabla \times u) \times v) \cdot w \in L^1(\Omega)^3$ e $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ está bem definida em $H^1(\Omega)^3$. Além disso, usando a desigualdade de Hölder e em seguida, a imersão compacta de $H^1(\Omega)^3$ em $L^4(\Omega)^3$, teremos :

$$| \, b(u,v,w) \, | \leq \int_\Omega | \, (\nabla \times u)(x) \times v(x) \, | \cdot | \, w(x) \, | \, dx$$

$$\leq \int_\Omega | \, (\nabla \times u)(x) \, | \cdot | \, v(x) \, | \cdot | \, w(x) \, | \, dx$$

$$\leq \left(\int_\Omega | \, (\nabla \times u)(x) \, |^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega | \, v(x) \, |^4 \, dx \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\int_\Omega | \, w(x) \, |^4 \, dx \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\leq C_0^2 \, \| \, u \, \|_{H^1(\Omega)^3} \cdot \| \, v \, \|_{H^1(\Omega)^3} \cdot \| \, w \, \|_{H^1(\Omega)^3} \, ,$$

onde C_0 é a constante da imersão compacta; assim concluímos que $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ é contínua em $(H^1(\Omega)^3)^3$.

Usando as definições de V, $a(\cdot,\cdot)$, $L(\cdot)$, $b(\cdot,\cdot,\cdot)$, o problema (4.2) se escreve :

$$
\begin{cases}
a) & \text{Achar} \quad u \in \text{ V tal que :} \\[2ex]
b) & \nu \int_\Omega (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v)\, dx + \int_\Omega ((\nabla \times u) \times u) \cdot v\, dx = \\[2ex]
& \int_\Omega f \cdot v\, dx + \nu < h \times \mathrm{n}, v >_{\Gamma_3} - < p_0, v \cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2}, \; \forall\, v \in \mathrm{V}
\end{cases} \tag{4.4}
$$

Mostraremos, posteriormente, que o problema (4.4) tem a mesma interpretação que o problema (4.1). Mostraremos agora, um resultado de existência para (4.2). Observamos que não é feita nenhuma hipótese sobre a pequenes dos dados.

Teorema 4.1 *Se a forma bilinear* $a(\cdot,\cdot)$ *for V-elítica, então o problema variacional* (4.2) *admite ao menos uma solução.*

Demonstração : Usaremos aqui o método de Galerkin. Como V é um subespaço fechado de $H^1(\Omega)^3$, podemos escolher uma base de Schauder $v_1, ..., v_k, ...$ de V.

Para cada $k \leq 1$, definiremos o seguinte problema aproximado :

$$
\begin{cases}
a) & \text{Achar} \quad \alpha_{ik} \in I\!R \; (1 \leq i \leq k) \quad \text{tal que} \quad u_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ik} v_i \\[2ex]
& \text{seja solução de :} \\[2ex]
b) & a(u_k, v_i) + b(u_k, u_k, v_i) = L(v_i), \; \forall i = 1, ..., k
\end{cases} \tag{4.5}
$$

Para demonstrar que este problema admite ao menos uma solução, utilizaremos o lema 1.13. Observamos que a estrutura desta demonstração é inteiramente análoga àquela do problema (2.15) e que, apesar das definições serem diferentes, as formas bilineares e trilineares têm as mesmas propriedades.

Consideremos então, o subespaço V_k de V gerado por $v_1, ..., v_k$ e munido do produto interno de $H^1(\Omega)^3$ e definamos P_k por :

$$(P_k(\xi), v) = a(\xi, \xi) + b(\xi, \xi, v) - L(v)\,, \quad \forall \xi, v \in V_k.$$

Verificamos a continuidade de P_k da mesma forma feita em (2.15). Temos que :

$$(P_k(\xi), \xi) = a(\xi, \xi) + b(\xi, \xi, \xi) - L(\xi).$$

Como $((\nabla \times \xi) \times \xi) \cdot \xi = 0$, então $b(\xi, \xi, \xi) = 0$; além disso, sendo $L(\cdot)$ contínua, existe $C > 0$ tal que :

$$| L(v) | \leq C \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)^3}\,, \quad \forall v \in H^1(\Omega)^3. \tag{4.6}$$

Utilizando as duas últimas informações e o fato de $a(\cdot, \cdot)$ ser V-elítica teremos :

$$(P_k(\xi), \xi) \geq \alpha\nu \parallel \xi \parallel^2_{H^1(\Omega)^3} - C \parallel \xi \parallel_{H^1(\Omega)^3}\,, \quad \forall \xi \in V_k\,.$$

Tomando-se $R \geq \frac{C}{\alpha\nu}$, teremos que $(P_k(\xi), \xi) > 0$ se $\parallel \xi \parallel = R$. Assim, para todo $k \geq 1$, existe $\xi_k \in V_k$ tal que $\parallel \xi_k \parallel_{H^1(\Omega)^3} \leq \frac{C}{\alpha\nu}$ e $P_k(\xi_k) = 0$, ou seja, existe uma solução u_k do problema (4.5) verificando :

$$\parallel u_k \parallel_{H^1(\Omega)^3} \leq \frac{C}{\alpha\nu}.$$

Temos, portanto, uma limitação uniforme em $H^1(\Omega)^3$ para a sequência de soluções $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Podemos extrair uma subsequência que ainda denotaremos por $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que :

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{fraco em} \quad H^1(\Omega)^3, \quad \text{quando} \quad k \to \infty, \tag{4.7}$$

onde $u \in$ V (V é fechado). Como $H^1(\Omega)^3 \hookrightarrow L^4(\Omega)^3$ compactamente, podemos escolher a subsequência $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ de modo que :

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{forte em} \quad L^4(\Omega)^3, \quad \text{quando} \quad k \to \infty. \tag{4.8}$$

Fixando $v_{k'} \in \mathrm{V}_{k'}$ arbitrariamente e tomando $k \geq k'$ teremos que $\mathrm{V}_{k'} \subseteq \mathrm{V}_k$ e que a expressão

$$a(u_k, v_{k'}) + b(u_k, u_k, v_{k'}) = L(v_{k'})$$

irá convergi1 para

$$a(u, v_{k'}) + b(u, u, v_{k'}) = L(v_{k'}), \ \ v_{k'} \in \mathrm{V}_{k'} \tag{4.9}$$

Como $v_{k'}$ foi tomado arbitrariamente, (4.9) continua válida para qualquer $v \in \bigcup \mathrm{V}_k$ e como as combinações lineares finitas de $\{v_1, ..., v_k, ...\}$ são densas em V, teremos que :

$$a(u, v) + b(u, u, v) = L(v), \ \forall v \in V. \quad \blacksquare$$

4.3.1 Resultado de unicidade para o problema homogêneo

Denotaremos por $\| L \|_.$ a norma de L no dual de V :

$$\| L \|_. = \sup_{v \in V} \frac{| L(v) |}{\| v \|_{H^1(\Omega)^3}} . \tag{4.10}$$

Mostraremos a seguir, que se a viscosidade ν for muito grande em relação à força exterior então o problema (4.2) admitirá uma única solução.

Teorema 4.2 *Se a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ for V-elítica, então existe $\delta = \delta(\Omega) > 0$ tal que se*

$$\nu^2 > \delta \| L \|_. ,$$

o problema (4.2) *admite uma única solução.*

Demonstração : Sejam u_1 e u_2 duas soluções de (4.2). Tomando-se $v = u_1$ na equação (4.2b) e lembrando que $((\nabla \times u_1) \times u_1) \cdot u_1 = 0$, obteremos :

$$\alpha\nu \| u_1 \|^2_{H^1(\Omega)^3} \leq \| L \|_. \| u_1 \|_{H^1(\Omega)^3} .$$

Toda solução u_1 de (4.2) verifica então :

$$\| u_1 \|_{H^1(\Omega)^3} \leq \frac{1}{\alpha\nu} \| L \|_. . \tag{4.11}$$

Por outro lado, tomando-se $z = u_1 - u_2$, teremos :

$$a(z,v) + b(z,u_1,v) + b(u_2,z,v) = 0, \ \forall v \in V. \tag{4.12}$$

Colocando-se $v = z$ em (4.12), teremos :

$$\alpha\nu \parallel z \parallel^2_{H^1(\Omega)^3} + b(z, u_1, z) + b(u_2, z, z) \leq 0.$$

Como $((\nabla \times u_2) \times z) \cdot z = 0$, teremos que $b(u_2, z, z) = 0$ e assim :

$$\alpha\nu \parallel z \parallel^2_{H^1(\Omega)^3} \leq -b(z, u_1, z) = -\int_\Omega ((\nabla \times z) \times u_1) \cdot z \, dx \,,$$

de onde, usando a desigualdade de Hölder, obteremos :

$$\alpha\nu \parallel z \parallel^2_{H^1(\Omega)^3} \leq C_0 \parallel u_1 \parallel_{H^1(\Omega)^3} \parallel z \parallel^2_{H^1(\Omega)^3} \tag{4.13}$$

onde C_0 é a constante de imersão de $H^1(\Omega)^3$ em $L^4(\Omega)^3$. Utilizando (4.11) teremos :

$$(\alpha\nu - (C_0 - \alpha\nu) \parallel L \parallel_.) \parallel z \parallel^2_{H^2(\Omega)^3} \leq 0.$$

Assim, se $\nu^2 > (\frac{C_0}{\alpha^2} \parallel L \parallel_.)$ então $z = 0$ com $\delta = \frac{C_0}{\alpha^2}$. ∎

4.4 Formulação do problema não homogêneo

Nesta seção, estaremos interessados em estudar o seguinte problema :

$$
\begin{array}{llll}
a) & -\nu\,\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f & \text{em} & \Omega \\
b) & \nabla\cdot u = 0 & \text{em} & \Omega \\
c) & u = u_0 & \text{sobre} & \Gamma_1 \\
d) & u\times \mathrm{n} = a\times \mathrm{n} & \text{sobre} & \Gamma_2 \\
e) & p + \frac{1}{2}\mid u\mid^2 = p_0 & \text{sobre} & \Gamma_2 \\
f) & u\cdot \mathrm{n} = b\cdot \mathrm{n} & \text{sobre} & \Gamma_3 \\
g) & (\nabla\times u)\times \mathrm{n} = h\times \mathrm{n} & \text{sobre} & \Gamma_3
\end{array}
\tag{4.14}
$$

onde ν, f, u_0, a, p_0, b e h são os dados do problema e u e p são as incógnitas. Como no capítulo anterior, consideraremos U_0 a extensão de u_0, a e b verificando (3.3) a (3.7).

Para estudarmos o problema (4.14), consideraremos o seguinte problema variacional :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
a) & \text{Achar } \; u\in H^1(\Omega)^3 \text{ tal que :} \\
b) & (u - U_0)\in \mathrm{V} \\
c) & a(u,v) + b(u,u,v) = L(v)\,,\ \forall\, v\in \mathrm{V}
\end{array}
\right.
\tag{4.15}
$$

Usando as definições de $a(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ e $L(\cdot)$, o problema se escreve :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
a) & \text{Achar } \; u\in H^1(\Omega)^3 \; \text{ tal que :} \\
b) & (u - U_0)\in \mathrm{V} \\
c) & \nu\int_\Omega(\nabla\times u)(\nabla\times v)\,dx + \int_\Omega((\nabla\times u)\times u)\cdot v\,dx = \\
 & \int_\Omega f\cdot v\,dx + \nu < h\times n, v >_{\Gamma_3} - < p_0, v\cdot\mathrm{n} >_{\Gamma_2},\ \forall v\in \mathrm{V}.
\end{array}
\right.
\tag{4.16}
$$

Veremos na seção 4.7 que a interpretação do problema (4.16) é a mesma do problema (4.14).

4.5 Um resultado de existência e de unicidade para o problema não homogêneo

Mostraremos na seção 4.10 que, mesmo não tendo a pequenes dos dados do problema não homogêneo, é possível garantir a existência de soluções sob certas condições naturais.

Demonstraremos agora, que se os dados do problema são muito pequenos, ou se a viscosidade do fluido é muito grande então existe ao menos uma solução de (4.15) que deverá estar numa vizinhança pequena de U_0.

Começaremos introduzindo as seguintes notações :

$$M = \sup_{u,v \in H^1(\Omega)^3} \frac{a(u,v)}{\| u \|_{H^1(\Omega)^3} \| v \|_{H^1(\Omega)^3}} \tag{4.17}$$

$$K = \sup_{u,v,w \in H^1(\Omega)^3} \frac{| b(u,v,w) |}{\| u \|_{H^1(\Omega)^3} \| v \|_{H^1(\Omega)^3} \| w \|_{H^1(\Omega)^3}} \tag{4.18}$$

Lembramos que M e K estão bem definidos porque as formas $a(\cdot,\cdot)$ e $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ são contínuas em $H^1(\Omega)^2$ e $H^1(\Omega)^3$. Notamos que $K \leq C_0^2$, onde C_0 é a constante da imersão de $H^1(\Omega)^3$ em $L^4(\Omega)^3$. Sejam A definido por :

$$A = \| L \|_{.} + \| U_0 \|_{H^1(\Omega)^3} \cdot (M + 2K \| U_0 \|_{H^1(\Omega)^3}) \tag{4.19}$$

e $B(U_0, \frac{2A}{\alpha\nu})$ a bola em $H^1(\Omega)^3$ de centro U_0 e raio $\frac{2A}{\alpha\nu}$, ou seja,

$$B(U_0, \frac{2A}{\alpha\nu}) = \{v \in H^1(\Omega)^3 \mid \| v - U_0 \|_{H^1(\Omega)^3} \leq \frac{2A}{\alpha\nu}\}. \tag{4.20}$$

Teorema 4.3 *Suponhamos que a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ é V-elítica e que os dados do problema* (4.15) *verificam a seguinte condição :*

$$\nu^2 > (\frac{8AK}{\alpha^2}). \tag{4.21}$$

onde α é a constante de coercividade da forma $a(\cdot,\cdot)$. Então o problema (4.15) *admite uma solução única e esta solução pertence a $B(U_0, \frac{2A}{\alpha\nu})$.*

Demonstração : Seja $G : B(U_0, \frac{2A}{\alpha\nu}) \longrightarrow H^1(\Omega)^3$ definida por $G(v) = u$, onde u é a solução única do seguinte problema de Stokes :

$$\begin{cases} a) \quad \text{Achar} \quad u \in H^1(\Omega)^3 \quad \text{tal que :} \\ b) \quad (u - U_0) \in \mathrm{V} \\ c) \quad a(u,z) = L(z) - b(v,v,z)\ , \ \forall\, z \in \mathrm{V} \end{cases} \tag{4.22}$$

Notamos que, como o problema (4.22) tem solução única (conforme lema LAX-MILGRAM) G está bem definida; nosso objetivo será mostrar que G tem um único ponto fixo em $B(U_0, \frac{2A}{\alpha\nu})$.

Começaremos mostrando que G leva $B(U_0, \frac{2A}{\alpha\nu})$ nela mesma.

Colocando $z = u - U_0$ em (4.22c), teremos :

$$a(u - U_0, u - U_0) = L(u - U_0) - a(U_0, u - U_0) - b(v, v, u - U_0)$$

de onde deduzimos que :

$$\alpha\nu \parallel u - U_0 \parallel^2 \leq (\parallel L \parallel_{\cdot} + M \parallel U_0 \parallel + K \parallel v \parallel^2) \parallel u - U_0 \parallel, \tag{4.23}$$

onde $\parallel \cdot \parallel$ é a norma de $H^1(\Omega)^3$.

Como $\| v \|^2 \leq 2(\| v - U_0 \|^2 + \| U_0 \|^2)$ então (4.23) e (4.19) implicam que :

$$\alpha\nu \| u - U_0 \| \leq A + 2K \| v - U_0 \|^2 . \tag{4.24}$$

Assim, utilizando o fato de $v \in B(U_0, \frac{2A}{\alpha\nu})$ e a hipótese (4.21) deduziremos que :

$$\alpha\nu \| u - U_0 \| \leq 2A.$$

ou seja, $u \in B(U_0, \frac{2A}{\alpha\nu})$.

Mostraremos em seguida que G é uma contração estrita,

Sejam $v_1 , v_2 \in B(U_0, \frac{2A}{\alpha\nu})$ e

$$u_1 = G(v_1) \ , \ u_2 = G(v_2).$$

Como u_i é solução única de (4.22c) com $v = v_i, \ i = 1, 2$, teremos fazendo a diferença :

$$a(u_1 - u_2, z) = -b(v_1, v_1 , z) + b(v_2, v_2, z) , \ \forall z \in \mathrm{V}$$

Fazendo $z = u_1 - u_2$ nesta expressão, teremos :

$$\begin{aligned} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) &= -b(v_1, v_1, u_1 - u_2) + b(v_2, v_2, u_1 - u_2) \\ &= -b(v_1 - v_2, v_1, u_1 - u_2) + b(v_2, v_2 - v_1, u_1 - u_2) \end{aligned}$$

de onde deduziremos, utilizando a coercividade da forma $a(\cdot,\cdot)$ e a expressão (4.18) :

$$\alpha\nu \parallel u_1 - u_2 \parallel^2 \leq K(\parallel v_1 \parallel + \parallel v_2 \parallel) \parallel v_1 - v_2 \parallel\parallel u_1 - u_2 \parallel$$

e como $\parallel v_i \parallel \leq \frac{2A}{\alpha\nu} + \parallel U_0 \parallel$, $i = 1, 2,$:

$$\alpha\nu \parallel u_1 - u_2 \parallel \leq K((\frac{4A}{\alpha\nu}) + 2 \parallel U_0 \parallel) \parallel v_1 - v_2 \parallel . \tag{4.25}$$

Além disso, a hipótese (4.21) implica, de um ladò, que :

$$K(\frac{4A}{\alpha\nu}) < \frac{\alpha\nu}{2} \tag{4.26}$$

e de outro lado (uma vez que, por (4.18), $\parallel U_0 \parallel^2 < (\frac{A}{2K})$), que :

$$2K \parallel U_0 \parallel < \frac{\alpha\nu}{2}. \tag{4.27}$$

Combinando (4.25) e (4.27), obteremos :

$$\parallel u_1 - u_2 \parallel \leq C \parallel v_1 - v_2 \parallel,$$

onde $C = (\frac{4AK}{\alpha\nu} + \frac{2K\|U_0\|}{\alpha\nu}) < 1$. Assim, G é uma contração estrita e, portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach admite um único ponto fixo em $B(U_0, \frac{2A}{\alpha\nu})$. Este ponto fixo é uma solução do problema (4.15). Mostremos agora, a unicidade da solução.

Sejam u_1 o ponto fixo de G e u_2 uma outra solução de (4.15). Se $z = u_1 - u_2$, obteremos por diferença :

$$
\begin{aligned}
&a) \quad z \in \mathrm{V} \\
&b) \quad a(z,v) + b(z,u_1,v) + b(u_2,z,v) = 0\,, \ \forall v \in \mathrm{V}
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Por uma demonstração análoga àquela do teorema 4.2, deduziremos facilmente que :

$$\alpha\nu \parallel z \parallel^2 \leq K \parallel u_1 \parallel \parallel z \parallel^2 .$$

Mas $\parallel u_1 \parallel \leq (\frac{2A}{\alpha\nu}) + \parallel U_0 \parallel$ e assim :

$$\alpha\nu \parallel z \parallel^2 \leq ((\frac{2AK}{\alpha\nu}) + K \parallel U_0 \parallel) \parallel z \parallel^2$$

de onde deduziremos, utilizando (4.27) :

$$\alpha\nu \parallel z \parallel^2 \leq \frac{\alpha\nu}{2} \parallel z \parallel^2,$$

o que implicará que $z = 0$, ou seja, $u_1 = u_2$. ■

É interessante observar que o método de achar a solução via Teorema de Ponto Fixo de Banach nos dá unicidade apenas na bola $B(U_0, \frac{2A}{\alpha\nu})$; entretanto, a última parte do teorema acima garante a unicidade não só em $B(U_0, \frac{2A}{\alpha\nu})$ mas também no espaço inteiro.

4.6 Equivalência entre os problemas variacional e de fronteira

Consideraremos aqui, apenas o caso das condições não homogêneas sobre a velocidade, mas todos os resultados se aplicam ao caso das condições homogêneas (basta tomar U_0, u_0, a, b, e h nulas).

Começaremos demonstrando o seguinte

Teorema 4.4 *Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e $p \in C^1(\overline{\Omega})$ são soluções clássicas do problema de fronteira* (4.14), *então u é solução do problema variacional* (4.16).

Demonstração : A demonstração é inteiramente análoga ao caso linear e não nos prenderemos aos detalhes. Multiplicando (4.14a) por $v \in \mathrm{V}$, integrando por partes em Ω e utilizando a expressão (3.17) e a expressão abaixo :

$$(u \cdot \nabla)u = \nabla \times (\nabla \times u) + \frac{1}{2} \mid u \mid^2 \tag{4.29}$$

obteremos :

$$\nu \int_\Omega (\nabla \times u)(\nabla \times v)\, dx + \int_\Omega ((\nabla \times u) \times u) \cdot v\, dx =$$
$$= \int_\Omega f \cdot v\, dx + \nu \int_\Gamma ((\nabla \times u) \times \mathrm{n}) \cdot v\, dS - \int_\Gamma (p + \frac{1}{2} \mid u \mid^2) \cdot v\, dS$$

Introduzindo as definições de $a(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ e as condições de fronteira que verificam u, $(p + \frac{1}{2} \mid u \mid^2)$ e v, a expressão acima ficará :

$$a(u,v) + b(u,u,v) = \int_\Omega f \cdot v\, dx + \int_{\Gamma_3} (h \times \mathrm{n}) \cdot v\, dS - \int_{\Gamma_2} p_0\, v \cdot \mathrm{n}\, dS$$

o que mostra que u verifica (4.16c). Usando (4.14b, c, d) e (4.17f), a definição de U_0 e o fato de u ser solução regular do problema (4.14), teremos que $u \in H^1(\Omega)^3$ e $(u - U_0) \in \mathrm{V}$. ∎

Mostraremos em seguida, que toda solução do problema variacional (4.16) é solução (num certo sentido) do problema (4.14).

Teorema 4.5 *Suponhamos que as condições* (3.4) *a* (3.7) *são verificadas. Seja u uma solução do problema variacional* (4.16). *Então existe $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que u e p são soluções do problema de fronteira* (4.14) *no seguinte sentido :*

$$
\left.
\begin{array}{ll}
a) & -\nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f \ \textit{no sentido de distribuição em } \Omega \\[2ex]
b) & \nabla\cdot u = 0 \qquad\qquad \textit{no sentido de distribuição em } \Omega \\[2ex]
c) & u \ \textit{satisfaz } (4.16\text{c,d,f}) \ \textit{no sentido de traço} \\[1ex]
 & \textit{de função de } H^1(\Omega)^3 \\[2ex]
d) & (p + \tfrac{1}{2}\mid u\mid^2) \text{ e } (\nabla\times u) \ \textit{satisfazem } (4.16\text{e,g}) \ \textit{no seguinte} \\[1ex]
 & \textit{sentido :}
\end{array}
\right\} \qquad (4.30)
$$

$$
\int_\Omega(-\nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p)\cdot v\, dx \;-\; \nu\int_\Omega(\nabla\times u)(\nabla\times v)\, dx \;-\int_\Omega((\nabla\times u)\times u)\cdot v\, dx
$$
$$
= \nu < h\times \mathrm{n}, v >_{\Gamma_3} \; + \; < p_0, v\cdot\mathrm{n} >_{\Gamma_2}, \ \forall v \in, \mathrm{V}.
$$

Além disso, se $\nabla\times(\nabla\times u) \in L^2(\Omega)^3$ e $(\nabla\times u)\times u \in L^2(\Omega)^3$ então (4.30d) *implicará :*

$$
\left.
\begin{array}{ll}
a) & p + \tfrac{1}{2}\mid u\mid^2 = p_0 \quad \textit{sobre } \Gamma_2 \ \textit{no sentido de } \ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)/\mathbb{R} \\[2ex]
b) & (\nabla\times u)\times\mathrm{n} = h\times\mathrm{n} \ \ \textit{sobre } \Gamma_3 \ \textit{no sentido de } \ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)^3.
\end{array}
\right\} \qquad (4.31)
$$

Demonstração : Seja u uma solução do problema (4.16). Lembramos primeiramente que (3.5), (4.16a,b) implicam (4.30b) e (4.30c). Além disso, colocando em (4.16c) as funções testes de $D(\Omega)^3$ com divergente nulo em Ω e utilizando a definição de derivada no sentido de distribuições, teremos que :

$$< \nu\nabla\times(\nabla\times u) + (\nabla\times u)\times u, v > = \int_\Omega f\cdot v\,dx\ ,\ \ \forall\, v\in D(\Omega)^3\ ,\ \nabla\cdot v = 0$$

o que implicará que existe $q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ (conforme lema 1.8) tal que :

$$\nu\nabla\times(\nabla\times u) + (\nabla\times u)\times u + \nabla q = f$$

no sentido de distribuição em Ω. Em seguida. definindo

$$p = q - \frac{1}{2}\mid u\mid^2 \tag{4.32}$$

teremos :

$$\nu\nabla\times(\nabla\times u) + (\nabla\times u)\times u + \frac{1}{2}\mid u\mid^2 + \nabla p = f \tag{4.33}$$

no sentido de distribuição em Ω. Como $\nabla\cdot u = 0$, e de (3.17) e (4.29), deduziremos que :

$$-\nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f$$

no sentido de distribuição em Ω. Além disso, multiplicando (4.33) por $v \in \mathrm{V}$ e utilizando (4.16c), obteremos por diferença :

$$\begin{gathered}\textstyle\int_\Omega(\nu\nabla\times(\nabla\times u) + (\nabla\times u)\times u + \nabla(p+\frac{1}{2}\mid u\mid^2))\cdot v\,dx \\ -\nu\textstyle\int_\Omega(\nabla\times u)\cdot(\nabla\times v)\,dx - \int_\Omega((\nabla\times u)\times u)\cdot v\,dx \\ = -\nu < h\times \mathrm{n}, v >_{\Gamma_3} + < p_0, v\cdot\mathrm{n} >_{\Gamma_2},\ \forall v\in\mathrm{V}\end{gathered} \tag{4.34}$$

o que demonstra (4.30d).

Como no caso linear, a relação (4.34) contém implicitamente as condições de fronteira (4.14e) e (4.14g). Se $\nabla\times(\nabla\times u) \in L^2(\Omega)^3$ e $(\nabla\times u)\times u \in L^2(\Omega)^3$, de (3.4) e (4.33) deduziremos que $\nabla(p + \frac{1}{2} \mid u \mid^2) \in L^2(\Omega)^3$. Portanto, $(p + \frac{1}{2} \mid u \mid^2) \in H^1(\Omega)$ e fazendo uma integração por partes no primeiro termo de (4.34), teremos :

$$\begin{aligned} &-\nu < (\nabla \times u) \times \mathrm{n}, v >_{\Gamma_3} + < (p + \tfrac{1}{2} \mid u \mid^2), v \cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2} \\ &\quad = \nu < h \times \mathrm{n}, v >_{\Gamma_3} + < p_0, v \cdot \mathrm{n} >_{\Gamma_2}, \ \forall v \in \mathrm{V} \end{aligned} \tag{4.35}$$

Tomando-se em (4.35) as funções testes v com suporte compacto em Γ_3, obteremos (4.31b). Em seguida, tomando-se as funções testes v com suporte compacto em Γ_2 e utilizando o fato do traço normal das funções de V ter média nula sobre Γ_2, obteremos (4.31a). ∎

4.7 As equações de Navier-Stokes com o fluxo imposto sobre as componentes conexas de Γ_2

Nesta seção, suporemos que a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ é V-elítica ou V_0-elítica com núcleo V_1.

Como no caso linear, estudaremos primeiramente uma variante do problema (4.1) : achar u, p e as constantes $C_1, ..., C_r$, definidas a menos de uma constante global, tais que :

$$
\begin{array}{lll}
a) & -\nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f & \text{em } \Omega \\
b) & \nabla\cdot u = 0 & \text{em } \Omega \\
c) & u = u_0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\
d) & u\times \mathrm{n} = a\times \mathrm{n} & \text{sobre } \Gamma_2 \\
e) & p + \frac{1}{2}\mid u\mid^2 = \overline{p}_{0_i} + C_i & \text{sobre } \Gamma_{2_i}\ ,\ \forall i = 1,...,r \\
f) & u\cdot \mathrm{n} = b\cdot \mathrm{n} & \text{sobre } \Gamma_3 \\
g) & (\nabla\times u)\times \mathrm{n} = h\times \mathrm{n} & \text{sobre } \Gamma_3 \\
h) & \int_{\Gamma_{2_j}} u\cdot \mathrm{n}\, dS = F_{2_j} & \forall\, j = 1,...,r
\end{array}
\tag{4.36}
$$

onde ν, f, u_0, a, $\overline{p}_0$, b, h e os fluxos $F_{2_1},...,F_{2_r}$ são os dados do problema. Suporemos que estes dados verificam as condições (3.3) a (3.7) e trocaremos a condição (3.6) por (3.30).

Colocando :

$$
p_{0_i} = \overline{p}_{0_i} + C_i\ ,\ i = 1,...,r, \tag{4.37}
$$

e utilizando o teorema 4.4, a decomposição $\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 \oplus \mathrm{V}_1$ e a base $\{w_1,...,w_{r-1}\}$ de V_1, é facil mostrar que se $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $p \in C^1(\overline{\Omega})$ e $C_1,...,C_r$ são as soluções clássicas do problema (4.36), então u e as constantes $C_1,...,C_r$ são soluções do seguinte problema variacional :

$$
\begin{cases}
a) & \text{Achar} \quad u \in H^1(\Omega)^3 \text{ e as constantes } C_1, ..., C_r \text{ tais que :} \\
b) & (u - U_1) \in \mathrm{V}_0 \\
c) & a(u, v_0) + b(u, u, v_0) = \overline{L}(v_0)\,, \ \ \forall\, v_0 \in \mathrm{V}_0 \\
d) & C_i - C_r = \overline{L}(w_i) - b(u, u, w_i) - a(U_0, w_i) \\
 & -\sum_{j=1}^{r-1}(F_{2_j} - F_{2_j}^0)\, a(w_i, w_j)\,, \forall\, i = 1, ..., r-1
\end{cases}
\tag{4.38}
$$

onde V_0 é definido por (3.9), $\overline{L}(\cdot)$ por (3.33) e U_1 por (3.34).

Reciprocamente, se u e C_1,...,C_r são soluções de (4.38), utilizando o lema 1.12 e a definição de p_0 por (4.37), é fácil de ver que u é solução do problema variacional (4.15). Além disso, pelo teorema 4.5 existe $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que u, p e as constantes C_1,...,C_r são soluções das equações (4.36a) a (4.36g). Por outro lado, u verifica as condições (4.36h) porque $(u - U_1) \in \mathrm{V}_0$ e a condição (3.31) é verificada.

O problema (4.38) é então, a formulação variacional do problema de fronteira (4.36). No que diz respeito à existência e à unicidade das soluções deste problema, veremos a seguir, que se ν é grande em relação aos dados (ou se os dados são pequenos em relação a ν), então o problema (4.38) admitirá uma única solução, onde a velocidade associada a esta solução estará numa pequena vizinhança de U_1.

Seja $\overline{A}$ definido por :

$$
\overline{A} = \| \overline{L} \|_{.} + \| U_1 \|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \left(M + 2K \| U_1 \|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3}\right) \tag{4.39}
$$

onde M é definido por (4.17), K é definido por (4.18) e $\| \overline{L} \|_{.}$ denota a norma da forma linear $\overline{L}$ no dual de V_0, ou seja,

$$
\| \overline{L} \|_{.} = \sup_{v_0 \in \mathrm{V}_0} \frac{| \overline{L}(v_0) |}{\| v_0 \|_{H^1(\Omega)^3}} \tag{4.40}
$$

Denotaremos por $B(U_1, \frac{2\overline{A}}{\alpha_0 \nu})$ a bola em $H^1(\Omega)^3$ de centro U_1 e raio $(\frac{2\overline{A}}{\alpha_0 \nu})$, onde α_0 é a constante da coercividade de $a(\cdot,\cdot)$ em V_0.

Teorema 4.6 *Suponhamos que a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ é V_0-elítica com núcleo V_1 e que os dados do problema* (4.38) *satisfazem a condição :*

$$\nu^2 > \left(\frac{8\overline{A}K}{\alpha_0^2}\right) \tag{4.41}$$

onde $\overline{A}$ é definido por (4.39). *Então o problema* (4.38) *admite uma única solução e a velocidade associada a esta solução pertence a $B(U_1, \frac{2\overline{A}}{\alpha_0 \nu})$.*

Demonstração : A demonstração é inteiramente análoga à demonstração do teorema 4.3. Lembramos primeiramente que o problema (4.38) se desacopla em duas partes : a primeira (4.38b,c) consiste em determinar u e a segunda (4.38d) em determinar as constantes C_i, uma vez conhecida u. Teremos então o seguinte problema :

$$\left\{\begin{array}{ll} a) & \text{Achar } \ u \in H^1(\Omega)^3 \text{ tal que :} \\[2ex] b) & (u - U_1) \in \mathrm{V}_0 \\[2ex] c) & a(u, v_0) + b(u, u, v_0) = \overline{L}(v_0), \ \ \forall\, v_0 \in \mathrm{V}_0 \end{array}\right. \tag{4.42}$$

Para demonstrar o teorema 4.6 é suficiente seguir passo a passo a demonstração do teorema 4.3, trocando V por V_0, L por $\overline{L}$, U_0 por U_1, A por $\overline{A}$ e α por α_0. Obteremos assim, que se (4.41) é verificada, o problema (4.42) admite uma solução única e que esta solução pertence a $B(U_1, \frac{2\overline{A}}{\alpha_0 \nu})$. Uma vez que u é obtida, a expressão (4.38d) determina as constantes $C_1,\ldots,C_r$ a menos de uma constante global. ■

Como no caso linear, é interessante lembrar que se $a(\cdot,\cdot)$ é V_0-elítica com núcleo V_1, a equação (4.38d) se escreverá simplesmente :

$$C_i - C_r = \overline{L}(w_i) - b(u, u, w_i),\ \forall\, i = 1, ..., r-1 \qquad (4.43)$$

4.8 Determinação da derivada normal da pressão sobre Γ_3

Nesta seção, generalizaremos a fórmula que nos permite determinar $\frac{\partial p}{\partial \mathrm{n}}$ sobre Γ_3, no caso do problema (4.14) de Navier-Stokes não homogêneo. Ao contrário do caso linear, veremos que esta fórmula depende não somente dos dados do problema mas também da velocidade.

Proposição 4.7 *Suponhamos que as condições* (3.3) *a* (3.7) *e* (3.37) *são verificadas. Se u é uma solução do problema variacional* (4.16) *que verifica as seguintes condições :*

$$\begin{aligned} a)&\quad \nabla \times (\nabla \times u) \in L^2(\Omega)^3 \\ b)&\quad (\nabla \times u) \times u \in L^2(\Omega)^3 \\ c)&\quad \nabla \cdot ((\nabla \times u) \times u) \in L^2(\Omega) \end{aligned} \qquad (4.44)$$

então $(p + \frac{1}{2} \mid u \mid^2)$ satisfaz a seguinte condição de fronteira sobre Γ_3 :

$$\partial(p + \frac{1}{2} \mid u \mid^2)/\partial \mathrm{n} = (f - (\nabla \times u) \times u) \cdot \mathrm{n} - \nu \nabla_t \cdot (h \times \mathrm{n}) \qquad (4.45)$$

no sentido de $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_3)$.

Demonstração : Seja u uma solução do problema (4.16) verificando as condições de regularidade (4.44) e seja p a pressão correspondente. Pelo teorema 4.5, u e p satisfazem :

$$\nu\nabla\times(\nabla\times u)+(\nabla\times u)\times u+\nabla(p+\frac{1}{2}\mid u\mid^2)=f \tag{4.46}$$

em $D'(\Omega)^3$, e aplicando o operador divergente, temos :

$$\Delta(p+\frac{1}{2}\mid u\mid^2)=\nabla\cdot(f-(\nabla\times u)\times u) \tag{4.47}$$

em $D'(\Omega)^3$; daí, deduziremos que :

$$\int_\Omega(\nu\nabla\times(\nabla\times u)+(\nabla\times u)\times u+\nabla(p+\frac{1}{2}\mid u\mid^2))\cdot\nabla\Phi\,dx=\int_\Omega f\cdot\nabla\Phi\,dx, \tag{4.48}$$

$$\int_\Omega\Delta(p+\frac{1}{2}\mid u\mid^2)\cdot\Phi\,dx=\int_\Omega\nabla\cdot(f-(\nabla\times u)\times u)\cdot\Phi\,dx \tag{4.49}$$

para toda $\Phi\in X$ onde X é definido por (3.38). Basta agora, seguir a demonstração do caso linear trocando-se f por $(f-(\nabla\times u)\times u)$ e p por $(p+\frac{1}{2}\mid u\mid^2)$ para obtermos o resultado.■

4.9 Um resultado de existência para o problema de Navier-Stokes não homogêneo

Estabeleceremos nesta seção, um resultado de existência de solução do problema (4.15) onde não é exigido que os dados sejam pequenos. Para tal, faremos uso da mesma técnica utilizada em Temam - [8], cap. 2 e começaremos com alguns resultados preliminares.

Lema 4.8 *Seja $\rho(x)=d(x,\Gamma)=$ a distância de x a Γ. Para qualquer $\epsilon>0$, existe uma função $\theta_\epsilon\in C^2(\overline{\Omega})$ tal que :*

i) $\theta_\epsilon = 1$ *em alguma vizinhança de* Γ *(que depende de* ϵ*)*

ii) $\theta_\epsilon = 0$ *se* $\rho(x) \geq 2\delta(\epsilon)$, $\delta(\epsilon) = exp(-\frac{1}{\epsilon})$

iii) $| D_k\theta_\epsilon(x) | \leq \frac{\epsilon}{\rho(x)}$ *se* $\rho(x) \leq 2\delta(\epsilon), k = 1, ..., n$

Demonstração : Consideremos inicialmente, a função $\xi_\epsilon : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por :

$$\xi_\epsilon(\lambda) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{se } \lambda < \delta^2(\epsilon) \\ \epsilon \cdot \ln(\frac{\delta(\epsilon)}{\lambda}) & , \quad \text{se } \delta^2(\epsilon) < \lambda < \delta(\epsilon) \\ 0 & , \quad \text{se } \lambda > \delta(\epsilon) \end{cases} \tag{4.50}$$

e seja $\chi_\epsilon : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por :

$$\chi_\epsilon(x) = \xi_\epsilon(\rho(x)).$$

Definindo por $N_\epsilon = \{x \in \Omega \mid \rho(x) < \delta^2(\epsilon)\}$ a vizinhança de Γ de raio $\delta^2(\epsilon)$, teremos :

$$\chi_\epsilon(x) = \xi_\epsilon(\rho(x)) = 1 , \forall x \in N_\epsilon. \tag{4.51}$$

Tomando-se $x \in \Omega$ com $\rho(x) > \delta(\epsilon)$ teremos :

$$\chi_\epsilon(x) = 0 , \forall x \in \Omega, \rho(x) > \delta(\epsilon)$$

e, em particular,

$$\chi_\epsilon(x) = 0 \,, \forall x \in \Omega, \ \rho(x) \geq 2\delta(\epsilon).$$

Além disso, se $x \in \Omega$ é tal que $\rho(x) \leq 2\delta(\epsilon)$, então

$$| D_k \chi_\epsilon(x) | = | D_k \xi_\epsilon(\rho(x)) | = | -\frac{\epsilon}{\rho(x)} D_k \rho(x) |$$

$$= \frac{\epsilon}{\rho(x)} \, | D_k \rho(x) | \leq \frac{\epsilon}{\rho(x)} \,,$$

uma vez que a função distância é lipschitziana com constante 1.

Consideremos a vizinhança N_1 de Γ dada por

$$N_1 = \{x \in \Omega \mid \rho(x) < \frac{\delta^2(\epsilon)}{2}\}$$

e tomemos $\eta \in I\!R$ tal que $\eta < \frac{\delta^2(\epsilon)}{2}$. Assim, para todo $y \in B_\eta(x)$, teremos que $\chi_\epsilon(y) = 1$.

Definamos θ_ϵ como a regularizada de χ_ϵ, isto é,

$$\theta_\epsilon(x) = (\chi_\epsilon * \sigma_\eta)(x) \,,$$

onde σ_η é um núcleo de convolução.

Assim, se $x \in N_1$, teremos ;

$$\theta_\epsilon(x) = \int_{R^n} \chi_\epsilon(y) \sigma_\eta(x-y)\, dy = \int_{B_\eta(x)} \chi_\epsilon(y) \sigma_\eta(x-y)\, dy$$

$$= \int_{B_\eta(x)} \sigma_\eta(x - y)\, dy = 1$$

Para $x \in \Omega$, com $\rho(x) \geq 2\delta(\epsilon)$ teremos também que $\theta_\epsilon(x) = 0$ pois $\chi_\epsilon(y) = 0$ nessa região.

Falta, portanto, mostrar que $| D_k \theta_\epsilon(x) | \leq \frac{\epsilon}{\rho(x)}$, para $\rho(x) \leq 2\delta(\epsilon)$. É suficiente mostrar para $x \in \Omega$ tal que $\rho(x) > \frac{\delta^2(\epsilon)}{2}$.

Escolhemos inicialmente χ_ϵ tal que :

$$| D_k\chi_\epsilon(x) | < \frac{\epsilon/2}{\rho(x)}, \quad \text{para} \quad \rho(x) < 2\delta(\epsilon).$$

Observemos agora que, como a função distância ρ é lipschitziana com constante 1, então $| \rho(x) - \rho(y) | \leq \| x - y \|$; portanto, $\rho(x) - \rho(y) \leq \eta$, ou seja, $0 < \rho(x) - \eta \leq \rho(y)$.

Assim,

$$\frac{\epsilon/2}{\rho(y)} \leq \frac{\epsilon/2}{\rho(x) - \eta} = \frac{\epsilon}{2\rho(x)(1 - \frac{\eta}{\rho(x)})} < \frac{\epsilon}{\rho(x)}.$$

Com isto obteremos :

$$| D_k\theta_\epsilon(x) | \leq \int_{B_\eta(x)} | D_k\chi_\epsilon(y) | \cdot \sigma_\eta(x - y)\, dy$$

$$\leq \int_{B_\eta(x)} \frac{\epsilon/2}{\rho(y)} \sigma_\eta(x - y)\, dy$$

$$\leq \int_{B_\eta(x)} \frac{\epsilon}{\rho(x)} \sigma_\eta(x - y)\, dy = \frac{\epsilon}{\rho(x)}. \quad \blacksquare$$

O lema abaixo mostra que, mesmo que haja explosão na fronteira, as funções de $H_0^1(\Omega)$ continuam ainda integráveis.

Lema 4.9 *Existe uma constante C_1 dependendo apenas de Ω tal que*

$$| \frac{1}{\rho} v |_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \| v \|_{H_0^1(\Omega)}, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração : Lembramos que se φ é um difeomorfismo local de Ω em

$\mathbb{R}^n_+$, então existem constantes C_1, $C_2 > 0$ tais que $C_1\varphi(x) \leq \rho(x) \leq C_2\varphi(x)$, ou seja, é possível controlar a distância por tal difeomorfismo.

Usando então, uma partição da unidade subordinada a uma cobertura de Γ e coordenadas locais perto da fronteira, reduzimos o problema ao mesmo problema onde $\Omega = \{x = (x', x_n),\ x' = (x_1, ..., x_{n-1}),\ x_n > 0\}$. Neste caso, $\rho(x) = x_n$ e é suficiente verificar que :

$$\int_\Omega \frac{v(x)^2}{x_n^2}\, dx \ \leq\ C_1 \int_\Omega \mid D_n v(x) \mid^2\, dx\ ,\ \ \forall\, v \in D(\Omega). \tag{4.52}$$

Esta desigualdade tornará-se óbvia se provarmos a seguinte desigualdade em dimensão 1 :

$$\int_0^{+\infty} \mid \frac{v(s)}{s} \mid^2\, ds \leq \int_0^{+\infty} \mid v'(s) \mid^2\, ds\ ,\ \ \forall\, v \in D(0, +\infty). \tag{4.53}$$

Para prová-la, colocaremos $s\ =\ \exp^\sigma$, $t\ =\ \exp^\tau$ e

$$\frac{v(s)}{s} \ =\ \frac{1}{s}\int_0^s w(t)\, dt\ ,\ \ v'\ =\ w.$$

Assim,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mid v(s) \mid^2}{\mid s \mid^2}\, ds\ =\ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-\sigma}(\int_0^{\exp^\sigma} w(t)\, dt)\, d\sigma$$

$$=\ \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} H(\sigma\ -\ \tau)\exp^{-\frac{(\sigma-\tau)}{2}} w(\exp^\tau)\exp^{\frac{\tau}{2}}\ d\tau\ )^2\, d\sigma\ ,$$

onde H representa a função de Heaviside, $H(\sigma) = 1$, para $\sigma > 0$ e $H(\sigma) = 0$ para $\sigma < 0$. Usando a seguinte desigualdade do produto de convolução

$$\| f * g \|_{L^2}\ \leq\ \| f \|_{L^1} \cdot \| g \|_{L^2},$$

majoramos o último termo da direita por

$$(\int_{-\infty}^{+\infty} H(\sigma)\exp^{-\frac{\sigma}{2}}\, d\sigma)^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\, w(\exp^{\tau})\,|^2 \exp^{\tau}\, d\tau \;=$$

$$(\int_0^{+\infty} \exp^{-\frac{\sigma}{2}}\, d\tau)^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\, w(\exp^{\tau})\,|^2 \exp^{(}\tau)\, d\tau \;=\; 4\int_0^{+\infty} |\, w(t)\,|^2\, dt.$$

Assim, mostramos (4.53) que implicará em (4.52). ■

Lema 4.10 *Seja* $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ *a forma trilinear definida em* (4.4); *então para todo* $\gamma > 0$, *existe* $\overline{U}_0 = \overline{U}_0(\gamma) \in H^1(\Omega)^3$ *tal que*

$$|\, b(v,\overline{U}_0,v)\,| \;\leq\; \gamma \,\|\, v\,\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3}\;,\quad \forall\, v \in \mathcal{V}.$$

Demonstração : Mostraremos que $\overline{U}_0 = curl\,\theta_\epsilon\zeta$ com $\zeta \in H^2(\Omega)^3$, $\zeta_i \in L^\infty(\Omega)$, $D_i\zeta_j \in L^3(\Omega)$ satisfaz a conclusão do lema. É óbvio que $\overline{U}_0 \in H^1(\Omega)^3$ e além disso, temos que :

$$(\overline{U}_0)_j(x) \;=\; 0\;,\;\; \text{se } \rho(x) > 2\delta(\epsilon)\,,\; \forall\, j \;=\; 1,2,3$$

e também :

$$\begin{aligned}
|\,(\overline{U}_0)_j(x)\,| \;\; &\leq |\, D_i\theta_\epsilon(x)\,|\,|\,\zeta_k(x)\,| + |\,\theta_\epsilon(x)\,|\,|\,D_i\zeta_k(x)\,| \\
&+ |\, D_k\theta_\epsilon(x)\,|\,|\,\zeta_i(x)\,| + |\,\theta_\epsilon(x)\,|\,|\,D_k\zeta_i(x)\,| \\
&\leq\; \tfrac{\epsilon}{\rho(x)}(\textstyle\sum_{i=1}^3 |\,\zeta_i(x)\,|) + (\textstyle\sum_{i,j=1}^3 |\,D_k\zeta_i(x)\,|) \\
&\leq C(\tfrac{\epsilon}{\rho(x)}\,|\,\zeta(x)\,| + |\,D\zeta(x)\,|)\;\;,\;\; \text{se }\; \rho(x) \leq 2\delta(\epsilon)
\end{aligned}$$

onde $|\,D\zeta(x)\,| = \{\,\sum_{i,j=1}^3 |\,D_i\zeta_j(x)\,|^2\,\}^{\frac{1}{2}}$.

Como $\zeta_i \in L^\infty(\Omega)$ e considerando a notação C para qualquer constante, teremos :

$$| (\overline{U}_0)_j(x) | \leq C\left(\frac{\epsilon}{\rho(x)} + | D\zeta(x) |\right), \text{ se } \rho(x) \leq 2\delta(\epsilon), \ \forall j = 1,2,3$$

Tomando-se $v \in D(\Omega)^3$ com $div\, v = 0$, teremos :

$$\begin{aligned} | (\overline{U}_0)_j \cdot v_i |_{L^2(\Omega)} & \leq C \, | \tfrac{\epsilon}{\rho} \cdot v_i + | D\zeta | \cdot v_i |_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C\{\epsilon \, | \tfrac{v_i}{\rho} |_{L^2(\Omega)} + (\textstyle\int_{\rho \leq 2\delta(\epsilon)} | D\zeta |^2 \cdot v_i^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}\} \\ & \leq C\{\epsilon \, | \tfrac{v_i}{\rho} |_{L^2(\Omega)} + | v_i |_{L^\alpha} \cdot | D\zeta |_{L^3(\Omega)}\} \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Hõlder para $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

Fazendo

$$\mu(\epsilon) = \left(\int_{\rho \leq \delta(\epsilon)} | D\zeta |^3 \, dx\right)^{\frac{1}{3}}$$

temos $\mu(\epsilon) \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, pois $D_i\zeta_j \in L^3(\Omega)$, $1 \leq i,j \leq 3$.

Assim, usando o lema 4.9, teremos :

$$\begin{aligned} | (\overline{U}_0)_j \cdot v_i |_{\mathrm{L}^2(\Omega)} & \leq C(\epsilon \, \| v \|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)^3} + \mu(\epsilon) \, | v |_{\mathrm{L}^\alpha(\Omega)^3}) \\ & \leq C(\epsilon + \mu(\epsilon)) \, \| v \|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)^3} \end{aligned}$$

para $1 \leq i, \ j \leq 3$.

Logo, para todo $v \in D(\Omega)^3$ com divergente nulo em Ω, teremos :

$$\begin{aligned} | b(v, \overline{U}_0, v) | & \leq C \, \| v \|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \, \{ \sum_{i,j=1}^{3} | (\overline{U}_0)_j \cdot v_i | \} \\ & \leq C(\epsilon + \mu(\epsilon)) \, \| v \|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \, . \end{aligned}$$

Tomando-se ϵ suficientemente pequeno de modo que $C(\epsilon + \mu(\epsilon)) \leq \gamma$ então

$$| b(v, \overline{U}_0, v) | \leq \gamma \| v \|^2_{H^1(\Omega)^3}$$

para todo $v \in D(\Omega)^3$ com $div\, v = 0$ em Ω. Usando a densidade, por continuidade estendemos para todo $v \in \mathcal{V}$. ∎

Para mostrarmos o resultado de existência de solução do problema de Navier-Stokes não homogêneo, suporemos que $f \in H^{-1}(\Omega)^3$, Ω com fronteira de classe C^2 e colocaremos a seguinte hipótese adicional sobre a extensão U_0 :

$$U_0 = curl\, \zeta \,, \quad \zeta \in H^2(\Omega)^3,\ \zeta_i \in L^\infty(\Omega),\ D_i\zeta_j \in L^3(\Omega) \tag{4.54}$$

Tomando-se

$$\overline{U}_0 = curl\, \theta_\epsilon \zeta \tag{4.55}$$

vemos facilmente, que as condições abaixo são verificadas :

$$\begin{aligned}
&a) \quad \nabla \cdot \overline{U}_0 = 0 \quad \text{em } \Omega \\
&b) \quad \overline{U}_0 \,|_{\Gamma_1} = 0 \\
&c) \quad (\overline{U}_0 \times \mathrm{n}) \,|_{\Gamma_2} = a \times \mathrm{n} \\
&d) \quad (\overline{U}_0 \cdot \mathrm{n}) \,|_{\Gamma_3} = b \times \mathrm{n}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Tomemos em seguida, uma sequência $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ de soluções aproximadas do problema de Navier-Stokes não homogêneo e vejamos se é possível obter uma estimativa uniforme para tal sequência.

Usando a formulação variacional do problema (4.15) e colocando $u_k - \overline{U}_0 = w_k$, para todo k, teremos :

$$a(w_k + \overline{U}_0, v) + b(w_k + \overline{U}_0, w_k + \overline{U}_0, v) = L(v)\,,\ \forall v \in \mathcal{V}.$$

Usando a linearidade das formas a e b, considerando que $b(w_k, w_k, w_k) = b(\overline{U}_0, w_k, w_k) = 0$ e fazendo $v = w_k$, teremos :

$$a(w_k, w_k) + b(w_k, \overline{U}_0, w_k) = L(w_k) - a(\overline{U}_0, w_k) - b(\overline{U}_0, \overline{U}_0, w_k).$$

A coercividade de $a(\cdot,\cdot)$ e a continuidade das formas $L(\cdot)$, $a(\cdot,\cdot)$ e $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ implicam :

$$\alpha\nu \parallel w_k \parallel^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} + b(w_k, \overline{U}_0, w_k) \leq C \parallel w_k \parallel_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \tag{4.57}$$

Para ϵ suficientemente pequeno, vimos (conforme lema 4.10) que $\overline{U}_0 = curl\,(\theta_\epsilon\zeta)$ satisfaz :

$$| b(w, \overline{U}_0, w) | \leq \gamma \parallel w \parallel^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3}, \; \forall\, v \in \mathcal{V}$$

Fixando $\gamma = \frac{\alpha\nu}{2}$ e tomando $w = w_k$, segue que :

$$- b(w_k, \overline{U}_0, w_k) \leq | b(w_k, \overline{U}_0, w_k) | \leq \frac{\alpha\nu}{2} \parallel w_k \parallel^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \tag{4.58}$$

Assim, somando as desigualdades em (4.57) e (4.58), teremos :

$$\frac{\alpha\nu}{2} \parallel w_k \parallel^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \leq C \parallel w_k \parallel_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3},$$

ou seja,

$$\parallel w_k \parallel_{\mathrm{H}^1(\Omega)^3} \leq \frac{2C}{\alpha\nu},$$

e, portanto, temos uma estimativa uniforme para a sequência $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$. Usando novamente, os critérios de convergência e de compacidade, concluímos que existe uma solução u para o problema de Navier-Stokes não homogêneo. Temos então, demonstrado o seguinte

Teorema 4.11 *Se $a(\cdot,\cdot)$ é $\mathcal{V}$-elítica e a extensão $\overline{U}_0$ satisfaz as condições* (4.55) *e* (4.56), *então existe ao menos uma solução do problema* (4.15). ■

Observamos que, para $n > 3$, precisamos colocar a hipótese adicional $D_i\zeta \in L^n(\Omega)$, $\zeta \in L^\infty(\Omega)$ e impor que $\overline{U}_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)$, de modo que ainda se tenha $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^n(\Omega)$ compactamente.

Notamos também, que no problema (4.38), onde o fluxo é imposto, não teremos mais unicidade, uma vez que as equações estão desacopladas e as constantes $C_1,\ldots,C_r$ são achadas em função da solução u.

Apêndice A

RELAÇÃO ENTRE A GEOMETRIA E A COERCIVIDADE

A.1 Introdução

Conforme anunciamos anteriormente, daremos neste apêndice, alguns exemplos interessantes que aparecem frequentemente nas aplicações onde são colocadas as condições de fronteira citadas nas formulações dos problemas de Stokes e de Navier-Stokes (capítulos 3 e 4).

A.2 Exemplos

(a) - Escoamentos por uma tubulação

Consideremos o escoamento de um fluido (viscoso incompressível) numa rede de tubos (ver figura 1). O domínio Ω representa o conjunto de tubos; Γ_1 é formada pelas paredes dos tubos; Γ_2 é a união de todas as entradas e as saídas dos tubos, isto é, $\Gamma_2 = \cup_i \Gamma_{2_i}$, onde cada Γ_{2_i} representa uma entrada ou uma saída sobre a qual é dada a pressão e $\Gamma_3 = \emptyset$. Suporemos que u_0 e a são nulas, isto é, as paredes dos tubos são rígidas e o fluido adere à parede; ele entra e sai com velocidade tangencial nula. Neste exemplo, as condições de fronteira sobre a velocidade são, portanto, homogêneas.

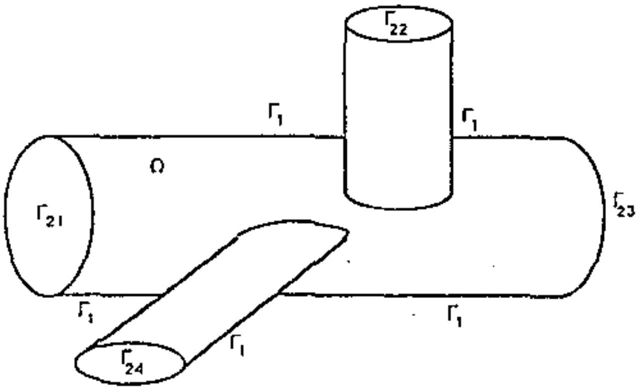

Figura 1

(b) **Escoamento num tubo com obstáculo**

Consideremos o escoamento de um fluido em volta de um obstáculo num tubo cilíndrico (ver figura 2). O cilindro menos o obstáculo é o domínio Ω; Γ_1 é formada pelo bordo do obstáculo e pelas paredes laterais do cilindro; Γ_2 tem duas componentes conexas : a entrada Γ_{2_1} e a saída Γ_{2_2} do cilindro ($\Gamma_2 = \Gamma_{2_1} \cup \Gamma_{2_2}$); $\Gamma_3 = \emptyset$. Suporemos que u_0 e a são nulas (isto é, que o fluido adere às paredes laterais do obstáculo e do cilindro) e que a velocidade tangencial do fluido é nula sobre Γ_2 : a entrada e a saída são feitas com velocidade normal. Também neste caso, as condições de fronteira sobre a velocidade são homogêneas.

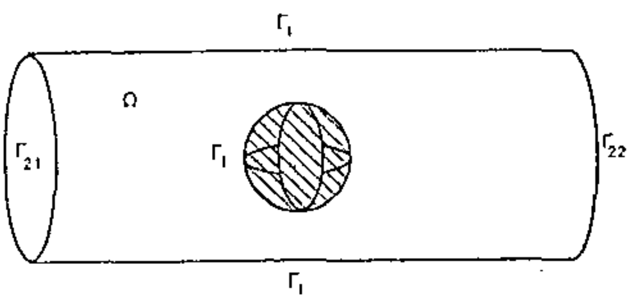

Figura 2

(c) Modelagem das condições de fronteira no infinito para o escoamento em volta de um obstáculo

Teremos neste caso, o escoamento no exterior de um obstáculo dentro de um domínio finito mas suficientemente grande, cuja fronteira exterior é uma aproximação do infinito (por exemplo, uma bola (ver figura 3)). O domínio Ω será esta bola menos o obstáculo; Γ_1 é o bordo do obstáculo que suporemos em repouso ($u_0 = 0$); Γ_2 é o bordo da bola, sobre o qual colocaremos $p_0 =$ cte e $a = u_\infty$, onde u_∞ é a velocidade (em geral uniforme) no infinito.

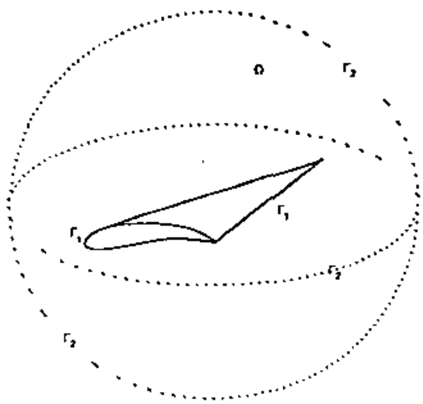

Figura 3

A.3 Resultados de coercividade em alguns casos especiais

Antes de mostrarmos a relação entre a geometria dos problemas acima e a coercividade da forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$, daremos uma outra caracterização do espaço V, definido em (1.9).

Seja Ω um aberto do $I\!R^3$, limitado, conexo (não necessariamente simplesmente conexo), cuja fronteira Γ é localmente lipschitziana. Suporemos que uma das hipóteses abaixo são verificadas :

$$\Gamma \text{ é de classe } C^{1,1} \tag{A.1}$$

•

$$\Omega \text{ é um poliedro convexo.} \tag{A.2}$$

Suporemos ainda, que existem abertos Γ_1, Γ_2 e Γ_3 de Γ satisfazendo (3.1) e tais que

$$\Gamma_2 \text{ e } \Gamma_3 \text{ não têm fronteira comum.} \tag{A.3}$$

Consideremos o seguinte espaço :

$$\begin{aligned} U = \{ \quad & v \in L^2(\Omega)^3 \mid \nabla \times v \in L^2(\Omega)^3, \nabla \cdot v = 0 \text{ em } \Omega, v \times \mathbf{n} = 0 \\ & \text{sobre } \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\ v \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Lembramos que se $v \in L^2(\Omega)^3$ tal que $\nabla \times v \in L^2(\Omega)^3$ e $\nabla \cdot v \in L^2(\Omega)$, então $v \times \mathbf{n}$ está bem definida em $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ e $v \cdot \mathbf{n}$ está bem definida em $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (conforme teorema 1.10) e a definição em (A.4) faz sentido. Além disso, como U é fechado em $H(curl, \Omega)$, U é um espaço de Hilbert munido do produto interno :

$$(v, w)_U = \int_\Omega v \cdot w \, dx + \int_\Omega (\nabla \times v) \cdot (\nabla \times w) \, dx \,, \ \forall\, v, w \in U, \tag{A.5}$$

e usaremos então, a norma induzida por tal produto interno :

$$\| v \|_U = \{ \| v \|^2_{L^2(\Omega)^3} + \| \nabla \times v \|^2_{L^2(\Omega)^3} \}^{\frac{1}{2}} \tag{A.6}$$

Observamos que, se $v \in U$ então v é nula sobre Γ_1 pois $v \times \mathbf{n}$ e $v \cdot \mathbf{n}$ são nulas sobre Γ_1. Além disso, se V é o espaço definido por (1.9), munido da norma de $H^1(\Omega)^3$ então $\mathrm{V} \subset U$ e como $\| \nabla \times v \|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq C \sum_{|\alpha|=1} \| \partial^\alpha v \|^2_{L^2(\Omega)^3}$, temos que a imersão é contínua.

Mostraremos agora, que também $U \subset \mathrm{V}$.

Teorema A.1 *Suponhamos que* Ω *e* Γ *satisfaçam* (A.1) *ou* (A.2) *e que a partição* $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ *de* Γ *satisfaz* (3.1) *e* (A.3). *Então* $U = V$ *algébrica e topologicamente.*

Demonstração : Para demonstrar o teorema é suficiente mostrar que $U \subset V$ com imersão contínua.

Utilizando o fato de que Γ_1 e Γ_3 não têm fronteira comum (conforme (A.3)), podemos tomar uma cobertura de $\overline{\Omega}$ de bolas abertas $\{\theta_i\}_{i=1}^{l}$ de forma que se

$$(\theta_i \cap \overline{\Omega}) \cap \Gamma \neq \emptyset \tag{A.7}$$

então

$$(\theta_i \cap \overline{\Omega}) \cap \Gamma \subset (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \tag{A.8}$$

ou

$$(\theta_i \cap \overline{\Omega}) \cap \subset (\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \tag{A.9}$$

para todo $i = 1, ..., l$. Tomamos em seguida, uma partição da unidade $\{\alpha_i\}_{i=1}^{l}$ subordinada à cobertura $\{\theta_i\}_{i=1}^{l}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
&a)\quad \alpha_i \in C_0^\infty(\theta_i) &&, \forall\, i = 1, ..., l \\
&b)\quad 0 \leq \alpha_i(x) \leq 1 &&, \forall\, i = 1, ..., l,\ \forall\, x \in \overline{\Omega} \\
&c)\quad \textstyle\sum_{i=1}^{l} \alpha_i(x) = 1 &&, \forall\, x \in \overline{\Omega}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Assim, para $v \in U$, teremos :

$$v = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i v \tag{A.11}$$

A demonstração de que $U \subset$ V com imersão contínua se reduz então a demonstrar que para toda $v \in U$, as funções $\alpha_i v \in H^1(\Omega)^3$ e que $\| \alpha_i v \|_{H^1(\Omega)^3} \leq C \| v \|_U$. Para isto, dividiremos a demonstração considerando os casos (A.1) e (A.2) separadamente :

(i) Γ é de classe $C^{1,1}$

Devido à regularidade de Γ e ao fato de que o suporte de α_i é um compacto contido em θ_i, podemos supor que $\alpha_i\, v$ está definida num subconjunto aberto θ_i' de $(\theta_i \cap \Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} &a) \quad \partial\theta_i' \text{ é de classe } C^{1,1} \\ &b) \quad supp(\alpha_i) \cap \Omega \subset \theta_i' \end{aligned} \tag{A.12}$$

e que θ_i' verifica (A.8) ou (A.9) assim como $(\theta_i \cap \Omega)$ (ver figura 4).

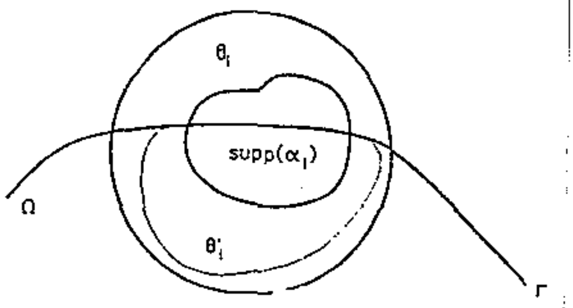

Figura 4

Assim, utilizando (A.10a), (A.12) e (A.8) ou (A.9) e as condições de fronteira que as funções de U satisfazem, deduzimos que $\alpha_i\, v$ verificam sobre $\partial\theta_i'$ uma das seguintes condições :

$$\begin{cases} \alpha_i\, v = 0 & \text{sobre uma parte } A_i \text{ de } \partial\theta_i' \\ (\alpha_i\, v) \times \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \partial\theta_i' \setminus A_i \end{cases} \tag{A.13}$$

$$\begin{cases} \alpha_i\, v = 0 & \text{sobre uma parte } A_i \text{ de } \partial\theta_i' \\ (\alpha_i\, v) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \partial\theta_i' \setminus A_i \end{cases} \tag{A.14}$$

e teremos, em particular :

$$(\alpha_i\, v) \times \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\theta_i' \tag{A.15}$$

ou então,

$$(\alpha_i v) \cdot \mathbf{n} \;=\; 0 \text{ sobre } \partial\theta_i{}'. \tag{A.16}$$

Além disso, é fácil ver que, para todo i :

$$\begin{aligned} &\alpha_i v \in L^2(\theta_i')^3 \\ \nabla \cdot (\alpha_i v) \;&=\; (\nabla \alpha_i) \cdot v \;+\; \alpha_i \cdot (\nabla \cdot v) \;\in\; L^2(\theta_i') \\ \nabla \times (\alpha_i v) \;&=\; (\nabla \alpha_i) \times v \;+\; \alpha_i \cdot (\nabla \times v) \;\in\; L^2(\theta_i')^3 \end{aligned}$$

Considerando o caso em que $\alpha_i v \times \mathbf{n} \;=\; 0$ sobre $\partial\theta_i'$ e usando o teorema 1.10, temos que :

$$(\alpha_i v,\, \nabla \times \varphi) \;=\; (\nabla \times (\alpha_i v,\, \varphi)),\;\; \forall \varphi \;\in\; H^1(\theta_i')^3,$$

e, pelo lema 2.4 de Girault, Raviart - [4], pág. 33, podemos concluir que $\alpha_i v \;\in\; H_0(curl;\, \theta_i')$.

Por outro lado, como $\alpha_i v \;\in\; H(div; \theta_i')$, ou seja, $\alpha_i v \;\in\; L^2(\theta_i')^3$ e $\nabla \cdot \alpha_i v \in L^2(\theta_i')$, temos que $\alpha_i v \in W = H_0(curl; \theta_i') \cap H(div; \theta_i')$.

Se considerarmos agora o caso em que $(\alpha_i v) \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre $\partial\theta_i'$, veremos que $\alpha_i v \in H_0(div; \theta_i')$ e, como $\nabla \times (\alpha_i v) \in L^2(\theta_i')^3$, teremos $\alpha_i v \in H(curl; \theta_i')$. Assim, concluiremos que, neste caso, $\alpha_i v \in P = H_0(div; \theta_i') \cap H(curl; \theta_i')$.

Logo, em qualquer um dos casos ((A.15) ou (A.16)), poderemos aplicar os teoremas 1.15 e 1.16 e deduziremos que $\alpha_i v \in H^1(\theta_i')^3$ e que existe uma constante $K_i = K_i(\theta_i')$ tal que :

$$\| \alpha_i v \|_{\mathrm{H}^1(\theta_i')^3} \leq K_i \{ \| \alpha_i v \|^2_{\mathrm{L}^2(\theta_i')^3} + \| \nabla \cdot (\alpha_i v) \|^2_{\mathrm{L}^2(\theta_i')} + \| \nabla \times (\alpha_i v) \|^2_{\mathrm{L}^2(\theta_i')^3} \}^{\frac{1}{2}}.$$

Como esta estimativa é válida para todo $i \;=\; 1, ..., l$, podemos escolher $K \;=\; K(\Omega,\, \{\theta_i\}, \{\alpha_i\})$ tal que :

$$\| \alpha_i v \|_{H^1(\theta_i')^3} \leq K\{ \| v \|^2_{L^2(\theta_i')^3} + \| \nabla \cdot v \|^2_{L^2(\theta_i')} + \| \nabla \times v \|^2_{L^2(\theta_i')^3} \}^{\frac{1}{2}},$$

para $i = 1, ..., l$, o que implica que $v \in H^1(\Omega)^3$. Usando o fato de $\nabla \cdot v = 0$ em Ω, teremos :

$$\| \alpha_i v \|_{H^1(\Omega)^3} \leq k \{ \| v \|^2_{L^2(\Omega)^3} + \| \nabla \times v \|^2_{L^2(\Omega)^3} \}^{\frac{1}{2}},$$

para todo $i = 1, ..., l$ e, portanto, $\| v \|_V \leq K \| v \|_U$.

(ii) Ω é um poliedro convexo

A demonstração neste caso, é inteiramente análoga ao caso (i): a única diferença encontrada está na construção dos abertos θ_i'.

Neste caso, definimos θ_i' como um poliedro convexo contido em $(\Omega \cap \theta_i)$ que verifica a seguinte condição (ver figura 5) :

$$supp\,(\alpha_i) \cap \Omega \subset \theta_i'$$

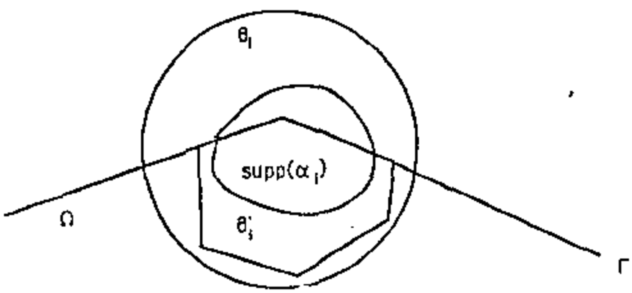

Figura 5

Lembramos que θ_i' verifica (A.7,8,9) assim como $(\theta_i \cap \Omega)$. É suficiente então usar os teoremas 1.15 e 1.16 para concluir. ■

Em situação de aplicações, é bastante comum termos as seguintes possibilidades para a fronteira Γ e para Ω :

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \Gamma_1 \neq \emptyset \\
&b) \quad \Gamma = \Gamma_2 \qquad\qquad (A.17) \\
&c) \quad \Gamma_1 = \emptyset,\ \Omega \text{ simplesmente conexo .}
\end{aligned}
$$

Daremos a seguir, resultados que relacionam os casos a), b), c) com as hipóteses de coercividade da forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ definida por (1.13) e (1.14). Para demonstrá-las usaremos o teorema A.1 e consideramos os três casos separadamente.

1o. Caso : $\Gamma_1 \neq \emptyset$

Neste exemplo, demonstraremos que a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ é V-elítica e começaremos demonstrando que ela induz uma norma em V.

Lema A.2 *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^3$, limitado, conexo, cuja fronteira Γ é localmente lipschitziana. Suporemos que a partição $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ de Γ, além das condições* (3.1), *verifica a seguinte condição :*

$$\Gamma_1 \neq \emptyset. \qquad (A.18)$$

Então a aplicação definida por

$$v \in V \longmapsto \| \nabla \times v \|_{L^2(\Omega)^3} = \{ \int_\Omega | \nabla \times v |^2 \, dx \}^{\frac{1}{2}} \qquad (A.19)$$

é uma norma em V.

Demonstração : É imediato que a expressão (A.19) é uma seminorma em V. Assim, basta mostrar que se $v \in$ V, $\nabla \times v = 0$ em Ω, então $v = 0$.

Para isto, construiremos um aberto Ω^0 simplesmente conexo com a ajuda de um número finito de cortes regulares. Mais precisamente, denotamos $\sum_1, \ldots, \sum_n$, n variedades de dimensão 2 de classe C^∞ tais que $\sum_i \cap \sum_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e que $\Omega^0 = \Omega \setminus \sum$, onde $\sum = \cup_{i=1}^n \sum_i$, seja simplesmente conexo (ver figura 3). Lembramos ainda que a fronteira ($\sum \cup \Gamma$) de Ω^0 é localmente lipschitziana.

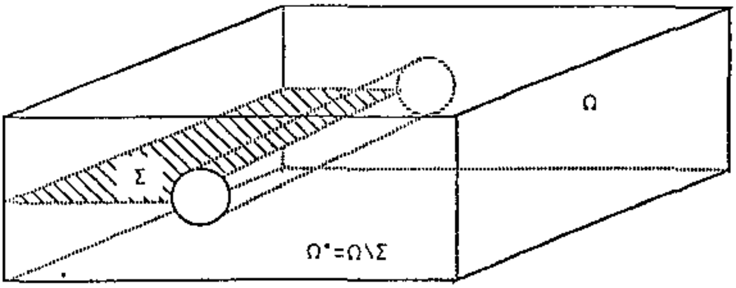

Figura 6

Seja $v \in V$, $\nabla \times v = 0$. Uma vez que v tem rotacional nulo, então pelo teorma 1.9, v é localmente um gradiente, ou seja, existe uma única classe de funções q^0 em $H^1(\Omega^0)/\mathbb{R}$ tal que :

$$v = \nabla q^0 \text{ em } \Omega^0. \tag{A.20}$$

Como v tem divergente nulo em Ω (e, portanto, em Ω^0), teremos :

$$\Delta q^0 = div\,(grad\, q^0) = \nabla \cdot v = 0 \text{ em } \Omega^0. \tag{A.21}$$

Assim, q^0 é de classe C^∞ e unívoca em Ω^0 (q^0 é multívoca em Ω pois pode assumir valores distintos em $\sum$).

Seja Γ_1' um subconjunto aberto, não vazio, conexo de Γ_1. Utilizando o fato de v ser nula sobre Γ_1, deduziremos :

$$\begin{aligned} &a)\ \ q^0 = 0 && \text{sobre } \Gamma_1' \\ &b)\ \ \partial q^0/\partial \mathrm{n} = (grad\, q^0)\cdot \mathrm{n} = 0 && \text{sobre } \Gamma_1' \end{aligned} \tag{A.22}$$

O princípio da continuação e o fato de que Ω^0 é simplesmente conexo implicam que $q^0 = 0^0$ em Ω^0 e, portanto, $v = 0$. ∎

Demonstraremos agora, que a norma induzida por $a(\cdot,\cdot)$ sobre V é equivalente à norma de $H^1(\Omega)^3$. Lembramos que, pelo teorema A.1, existe uma constante $C_1 = C_1(\Omega)$ tal que :

$$\| v \|_{H^1(\Omega)^3} \leq C_1\{\| v \|^2_{L^2(\Omega)^3} + \| \nabla \times v \|^2_{L^2(\Omega)^3}\}^{\frac{1}{2}}, \ \forall v \in V. \tag{A.23}$$

Assim, para demonstrar a V-eliticidade de $a(\cdot,\cdot)$, é suficiente mostrar que existe uma constante $C_2 = C_2(\Omega)$ tal que :

$$\| v \|_{L^2(\Omega)^3} \leq \| \nabla \times v \|_{L^2(\Omega)^3}, \ \forall v \in V. \tag{A.24}$$

Suporemos por absurdo que (A.24) não ocorra; então seria possível achar uma sequência $\{v_n\}$ em V tal que, para todo n :

$$\| v_n \|_{L^2(\Omega)^3} = 1 \quad \text{e} \quad \| \nabla \times v_n \|_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{1}{n} \,. \tag{A.25}$$

Por (A.23) e (A.25), concluiremos que $\{v_n\}$ é limitada em V. Podemos então, extrair uma subsequência, que ainda denotaremos por $\{v_n\}$, tal que :

$$\begin{aligned} v_n &\longrightarrow v \quad \text{fraco em} \quad H^1(\Omega)^3, \\ v_n &\longrightarrow v \quad \text{forte em} \quad L^2(\Omega)^3, \end{aligned} \tag{A.26}$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

De (A.25), concluiremos que $\nabla \times v = 0$ em Ω. Como $v \in \mathrm{V}$, o lema A.2 nos dá que $v = 0$. Obtemos assim, uma contradição com (A.25) e (A.26). ∎

2o. Caso : $\Gamma = \Gamma_2$

Como no exemplo anterior, o domínio Ω pode ser simplesmente ou multiplamente conexo.

Vimos que o subespaço V_1 de V, definido por 1.12, é caracterizado por :

$$V_1 = \{v \in \mathrm{V} \mid \nabla \times v = 0 \text{ em } \Omega\}$$

(V_1 é o núcleo de $a(\cdot,\cdot)$ em V) e que a aplicação :

$$v \in \mathrm{V} \longmapsto \{\| \nabla \times v \|^2_{L^2(\Omega)^3} + \sum_{i=1}^{r} | \int_{\Gamma_{2_i}} v \cdot \mathrm{n}\, dS |^2\}^{\frac{1}{2}},$$

é uma norma em V, equivalente à norma de $H^1(\Omega)^3$. Assim, a aplicação $v \in V_0 \longmapsto \| \nabla \times v \|_{L^2(\Omega)^3}$ é uma norma em V_0, equivalente à norma de $H^1(\Omega)^3$. Neste caso, $a(\cdot,\cdot)$ é V_0-elítica com núcleo V_1. ∎

3o. Caso : $\Gamma_1 = \emptyset$, Ω simplesmente conexo

Demonstraremos que, neste caso a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ é V_0-elítica com núcleo V_1 e começaremos mostrando que ela induz uma norma sobre o subespaço V_0.

Lema A.3 *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^3$, aberto, conexo, cuja fronteira Γ é localmente lipschitziana. Se Ω é simplesmente conexo, a aplicação definida por :*

$$v \in V_0 \longmapsto \| \nabla \times v \|_{L^2(\Omega)^3}, \tag{A.27}$$

é uma norma em V_0.

Demonstração : Como $\| \nabla \times v \|_{L^2(\Omega)^3}$ define uma seminorma sobre V_0, é suficiente demonstrar que se $v \in V_0$ satisfaz $\nabla \times v = 0$ em Ω, então $v = 0$.

Seja $v \in V_0$ tal que $\nabla \times v = 0$ em Ω. Como Ω é simplesmente conexo, pelo teorema 1.9, existe uma única classe de funções q^0 em $H^2(\Omega)^3/\mathbb{R}$ tal que :

$$v = \nabla q^0 \quad \text{em } \Omega \tag{A.28}$$

Como $v \in H^1(\Omega)^3$, temos que $q^0 \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$. Usando (A.28) e o fato de v ter divergente nulo em Ω, teremos :

$$\Delta q^0 = 0 \quad \text{em } \Omega. \tag{A.29}$$

Como $v \cdot \mathrm{n} = 0$ sobre $(\Gamma_1 \cup \Gamma_3)$ e $\int_{\Gamma_{2_i}} v \cdot \mathbf{n}\, dS = 0, \forall\, i = 1,...,r$, concluímos que :

$$\begin{aligned} &a)\quad \partial q^0/\partial \mathrm{n} = 0 \qquad\qquad \text{sobre } (\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \\ &b)\quad \int_{\Gamma_{2_i}} (\partial q^0/\partial \mathrm{n})\, dS = 0 \quad \forall\, i = 1,...,r \end{aligned} \tag{A.30}$$

Além disso, $v \times \mathrm{n} = 0$ sobre Γ_2, e assim,

$$c)\quad q^0 = d_i = cte \quad \text{sobre } \Gamma_{2_i}\, \forall\, i = 1,...,r \tag{A.31}$$

Multiplicando (A.29) por q^0, integrando por partes sobre Ω e utilizando (A.30a,b) e (A.31), obteremos :

$$0 = \int_\Omega q^0 \Delta q^0\, dx = \int_\Gamma q^0 \frac{\partial q^0}{\partial \mathrm{n}}\, dS - \int_\Omega \nabla q^0 \cdot \nabla q^0\, dx$$

$$= -\int_\Omega |\, \nabla q^0 \,|^2 \; dx$$

$$= -\; \|\, \nabla q^0 \,\|^2_{L^2(\Omega)^3}$$

que implicará que $\nabla q^0 = 0$ e, portanto, $v = 0$. ∎

Para demonstrar que (quando (A.3) é verificada e (A.1) ou (A.2) é verificada) a norma definida por (A.27) é uma norma sobre V_0, equivalente à norma de $H^1(\Omega)^3$ (o que implicará que $a(\cdot,\cdot)$ é V_0-elítica), é suficiente proceder exatamente como no 1o. caso ($\Gamma_1 \neq \emptyset$), trocando V por V_0.

Mostraremos agora, que V_1 é o núcleo de $a(\cdot,\cdot)$. Para isto, definiremos para $k = 1, ..., r-1$, a função $q_k \in H^1(\Omega)^3$ por :

$$\begin{array}{lll} a) & -\Delta q_k = 0 & \text{em } \Omega \\ b) & \partial q_k/\partial \mathrm{n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_3 \\ c) & q_k = 1 & \text{sobre } \Gamma_{2_k} \\ d) & q_k = 0 & \text{sobre } \Gamma_{2_j},\ \forall j \neq k \\ e) & q_k = 1 & \text{sobre } \Gamma_{2_r} \end{array} \tag{A.32}$$

e colocaremos

$$z_k = \nabla q_k \tag{A.33}$$

Temos então, que $z_k \in L^2(\Omega)^3$, $\nabla \cdot z_k = 0$ e $\nabla \times z_k = 0$ em Ω. Além disso, as condições de fronteira de q_k implicam que $z_k \times \mathrm{n} = 0$ sobre Γ_2 e $z_k \cdot \mathrm{n} = 0$ em Γ_3. Assim, $z_k \in U$ e, portanto, (conforme teorema A.1), $z_k \in V$. Como $\nabla \times z_k = 0$ (o que implica que $a(z_k, v_0) = 0$, $\forall\, v_0 \in V_0$), então $z_k \in V_1$.

Mostraremos que as funções z_k são linearmente independentes. Com efeito, se para certos λ_k tivermos

$$\sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k z_k = 0$$

então

$$\sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k q_k = C \quad \text{em } \Omega,$$

uma vez que Ω é conexo.

Usando (A.32c,d), deduziremos que $\lambda_k = C$, $\forall\, k = 1, ..., r-1$ e de (A.32e) teremos $C = 0$. Como, pelo lema 1.12, a dimensão de V_1 é igual a $r-1$, as funções z_k são linearmente independentes e formam uma base de V_1. Como toda função de V_1 tem rotacional nulo, concluímos que V_1 é o núcleo de $a(\cdot,\cdot)$ em V. ∎

A.4 Estudo dos exemplos

Mostraremos, nesta seção, que nos exemplos (a), (b), (c) apresentados no início deste apêndice, a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ é V-elítica. Tal resultado não é uma simples aplicação dos resultados da seção precedente, porque naqueles exemplos o domínio Ω não era um poliedro convexo, nem tinha fronteira de classe $C^{1,1}$.

A.4.1 Exemplo (c)

O domínio Ω, neste caso, é uma bola aberta da qual é retirado um obstáculo K, onde K é um conjunto fechado regular qualquer (ver figura 7). Assim, teremos :

$$\partial\Omega = \partial K \cup \partial B$$

Para demonstrar, neste caso, que $a(\cdot,\cdot)$ é V-elítica, é suficiente identificar o espaço $V = V(\Omega)$ dado por :

$$V(\Omega) = \{ \; v \in H^1(\Omega)^3 \mid \nabla \cdot v = 0 \text{ em } \Omega,\ v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 = \partial K,$$

$$v \times \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_2 = \partial B \;\}$$

com o espaço $\widetilde{V}(B)$ (com extensão nula em K) definido por :

$$\widetilde{V}(B) = \{\tilde{v} \in H^1(B)^3 \mid \nabla\cdot\tilde{v} = 0 \text{ em } B, \tilde{v} = 0 \text{ em } K, \tilde{v}\times\mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_2 = \partial B\}$$

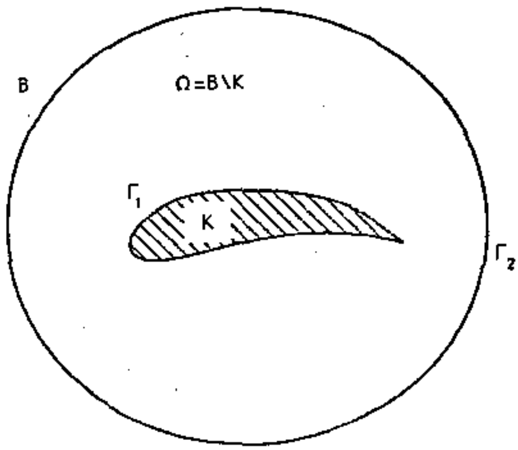

Figura 7

Como a fronteira de B é regular, poderemos aplicar o lema A.2 e assim, teremos que existe $\alpha > 0$ tal que :

$$a(v,v) \geq \alpha \parallel v \parallel^2_{H^1(B)^3}, \ \forall\, v \in V(B)$$

e como, para toda $v \in V(\Omega)$, $\parallel v \parallel^2_{H^1(\Omega)^3} = \parallel \tilde{v} \parallel^2_{H^1(B)^3}$, onde $\tilde{v}$ é a extensão de v para B; portanto, $a(\cdot,\cdot)$ é $V(\Omega)$-elítica. ∎

A.4.2 Exemplo (a)

Neste caso, o domínio Ω é uma tubulação, Γ_1 é formada pelas paredes laterais dos tubos, Γ_2 é formada pelas entradas e saídas. Introduziremos em seguida, um domínio regular B (não necessariamente uma bola) cuja fronteira é de classe $C_{1,1}$ tal que $\Omega \subset B$ e $\Gamma_2 \subset \partial B$ (ver figura 8).

Para demonstrar que $a(\cdot,\cdot)$ é $V(\Omega)$-elítica, é suficiente então, identificar $V(\Omega)$ ao subespaço $\widetilde{V}(B)$ de $V(B)$ definido por :

$$\tilde{V}(B) = \{\tilde{v} \in H^1(B)^3 \mid \nabla\cdot\tilde{v} = 0 \text{ em } B,\ \tilde{v} = 0 \text{ em } B\setminus\Omega,\ \tilde{v}\times \mathrm{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_2\}$$

e aplicar o lema A.2 à $V(B)$. ∎

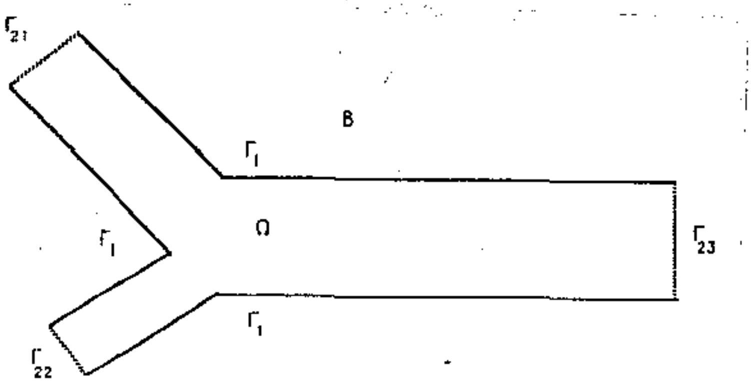

Figura 8

A.4.3 Exemplo (b)

Neste caso, combinamos os procedimentos usados nos casos (a) e (c), considerando Γ_1 formada por ∂K e pelas paredes laterais do cilindro, Γ_2 formada pela entrada e saída do cilindro e $\Gamma_3 = \emptyset$. Prolongamos as funções de $V(\Omega)$ por zero no interior do obstáculo e em $B \setminus \Omega$, onde B é um aberto com fronteira de classe $C^{1,1}$ tal que $\Omega \subset B$ e $\Gamma_2 \subset \partial B$ (ver figura 9). ∎

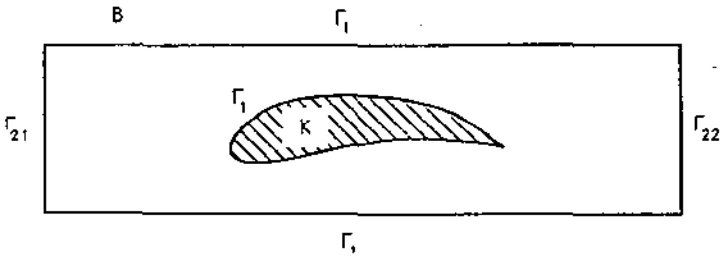

Figura 9

Bibliografia

[1] R. Adams - Sobolev Spaces, Academic Press, NY, 1975

[2] C. Begue, C. Conca, F. Murat, O. Pironneau - Les equations de Stokes et de Navier-Stokes avec des conditions aux limites sur la pression, Rapport de Recherche 87007, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI, 1987.

[3] H. Brezis - Analyse Fonctionelle, Theorie et Aplications, Masson, Paris, 1987.

[4] V. Girault, P. A. Raviart - Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms, Springer Series in Computational Mathematics 5, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[5] L. A. J. Medeiros, M. M. Miranda - Introdução aos espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais, Instituto de Matemática, UFRJ, 1989.

[6] F. Murat, J. Simon - Sur le contrôle par un domaine geométrique, Rapport de Recherche, 76015, Laboratoire dÁnalyse Numérique, Université Paris VI, 1976.

[7] J. Simon - Differentiation with respect to the domain in boundary value problems, Numer. Func. Anal. and Optimiz. 2 (788), 649-687, 1980.

[8] R. Temam, Navier-Stokes Equations (Revised Edition), North-Holland, 1979.

[9] F. Treves - Basic Partial Differential Equations, Academic Press, NY, 1975.