# ÁLGEBRAS DE BERNSTEIN

CLOTÍLZIO MOREIRA DOS SANTOS

ORIENTADOR
PROF.DR.ROBERTO CELSO FABRÍCIO COSTA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro do Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq).

Agosto de 1982

Agradeço:

Ao Prof.Dr.Roberto Celso Fabricio Costa pela proposta do presente trabalho, pela amizade e apoio, pela atenção e disponibilidade e orientação na elaboração do mesmo.

Ao meu orientador de programa Dr. Antônio Paques (UNICAMP), pela amizade e incentivo que me tem dado.

Aos meus amigos que compõem o grupo de estudos; entre eles: Roberto Celso Fabrício Costa (USP), Luiz Antonio Peresi (USP), que também ajudou na correção; Tânia Maria Mendonça Campos (PUC-SP); Sílvia Machado Moreira Ferreira (PUC-SP); Maria Cecília Costa e Silva (PUC-SP).

Ao CNPq, que, com sua ajuda financeira, possibilitou a realização do mesmo.

A Cleide Okada pelo excelente trabalho de datilografia.

# Í N D I C E

# CAPÍTULO I - ÁLGEBRAS GENÉTICAS

## I.0 - INTRODUÇÃO

O estudo das álgebras genéticas foi iniciado com os trabalhos de I.M.H.Etherington [2], no final da década de 30. Ele pretendia formalizar a Genética de Populações por meio de modelos algébricos e a partir daí, demonstrar novos resultados nesta Ciência, além de redemonstrar resultados já conhecidos porém de um modo mais simples do que aquele utilizado pelos geneticistas, através de métodos estatísticos.

Observando certas situações genéticas bem conhecidas , Etherington introduziu os conceitos de álgebra bárica, t-álgebra e t-álgebra especial.

Álgebras báricas são álgebras munidas de um homomorfismo não nulo com valores no corpo de escalares. A presença deste homomorfismo é muito natural, observando-se a situação genética descrita pela álgebra.

As t-álgebras são álgebras báricas satisfazendo uma condição sobre sua equação mínima em potências principais e elas surgem naturalmente pela observação de exemplos naturais em Genética. No entanto, Etherington foi obrigado a restringir mais a definição, obtendo as t-álgebras especiais. Mais tarde, R.D.Schafer introduziu uma outra definição de álgebra descrevendo situações genéticas, às quais ele deu o nome de Álgebras Genéticas. A definição de Schafer produz uma classe de álgebras intermediária entre a classe das t-álgebras e a classe das t-álgebras especiais.

Outra definição foi proposta por H.Gonshor, usando agora como critério para que uma álgebra seja genética, a existência de uma base satisfazendo certas condições. Esta definição coincide essencialmente com aquela de Schaffer.

Mais recentemente, foram introduzidas as álgebras de Bernstein, que satisfazem uma identidade polinomial.

Estas álgebras descrevem populações que atingem o equilíbrio já na segunda geração.

O objetivo deste trabalho é apresentar as propriedades mais importantes das álgebras de Bernstein, relacioná-las com os outros tipos de álgebras genéticas e, finalmente, dar uma classificação das álgebras de Bernstein de dimensão 3. Isto será feito na segunda parte do trabalho; na primeira, resumiremos os resultados gerais sobre as álgebras genéticas, necessários para o desenvolvimento da segunda parte.

## I.1 - ÁLGEBRAS OCORRENDO EM GENÉTICA

Inicialmente vamos fazer a seguinte observação: em todo o trabalho, vamos entender por "álgebra" uma álgebra comutativa, de dimensão finita sobre os reais e em geral não-associativa. Mostremos os exemplos que motivaram a criação da teoria de álgebras genéticas.

Exemplo 1.1 - Vamos considerar uma população infinitamen te grande de indivíduos diplóides que diferem em um locus com gametas D e R e se reproduzem por cruzamento aleatório. Uma distribuição de frequências desses gametas é uma combinação linear formal $\alpha D+\beta R$ com $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$ e $\alpha+\beta = 1$. Os números $\alpha$ e $\beta$ medem as porcentagens com que aparecem os gametas D e R, respectivamente, na população. A pergunta natural que surge é a seguinte: qual é a distribuição de frequências na geração seguinte?

Como o cruzamento é aleatório, existem as seguintes possibilidades na formação de zigotos:

a) os gametas D e D unem-se formando o homozigoto DD. Este zigoto segrega apenas o gameta D. Simbolicamente, representamos este fato por $DD = D$.

b) os gametas D e R unem-se formando o heterozigoto DR e este segrega os gametas D e R com a probabilidade $\frac{1}{2}$ para cada um deles. Simbolicamente temos $DR = RD = \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}D$.

c) os gametas R e R unem-se formando o homozigoto RR que segrega apenas o gameta R. Simbolicamente temos $RR = R$.

O espaço vetorial real bidimensional de base $\{D,R\}$ torna-se uma álgebra com a multiplicação

$$xy = (\alpha D+\beta R)(\alpha_1 D+\beta_1 R) = \frac{1}{2}(2\alpha\alpha_1+\alpha\beta_1+\alpha_1\beta)D + \frac{1}{2}(2\beta\beta_1+\alpha\beta_1+\alpha_1\beta)R,$$

onde $x = \alpha D+\beta R$ e $y = \alpha_1 D+\beta_1 R$ com $\alpha,\beta,\alpha_1,\beta_1\in\mathbb{R}$. Os elementos $x = \alpha D+\beta R$ desta álgebra, que admitem interpretação genética, são aqueles em que $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$ e $\alpha+\beta = 1$, pois, neste caso, podemos interpretar $\alpha D+\beta R$ como uma distribuição de frequências dos gametas D e R na população. A multiplicação de dois elementos x,y da álgebra mostra que se x e y admitem interpretação genética então o produto xy é ainda um elemento que admite interpretação genética pois $\frac{1}{2}(2\alpha\alpha_1+\alpha\beta_1+\alpha_1\beta)\geq 0$ , $\frac{1}{2}(2\beta\beta_1+\alpha\beta_1+\alpha_1\beta)\geq 0$ e $\frac{1}{2}(2\alpha\alpha_1+\alpha\beta_1+\alpha_1\beta) + \frac{1}{2}(2\beta\beta_1 + \alpha\beta_1+\alpha_1\beta) = (\alpha+\beta)(\alpha_1+\beta_1) = 1$. Este elemento xy representa a distribuição de frequências na geração resultante do casamento aleatório das populações representadas por $\alpha D+\beta R$ e $\alpha_1 D+\beta_1 R$. Assim, o produto na álgebra representa a passagem à geração filial.

A função que associa a cada elemento $x = \alpha D+\beta R$ o número real $\alpha+\beta$ desempenha um papel importante no estudo dessas álgebras, pois a estrutura da álgebra deve ser compatível com esta função. Consideremos um elemento que admite interpretação genética, isto é, $x = \alpha D+\beta R$, com $\alpha,\beta\geq 0$ e $\alpha+\beta = 1$. Então, $x^2 = (\alpha^2 + \alpha\beta)D + (\beta^2 + \alpha\beta)R = \alpha(\alpha+\beta)D + \beta(\alpha+\beta)R = x$. Isto é, a geração filial, resultante do casamento aleatório entre indivíduos da população gamética coincide com a geração inicial; em outras palavras, a população está em equilíbrio.

Este exemplo pode ser generalizado para o caso de multialelismo. Se considerarmos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ os diferentes alelos de uma população diplóide e repetirmos o argumento anterior obtemos $a_i a_j = \frac{1}{2} a_i + \frac{1}{2} a_j$ , $i,j = 0,1,\ldots,n$. Se tomarmos $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ como uma base, temos uma álgebra real de dimensão n+1, com a multiplicação acima. Do mesmo modo os elementos da álgebra que admitem interpretação genética são aqueles da forma $x = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \ldots +\alpha_n a_n$, $\alpha_i \geq 0$ $(i=0,1,\ldots,n)$

e $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. Cada $\alpha_i$ indica a frequência do alelo $a_i$, $(i = 0,1,\ldots,n)$.

A função $\omega$ que associa a cada elemento $x = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ o número real $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ satisfaz a identidade $\omega(xy) = \omega(x)\,\omega(y)$, para todo x e y.

Esta álgebra é chamada <u>álgebra gamética para a herança mendeliana simples, de dimensão n+1</u>. É a álgebra genética estruturalmente mais simples e, ao mesmo tempo, mais importante do ponto de vista genético.

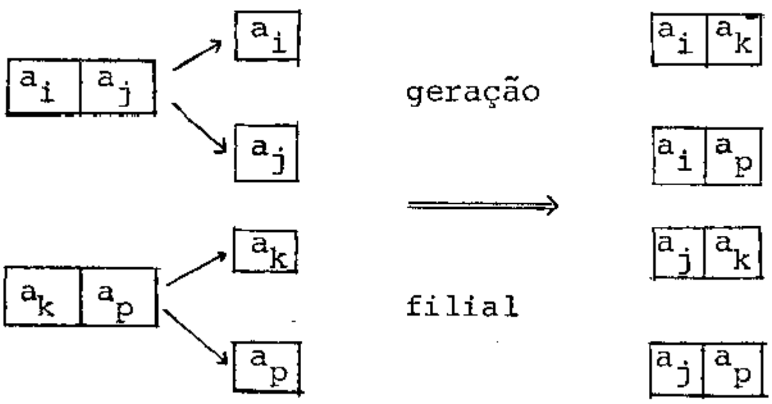
<u>Exemplo 1.2</u> - Consideremos novamente, uma população infinitamente grande com alelos $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Já vimos que a tábua de multiplicação da álgebra gamética é dada por $a_i a_j = \frac{1}{2} a_i + \frac{1}{2} a_j$ $(i,j = 0,1,\ldots,n)$.

Os zigotos desta população resultam da união de dois gametas. Podemos pensar então nos zigotos como pares não ordenados de alelos $a_i$ e $a_j$, que representaremos simplesmente por $(a_i a_j)$. Há portanto os seguintes zigotos (= tipos zigoticos, linguagem biológica)

$$\begin{array}{cccc}
a_0a_0 & a_0a_1 & a_0a_2 \;\cdots\cdots & a_0a_n \\
 & a_1a_1 & a_1a_2 \;\cdots\cdots & a_1a_n \\
 & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\
 & & & a_na_n
\end{array}$$

Consideremos o $\mathbb{R}$-espaço vetorial gerado por estes $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ simbolos. Se conseguirmos definir neste espaço vetorial uma multiplicação que descreva o comportamento da população zigo tica, teremos mais um exemplo importante de modelo algébrico em Genética de Populações.

Por cruzamento aleatório da população, vejamos quais são os possíveis zigotos formados, na geração filial. Sejam $(a_i a_j)$ e $(a_k a_p)$ dois quaisquer zigotos desta população. Sabemos que o zigoto $(a_i a_j)$ segrega os gametas $a_i$ e $a_j$ (com a probabilidade $\frac{1}{2}$ para cada um deles); o mesmo ocorre para $(a_k a_p)$, que segrega os gametas $a_k$ e $a_p$. Cada um dos gametas $a_i$, $a_j$ une-se a um dos gametas $a_k$ e $a_p$, formando os novos indivíduos da geração filial. Simbolicamente, temos:




É claro que a probabilidade de formação dos zigotos $a_i a_k$, $a_i a_p$, $a_j a_k$ e $a_j a_p$ é $\frac{1}{4}$ para cada um deles. Representamos este fato por

$$(a_i a_j)(a_k a_p) = \frac{1}{4}(a_i a_k) + \frac{1}{4}(a_j a_k) + \frac{1}{4}(a_j a_p) + \frac{1}{4}(a_i a_p)$$

Esta fórmula serve como definição de multiplicação no espaço vetorial gerado pelos simbolos $(a_i a_j)$ $(0 \le i \le j \le n)$. Um elemento genérico x desta álgebra é da forma

$x = \Sigma\, \alpha_{ij}(a_i a_j)$ , onde $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ e a soma é estendida a $0 \le i \le j \le n$. Para que x admita interpretação genética devemos ter $\alpha_{ij} \ge 0$, para todo $0 \le i \le j \le n$, e $\Sigma \alpha_{ij} = 1$. É fácil ver que se x e y, elementos desta álgebra, admitem interpretação genética, o mesmo ocorre com xy. Mais geralmente, a função $\omega$ que associa a $x = \Sigma\alpha_{ij}(a_i a_j)$ o número real $\omega(x) = \Sigma\alpha_{ij}$ satisfaz a identidade $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$.

Observação: Uma simples verificação mostrará que as álgebras acima não são associativas e não possuem unidade. Mais adiante , introduziremos notação especial para estas álgebras.

Exemplo 1.3 - Consideremos novamente uma população infinitamente grande, dialélica, porém sujeita a mutações. Sendo D e R os alelos, sejam

r = probabilidade de o alelo D sofrer mutação para R

s = probabilidade de o alelo R sofrer mutação para D

Um argumento simples de probabilidade mostra que deveremos definir a multiplicação da seguinte maneira:

$$D^2 = (1-r)D + rR\ ,\ DR = \frac{1}{2}(1-r+s)D + \frac{1}{2}(1-s+r)R \quad \text{e} \quad R^2=(1-s)R+sD$$

Obtemos assim uma álgebra descrevendo o comportamento das gerações sucessivas desta população. Casos interessantes correspondem a $r=s=\frac{1}{2}$ e também $r=s=1$. Do ponto de vista biológico , só tem sentido considerar casos em que r e s são muito próximos de zero e positivos.

Os três exemplos colocados acima são aqueles que motivaram a criação da teoria das álgebras genéticas. A álgebra do exemplo 1 será denotada por $G(n+1,2)$ e aquela do exemplo 2 por $Z(n+1,2)$. Elas fazem parte de uma classe mais ampla de álgebras gaméticas (resp.zigóticas) que, porém, não serão tratadas neste trabalho.

Depois destes exemplos introdutórios, começaremos com a exposição formal.

## I.2 - ÁLGEBRAS BÁRICAS

Lembremos que para nós, "álgebra" significa "álgebra real, comutativa, de dimensão finita".

DEFINIÇÃO 1.1 - Seja A uma álgebra. Dizemos que A é uma álgebra bárica se A admite um homomorfismo de álgebras, não nulo, $\omega: A \to R$. O homomorfismo $\omega$ chama-se uma função peso de A. Para cada $x \in A$, $\omega(x)$ chama-se o peso de x.

Exemplo 1.4 - A função $\omega: G(n+1,2) \to \mathbb{R}$ definida por $\omega(a_i) = 1$ $(i=0,1,\ldots,n)$ é um homomorfismo de álgebras não nulo.

TEOREMA 1.1 - Seja A uma álgebra bárica de dimensão n e seja $\omega$ uma função peso de A. Então $\mathrm{Ker}\omega$ é um ideal (n-1)-dimensional de A e $A/\mathrm{Ker}\omega \approx \mathbb{R}$.

Prova: $\mathrm{Ker}\omega$ é um ideal de A, pois $w: A \to \mathbb{R}$ é um homomorfismo de álgebras. Como $\omega$ é não-nulo existe em A um elemento x com $\omega(x) \neq 0$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha$ é imagem do elemento $\frac{\alpha x}{\omega(x)} \in A$. Então $\omega: A \to \mathbb{R}$ é sobrejetor e, portanto, $A/\mathrm{Ker} \approx \mathbb{R}$.

PROPOSIÇÃO 1.1 - Seja A uma álgebra. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) A é bárica

ii) A tem um ideal $(n-1)$-dimensional N tal que $A^2 \not\subset N$

Prova: i) $\Rightarrow$ ii) Seja $N = \mathrm{Ker}\,\omega$, onde $\omega$ é a função peso de A. Pelo teorema 1.1, N é um ideal $(n-1)$-dimensional de A. Seja x um elemento de A tal que $\omega(x) \neq 0$. Então $\omega(x^2) = \omega(x)^2 \neq 0$. Isto mostra que $x^2 \in A^2 - N$. Portanto, $A^2 \not\subset N$.

ii) $\Rightarrow$ i) Seja N um ideal $(n-1)$-dimensional de A tal que $A^2 \not\subset N$. Então, $A = \langle z \rangle \oplus N$ como soma direta de espaços vetoriais, onde z está em A-N. Como $A^2 \not\subset N$, podemos escrever $z^2 = tz+s$, onde $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ e $s \in N$. Seja $z_0 = \frac{1}{t} z$. Então $z_0^2 = z_0 + p$, $p \in N$ e $A = \langle z_0 \rangle \oplus N$. Agora, seja $\omega$ a função que a cada elemento $x = \alpha z_0 + n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in N$, associa o número real $\omega(x) = \alpha$. Afirmamos que $\omega$ é uma função peso de A. De fato, $\omega$ é claramente linear e se $x = \alpha z_0 + n$ e $y = \beta z_0 + m$ então $\omega(xy) = \omega(\alpha\beta z_0 + \alpha\beta p + \alpha z_0 m + \beta z_0 n + nm) = \alpha\beta = \omega(x)\omega(y)$.

DEFINIÇÃO 1.2 - Seja A uma álgebra.

a) Para cada x, elemento de A, definimos as potências principais de x por $x^1 = x$, $x^2 = xx$, $x^n = x^{n-1}x$. O elemento x é dito nilpotente se $x^n = 0$ para algum número natural n. O elemento x é denominado idempotente se $x^2 = x$.

b) Uma subálgebra U de A é chamada nilálgebra se todo elemento de U é nilpotente.

c) Uma subálgebra U de A é chamada nilpotente de índice k se $U^k = \langle 0 \rangle$ e $U^{k-1} \neq \langle 0 \rangle$, onde $U^1 = U$, $U^i = U^{i-1}U$, $i = 2,3,\ldots$

d) Uma álgebra nilpotente de índice 2 é chamada álgebra zero.

Exemplo 1.5 - Consideremos a álgebra $G(n+1,2)$ e seja

$x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i \in G(n+1,2)$. Se $x \in \operatorname{Ker}\omega$ então $\alpha_0 + \ldots + \alpha_n = 0$ e daí $x = \alpha_0 a_0 + \ldots + \alpha_n a_n = -(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)a_0 + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n =$ $= \alpha_1(a_1 - a_0) + \alpha_2(a_2 - a_0) + \ldots + \alpha_n(a_n - a_0)$ e portanto uma base de $\operatorname{Ker}\omega$ é $\{a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0\}$. Temos $(a_0 - a_i)(a_0 - a_j) =$ $= a_0 - a_0 a_j - a_0 a_i - a_i a_j = a_0 - \frac{1}{2}(a_0 + a_j) - \frac{1}{2}(a_0 + a_i) -$ $- \frac{1}{2}(a_i + a_j) = 0$ e portanto $N^2 = (\operatorname{Ker}\omega)^2 = 0$.

Exemplo 1.6 - Consideremos a álgebra A de dimensão 3, tendo $\{a_1, a_2, a_3\}$ como base e multiplicação dada por

$$
\begin{array}{lll}
a_1^2 = a_1 + a_2 & a_1 a_2 = a_2 & a_1 a_3 = a_2 \\
 & a_2^2 = a_2 & a_2 a_3 = a_2 \\
 & & a_3^2 = a_2 + a_3
\end{array}
$$

O subespaço $N_1$ gerado por $a_1$ e $a_2$ é um ideal de A e $A^2 \not\subset N_1$. Assim pela proposição 1.1 existe um homomorfismo de álgebras, não nulo, $\omega_1 : A \to \mathbb{R}$ dado por $\omega_1(a_1) = \omega_1(a_2) = 0$ e $\omega_1(a_3) = 1$. Mas o subespaço $N_2$ gerado por $a_2$ e $a_3$ é também um ideal de A e $A^2 \not\subset N_2$. Assim existe outro homomorfismo de álgebras, não nulo, $\omega_2 : A \to \mathbb{R}$ dado por $\omega_2(a_1) = 1$, $\omega_2(a_2) = \omega_2(a_3) = 0$. Este exemplo é dado para mostrar que a hipótese "$\operatorname{Ker}\omega$ é nil" da proposição seguinte, é necessária.

PROPOSIÇÃO 1.2 - Seja A uma álgebra bárica com função peso $\omega$. Se $\operatorname{Ker}\omega$ é nil álgebra, então $\omega$ é a única função peso de A.

Prova: Seja $g : A \to \mathbb{R}$ um homomorfismo de álgebras, não nulo. Se $x \in Ker\omega$, existe n natural tal que $x^n = 0$. Daí segue que $(g(x))^n = g(x^n) = g(0) = 0$ e portanto $g(x) = 0$. Isto mostra que $Ker\,\omega \subset Ker\,g$. Tomemos agora $y_0 \in A$ tal que $A = \langle y_0 \rangle \oplus Ker\omega$, onde $\langle y_0 \rangle$ é o subespaço gerado por $y_0$ e $\omega(y_0) = 1$. É claro que $g(y_0) \neq 0$ senão g seria identicamente nulo. O elemento $y_0^2 - y_0$ está no núcleo de $\omega$, logo $g(y_0^2 - y_0) = 0$. Mas $g(y_0^2 - y_0) = (g(y_0))^2 - g(y_0) = g(y_0)[g(y_0) - 1]$, o que acarreta $g(y_0) = 1$. Agora, se $x = \alpha y_0 + n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in Ker\omega$, é um elemento qualquer de A, temos $g(x) = g(\alpha y_0 + n) = \alpha g(y_0) + g(n) = \alpha = \omega(x)$ isto é, $g = \omega$.

## I.3 - t-ÁLGEBRAS

Consideremos a álgebra $A = G(2,2)$ de base $\{D,R\}$ e $x = \alpha D + \beta R$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, um elemento de A. Temos $x^2 = \alpha^2 D + 2\alpha\beta(\frac{1}{2} D + \frac{1}{2} R) + \beta^2 R = (\alpha+\beta)x$. Já sabemos que o único homomorfismo não-nulo de A em $\mathbb{R}$ é o homomorfismo $\omega$ que leva x em $\omega(x) = \alpha+\beta$ (proposição 1.2). Portanto, todo elemento x de A satisfaz a equação $x^2 - \omega(x)x = 0$.

Vejamos agora o que ocorre em $Z(2,2)$. Uma base desta álgebra é $\{DD, DR, RR\}$, que denotaremos por $\{a_1, a_2, a_3\}$. A tábua de multiplicação é:

$$a_1^2 = a_1 \qquad a_1a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \qquad a_1a_3 = a_2$$

$$a_2^2 = \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3 \qquad a_2a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3$$

$$a_3^2 = a_3$$

Façamos a seguinte mudança de base:

$$c_0 = a_1 \quad , \quad c_1 = a_1 - a_2 \quad , \quad c_2 = a_1 - 2a_2 + a_3$$

A tábua de multiplicação agora ficará:

$$c_0^2 = c_0 \qquad c_0c_1 = \frac{1}{2}c_1 \qquad c_0c_2 = 0$$

$$c_1^2 = \frac{1}{4}c_2 \qquad c_1c_2 = 0$$

$$c_2^2 = 0$$

Para cada $x \in Z(2,2)$, $x = \alpha_0c_0 + \alpha_1c_1 + \alpha_2c_2$ definimos $\omega(x) = \alpha_0$.

Temos $\mathrm{Ker}\omega = \langle c_1, c_2 \rangle$ e a tábua de multiplicação acima mostra que $(\mathrm{Ker}\omega)^2 = c_2$ e $(\mathrm{Ker}\omega)^3 = \langle 0 \rangle$. Pela proposição 1.2, $w: A \to \mathbb{R}$ é único. Como $x^2 = \alpha_0^2 c_0 + \alpha_0\alpha_1c_1 + \frac{1}{4}\alpha_1^2 c_2$ e $x^3 = \alpha_0^3 c_0 + \alpha_0^2\alpha_1c_1 + \frac{1}{4}\alpha_0\alpha_1^2 c_2$, temos $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$.

Os coeficientes das potências principais de x desta equação, bem como da equação correspondente da álgebra gamética $G(2,2)$, dependem de x somente através de $\omega(x)$. Vamos formalizar este conceito:

Seja A uma álgebra bárica e seja $\{e_1,\dots,e_n\}$ uma base de A. Denotemos por $f(x) = x^r + c_1(x)\, x^{r-1} + \dots + c_{r-1}(x)\, x = 0$ a equação mínima de A associada as potências principais de x

([9],§19;[1],teo 2.16). Então, se $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ o coeficiente $c_m(x)$, $1 \le m \le r-1$, de $f(x)$ é um polinômio homogêneo de grau $m$ nas coordenadas $x_j$ de $x$.

DEFINIÇÃO 1.3 - Seja A uma álgebra bárica com função peso $\omega$. A é chamada t-álgebra se os coeficientes $c_m(x)$ da equação mínima $f(x) = 0$ dependem de $x$ somente através de seu peso $\omega(x)$, isto é, $c_m(x)$ é função de $\omega(x)$ apenas.

Como os coeficientes $c_m(x)$ são polinômios homogêneos de grau $m$ nas coordenadas $x_j$ de $x$, em uma t-álgebra, $c_m(x)$ é um múltiplo escalar de $\omega(x)^m$ e então
$f(x) = x^r + \alpha_1 w(x) x^{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1} w(x)^{r-1} x = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Em uma t-álgebra a equação acima é chamada de t-equação principal e o inteiro $r$ chama-se posto de A.

No corpo complexo, podemos decompor o polinômio $f(x)$ na seguinte forma:

$$f(x) = x(x-\omega(x))(x-\lambda_1\omega(x))\ldots(x-\lambda_{r-2}\omega(x))$$

Os números $1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-2}$ são denominados t-raízes da álgebra A. Quando $\omega(x) = 1$, a t-equação principal de A fica reduzida a $f(x) = x(x-1)(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_{r-2}) = 0$.

Exemplo 1.7 - As álgebras $G(2,2)$ e $Z(2,2)$ são t-álgebras com as respectivas t-equações $x^2-\omega(x)x = 0$ e $x^3-\omega(x)x^2 = 0$.

PROPOSIÇÃO 1.3 - Se A é uma t-álgebra então $\mathrm{Ker}\,\omega$ é um ideal nil de A.

Prova: Basta fazer $\omega(x)=0$ na t-equação principal

$$f(x) = x^r + \alpha_1\omega(x)x^{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1}[\omega(x)]^{r-1} x = 0.$$

<u>Corolário</u>: Toda t-álgebra tem uma única função peso.

<u>Prova</u>: Como Ker$\omega$ é nil, pela proposição 1.2, A tem uma única função peso.

A t-equação $f(x) = x^n + \alpha_1\omega(x)x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\,\omega^{n-1}(x)x = 0$ está relacionada com as potências principais $x^1=x$, $x^2 = x\,x$, $x^n = x^{n-1}\,x$ , $n=2,3,\ldots$ . Essas potências tem o seguinte significado genético. Consideremos uma população infinita de elementos. Simbolicamente x representa a primeira geração; o elemento $x^2$ representa a segunda geração (descendentes de x por cruzamento ao acaso). De um modo geral, $x^n = x^{n-1}\,x$ representa a n-ésima geração, descendentes do cruzamento ao acaso, da primeira geração com a (n-1)-ésima geração.

Há outros tipos de potências que descrevem gerações sucessivas, como as potências plenas:
$x^{(1)} = x$ , $x^{(2)} = x^{(1)}\,x^{(1)}$ , ... , $x^{(n+1)} = x^{(n)}\,x^{(n)}$. Neste caso a n-ésima geração é resultado do cruzamento aleatório da (n-1)-ésima geração com ela mesma. A frequência genotípica da n-ésima geração é função apenas da frequência genotipica da geração anterior, neste caso.

Sejam A uma álgebra bárica e $q(x) = x^{(n)} + \beta_1(x)x^{(n-1)} + \ldots + \beta_{n-1}(x)x^{(1)} = 0$ a equação mínima de A relativa às potências plenas. Quando A é uma t-álgebra e os coeficientes $\beta_i(x)$ , $1\le i\le n-1$, dependem somente de $\omega(x)$, a equação q(x) assume a forma $q(x) = x^{(n)} + a_1(\omega(x))x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(\omega(x))x$. Neste caso, esta equação é denominada <u>t-equação plena</u>.

A próxima proposição mostra que a álgebra $G(n+1,2)$ desempenha um papel central na teoria das álgebras genéticas.

PROPOSIÇÃO 1.4 - Seja $A$ uma álgebra bárica de dimensão $n+1$. São equivalentes as condições:

(i) $A$ é uma t-álgebra com t-equação principal $x^2-\omega(x)x = 0$

(ii) $A$ é isomorfa a $G(n+1,2)$

Prova: (i)→(ii). Seja $c_1,\ldots,c_n$ uma base do núcleo de $\omega$, que completamos a uma base de $A$ com um elemento $c_0$ tal que $\omega(c_0) = 1$. Observemos também que a igualdade $x^2 = \omega(x)x$ pode ser linearizada, fornecendo uma identidade em 2 variáveis. Para isto, tomemos $x$ e $y$ em $A$; teremos

$$(x+y)^2 = \omega(x+y)(x+y) \quad \text{ou seja}$$
$$x^2+2xy+y^2 = \omega(x)x + \omega(x)y + \omega(y)x + \omega(y)y \quad \text{e daí}$$
$$xy = \frac{1}{2}[\omega(x)y + \omega(y)x].$$

Em particular ,

$$c_0^2 = c_0 \ , \quad c_0c_i = \frac{1}{2}c_i \quad (i=1,\ldots,n) \quad \text{e} \quad c_ic_j = 0 \quad (i,j=1,\ldots,n).$$

Tomemos agora a nova base $\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}$ de $A$ dada por $a_0 = c_0$ , $a_i = a_0+a_i$ $(i=1,\ldots,n)$. Temos $\omega(a_i) = 1$ $(i=0,1,\ldots,n)$ e ainda $a_ia_j = \frac{1}{2}(a_i+a_j)$. O isomorfismo com $G(n+1,2)$ é agora claro.

(ii)→(i) Imediata.

## I.4 - DUPLICAÇÃO

O processo de duplicação de álgebras genéticas foi introduzido por Etherington, como generalização natural do processo de obtenção de uma população zigótica a partir de uma população gamética.

A definição original é a seguinte: seja A uma álgebra comutativa de base $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ consideremos os símbolos

$$\begin{array}{cccc} a_0 * a_0 & a_0 * a_1 & \cdots\cdots\cdots & a_0 * a_n \\ & a_1 * a_1 & \cdots\cdots\cdots & a_1 * a_n \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & & & a_n * a_n \end{array}$$

e seja B o espaço vetorial das combinações lineares formais destes símbolos, com coeficientes reais. Então B tem dimensão $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ e um elemento genérico de B é da forma

$x = \sum_{i \leq j} \alpha_{ij}\, a_i * a_j$ . A multiplicação em B é definida sobre a base pelas igualdades $(a_i * a_j)(a_k * a_\ell) = (a_i a_j) * (a_k a_\ell)$ onde $a_i a_j$ e $a_k a_\ell$ são calculados em A, é claro. Se tivermos

$a_i a_j = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ijk}\, a_k$ então

$$(a_i * a_j)(a_k * a_\ell) = \left(\sum_{r=0}^{n} \alpha_{ijr}\, a_r\right) * \left(\sum_{s=0}^{n} \alpha_{k\ell s}\, a_s\right) = \sum_{r,s=0}^{n} \alpha_{ijr}\, \alpha_{k\ell s}\, a_r * a_s .$$

Por definição, B é uma álgebra comutativa. Naturalmente, podemos introduzir B através do produto tensorial $A \otimes A$ (sobre $\mathbb{R}$). Para isto, definimos uma multiplicação no espaço vetorial $A \otimes A$ por $(a \otimes b)(a' \otimes b') = (ab) \otimes (a'b')$ e tomamos como B o quociente de $A\otimes A$ pelo ideal gerado pelos elementos da forma $x\otimes y-y\otimes x$, com x,y em A. Neste caso, a imagem canônica de $a\otimes b$ será denotada $a*b$.

TEOREMA 1.2 - Seja $\Psi:B\to A$ dada por $\Psi(\sum_i \alpha_i(a_i*b_i)) = \sum_i \alpha_i a_i b_i$. Então $\Psi$ é um homomorfismo de álgebras, $\Psi(B) = A^2$ e $B.\mathrm{Ker}\Psi = 0$.

Prova: Omitida (Ver [1], teo.6.14)

TEOREMA 1.3 - Se A é bárica então B é bárica.

Prova: Seja $\omega:A\to\mathbb{R}$ uma função peso de A. Tomemos $\omega_1:B\to\mathbb{R}$ como $\omega_1 = \omega\circ\Psi$, onde $\Psi:B\to A$ é dada por $a_i*a_j \to a_i a_j$. Pelo teorema anterior, $\Psi$ é homomorfismo de álgebras logo o mesmo ocorre com $\omega_1$. Além disso $\Psi(B) = A^2 \not\subset N = \mathrm{Ker}\omega$ logo $\omega_1 \neq 0$.

O resultado que mais interessa sobre o processo de duplicação é o seguinte:

TEOREMA 1.4 - Seja A uma t-álgebra de posto r. Então sua duplicada B é uma t-álgebra de posto no máximo r+1.

Prova: Já sabemos que B é bárica. Seja $x^r + \alpha_1\omega(x)x^{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1}(\omega(x))^{r-1}x = 0$ a t-equação principal de A. Dados x,y em A, o elemento $x*y$ de B satisfaz $\Psi(x*y) = xy\in A$ e portanto

$$(xy)^r + \alpha_1\omega(xy)(xy)^{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1}(\omega(xy))^{r-1}(xy) = 0 \quad \text{, isto é,}$$

$$(\Psi(x*y))^r + \alpha_1\omega(\Psi(x*y))(\Psi(x*y))^{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1}\omega(\Psi(x*y))^{r-1}\Psi(x*y) = 0.$$

Mas $\Psi$ é um homomorfismo de álgebras (teo 1.2) logo

$$\Psi[(x*y)^r + \alpha_1\omega_1(x*y)(x*y)^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1}(\omega_1(x*y))^{r-1}(x*y)] = 0$$

Assim $z = (x*y)^r + \alpha_1\omega_1(x*y)(x*y)^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1}(\omega_1(x*y))^{r-1}(x*y) \in \operatorname{Ker}\Psi$.

Ainda pelo teo.1.2, $(x*y)z = 0$ isto é,

$$(x*y)^{r+1} + \alpha_1\omega_1(x*y)(x*y)^r + \dots + \alpha_{r-1}(\omega_1(x*y))^{r-1}(x*y)^2 = 0.$$

Observação: Lembrando que uma t-álgebra tem uma única função peso, vemos que B é univocamente ponderada.

Corolário: A álgebra $Z(n+1,2)$ é uma t-álgebra com t-equação principal $y^3 - \omega_1(y)y^2 = 0$.

Prova: Sabemos que $Z(n+1,2)$ é a duplicada de $G(n+1,2)$. Como a t-equação principal de $G(n+1,2)$ é $x^2 - \omega(x)x = 0$, a t-equação principal de $Z(n+1,2)$ é de posto menor ou igual a 3 e divide $y^3 - \omega_1(y)y^2 = 0$. Portanto, ela terá posto 2 ou 3. Se o posto desta t-equação principal fosse 2, pela proposição 1.4, $Z(n+1,2)$ seria isomorfa a $G(\frac{(n+1)(n+2)}{2}, 2)$. Ocorre que todos os elementos de peso 1 em $G(\frac{(n+1)(n+2)}{2}, 2)$ são idempotentes, uma vez que eles satisfazem a equação $z^2 - \omega(z)z = 0$. Em $Z(n+1,2)$ existem elementos de peso 1 que não são idempotentes. Basta tomar o elemento $a_i*a_j$ onde $a_i$ e $a_j$ são elementos de peso 1 em $G(n+1,2)$. Temos $(a_i*a_j)^2 \neq a_i*a_j$ e $\omega_1(a_i*a_j) = 1$.

De fato $(a_i*a_j)^2 = (a_i*a_j)(a_i*a_j) = (a_ia_j)*(a_ia_j) =$

$$= \left(\frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}a_j\right)*\left(\frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}a_j\right) = \frac{1}{4}a_i*a_i + \frac{1}{2}a_i*a_j + \frac{1}{4}a_j*a_j .$$

## I.5 - ÁLGEBRAS GENÉTICAS NO SENTIDO DE GONSHOR

DEFINIÇÃO 1.5 - Seja A uma álgebra comutativa $n+1$-dimensional. A é chamada álgebra genética no sentido de Gonshor se A admite uma base $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ tal que, sendo $c_i c_j = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ijk} c_k$ $(i,j = 0,1,\ldots,n)$, as constantes de estrutura $\alpha_{ijk}$ satisfazem as condições:

1) $\alpha_{000} = 1$;

2) $\alpha_{0jk} = 0$ se $k<j$;

3) $\alpha_{ijk} = 0$ se $i \geq 1$ , $j \geq 1$ e $k \leq \max(i,j)$.

Observação: i) $\alpha_{ijk} = \alpha_{jik}$ , pois A é comutativa

ii) As constantes de estrutura $\alpha_{000} = 1$ e $\alpha_{0ii}$ , $i=1,2,\ldots,n$ , são chamadas t-raízes de A. As t-raízes de A são independentes da escolha da base canônica, pois elas são auto-valores de qualquer aplicação $x \mapsto x_0 x$ , onde $x_0$ é um elemento de A da forma $x_0 = c_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$ . De fato, a matriz do operador linear $x \mapsto x_0 x$ é triangular e tem na diagonal os elementos $1, \alpha_{0ii} (i=1,\ldots,n)$.

iii) A base $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ é chamada uma base canônica de A. Em geral, A pode ter muitas bases canônicas.

PROPOSIÇÃO 1.5 - Sejam A uma álgebra genética no sentido de Gonshor e $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ uma base canônica de A. Então o sub-espaço vetorial N gerado por $c_1, c_2, \ldots, c_n$ é um ideal nilpotente de A.

Prova: Como A é genética no sentido de Gonshor, temos $AN \subset N$ ; portanto, N é um ideal de A. Da condição 3) que as constantes de estrutura devem satisfazer, segue que $N^i$ está contido no sub-espaço gerado por $c_i,\dots,c_n$. Portanto, $N^{n+1} = 0$.

Corolário: Toda álgebra genética no sentido de Gonshor é ponderada por uma única função peso.

Prova: Seja $\{c_0,c_1,\dots,c_n\}$ uma base canônica de A. O ideal gerado por $c_1,\dots,c_n$ é n-dimensional e como $\alpha_{000} = 1$, $A^2 \not\subset N$. Pela proposição 1.1, A é bárica e a função peso correspondente a N é dada por $\omega(x) = \alpha_0$ , onde $x = \alpha_0 c_0 + \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_n c_n$. Como N é nilpotente (portanto nil), $\omega$ é única (proposição 1.2).

Exemplo 1.9 - A álgebra G(n+1,2) é genética no sentido de Gonshor. De fato, seja $\{a_0,a_1,\dots,a_n\}$ a base de G(n+1,2) tal que $a_i a_j = \frac{1}{2} a_i + \frac{1}{2} a_j$ para $0 \le i,j \le n$. Se fizermos a mudança $c_0 = a_0$ , $c_j = a_0 - a_j$ , $(j=1,2,\dots,n)$ temos $c_0^2 = c_0$ , $c_0 c_j = \frac{1}{2} c_j$ e $c_i c_j = 0$ , $1 \le i,j \le n$ . Logo, $\{c_0,c_1,\dots,c_n\}$ é uma base canônica de G(n+1,2). As t-raízes são $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}$ .

Exemplo 1.10 - A álgebra Z(2,2), duplicada de G(2,2), é genética no sentido de Gonshor. De fato, se $\{a_0,a_1\}$ é a base de G(2,2) tal que $a_0^2 = a_0$ , $a_0 a_1 = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} a_1$ e $a_1^2 = a_1$ , então uma base de Z(2,2) é $\{a_0 * a_0 , a_0 * a_1 , a_1 * a_1\}$, cuja tabela de multiplicação é:

$$(a_0*a_0)(a_0*a_0) = a_0*a_0$$

$$(a_0*a_0)(a_0*a_1) = \frac{1}{2} a_0*a_0 + \frac{1}{2} a_0*a_1$$

$$(a_0*a_1)(a_0*a_1) = \frac{1}{4} a_0*a_0 + \frac{1}{2} a_0*a_1 + \frac{1}{4} a_1*a_1$$

$$(a_0*a_0)(a_1*a_1) = a_0*a_1$$

$$(a_0*a_1)(a_1*a_1) = \frac{1}{2} a_0*a_1 + \frac{1}{2} a_1*a_1$$

$$(a_1*a_1)(a_1*a_1) = a_1*a_1$$

Façamos a mudança de base:

$$c_0 = a_0*a_0 \;, \quad c_1 = a_0*a_0 - a_0*a_1 \quad \text{e} \quad c_2 = a_0*a_0 - 2a_0*a_1 + a_1*a_1 .$$

A nova tabela de multiplicação é:

$$\begin{array}{lll} c_0^2 = c_0 & c_0c_1 = \frac{1}{2} c_1 & c_0c_2 = 0 \\ & c_1^2 = \frac{1}{4} c_2 & c_1c_2 = 0 \\ & & c_2^2 = 0 \end{array}$$

Assim $\{c_0,c_1,c_2\}$ é uma base canônica de $Z(2,2)$, cujas t-raízes são $1$, $\frac{1}{2}$ e $0$.

TEOREMA 1.5 - Toda álgebra genética no sentido de Gonshor é uma t-álgebra.

Prova: Seja A uma álgebra genética no sentido de Gonshor e denotemos por $\{c_0,c_1,\ldots,c_n\}$ uma base canônica de A. Vamos mostrar que os coeficientes $\alpha_i(x)$, $1 \le i \le r-1$, da equação mínima de A, relativa às potências principais , $f(x) = x^r + \alpha_1(x)x^{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1}(x)x = 0$, dependem somente de $\omega(x)$, para todo x em A. Seja $x = x_0c_0 + x_1c_1 + \ldots + x_nc_n$ um elemento arbitrário de A (logo $x_0 = \omega(x)$) e $L_x : A \to A$ por $L_x(y) = xy$. A matriz M de $L_x$, em relação à base canônica $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ de A é

$$M = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_{001}\, x_0 + \alpha_{011}\, x_1 & \alpha_{011}\, x_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{00n}\, x_0 + \alpha_{01n}\, x_1 + \ldots + \alpha_{0nn}\, x_n & \vdots & \ldots & & \alpha_{0nn} x_0 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz triangular inferior. O polinômio característico de $L_x$ é então $g(x) = \det(\lambda I - M) = \prod_{i=0}^{n} (\lambda - \alpha_{0ii} x_0)$. Como a t-equação de A, $f(x) = 0$ , é tal que $f(x)$ é um divisor de $xg(x)$ ([1], teo.2.16), temos que

$$f(x) = x(x-\omega(x))(x-\alpha_{0i_1i_1}\omega(x))\ldots(x-\alpha_{0i_ji_j}\omega(x))$$

onde $\{i_1, \ldots, i_j\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Isto mostra que os coeficientes do polinômio $f(x)$ dependem apenas da coordenada $x_0$, que é o peso de x, e das constantes $\alpha_{0ii}$ naturalmente.

<u>DEFINIÇÃO 1.6</u> - Uma <u>t-álgebra especial</u> A é uma t-álgebra onde o ideal $N = \mathrm{Ker}\,\omega$ é nilpotente e suas potências principais são ideais de A.

Exemplo 1.11 - A álgebra $G(n+1,2)$ é uma t-álgebra especial. Basta ver o exemplo 1.5.

Exemplo 1.12 - A álgebra $Z(2,2)$ é uma t-álgebra especial. Podemos ver isto diretamente pelo exemplo 1.10. Temos $N = \mathrm{Ker}\omega = \langle c_1, c_2\rangle$ e daí $N^2 = \langle c_2\rangle$ e $N^3 = \langle 0\rangle$.

Vamos admitir o seguinte teorema sem demonstração.

TEOREMA 1.6 - Seja A uma álgebra bárica com função peso $\omega$. Então, as seguintes condições são equivalentes:

1) A é uma t-álgebra especial;

2) A é uma álgebra genética no sentido de Gonshor e todas as potências principais de $\mathrm{Ker}\omega$ são ideais de A.

A demonstração se encontra em [1], teorema 3.28.

Observação: A duplicada de uma álgebra genética no sentido de Gonshor é uma álgebra genética no sentido de Gonshor; mas isto não vale para t-álgebras especiais. Por exemplo, a duplicada de $Z(2,2)$ é uma álgebra genética no sentido de Gonshor isomorfa a álgebra A sobre os reais de base $\{c_0, c_1, \ldots, c_5\}$ e com multiplicação dada por

$$
\begin{array}{llllll}
c_0^2 = c_0 & c_0c_1 = \frac{1}{2}c_1 & c_0c_2 = \frac{1}{4}c_3 & c_0c_3 = 0 & c_0c_4 = 0 & c_0c_5 = 0 \\
 & c_1^2 = \frac{1}{4}c_2 & c_1c_2 = \frac{1}{8}c_4 & c_1c_3 = 0 & c_1c_4 = 0 & c_1c_5 = 0 \\
 & & c_2^2 = \frac{1}{16}c_5 & c_2c_3 = 0 & c_2c_4 = 0 & c_2c_5 = 0 \\
 & & & c_3^2 = 0 & c_3c_4 = 0 & c_3c_5 = 0 \\
 & & & & c_4^2 = 0 & c_4c_5 = 0 \\
 & & & & & c_5^2 = 0
\end{array}
$$

Daí vem que $N=\mathrm{Ker}\,\omega$ é gerado por $c_1,\ldots,c_5$ , $N^2$ é gerado por $c_2,c_4$ e $c_5$ , $N^3$ é gerado por $c_4$ e $c_5$ , $N^4=0$. No entanto, $N^2$ não é um ideal pois $c_0c_2 = \frac{1}{4}c_3 \notin N^2$.

## I.6 - UM TEOREMA DE CONVERGÊNCIA

Lembremos que um problema essencial em Genética de Populações é a procura de estados de equilíbrio. Em nossos modelos algébricos, este problema corresponde à procura de idempotentes. O próximo teorema é devido a Gonshor.

TEOREMA 1.7 - Seja A uma álgebra genética no sentido de Gonshor, cujas t-raízes são todas distintas de $\frac{1}{2}$ . Então, A possui um único idempotente não nulo.

Prova: Vamos construir, por um processo de recorrência, um elemento idempotente não nulo em A.

Seja $\{c_0,c_1,\ldots,c_n\}$ uma base canônica de A. Vamos mostrar que existem $x_0, x_1, \ldots, x_m$ em $\mathbb{R}$ tais que $(x_0c_0 + x_1c_1 + \ldots + x_mc_m)^2 = x_0c_0 + \ldots + x_mc_m + y_{m+1}\, c_{m+1} + \ldots + y_nc_n$, para todo $m \leq n$, onde $y_{m+1}, \ldots, y_n$ estão em $\mathbb{R}$.

a) Para $m=0$ , de $(x_0c_0)^2 = x_0c_0 + y_1c_1 + \ldots + y_nc_n$ segue-se que $x_0^2 = x_0$ e isto mostra que devemos tomar $x_0 = 1$.

b) Para $m=1$ , $(c_0+x_1c_1)^2 = c_0 + x_1c_1 + y_2c_2 + \ldots + y_nc_n$, onde $x_1$ é determinado a seguir.

Como $(c_0+x_1c_1)^2 = c_0^2 + 2x_1c_0c_1 + x_1^2c_1^2 = c_0 + \alpha_{001}c_1 + \ldots$

$\ldots + \alpha_{00n}c_n + 2x_1(\alpha_{011}c_1 + \alpha_{012}c_2 + \ldots + \alpha_{0nn}c_n) +$

$+ x_1^2(\alpha_{112}c_2 + \alpha_{113}c_3 + \ldots + \alpha_{11n}c_n) =$

$= c_0 + (\alpha_{001} + 2\alpha_{001}x_1)c_1 + (\alpha_{002} + 2\alpha_{012}x_1 + \alpha_{112}x_1^2)c_2 +$

$+ \ldots + (\alpha_{00n} + 2\alpha_{01n}x_1 + \alpha_{11n}x_1^2)c_n$ , devemos ter

$$x_1 = \alpha_{001} + 2\alpha_{011}\, x_1 \qquad (*)$$

isto é, $x_1 = \dfrac{\alpha_{001}}{1-2\alpha_{011}}$ . Daí vem:

$$\left(c_0 + \frac{\alpha_{001}}{1-2\alpha_{011}}\, c_1\right)^2 = c_0 + \frac{\alpha_{001}}{1-2\alpha_{011}}\, c_1 + f(c_2, \ldots, c_n).$$

c) Suponhamos que já foram escolhidos $x_1, \ldots, x_m$ em $\mathbb{R}$ de tal maneira que $(c_0+x_1c_1+\ldots+x_mc_m)^2 = c_0 + x_1c_1 + \ldots + x_mc_m + y_{m+1}\, c_{m+1} + \ldots + y_nc_n$ , onde $y_{m+1}, \ldots, y_n$ estão em $\mathbb{R}$ .Vamos determinar $x_{m+1}$ em $\mathbb{R}$ tal que $(c_0 + x_1c_1 + \ldots + x_{m+1}\, c_{m+1})^2 =$ $= c_0 + x_1c_1 + \ldots + x_{m+1}\, c_{m+1} + y'_{m+2}\, c_{m+2} + \ldots + y'_nc_n$ , com $y'_{m+2}, \ldots, y'_n$ em $\mathbb{R}$ . Como:

$$(c_0 + x_1c_1 + \ldots + x_{m+1}c_{m+1})^2 = (c_0 + x_1c_1 + \ldots +$$
$$+ x_mc_m)^2 + 2x_{m+1}c_{m+1}(c_0 + x_1c_1 + \ldots + x_mc_m) + x_{m+1}^2c_{m+1}^2 =$$
$$= c_0 + x_1c_1 + \ldots + x_mc_m + y_{m+1}c_{m+1} + \ldots + y_nc_n +$$
$$+ 2x_{m+1}(\alpha_{0,m+1,m+1}\, c_{m+1} + \alpha_{0,m+1,m+2}\, c_{m+2} + \ldots + \alpha_{0,m+1,n}\, c_n) +$$
$$+ x_1(\alpha_{1,m+1,m+2}\, c_{m+2} + \ldots + \alpha_{1,m+1,n}\, c_n) + \ldots +$$
$$+ x_m(\alpha_{m,m+1,m+2}\, c_{m+2} + \ldots + \alpha_{m\; m+1,n}\, c_n) +$$
$$+ x_{m+1}^2(\alpha_{m+1,m+1,m+2}\, c_{m+2} + \alpha_{m+1,m+1,m+3}\, c_{m+3} + \ldots +$$
$$+ \alpha_{m+1,m+1,n}\, c_n) = c_0 + x_1c_1 + \ldots + x_mc_m + (2\alpha_{0,m+1,m+1}\, x_{m+1} +$$
$$+ y_{m+1})c_{m+3} + h(c_{m+2},\ldots,c_n) \text{ devemos ter}$$
$$x_{m+1} = 2\alpha_{0,m+1,m+1}\, x_{m+1} + y_{m+1}. \text{ Portanto, } x_{m+1} = \frac{y_{m+1}}{1-2\alpha_{0,m+1,m+1}},$$

que é unicamente determinado.

Assim existe $e = c_0+x_1c_1+\ldots+x_nc_n$ tal que $e^2=e$.

<u>Observação</u>: Em genética ocorre muito o caso em que $\alpha_{011} = \frac{1}{2}$ e $\alpha_{0ii} \neq \frac{1}{2}(i=2,3,\ldots,n)$. Pelo mesmo processo usado acima pode-se provar que existem idempotentes não nulos em A se e somente se $\alpha_{001} = 0$ (ver a identidade (*)) e, neste caso, $x_1$ fica livre e existe uma família a um parâmetro de idempotentes. Existem vários teoremas generalizando este que apresentamos. Ver [1].

Quando todas as t-raízes são diferentes de $\frac{1}{2}$ existe apenas um idempotente e, neste caso, a população descrita pela álgebra tem apenas um ponto de equilíbrio. Este ponto de equilíbrio tem a importante propriedade de ser "absorvente".

Isto é, se tomarmos um elemento de peso 1 na álgebra, suas potências plenas convergem para este ponto de equilíbrio, desde que as t-raízes satisfaçam certas condições. Para mostrar este fato vamos precisar da seguinte

PROPOSIÇÃO 1.6 - Sejam A uma t-álgebra e e um idempotente não nulo em A. Então $\omega(e) = 1$.

Prova: De $e^2=e$ segue que $\omega(e)^2 = \omega(e)$; logo, $\omega(e) = 1$ ou $\omega(e) = 0$. Seja $f(x) = x^r + \alpha_1\omega(x)x^{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1}\omega^{r-1}(x)x = 0$ a t-equação principal de A. Se $\omega(e) = 0$ então $0 = f(e) = e^r = e$; o que é uma contradição. Portanto, $\omega(e) = 1$.

TEOREMA 1.8 - A sequência de potências plenas de um elemento qualquer de peso 1, em uma álgebra genética no sentido de Gonshor A, converge para o idempotente de A, se todas as t-raízes satisfazem $|\alpha_{0ii}| < \frac{1}{2}$, $(i=1,2,\ldots,n)$

Prova: Inicialmente, observamos que se $\{c_0,c_1,\ldots,c_n\}$ é uma base canônica de A então $\{y_0,c_1,\ldots,c_n\}$ também é uma base canônica para todo $y_0$ em A de peso 1. A prova deste resultado é um cálculo simples. Como o idempotente e de A tem peso 1, podemos supor $c_0 = e$. Seja $z = c_0 + \alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_n c_n$ um elemento qualquer de A de peso 1 e denotemos por $z^{(k)} = c_0 + \alpha_1^{(k)} c_1 + \ldots + \alpha_n^{(k)} c_n$ a k-ésima potência plena de z. Afirmamos que $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_i^{(k)} = 0$, para todo $i = 1,2,\ldots,n$. De fato, de $z^{(k+1)} = z^{(k)} z^{(k)}$ segue-se que

$$\alpha_i^{(k+1)} = 2\alpha_{0ii}\alpha_i^{(k)} + \sum_{j,s=0}^{i-1} \alpha_{jsi}\, \alpha_j^{(k)}\, \alpha_s^{(k)}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

com $j\neq 0$ ou $i\neq 0$ , onde $\alpha_{jsi}$ são as constantes de estrutura de A.Para $i = 1$ temos $\alpha_1^{(k+1)} = 2\alpha_{011}\ \alpha_1^{(k)}$ . Disto segue-se que $|\alpha_1^{(k+1)}| < |\alpha_1^{(k)}|$ , para todo k, o que mostra que $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_1^{(k)} = 0$. Suponhamos por hipótese de indução, que $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_i^{(k)} = 0$, para $i = 1,2,\ldots,n-1$. Vamos mostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_n^{(k+1)} = 0$. Como $\alpha_n^{(k+1)} = 2\alpha_{0nn}\ \alpha_n^{(k)} + \sum\limits_{j,s=0}^{n-1} \alpha_{jsn}\ \alpha_j^{(k)}\ \alpha_s^{(k)}$ temos:

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_n^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} 2\alpha_{0nn}\ \alpha_n^{(k)} + \lim_{k\to\infty} \sum_{j,s=0}^{n-1} \alpha_{jsn}\ \alpha_j^{(k)}\ \alpha_s^{(k)} =$$

$$= 2\alpha_{0nn} \lim_{k\to\infty} \alpha_n^{(k)} + \sum_{j,s=0}^{n-1} \alpha_{jsn} (\lim_{k\to\infty} \alpha_j^{(k)}) (\lim_{k\to\infty} \alpha_s^{(k)}) =$$

$= 2\alpha_{0nn} \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_n^{(k)}$. Mas $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_n^{(k+1)} = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_n^{(k)} = t$. Temos, então, $t = 2\alpha_{0nn}t$ e daí $t = 0$ pois $\alpha_{0nn} \neq \frac{1}{2}$ . Logo, $(\alpha_1^{(k)},\alpha_2^{(k)},\ldots,\alpha_n^{(k)})$ converge para $(0,0,\ldots,0)$.

<u>Exemplo 1.13</u> - Vamos considerar a álgebra zigótica Z(2,2) com base canônica $\{c_0,c_1,c_2\}$ (ver exemplo 1.10) e supor que existam os seguintes coeficientes de mutação: r é o coeficiente de mutação do alelo $a_0$ para o alelo $a_1$ e s é o coeficiente de mutação do alelo $a_1$ para alelo $a_0$. (Ver o exemplo 1.9 como fica a tábua de multiplicação para G(2,2)). A tábua de multiplicação para Z(2,2), com mutação é:

$$c_0^2 = c_0-2rc_1+r^2c_2 \qquad c_0c_1 = \tfrac{1}{2}(1-r-s)(c_1-rc_2) \qquad c_0c_2 = 0$$

$$c_1^2 = \tfrac{1}{4}(1-r-s)^2c_2 \qquad c_1c_2 = 0$$

$$c_2^2 = 0$$

Como ker$\omega$ é gerado por $c_1, c_2$, $(\mathrm{Ker}\omega)^2$ é gerado por $c_2$ e $(\mathrm{Ker}\omega)^3 = 0$, segue que as potências de Ker$\omega$ são ideais de $Z(2,2)$. As t-raízes são $1$, $\frac{1}{2}(1-r-s)$ e $0$.

Se $r + s \neq 0$ podemos aplicar o teorema 1.7 e existe apenas um idempotente e um cálculo direto mostra que

$e = c_0 - \frac{2r}{r+s} c_1 + \frac{r^2}{(r+s)^2} c_2$ é este idempotente.

Quando $r = s = 0$ (ausência de mutação) temos:

$$\begin{array}{lll} c_0^2 = c_0 & c_0c_1 = \frac{1}{2} c_1 & c_0c_2 = 0 \\ & c_1^2 = \frac{1}{4} c_2 & c_1c_2 = 0 \\ & & c_2^2 = 0 \end{array}$$

e os elementos $e = c_0 + xc_1 + \frac{1}{4} x^2c_2$ ($x$ real) são os idempotentes.

Seja agora $z = c_0 + xc_1 + yc_2$ um elemento de peso um de $Z(2,2)$ (sem mutação). Temos:

$z^{(2)} = zz = c_0 + xc_1 + \frac{1}{4} x^2c_2$ e $z^{(3)} = z^{(2)}z^{(2)} =$

$= c_0 + xc_1 + \frac{1}{4} x^2c_2 = z^{(2)}$, $z^{(4)} = z^{(3)}z^{(3)} = z^{(2)}z^{(2)} = z^{(2)}$.

Do mesmo modo, $z^{(n)} = z^{(2)}$, para todo $n \geq 4$. Portanto, a sequência de potências plenas de $z$ converge para o idempotente $z^{(2)}$. (Observamos que neste caso as hipóteses do teorema 1.8 não estão satisfeitas).

Existe uma generalização ([1], teorema 4.19) deste teorema para o caso de várias t-raízes serem iguais a $\frac{1}{2}$ o que é muito frequente em álgebras genéticas.

<u>Exemplo 1.4</u> - Vamos considerar agora a álgebra dos tetraplóides. Os tetraplóides são seres onde cada um tem um conjunto de cromossomos consistindo de um grupo de 4 cromossomos homólogos, tais que os cromossomos de um grupo diferem em um locus com alelos A e a. Então, os três gametas geneticamente diferentes produzidos por esta população podem ser representados por $D_0 = aa$, $D_1 = aA$ e $D_2 = AA$. A genética desta população pode ser descrita pela álgebra tetraplóide $G(2,4)$ gerada sobre $\mathbb{R}$ pelos símbolos $D_0$, $D_1$, $D_2$. Vamos determinar a tábua de multiplicação para esta álgebra. O produto $D_0D_1$ é obtido do seguinte modo. Os gametas $D_0$ e $D_1$ unem-se formando o zigoto $D_0D_1$ ou seja $(a,a)\cup(a,A) = (a,a,a,A)$. Este zigoto, por combinação dos alelos a e A, produz os gametas aa, aa, aa, aA, aA, aA. Portanto, devemos definir $D_0D_1 = \dfrac{3D_0 + 3D_1}{6} = \frac{1}{2} D_0 + \frac{1}{2} D_1$.

Os gametas $D_0$ e $D_2$ unem-se formando o zigoto $D_0D_2$, ou seja $(a,a)\cup(A,A) = (a,a,A,A)$. De maneira análoga, este zigoto produz os gametas aa, aA, aA, aA, aA, AA. Indicamos este fato por $D_0D_2 = \frac{1}{6}(D_0 + 4D_1 + D_2)$. Do mesmo modo, os outros produtos serão: $D_0D_0 = D_0$, $D_1D_1 = \frac{1}{6}(D_0 + 4D_1 + D_2)$, $D_1D_2 = \frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{2} D_2$, $D_2^2 = D_2$. Sendo $c_0 = D_2$, $c_1 = D_2 - D_1$ e $c_2 = D_2 - 2D_1 + D_0$, temos $c_0^2 = c_0$, $c_0c_1 = \frac{1}{6} c_2$, $c_1^2 = \frac{1}{6} c_2$, $c_1c_2 = c_2^2 = 0$. Portanto, $\{c_0,c_1,c_2\}$ é uma base canônica para $G(2,4)$. As t-raízes são $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{1}{6}$. Seja e um idempotente, $e = c_0 + x_1c_1 + x_2c_2$. Por um cálculo direto encontramos $e = c_0 + x_1c_1 + \frac{1}{4} x_1^2 c_2$, $x_1$ arbitrário (ver ob servação do teorema 1.7).

Seja $y$ um elemento em $A$, de peso 1. Então,

$y = c_0 + y_1c_1 + y_2c_2$. Como:

$$y^{(2)} = yy = c_0 + y_1c_1 + (\frac{1}{3}\ y_2 + \frac{1}{6}\ y_1^2)c_2$$

$$y^{(3)} = y^{(2)}y^{(2)} = c_0 + y_1c_1 + (\frac{1}{9}\ y_2 + \frac{2}{9}\ y_1^2)c_2$$

$$y^{(4)} = y^{(3)}y^{(3)} = c_0 + y_1c_1 + (\frac{1}{81}\ y_2 + \frac{20}{81}\ y_1^2)c_2\ ,$$

as potências plenas $y^{(n)}$ convergem para $y = c_0 + y_1c_1 + \frac{1}{4}\,y_1^2c_2$. Para cada $y_1 \in \mathbb{R}$, o idempotente $y = c_0 + y_1c_1 + \frac{1}{4}\ y_1^2\ c_2$ é absorvente e as potências plenas de cada elemento de peso 1 convergem para um destes idempotentes, que dependem da coordenada na direção de $c_1$.

# CAPÍTULO II - ÁLGEBRAS DE BERNSTEIN

## II.1 - ÁLGEBRAS DE BERNSTEIN

Em uma série de artigos publicados em 1923-24, S. Bernstein estudou condições necessárias para garantir que uma população atinja o estado de equilíbrio após uma geração ([10], [11],[12]). Mais recentemente, J. Ljubič ([7]) investigou profundamente os problemas deixados por S. Bernstein. Finalmente, o nome "Álgebras de Bernstein" foi dado por P. Holgate ([8]) a uma classe de álgebras báricas que estão muito relacionadas com os problemas estudados por Bernstein e Ljubič. Mostraremos como elas provêm dos problemas estudados por Bernstein e Ljubič.

O problema da estacionaridade proposto por Bernstein é o seguinte. Consideremos uma população infinitamente grande com gerações discretas e sejam $a_0,a_1,\dots,a_m$ $(m\geq 1)$ os genótipos desta população. Para descrever esta população devemos dizer, em cada geração, quais são as porcentagens, presentes na população, dos genótipos $a_0,a_1,\dots,a_m$. Se $\alpha_i$ representa a porcentagem do genótipo $a_i$ em uma dada geração, o estado desta população é dado pela $(m+1)$-upla $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m)$, onde cada $\alpha_i\geq 0$ e $\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_m = 1$. Assim, o estado da população naquela geração é dado pelo ponto $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ de $\mathbb{R}^{m+1}$, que em realidade pertence ao simplexo $\overline{\gamma}_m$ definido por:

$\overline{\gamma}_m = \{(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ e } \alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_m = 1\}.$

Na geração seguinte, o estado da população muda, sendo agora dado por outro ponto $(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_m)$ de $\overline{\gamma}_m$. Cada $\beta_i$ é uma função bilinear de $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, dado por $\beta_i = \sum_{j,k=0}^{m} \alpha_{jki}\alpha_j\alpha_k$, onde $\alpha_{jki} \geq 0$ e $\alpha_{jk0}+\alpha_{jk1}+\ldots+\alpha_{jkm} = 1$ $(j,k=0,1,\ldots,m)$, pelas leis de hereditariedade. Para j e k fixos, o número $\alpha_{jki}$ é a probabilidade de o zigoto $a_j a_k$ segregar o gameta $a_i$. Assim, fica definido um operador (dito operador quadrático) $\overline{\Psi}:\overline{\gamma}_m \to \overline{\gamma}_m$ dado por $\overline{\Psi}(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m) = (\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_m)$, que descreve a passagem de uma geração à outra. Inversamente, dado um operador $\overline{\Psi}:\overline{\gamma}_m \to \overline{\gamma}_m$, podemos pensar em uma população que evolui de acordo com $\overline{\Psi}$, isto é, a passagem de uma geração à geração seguinte é dada por $\overline{\Psi}$. Portanto, o problema de classificar as populações com a propriedade de atingir o estado de equilíbrio na n-ésima geração é equivalente ao problema de classificar os operadores $\overline{\Psi}$ tais que $\overline{\Psi}^{n+1} = \overline{\Psi}^n$ onde $\overline{\Psi}^n = \overline{\Psi}\circ\ldots\circ\overline{\Psi}$ (n vêzes). Vamos nos restringir ao caso dos operadores $\overline{\Psi}$ tais que $\overline{\Psi}^2 = \overline{\Psi}$. Isto porque a tal operador corresponde uma população que atinge o equilíbrio na segunda geração, isto é, uma população que satisfaz a lei de Hardy-Weinberg. Dizemos que uma população satisfaz o <u>princípio</u> de <u>estacionaridade</u> de <u>Bernstein</u> se o operador $\overline{\Psi}$ correspondente a ela satisfaz a equação $\overline{\Psi}^2 = \overline{\Psi}$.

Apenas para dar uma referência ao leitor, mencionamos que os trabalhos de Bernstein consistem em determinar todos os operadores tais que $\overline{\Psi}^2 = \overline{\Psi}$, quando m=2. No caso m>2 ele encontrou duas classes de populações que satisfazem o princípio de estacionaridade de Bernstein. O trabalho de Ljubič consistiu em encontrar uma forma canônica para $\bar{\Psi}$ , com hipóteses adicionais.

Voltemos agora à situação descrita acima e suponhamos $\bar{\Psi}$ um operador quadrático, isto é, $\bar{\Psi}(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m) = (\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_m)$ onde $\alpha_0+\ldots+\alpha_m = \beta_0+\ldots+\beta_m = 1$ , $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ $(j=0,\ldots,m)$. Consideremos o espaço vetorial A gerado pelos símbolos $a_0, a_1, \ldots, a_m$ e o seu subconjunto

$$\gamma_m = \{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i a_i \ : \ \alpha_i \geq 0 \ , \ \alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_m = 1\}$$

Seja $\Psi:\gamma_m \to \gamma_m$ a aplicação definida por $\Psi(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i a_i) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i a_i$.

Podemos estender canonicamente a aplicação $\Psi$ a um operador linear de A, que denotaremos também por $\Psi$. O operador linear $\Psi:A \to A$ define uma multiplicação em A dada por:

$$xy = \frac{1}{2} (\Psi(x+y) - \Psi(x) - \Psi(y)) \ ,$$

onde x e y são elementos arbitrários de A.

Seja $\omega:A \to \mathbb{R}$ a forma linear definida por $\omega(a_i) = 1$ $(0 \leq i \leq m)$. Segue da definição de $\Psi$ e da definição dos $\beta_i$ que $\omega\circ\Psi(x) = (\omega(x))^2$, para todo x em A. Logo, para todo x e y em A, temos:

$$\begin{aligned}
\omega(xy) &= \omega[\frac{1}{2} (\Psi(x+y) - \Psi(x) - \Psi(y))] = \\
&= \frac{1}{2}[\omega\circ\Psi(x+y) - \omega\circ\Psi(x) - \omega\circ\Psi(y)] = \\
&= \frac{1}{2}[(\omega(x+y))^2 - (\omega(x))^2 - (\omega(y))^2] = \omega(x)\omega(y).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $\omega$ é um homomorfismo de álgebras e, portanto, a álgebra A é bárica.

Se o operador $\overline{\Psi}$ satisfaz a condição $\overline{\Psi}^2 = \overline{\Psi}$ então

$$[\Psi(x)]^2 = [\omega(x)]^2\,\Psi(x) \quad ,$$

para todo x em A. De fato, se $\omega(x) = 1$ ou $\omega(x) = 0$ temos $\Psi^2(x) = \Psi(x)$ e $\Psi^2(x) = 0$, respectivamente. Suponha, então, que $\omega(x) \neq 0$. De

$$\left[\Psi\left(\frac{x}{\omega(x)}\right)\right]^2 = \Psi\left(\frac{x}{\omega(x)}\right)$$

segue que

$$\frac{[\Psi(x)]^2}{[\omega(x)]^4} = \frac{\Psi(x)}{[\omega(x)]^2} \quad ,$$

já que $\Psi$ é um operador quadrático e, logo, $[\Psi(x)]^2 = [\omega(x)]^2\Psi(x)$.

Assim, partindo de um operador $\overline{\Psi}:\overline{\gamma}_m \to \overline{\gamma}_m$ que satisfaz a condição $\overline{\Psi}^2 = \overline{\Psi}$ , construímos uma álgebra bárica com função peso $\omega$ que tem a seguinte propriedade:

$$[\Psi(x)]^2 = [\omega(x)]^2\,\Psi(x) \quad ,$$

para todo x em A, onde $\Psi$ é o operador linear de A definido acima. Esta construção motiva a seguinte definição devida a P. Holgate.

<u>DEFINIÇÃO 2.1</u> - Seja A uma álgebra (sobre $\mathbb{R}$) comutativa, bárica, com função peso $\omega$. Dizemos que A é uma <u>álgebra de Bernstein</u> (ou uma álgebra que satisfaz o princípio de estacionaridade de Bernstein) se para todo x em A , $x^{(3)} = [\omega(x)]^2\, x^2$ , onde $x^{(3)} = x^{(2)}x^{(2)} = x^2x^2$.

<u>Observação</u>: Conforme vimos acima, a cada operador $\overline{\Psi}:\overline{\gamma}_m \to \overline{\gamma}_m$ tal

que $\overline{\Psi}^2 = \overline{\Psi}$ podemos associar uma álgebra de Bernstein de dimensão m+1. Inversamente, dada uma álgebra de Bernstein de dimensão m+1, podemos definir o operador $\Psi$ de $\gamma_m$ em $\gamma_m$ por $\Psi(x) = x^2$. Assim, podemos substituir o problema de "classificar os operadores $\overline{\Psi}$ tais que $\overline{\Psi}^2 = \overline{\Psi}$" por "classificar as álgebras de Bernstein".

Exemplo 2.1 - A álgebra gamética de uma população diplóide com n+1 alelos, satisfaz a equação polinomial $x^2 = \omega(x)x$, conforme vimos anteriormente. Resulta daí que $x^{(3)} = x^2x^2 = \omega(x)x\ \omega(x)x = [\omega(x)x]^2$.

Exemplo 2.2 - A álgebra zigótica de uma população diplóide com n+1 alelos, isto é, a duplicada da álgebra gamética da mesma população, satisfaz a equação $x^{(3)} = \omega^2(x)x^2$ (mas não a equação $x^2 = \omega(x)x$, veja teorema 2.9).

Os problemas que surgem naturalmente após a definição desta classe de álgebras são:

1. Estudo das propriedades elementares destas álgebras.
2. Determinação de sua estrutura.
3. Cálculo de seus idempotentes.
4. Comparação com outras classes de álgebras báricas.
5. Classificação destas álgebras.

## II.2 - TEOREMA DE ESTRUTURA; TIPO

Conforme vimos no capítulo I, exemplo 1.6, uma álgebra bárica pode admitir mais de uma função peso. No entanto, isto não ocorre com as álgebras de Bernstein.

PROPOSIÇÃO 2.1 - Toda álgebra de Bernstein possui uma única função peso.

Prova: Seja $\omega$ a função peso da álgebra de Bernstein $A$ e $\phi : A \to R$ outro homomorfismo não nulo de álgebras. Então para todo $x \in \operatorname{Ker}\omega$ temos $x^2x^2 = \omega^2(x)x^2 = 0$. Daí vem, $\phi(x^2x^2) = (\phi(x))^2(\phi(x))^2 = \phi(x)^4 = 0$, donde $\phi(x) = 0$, ou seja $\operatorname{Ker}\omega \subset \operatorname{Ker}\phi$. Por outro lado, se $y_0 \in A$ e $\omega(y_0) = 1$, então $A = \langle y_0 \rangle \oplus \operatorname{Ker}\omega$, onde $\langle y_0 \rangle$ é o subespaço gerado por $y_0$. Consideremos $x = y_0^2 - y_0$. Temos $\omega(x) = (\omega(y_0))^2 - \omega(y_0) = 1 - 1 = 0$ e portanto $x \in \operatorname{Ker}\omega$ e daí $x \in \operatorname{Ker}\phi$. Assim
$0 = \phi(x) = \phi(y_0^2 - y_0) = (\phi(y_0))^2 - \phi(y_0) = \phi(y_0)[\phi(y_0) - 1]$. Não podemos ter $\phi(y_0) = 0$ senão, sendo todo elemento $z$ de $A$ da forma $z = \alpha y_0 + u$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in \operatorname{Ker}\omega$), teríamos $\phi(z) = \alpha\phi(y_0) + \phi(u) = 0$ e $\phi$ seria identicamente nula, o que não pode ser. Resta $\phi(y_0) = 1$. Daí para todo $z = \alpha y_0 + u$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in \operatorname{Ker}\omega$, temos $\phi(z) = \omega(z) = \alpha$, isto é $\phi = \omega$.

PROPOSIÇÃO 2.2 - Seja $A$ uma álgebra ponderada com função peso $\omega$. Se o quadrado de todo elemento de peso 1 é um idempotente, então $A$ é uma álgebra de Bernstein.

Prova: Dado $y \in A$, devemos mostrar que $y^2y^2 = \omega^2(y)y^2$. Se $\omega(y) \neq 0$ então $z = \frac{y}{\omega(y)}$ satisfaz por hipótese $z^2z^2 = z^2$, pois $\omega(z) = 1$.

Substituindo temos $\frac{y^2}{\omega^2(y)} \frac{y^2}{\omega^2(y)} = \frac{y^2}{\omega^2(y)}$, ou seja, $y^2y^2 = \omega^2(y)y^2$.

Suponhamos, agora, $\omega(y) = 0$ e tomamos $e = x^2$ com peso $\omega(x) = 1$. Sendo $x^2x^2 = x^2$, então $\underline{e}$ é idempotente. Para todo $t \in \mathbb{R}$ o elemento $e + ty$ tem peso 1. Por hipótese $(e + ty)^2(e + ty)^2 = (e + ty)^2$. Desenvolvendo temos o polinômio em $t$:

$$t^4(y^2)^2 + t^3[(4(ey)y^2] + t^2[4(ey)^2 + 2ey^2 - y^2] + t[4e(ey) - 2ey] = 0.$$

Como $t$ é arbitrário em $\mathbb{R}$, os coeficientes das potências de $t$ são nulos. Em particular $(y^2)^2 = y^{(3)} = 0$.

Um problema importante na teoria das álgebras genéticas é a determinação dos seus idempotentes, pois a cada idempotente corresponde um estado de equilíbrio da população descrita por aquela álgebra.

PROPOSIÇÃO 2.3 - Em uma álgebra de Bernstein A, com função peso $\omega$, os idempotentes são os elementos $\underline{e}$ da forma $e = x^2$ com $\omega(x) = 1$ e o conjunto de idempotentes de A é não vazio.

Prova: Clara, sendo omitida.

Dado um idempotente $\underline{e}$ na álgebra de Bernstein A, podemos considerar a decomposição de A, $A = \langle e \rangle \oplus \operatorname{Ker}\omega$, já que

$\omega(e) = 1$. O próximo teorema poderia ser chamado a decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente e.

TEOREMA 2.1 - Sejam A uma álgebra de Bernstein com função peso $\omega$ e $\underline{e}$ um idempotente de A. Consideremos os subespaços vetoriais $A_0 = \langle e \rangle = \{\alpha e : \alpha \in \mathbb{R}\}$ , $A_1 = \{ey : y \in \operatorname{Ker}\omega\}$ e $A_2 = \{x \in \operatorname{Ker}\omega : ex = 0\}$. Então:

1) $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ (soma direta de subespaços vetoriais) e $eu = \frac{1}{2} u$ para todo $u \in A_1$.

2) As seguintes identidades são válidas para todo $u \in A_1$ e $v \in A_2$ :

2.1) $u^2 u^2 = 0$

2.2) $v^2 v^2 = 0$

2.3) $u^2(uv) = 0$

2.4) $v^2(uv) = 0$

2.5) $uu^2 = 0$

2.6) $u(uv) = 0$

2.7) $2(uv)^2 + u^2 v^2 = 0$

2.8) $uv^2 = 0$

3) Para todo $x = \omega(x)e + u + v$ , $(u \in A_1,\ v \in A_2)$ temos $x^2 = \omega^2(x)e + (\omega(x)u + 2uv + v^2) + u^2$.

4) As seguintes relações de inclusão são válidas:

4.1) $A_1A_2 \subset A_1$

4.2) $A_1A_1 \subset A_2$

4.3) $A_2A_2 \subset A_1$

4.4) $A_1A_2^2 = <0>$

Prova: 1. Como $e$ é um idempotente temos $\omega(e) = 1$ e, logo, $A = A_0 \oplus N$, onde $N = \mathrm{Ker}\omega$. Vamos mostrar que $N = A_1 \oplus A_2$. Consideremos os elementos de A da forma $x = e + \alpha y$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $y \in N$. O peso do elemento x é 1 e portanto $x^2x^2 = x^2$. Substituindo e desenvolvendo (como fizemos na proposição 2.2) temos a equação:

$$\alpha[4e(ey) - 2ey] + \alpha^2[4(ey)^2 + 2ey^2 - y^2] + \alpha^3(4eyy^2) + \alpha^4 y^2 y^2 = 0.$$

Temos, portanto, um polinômio na variável $\alpha$ que é nulo. Logo, os coeficientes das potências de $\alpha$ são nulos. Daí temos:

1) $2e(ey) - ey = 0$

2) $4(ey)^2 + 2ey^2 - y^2 = 0$

3) $ey\, y^2 = 0$

4) $y^2\, y^2 = 0$

para todo y em N. Seja $L: N \to N$ tal que $L(x) = 2ex$. Temos $L^2(x) = L(2ex) = 2L(ex) = 2(2e(ex)) = 2ex = L(x)$, por 1). Portanto, $L^2 = L$. Sendo L uma projeção de N, temos $N = \mathrm{Im}\, L \oplus \mathrm{Ker}\, L$. Todo elemento x pertencente a N pode ser escrito como $x = 2ex + (x-2ex) \in \mathrm{Im}\, L \oplus \mathrm{Ker}\, L$. Assim, $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$. De 1) segue $eu = \frac{1}{2}u$, para todo $u \in A_1$. Assim, fica provado a primeira parte.

2. Vamos usar o fato de $N = A_1 \oplus A_2$ e linearizar as identidades 3) e 4).

Fazendo $y = \alpha u + \beta v$ $(u \in A_1, v \in A_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$ em 3) obtemos

$$\frac{\alpha^3}{2} u u^2 + \alpha^2 \beta u(uv) + \alpha\beta^2 uv^2 = 0,$$

para todo $\alpha$ e $\beta$ em $\mathbb{R}$. Logo, $uu^2 = 0$, $u(uv) = 0$ e $uv^2 = 0$.

Analogamente, usando a identidade 4) obtemos:

$$\alpha^4 u^2 u^2 + 4\alpha^3\beta\, 4u^2(uv) + \alpha^2 \beta^2 (4(uv)^2 + 2u^2 v^2)) + 4\alpha\beta^3(uv)v^2 +$$

$$+ \beta^4 v^2 v^2 = 0 ,$$

para todo $\alpha,\beta$ em $\mathbb{R}$. Daí segue que $u^2u^2 = 0$, $v^2v^2 = 0$, $u^2(uv) = 0$, $2(uv)^2 + u^2v^2 = 0$ e $(uv)v^2 = 0$.

3. Fazendo $y = \alpha u+\beta v$ $(u\in A_1$, $v\in A_2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ obtemos :

$$\alpha^2(2eu^2) + \alpha\beta(4e(uv) - 2uv) + \beta^2(2ev^2 - v^2) = 0 ,$$

para todo $\alpha,\beta$ em $\mathbb{R}$. Logo:

a) $eu^2 = 0$

b) $2e(uv) - uv = 0$

c) $2ev^2 - v^2 = 0$ ,

para todo $u$ em $A_1$ e $v$ em $A_2$.

Segue das identidades a), b) e c) que se $u\in A_1$ e $v\in A_2$ então $uv$ e $v^2$ pertencem a $A_1$ e $u^2$ pertence a $A_2$. Logo se a decomposição de $x$ em $A$ é $x = \omega(x)e + u + v$ então a decomposição de $x^2$ é

$$x^2 = \omega^2(x)e + (\omega(x)u + 2uv + v^2) + u^2 ,$$

já que $eu = \frac{1}{2} u$ e $ez = 0$.

4. Fazendo $u = u_1 + u_2$ $(u_1,u_2\in A_1)$ na identidade a) obtemos

$eu_1^2 + eu_2^2 + 2e(u_1u_2) = 0$, isto é, $e(u_1u_2) = 0$.

Isto mostra que $A_1A_1 \subset A_2$. Substituindo v por $v_1+v_2$ $(v_1,v_2 \in A_2)$ na identidade c) obtemos

$2ev_1^2 + 4e(v_1v_2) + 2ev_2^2 - v_1^2 - 2v_1v_2 - v_2^2 = 0$, ou seja ,

$2e(v_1v_2) = v_1v_2$

Logo, $A_2A_2 \subset A_1$.

De modo análogo, linearizando as identidades b) e 2.8 podemos mostrar que $A_1A_2 \subset A_1$ e $A_1A_2^2 = \langle 0 \rangle$.

Corolário: Sejam A uma álgebra de Bernstein, $\underline{e}$ um idempotente de A e $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ a decomposição de A relativa a $\underline{e}$. Então, os idempotentes de A são da forma $e+u+u^2$, onde u é um elemento arbitrário de $A_1$.

Prova: Seja $x = e + u + u^2$ com $u \in A_1$. Temos

$x^2 = (e+u+u^2)^2 = e + u + 2eu^2 + 2uu^2 + u^2 + u^2 = e + u + u^2 = x$. Logo, x é idempotente. Por outro lado, seja $x = e + u + v$ um idempotente em A. Então, $x^2 = x$, isto é,

$x^2 = e + (u + 2uv + v^2) + u^2 = e + u + v$. Pela unicidade da decomposição $v = u^2$ e $2uv + v^2 = 0$. Então, $x = e + u + u^2$.

TEOREMA 2.2 - (Recíproca). Seja A uma álgebra bárica com função peso $\omega$, que possui um idempotente $\underline{e}$ em relação ao qual temos a decomposição $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ , onde $A_0,A_1,A_2$ são definidos como antes e valem as partes 1), 2), 3) e 4) do teorema anterior. Então, A é uma álgebra de Bernstein.

Prova: Pela proposição 2.2, basta mostrar que $x^2x^2 = x^2$ para todo x em A com $\omega(x) = 1$. Seja $x = e + u + v$ com $u \in A_1$,

$v \in A_2$. Daí temos $x^2 = e + (u + 2uv + v^2) + u^2$ por 3). Também por 3), temos:

$x^2x^2 = e + [u + 2uv + v^2 + 2(u + 2uv + v^2)u^2 + u^2u^2] +$

$+ (u + 2uv + v^2)^2 = e + (u + 2uv + v^2) + 2uu^2 + 4u^2(uv) +$

$+ 2v^2u^2 + u^2u^2 + u^2 + 4(uv)^2 + v^2v^2 + 4u(uv) + 2uv^2 +$

$+ 4(uv)v^2$.

Usando 2) resta $x^2x^2 = e + (u + 2uv + v^2) + u^2 = x^2$.

Devemos agora relacionar as duas decomposições de uma álgebra de Bernstein, correspondentes a dois idempotentes de A. A proposição seguinte mostra como se comportam as componentes $A_0, A_1, A_2$ relativas aos dois idempotentes de A.

<u>PROPOSIÇÃO 2.4</u> - Seja A uma álgebra de Bernstein e suponhamos que $\underline{e}$ e $\underline{e}'$ sejam idempotentes de A. Sejam as decomposições $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ e $A = A'_0 \oplus A'_1 \oplus A'_2$ em relação a $\underline{e}$ e $\underline{e}'$ respectivamente. Então, existem $u_1$ em $A_1$ e $u_2$ em $A'_1$ tais que $e' = e + u_1 + u_1^2$, $e = e' + u_2 + u_2^2$,

$$ee' = e + \frac{1}{2} u_1 = e' + \frac{1}{2} u_2 \quad \text{e} \quad u_1^2 = u_2^2 = -u_1u_2.$$

<u>Prova</u>: Pelo corolário anterior temos que $e' = e + u_1 + u_1^2$ para algum $u_1$ de $A_1$ e do mesmo modo considerando a decomposição $A = A'_0 \oplus A'_1 \oplus A'_2$, $e = e' + u_2 + u_2^2$ para algum $u_2$ de $A'_1$. Logo, $ee' = e(e + u_1 + u_1^2) = e + \frac{1}{2} u_1$, já que $u_1^2$ pertence a $A_2$. Do mesmo modo, $ee' = e' + \frac{1}{2} u_2$. De $e + \frac{1}{2} u_1 = e' + \frac{1}{2} u_2$ temos que $e = e' + \frac{1}{2}(u_2 - u_1)$. Substi

tuindo $e' + u_2 + u_2^2 = e' + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_1$. Então $u_2 + u_2^2 = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)$ e do mesmo modo $u_1 + u_1^2 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2)$ , ou seja $u_2^2 = -\frac{1}{2}(u_1 + u_2) = u_1^2$ .

A parte 2) do teorema 2.1 dá $u^2u^2 = 0$. Então $(u_2 + u_1)^2 = 0$. Desenvolvendo temos $u_2^2 + u_1^2 = -2u_1u_2$ ou ainda $2u_2^2 = 2u_1^2 = -2u_1u_2$.

Quando tomamos dois idempotentes em A, determinamos duas decomposições de A em soma direta de subespaços, conforme está no enunciado da proposição 2.4. Como $\dim A_0 = \dim A_0' = 1$ vem que $\dim A_1 + \dim A_2 = \dim A_1' + \dim A_2' = \dim A - 1$. Mostremos agora que em realidade, $\dim A_1 = \dim A_1'$ , o que acarretará também $\dim A_2 = \dim A_2'$ .

Como todo idempotente $e'$ de A é da forma $e' = e + u + u^2$ com $u \in A_1$, podemos descrever todos os idempotentes de A com o "parâmetro" u. Portanto, a família de idempotentes de A é uma família r-paramétrica, onde $r = \dim A_1$. Como o conjunto de idempotentes de A é intrinseco a A, não podemos ter $\dim A_1 \neq \dim A_1'$.

Com isso temos o seguinte

<u>TEOREMA 2.3</u> - Seja A uma álgebra de Bernstein e $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ uma decomposição de A em relação a um idempotente $\underline{e}$ de A. Então, $\dim A_1$ e $\dim A_2$ são números invariantes de A.

TEOREMA 2.4 - Seja A um álgebra de Bernstein e $e$ um idempotente de A. Consideremos a decomposição de A em relação a $e$, $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$, e seja $C = A_0 \oplus A_1 \oplus A_1^2$. Então, C é um ideal de A, $A^2 = C$ e $C^2 = C$.

Prova: $A^2 = (A_0 \oplus A_1 \oplus A_2)^2 = A_0 + A_0A_1 + A_0A_2 + A_1^2 + A_1A_2 + A_2^2 = A_0 + A_1 + A_1^2$, pois $A_0A_2 = <0>$, $A_0A_1 = A_1$, $A_1A_2 \subset A_1$ e $A_2^2 \subset A_1$. Como $A_1^2 \subset A_2$ e $A_1 \cap A_2 = <0>$, temos $A^2 = A_0 \oplus A_1 \oplus A_1^2 = C$. Ainda $C^2C^2 = (A_0 \oplus A_1 \oplus A_1^2)^2 = A_0 + A_0A_1 + A_1^2 + A_0A_1^2 + A_1A_1^2 + (A_1^2)^2 = A_0 + A_1 + A_1^2$ pois $A_0A_1 = A_1$, $A_0A_1^2 = <0>$, $A_1A_1^2 \subset A_1$ e $A_1^2A_1^2 \subset A_1$. Logo $C^2 = A_0 \oplus A_1 \oplus A_1^2 = C$. Finalmente C é um ideal de A pois $AC \subset A^2 = C$.

Corolário: O número inteiro "dim C" é independente do idempotente $e$ fixado em A e, portanto, dim $A_1^2$ também é um invariante de A.

Prova: Basta observar que $C = A^2$.

PROPOSIÇÃO 2.5 - Seja A uma álgebra de Bernstein com função peso $\omega$ e F o sub-espaço gerado pelos elementos $x^2-\omega(x)x$, $x \in A$. Então:

1) F tem a representação $F = (A_1A_2 + A_2^2) \oplus A_2$ para toda decomposição $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$.

2) F é um ideal de A com $A \supseteq \mathrm{Ker}\omega \supseteq F \supseteq (\mathrm{Ker}\omega)^2$ e A/F é uma t-álgebra de posto dois.

<u>Prova</u>: 1) Seja $x = \omega(x)e + u + v$ em A. Então, $x^2 = \omega^2(x)e + (\omega(x)u + 2uv + v^2) + u^2$ e $x^2 - \omega(x)x =$ $= (2uv) + v^2) + (u^2 - \omega(x)v) = (2uv + v^2) + (u^2 - \omega(x)v) \in$ $\in (A_1A_2 + A_2^2) \oplus A_2$, pois $u^2 \in A_2$. Portanto, o subespaço F de A tem a decomposição $F = M \oplus A_2$, onde M é gerado pelos elementos $2uv + v^2$, $u \in A_1$ e $v \in A_2$. Vamos mostrar que $M = A_1A_2 + A_2^2$. Claramente $M \subseteq A_1A_2 + A_2^2$. Por outro lado, $2uv = [2(u + u_1)v + v^2] - (2u_1v + v^2)$ está em M e $2v_1v_2 = (v_1 + v_2)^2 - v_1^2 - v_2^2$ também está em M. Portanto, $A_1A_2 + A_2^2 \subseteq M$.

2) Como $AF = (A_0 \oplus A_1 \oplus A_2)[(A_1A_2 + A_2^2) \oplus A_2] =$ $A_0(A_1A_2 + A_2^2) + A_0A_2 + A_1(A_1A_2 + A_2^2) + A_1A_2 + A_2(A_1A_2 + A_2^2) +$ $+ A_2^2 \subseteq (A_1A_2 + A_2^2) \oplus A_1^2 \subseteq (A_1A_2 + A_2^2) \oplus A_2$, F é um ideal de A.

Como $(\mathrm{Ker}\omega)^2 = (A_1 \oplus A_2)^2 = (A_1A_2 + A_2^2) \oplus A_1^2 \subseteq$ $\subseteq (A_1A_2 + A_2^2) \oplus A_2 = F$, valem as inclusões $(\mathrm{Ker}\omega)^2 \subset F \subseteq$ $\subseteq \mathrm{Ker}\omega \subseteq A$. Seja agora $\overline{\omega}: A/F \to \mathbb{R}$ definida por $\overline{\omega}(x+F) = \omega(x)$, para todo $x + F$ em $A/F$.

Como $F \subseteq \mathrm{Ker}\omega$, $\overline{\omega}$ está bem definida. Daí $(x + F)^2 -$ $- \overline{\omega}(x + F)(x + F) = (x^2 + F) - \omega(x)(x^2 + F) = (x^2 + F) -$ $- (\omega(x)x + F) = (x^2 - \omega(x)x) + F = F$.

O subespaço F de A depende somente de $\omega: A \to \mathbb{R}$ que é unicamente determinado. Portanto, dim F é um número característico de A. Com isto temos o seguinte corolário.

Corolário: Seja A uma álgebra de Bernstein e $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ uma decomposição de A em relação a um idempotente $\underline{e}$ de A. Então, $\dim(A_1A_2 + A_2^2)$ é um número invariante de A.

Dada uma álgebra de Bernstein A podemos associar a ela quatro números invariantes: $\dim A_1$ , $\dim A_2$ , $\dim A_1^2$ , $\dim(A_1A_2 + A_2^2)$. Esses invariantes de A serão usados para classificar as álgebras de Bernstein de dimensão 3. Isto será feito no último parágrafo.

DEFINIÇÃO 2.1 - Seja A uma álgebra de Bernstein decomposta em $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ em relação a um idempotente $\underline{e}$ de A. Chamamos de tipo de A o par ordenado de inteiros $(\dim A_1 + 1 , \dim A_2)$ . Assim, quando dizemos que A é de tipo $(r + 1,d)$ , temos $r = \dim A_1$ , $d = \dim A_2$ e $r + d = \dim A$. Há, portanto, m+1 tipos de álgebras de Bernstein de dimensão m+1. Nos próximos teoremas vamos reencontrar a nossa já conhecida álgebra gamética de uma população com n+1 alelos.

TEOREMA 2.5 - Seja A uma álgebra de Bernstein de dimensão m+1, de tipo (1,m). Então, A tem exatamente um idempotente $\underline{e}$ e a multiplicação em A é dada por $xy = \omega(x)\omega(y)e$ , para todo x,y em A.

Prova: Dizer que A é do tipo (1,m) equivalente a dizer que $A_1 = \langle 0 \rangle$ na decomposição de A correspondente a um idempotente $\underline{e}$ de A. Os idempotentes de A são da forma $e + u + u^2$ com $u \in A_1$. Como $A_1 = \langle 0 \rangle$ só há um idempotente. Para cada

$x, y$ em $A$, temos $x = \omega(x)e + v_1$ e $y = \omega(y)e + v_2$ com $v_1$ e $v_2 \in A_2$ e portanto

$xy = \omega(x)\omega(y)e + \omega(x)e\, v_2 + \omega(y)e\, v_1 + v_1v_2 = \omega(x)\omega(y)e$, pois $ev_2 = ev_1 = 0$ $(v_1 e v_2)$ e $v_1v_2 \in A_1 = \langle 0 \rangle$.

Corolário: Para cada m, existe uma única (a menos de isomorfismo) álgebra de Bernstein de dimensão $m+1$ e tipo $(1,m)$.

Ljubic chamou esta álgebra de constante e Holgate chamou-a de equipotente. O outro caso extremo é dado pelo seguinte teorema.

TEOREMA 2.6 - Seja $A$ uma álgebra de Bernstein de dimensão $m+1$ e tipo $(m+1,0)$. Então, $A$ é isomorfa a $G(m+1,2)$, a álgebra gamética da herança mendeliana com $m+1$ alelos.

Prova: Como $A$ é de tipo $(m+1,0)$, temos $\dim A_1 = m$ e $A_2 = \langle 0 \rangle$, ou seja, $A = A_0 \oplus A_1$. Os idempotentes de $A$ são da forma $e + u$, onde $e$ é um idempotente fixado e $u \in A_1$. Como $A = A_0 \oplus A_1$, todo elemento de $A$ de peso um é idempotente. Dados $x, y$ em $A$ temos $x = \omega(x)e + u_1$ e $y = \omega(y)e + u_2$. Como $u_1u_2 \in A_2 = \langle 0 \rangle$, temos

$$xy = [(\omega(x)e + u_1][\omega(y)e + u_2] = \omega(x)\omega(y)e + \omega(x)\frac{1}{2}u_2 + $$
$$+ \omega(y)\frac{1}{2}u_2 = \frac{1}{2}\omega(x)(\omega(y)e + u_2) + \frac{1}{2}\omega(y)(\omega(x)e + u_1) =$$
$$= \frac{1}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x).$$ Esta é exatamente a lei de multiplicação na álgebra gamética da herança mendeliana simples com $m+1$ alelos.

Corolário: A álgebra de Bernstein de dimensão m+1 e tipo (m+1,0), coincide com a t-álgebra de dimensão m+1 e posto 2.

## II.3 - ÁLGEBRAS DE BERNSTEIN NORMAIS

Vamos começar este parágrafo introduzindo três condições adicionais sobre uma álgebra de Bernstein, com o objetivo de torná-las mais regulares. Estas três condições são em realidade apenas uma, pois são equivalentes entre si.

TEOREMA 2.7 - Sejam A uma álgebra de Bernstein com função peso $\omega$ e $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ a decomposição de A em relação ao idempotente e de A. As seguintes condições são equivalentes:

1) Para todo x,y em A, $\omega(x)xy = x^2y$

2) $A_1A_2 = <0>$ e $A_2^2 = <0>$

3) Para todo $x = \omega(x)e + u + v$, $u \in A_1$ e $v \in A_2$ temos: $x^2 = \omega^2(x)e + \omega(x)u + u^2$.

Antes de passar à demonstração, observemos que a condição 1) é válida na álgebra gamética da herança mendeliana simples, como decorrência da igualdade $x^2 = \omega(x)x$. Nesta mesma álgebra $A_2 = <0>$.

Prova: 1)$\Rightarrow$ 2) Sejam $x = e + u + v$ e $y = e$. Então $\omega(x)xy = e + \frac{1}{2}u$ e $x^2y = e + \frac{1}{2}u + uv + \frac{1}{2}v^2$ e portanto

$uv + \frac{1}{2} v^2 = 0$. Para $u = 0$ temos $v^2 = 0$. Consideremos $v = v_1 + v_2$ com $v_1$ e $v_2 \in A_2$. Então $(v_1 + v_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 = 0$. Daí resta $v_1v_2 = 0$ ou seja $A_2^2 = \langle 0 \rangle$. Voltando a $uv + \frac{1}{2} v^2 = 0$, resta $uv = 0$ ou seja $A_1A_2 = \langle 0 \rangle$.

2) $\Rightarrow$ 3) Qualquer $x$ de $A$ se escreve como $x = \omega(x)e + u + v$, com $u \in A_1$ e $v \in A_2$. Daí $x^2 = \omega^2(x)e + (\omega(x)u + 2uv + v^2) + u^2$. Por hipótese $uv = v^2 = 0$ e portanto $x^2 = \omega^2(x)e + \omega(x)u + u^2$.

3) $\Rightarrow$ 1) Dado $x = \omega(x)e + u + v$ em $A$ então $x^2 = \omega^2(x)e + (\omega(x)u + 2uv + v^2) + u^2$ (pelo teorema 2.1) e $x^2 = \omega^2(x)e + \omega(x)u + u^2$ (por hipótese). Portanto $2uv + v^2 = 0$. O resto faz-se como acima em 1) $\Rightarrow$ 2).

DEFINIÇÃO 2.3 - Uma álgebra de Bernstein $A$ é chamada normal se em $A$ verifica-se uma das três condições do teorema 2.7 (e portanto todas as três condições).

Observemos que as álgebras de Bernstein de tipos extremos $(1,m)$ e $(m+1,0)$ são normais. No primeiro caso $A_1 = \langle 0 \rangle$ e logo $A_1A_2 = \langle 0 \rangle$ e como $A_2^2 \subset A_1$ vem que $A_2^2 = \langle 0 \rangle$. No segundo $A_2 = \langle 0 \rangle$ e então $A_1A_2 = \langle 0 \rangle$ e $A_2 = \langle 0 \rangle$.

A álgebra de Bernstein $A$ de tipo $(1,m)$ tem apenas um idempotente $e$ e $xy = \omega(x)\omega(y)e$ para todo $x,y$ em $A$. Em particular, $x^2 = \omega^2(x)e$ e daí $x^3 = x^2x = \omega^2(x)ex = \omega^2(x)\omega(x)e = \omega(x)x^2$, que dá a t-equação principal de $A$. Da maneira mais geral temos o seguinte teorema.



TEOREMA 2.8 - Toda álgebra de Bernstein normal $A$ é uma t-álgebra especial cuja t-equação principal é $x^2 = \omega(x)x$ ou $x^3 = \omega(x)x^2$. Além disso as t-raízes de A são 1, $\frac{1}{2}$ e 0, com multiplicidades respectivamente iguais a 1, r e d, onde (r+1,d) é o tipo de A.

Prova: Seja $\omega$ a função peso de A e $\underline{e}$ um idempotente de A em relação ao qual temos a decomposição $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$. Então $N = A_1 \oplus A_2$. Daí $N^2 = (A_1 \oplus A_2)^2 = (A_1A_2 + A_2^2) \oplus A_1^2 = A_1^2$, pois A é normal. Daí $AN^2 = AA_1^2 = (A_0 \oplus A_1 \oplus A_2)A_1^2 = A_0A_1^2 + A_1A_1^2 + A_2A_1^2 = 0$ e portanto $A_1^2$ é um ideal de A. Além disso, $N^3 = (A_1 \oplus A_2)A_1^2 = A_1A_1^2 + A_2A_1^2 = 0$. Assim as potências principais de $A_1 \oplus A_2 = \mathrm{Ker}\,\omega$ são ideais de A. Resta exibir uma base canônica para A. Sejam $\{u_1,\ldots,u_r\}$ uma base de $A_1$ e $\{v_1,\ldots,v_d\}$ uma base de $A_2$. Logo, $\{e,u_1,\ldots,u_r,v_1,\ldots,v_d\}$ é uma base de A. Temos $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$ $(i=1,2,\ldots,r)$ e $ev_j = 0$ para todo $j=1,2,\ldots,d$. Os produtos $u_iv_j$ são nulos, bem como os produtos $v_sv_j$ $(i=1,\ldots,r\ ;\ s,j=1,2,\ldots,d)$. Ainda mais, como $A_1^2 \subset A_2$ então cada produto $u_iu_j$ é combinação linear de $v_1,v_2,\ldots,v_d$. A aplicação $L_e\colon A \to A$ dada por $L_e(x) = ex$ tem os valores próprios 1, $\frac{1}{2}$ e 0 com multiplicidades 1,r e d, respectivamente; o que prova a última afirmação do teorema. Resta calcular a t-equação principal de A.

Dado $x = \omega(x)e + u + v$ com $u \in A_1$, $v \in A_2$, como A é normal temos $x^2 = \omega^2(x)e + \omega(x)u + u^2$. Daí

$x^2x = x^3 = \omega^3(x)e + \omega^2(x)u + \omega(x)u^2 = \omega(x)x^2$. Então a t-equação principal de A é $x^3 = \omega(x)x^2$ ou $x^2 = \omega(x)x$.

<u>Observação</u>: Este teorema mostra que as álgebras de Bernstein normais constituem uma sub classe muito pequena da classe das t-álgebras; mas no caso das álgebras de Bernstein de dimensão três são as álgebras que mais se aproximam das outras álgebras estudadas.

<u>PROPOSIÇÃO 2.6</u> - Seja A uma álgebra de Gonshor de dimensão três, que possui um idempotente $c_0$. Se as t-raízes de A são $\lambda_0 = 1$ , $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = 0$, então A é uma álgebra de Bernstein.

<u>Prova</u>: Sejam $\{c_0, c_1, c_2\}$ uma base canônica de A e $x = c_0 + x_1c_1 + x_2c_2$ um elemento de peso 1 em A. Daí temos

$x^2 = c_0 + x_1c_1 + (2\lambda_{012}x_1 + \lambda_{112}x_1^2)c_2$ e

$x^2x^2 = c_0 + x_1c_1 + (2\lambda_{012} + \lambda_{112}x_1^2)c_2 = x^2$.

<u>TEOREMA 2.9</u> - Seja A uma álgebra (sobre $\mathbb{R}$) ponderada. Então A é uma t-álgebra com t-equação principal $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ (isto é, com t-raízes $\lambda_0 = 1$ e $\lambda_1 = 0$) se e somente se:

1) A não é isomorfa a álgebra gamética $G(n,2)$

2) A é uma álgebra de Bernstein

3) Se considerarmos uma decomposição de A em relação a um idempotente $\underline{e}$ de A, $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ , temos $A_2^2 = \langle 0 \rangle$ e $(uv)v = 0$, para $u \in A_1$ e $v \in A_2$.

<u>Prova</u>: Seja $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ a t-equação principal de

A. Então A não é isomorfa à álgebra gamética, com n alelos (ver o corolário do teorema 2.6). O elemento $\alpha x + \beta y$ com $\alpha,\beta$ em $\mathbb{R}$ e x,y em A satisfaz a equação $(\alpha x + \beta y)^3 - [\alpha\omega(x) + \beta\omega(y)](\alpha x + \beta y)^2 = 0$. Desenvolvendo e pondo em evidência as potências de $\alpha$ e $\beta$, temos

$$\alpha^3[x^3 - \omega(x)x^2] + \alpha^2\beta[2x(xy) + x^2y - 2\omega(x)xy - \omega(y)x^2] +$$
$$+ \alpha\beta^2[xy^2 + 2y(xy) - \omega(x)y^2 - 2\omega(y)xy] + \beta^3[y^3 - \omega(y)y^2] = 0,$$

que é o polinômio homogêneo em $\alpha,\beta$. Como $\alpha,\beta$ são arbitrários em $\mathbb{R}$ os termos entre colchetes são nulos. Em particular, $2x(xy) + x^2y - 2\omega(x)xy - \omega(y)x^2 = 0$. Para $y = x^2$, temos $2x^4 + (x^2)^2 - 2\omega(x)x^3 - \omega^2(x)x^2 = 0$, ou seja, $2x(x^3 - \omega(x)x^2) + x^2x^2 - \omega^2(x)x^2 = 0$, isto é, $x^2x^2 = \omega^2(x)x^2$ pois $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$. Portanto, A é uma álgebra de Bernstein.

Consideremos uma decomposição de A em relação a um idempotente $\underline{e}$ de A, $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ e seja $x = \omega(x)e + u + v$ com $u \in A_1$ e $v \in A_2$. Substituindo em $x^3 = \omega(x)x^2 = 0$ resta $-\frac{1}{2}\omega(x)v^2 + 2(uv)v + v^3 + u^2v = 0$. Como $\omega(x)$ é arbitrário em $\mathbb{R}$, $v^2 = 0$. Considerando $v = v_1 + v_2$ e substituindo em $v^2 = 0$ e desenvolvendo, resta $2v_1v_2 = 0$, ou seja $v_1v_2 = 0$. Portanto $A_2^2 = \langle 0 \rangle$. Voltando a(*) resta $2(uv)v = 0$, pois $u^2 \in A_2$. Reciprocamente, seja A uma álgebra ponderada satisfazendo as condições 1), 2) e 3). A t-equação principal de A não é $x^2 - \omega(x)x = 0$. Seja $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ uma decomposição de A em relação a um idempotente $\underline{e}$ de A. Todo elemento x de A escreve-se como $x = \omega(x)e + u + v$.

Daí $x^2 = \omega^2(x)e + (\omega(x)u + 2uv) + u^2$ pois $A_2^2 = <0>$. Daí $x^3 = x^2x = \omega^3(x)e + [\omega^2(x)u + 2\omega(x)uv] + \omega(x)u^2 + 2(uv)v + vu^2$ pois A é uma álgebra de Bernstein. Como $u^2$ pertence a $A_2$ e vale 3), $x^3 = \omega^3(x)e + [\omega^2(x)u + 2\omega(x)uv] + \omega(x)u^2 = \omega(x)x^2$.

## II.4 - ÁLGEBRAS DE BERNSTEIN DE DIMENSÃO 3 : CLASSIFICAÇÃO

Vamos agora classificar as álgebras de Bernstein de dimensão três começando com os casos mais simples, que são as álgebras do tipo (1,2) e (3,0).

Já vimos que se A é do tipo (1,2), $A = <e> \oplus A_2$ é a única decomposição de A em relação ao único idempotente $\underset{\sim}{e}$ de A (ver teorema 2.5). Para todo x,y de A, $x = \omega(x)e + z$, $y = \omega(y)e + z_1$, $xy = \omega(x)\omega(y)e$. Esta é a álgebra chamada constante.

Se A é do tipo (3,0), então $A = <e> \oplus A_1$ para algum idempotente $\underset{\sim}{e}$ de A e, pelo teorema 2.6, $xy = \frac{1}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x)$, para todo x,y em A. Obtemos aqui $A \simeq G(3,2)$.

Vejamos quais são as álgebras do tipo (2,1). Se A é do tipo (2,1) podemos ter $\dim(A_1A_2 + A_2^2) = 0$ ou $\dim(A_1A_2 + A_2^2) = 1$.

a) Suponhamos que $\dim(A_1A_2 + A_2^2) = 0$. Então $A_1A_2 + A_2^2 = <0>$ e portanto A é normal. Consideremos uma decomposição de A, $A = <e> \oplus <c_1> \oplus <c_2>$ onde $A_1 = <c_1>$, $A_2 = <c_2>$. Então $e^2 = e$, $ec_1 = \frac{1}{2}c_1$, $ec_2 = 0$, $c_1c_2 = c_2^2 = 0$ (pois A é normal). Como $A_1^2 \subset A_2$ temos $c_1^2 = \alpha c_2$. Se $\alpha = 0$, dim $A_1^2 = <0>$ e temos a tábua de multiplicação:

| | $e$ | $c_1$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $\frac{1}{2}c_1$ | $0$ |
| $c_1$ | | $0$ | $0$ |
| $c_2$ | | | $0$ |

Se $\alpha \neq 0$ dim $A_1^2 = 1$ , $A_1^2 = A_2 = <c_2>$. Façamos a mudança $\bar{c}_2 = \alpha c_2$ , para que $c_1 = \bar{c}_2$. Seja agora $a_0 = e$ , $a_1 = e - \frac{1}{2}c_1$ e $c_2 = e - c_1 + \bar{c}_2$. Então $\{a_0, a_1, a_2\}$ é uma base de A e a multiplicação é dada pela tabela:

| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ |
|---|---|---|---|
| $a_0$ | $a_0$ | $\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_1$ | |
| $a_1$ | | $\frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2$ | $\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2$ |
| $a_2$ | | | $a_2$ |

Esta é a tabela de multiplicação da álgebra zigótica para a herança mendeliana simples.

b) Vamos supor agora que $\dim(A_1A_2 + A_2^2) = 1$. Então $A_1A_2 \neq <0>$ ou $A_2^2 \neq <0>$ e portanto A não é normal.

De $A_1A_2 \subset A_1$ e $A_2^2 \subset A_1$ temos $c_1c_2 = \alpha c_1$ e $c_2^2 = \beta c_1$ com $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$. Também do teorema 2.1, $u^3 = 0$ para to do u de $A_1$. Se $c_1^2 = \gamma c_2$ com $\gamma \neq 0$ temos $0 = c_1^3 = \gamma c_1 c_2 = \gamma\alpha c_1 = 0$. Portanto $\alpha = 0$. Como A não é normal, $\beta \neq 0$. De $\gamma \neq 0$ e $\beta \neq 0$ e da condição $uv^2 = 0$ (teorema 2.1), temos $c_1 c_2^2 = 0$. Substituindo resta $\beta\gamma c_2 = 0$. Portanto, $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$ (contradição). Portanto, resta $c_1^2 = 0$, ou seja, $A_1^2 = \langle 0 \rangle$ e a tabela de multiplicação será:

| | $e$ | $c_1$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $\frac{1}{2} c_1$ | $0$ |
| $c_1$ | | $0$ | $\alpha c_1$ |
| $c_2$ | | | $\beta c_2$ |

Se $\alpha = 0$ temos uma t-álgebra especial com base canonica $\{e, c_2, c_1\}$.

Se $\alpha \neq 0$, $N = \langle c_1, c_2 \rangle$, $N^2 = \langle c_1 \rangle = N^n (n=3,4,\ldots)$. Portanto, se $\alpha \neq 0$ A não é t-álgebra (ver proposição 1.3) pois $x = x_1 c_1 + x_2 c_2$, $x^2 = (\alpha x_1 x_2 + \beta x_2^2) c_1$, $x^3 = \alpha x_2 (\alpha x_1 x_2 + \beta x_2^2) c_1$, $x^4 = \alpha^2 x_2^2 (\alpha x_1 x_2 + \beta x_2^2) c_1$ e, em geral, $x^n = \alpha^{n-2} x_2^{n-2} (\alpha x_1 x_2 + \beta x_2^2) c_1$, $n \geq 2$.

Os resultados expressos pelos cálculos acima podem ser resumidas no quadro geral da página seguinte, que é portanto a classificação das álgebras de Bernstein de dimensão 3.

| Tipo $(r,d)$ | $\dim(A_1A_2+A_2^2)$ | $\dim A_1^2$ | $e^2$ | $ec_1$ | $ec_2$ | $c_1^2$ | $c_1c_2$ | $c_2^2$ | PROPRIEDADES |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1,2)$ | 0 | 0 | $e$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | NORMAL |
| $(2,1)$ | 0 | 0 | $e$ | $\frac{1}{2}c_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | NORMAL |
| | | 1 | | | | $c_2$ | | | NORMAL E ISOMORFA A ÁLGEBRA ZIGÓTICA $Z(2,2)$ |
| $(2,1)$ | 1 | 0 | $e$ | $\frac{1}{2}c_1$ | 0 | 0 | 0 | $\beta c_1$ | t-ÁLGEBRA ESPECIAL DE BASE CANÔNICA $(c_0,c_2,c_1)$; NÃO É NORMAL |
| | | | | | | | | | NÃO É NORMAL E NÃO É t-ÁLGEBRA $N^n=(A_1 \oplus A_2)^n = \langle c_1 \rangle$ $n \geq 2$ |
| $(3,0)$ | 0 | 0 | $e$ | $\frac{1}{2}c_1$ | $\frac{1}{2}c_2$ | 0 | 0 | 0 | NORMAL, ISOM. A $G(3,2)$ |

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1] Wörz - Busekros, Angelika: "Älgebras in Genetics" - Springer-Verlag; Berlin Heidelberg, New York 1980.

[2] Etherington, I.M.H.: "Genetic algebras" - Proc.Roy.Soc. Edinburgh 59 (1939) 242-258.

[3] Etherington, I.M.H.: "Special train algebras" - Quart.J. Math.Oxford, Ser. (2) 12 (1941) 1-8.

[4] Etherington, I.M.H.: "Duplication of linear algebras" - Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 6 (1941) 222-230.

[5] Schafer, R.D.: "Structure of genetic algebras" - Amer. J. Math. 71 (1949) 121-135.

[6] Gonshor, H.: "Special train algebras arising in genetics" - Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 12 (1960) 41-53 .

[7] Ljubič, Ju.I.: "Basic concepts and theorems of evolution genetics of free populations" - Uspehi Mat. Nauk 26 , nº5 (161) (1971) 51-116.

[8] Holgate, P.: "Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle" - J.London Math. Soc (2) 9 (1975) 613-623.

[9] Dickson, L.E.: "Linear algebras"- Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics nº16, 1914.

[10] Bernstein, S.: "Démonstration mathématique de la loi d'hérédité de Mendel" - Comptes Rendus de l'Acad. des

Sci. Paris 177 (1923) 528-531.

[11] Bernstein, S.: "Principe de stationarité et généralisation de la loi de Mendel" - Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. Paris 177 (1923) 581-584.

[12] Bernstein, S.: "Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity" - Englische Ubersetzung: Ann. Math. Statist. 13 (1942) 53-61.