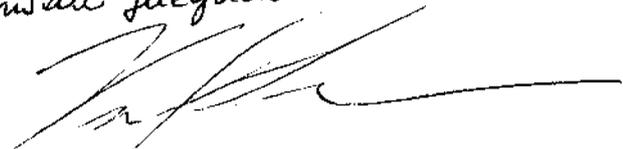


PROCESSOS ESTOCÁSTICOS DE PARTÍCULAS QUE
INTERAGEM INDIRETAMENTE VIA EFEITO DE ME
MÓRIA E A INTERPRETAÇÃO ESTOCÁSTICA DA
MECÂNICA QUÂNTICA

Antonio Fernando Prado de Andrade

*Este exemplar corresponde a redação final de
tese defendida pelo Sr. Antonio Fernando P. Andrade
e aprovada pela Comissão Julgadora.*


Orientador: Prof. Dr. Vincent Buonomano

Tese apresentada ao Instituto de Matemá
tica, Estatística e Ciência da Computa
ção da Universidade Estadual de Campi
nas (UNICAMP), como requisito parcial
para a obtenção do título de Doutor em
Matemática.

1984

Este trabalho contou com suporte financeiro da CPG/UEL,
referente ao Projeto de Pesquisa protocolado sob nº 84.784/81.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Ao Divino Amigo

YESHUA BEN DAVID,

O Mestre de Todos os Mestres, com
Humildade, Reconhecimento e Muito
Carinho, dedico este Trabalho.

MEUS AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Vincent Buonomano pela sugestão do tema desta pesquisa, bem como pela orientação da mesma.

Aos meus amigos Prof. Rodney Carlos Bassanezi, Prof. Wilson de Castro Ferreira Jr. e Prof. Silvio Pregnoatto (IMECC - UNICAMP), os quais em momentos singulares desta trajetória apoiaram-me sobretudo com os seus grandes espíritos. Deixo para vocês, mais que agradecimentos, minha dívida de gratidão.

Ao meu amigo Prof. Dicesar Lass Fernandez (IMECC-UNICAMP) de quem nestes quase dez (10) anos de conhecimento mutuo somente recebi apoio e sustentação em fases cruciais do caminho.

Ao meu amigo Prof. Antonio Carlos do Patrocínio (IMECC - UNICAMP) por seu apoio e incentivo constante e sobretudo por ter dado início a tudo isto.

Ao meu amigo Prof. Jéferson Moriconi Cesário, Diretor do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, pelo grande apoio e incentivo que venho recebendo na realização de minhas pesquisas nesta instituição.

Aos meus Estudantes de Graduação e Pós-Graduação com os quais tenho aprendido muito, sobretudo quando concretamente me mostram que é através dos nossos erros que avançamos os nossos conhecimentos, os quais uma vez adquiridos devem ser doados com muito amor e humildade. Aí está a grande lição.

À minha amiga Sra. Odete Aparecida Radigonda Vieira que

com muita dedicação e carinho executou a datilografia deste trabalho.

Por fim, mas não por último, quero deixar registrado alguns agradecimentos especiais: aos meus Pais, meus Irmãos e Irmãs, à minha Esposa (Maria de Lourdes) e nossas Filhinas (Nara e Sarah), à amiga D. Francisca de Azevedo Nogueira e a todos os mentores espirituais. Sem vocês muito pouco de tudo isto teria existência. Que vocês recebam sempre mais luzes para que possam derramar sobre outras pessoas como fizeram sobre mim. Agradeço-lhes profundamente pelo amor e humildade como fizeram chegar a mim suas luminosidades.

RESUMO

A interpretação estocástica da Mecânica Quântica desenvolvida por Nelson, de La Peña e outros se constitui em um esforço para resolver algumas das controversias nos Fundamentos da Mecânica Quântica. Ela é uma tentativa para expressar a Equação de Schrödinger como um Processo de Difusão, quer dizer, como um processo o qual representa trajetória de partículas. Recentemente esta interpretação tem sido sujeita a várias críticas nos trabalhos de Gilson, Onofri, Kracklauer, Lavenda, Albeverio e Høegh-Krohn, Milnik e Tangstrand, Grabert, Hänggi and Talkner, Ghirardi, etc.

Nosso objetivo aqui é apresentar um modelo matemático para partículas que interagem com outras partículas indiretamente via efeito de memória em um meio, e mostrar que tal modelo é apropriado para desenvolver uma alternativa interpretação estocástica ("Não-Ergódica") da Mecânica Quântica, a qual está livre de algumas das críticas mencionadas acima.

ABSTRACT

The stochastic interpretation of Quantum Mechanics developed by Nelson, de La Peña and others is an attempt to resolve some of the controversy in the Foundations of Quantum Mechanics. In particular, it expresses the Schrödinger Equations as a Diffusion Process, that is, as a Stochastic Process which represents particle trajectories. This interpretation has recently been subjected to various criticism in the works of Gilson, Onofri, Kracklauer, Laveda, Albeverio and Høegh-Krohn, Milnik and Tangstrand, Gravert, Hännegi and Talkner, Ghirardi, etc.

Our objective here is present a mathematical model for particles which interact with other particles indirectly via memory effects in a medium, which is appropriate to developing an alternative ("Non-Ergodic") stochastic interpretation of Quantum Mechanics, which is free of some the above mentioned criticisms.

ÍNDICE

	pág.
Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Capítulo I - <u>Dos objetivos e do Conteúdo deste Trabalho</u>	
I.A- Introdução e Descrição dos Objetivos	1
I.B- Descrição do Conteúdo	3
Capítulo II - <u>Preliminares Matemáticos e Físicos</u>	
II.A- Introdução	8
II.B- Alguns Conceitos e Resultados sobre a Integral de Lebesgue	8
II.C- Alguns Conceitos e Resultados da Teoria de Pro babilidade e Processos Estocásticos	18
II.D- Algumas Observações sobre a Mecânica Quântica e seu Formalismo Matemático	41

Capítulo III - <u>Processos Estocásticos de Partículas Que Interagem Indiretamente Via Efeito de Memória ...</u>	
III.A- Introdução	56
III.B- A Descrição Física. Algumas Notações e Limitações	57
III.C- A Descrição Matemática em Termos de Processos Estocásticos. Alguns Conceitos e Definições ..	62
III.D- Alguns Resultados sobre os Processos de Partículas que Interagem Via Efeito de Memória	66
Capítulo IV - <u>A Interpretação Estocástica e a Interpretação Estocástica Não-Ergódica (NESI) da Mecânica Quântica</u>	
IV.A- Introdução	85
IV.B- A Interpretação Estocástica da Mecânica Quântica em Perspectiva Histórica	85
IV.C- A Equivalência entre Processos de Markov e Mecânica Quântica	91
IV.D- A Interpretação Estocástica Não Ergódica da Mecânica Quântica (NESI)	98
IV-E- A NESI e a Resolução de Algumas das Críticas Contra a Interpretação Estocástica	102
Apêndice I - Médias Experimentais	116
Apêndice II - O Experimento da Dupla Fenda	119
Referências Bibliográficas	123

CAPÍTULO I

DOS OBJETIVOS E DO CONTEÚDO DESTES TRABALHOS

I.A- INTRODUÇÃO E DESCRIÇÃO DOS OBJETIVOS

A Interpretação Estocástica da Mecânica Quântica desenvolvida por Nelson (1966), de La Peña (1968) e muitos outros é uma tentativa para resolver certos problemas nos fundamentos da Mecânica Quântica [Jammer]. Uma revisão desta área com referências completas pode ser encontrada em Ghirardi [14]. A interpretação estocástica é um modelo matemático dado por um processo estocástico o qual satisfaz certas condições técnicas. O processo estocástico representa a posição probabilística de uma partícula e é imaginado que existe um meio estocástico no qual a partícula segue um movimento similar àquele do movimento Browniano. As equações de Schrödinger, em um grau de generalidade ou outro, podem então serem derivadas via o processo estocástico. Recentemente esta interpretação foi criticada em uma série de trabalhos [14], [16], [17], [24-27] e [30].

A Interpretação Estocástica da Mecânica Quântica usa Processos Estocásticos nos quais as Partículas dos Ensembles não têm qualquer tipo de interação; quer dizer, as Partículas dos Ensembles são consideradas completamente independentes.

Buonomano[06] em um artigo publicado recentemente, propôs, no Apêndice C deste seu Trabalho, considerar uma Interação Indireta entre as Partículas Via um Meio Hipotético com Estados Estáveis ou como também dizemos, um Meio Estocástico com Memória. Neste

artigo é mostrado que tais Processos são uma consequência da Interpretação Não-Ergódica da Mecânica Quântica [06]. Tal interpretação é basicamente uma outra maneira de ver a Função ψ ou seja ela propicia uma outra interpretação da função de onda ψ da Mecânica Quântica. Como é mostrado neste seu artigo, a Interpretação Não-Ergódica da Mecânica Quântica é uma interpretação estatística mas ela difere da interpretação estatística usual como apresentada, por exemplo, no artigo de Ballentine [02], somente em suas propriedades ergódicas, ou seja em suas previsões para Médias de Ensemble e Médias em Tempo.

Um dos objetivos deste nosso Trabalho foi considerar e descrever este tipo de Interação Indireta entre Partículas. Estas interações foram descritas por uma Família de Processos Estocásticos a qual denominamos de Família de Interferência ou Família de Partículas Interagindo Indiretamente.

Baseados no Modelo Matemático propusemos uma outra interpretação Estocástica da Mecânica Quântica a qual resolve algumas das críticas que são apresentadas à Interpretação Estocástica usual. Tal Interpretação Estocástica a qual denominamos de Interpretação Estocástica Não-Ergódica da Mecânica Quântica (NESI), como qualquer Interpretação Estocástica, ela consiste em tratar os Sistemas Quânticos como evoluindo em termos de um Processo Estocástico de Difusão. Na Interpretação Estocástica usual da Mecânica Quântica, os sistemas evoluem como Processos de Difusão Clássicos (e.g. Processos de Movimento Browniano) nos quais as Partículas constituintes dos Sistemas Físicos são completamente independentes uma das outras,

não havendo por conseguinte nenhuma interação entre elas. Na NESI consideramos que a evolução dos Sistemas Físicos também se dá por difusão, só que agora o processo que governa tal evolução é um Processo de Partículas Interagindo Indiretamente. Desse modo já não há nesta interpretação uma independência entre as Partículas que compõe os sistemas, mas uma dependência causada pela Memória do Meio no qual se processa tal evolução. Passamos a seguir à Descrição do Conteúdo deste Trabalho.

I.B-DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO

Tendo em vista o exposto na seção anterior, vamos apresentar a seguir uma descrição sumária dos Capítulos que compõe este trabalho.

No Capítulo II fizemos um apanhado daqueles fatos matemáticos e físicos que serão necessários para o desenvolvimento do restante do trabalho. Este capítulo deve ser pensado como tendo o caráter de uma breve revisão sobre cada um dos temas aí abordados. Não tivemos a preocupação de sermos completos nos assuntos tratados, mas procuramos apresentar somente aqueles aspectos que estivessem mais diretamente relacionados com esta pesquisa.

Na seção II.B tecemos algumas considerações sobre a integral de Lebesgue. Foram apresentados, sem demonstração, alguns fatos relativos a tal integral cabendo destacar o teorema da convergência dominada, o qual será utilizado no capítulo seguinte. Tratamos também de algumas aplicações de tal integral à teoria de probabilidades.

Na seção II.C apresentamos, sob o ponto de vista físico, alguns elementos da Teoria dos Processos Estocásticos. Destaque especial é concedido aos Processos de Markov e à classe dos Processos de Difusão, os quais desempenham um relevante papel em nosso trabalho. Apresentamos um breve estudo sobre dois dos mais importantes Processos de Difusão: O Processo de Einstein-Wiener e o Processo de Ornstein-Uhlenbeck. Tais Processos se constituem em Modelos Matemáticos para o estudo do Movimento Browniano de uma partícula. Em seguida são apresentados os processos, os quais denominamos, Processos de Difusão Geral. É dentro do ponto de vista da definição apresentada para Processos de Difusão Geral que se desenrolará os capítulos subsequentes. Apresentamos também nesta seção as equações diferenciais parciais que regem a evolução de tais processos: as Equações de Kolmogorov-Fokker-Planck.

Na seção II.D, e última deste capítulo, apresentamos os Conceitos Fundamentais da Mecânica Quântica alguns dos quais serão necessários para a compreensão dos aspectos físicos tratados neste trabalho. Fizemos um apanhado sobre a história da descoberta da Mecânica Quântica, bem como sobre o seu Formalismo Matemático utilizando para isto o Operador Densidade.

No Capítulo III apresentamos inicialmente a descrição física de Partículas Interagindo Indiretamente via um Meio Com Memória, e a seguir a Descrição Matemática em termos de uma Família de Processos Estocásticos. Nas seções III.C e III.D deste Capítulo estão alocados os resultados matemáticos do nosso trabalho.

Na seção III.B é feita a descrição detalhada, em termos físicos, da Interação Indireta entre Partículas. É salientada aí a diferença entre os Processos de Difusão Clássicos tais como o Processo de Einstein-Wiener ou o Processo de Ornstein-Uhlenbeck, e os Processos de Difusão que consideramos neste trabalho no que diz respeito à determinação de médias. Usualmente as médias são tomadas sobre Partículas Independentes que não Interagem, enquanto que em nosso modelo devemos determinar as médias sobre corridas independentes ou seja sobre um ensemble de corridas, cada corrida tendo Partículas Interagindo Indiretamente Via Efeito de Memória. Aqui o significado que emprestamos ao conceito de memória, não é aquele da literatura onde a palavra memória é exclusivamente associada com memória Markov, que é a memória que a partícula individual tem do seu passado. Em nosso trabalho a palavra memória está sendo usada no sentido de um meio (ou partícula) ter memória de prévias partículas.

Na seção III.C apresentamos a formulação matemática, via a Teoria dos Processos Estocásticos, do modelo físico descrito na seção anterior. Aí são apresentados alguns conceitos e definições matemáticas sobre os Processos de Partículas Interagindo Indiretamente via a memória do meio.

Na seção III.D, última deste capítulo, são apresentados os resultados matemáticos, o mais importante deles sendo aquele que estabelece que o Processo de Partículas Interagindo Indiretamente ou Processo de Interferência, associado a uma dada Família de Interferência, é um Processo de Difusão desde que cada membro da Família de Interferência também o seja. Isto, como veremos no Capítulo se-

guinte, tem importantes implicações físicas.

No Capítulo IV, e último deste Trabalho, apresentamos de início um apanhado sobre o paralelismo observado entre a Mecânica Quântica e Processos Estocásticos, indicando todos os passos para se obter a equivalência entre as descrições Estocástica e Quântica da Evolução dos Sistemas Físicos. Tratamos então aqui das Interpretações Estocásticas da Mecânica Quântica. Nas seções IV.D e IV.E deste capítulo se encontram alocados os resultados físicos do nosso trabalho.

Na seção IV.B apresentamos um esboço sobre a Evolução Histórica da Interpretação Estocástica da Mecânica Quântica ou seja a interpretação que consiste em tratar os Sistemas Quânticos como evoluindo em termos de um Processo Estocástico Clássico de Markov ou seja um Processo de Difusão.

Na seção IV.C é estabelecida a equivalência entre as Descrições Estocástica e Quântica dos Sistemas Físicos.

Na seção IV.D apresentamos uma outra Interpretação Estocástica da Mecânica Quântica, a qual denominamos a Interpretação Estocástica Não-Ergódica (NESI). A palavra Ergódica é usada aqui no sentido exposto no Apêndice I.

Na seção IV.E, e última deste capítulo, é mostrado que sob a Ótica da NESI, algumas das críticas que são feitas à Interpretação Estocástica ficam desprovidas de sentido.

Além dos capítulos que acabamos de descrever, este trabalho contém dois apêndices. No Apêndice I, tratamos com algum detalhe do significado que emprestamos nesta pesquisa ao termo ergódico.

No Apêndice II apresentamos uma descrição do experimento da dupla fenda.

CAPÍTULO II

PRELIMINARES MATEMÁTICOS E FÍSICOS

II.A- INTRODUÇÃO

Iremos apresentar neste capítulo um apanhado daqueles fatos matemáticos e físicos que serão necessários para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. Deste modo este capítulo deve ser pensado como tendo o caráter de uma revisão sobre cada um dos tópicos apresentados. Não foi nossa preocupação sermos completos nos assuntos abordados, contudo procuramos apresentar aqueles aspectos que estivessem mais diretamente relacionados com a matéria assunto do nosso trabalho.

II.B- ALGUNS CONCEITOS E RESULTADOS SOBRE A INTEGRAL DE LEBESGUE

Vamos apresentar a seguir alguns fatos relativos à Integral de Lebesgue, e dentre eles ressaltamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, o qual será utilizado em certas passagens de alguns dos resultados do capítulo seguinte. Logo em seguida tratamos de algumas aplicações da Integral de Lebesgue na Teoria de Probabilidades. Mais detalhes sobre a Integral de Lebesgue podem ser encontrados nas referências [13], [23].

No que se segue consideramos um Espaço de Medida (X, \mathcal{V}, μ) onde \mathcal{V} é uma σ -álgebra de subconjuntos de X , i. e.

$$(i) \quad \emptyset, X \in \mathcal{V}$$

$$(ii) \quad A \in \mathcal{V} \implies A^c \in \mathcal{V}$$

$$(iii) \quad A_n \in \mathcal{V}, \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{V};$$

μ é uma medida em V , i.e.

$$\mu : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(A) \geq 0, \forall A \in V$

(iii) se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência disjunta, $A_n \in V$

$$\implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

Os elementos de um espaço de medida (X, V, μ) são denominados conjuntos mensuráveis. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se mensurável se $f^{-1}(A) \in V$ para todo A na σ -álgebra de Borel da reta \mathbb{R} .

Doravante admitiremos que todos os conjuntos são μ -mensuráveis e que todas as funções sob estudo são definidas e μ -mensuráveis sobre X .

Vamos a seguir apresentar alguns outros conceitos, os quais serão úteis nos desenvolvimentos posteriores. Para detalhes ver as referências citadas.

Uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que $n > N(\epsilon)$ implica que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, para todo x .

Uma função f é dita simples se ela é μ -mensurável e não toma mais que um número contável de valores distintos.

Pode-se mostrar [23 pg 282] que uma função f é μ -mensurável se, e somente se, ela pode ser representada como o Limite de Uma Sequência Uniformemente Convergente de Funções Simples. Este resultado é utilizado para a introdução do conceito de integral de Le

besgue que definiremos, inicialmente, no caso em que $\mu(x) < \infty$.

Dizemos que duas funções f e g definidas sobre um mesmo conjunto são equivalentes com respeito a uma medida μ , se

$$\mu \{x; f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Uma propriedade é dita verificar-se quase sempre sobre um conjunto X se ela se verifica em todos os pontos de X , exceto sobre um conjunto de medida nula. Dentro desta concepção, duas funções são ditas equivalentes se elas coincidem quase sempre.

Uma sequência de funções (f_n) definidas sobre um espaço X é dita convergir quase sempre para uma função f se

$$\lim_n f_n(x) = f(x) \quad (*)$$

para quase todo x , ou seja, se o conjunto de pontos para os quais a condição (*) deixa de se verificar é de medida nula.

Seja f uma função simples ou seja f é uma função μ -mensurável a qual assume não mais que um número contável de valores distintos

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$$

Então denotando por $A_n = \{x \in A; f(x) = Y_n\}$, entendemos pela integral de Lebesgue de f sobre o conjunto A

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n Y_n \mu(A_n),$$

desde que a série convirja absolutamente. Se a integral de Lebesgue de f existe, dizemos que f é integrável ou somável com respeito à medida μ , sobre o conjunto A .

Uma função mensurável f diz-se integrável ou somável sobre um conjunto A se existe uma sequência de funções simples (f_n) integráveis convergindo uniformemente para f sobre o conjunto A . O limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu$$

é então chamado A Integral de Lebesgue de f sobre o conjunto A e é notada por

$$\int_A f(x) d\mu .$$

Vamos agora apresentar, no espírito da integral de Lebesgue, a questão de tomar limites sob o sinal de integral. Na Teoria Clássica de Integração é demonstrado que uma condição suficiente para tomar um tal limite é que a sequência ou a série em questão seja uniformemente convergente. Neste sentido apresentamos a seguir um importante resultado o qual se constitui em uma generalização de sua contraparte clássica.

TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE

Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis sobre um conjunto A , a qual converge quase sempre em A para uma função a va-

lores reais e mensurável f . Se existe uma função integrável ψ tal que $|f_n| \leq \psi$ para todo n , então f é integrável sobre A e tem-se

$$\lim_n \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu .$$

Observemos aqui que os valores tomados por uma função sobre um conjunto de medida nula não tem efeito sobre sua integral. Desse modo no Teorema da Convergência Dominada necessitamos somente admitir que a desigualdade $|f_n(x)| \leq \psi(x)$ se verifica quase sempre em A .

Quando tratamos das aplicações da integral de Lebesgue à Teoria de Probabilidades, surge de modo natural o conceito de tal integral sobre conjuntos de medida infinita, uma vez que aí consideramos integrais impróprias com a reta real equipada com a medida de Lebesgue ordinária. Torna-se importante, por conseguinte, estender o conceito de integral admitindo esta eventualidade. Vamos indicar a seguir como isto é feito no caso de maior importância prática, precisamente, no de conjuntos X representáveis como reuniões enumeráveis de partes de medida finita:

$$X = \bigcup_n X_n, \mu(X_n) < \infty \quad (*) .$$

Uma medida μ dada num espaço X diz-se σ -finita, se se puder representar X como uma reunião enumerável de conjuntos de medida finita. Um importante exemplo de tal medida nos é dado pela medida de Lebesgue na reta [cf. Kolmogorov 23].

Dizemos que uma função mensurável f definida sobre um conjunto X , munido de uma medida σ -finita μ , chama-se integrável em X se for integrável sobre qualquer parte $A \subset X$ de medida finita e se, qualquer que seja a sequência (X_n) crescente de subconjuntos mensuráveis de X satisfazendo a condição (*) anterior, o limite

$$\lim_n \int_{X_n} f(x) d\mu$$

existe e não depende da escolha particular desta sequência. Este limite chama-se a Integral de f sobre X e denota-se

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_n \int_{X_n} f(x) d\mu \quad .$$

Observemos aqui que o teorema da convergência dominada permanece válido quando a medida do conjunto A , sobre o qual integramos, é infinita. [23, sec. 30] .

Passamos agora a considerar alguns elementos da Teoria de Probabilidades e o papel aí desempenhado pela integral de Lebesgue.

Seja Ω um espaço amostral ou seja Ω é a coleção de todos os resultados possíveis de um dado experimento. Denote por \mathcal{F} uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω . Os conjuntos \mathcal{F} - mensuráveis ou seja os elementos da σ -álgebra \mathcal{F} , são denominados eventos. Uma medida σ -aditiva P_r definida sobre a σ -álgebra \mathcal{F} é chamada uma Medida de Probabilidade se $P_r(\Omega) = 1$. O número $P_r(A)$, $A \in \mathcal{F}$, é chamado a Probabilidade do evento A.

Um Espaço de Probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P_r)$ consiste dos seguintes ingredientes:

- (1º) Um conjunto Ω junto com uma σ -Álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω .
- (2º) Uma Medida de Probabilidade P_r definida sobre a σ -Álgebra \mathcal{F} .

Seja T um subconjunto dos Números Reais e Ω um Espaço Amostral. Um Processo Estocástico (ou aleatório) é simplesmente uma aplicação

$$X : T \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, \omega) \longmapsto X(t, \omega) \quad .$$

Observemos aqui duas coisas:

- i) Para cada $t \in T$ fixo, a função

$$X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$X_t(\omega) \equiv X(t, \omega) \equiv X_t \quad , \quad (\omega \in \Omega)$$

é denominada uma Variável Aleatória.

ii) Para cada evento $w \in \Omega$ fixado, temos a função

$$X_w : T \longrightarrow R$$

definida por

$$X_w(t) = X(t, w) \quad , \quad t \in T \quad ,$$

a qual é denominada uma trajetória ou realização do Processo Estocástico $X(t, w)$.

Do exposto acima no ítem (i), decorre que um Processo Estocástico $X(t, w)$ pode ser visto como uma coleção de Variáveis Aleatórias $X_t(w)$ ou seja $X(t, w) = (X_t(w))_{t \in T}$. Este será o procedimento adotado neste Trabalho como veremos na seção e capítulos seguintes, pois isto está mais próximo dos aspectos físicos de tais processos.

Dada uma variável aleatória ξ , denotemos por

$$F(x) = P_r \{ \xi < x \} \quad ,$$

a probabilidade de que ξ assuma um valor menor que x . Decorre desta definição os seguintes fatos:

- a) $F(x)$ é uma função não-decrescente
- b) $F(x)$ é contínua à esquerda
- c) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Denominamos a função $F(x)$ de Função Distribuição de Probabilidade da Variável Aleatória ξ . Pode-se mostrar que toda $F(x)$ sa-

tisfazendo as três condições acima pode ser representada como a distribuição de probabilidade de alguma variável aleatória η .

Segue-se do exposto que uma variável aleatória ξ somente assume seus valores com certa probabilidade, tal distribuição sendo dada pela função $F(x)$ introduzida antes.

Duas características numéricas básicas de uma variável a-leatória ξ são sua esperança matemática ou média

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)$$

e a sua variância

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 dF(x) \quad ,$$

onde as Integrais consideradas são as de Lebesgue-Stieltjes.

Uma variável aleatória ξ é dita discreta se ela assume no máximo um número contável de valores $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ cada um deles assumido com probabilidade P_n dada por

$$P_n = P_r \{ \xi = x_n \} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad .$$

Segue-se então que a Função Distribuição de Probabilidade da Variável Aleatória ξ é a Função Escada

$$F(x) = \sum_{x_n < x} P_n \quad .$$

Neste caso a média e a variância de ξ reduzem-se, respec-tivamente, às expressões

$$E(\xi) = \sum_n x_n P_n$$

$$D(\xi) = \sum_n (x_n - E\xi)^2 P_n .$$

Vamos a seguir considerar o conceito de Variável Aleatória Contínua. Antes porém vejamos mais alguns preliminares.

Uma função f definida sobre um intervalo $[a, b]$ diz-se de variação limitada se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq c ,$$

para toda partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$.

Pode-se mostrar [23 pg 325] que "toda função de variação limitada tem uma derivada finita quase sempre no seu domínio de definição".

Um outro conceito importante é aquele de função absolutamente contínua. Uma função f definida sobre um intervalo $[a, b]$ diz-se absolutamente contínua sobre $[a, b]$ se dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon ,$$

para todo sistema finito de subintervalos dois a dois disjuntos $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ ($k=1, 2, \dots, n$) de comprimento total

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta .$$

Pode-se mostrar que [23 pg 333]: "Toda função f absolutamente contínua sobre $[a, b]$ é de variação limitada sobre $[a, b]$.

Do exposto segue-se então que as funções absolutamente contínuas sobre um intervalo $[a, b]$ possuem aí derivada finita quase sempre.

Uma variável aleatória diz-se contínua se sua função distribuição $F(x)$ é absolutamente contínua. A derivada $\rho(x) = F'(x)$ a qual existe quase sempre, é denominada a densidade de probabilidade da variável aleatória.

Para uma tal variável aleatória tem-se que [23 pg 348]

$$dF(x) = F'(x) dx = \rho(x) dx.$$

Desse modo as expressões para as média e variância de tais variáveis se reduzem, respectivamente, a

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx$$

e

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 \rho(x) dx .$$

II.C- ALGUNS CONCEITOS E RESULTADOS DA TEORIA DE PROBABILIDADES E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

A evolução em tempo de um sistema físico é chamado um Processo Estocástico quando o seu Estado muda de acordo com Leis Probabilísticas. O Estado do Sistema em cada instante de tempo t é caracte-

terizado pelo valor $X(t)$, o qual é uma variável aleatória. Consideraremos em nosso trabalho tão somente aqueles Processos $X(t)$ para os quais o Conjunto de Valores $\{X(t)\}$ é o continuum dos números reais (o seu espaço de estados) e tais que mudanças de estado ocorrem em todos os instantes de tempo. Admitiremos também que as densidades de probabilidade de todas as ordens do processo $X(t)$ existem; isto é, admitiremos que

$$P(x_1 t_1, \dots, x_n t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F(x_1 t_1, \dots, x_n t_n)$$

existe para todo $n \geq 1$, onde $P(x_1 t_1, \dots, x_n t_n)$ representa a densidade de Probabilidade de Ordem n , para que o Sistema Físico descrito pelo Processo $X(t)$, ocupe as posições x_1, \dots, x_n nos tempos t_1, \dots, t_n , respectivamente, e $F(x_1 t_1, \dots, x_n t_n)$ é a distribuição de Probabilidade do Processo.

Uma situação tipicamente física é aquela na qual partículas estão suspensas em um fluido, as quais se movem sob rápidos e sucessivos impactos aleatórios das partículas vizinhas. Se para uma tal Partícula, o deslocamento em uma dada direção fosse plotado versus tempo obteríamos um gráfico contínuo porém errático, todo ele cheio de picos. Tal fenômeno físico é conhecido, hoje em dia, sob a denominação de Movimento Browniano.

Nosso objetivo nesta seção será em enunciar os fatos mais relevantes ligados a alguns tipos básicos de Processos Estocásticos, tais como os Processos de Markov, os Processos de Difusão e os Processos Estacionários, dando ênfase, na medida do possível, aos as-

pectos físicos de tais Processos. Mais detalhes sobre os tópicos abordados podem ser vistos nas Referências [09] , [15] , [20] e [21].

II.C.1- UMA CLASSIFICAÇÃO DOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS. PROCESSOS DE MARKOV. PROCESSOS ESTACIONÁRIOS

A Teoria dos Processos Estocásticos está ligada com a investigação da estrutura de Famílias de Variáveis Aleatórias $X(t)$, onde t é um parâmetro variando sobre um Conjunto de Índices T . Tal parâmetro é usualmente interpretado como sendo o tempo.

Os ingredientes básicos utilizados na descrição de um Processo Estocástico $X(t)$ e na distinção entre eles são: (1) O espaço de estados Γ , (2) O Conjunto de Índices T , (3) As relações de dependência entre as Variáveis Aleatórias $X(t)$.

O espaço de estados Γ é o conjunto onde se situam os valores de $X(t)$ para cada $t \in T$. Quando $\Gamma = \{0, 1, 2, \dots\}$ dizemos que o processo $X(t)$ é um Processo de Estados Discretos. Quando $\Gamma = \mathbb{R}$ dizemos que o Processo $X(t)$ é a valores reais ou tem como Espaço de Estados o continuum dos números reais. Quando $\Gamma = \mathbb{R}^n$ o Processo $X(t)$ é denominado um Processo Vetorial. Em nosso trabalho iremos considerar tão somente o caso $\Gamma = \mathbb{R}$.

O Conjunto de Parâmetros ou de Índices T é o conjunto onde t varia. Quando $T = \{0, 1, \dots\}$ dizemos que $X(t)$ é um Processo a Parâmetro Discreto e quando $T = [0, +\infty)$ ou \mathbb{R} dizemos que $X(t)$ é um Processo a Parâmetro Contínuo.

Podemos ter as diversas combinações entre T e Γ quais sejam: T discreto com Γ discreto ou contínuo e T contínuo com Γ dis-

reto ou contínuo.

Uma realização ou trajetória de um Processo Estocástico $X(t)$ é simplesmente uma aplicação $X_w : T \rightarrow R$, definida por

$$X_w(t) \equiv X_t = X(w, t),$$

onde $X : \Omega \times T \rightarrow R$.

As relações de dependência entre as Variáveis Aleatórias $X(t)$ servem para definirmos os tipos de Processos Estocásticos. No que se segue $T = [0, +\infty)$ e $X(t) \in R$ para cada $t \in T$, a menos que o contrário seja dito explicitamente.

Isto posto, passemos ao estudo dos tipos Clássicos de Processos Estocásticos.

(I) - Processos com Incrementos Independentes Estacionários.

Um Processo Estocástico $\{X(t)\}_{t \in T}$ diz-se um Processo com Incrementos Independentes se para todo $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ em T e para todo $n > 1$, as variáveis aleatórias

$$Y_1 = X(t_2) - X(t_1), \dots, Y_n = X(t_n) - X(t_{n-1}),$$

são independentes, ou seja se

$$P(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = P_1(Y_1) \dots P_n(Y_n),$$

onde $P(Y_1, \dots, Y_n)$ é a densidade de probabilidade conjunta das variáveis Y_1, \dots, Y_n e $P_i(Y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) são as densidades marginais.

Se a distribuição dos incrementos $X(t+h) - X(t)$ do Processo, depender somente do comprimento h do intervalo e não do tempo t , o processo é dito com incrementos estacionários; em outras palavras, se para todo $h > 0$ e todo $t \in T$ a variável aleatória $Y = X(t+h) - X(t)$ é tal que a sua densidade de probabilidade $P_Y = f(h)$.

Obviamente, um Processo $X(t)$ com as duas propriedades acima diz-se um Processo com Incrementos Independentes Estacionários.

Pode-se mostrar que se $X(t)$ é um Processo com Incrementos Independentes Estacionários e se $E(X(t)) < \infty$, então

$$(1) E(X(t)) = m_0 + m_1 t, \quad \text{onde}$$

$$m_0 = E(X(0))$$

$$m_1 = E(X(1)) - m_0$$

$$(2) \text{Var}(X(t)) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 t, \quad \text{onde}$$

$$\sigma_0^2 = E[(X(0) - m_0)^2]$$

$$\sigma_1^2 = E[(X(1) - m_1)^2] - \sigma_0^2$$

Para uma demonstração deste fato veja Karlin [20], capítulo I.

(II) - Processos de Markov.

Em termos intuitivos um Processo Estocástico $X_t \equiv X(t)$ diz-se um Processo de Markov se dado o valor de X_t , os valores de X_s ($s > t$) não dependem dos valores de X_u ($u < s$). Dito de outro modo, um Processo Estocástico $(X_t)_{t \in T}$ diz-se de Markov ou é um Processo Markoviano se conhecendo-se precisamente o presente, o comportamen-

to futuro do Processo não é alterado por informações adicionais no passado do Processo; ou ainda mais, o futuro e o passado do Processo são Variáveis Aleatórias Independentes, dado o presente.

A formalização desta idéia é como segue: defina da maneira usual a Densidade de Probabilidade Condicional $P(x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1}, \dots, x_1 t_1)$, que significa a probabilidade de uma partícula se situar na posição x_n no tempo t_n , dado que ela esta nas posições x_2, \dots, x_{n-1} nos tempos t_1, \dots, t_{n-1} , respectivamente, como sendo

$$P(x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1}, \dots, x_1 t_1) = \frac{P(x_1 t_1, \dots, x_n t_n)}{P(x_1 t_1, \dots, x_{n-1} t_{n-1})} .$$

Então, dizemos que o Processo $X(t)$ representado pela densidade $P(x_1 t_1, \dots, x_n t_n)$ é de Markov se

$$P(x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1}, \dots, x_1 t_1) = P(x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1}) ,$$

para todo $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ e todo $n > 1$.

As funções $P(xt|ys)$ são denominadas densidade de transição de probabilidade de estados do Processo $X(t)$.

Para um Processo $X(t)$ satisfazendo a Propriedade de Markov, mostremos que as funções $P(xt|ys)$ satisfazem a equação básica da Teoria:

$$P(xt|x_0) = \int P(yt'|x_0) P(x, t - t'|y) dy ,$$

a qual é conhecida sob a denominação de equação de Smoluchowski ou Equação de Chapman-Kolmogorov.

Ora, como sabemos, $P(x_0|xt)$ é a probabilidade de uma dada

Partícula ir de x_0 para x no tempo t . Mas em qualquer tempo interme_ diário $0 < t' < t$, ela estará em algum lugar. Digamos que no tempo t' ela se encontra na posição y . Portanto, a partícula realizou uma transição de x_0 para y no tempo t' . Mas então ela deve realizar uma transição de y para x no tempo $t - t'$. Desde que o processo descrito pela partícula é de Markov, segue-se que o passado é independente do futuro e assim a probabilidade da partícula ir de x_0 para y em um tempo t está dada por

$$P(yt'|x_0) P(x, t - t'|y) dy \quad .$$

Desde que y é arbitrário temos que integrando sobre todas as possibilidades, encontramos

$$P(xt|x_0) = \int P(yt'|x_0) P(x, t - t'|y) dy \quad .$$

□

Decorre imediatamente da Propriedade de Markov que

$$P(x_1 t_1, \dots, x_n t_n) = P(x_1 t_1) P(x_2 t_2 | x_1 t_1) \dots P(x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1}) ,$$

para todo $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ e todo $n > 1$.

Isto nos indica que para a descrição completa de um Processo de Markov é suficiente que se conheçam as Densidades de Transição de Probabilidade entre Estados Consecutivos do Processo.

Dois exemplos importantes de Processos de Markov são o Processo de Einstein-Wiener e o Processo de Ornstein-Uhlenbeck, os quais serão examinados na seção seguinte.

(III) - Processos Estacionários.

Um Processo Estocástico $(X_{(t)})_{t \in T}$ diz-se Estacionário se as funções de Distribuição de Probabilidade Conjunta das duas Famílias de Variáveis Aleatórias

$$X(t_1), \dots, X(t_n) \quad \text{e}$$

$$X(t_1+h), \dots, X(t_n+h)$$

são idênticas para todo $h > 0$ e todo $t_1, \dots, t_n \in T$, e todo n .

Denotando por

$$P(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \equiv P(x_1 t_1, \dots, x_n t_n)$$

a distribuição de Probabilidade Conjunta do Processo, resulta que a condição de Estacionaridade do mesmo pode ser expressa assim

$$P(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P(x_1, \dots, x_n; t_1+h, \dots, t_n+h)$$

para todo $n > 0$; quer dizer, para todas as distribuições finito-dimensionais do Processo.

Em particular, a Distribuição de $(X(t))$ é a mesma para cada t ; quer dizer, $P(x, t)$ é invariante sob translações no tempo, em termos matemáticos

$$P(x, t+h) = P(x, t)$$

para todo $h > 0$ e $t \in T$.

Destas considerações segue-se que $E(x(t)) = \text{constante}$. Se além disso tivermos que $E(X(t)^2) < \infty$, segue-se que $\text{Var}(X(t)) = \text{constante}$.

Existe uma outra noção de estacionaridade, chamada Covariância Estacionária, cuja teoria é muito mais fácil de desenvolver e a mesma é suficiente para muitas das aplicações práticas.

Um Processo $(X(t))_{t \in T}$ diz-se um Processo de Covariância Estacionária se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

- (1) $E(X(t)^2) < \infty$
- (2) $E(X(t)) = \text{constante}$
- (3) $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \rho(h)$, para todo $t \in T$.

Pode-se mostrar facilmente que se o Processo $(X(t))_{t \in T}$ é Estacionário e se $E(X(t)^2) < \infty$ então $(X(t))_{t \in T}$ é um Processo de Covariância Estacionária.

Por exemplo, como veremos na seção seguinte, o Processo de Einstein-Wiener (com Drift) não é um Processo Estacionário, pois tal processo não possui média constante, que é uma condição necessária para a Estacionaridade do Processo. Todavia o Processo

$$X(t) = W(t + h) - W(t) \quad ,$$

onde $W(t)$ é um Processo de Einstein-Wiener, é um exemplo de um Processo Estacionário. Vale entretanto muito mais, todo Processo Não-Constante, com Incrementos Independentes Estacionários, não pode ser Estacionário, pela mesma razão de antes (Veja II.C.1 (1)).

II.C.2- PROCESSOS DE MOVIMENTO BROWNIANO

Vamos nesta seção examinar Processos Estocásticos cujo E_s

paço de Estado é o continuum dos números reais e tais que mudanças de estado ocorrem em todos os instantes. Em um pequeno intervalo de tempo um tal processo pode somente sofrer um pequeno deslocamento ou Mudança de Estado. Desse modo podemos esperar que as realizações ou trajetórias de tais processos sejam funções contínuas.

Como já foi salientado anteriormente, uma situação tipicamente física é aquela do Movimento Browniano. Tal fenômeno físico foi descoberto pelo Botânico Robert Brown em 1828. Tão somente em 1905 Albert Einstein elaborou uma teoria satisfatória do mesmo, baseando-se na Teoria Cinética da Matéria, e em 1923 Norbert Wiener assentou sobre bases matemáticas rigorosas tal fenômeno.

O Movimento Browniano é um exemplo típico do que comumente chamamos de um Processo de Difusão ou seja é um Processo de Markov, para o qual somente ocorrem mudanças contínuas de estado; quer dizer, as suas realizações ou trajetórias são contínuas.

Dois tipos básicos e importantes de processos de difusão são o Processo de Einstein-Wiener e o Processo de Ornstein-Uhlenbeck, os quais se constituem em Modelos Matemáticos para o estudo do Movimento Browniano. Passamos a seguir a revisar estes dois processos.

II.C.2.1- O PROCESSO DE EINSTEIN-WIENER

Existem diversas maneiras de se introduzir tal Processo. A nosso ver, a mais econômica delas sendo via uma Equação Diferencial Estocástica. Para que isto se torne possível façamos algumas considerações iniciais.

Seja $(Z(t))_{t \in T}$ um Processo Puramente Aleatório. Isto significa que as Variáveis Aleatórias do Processo são identicamente distribuídas e para qualquer conjunto finito de pontos temporais distintos $\{t_j\}$, as variáveis aleatórias $(Z(t_j))$ são mutuamente independentes.

Dizemos que um Processo Puramente Aleatório $Z(t)$ é um Processo Gaussiano Puramente Aleatório, se para $t \in T$, a variável aleatória $Z(t)$ está normalmente distribuída.

Seja então $(Z(t))_{t \in T}$ um processo Gaussiano puramente aleatório, com média 0 e variância 1. Definimos o Processo de Einstein-Wiener sem Drift ou Processo de Movimento Browniano, ao Processo $(X(t))_{t \in T}$ cujos Incrementos estão dados por

$$\Delta X(t) = Z(t)\sqrt{\Delta t} \quad ,$$

onde $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$ e Δt é um pequeno intervalo de tempo.

Isto nos indica que os incrementos do Processo de Einstein-Wiener $(X(t))$ durante o intervalo de tempo Δt , são tais que

- (1) $E(\Delta X(t)) = 0$
- (2) $\text{Var}(\Delta X(t)) = \Delta t$
- (3) São variáveis aleatórias normalmente distribuídas, pois as $Z(t)$ tem esta propriedade
- (4) Independem dos incrementos em qualquer outro pequeno intervalo de tempo.

Para obtermos o Processo de Einstein-Wiener com Drift v e Parâmetro de Variância σ^2 pomos

$$\Delta X(t) = v \Delta t + \sigma Z(t) \sqrt{\Delta t} \quad .$$

As grandezas v e σ^2 podem ser interpretadas como a média instantânea e a variância instantânea por unidade de tempo, ou seja

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} E(X(t + \Delta t) - X(t))$$

$$\sigma^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \text{Var}(X(t + \Delta t) - X(t)) \quad .$$

Podemos escrever formalmente a expressão dos incrementos de um Processo de Einstein-Wiener com Drift v , como uma Equação Diferencial Estocástica

$$dX(t) = v dt + \sigma Z(t) \sqrt{dt} \quad . \quad (a)$$

Interpretamos tal Equação Diferencial Estocástica da seguinte maneira: A mudança em $X(t)$ em um Intervalo de Tempo dt é uma variável aleatória normal com média vdt e Variância $\sigma^2 dt$ e é independente de $X(t)$ e da variação em qualquer outro intervalo de tempo pequeno. Em outras palavras

$$(1) E(dX(t)) = vdt$$

$$(2) \text{Var}(dX(t)) = \sigma^2 dt$$

$$(3) \text{Cov}(dX(t), dX(u)) = 0, \quad t \neq u \quad .$$

É óbvio que o Processo de Einstein-Wiener é Markoviano pois

se conhecermos $X(t) = a$, a distribuição de $X(u)$ ($u > t$), está fixada, a saber

$$X(u) = a + v(u - t) + \sigma(u - t)^{1/2}Z(t) \quad ;$$

Como um Modelo para o Movimento Browniano de uma Partícula, o Processo de Einstein-Wiener tem alguns defeitos. Por exemplo, a mudança na posição $\Delta X(t)$ em um pequeno intervalo de tempo Δt é tal que $\Delta X(t) = \sigma(\Delta t)^{1/2}Z(t)$. E assim $\Delta X(t) \sim (\Delta t)^{1/2}$ ou seja $\Delta X(t)$ é da ordem de magnitude de $(\Delta t)^{1/2}$.

Segue-se então daí que

$$\frac{\Delta X(t)}{\Delta t} \sim \frac{(\Delta t)^{1/2}}{\Delta t} = (\Delta t)^{-1/2} \quad ,$$

e portanto a velocidade da partícula Browniana tem ordem de magnitude de $(\Delta t)^{-1/2}$, a qual fica infinita quando $\Delta t \rightarrow 0$. Contudo, para valores de t grandes se comparado com os intervalos de tempo entre colisões sucessivas, tem sido encontrado que o Processo de Einstein-Wiener funciona bem como uma representação do Movimento Browniano. Examinaremos a seguir um outro modelo (o Processo de Ornstein-Uhlenbeck) o qual é também satisfatório para t pequeno. Como um Processo Estocástico, entretanto, o Processo de Einstein-Wiener é perfeitamente próprio e de considerável importância. As realizações ou trajetórias de tais Processos enquanto contínuas não são diferenciáveis, porquanto em qualquer intervalo limitado, as trajetórias têm um número infinito de pequenos picos.

II.C.2.2- O PROCESSO DE ORNSTEIN-UHLENBECK

Vamos agora considerar um Modelo Alternativo do Movimento Browniano, devido a Ornstein e Uhlenbeck. Neste modelo consideramos a velocidade $V(t)$ de uma Partícula Browniana no tempo t ao invés do seu deslocamento $X(t)$, desde que o seu Momentum Linear $mV(t)$ é afetado pelo Fenômeno de Impacto.

Em um pequeno intervalo de tempo existem dois fatores os quais afetam a mudança na velocidade da partícula. São eles:

- (1º) A Resistência Friccional ou de Atrito da Partícula com o Meio Circundante. Tal efeito é proporcional a $V(t)$.
- (2º) Os Impactos Aleatórios de Partículas Vizinhas, cujo efeito em sucessivos e pequenos intervalos de tempo podem ser representados por variáveis aleatórias independentes e com média zero, as quais tomamos como sendo os incrementos de um Processo de Einstein-Wiener sem Drift.

Desse modo, resulta que

$$dU(t) = - \beta U(t) dt + d Y(t) \quad ,$$

onde $Y(t)$ é um Processo de Einstein-Wiener (sem Drift) com parâmetro de variância σ^2 , e onde β é o coeficiente de atrito.

Desde que

$$dY(t) = \sigma Z(t) \sqrt{dt} \quad ,$$

onde $Z(t)$ é um Processo Gaussiano Puramente Aleatório com Média Z_e

ro e Variância um, resulta que os incrementos do Processo de Ornstein-Uhlenbeck se escrevem como

$$dU(t) = \beta U(t) dt + \sigma Z(t) \sqrt{dt} \quad ,$$

o qual pode ser escrito condicionalmente a $U(t) = u$, como

$$dU(t) = -\beta u dt + \sigma Z(t) \sqrt{dt} \quad .$$

Mas da expressão da Equação Diferencial Estocástica Geral para um Processo de Difusão [09 pg 217 eq. 56]

$$dX(t) = \beta(x, t) dt + Z(t) \sqrt{\alpha(x, t)} dt \quad ,$$

segue-se que o Processo de Ornstein-Uhlenbeck $(U(t))_{t \in T}$ é um Processo de Difusão com Média Infinitesimal $-\beta u$ e Variância Infinitesimal σ^2 .

Pode-se mostrar ([09]) que para tal processo tem-se

$$E(U(t)) = u_0 e^{-\beta t} \quad , \quad u_0 = \text{velocidade inicial}$$

$$\text{Var}(U(t)) = \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}) \quad .$$

Fazendo-se $t \rightarrow +\infty$ nas expressões anteriores, encontramos que

$$E(U(t)) = 0, \quad \text{Var}(U(t)) = \frac{\sigma^2}{2\beta} \quad .$$

Obtivemos assim uma distribuição de equilíbrio para a Ve-

locidade $U(t)$ da Partícula Browniana, a qual é normal com média zero e variância $\frac{\sigma^2}{2\beta}$. Este resultado está de acordo com a Lei de Maxwell para a frequência de distribuição de velocidade de partículas em um meio gasoso em equilíbrio, segundo a qual as componentes cartesianas da velocidade têm independentes distribuições normais com média zero e variância comum.

O processo de Ornstein-Uhlenbeck, assim obtido, é Gaussiano, Markoviano, mas não possui incrementos independentes. Vamos a seguir obter a distribuição dos deslocamentos do processo $U(t)$.

Para obtermos a Distribuição dos Deslocamentos, observe-mos que em um pequeno intervalo de tempo dt temos

$$dX(t) = U(t) dt \quad ,$$

onde $X(t)$ é a posição da partícula no tempo t .

Integrando formalmente a equação anterior obtemos:

$$X(t) - X(0) = \int_0^t U(s) ds \quad .$$

A Integral aparecendo no segundo membro da equação acima tem significado como uma Integral Estocástica. Para o significado da mesma ver a referência [09].

Suponhamos agora que o Processo $\{U(t)\}$ está em Equilíbrio Estatístico. Neste caso, como já vimos antes, temos que $E(U(t)) = 0$ e $\text{Var}(U(t)) = \frac{\sigma^2}{2\beta}$.

Assim ([09]):

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(U(s), U(s')) &= E(U(s) U(s')) \\
&= E(U(s) \cdot E(U(s') | U(s))) \quad (s' > s) \\
&= E((U(s))^2) e^{-\beta(s'-s)} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\beta} e^{-\beta(s'-s)}
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
E(U(s)) &= u_0 e^{-\beta t} \\
\text{Var}(U(s)) &= \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t})
\end{aligned}$$

Desse modo resulta então os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
E(X(t) - X(0)) &= 0 \\
\text{Var}(X(t) - X(0)) &= \frac{\sigma^2}{\beta^3} (\beta t - 1 + e^{-\beta t})
\end{aligned}$$

Desde que o Processo $\{U(t)\}$ é Gaussiano, segue-se que $X(t) - X(0)$ é Gaussiano e assim $X(t) - X(0)$ está normalmente distribuído e para t grande ele é tal como o Processo de Einstein-Wiener no sentido de que a sua Variância é assintoticamente proporcional a t .

De fato, como vimos acima

$$\text{Var}(X(t) - X(0)) = \frac{\sigma^2}{\beta^3} (\beta t - 1 + e^{-\beta t})$$

e fazendo-se aí $t \rightarrow +\infty$ obtemos:

$$\text{Var}(X(t) - X(0)) = \frac{\sigma^2}{\beta^3} (\beta t - 1) .$$

Agora, para t pequeno temos que

$$\text{Var}(X(t) - X(0)) \cong \frac{\sigma^2}{2\beta} t^2 ,$$

uma vez que para t pequeno

$$e^{-\beta t} \cong 1 - \beta t + \frac{\beta^2}{2} t^2 ;$$

em contraste com o processo de Einstein-Wiener para o qual os incrementos sempre têm variância proporcional a t .

Desse modo o processo de Ornstein-Uhlenbeck resolve o Problema da representação do Movimento Browniano, quando Δt é pequeno se comparado com o Intervalo de Tempo entre Colisões Sucessivas das Partículas.

II.C.3- PROCESSOS DE DIFUSÃO GERAL. AS EQUAÇÕES DE KOLMOGOROV - FOKKER - PLANCK

Vamos apresentar nesta seção como se dá a evolução em tempo dos Processos Estocásticos ou seja que equações diferenciais são satisfeitas pela densidade de probabilidade do processo. Isto será feito para uma classe especial de processos de Markov os quais denominamos de Processos de Difusão. Podemos, em tal descrição, adotar ou o ponto de vista forward ou o ponto de vista backward. Temos apresentado nas seções anteriores a descrição forward dos processos, todavia desejamos considerar, de um ponto de vista físico, a des-

crição backward dos processos estocásticos.

Como já ficou estabelecido na seção II.C.1, a densidade de Probabilidade Condicional $P(x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1}, \dots, x_1 t_1)$ definida para Processos de Markov por

$$P(x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1}, \dots, x_1 t_1) = P(x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1})$$

é chamada a Função de Densidade de Transição de Probabilidade forward do processo, e ela representa a Probabilidade de encontrar o sistema no estado x_n no tempo t_n dado que o sistema se encontra no estado x_{n-1} no tempo t_{n-1} , ..., no estado x_1 no tempo t_1 com $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ e para $n > 1$ arbitrário.

Para a descrição backward dos processos necessitamos conceituar o que vem a ser a Densidade de Probabilidade Condicional Backward. Definimos tal Densidade por

$$P_*(x_1 t_1 | x_2 t_2, \dots, x_n t_n) = \frac{P(x_1 t_1, \dots, x_n t_n)}{P(x_2 t_2, \dots, x_n t_n)}$$

desde que $P(x_2 t_2, \dots, x_n t_n) \neq 0$, onde $t_n > \dots > t_2 > t_1$ para todo $n > 1$.

Tal expressão representa a Densidade de Probabilidade do Sistema se encontrar no estado x_1 no tempo t_1 dado que em tempos posteriores $t_n > t_{n-1} > \dots > t_2 > t_1$ ele se encontrava nos estados respectivos $x_n, x_{n-1}, \dots, x_3, x_2$.

Como ficou estabelecido na Referência [05] pg 40-42, a propriedade de Markov de um Processo Estocástico permanece inalterada ou é um invariante por uma "inversão temporal"; quer dizer, se um

do Processo Estocástico tem a propriedade

$$P(x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1}, \dots, x_1 t_1) = P(x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1})$$

na descrição forward, então ele tem propriedade similar

$$P_*(x_1 t_1 | x_2 t_2, \dots, x_n t_n) = P_*(x_1 t_1 | x_2 t_2)$$

na descrição backward.

Além disso para os Processos de Markov, como vimos anteriormente, as densidades de transição de Probabilidade entre Estados $P(x_t | y_s)$ caracterizam completamente o processo. Desse modo se conhecermos as equações diferenciais satisfeitas por tais densidades, resulta que integrando tais equações obteremos a panorâmica do processo. Em $P(y_s | x_t)$ ($s > t$) as Variáveis x e t são denominadas variáveis backward enquanto que y e s são chamadas de variáveis forward.

Temos visto, em uma observação que fizemos na seção anterior, que o Drift v e o Parâmetro de Variância σ^2 de um Processo $(X(t))_{t \in T}$ podem ser pensados como a Média e a Variância Instantânea do Processo. No caso de Processos mais gerais, como os que consideraremos a seguir, $v = b(x, t)$ e $\sigma^2 = D(x, t)$ e os mesmos são definidos por

$$b(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y - x) P(y, t+h | x, t) dy$$

$$D(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y - x)^2 P(y, t+h | x, t) dy, \quad \text{onde}$$

$x, y \in \mathbb{R}, t > 0$ e $\alpha > 0$.

Dizemos que um processo estocástico (X, P) é um Processo de Difusão se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

1. (X, P) é um processo de Markov.
2. A densidade de transição de probabilidade $P(y_s|x_t)$ do Processo X satisfaz as seguintes condições para todo $\alpha > 0$:

$$(i) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P(y, t+h|x, t) dy = 0, \text{ uniformemente em } x \text{ e } t.$$

- (ii) Existe uma função a valores reais $b(x, t)$ tal que para todo x e t :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x) P(y, t+h|x, t) dy = b(x, t).$$

- (iii) Existe para todo x e t uma função a valores reais $D(x, t)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x)^2 P(y, t+h|x, t) dy = D(x, t).$$

Observemos aqui que a condição (2i) acima nos garante que o processo $X(t, \omega)$ tem trajetórias contínuas [22].

Se admitirmos que a função densidade de transição de probabilidade $P(y_s|x_t)$ de um processo de difusão $X(t, \omega)$ seja diferenciável com respeito a t , s e duas vezes diferenciável com respeito a x , y , pode-se mostrar como feito na referência [21], pag. 214 - 220, que $P(y_s|x_t)$ satisfaz as equações de Kolmogorov-Fokker-Planck (KFP):

1. Equação backward:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - b(x, t) \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{D(x, t)}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

2. Equação forward:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = - \frac{\partial}{\partial y} (b(y, s) P(ys|xt)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (D(y, s) P(ys|xt)).$$

De um ponto de vista prático as equações forward e backward tem suas utilidades em circunstâncias apropriadas, como é o caso dos Processos de Markov.

Por exemplo, se estamos interessados na distribuição de probabilidade de $X(t)$ para um dado valor inicial $X(t) = x_0$, então é óbvio que o ataque ao problema deve ser feito via a equação forward. Contudo se estamos interessados, digamos, na distribuição do tempo de primeira passagem de uma partícula em difusão por um estado fixo $X(t_0)$ como uma função da posição inicial $X(0) = x_0$, então a equação backward nos dá o método apropriado para o ataque ao problema [cf. 9].

No caso do processo de Einstein-Wiener do Movimento Browniano a Equação KFP forward fica sendo

$$\frac{\partial P(ys|xt)}{\partial s} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(ys|xt) ,$$

pois

$$D(y, s) \equiv D = \sigma^2 \quad \text{e} \quad b(y, s) \equiv 0 .$$

Esta Equação Diferencial é a conhecida equação de di-

fusão clássica. Mostra-se na teoria das equações diferenciais parciais que a solução desta equação, $P(y_s|x_t)$, está dada por

$$P(y_s|x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(s-t)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2D(s-t)}\right).$$

Além disso $P(y_s|x_t)$ satisfaz à seguinte condição inicial

$$\lim_{s \rightarrow t^+} P(y_s|x_t) = \delta(y-x).$$

Desse modo a solução fundamental $P(y_s|x_t)$ da equação de difusão é essencialmente uma distribuição do tipo delta de Dirac.

Vamos agora apresentar as equações KFP escritas em termos da densidade $\rho(x, t)$ do processo, pois nesta forma é que elas aparecerão no capítulo IV deste trabalho, quando lá tratarmos da equivalência entre os processos de difusão e os processos quânticos.

1. Equação backward

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (b_*(x, t) \rho(x, t)) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (D(x, t) \rho(x, t))$$

2. Equação forward

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (b(x, t) \rho(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (D(x, t) \rho(x, t))$$

Aqui $b_*(x, t)$ está dado por

$$b_*(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} P_*(x_t|y, t-h) (y-x) dy.$$

II.D- ALGUMAS OBSERVAÇÕES SOBRE A MECÂNICA QUÂNTICA E SEU FORMALISMO MATEMÁTICO

Fizemos inicialmente nesta seção um rápido apanhado sobre a história da descoberta da Mecânica Quântica e em seguida apresentamos não uma axiomatização da Mecânica Quântica mas meramente um resumo compacto do seu formalismo matemático como ele existe no presente e na prática. Tal formalismo matemático foi desenvolvido via o Operador Densidade. A vantagem desse modo de apresentação reside em que o estado de um dado sistema, assim representado, estará definido de maneira única, enquanto que o Ket representando o estado Dinâmico de um Sistema, quando este é completamente conhecido, é quando muito definido a menos de um fator de fase.

II.D.1- ALGUMAS OBSERVAÇÕES SOBRE A MECÂNICA QUÂNTICA

A Mecânica Quântica moderna foi descoberta nos anos 1925-1926. Suas principais características foram rapidamente estabelecidas e ela tem mudado muito pouco no decorrer desses anos. Esta Teoria originou-se em uma tentativa de resolver dois enigmas: o espectro atômico discreto e a natureza de onda e partícula da matéria e radiação. Dados espectroscópicos foram interpretados como sendo a evidência para o fato de que os átomos são sistemas mecânicos os quais podem existir em estados estacionários, somente para um certo conjunto de valores discretos de energia.

Em 1900 Planck introduziu o quantum de ação h e em 1905 Einstein postulou partículas de luz com energia $E = h\nu$ (ν a frequência). Em 1924 De Broglie pôs juntas as duas fórmulas $E = mc^2$ e $E = h\nu$, e inventou as Ondas de Matéria. A natureza ondulatória da matéria recebeu confirmação experimental no experimento de difração de elétrons de Davisson-Germer, realizado em 1927, e suporte teórico com o trabalho de Schrödinger de 1926.

Certamente ninguém duvida que a Mecânica Quântica Moderna é uma teoria firmemente estabelecida. Todavia esta teoria tem se arrastado em dificuldades conceituais desde o seu nascimento como é bem conhecido pelas visões opostas dos seus fundadores (e.g. Einstein, Schrödinger, de Broglie, versus Bohr, Heisenberg, Dirac ...). Veja o livro do Jammer para estes aspectos da Mecânica Quântica.

Poucos anos após os fundamentos da Mecânica Quântica Moderna terem sido estabelecidos, surgiram as primeiras tentativas para revisar a recém surgida teoria que já desde o início alcançava grande sucesso. Uma das direções que começou a se desenvolver e que diz respeito a este nosso trabalho de pesquisa é aquele que consiste em interpretar os Processos Quânticos como um Processo de Difusão. Esta direção é hoje conhecida como a Interpretação Estocástica da Mecânica Quântica. No Capítulo IV, seção IV.B, deste trabalho é feita uma revisão histórica sobre tal interpretação, bem

como na seção seguinte é estabelecida matematicamente a equivalência entre os processos de difusão e a Mecânica Quântica.

II.D.2- O FORMALISMO MATEMÁTICO DA MECÂNICA QUÂNTICA VIA O OPERADOR DENSIDADE

II.D.2.1- AS DESCRIÇÕES CLÁSSICA E QUÂNTICA DOS SISTEMAS FÍSICOS

Em Física Clássica o estado dinâmico de um dado sistema estará determinado em cada instante, desde que se conheça nesse instante os valores assumidos pelas variáveis dinâmicas associadas com o sistema. Essas variáveis dinâmicas podem, em princípio, serem todas elas determinadas simultaneamente com infinita precisão. O objetivo da teoria clássica é enumerar essas variáveis dinâmicas e então descobrir e estudar suas equações de movimento.

Em Física Quântica, a relação entre estados dinâmicos e variáveis dinâmicas é muito menos direta. No processo de medida de uma dada variável dinâmica, o estado dinâmico do sistema sobre o qual a medida é realizada, é em geral modificado pela intervenção do ato de medir. Existe na Mecânica Quântica uma grande controvérsia sobre como a gente deve entender a relação entre a coisa que está sendo medida e o aparelho. Esta modificação a qual é usualmente negligenciada em Física Clássica, deixa de ser negligível na escala microscópica e a mesma surge como uma não predictível e incontrolável perturbação do sistema e coloca um limite para a precisão com a qual as variáveis dinâmicas podem ser, todas elas, medidas simultaneamente. A Mecânica Quântica abandona o postulado fundamental da Física Clássica, de acordo com o qual todas as várias grandezas pertencentes ao sis-

tema tomam valores bem definidos em cada instante de tempo. Desse modo, podemos somente determinar para cada uma dessas variáveis, uma distribuição estatística de valores, a qual é a lei de probabilidade dos resultados de medida, na eventualidade que uma tal medida seja realizada; isto é, em princípio é impossível determinar todas as variáveis dinâmicas com precisão arbitrária.

Vemos assim que existe em Física Quântica uma mudança radical na relação entre estados dinâmicos e variáveis dinâmicas, em comparação com a Física Clássica. Isto exige naturalmente uma mudança radical na aparelhagem matemática dessa teoria.

II.D.2.2- O FORMALISMO MATEMÁTICO DA MECÂNICA QUÂNTICA

A Mecânica Quântica, e de fato qualquer teoria, pode ser dividida em:

- (A) Um formalismo matemático consistindo de um conjunto de conceitos primitivos, relações entre esses conceitos os quais podem ser ou postulados ou obtidos por dadas regras de dedução. e uma lei dinâmica.
- (B) Regras de correspondência, as quais relacionem os conceitos teóricos de (A), com o mundo da experiência.

Esta divisão não é de forma alguma absoluta, mas ela é conveniente para os propósitos que temos em mente. Tratemos portanto de cada parte em separado.

(A) - Os conceitos primitivos da teoria quântica são aqueles de sistema, estado e observável.

(F.1)- A cada sistema corresponde um espaço de Hilbert \mathcal{H} .

(F.2)- Um estado é representado por um operador densidade $\hat{\rho}$, o qual é hermitiano, positivo definido e de traço unitário. Isto implica que qualquer operador estado pode ser diagonalizado em termos dos seus autovetores $|\psi_n\rangle$

$$\hat{\rho} = \sum_n \rho_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (1),$$

com

$$0 \leq \rho_n \leq 1 \text{ e } \sum_n \rho_n = 1$$

Um estado puro é caracterizado pela condição $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$. Segue-se que para um estado puro, existe exatamente um autovalor não-nulo de $\hat{\rho}$, digamos

$$\rho_n = 1 \text{ e } \rho_{n'} = 0 \quad \text{para } n \neq n'.$$

Neste caso, temos

$$\hat{\rho} = |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (2)$$

e desse modo um estado puro pode ser representado por um vetor no espaço de Hilbert \mathcal{H} do sistema.

(F.3)- Um observável \mathcal{A} é representado por um operador hermiteano \hat{A} , atuando sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} do sistema. Ele tem uma representação espectral

$$\hat{A} = \sum_n a_n \hat{P}_n ,$$

onde os \hat{P}_n são os operadores projeção ortogonal, os quais relacionam-se aos autovetores ortonormais de \hat{A} por

$$\hat{P}_n = \sum_a |a, a_n\rangle \langle a, a_n| \quad (3).$$

Aqui os números a_n são os autovalores de \hat{A} e o parâmetro a denota os autovetores degenerados os quais são associados ao mesmo autovetor $|a_n\rangle$ de A . As somas ficam integrais no caso de \hat{A} ter um espectro contínuo.

A equação

$$\hat{A} = \sum_n a_n \hat{P}_n$$

é equivalente a afirmação de que um observável deve possuir um conjunto ortogonal completo de autovetores, ou seja, uma base de autovetores.

(F.4)- O valor médio, ou média, de um observável \hat{A} no estado $\hat{\rho}$ está dado por

$$\langle \hat{A} \rangle = T_r(\hat{\rho}\hat{A}) , \quad (4)$$

onde T_r significa o traço do operador entre parentesis.

Para um estado puro representado pelo vetor normalizado $|\psi\rangle$, a expressão anterior (4) reduz-se a

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle . \quad (5)$$

Introduzindo a função característica $f(\xi) = \langle e^{i\xi\hat{A}} \rangle$, podemos obter a distribuição estatística dos resultados do observável \hat{A} no estado $\hat{\rho}$, uma vez que uma distribuição estatística de resultados fica completamente determinada pela especificação da função característica.

(F.5)- Os únicos resultados possíveis da medida de um observável \hat{A} são os seus autovalores, e as probabilidades de cada um dos seus autovalores a_n podem ser calculadas da seguinte maneira:

No caso de um estado puro representado pelo Ket normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade do autovalor a_n de \hat{A} está dada por:

$$\sum_a |\langle \psi | a, a_n \rangle|^2$$

que no caso não degenerado se reduz a

$$|\langle \psi | a_n \rangle|^2 .$$

(F.6)- A lei dinâmica ou equação do movimento dependo do sistema físico sob consideração; isto é, do número de graus de liberdade do sistema, se o sistema é relativístico ou não. Mas, em cada caso ela pode ser escrita na forma

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^{-1}(t, t_0) \quad (6)$$

em geral, ou

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (7)$$

para um estado puro, onde $\hat{U}(t, t_0)$ é um operador unitário, chamado o operador evolução.

Temos dado dessa forma, não uma axiomatização da Mecânica Quântica, mas meramente um resumo compacto do seu formalismo matemático, como ele existe no presente e na prática.

(B) - As regras de correspondência devem relacionar os conceitos primitivos de sistema, estado e observável à realidade empírica. Isto nos possibilita uma interpretação mais específica para as médias e probabilidades introduzidas em (F.4) e (F.5).

A exigência natural colocado sobre um observável, é que seremos capazes de observá-lo. Mais precisamente, um observável é uma variável dinâmica cujo valor pode, em princípio, ser medido. Para variáveis canonicamente conjugadas, os operadores correspondentes são obtidos via a relação de comutação canônica de Dirac

$$\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar \hat{Id} \quad ,$$

onde \hat{Id} é o operador identidade.

Não existe regra geral para construir um único operador para representar uma função $f(\hat{q}, \hat{p})$ em virtude de não-comutatividade de \hat{q} e \hat{p} . Todavia o caso mais geral não parece surgir na prática.

Observemos que a axiomatização da Mecânica Quântica não nos dá uma maneira de encontrar o espaço Hilbert \mathcal{H} que corresponde a um dado sistema físico, nem os operadores que correspondem aos observáveis físicos, nem o operador \hat{H} que dá a evolução em tempo de dado sistema físico. Estas escolhas de \mathcal{H} , os operadores (observáveis) e \hat{H} vêm da experiência via certas regras de correspondência en

tre Física Clássica e Física Quântica. Desta forma os axiomas nos garantem a existência de \mathcal{K} , os operadores (observáveis) e \hat{H} .

II.D.2.3- O OPERADOR EVOLUÇÃO

Pelo que temos visto no parágrafo anterior, a evolução em tempo de um sistema quântico está dada no caso geral por

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^{-1}(t, t_0) \quad (6),$$

e por

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (7)$$

no caso de um estado puro, onde $\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}$ é um operador unitário ou seja $\hat{U}\hat{U}^* = \hat{U}^*\hat{U} = \hat{Id}$ (em particular $\hat{U}^* = \hat{U}^{-1}$).

Vamos admitir que o estado do sistema é perfeitamente bem conhecido, em um dado instante de tempo t_0 , como $|\psi(t_0)\rangle$. Então de acordo com a equação (7), o seu estado $|\psi(t)\rangle$ em um tempo posterior $t > t_0$, vem dado por

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle .$$

Algumas propriedades decorrem imediatamente desta equação:

(1)- Para $t = t_0$ resulta que $|\psi(t_0)\rangle = \hat{U}(t_0, t_0) |\psi(t_0)\rangle$, e assim $\hat{U}(t, t_0)$ satisfaz à condição inicial

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{Id} .$$

(2)- $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \hat{U}(t, t_0) \psi(t_0) | \hat{U}(t, t_0) \psi(t_0) \rangle =$
 $= \langle \psi(t_0) | \hat{U}^*(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) \psi(t_0) \rangle$
 $= \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle .$

Esta propriedade nos diz que na evolução em tempo do sistema, a normalização do sistema não muda; isto é, se $\|\psi(t_0)\| = 1$, então $\|\psi(t)\| = 1$ em todos os instantes posteriores ($t > t_0$).

(3)- Consideremos os instantes de tempo t , t_1 , t_0 e tais que $t > t_1 > t_0$. Em virtude da equação (7), podemos escrever:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_1)|\psi(t_1)\rangle$$

$$|\psi(t_1)\rangle = \hat{U}(t_1, t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

e desse modo resulta que

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_1) \cdot \hat{U}(t_1, t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

Mas em virtude da equação (7)

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

Portanto, comparando as duas últimas equações resulta, já que $|\psi(t)\rangle$ é arbitrário:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t_1) \cdot \hat{U}(t_1, t_0)$$

Esta regra de composição do operador evolução é conhecida como a propriedade de semigrupo de \hat{U} .

Segue-se desta relação, pondo $t = t_0$ que

$$\hat{U}(t_0, t_1) \cdot \hat{U}(t_1, t_0) = \hat{U}(t_0, t_0) = \hat{I}d$$

ou seja

$$\hat{U}(t_1, t_0) = \hat{U}^{-1}(t_0, t_1)$$

Vamos a seguir determinar a equação diferencial a qual deve ser satisfeita pelo operador evolução.

Um operador unitário \hat{U} diz-se um operador infinitesimal se

$$\hat{U} \equiv \hat{I}d + i\epsilon\hat{F} \quad ,$$

onde ϵ é uma quantidade infinitesimal real. Dizemos então neste caso que \hat{U} está infinitamente próximo à identidade.

Da condição de unitariedade de \hat{U} ou seja de

$$\hat{U}\hat{U}^* = \hat{U}^*\hat{U} = \hat{I}d \quad ,$$

resulta que

$$(\hat{I}d + i\epsilon\hat{F})(\hat{I}d - i\epsilon\hat{F}^*) = (\hat{I}d - i\epsilon\hat{F}^*)(\hat{I}d + i\epsilon\hat{F}) = \hat{I}d$$

e em particular que

$$(\hat{I}d + i\epsilon\hat{F})(\hat{I}d - i\epsilon\hat{F}^*) = \hat{I}d$$

ou desenvolvendo

$$\hat{I}d - i\epsilon\hat{F} + i\epsilon\hat{F} + \epsilon^2\hat{F}\hat{F}^* = \hat{I}d \quad .$$

Desprezando o termo em ϵ^2 obtemos

$$i\epsilon\hat{F} = i\epsilon\hat{F}^* \quad \text{e daí } \hat{F} = \hat{F}^* \quad .$$

Desse modo o operador \hat{F} é hermitiano.

Consideremos agora um instante de tempo $t - dt$ imediatamente antes de t . Em virtude da propriedade de semigrupo do operador e-

evolução \hat{U} , temos:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t - dt) \cdot \hat{U}(t - dt, t_0) \quad .$$

Agora, se dt é pequeno, então $\hat{U}(t, t - dt)$ é um operador unitário infinitesimal, e o intervalo de tempo $-dt$ é o seu parâmetro.

Assim, pelo que vimos antes $\hat{U}(t, t - dt) = \text{Id} - \frac{i}{\hbar} dt \hat{H}$, onde \hat{H} é um operador hermiteano, e o fator $\frac{i}{\hbar}$ ($\hbar = \text{constante de Planck } h \text{ dividida por } 2\pi$) tem sido introduzido, para que o operador \hat{H} tenha dimensão de energia.

Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= (\hat{\text{Id}} - \frac{i}{\hbar} dt \hat{H}) \cdot \hat{U}(t - dt, t_0) \\ &= \hat{U}(t - dt, t_0) - \frac{i}{\hbar} dt \hat{H} \cdot \hat{U}(t - dt, t_0) \end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{1}{dt} (\hat{U}(t, t_0) - \hat{U}(t - dt, t_0)) = - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{U}(t - dt, t_0) \quad .$$

Fazendo $dt \rightarrow 0$, encontraremos

$$i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt}(t, t_0) = \hat{H} \cdot \hat{U}(t, t_0) \quad ,$$

que é a equação diferencial do operador evolução.

Temos então o seguinte problema de valor inicial para o operador evolução

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H} \hat{U}(t, t_0)$$

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{\text{Id}} \quad . \quad (8)$$

Este problema de valor inicial pode ser transformado na forma equivalente

$$U(t, t_0) = \text{Id} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H U(t', t_0) dt' \quad . \quad (9)$$

As equações em (8) ou a equação integral em (9) expressam a lei fundamental da evolução de um sistema quântico, descrito por um estado puro $|\psi(t)\rangle$.

Consideremos agora o caso geral, no qual a evolução em tempo está dada por

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0) \cdot \hat{\rho}(t_0) \cdot \hat{U}(t, t_0) \quad .$$

Ora, as equações de movimento do operador \hat{U} e do seu adjunto \hat{U}^* estão dadas, respectivamente, por

$$i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} = \hat{H} \hat{U} \quad (10)$$

e

$$-i\hbar \frac{d\hat{U}^*}{dt} = \hat{U}^* \hat{H}^* \quad . \quad (11)$$

Derivando com respeito a t membro a membro a equação

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U} \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^* \quad ,$$

encontramos

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\hat{U}}{dt} \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^* + \hat{U} \hat{\rho}(t_0) \frac{d\hat{U}^*}{dt} \quad .$$

Agora, levando-se em conta as equações (10) e (11), obtemos

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{\hat{H}}{i\hbar} \cdot \hat{U} \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^* - \hat{U} \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^* \frac{\hat{H}}{i\hbar} ,$$

ou seja

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{H} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (12)$$

II.D.2.4- A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

Como temos visto no parágrafo anterior, as equações

$$i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt}(t, t_0) = \hat{H} \hat{U}(t, t_0), \quad \hat{U}(t, t_0) = \hat{Id} \quad (13)$$

ou a equação integral

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{Id} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H} \hat{U}(t', t_0) dt' \quad , \quad (14)$$

expressam a lei fundamental da evolução de um sistema quântico, descrito por um estado puro $|\psi(t)\rangle$.

Uma expressão equivalente desta lei é aquela de Schrödinger; ou seja, a equação diferencial do movimento dos estados dinâmicos do sistema.

Como sabemos, a evolução em tempo do vetor estado $|\psi(t)\rangle$ está dada por

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle .$$

Diferenciando com respeito a t membro a membro esta equação, obtemos:

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \left(\frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \right) . \quad (15)$$

Mas,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H} \hat{U}(t, t_0) .$$

Desse modo, resulta que

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle .$$

A equação

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (16)$$

nos dá a lei geral para a evolução em tempo do estado $|\psi(t)\rangle$ do sistema. Ela é a forma de Schrödinger ou a equação de Schrödinger para o movimento do sistema.

Esse modo de descrever a evolução dos sistemas quânticos é conhecido como a representação de Schrödinger. Neste tipo de descrição dos fenômenos quânticos, o estado do sistema é representado por um Ket $|\psi(t)\rangle$ em movimento; enquanto que as grandezas físicas, ou pelo menos aquelas que não dependem explicitamente do tempo, são representadas por observáveis estacionários.

CAPÍTULO III

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS DE PARTÍCULAS QUE INTERAGEM INDIRETAMENTE VIA EFEITO DE MEMÓRIA

III. A - INTRODUÇÃO

Apresentamos neste capítulo a descrição física e matemática de partículas interagindo indiretamente via estados estáveis ou memória do meio; tal interação indireta entre elas sendo descrita em termos matemáticos por uma família de processos estocásticos. A esta família de partículas interagindo indiretamente é associado um certo processo estocástico o qual é denominado Processo de Interferência da família e é mostrado que tal processo é um processo de difusão desde que cada membro da família o seja. Isto, como veremos no capítulo seguinte, tem interesse para a interpretação estocástica da Mecânica Quântica que iremos aqui considerar. Além disso são estabelecidos outros resultados sobre os Processos de Partículas Interagindo Indiretamente.

Mencionemos que muito trabalho tem sido feito no estudo de partículas que interagem diretamente umas com as outras em uma situação estocástica. Neste trabalho faremos um estudo da interação indireta entre partículas, às vezes denominada interação hidrodinâmica.

Também mencionemos que tem sido observado [26] que o tipo de processo estocástico que aparece na interpretação estocástica da Me-

cânica Quântica são Não-Clássicos no sentido de que o propagador (i.e. a densidade de transição de probabilidade condicional P) depende da densidade inicial $\rho_0(x, t)$, e que tal comportamento é manifestado por processos de partículas que interagem (diretamente). Enfatizemos que, naturalmente, modelos de partículas interagindo diretamente são inconsistentes com muitos experimentos, mas que isto não ocorre com modelos de partículas interagindo indiretamente (Buenomano [06]).

III. B - A DESCRIÇÃO FÍSICA. ALGUMAS NOTAÇÕES E LIMITAÇÕES

Vamos descrever nesta seção o tipo de interação física entre partículas que iremos estudar neste trabalho.

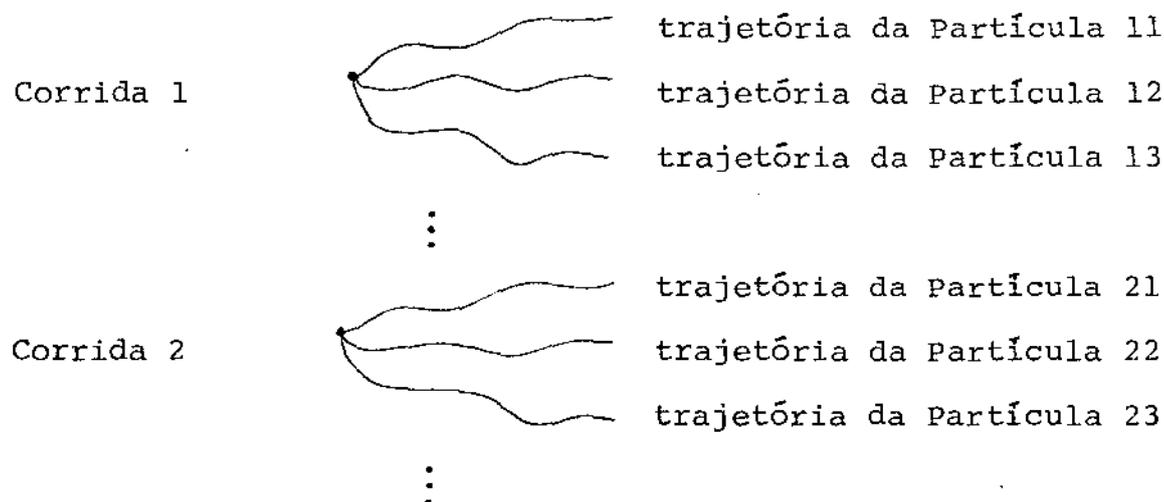
Denotemos por M uma pequena região do espaço na qual existe algum indefinido meio estocástico. Este meio é admitido possuir certas propriedades de estabilidade ou memória no seguinte sentido: admita que dispomos de um modo de criar partículas em algum estado inicial de probabilidade $\rho_0(x)$. Considere uma Partícula P_{a_1} passando através de M . Admitiremos que o Meio é de tal natureza que a Partícula deixa M em um novo estado, o qual é uma função de seu estado prévio e das propriedades da partícula. Sejam M_0 e M_1 , respectivamente, os Estados Probabilísticos de M antes e após a Partícula passar.

Agora considere uma segunda Partícula P_{a_2} passando através de M . Se P_{a_2} segue P_{a_1} suficientemente próxima em tempo então P_{a_2} interagirá com um Meio Estocástico diferente daquele que P_{a_1} interagiu. Em geral podemos falar da n -ésima Partícula passando atra-

vês de M , o qual se encontra inicialmente no estado M_{n-1} e é deixado no estado M_n . Desejamos estudar o comportamento médio de uma Sequência de Partículas as quais passam consecutivamente através do mesmo Meio, o qual possui o tipo descrito antes de Memória ou seja tem as Propriedades de Memória descritas acima. Em outras palavras, vamos considerar as Médias sobre todas as Sequências Possíveis de Partículas e sobre todos os Estados Possíveis do Meio.

Vamos aqui considerar também uma certa Escala de Tempo. Consideraremos somente a situação onde o tempo de decaimento da Memória do Meio é grande quando comparado ao tempo de separação entre Partículas Consecutivas. Admitiremos também que nunca existe mais de uma Partícula em um dado Tempo em nosso Sistema. Portanto, por definição, uma dada Partícula pode somente interagir com Prévias Partículas Indiretamente Via Efeito de Memória do Meio. Com estas restrições podemos então falar, por conveniência de expressão, como se a memória fosse completamente estável e não mencionar explicitamente o intervalo de tempo entre as Partículas.

Vamos a seguir descrever pictoricamente a situação tratada acima.



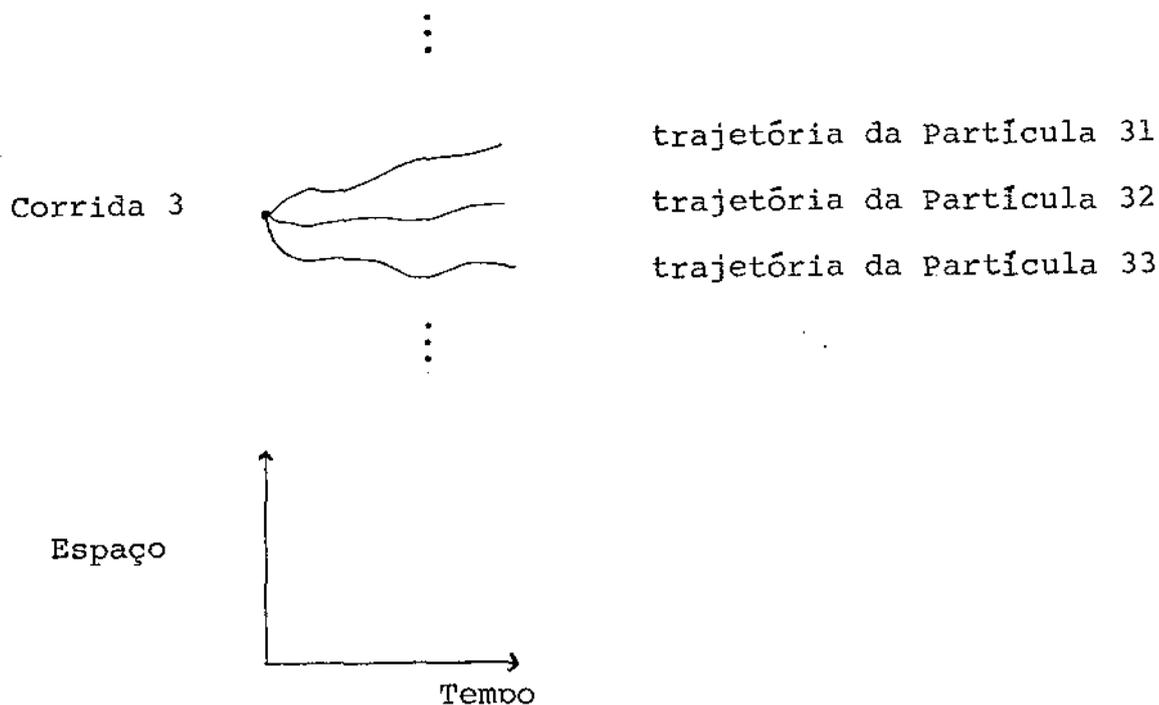


Figura- Existem infinitas corridas independentes e distintas. Cada corrida tem um número infinito de partículas as quais podem interagir com prévias partículas na mesma corrida indiretamente via efeito de memória.

Na descrição pictórica, estamos imaginando que temos um número infinito de corridas estritamente independentes. Isto é, tomamos as Corridas fisicamente separadas em Espaço e Tempo. Aqui cada Corrida consiste de um Número Infinito de Partículas. Na Figura as Partículas são mostradas iniciando todas elas o seu movimento em uma origem comum. As Partículas de uma dada Corrida são separadas a proximadamente por um tempo Σ . Como discutido antes, Σ é admitido como sendo suficientemente grande de maneira que duas partículas nunca estão no sistema ao mesmo tempo. Por outro lado Σ é admitido também ser suficientemente pequeno em comparação ao tempo de vida da

memória. Partículas em Diferentes Corridas, por definição, nunca podem interagir umas com as outras.

Na representação usual dos Processos de Difusão Clássicos ou Processos de Movimento Browniano, tais como o Processo de Einstein-Wiener e o Processo de Ornstein-Uhlenbeck, as médias são tomadas sobre Partículas Independentes Que Não Interagem. Em nosso modelo devemos determinar Médias sobre Corridas Independentes, ou seja sobre um Ensemble de Corridas, cada Corrida tendo Partículas Interagindo Indiretamente.

Chamaremos o conjunto consistindo da 1^a Partícula em cada uma das Corridas, o primeiro Conjunto-Partícula. Similarmente chamaremos o conjunto consistindo da n-ésima partícula em cada uma das corridas, de n-ésimo Conjunto-Partícula. Seja $X_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, o Processo Estocástico o qual representa o movimento estocástico do n-ésimo Conjunto-Partícula. Sejam $P_n(ys|xt)$, $x, y \in R$, $t, s \in T = [0, \beta]$, $\beta > 0$, $t < s$ e $\rho_n(xt)$, respectivamente, a densidade de transição de probabilidade condicional e a densidade de probabilidade do Processo $X_n(t)$. Iremos neste trabalho nos restringir aos processos de difusão uni-dimensionais ou seja aos processos de difusão sobre a reta real, para a situação na qual $\rho_n(x, 0) = \rho_0(x)$ para todo n .

Podemos considerar que P_n define as propriedades do meio para o n-ésimo conjunto-partícula. O n-ésimo conjunto-partícula não pode afetar P_n , mas afetará P_m onde $m > n$. Isto se tornará mais claro no que segue.

Antes de prosseguirmos façamos algumas observações:

- 1^a)- Uma importante diferença entre o tipo de Comportamento Estocástico descrito e aquele dos Processos de Difusão Clássicos deve ser salientada. No Movimento Browniano as Propriedades Estocásticas do Meio são fixadas e não dependem de modo algum da densidade inicial $\rho_0(x)$. Isto é $P(ys|xt)$, a Densidade da Probabilidade Condicional, é inteiramente independente de $\rho_0(x)$. A $P(ys|xt)$ tem o papel de propagar um estado inicial $\rho_0(x)$, e neste sentido define o meio estocástico. Em nosso caso $P_n(ys|xt)$, $n > 1$, em geral dependerá de $\rho_0(x)$. Em particular isto significa que a velocidade posterior $b_n(x,t)$ e o Coeficiente de Difusão $D_n(x, t)$ do Processo $X_n(t)$ dependem de $\rho_0(x)$. Este é exatamente um dos atributos que o Processo Estocástico associado com a Equação de Schrödinger tem na interpretação estocástica da Mecânica Quântica. Vamos chamar o tipo de comportamento descrito acima como "Não-Clássico". Neste trabalho vamos mostrar que um tipo de processo não-clássico, resolve certos problemas nos fundamentos da Mecânica Quântica.
- 2^a)- Na Literatura a palavra "memória" é exclusivamente associada com memória Markov. Podemos expressar Memória Markov dizendo que ela é a memória que uma partícula individual tem do seu passado. Estamos usando a palavra memória, ou memória do meio, no sentido do meio ter memória de prévias partículas. Neste trabalho sempre usaremos a palavra memória para significar memória do meio.

III. C - A DESCRIÇÃO MATEMÁTICA EM TERMOS DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS.
ALGUNS CONCEITOS E DEFINIÇÕES

Vamos apresentar nesta seção a formulação matemática, via a teoria dos Processos Estocásticos, do nosso Modelo Físico de Partículas interagindo indiretamente via a Memória do Meio, do qual tratamos na seção anterior.

Seja $\{X_n(t, \omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de Processos Estocásticos

$$X_n : T \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

todos definidos sobre um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{V}, P_r)$, onde \mathcal{V} é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω e P_r é uma medida de probabilidade. Além disso cada Processo $X_n(t, \omega)$ tem uma densidade de Transição de Probabilidade $P_n(y_s | x_t)$, $t < s$, $x, y \in \mathbb{R}$, $t, s \in T = [0, \alpha] \subset \mathbb{R}$.

Chamamos $\{X_n(t, \omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma Família de Interferência ou uma Família de Partículas Interagindo Indiretamente se dois quais quer dos P_n diferem sobre um Conjunto de Medida de Lebesgue não-nula; isto é, se existem inteiros n_1, n_2 tais que

$$\mu \{y; P_{n_1}(y_s | x_t) \neq P_{n_2}(y_s | x_t)\} \neq 0$$

no sentido de Lebesgue para quaisquer valores fixados de x, t , e s .

Diremos que $\{X_n(t, \omega)\}$ é uma Família de Interferência Fraca ou uma Família de Partículas Interagindo Indiretamente Fracamente se duas quaisquer densidade de Transição diferem somente sobre um Conjunto de Medida de Lebesgue Nula.

Portanto, podemos considerar uma Família de Interferência $\{X_n, P_n\}$ como uma sequência de Processos Estocásticos realizando um certo tipo de evolução. Os P_n definem as propriedades do Meio após o n-ésimo Conjunto Partícula passar através dele em suas respectivas corridas. Observemos que as condições iniciais $p_n(x, 0)$ não afetam, por definição, P_n mas somente P_m com $m > n$.

Estamos interessados em estudar uma situação na qual o Meio atinge alguma propriedade de Equilíbrio ou Estado Estacionário; isto é, quando a sequência (P_n) tem um limite P . No que se segue será conveniente pensarmos nos P_n como evoluindo em termos do tempo discreto n . Chamaremos este tempo de Tempo Consecutivo, enquanto que o parâmetro t será denominado Tempo Usual ou Tempo Trajetória.

Antes de definirmos formalmente P , será conveniente fazer algumas considerações sobre notações:

- (1) Escreveremos para todo x, y para significar para todo $x, y \in R$.
- (2) Escreveremos para todo s, t para significar $s, t \in T = [0, \beta]$, $\beta \in R, \beta > 0$: s sempre será considerado maior que t .
- (3) $\lim_n = \lim_{n \rightarrow \infty}$.
- (4) $(\Omega, \mathcal{V}, P_r)$ é um Espaço de Probabilidade Fixo, sobre o qual estão definidos todos os nossos Processos Estocásticos $X_n(t, w)$.
- (5) Todos os Processos Estocásticos $X_n(t, w)$ serão sempre admitidos como sendo separáveis.
- (6) Iremos frequentemente escrever P_n no lugar de $P_n(y_s | x_t)$ ou $P_n(y, t+h | x, t)$.

- (7) Nos referiremos a um Processo Estocástico como (X, P) , ou X ou P . Vamos sempre supor que as densidades condicionais dos processos existem.
- (8) Nos referiremos a uma Família de Interferência como $\{(X_n, P_n)\}$ ou $\{X_n\}$ ou como $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, \mathbb{N} é o conjunto dos inteiros positivos e n está sempre em \mathbb{N} .

Seja $\{X_n(t, w)\}$ uma Família de Partículas Interagindo Indiretamente com Densidades de transição $P_n(x_2 t_2 | x_1 t_1)$, $P_n(x_3 t_3 | x_2 t_2, x_1 t_1)$... onde $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$, $t_1, t_2, \dots \in \mathbb{T}$ e $t_1 < t_2 < \dots$. Seja $\{X(t, w)\}$ um Processo Estocástico com densidade de transição $P(x_2 t_2 | x_1 t_1)$, $P(x_3 t_3 | x_2 t_2, x_1 t_1)$, Dizemos que (X, P) é um Processo de Interferência ou Processo de Partículas Interagindo Indiretamente da família (X_n, P_n) se

$$P(x_2 t_2 | x_1 t_1) = \lim_n P_n(x_2 t_2 | x_1 t_1)$$

$$\vdots$$

$$P(x_3 t_3 | x_2 t_2, x_1 t_1) = \lim_n P_n(x_3 t_3 | x_2 t_2, x_1 t_1)$$

$$\vdots$$

$$P(x_k t_k | x_{k-1} t_{k-1}, \dots, x_1 t_1) = \lim_n P_n(x_k t_k | x_{k-1} t_{k-1}, \dots, x_1 t_1)$$

$$\vdots$$

De agora em diante nos referiremos a (X, P) como um Processo de Interferência ou como um Processo de Partículas Interagin-

do Indiretamente, da família (X_n, P_n) . P está univocamente determinado pelas P_n , enquanto que X está somente determinado a menos de classes de equivalência.

Observemos que esta definição não personifica exatamente algumas idéias em Buonomano [06], mas ela representa mais uma conciliação.

Vamos apresentar a seguir um exemplo de uma Família de Interferência ou Família de Partículas Interagindo Indiretamente. Para isto, seja $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais estritamente positivos, a qual converge para o número real estritamente positivo D. Considere a Família de Processos Estocásticos (X_n) definidos pelas Densidades de Transição de Probabilidade

$$P_n(ys|xt) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_n(s-t)}} \exp \left[-\frac{(y-x)^2}{2 D_n(s-t)} \right].$$

Tal Família é denominada uma Família de Processos de Wiener.

Observemos que toda família de processos de Wiener (X_n, P_n) é uma família de partículas interagindo indiretamente, a qual tem como um processo de interferência o processo de Wiener X com a densidade de transição de probabilidade dada por

$$P(ys|xt) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(s-t)}} \exp \left[-\frac{(y-x)^2}{2D(s-t)} \right],$$

onde $D = \lim_n D_n > 0$, desde que para uma tal família e fixando-se x, s e t arbitrariamente, segue-se que para quaisquer inteiros positi-

vos α, β distintos, temos $\{y | P_\alpha(ys|xt) \neq P_\beta(ys|xt)\} = R$, o qual tem medida de Lebesgue não-nula.

Agora, uma vez que $D_n \rightarrow D > 0$ resulta que

$$\lim_n P_n(ys|xt) = P(ys|xt) \quad ,$$

como se verifica facilmente.

Ainda com relação à situação física descrita na figura da seção anterior, ela nos permite conceituar informalmente um processo Clássico, como aquela situação descrita na figura e tal que não existe efeito de memória ou seja não existe interação entre as partículas. É este o caso quando todos os Processos Estocásticos são idênticos ou seja o mesmo para todos os Conjuntos-Partículas.

Notemos que esta conceituação de Processo Clássico só faz sentido quando referida a uma Família de Processos os quais representam a situação física descrita na figura. Desse modo dentro desse ponto de vista, quando há interação entre as Partículas diremos que o Processo é de Interferência e quando não há interação diremos que se trata de um processo clássico.

III.D - ALGUNS RESULTADOS SOBRE OS PROCESSOS DE PARTÍCULAS QUE INTERAGEM VIA EFEITO DE MEMÓRIA

Vamos apresentar nesta seção alguns resultados sobre os processos de partículas que interagem indiretamente via efeito de memória, os quais foram considerados nas seções anteriores sob o ponto de vista físico. Antes porém demonstraremos o seguinte resultado, o qual é uma versão do Teorema de Moore ([18] capítulo VII).

LEMA

Seja $f_n(h, x, t)$ uma sequência de funções reais, onde $x \in \mathbb{R}$, $t, h \in [0, \beta]$, $\beta > 0$, $h > 0$. Admita que tal sequência satisfaz às seguintes condições:

- (1) $\lim_{h \rightarrow 0^+} f_n(h, x, t) = b_n(x, t)$, uniformemente em n, x e t .
 (2) $\lim_n f_n(h, x, t) = f(h, x, t)$, para todo $h > 0$ e uniformemente em x e t , onde $b_n(x, t)$ e $f_n(h, x, t)$ são funções reais.

Então existem os limites iterados $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_n f_n(h, x, t)$, $\lim_n \lim_{h \rightarrow 0^+} f_n(h, x, t)$ e tem-se a igualdade uniformemente em x e t

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_n f_n = \lim_n \lim_{h \rightarrow 0^+} f_n .$$

PROVA - Uma vez que todos os limites envolvidos são uniformes em x e t , tais variáveis serão omitidas nos argumentos que se seguem. (**)

Mostremos inicialmente que existe $\lim_N (\lim_{h \rightarrow 0^+} f_N(h)) = \lim_N b_N$ e para isto é suficiente mostrar que (b_N) é uma sequência de Cauchy.

Dado $\varepsilon > 0$ e tendo em vista a condição (1), existe $\delta > 0$ independente de P e x, t tal que $|f_P(h) - b_P| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo P e x, t se $0 < h < \delta$. (*)

Portanto fazendo $h = \frac{\delta}{2}$ temos

$$|b_N - b_M| \leq |b_N - f_N(\frac{\delta}{2})| + |f_N(\frac{\delta}{2}) - f_M(\frac{\delta}{2})| + |f_M(\frac{\delta}{2}) - b_M| .$$

Observemos agora que em virtude da condição (2), existe $N_0(\frac{\delta}{2})$ tal que para $M, N > N_0(\frac{\delta}{2})$ temos

**! Pois todas as estimativas podem ser feitas independentemente de x e t em virtude de que os limites em 1) e 2) existem uniformemente em x e t .

$$\left| f_N\left(\frac{\delta}{2}\right) - f_M\left(\frac{\delta}{2}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Observando que o primeiro e o terceiro termo são menores que $\frac{\varepsilon}{3}$ independentemente de M e N (em virtude do estabelecido anteriormente em (*)), concluímos que $|b_N - b_M| < \varepsilon$ desde que $M, N > N_0\left(\frac{\delta}{2}\right)$.

Desse modo mostramos que existe $\lim_N b_N = L$, uniformemente em x, t .

Passemos agora a estabelecer a existência do outro limite iterado, ou seja, vamos mostrar que existe

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\lim_N f_N(h) \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) = L^* .$$

Observemos que para todo N

$$|f(h_1) - f(h_2)| \leq |f(h_1) - f_N(h_1)| + |f_N(h_1) - f_N(h_2)| + |f_N(h_2) - f(h_2)| \quad (**).$$

Agora, com o $\delta > 0$ obtido anteriormente, notemos que para todo N (condição (1))

$$|f_N(h_1) - f_N(h_2)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ uniformemente em } x, t.$$

desde que $0 < h_1, h_2 < \delta$.

Fazendo-se em (**) $N \rightarrow \infty$ resulta (condição(2)) que o primeiro e terceiro termo do lado direito tendem para zero uniformemente em x e t e assim $|f(h_1) - f(h_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $0 < h_1, h_2 < \delta$.

Isto nos mostra que existe $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) = L^*$, uniformemente em x, t .

Resta-nos agora mostrar que os dois limites coincidem, isto é $L = L^*$.

Observemos que

$$|L - L^*| \leq |L - b_N| + |b_N - f_N(h)| + |f_N(h) - f(h)| + |f(h) - L^*| \quad (***)$$

Dado $\varepsilon > 0$ temos que pela condição (1) existe $\delta_1 > 0$ tal que $|b_N - f_N(h)| < \varepsilon$ desde que $0 < h < \delta_1$ e para todo N . Pelo fato de termos $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) = L^*$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(h) - L^*| < \varepsilon$, para $0 < h < \delta_2$.

Fixemos em (***) $\tilde{h} < \frac{1}{2} \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$. Assim

$$|L - L^*| \leq |L - b_N| + \varepsilon + |f_N(\tilde{h}) - f(\tilde{h})| + \varepsilon$$

Agora fazendo $N \rightarrow \infty$, obtemos que $L = L^*$.

Portanto, mostramos que

$$\lim_n \lim_h f_n(h, x, t) = \lim_h \lim_n f_n(h, x, t),$$

uniformemente em x e t . □

OBSERVAÇÃO: Notemos que é claro que se (1) e (2) não convergem uniformemente em x e t , mas só convergem para todo x e t , então a conclusão do lema é verdadeira para todo x e t . Usaremos este fato no que segue.

TEOREMA I

Seja (X, P) um processo de interferência da família de interferência $\{(X_n, P_n)\}$. Vamos admitir que cada (X_n, P_n) seja um processo de difusão com velocidade posterior $b_n(x, t)$ e coeficiente de difusão $D_n(x, t)$.

Então sob as condições abaixo (X, P) é um processo de difusão, com $b(x, t) = \lim_n b_n(x, t)$ e $D(x, t) = \lim_n D_n(x, t)$.

As P_n são admitidas satisfazerem as seguintes condições para todo $\alpha > 0$, para efeitos de permutabilidade dos limites iterados.

(1) Existe uma função a valores reais $Q(y, s, x, t)$ a qual é Lebesgue integrável com respeito a y e tal que

$$P_n(y_s | x_t) \leq Q(y, s, x, t) \quad ,$$

para quase todo y e para todo s, x, t e n .

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P_n(y, t+h | x, t) dy = 0, \text{ uniformemente em } n.$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x) P_n(y, t+h | x, t) dy = b_n(x, t) \text{ uniformemen}$$

te em n .

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x)^2 P_n(y, t+h | x, t) dy = D_n(x, t) \text{ uniforme-}$$

mente em n .

$$(5) \lim_n \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P_n(y, t+h | x, t) dy, \text{ existe para todo } h > 0 \text{ e uni-}$$

formemente em x e t .

PROVA - Devemos mostrar que o processo (X, P) satisfaz as condições de definição de um processo de difusão quais sejam:

1^a) (X, P) é um processo de Markov.

Ora, da definição de um processo de interferência e o fato de que cada X_n é Markoviano, temos

$$\begin{aligned} P(x_k t_k | x_{k-1} t_{k-1}, \dots, x_1 t_1) &= \lim_n P_n(x_k t_k | x_{k-1} t_{k-1}, \dots, x_1 t_1) = \\ &= \lim_n P_n(x_k t_k | x_{k-1} t_{k-1}) = P(x_k t_k | x_{k-1} t_{k-1}), \end{aligned}$$

para todo $k > 0$. Portanto o processo X é Markoviano.

2ª) A densidade de transição de probabilidade $P(y_s|x_t)$ do processo X , satisfaz os seguintes requisitos para todo $\alpha > 0$:

$$(i) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P(y, t+h|x, t) dy = 0, \text{ uniformemente em } x \text{ e } t.$$

t.

Ora, em virtude de que os processos X_n são de difusão temos que para todo $\alpha > 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P_n(y, t+h|x, t) dy = 0,$$

uniformemente em x e t . Além disso, tal limite também é uniforme em n em virtude da condição (2) deste teorema.

Para chegarmos à conclusão desejada mostremos inicialmente que

$$\lim_n \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P_n(y, t+h|x, t) dy = \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P(y, t+h|x, t) dy,$$

para todo $h > 0$.

Uma vez que os processos X_n são de difusão, segue-se que cada $P_n(y, t+h|x, t)$ é Lebesgue integrável com respeito a y no domínio considerado.

Como estamos supondo que (X, P) é um processo cujas densidades condicionais existem, então P é integrável e portanto mensurável, logo $P(y, t+h|x, t)$ é integrável em $|y-x| > \alpha$ e tem-se

$$\lim_n \int_{|y-x| > \alpha} P_n(y, t+h|x, t) dy = \int_{|y-x| > \alpha} P(y, t+h|x, t) dy$$

e assim

$$\lim_n \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P_n(y, t+h|x, t) dy = \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P(y, t+h|x, t) dy$$

para todo $h > 0$.

Agora consideremos a sequência

$$f_n(h, x, t) = \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P_n(y, t+h|x, t) dy .$$

Com relação a esta sequência temos em virtude do exposto que:

- (1) $\lim_{h \rightarrow 0^+} f_n(h, x, t) = 0$, uniformemente em n, x e t .
- (2) $\lim_n f_n(h, x, t)$ existe para todo $h > 0$ e uniformemente em x e t , em virtude da condição (5) do teorema. Além disso pelo que vimos antes:

$$\lim_n f_n(h, x, t) = \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P(y, t+h|x, t) dy .$$

Desse modo as condições do lema estão preenchidas com relação à sequência $f_n(h, x, t)$ e tem-se por esse lema que os limites iterados $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_n f_n(h, x, t)$ e $\lim_n \lim_{h \rightarrow 0^+} f_n(h, x, t)$, existem e tem-se a igualdade $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_n f_n(h, x, t) = \lim_n \lim_{h \rightarrow 0^+} f_n(h, x, t)$, para todo x e t ; e isto então estabelece o que desejávamos, por que daí segue-se que:

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P(y, t+h|x, t) dy = \\
& = \lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_n \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P_n(y, t+h|x, t) dy = \\
& = \lim_n \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P_n(y, t+h|x, t) dy = 0,
\end{aligned}$$

uniformemente em x e t .

(ii) existe uma função a valores reais $b(x, t)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x)P(y, t+h|x, t) dy = b(x, t),$$

para todo x e t .

Consideremos a sequência de funções

$$f_n(h, x, t) = \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x)P_n(y, t+h|x, t) dy.$$

Uma vez que os processos X_n são de difusão, segue-se que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f_n(h, x, t) = b_n(x, t)$$

para todo x e t . Além disso em virtude da condição (3) deste teorema temos que tal limite também é uniforme em n . Desse modo a condição (1) do lema está satisfeita para todo x e t .

Mostraremos a seguir que a 2^a condição do lema está satisfeita para a sequência $f_n(h, x, t)$, e a partir disto exibirmos a $b(x, t)$ com a propriedade desejada. Para isto, estabeleçamos inicialmente que

$$\lim_n \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x) P_n(y, t+h|x, t) dy = \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x) P(y, t+h|x, t) dy ,$$

para todo $h > 0$, x e t .

Ora, em virtude dos processos X_n serem de difusão, temos que a função $(y-x)P_n(y, t+h|x, t)$ é integrável no domínio considerado e além disso, em virtude da condição (1) do teorema, temos que

$$(y-x)P_n \leq \alpha Q,$$

com αQ integrável.

Agora lançando mão do teorema da convergência dominada de Lebesgue, tem-se que a função $(y-x)P(y, t+h|x, t)$ é integrável no conjunto $|y-x| \leq \alpha$ e obtemos:

$$\lim_n \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x) P_n(y, t+h|x, t) dy = \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x) P(y, t+h|x, t) dy$$

uma vez que

$$\lim_n P_n(y, t+h|x, t) = P(y, t+h|x, t) .$$

Assim, temos mostrado que existe

$$\lim_n f_n(h, x, t) = \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x) P(y, t+h|x, t) dy = f(h, x, t) ,$$

para todo $h > 0$, x e t .

Isto posto, as condições do lema estão preenchidas para todo x e t e segue-se que os limites iterados $\lim_n \lim_{h \rightarrow 0^+} f_n(h, x, t)$ e

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_n f_n(h, x, t)$ existem e são iguais para todo x e t . Portan-

to temos que

$$\begin{aligned}
\lim_n b_n(x, t) &= \lim_n \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x) P_n dy = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_n \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x) P_n(y, t+h|x, t) dy = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x) P(y, t+h|x, t) dy \equiv b(x, t) ,
\end{aligned}$$

para todo x e t , onde $b(x, t)$ é a velocidade posterior do processo (X, P) .

(iii) existe uma função a valores reais $D(x, t)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x)^2 P_n(y, t+h|x, t) dy = D(x, t) ,$$

para todo x e t .

Considerando a sequência de funções

$$f_n(h, x, t) = \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x)^2 P_n(y, t+h|x, t) dy ,$$

é uma vez que os processos X_n são de difusão, segue-se que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f_n(h, x, t) = D_n(x, t) ,$$

para todo x e t . Além disso, em virtude da condição (4) deste teorema, tal limite também é uniforme em n . Desta forma a condição (1) do lema está satisfeita para a sequência considerada.

Mostraríamos sem nenhuma dificuldade seguindo todos os passos do item anterior que

$$\lim_n f_n(h, x, t) = \lim_n \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x)^2 P_n(y, t+h|x, t) dy,$$

existe para todo $h > 0$ e para todo x e t .

Desse modo ficam preenchidas as duas condições do lema e tem-se que os limites iterados $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_n f_n(h, x, t)$ e $\lim_n \lim_{h \rightarrow 0^+} f_n(h, x, t)$, existem e são iguais para todo x e t . Portanto temos que

$$\begin{aligned} \lim_n D_n(x, t) &= \lim_n \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x)^2 P_n dy = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_n \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x)^2 P_n dy = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x)^2 P dy \equiv D(x, t) \end{aligned}$$

para todo x e t , onde $D(x, t)$ é o coeficiente de difusão do processo (X, P) . \square

Os teoremas seguintes mostram-nos que as condições do teorema anterior são razoáveis no sentido de que realmente existem famílias de interferência preenchendo tais condições

TEOREMA II

A família de interferência de Wiener, cujas densidades de transição de probabilidade são dadas por

$$P_n(y, t+h|x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_n h}} \exp \left[-\frac{(y-x)^2}{2D_n h} \right]$$

satisfaz as condições do teorema anterior. Desse modo o processo de interferência associado é um processo de difusão.

PROVA - Preenchimento da condição (1)

Devemos exibir uma função $Q(y, t+h|x, t)$ a qual seja integrável com respeito a y e limite todas as densidades de transição de probabilidade $P_n(y, t+h|x, t)$.

Uma vez que a sequência $\{D_n\}$ converge e assim é uma sequência limitada, faz sentido considerarmos os números

$$D_I = \inf_n \{ D_n \}$$

$$D_S = \sup_n \{ D_n \} .$$

Agora, e já que $D_n > 0$ para todo n e $D = \lim_n D_n > 0$, segue-se que D_I e D_S são ambos estritamente positivos. Além disso, em virtude da definição de D_I e D_S encontramos

$$P_n(y, t+h|x, t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi D_I h}} \exp \left[-\frac{(y-x)^2}{2D_S h} \right] .$$

Definindo para todo x, t, y e $h > 0$

$$Q(y, t+h, x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_I h}} \exp \left[-\frac{(y-x)^2}{2D_S h} \right] ,$$

temos que $Q(y, t+h, x, t)$ é Lebesgue integrável com respeito a y , e além disso

$$P_n(y, t+h, x, t) \leq Q(y, t+h, x, t) ,$$

para todo y, h, x, t e n .

Preenchimento da condição (2)

Uma vez que os processos X_n são processos de difusão, pois

são processos de Wiener, temos então que para todo $\alpha > 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi D_n h}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2D_n h}\right] dy = 0,$$

uniformemente em x e t .

O que devemos mostrar é que tal limite também ocorre uniformemente em n .

Observemos aqui que via a mudança de variável

$$z = \frac{y-x}{\sqrt{2D_n h}}, \quad dz = \frac{dy}{\sqrt{2D_n h}},$$

resulta que

$$\begin{aligned} \int_{|y-x| > \alpha} P_n(y, t+h|x, t) dy &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}}}^{\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}}} e^{-z^2} dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}}}^{\infty} e^{-z^2} dz = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}}}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}}} e^{-z^2} dz = \\ &= 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}}\right), \end{aligned}$$

$$\text{onde } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz.$$

Desse modo

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} P_n dy = 0 ,$$

uniformemente em x e t , quer dizer para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\frac{1}{h} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}} \right) < \varepsilon ,$$

quando $0 < h < \delta$, como era de se esperar, pois trata-se de um processo de difusão.

Tal convergência verifica-se uniformemente em n , uma vez que sendo a função $\operatorname{erfc}(x)$ monotona decrescente temos que

$$\frac{1}{h} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2D_S h}} \right) = \sup_n \left\{ \frac{1}{h} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}} \right) \right\} \geq \frac{1}{h} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}} \right) ,$$

para todo n , onde $D_S = \sup_n \{D_n\}$.

Seja agora $\varepsilon > 0$ dado. Então podemos escolher um $\delta > 0$ independente de n e tal que

$$\frac{1}{h} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2D_S h}} \right) < \varepsilon ,$$

quando $0 < h < \delta$. Isto então estabelece o que queríamos.

Preenchimento da condição (3)

Uma vez que para os processos X_n em pauta temos que $b_n(x, t) = 0$, para todo x, t e n , pois eles são processos de Wiener, resulta que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x) P_n(y, t+h|x, t) dy = 0 ,$$

para todo $\alpha > 0$ e para todo x e t .

O que devemos mostrar é que tal limite ocorre uniformemente em n . Para isto, observemos que via a mudança de variável

$$z = \frac{y - x}{\sqrt{2D_n h}}$$

temos que

$$\frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y - x) P_n dy = \frac{\sqrt{2D_n h}}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}}}^{\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}}} z \exp(-z^2) dz$$

Desta forma a integral é nula para todo n , pois o integrando é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico. Para todo $h > 0$, e portanto trivialmente converge uniformemente em n , isto é

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y - x) P_n(y, t+h|x, t) dy = 0$$

uniformemente em n ; e isto estabelece o que desejávamos.

Preenchimento da condição (4)

Como neste caso $D_n(x, t) = D_n$ para todo n , x e t , e já que tais processos são processos de difusão, temos que para todo n e $\alpha > 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y - x)^2 P_n(y, t+h|x, t) dy = D_n$$

para todo x e t .

Desejamos mostrar que tal limite verifica-se uniformemente em n . Para isto, observemos que via a mudança de variável

$$z = \frac{y - x}{\sqrt{2D_n h}}$$

temos que

$$\frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \alpha} (y-x)^2 P_n dy = \frac{4D_n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}}} z^2 \exp(-z^2) dz$$

O que queremos mostrar é que para todo $\varepsilon > 0$, existe δ independente de n tal que se $0 < h < \delta$, então

$$\left| \frac{1}{h} \int_{|y-x| < \alpha} (y-x)^2 P_n dy - D_n \right| < \varepsilon, \quad \forall n.$$

Temos

$$\left| D_n - \frac{4D_n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}}} z^2 e^{-z^2} dz \right| \leq D_s \left| 1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2D_s h}}} z^2 e^{-z^2} dz \right|$$

onde $D_s = \sup_n \{D_n\}$. Como D_s é constante, podemos escolher h suficientemente pequeno de modo que

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2D_s h}}} z^2 e^{-z^2} dz$$

é tão próximo de 1 quanto se queira.

Assim, para todo $\varepsilon > 0$ podemos escolher $\delta > 0$ tal que quando $0 < h < \delta$, temos:

$$\left| D_n - \frac{4D_n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}}} z^2 e^{-z^2} dz \right| < \varepsilon,$$

independente de n , como queríamos.

Preenchimento da condição (5)

Devemos agora mostrar que

$$\lim_n \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi D_n h}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2D_n h}\right) dy$$

existe para todo $h > 0$ e uniformemente em x e t .

Ora, em virtude do que obtivemos antes (cf. (02)), temos que:

$$\lim_n \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi D_n h}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2D_n h}\right) dy = \lim_n \frac{1}{h} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2D_n h}}\right).$$

Obviamente tal expressão converge uniformemente em x e t para todo $h > 0$, desde que tais variáveis não aparecem explicitamente nesta expressão. \square

Seja (X_n, P_n) uma Família de Interferência e (X, P) um Processo de Interferência Associado. Vamos a seguir dar condições as quais garantem que a Densidade de Probabilidade P do Processo (X, P) satisfaz as Equações de Kolmogorov- Fokker-Planck (KFP):

(1) Equação KFP -Backward

$$\frac{\partial P}{\partial t}(y_s | x_t) = - b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} P(y_s | x_t) - \frac{D(x, t)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(y_s | x_t) .$$

(2) Equação KFP -Forward

$$\frac{\partial P}{\partial s}(y_s | x_t) = \frac{\partial}{\partial y} (b(y, s) P(y_s | x_t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (D(y, s) P(y_s | x_t)) .$$

Uma maneira imediata de obtermos algumas condições sobre uma Família de Interferência (X_n, P_n) , que nos garantam que para um seu processo de interferência (X, P) , a densidade de probabilidade P satisfaz as equações KFP, está dada no seguinte Teorema cuja demonstração deixamos de apresentar por ser absolutamente simples e imediata.

TEOREMA III

Seja (X_n, P_n) uma família de interferência e (X, P) um processo de interferência associado a tal família. Admita que a família satisfaz as condições do teorema I e que cada P_n satisfaz as Equações KFP. Então sob as condições abaixo P também satisfaz as E-

quações KFP.

a) Podemos permutar a operação \lim_n com as várias derivadas $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ de $P_n(ys|xt)$, no caso da equação backward.

b) Podemos permutar a operação \lim_n com as várias derivadas $\frac{\partial P_n}{\partial s}(ys|xt)$, $\frac{\partial}{\partial y}(b_n(y, s)|P_n)$ e $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(D_n(y, s)|P_n)$ no caso

da equação forward, onde $b_n(y, s)$ e $D_n(y, s)$ são, respectivamente, a velocidade posterior e o coeficiente de difusão do processo (X_n, P_n) .

Consideremos agora o seguinte exemplo: seja (X_n, P_n) a família de interferência de Wiener. Conforme ficou estabelecido no teorema II se cada X_n é um processo de difusão, então o processo de interferência associado também é um processo de difusão. Além disso podemos mostrar, sem nenhuma dificuldade, que a família de interferência de Wiener satisfaz as condições (a) e (b) do teorema III e cada P_n satisfaz as equações KFP. Desse modo, ficam preenchidas todas as condições do Teorema III e assim relativo ao processo de interferência de probabilidade P satisfaz as equações de Kolmogorov-Fokker-Planck.

A INTERPRETAÇÃO ESTOCÁSTICA E A INTERPRETAÇÃO ESTOCÁSTICA NÃO-ERGÓDICA (NESI) DA MECÂNICA QUÂNTICA

IV.A- INTRODUÇÃO

Apresentamos de início neste capítulo um apanhado sobre o Paralelismo observado entre Mecânica Quântica e Processos Estocásticos, indicando todos os passos para se estabelecer a equivalência entre as Descrições Estocástica e Quântica da Evolução dos Sistemas Físicos. Muitos trabalhos tem sido apresentados neste sentido, todavia um relevante resultado é aquele que estabelece que para todo $\psi(x, t)$ satisfazendo a Equação de Schrödinger, existe um Processo de Markov no espaço de configuração, onde a Densidade de Probabilidade $\rho(x, t)$ do Processo, coincide com a Densidade de Probabilidade $|\psi(x, t)|^2$ da Mecânica Quântica. É esta a razão a qual nos permite interpretar em termos clássicos a Evolução dos Sistemas Quânticos.

Apresentamos também algumas críticas que são feitas à Interpretação Estocástica da Mecânica Quântica ou seja da Interpretação que consiste em tratar os Sistemas Quânticos como evoluindo em termos de um Processo Estocástico de Difusão.

Finalmente apresentamos a Interpretação Estocástica Não-Ergódica da Mecânica Quântica a qual resolve algumas das críticas apresentadas à Interpretação Estocástica Usual.

IV.B- A INTERPRETAÇÃO ESTOCÁSTICA DA MECÂNICA QUÂNTICA EM PERSPECTIVA HISTÓRICA

Vamos apresentar nesta seção o desenvolvimento histórico

da Interpretação Estocástica da Mecânica Quântica, com respeito ao qual seguiremos bem de perto o Jammer [19]. Algumas referências estão citadas nesta seção enquanto que outras podem ser encontradas no capítulo IX do Jammer [19].

As Interpretações Estocásticas da Mecânica Quântica têm como principal objetivo mostrar que a Teoria Quântica é fundamentalmente uma Teoria Clássica de Processos Estocásticos e como tal conceitualmente de mesma estrutura que a Teoria de Einstein-Smoluchowski do Movimento Browniano, a qual trata de Processos de Markov no espaço de coordenadas, ou do seu ulterior refinamento tal como a Teoria de Ornstein-Uhlenbeck a qual trata de Processos de Markov no espaço de fase. Dentro deste ponto de vista a radical separação da aparelhagem conceitual da Física Clássica, tal como a doutrina de complementaridade de Bohr, foi desnecessária e misteriosa. Em suporte desta tese tem sido apontado que, por exemplo, a Teoria Clássica de Flutuações de Densidade tem explicado com grande sucesso uma vasta multidão de fenômenos físicos e físico-químico em áreas tão distintas como Química Coloidal e Dinâmica Estelar e isto sem se dissociar da ontologia da Física Clássica. O incentivo imediato para o interesse nas Interpretações Estocásticas foi, entretanto, a conspícua similaridade entre a Equação de Schrödinger e as Equações da Teoria dos Processos de Difusão ou Movimento Browniano.

Um dos primeiros a chamar atenção para tais similaridades foi o próprio Schrödinger em um trabalho apresentado a 10 de março de 1931 à Academia de Berlim. Neste trabalho ele comparou sua Equação

ção de Onda com a Equação de Difusão $D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}$ onde $W(x, t)$ é a concentração ou densidade de probabilidade de partículas e D é a constante de Difusão. Schrödinger, estudando o problema de determinar a distribuição de probabilidade em um tempo t , com $t_1 \leq t \leq t_2$ se $W(x, t_1)$ e $W(x, t_2)$ são conhecidos, mostrou que a solução é o produto de dois fatores, em impressionante analogia com a expressão da Mecânica Quântica $\psi^* \psi$ para a Densidade de Probabilidade. Em uma conferência realizada em maio de 1931 no Instituto Henry Poincaré em Paris, Schrödinger discutiu com mais detalhes esta "Analogia Superficial que existe entre essa Teoria de Probabilidades Clássicas e a Mecânica Ondulatória" a qual como ele acrescentou "não tem provavelmente escapado a todo físico que conheça as duas Teorias". E com tudo isto, as analogias se comparadas com as disparidades, por exemplo, a realidade de w versus a complexidade de ψ , em Física Clássica a Densidade de Probabilidade obedece a uma Equação Diferencial enquanto na Teoria Quântica somente a amplitude de Probabilidade está sujeita a uma Equação Diferencial, etc, não foram, na visão de Schrödinger, suficientemente convincentes para persuadi-lo a espósr uma Interpretação Estocástica da Mecânica Quântica.

A primeira tentativa séria para interpretar a Mecânica Quântica como uma Teoria de Processos de Markov no espaço de configuração foi feita em 1952 por Fényes. Considerando as coordenadas de posição como um conjunto de Variáveis Aleatórias, Fényes definiu uma Densidade de Probabilidade e uma Transição de Probabilidade como função dessas coordenadas e do tempo; após normalizar apropriadamente as densidades, ele interrelacionou-as via uma Equação Integral

definindo deste modo um Processo de Markov. Das relações integrais ocorrendo entre as Densidades de Transição de Probabilidade em três instantes distintos de tempo, Fényes obteve duas Equações Diferenciais, uma das quais, representando uma Equação de Continuidade ou Equação de Conservação, reconhecida como sendo a Equação de Fokker-Planck. Em contraste com Schrödinger, ele concluiu que a Mecânica Quântica não é meramente uma analogia com uma Teoria de Difusão Estocástica, mas que ela própria é inerentemente Estocástica. Ele suportou seu ponto de vista, apresentando uma Derivação Estocástica da Equação de Schrödinger a partir de um Princípio de Lagrange Estatístico.

O Trabalho de Fényes foi severamente criticado por Nicholson o qual arguiu que a Função Lagrangeana usada por Fényes era Ad Hoc, que a Equação resultante e suas soluções admissíveis não mostram ser equivalentes à Equação de Schrödinger e suas soluções admissíveis, e que, além disso, as Equações Integrais de Fényes não conduzem à Mecânica Quântica, a menos que restrições adicionais fossem impostas sobre a classe de soluções das Equações de Markov envolvidas. Nicholson acrescenta: ainda que a Equação de Schrödinger deduzida por Fényes aplica-se somente a partículas cujas interações com campos externos podem ser expressas completamente em termos de funções potenciais escalares e portanto não se aplica a uma partícula movendo-se em um campo eletromagnético externo. Em resumo, no entender de Nicholson "A Teoria de Fényes não é uma representação possível da Mecânica Quântica".

Nos anos 50 e 60 com o desenvolvimento da eletrodinâmica

estatística, similaridades adicionais entre Sistemas Estocásticos Clássicos e Sistemas Quantum Mecânicos foram descobertas. Foi encontrado, por exemplo, que num campo eletromagnético aleatório certos Sistemas Carregados tal como o oscilador harmônico, comporta-se essencialmente idêntico à sua contraparte Quantum Mecânica. Contribuições importantes a este efeito foram dadas por Bourret, Braffort, Marshall, Sardin, Taroni e Tzara. Em 1964 Kershaw, apresentou uma prova rigorosa do fato que no caso de uma Simples Partícula movendo-se em um dado Potencial ou de um Sistema de Duas Partículas Interagindo através de um Potencial o qual é uma Função de sua distância mútua, as soluções estacionárias da Equação de Schrödinger são precisamente as Distribuições Estacionárias de Probabilidade dos Movimentos dos Sistemas considerados como Cadeias de Markov.

Ao mesmo tempo que Kershaw, Comisar desenvolveu um Modelo Linear do Movimento Browniano o qual preserva a Interpretação Estatística Usual da Função de Onda para Intervalos de Tempo suficientemente Longos. Comisar, tal como muitos outros Físicos que se encontravam nesta época trabalhando sobre Mecânica Quântica Estocástica, foram grandemente influenciados pela abordagem da Integral de Caminho de Feynmann, de acordo com a qual a Função de Onda deve ser imaginada como uma Soma de Integrais de Caminho sobre Trajetórias Brownianas. Desde então a conexão entre Integrais de Caminho ou Integrais de Feynmann, Processos de Markov e a Equação de Schrödinger, permaneceu um assunto de intensa pesquisa.

Uma importante contribuição foi dada em 1966 por Nelson o qual derivou, adotando a Cinemática da Teoria de Einstein-Smoluchowski do Movimento

Browniano e a Dinâmica Newtoniana como na Teoria de Ornstein-Uhlenbeck, por meio de idéias clássicas de Movimento no espaço-tempo, uma Equação Não-Linear do Movimento a qual por uma apropriada mudança da variável dependente pode ser expressa em termos de uma Função de Onda satisfazendo a Equação de Schrödinger independente do tempo. Independentemente, Favela obteve o resultado de Nelson mostrando que uma transformação de Green da Mecânica Quântica na Transição de Probabilidade de um Processo de Markov, nos conduz a uma identificação da Equação de Schrödinger com a Equação de Kolmogorov-Fokker-Planck com um coeficiente de Difusão igual a $\frac{h}{4\pi m}$.

Garczyński tenta interpretar toda a Mecânica Quântica em termos de Processos de Markov. Para isto ele assume que a todo Sistema Quântico lhe corresponde um Processo de Markov dado por um conjunto de Amplitudes $a_{ik}(s, t)$ tais que $|a_{ik}(s, t)|^2$ representa a Probabilidade de encontrar o Sistema no estado k no instante t se é conhecido que no tempo s ele estava no estado i . Garczyński derivou a Equação de Schrödinger submetendo essas amplitudes de Probabilidade $a_{ik}(s, t)$ a satisfazerem certas condições técnicas. O método por ele empregado é similar à bem conhecida Derivação da Equação de Kolmogorov na Teoria Clássica dos Processos de Markov.

A interpretação Estocástica da Mecânica Quântica encontrou um eloquente proponente em De La Peña. Em um dos seus primeiros trabalhos e utilizando somente conhecimentos rudimentares da Teoria dos Processos Estocásticos, ele obteve a Equação de Schrödinger. Após ter mostrado em 1968 como o problema do Movimento Browniano po

de ser tratado, pelo menos formalmente, resolvendo uma Equação do tipo Schrödinger para a Amplitude de Probabilidade, o tratamento sendo restrito a intervalos de tempo muito grandes comparados com o tempo de relaxação, De La Peña em colaboração com Garcia-Colin, começou a trabalhar no sentido oposto, isto é dar uma explicação para o Movimento de uma Partícula Quântica em termos de trajetórias clássicas e forças estocásticas. Os resultados foram publicados em uma série de artigos com crescente generalidade de tratamento. Em 1969 em conjunto com Cetto, De La Peña mostrou que partindo de um princípio de D'Alembert generalizado, podemos expressar as Equações Básicas da Teoria Estocástica previamente desenvolvida na forma Lagrangeana e assim derivar a Equação de Schrödinger para uma partícula em um campo eletromagnético de generalidade restrita. Em 1970 o tratamento foi generalizado para uma Formulação Relativística da Teoria Estocástica para partículas sem Spin e para partículas com Spin inteiro ou semi-inteiro. O trabalho de De La Peña tem prosseguido com o objetivo de explorar cada vez mais as potencialidades da Interpretação Estocástica da Mecânica Quântica.

IV.C- A EQUIVALÊNCIA ENTRE PROCESSOS DE MARKOV E MECÂNICA QUÂNTICA

Vamos apresentar nesta seção todos os passos para o estabelecimento da Equivalência da Equação de Schrödinger com um certo Processo de Markov. Vamos aqui seguir a orientação de Nelson [28], tratando tão somente do caso unidimensional. Estabelecida tal equivalência estaremos livres para tratar os Sistemas Quânticos como evoluindo em termos de um Processo Estocástico Clássico. Antes porém veremos como caracterizar em termos matemáticos a descrição Quântica

ca e a descrição Estocástica da evolução dos sistemas físicos e a partir daí obter a citada equivalência entre estas descrições.

Consideremos um Sistema Microfísico Σ , digamos um elétron de massa m , e olhemos para ele sob dois ângulos, o Quântico e o Estocástico. Do ponto de vista Quântico o estado do sistema Σ é caracterizado pela função de onda $\psi(x, t)$ cuja evolução em tempo, no caso de uma partícula não relativística em um campo potencial $V(x)$, está governada pela Equação de Schrödinger unidimensional

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V(x) \psi(x, t), \quad (1)$$

que é um caso particular da equação (16) vista em II.D.2.4.

Desse modo conhecendo-se $\psi(x, t_0)$ como uma condição inicial na Equação de Schrödinger, segue-se que $\psi(x, t)$ está determinada univocamente para qualquer tempo t .

Agora do ponto de vista Estocástico o Sistema Σ está dado por um processo de Markov $X(t)$ com Densidade de Probabilidade $\rho(x, t)$. Desse modo conhecendo-se $\rho(x, t)$ em todos os instantes, segue-se que o Processo fica inteiramente determinado. Mas, como será feita dentro desta concepção a descrição do estado do nosso sistema Σ ? É disto que trataremos agora.

Da Teoria Geral dos Processos Estocásticos como vista no Capítulo II, seção II.C, segue-se que a densidade $\rho(x, t)$ do Processo de Markov $X(t)$ satisfaz as Equações Forward e Backward de Kolmogorov - Fokker - Planck, respectivamente

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [b(x, t) \rho(x, t)] + D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [b_*(x, t) \rho(x, t)] - D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}$$

onde o Drift $b(x, t)$ pode ser escrito, em termos de uma velocidade corrente $v(x, t)$ e uma velocidade flutuante ou osmótica $u(x, t)$, pela expressão

$$b(x, t) = v(x, t) + u(x, t)$$

e

$$b_*(x, t) = v(x, t) - u(x, t)$$

O coeficiente de Difusão D está identificado, como fez Nelson em seu artigo [28], com $\frac{\hbar}{2m}$.

A média e diferença das Equações de Kolmogorov - Fokker - Planck (KFP) nos dá a Equação de Continuidade

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [v(x, t) \rho(x, t)]$$

Em seguida Nelson lançando mão da condição

$$u(x, t) = D \frac{\partial}{\partial x} \ln \rho(x, t)$$

e considerando a Segunda Lei de Newton $F = ma$ com uma definição apropriada da aceleração verificando-se na média, ele obteve o seguinte par de Equações que nós iremos chamar de Equações Hidrodinâmicas:

$$H.1- \quad \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (uv)$$

$$H.2- \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{F}{m} .$$

Voltemos agora à questão que foi colocada no início: do ponto de vista Estocástico como descrevemos o Movimento da Partícula?

O comportamento da Partícula está descrito por um Processo de Markov $X(t)$, de modo que o seu estado num tempo t_0 está dado por um ponto $X(t_0)$ no espaço de coordenadas. Entretanto para conhecermos o Movimento da Partícula necessitamos saber como se comporta o processo, ou seja como $\rho(x, t)$ evolui no tempo. Para isso e em virtude das equações KFP, necessitamos conhecer $b(x, t)$ e $b_*(x, t)$ ou o que é equivalente conhecer $u(x, t)$ e $v(x, t)$ para todo t ; mas pelo que acabamos de ver $u(x, t)$ e $v(x, t)$ são determinados via o par de Equações Hidrodinâmicas H.1 e H.2. Consequentemente se $u(x, t_0)$ e $v(x, t_0)$ são conhecidas para todo x e pudermos resolver o problema de Cauchy para o sistema de equações diferenciais hidrodinâmicas, então conheceremos $u(x, t)$ e $v(x, t)$ em todos os instantes e por conseguinte o Processo de Markov $X(t)$ estará completamente determinado e com isto o Movimento da Partícula. Assim o estado de uma Partícula num certo instante de tempo t_0 é considerado como sendo descrito pela posição $X(t_0)$ acrescida da velocidade corrente v no tempo t_0 e da velocidade flutuante ou osmótica u nesse mesmo instante.

Isto posto, vamos no que se segue estabelecer a equivalência entre as duas descrições ou seja vamos mostrar a equivalência entre a Equação de Schrödinger (Eq. (1)) e o sistema de equações hidrodinâmicas (Eqs. $\{H_1, H_2\}$).

Definimos R e S a menos de uma constante por:

$$u(x, t) = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} R(x, t)$$

$$v(x, t) = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} S(x, t) .$$

Agora, lançando mão da expressão $u = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \ln \rho(x, t)$ segue-se que $R(x, t) = \frac{1}{2} \ln \rho(x, t)$ e desse modo $\rho(x, t) = e^{2R(x, t)}$. Assim se puzermos $\psi(x, t) = e^{R(x, t) + iS(x, t)}$ obtem-se $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$. Desse modo, com as identificações efetuadas, as Densidades Estocástica e Quântica coincidem.

Passemos agora ao estabelecimento do seguinte resultado, o qual uma vez demonstrado estabelecerá a equivalência entre as descrições Quântica e Estocástica do sistema microfísico Σ .

"Sob as condições enunciadas, para que $\psi(x, t) = e^{R(x, t) + iS(x, t)}$ satisfaça a Equação de Schrödinger

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V(x)\psi ,$$

é necessário e suficiente que $u(x, t)$ e $v(x, t)$ satisfaçam ao par de equações as quais denominamos de Equações Hidrodinâmicas:

$$H.1- \quad \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (uv)$$

$$H.2- \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{F}{m} ."$$

Ora, para $\psi(x, t) = e^{R(x, t) + i S(x, t)}$ satisfazer a equação de Schrodinger

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V(x) \psi,$$

devemos ter que

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t} + i \frac{\partial S}{\partial t} \right) \psi = \frac{i\hbar}{2m} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} + i \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] \psi - \frac{i}{\hbar} V(x) \psi.$$

Dividindo a última expressão por ψ e derivando com respeito a x encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial t} + i \frac{\partial S}{\partial t} \right) &= \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \right. \\ &+ \left. 2i \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{i}{\hbar} \frac{\partial V}{\partial x}. \end{aligned}$$

Nesta última expressão tendo em conta que $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ e as expressões de u e v em termos de R e S respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{m}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} (u + iv) &= \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{m}{\hbar} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{im}{\hbar} \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \\ &+ \left. 2i \frac{m^2}{\hbar^2} (uv) + \left(\frac{m}{\hbar} \right)^2 u^2 - \left(\frac{m}{\hbar} \right)^2 v^2 \right] - \frac{i}{\hbar} \frac{\partial V}{\partial x}. \end{aligned}$$

Nesta expressão separando a parte real e imaginária, isto equivale ao par de equações

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (uv)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u^2 - v^2) \right] - \frac{1}{m} \frac{\partial v}{\partial x} ,$$

que é o par de Equações Hidrodinâmicas (Eqs. (H.1), (H.2)) com $F = - \frac{\partial v}{\partial x}$.

Se agora $u(x, t)$ e $v(x, t)$ como definidas satisfazem ao sistema Hidrodinâmico acima e pondo $\psi(x, t) = e^{R(x, t) + iS(x, t)}$ onde $R(x, t) = \frac{1}{2} \ln \rho(x, t)$, segue-se da reversibilidade dos passos acima que $\psi(x, t)$ satisfaz a Equação de Schrödinger. Com isto fica estabelecida a equivalência entre a Descrição Quântica de Σ e sua descrição em termos de um Processo Clássico de Markov.

Façamos a seguir alguns comentários a respeito da equivalência que acabou de ser estabelecida. Admita que temos um Sistema Quântico e que preparamos o estado do sistema no tempo t_0 de tal maneira que sua função de onda é $\psi(x, t_0)$. Da expressão $\psi(x, t) = e^{R(x, t) + iS(x, t)}$, segue-se que do conhecimento de $\psi(x, t_0)$ decorre o conhecimento de $R(x, t_0)$ e $S(x, t_0)$ e em termos deles podemos expressar $u(x, t_0) = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} R(x, t_0)$ e $v(x, t_0) = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} S(x, t_0)$. Desse modo e de acordo com a discussão prévia, o correspondente Processo de Markov está então determinado via o par de Equações Hidrodinâmicas. Mas a densidade do Processo $\rho(x, t) = e^{2R(x, t)} = |\psi(x, t)|^2$, e assim estamos livres para trabalhar com a Equação de Schrödinger ou com o Sistema de Equações Hidrodinâmicas. Todavia, trabalhando com o sistema de Equações Hidrodinâmicas é válido conceitualizar sobre trajetórias de Partícu-

las. Em resumo temos o seguinte, para uma dada situação dinâmica ou seja para um dado potencial $V(x)$ e uma dada função de onda inicial $\psi(x, t_0)$, existe um Processo de Markov no espaço de coordenadas, cujas características dependem sobre $V(x)$ e $\psi(x, t_0)$, o qual origina uma densidade de probabilidade $\rho(x, t)$ a qual coincide em todos os instantes com a densidade de probabilidade $|\psi(x, t)|^2$ gerada pela Equação de Schrodinger. A demonstração não é válida se $\psi(x, t) = 0$ [cf. 28] .

IV.D- A INTERPRETAÇÃO ESTOCÁSTICA NÃO-ERGÓDICA DA MECÂNICA QUÂNTICA (NESI)

Vamos apresentar nesta seção uma outra interpretação estocástica da Mecânica Quântica a qual denominamos de Interpretação Estocástica Não-Ergódica e que abreviaremos doravante por NESI. Como será mostrado na seção seguinte, tal interpretação resolve algumas dos problemas apresentados sob a forma de críticas à Interpretação Estocástica usual. O que se segue foi motivado por algumas idéias físicas contidas em [06] .

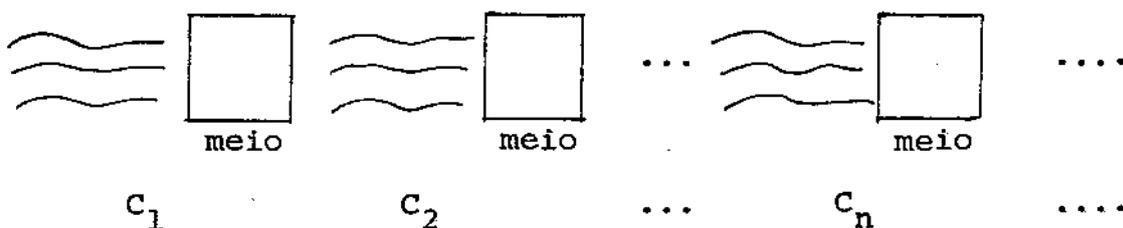
Como sabemos, uma interpretação estocástica da Mecânica Quântica consiste em tratar os sistemas quânticos como evoluindo em termos de um processo estocástico clássico. Na Interpretação Estocástico Usual da Mecânica Quântica os sistemas físicos evoluem como processos de Difusão Clássicos ou seja como processos do tipo Movimento Browniano, no qual as partículas que compõem os sistemas físicos são completamente independentes umas das outras, não havendo por conseguinte nenhuma interação entre elas. Como vimos na seção IV.C deste Capítulo, nestas interpretações estabelece-se a equivalência entre um certo processo de Markov de densidade $\rho(x, t)$ e a Equação

de Schrödinger governando a evolução de um dado Processo Quântico. Aqui a correspondência entre ρ e ψ sendo dada por $\rho = |\psi|^2$.

Na interpretação que iremos agora apresentar, o ideal seria a partir do nosso modelo físico de partículas interagindo indiretamente via a Memória do Meio, o qual supomos existir, deduzir a equação de Schrödinger. Todavia, o que fizemos foi adequar o nosso modelo ao Modelo Matemático da Mecânica Quântica Estocástica Usual e a partir disto usar a equivalência já estabelecida entre as descrições estocástica e quântica dos sistemas físicos.

A Interpretação Estocástica Não-Ergódica da Mecânica Quântica (NESI) considera que a evolução dos sistemas físicos também se processa por difusão, só que agora o processo que governa esta evolução é um processo de partículas que interagem indiretamente. Desse modo já não há nesta interpretação uma independência entre as partículas que compõem os sistemas físicos, mas uma dependência entre elas causada pela interação via a memória do meio em que se processa a evolução do sistema. Resta agora mostrar com qual objeto da NESI, a função de onda ψ se encontra associada. Façamos então uma breve revisão do modelo físico-matemático da NESI, o qual foi considerado no Capítulo III deste Trabalho.

Consideremos a seguinte descrição pictórica:



Estamos imaginando na descrição acima que temos um número infinito de corridas fisicamente separadas em espaço e tempo. Aqui cada corrida consiste de um número infinito de partículas. Na figura são mostradas as trajetórias seguidas por cada partícula. As partículas podem interagir com partículas anteriores na mesma corrida indiretamente via a memória do meio.

Chamemos o conjunto constituído da n -ésima partícula em cada uma das corridas, de n -ésimo conjunto partícula e o denotemos por Σ_n . Denotemos por $(X_n(t))$ ($n = 1, 2, \dots$) o processo estocástico o qual representa o Movimento Estocástico do n -ésimo conjunto particular Σ_n . Denotemos por $\rho_n(x, t)$ e $P_n(y_s|xt)$ as densidades de probabilidade do processo $(X_n(t))$. Aqui os P_n definem as propriedades do meio para o n -ésimo conjunto partícula.

Salientamos que existe uma importante diferença entre o tipo de comportamento estocástico descrito e aqueles dos processos de difusão clássica ou processos de Movimento Browniano, uma vez que nestes últimos as propriedades estocásticas do meio são fixadas e não dependem de modo algum da densidade inicial $\rho(x, 0) = \rho_0$, enquanto que em nosso caso as propriedades estocásticas do meio dependem desse estado inicial.

Como dissemos antes, na NESI a evolução dos sistemas físicos se dá via um processo de difusão de interferência ou como também dizemos um processo não-clássico. Aqui o Movimento Estocástico do n -ésimo conjunto partícula é governado por um Processo de Difusão (X_n, P_n) no sentido conceituado na seção II.C do capítulo II, os quais, e já que são processos de Markov, para a sua caracteriza-

ção basta que se dê as densidades de transição de probabilidade entre estados $P_n(xt|ys)$ ($t > s$). Temos então uma sequência dos processos de difusão (X_n, P_n) , denominados Família de Interferência. A esta família associamos o Processo de Interferência Limite $X(t)$ com densidade de transição de probabilidade entre estados $P(xt|ys)$ ($t > s$) de tal maneira que $P = \lim_n P_n$, no seguinte sentido:

$$P(x_2 t_2 | x_1 t_1) = \lim_n P_n(x_2 t_2 | x_1 t_1)$$

$$P(x_3 t_3 | x_2 t_2, x_1 t_1) = \lim_n P_n(x_3 t_3 | x_2 t_2, x_1 t_1)$$

$$\vdots$$

$$P(x_k t_k | x_{k-1} t_{k-1}, \dots, x_1 t_1) = \lim_n P_n(x_k t_k | x_{k-1} t_{k-1}, \dots, x_1 t_1)$$

Como estabelecido no Teorema I do Capítulo III deste trabalho, o Processo Limite $X(t)$ é um processo de difusão e em particular é um processo de Markov. Segue-se então do caráter Markoviano do processo limite que conhecendo-se $P(xt|ys)$, o processo fica inteiramente determinado pois conheceremos

$$\rho(x_0 t_0, \dots, x_k t_k) = \rho(x_0 t_0) \times \prod_{i=1}^k P(x_i t_i | x_{i-1} t_{i-1})$$

e

$$\rho(x, t) = \int P(xt|ys) \rho(y, s) dy \quad (t > s).$$

Ao processo estocástico de interferência $X(t)$ com densidade de $\rho(x, t)$, assim obtido, o qual é um objeto da NESI, nós associamos

a função de onda ψ da Mecânica Quântica, do mesmo modo como é feita na Mecânica Quântica Estocástica ou seja podemos como lá $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$.

Em resumo temos que na NESI os processos fisicamente reais são os (X_n, P_n) , enquanto que o processo limite $X = \lim_n X_n$ (no sentido de $\rho = \lim_n \rho_n$) é simplesmente o Limite dos processos reais, não representando, por conseguinte, o movimento de uma partícula real mas um limite de partículas reais em movimento estocástico.

IV.E- A NESI E A RESOLUÇÃO DE ALGUMAS DAS CRÍTICAS CONTRA A INTERPRETAÇÃO ESTOCÁSTICA

Vamos apresentar nesta seção alguns problemas que são colocados, seja sob a forma de crítica ou sob a forma de questionamento, à Interpretação Estocástica usual da Mecânica Quântica e mostrar que tais problemas encontram justificativas no seio da NESI ou seja da Interpretação Estocástica Não-Ergódica a qual foi apresentada na seção anterior.

IV.E.1- OS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS UTILIZADOS NA MECÂNICA QUÂNTICA ESTOCÁSTICA NÃO SÃO NA REALIDADE PROCESSOS VERDADEIRAMENTE MARKOVIANOS

Iremos inicialmente apresentar uma descrição do problema em pauta e a seguir a sua análise e solução via a Interpretação Estocástica Não-Ergódica (NESI).

Como salientamos na seção IV.C, quando tratamos da equivalência entre Processos de Markov e os processos quânticos descritos pela Equação de Schrödinger, para uma dada situação dinâmica ou seja

para um dado potencial $V(x)$ e uma dada função de onda inicial $\psi_0 = \psi(x, t_0)$ existe um Processo de Markov no espaço de coordenadas cujas características dependem sobre $V(x)$ e ψ_0 , o qual origina uma densidade de probabilidade $\rho(x, t)$ tal que $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$.

Em outras palavras, os dois problemas de valor inicial seguintes são equivalentes

$$(I) \quad \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V(x) \psi(x, t)$$

$$\psi(x, t_0) = \psi_0(x)$$

$$(II) \quad \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [b(x, t) \rho(x, t)] + D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}$$

$$\rho(x, t_0) = \rho_0(x).$$

Cabe aqui salientar que para cada condição inicial $\psi_0(x)$ no problema (I) acima segue-se que das expressões

$$\rho(x, t_0) = |\psi(x, t_0)|^2 = |\psi_0(x)|^2$$

$$R(x, t_0) = \frac{1}{2} \text{Ln} \rho(x, t_0)$$

$$\psi(x, t_0) = \exp[R(x, t_0) + i S(x, t_0)]$$

obtemos $u(x, t_0)$, $v(x, t_0)$ as quais são dadas por

$$u(x, t_0) = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} R(x, t_0)$$

$$v(x, t_0) = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} S(x, t_0).$$

Dai, lançando mão do par de Equações Hidrodinâmicas vistas anteriormente na seção IV.C, tendo $u(x, t_0)$ e $v(x, t_0)$ como condição inicial, obteremos $u(x, t)$ e $v(x, t)$ em todos os instantes e finalmente $b(x, t) = u(x, t) + v(x, t)$. Desse modo a função $b(x, t)$ no problema (II) depende do estado inicial ψ_0 do problema (I) e por conseguinte a solução $\rho(x, t)$ desse problema. Tal dependência está dada explicitamente por

$$\rho(t) = P_{\psi_0}(t_0|t)\rho(t_0)$$

onde $P(xt|ys) = P$ é denominado o propagador de estados, o qual é solução do seguinte problema de valor inicial

$$(III) \quad \frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [b(x, t) P] + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow s^+} P(xt|ys) = \delta(x - y)$$

Desse modo a solução do problema (III) acima depende de ψ_0 no sentido de que para cada ψ_0 temos uma equação diferente e portanto um processo distinto. Para um exemplo explícito desta situação ver a referência [17].

Na literatura, ver Grabert [17] e Ghirardi [14], a dependência $P(\psi_0) = P_{\psi_0}$ é traduzida dizendo-se que tal comportamento é típico de Processos Não-Markovianos, pois aqui

$$P(x_0 t_0, \dots, x_{n-1} t_{n-1} | x_n t_n) = P(x_0 t_0, x_{n-1} t_{n-1} | x_n t_n).$$

Entretanto tais processos são formalmente Markovianos, quer

dizer, para cada estado inicial ψ_0 fixado, P_{ψ_0} é de Markov ou seja

$$P_{\psi_0}(x_0 t_0, \dots, x_{n-1} t_{n-1} | x_n t_n) = P_{\psi_0}(x_{n-1} t_{n-1} | x_n t_n) .$$

A situação apresentada é típica de Processos de Partículas que Interferem ou seja de partículas que interagem umas com as outras, sendo isto o que ocorre com os Processos da NESI, os quais representam partículas em difusão que interagem umas com as outras, tal interação dependendo do estado inicial, como ficou explicitado na descrição apresentada na seção IV.D.

Desse modo a crítica que é apresentada à interpretação estocástica usual da Mecânica Quântica de que os Processos Estocásticos por ela utilizados não são verdadeiramente Markovianos em virtude da dependência P_{ψ_0} , não se aplica dentro do ponto de vista da NESI, pois aqui é natural tal dependência. \square

IV.E.2- SOBRE A EQUIVALÊNCIA DA MECÂNICA QUÂNTICA ESTOCÁSTICA E DA MECÂNICA QUÂNTICA NA PRESENÇA DE SUPERFÍCIES NODAIS

Seguindo Nelson [28] apresentaremos de início um apanhado sobre o problema e a seguir as considerações devidas dentro do espírito da NESI.

Como ficou estabelecido anteriormente, as equações hidrodinâmicas (H.1) e (H.2) (cf IV.C)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (uv) ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (v \frac{\partial v}{\partial x}) + (u \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{F}{m} ,$$

respondem pela evolução em tempo dos processos na Mecânica Quântica Estocástica. Vamos olhar para algumas soluções especiais desta equação, no caso de um campo de forças F conservativo, ou seja, $F = \frac{\partial V}{\partial x}$.

Suponhamos inicialmente que $v = 0$. Então em virtude das relações seguintes:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho v)$$

$$u(x, t) = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \ln \rho(x, t) \quad ,$$

segue-se da hipótese que $v = 0$, que $\rho(x, t)$ e $u(x, t)$ são independentes do tempo t e desta forma a solução das equações hidrodinâmicas é Estacionária. Neste caso as Equações Hidrodinâmicas se resumem a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} + u \frac{du}{dx} = - \frac{F}{m} = \frac{1}{m} \frac{dV}{dx} \quad .$$

A segunda das Equações acima, pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\hbar}{2m} \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} u^2 \right] = - \frac{dV}{dx} \quad ,$$

e daí por integração obtemos

$$\frac{1}{2} u^2 + \frac{\hbar}{2m} \frac{du}{dx} = \frac{1}{m} V - \frac{1}{m} E \quad ,$$

onde nesta última equação a constante de integração E tem dimensão de energia. Multiplicando tal equação por $m\rho$ e integrando obtemos

$$\frac{1}{2} \int m u^2 \rho dx + \frac{\hbar}{2} \int \rho \frac{du}{dx} dx = \int V \rho dx - E \quad .$$

Em virtude de termos que $u = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial \ln \rho / \partial x}$, e usando integração por partes, segue-se que o membro esquerdo da última expressão se reduz a $-\int \frac{1}{2} m^2 \rho dx$ e dessa forma

$$E = \int \frac{1}{2} m u^2 \rho dx + \int V \rho dx$$

é o valor médio de $\frac{1}{2} m u^2 + V$ e portanto a constante de integração E pode ser interpretada como a Energia Média da Partícula.

A equação

$$\frac{1}{2} u^2 + \frac{\hbar}{2m} \frac{du}{dx} = \frac{1}{m} (V - E)$$

é uma equação não linear, mas ela é equivalente a uma Equação Linear via a seguinte mudança na variável dependente. Por termos $u = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \ln \rho(x, t)$, segue-se então que $R = \frac{1}{2} \ln \rho(x, t)$ é o

Potencial de $\frac{m}{\hbar} u$ ou seja $\frac{m}{\hbar} u = \frac{\partial R}{\partial x}$. Agora pondo $\psi = e^R$ temos que ψ é real e que $\rho = \psi^2 = |\psi|^2$.

Além disso, resulta desta identificação e por ser $\frac{m}{\hbar} u = \frac{\partial R}{\partial x}$ que $u = \frac{\hbar}{m} \left(\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dx} \right)$ e assim

$$\frac{\hbar}{2m} \frac{du}{dx} = \frac{\hbar^2}{2m^2} \left[\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{1}{\psi^2} \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 \right]$$

Mas sendo $\frac{1}{2} u^2 = \frac{\hbar^2}{2m^2} \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2$, resulta da última equa

ção que

$$\frac{1}{2} u^2 + \frac{\hbar}{2m} \frac{du}{dx} = \frac{\hbar^2}{2m^2} \left[\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} \right]$$

e daí por comparação com a equação

$$\frac{1}{2} u^2 + \frac{\hbar}{2m} \frac{du}{dx} = \frac{1}{m} (V - E)$$

obtemos

$$\left[- \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{d^2}{dx^2} + (V - E) \right] \psi = 0$$

que é a equação de Schrodinger independente do tempo.

Isto então estabelece a equivalência entre as duas equações ou seja entre

$$\frac{1}{2} u^2 + \frac{\hbar}{2m} \frac{du}{dx} = \frac{1}{m} (V - E)$$

e

$$\left[- \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{d^2}{dx^2} + (V - E) \right] \psi = 0$$

Vemos assim que no caso estacionário há uma equivalência entre as Equações Hidrodinâmicas e a Equação de Schrödinger para um elétron, como ocorre no átomo de Hidrogênio. Isto nos indica que para o átomo de Hidrogênio a hipótese de movimento Browniano nos conduz aos corretos níveis de energia para os estados estacionários do átomo, ou seja aqueles estados nos quais a energia tem valores bem definidos, e além disso tal hipótese interpreta estes estados como sendo estados de equilíbrio dinâmico.

A equivalência que acabou de ser estabelecida não é válida na presença de superfícies nodais. Isto ocorre, por exemplo, quando o átomo se encontra em um estado excitado, ou seja em um estado estacionário cuja energia E_n é maior que a energia E_0 do seu estado fundamental ou estado estacionário que possui o menor de todos os valores possíveis da energia. Isto posto, para soluções reais da Equação de Schrödinger independente do tempo, outras que não a solução fundamental, segue-se que $\rho = \psi^2$ tem superfícies nodais, ou seja conjuntos de pontos S nos quais $\psi = 0$. Desse modo, na presença de superfícies nodais n fica singular ou infinita uma vez que sendo $u = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \ln \rho$, resulta que $u = \infty$ quando $\rho = \psi^2 = 0$. Portanto a definição $\psi = e^R$ ($R = \frac{1}{2} \ln \rho$) produz uma equivalência entre as equações

$$\frac{1}{2} u^2 + \frac{\hbar}{2m} \frac{du}{dx} = \frac{1}{m} (V - E)$$

e

$$\left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{d^2}{dx^2} + (V - E) \right] \psi = 0 \quad ,$$

somente dentro de uma região limitada por tais superfícies (Albeverio e Høegh-Krohn [1]). Pode-se também mostrar [1] que qualquer partícula situada em uma região limitada por superfícies nodais deve permanecer aí para sempre.

Mesmo assim ainda permanece a questão de definirmos propriamente a densidade de probabilidade ρ em todo o espaço, uma vez que isto é essencial para a identificação feita anteriormente da constante E com a energia média da partícula. Também essas soluções separadas na interpretação estocástica, que existem para cada uma das regiões limitadas por superfícies nodais, não correspondem a qualquer solução Quantum Mecânica (a qual não concorda com a evidência experimental) [26].

Nelson [28] tenta contornar este problema construindo uma sequência de processos estocásticos $\{X_n\}$ via as funções de estado

$$\psi_n = \frac{\psi + \frac{i}{n} \psi_0}{\left[1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right]^{1/2}}$$

onde ψ_0 é a solução da equação de Schrödinger correspondente ao estado fundamental e ψ a solução correspondente a um estado excitado. A seguir ele constrói o processo "Limite" $X(t)$ de densidade ρ do seguinte modo

$$\rho = \lim_n \rho_n = \lim_n |\psi_n|^2 = |\psi|^2$$

O Objetivo de Nelson ao fazer isto é que usando ψ_n como um valor inicial, isto corresponde a Processos de Markov nos quais u fica infinita sobre uma superfície nodal somente em tempos isolados. A implicação disto sendo que não temos de pensar de uma partícula como sendo apanhada em uma região limitada por superfícies nodais.

Tal maneira de proceder não encontra no seio da Mecânica Quântica Estocástica usual nenhuma justificativa [26], todavia ela é natural na NESI pois aqui lidamos com seqüências de processos estocásticos.

Na NESI, os processos fisicamente reais são os (X_n) , enquanto que $X = \lim_n X_n$ (no sentido de $\rho = \lim_n \rho_n$) é simplesmente o Limite de processos reais. Nós associamos (X, ρ) com ψ . Dessa forma os ψ_n do Nelson são (ou podem ser) os processos reais. Portanto a crítica que é feita à Mecânica Quântica Estocástica não é válida contra a NESI. □

IV.E.3- SOBRE A QUESTÃO DE SUPERPOSIÇÃO DE ESTADOS, NO QUE CONCERNE A EFEITOS DE INTERFERÊNCIA, NO CONTEXTO DA MECÂNICA QUÂNTICA ESTOCÁSTICA

Faremos inicialmente algumas considerações sobre o conceito de Probabilidade em Física Clássica e na Mecânica Quântica, para em seguida tratarmos da questão de superposição de estados puros e mistos e finalmente mostrarmos que a NESI possibilita-nos compreender a questão de interferência daí resultante.

Física Clássica é determinística no sentido de que dadas as condições iniciais para uma partícula ou um sistema de partículas

podemos calcular, via a Lei de Evolução, exatamente (com probabilidade um) as posições e velocidades futuras de nossa partícula ou sistema de partículas. Probabilidade entra em Física Clássica em virtude de que na prática nós nunca conhecemos exatamente as condições iniciais, mas tão somente com certas probabilidades. Desse modo podemos somente prever as futuras posições e velocidades em termos probabilísticos.

Essas previsões probabilísticas, obviamente, dependem sobre nosso conhecimento probabilístico inicial ou distribuição. Tais probabilidades refletem nossa ignorância ou seja nossa falta de conhecimento detalhado das condições iniciais ou preparação do estado. Nós a designaremos por probabilidade de ignorância.

Em Mecânica Quântica a probabilidade entra de duas maneiras distintas. A primeira (a) é algumas vezes denominada probabilidade intrínseca ou não-clássica e não possui analogia clássica. A segunda maneira (b) é totalmente análoga às probabilidades clássicas de ignorância. Em qualquer uma das maneiras, as médias calculadas são médias de ensemble.

(a) A Mecânica Quântica é uma teoria intrinsecamente probabilística no sentido de que o estado $|\psi\rangle$ de um sistema somente nos dá uma distribuição de probabilidade de possíveis resultados de medidas. A equação dinâmica nos dá a evolução da distribuição de probabilidade do sistema (ver Capítulo II, seção II.D). É exatamente aqui que temos os efeitos de interferência quantum mecânicos. Isto é, se adicionamos dois estados quantum mecânicos $|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$. Por exemplo, no experimento da dupla fenda, (ver Apêndice II) $|\psi_1\rangle$ poderia ser

uma preparação na qual uma fenda está aberta e deixamos passar luz através dela, enquanto que $|\psi_2\rangle$ poderia ser uma preparação na qual a outra fenda está aberta. $|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$ então seria uma preparação na qual ambas as fendas se encontram abertas, resultando assim em uma superposição da luz. A distribuição de probabilidade estará dada por:

$$P(x) = (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)(\langle\psi_1| + \langle\psi_2|)^* \\ = \langle\psi_1|\psi_1\rangle + \langle\psi_1|\psi_2\rangle^* + \langle\psi_2|\psi_1\rangle^* + \langle\psi_2|\psi_2\rangle,$$

onde $\langle\psi_1|\psi_2\rangle^* + \langle\psi_2|\psi_1\rangle^*$ é o famoso termo de interferência.

Este pode ser o caso por exemplo se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ representassem duas fontes de luz com a mesma polarização.

(b) Neste caso a probabilidade de ignorância não dá possibilidade para efeito de interferência. Aqui devemos usar o operador densidade. Por exemplo, se temos dois estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, então aqui devemos escrever o estado superposição como $|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$. Aqui temos que $P(x) = P_1(x) + P_2(x) = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$.

Este pode ser o caso por exemplo se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ representarem duas fontes de luz com polarizações ortogonais.

Para nossos propósitos aqui desejamos resumir a situação na seguinte maneira particular. Se temos dois estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, podemos superpô-los de duas maneiras, conforme os exemplos: Ex.1: $|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$ (soma de estados puros], ou Ex.2: $|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ (soma de estados mistos], correspondendo, respectivamente, a (a) e (b) tratados anteriormente. Em uma dada situação a expressão que usamos dependerá da física da situação em estudo. A Mecânica Quântica

nos dá uma regra: Se é sempre possível conhecer se uma partícula pro-
veio da preparação correspondendo a $|\psi_1\rangle$ ou $|\psi_2\rangle$, então devemos su-
perpô-los como estados mistos, enquanto que se não é possível, deve-
mos usar a superposição pura $|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$. O ponto que deve ser sa-
lientado aqui é que qualquer teoria do tipo clássico da Mecânica
Quântica (i.e. uma teoria de variável escondida local) deve explicar
esses dois diferentes níveis de probabilidade, em particular as pro-
babilidades não-clássicas.

Pelo fato de que nos dois casos temos uma média de ensem-
ble, é difícil ver uma distinção física nas Interpretações Estatís-
ticas. De fato, Ghirardi [14] conclui que a Mecânica Quântica Esto-
cástica, de nenhuma maneira torna claro como devemos entender esses
dois níveis de probabilidade.

Dentro do ponto de vista da NESI, a situação descrita na
Figura 5, do Apêndice II, é a que ocorre ou seja que não há interfe-
rência para uma verdadeira média de ensemble. Isto sucede uma vez
que um elétron passando através de uma fenda "conhece" quando a ou-
tra fenda estava aberta em virtude de elétrons anteriores terem pas-
sado através dela e deixado esta informação impressa no meio. Este
ponto de vista está em desacordo com a Mecânica Quântica e com a Me-
cânica Quântica Estocástica pois estas são teorias ergódicas no sen-
tido descrito no Apêndice I, deste trabalho; quer dizer, em Mecânica
Quântica o experimento da dupla fenda deve ser pensado como se o rea-
lizássemos muitas vezes com muitos aparelhos, cada um deles com um
único elétron e a seguir superpormos os resultados. Dentro desta vi-
são não poderíamos prever interferência ao contrário do que faz a Me

cânica Quântica Estocástica.

Resumindo, na NESI a interferência é considerada como uma interferência física entre partículas que é uma interferência indireta, via memória, no meio.

Assim, deve-se usar o Ex.1 quando a situação física permite esta interferência indireta e o Ex.2 quando a situação física exclui tal interferência.

Por exemplo, para uma média em tempo devemos usar Ex.1 (sem polarização) enquanto que para uma média de ensemble devemos utilizar o Ex.2 uma vez que a interferência física indireta está excluída.

Abordamos o problema da dupla fenda mas podemos generalizar a discussão a uma situação diferente.

Assim, a NESI dá uma distinção física potencialmente clara entre os estados puros e mistos, (isto é, de superposição e de interferência). Portanto, completamos nosso objetivo aqui, mostrando que as críticas de Ghirardi contra a Interpretação Estocástica, relativas aos estados puros e mistos, não se aplicam a NESI. \square

APÊNDICE I: MÉDIAS EXPERIMENTAIS

Denotemos por Σ uma partícula ou um ensemble de partículas, preparada sob algum específico procedimento de laboratório, em um estado puro $|\psi\rangle$. Aqui $|\psi\rangle$ é um elemento de algum espaço de Hilbert \mathcal{H} o qual representa todos os estados puros possíveis de nosso sistema. Vamos admitir inicialmente que ψ não depende do tempo t . Denotemos por \hat{A} o operador linear definido sobre \mathcal{H} , o qual representa algum observável físico de interesse do nosso sistema.

A expressão $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ representa nas Interpretações Estatísticas da Mecânica Quântica (ver Ballentine [02]) uma média de laboratório predita para um ensemble de medidas idênticas, onde admitimos que o estado $|\psi\rangle$ está normalizado ou seja $\langle \psi | \psi \rangle = 1$.

Vamos aqui apresentar, seguindo Buonomano [06], algumas considerações sobre médias experimentais ou seja sobre as médias que se realizam no laboratório, afim de não só tornar mais clara a terminologia usada para expressar os vários modos de obtermos uma média experimental de alguma grandeza mensurável, bem como de esclarecer o significado do termo ergódico que estamos usando neste Trabalho.

Uma média de ensemble, por definição, significa que a média é tomada sobre medidas que são absolutamente independentes. Por exemplo, usualmente consideraríamos como uma boa média de ensemble aquela realizada com muitos aparelhos idênticos, separados por grandes distâncias e tomando exatamente uma medida com cada aparelho. Na prática, obviamente, para obtermos uma média de ensemble no laboratório, tomamos uma série de medidas consecutivas com um único apare

lho. As medidas consecutivas são separadas, pelo menos, por algum tempo mínimo τ entre elas. Esta média é usualmente chamada uma média corrida. Além disso, em muitos casos, tomamos nossa média final sobre muitas médias corridas independentes. Chamaremos esta última média de uma grande média em tempo. No que se segue usaremos a expressão média em tempo para significar ou uma média corrida ou uma grande média em tempo, a menos que seja estabelecido o contrário.

Podemos resumir dizendo que uma média em tempo em muitos casos pode ser considerada como dando uma perfeitamente válida média de ensemble desde que consideremos τ suficientemente grande para assegurar que não pode existir nenhuma interação entre as medidas consecutivas. Por exemplo, em Mecânica Quântica τ é usualmente considerado como sendo aquele tempo para o qual nunca existe ao mesmo tempo duas partículas no sistema sobre o qual efetuamos uma medição. Mais formalmente isto pode ser dito assim: a Mecânica Quântica admite implicitamente que um certo tempo de espera entre medidas constitui uma válida reparação do sistema. Na Referência [06] podem ser vistas discussões sobre este ponto.

Em geral, uma teoria pode predizer que todas ou nenhuma dessas médias são iguais, desde que não exista nenhuma relação Per Se entre elas. Quando temos uma teoria a qual prediz que todas essas médias são iguais, então definimos a teoria como Ergódica; quer dizer uma teoria ergódica é uma teoria a qual prediz que a média de ensemble é igual a todas as médias corridas distintas e por conseguinte também igual a uma grande média em tempo. Caso contrário a teoria é dita não-ergódica.

Em termos físicos podemos dizer que uma teoria ergódica é uma teoria na qual não existe interação ou memória entre medidas; e desse modo uma teoria não-ergódica seria aquela que existe uma interação entre medidas consecutivas via o sistema de medir o qual possui estados estáveis ou memória.

Buonomano [06] apresentou neste seu artigo uma outra interpretação estatística da Mecânica Quântica a qual ele denominou de Interpretação Estatística Não-Ergódica. Tal interpretação é uma interpretação estatística no mesmo sentido que a interpretação estatística apresentada por Ballentine [02], ou seja, a expressão $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ não nos dá a propriedade de uma partícula individual, mas ela é uma média sobre muitas partículas. Na Interpretação Estatística Usual o elemento de ensemble é a partícula individual, enquanto que na Interpretação Estatística Não-Ergódica ela é uma corrida experimental individual.

Enquanto que na interpretação estatística usual $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ representa uma média de ensemble, na interpretação estatística não-ergódica $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ é associada com uma grande média em tempo.

No caso em que ψ depende do tempo t , a situação é a mesma que a apresentada acima para cada t fixo. Lembremos que em Mecânica Quântica, para medirmos $\langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$ devemos fazer um ensemble de medidas para cada tempo t fixo. E neste caso devemos falar sobre a realização de medidas consecutivas em cada tempo fixo t ; desse modo introduzimos um outro tempo independente o qual temos chamado de tempo consecutivo (Veja III.B).

APÊNDICE II: O EXPERIMENTO DA DUPLA FENDA

Consideremos um experimento conceitual ou imaginário como ilustrado na Figura 1, o qual é denominado o Experimento da Dupla Fenda.

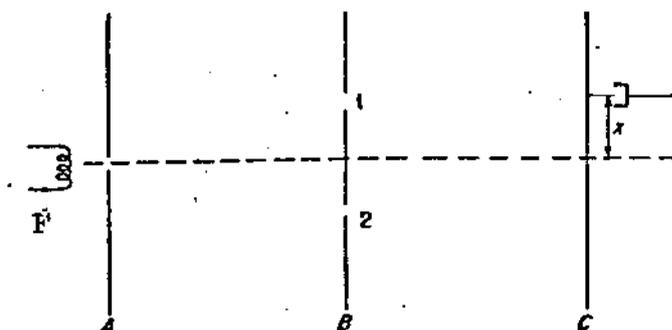


Figura 1

Temos em A uma fonte de elétrons F, todos com a mesma energia, os quais ao serem emitidos de A se espalham em todas as direções até atingirem uma parede B a qual possui duas fendas 1 e 2, através das quais os elétrons podem passar. Finalmente atrás da parede B e em um plano C temos um detector de elétrons (por exemplo, um contador Geiger) o qual pode ser colocado a várias distâncias x do centro da parede C. Nós vamos admitir que tal experimento se realiza no Limite de Baixa Intensidade da Fonte F ou seja a intensidade de F é tal que o detector em C registrará pulsos representando a chegada de elétrons individuais, separados por um intervalo de tempo durante o qual nada chega à parede C. Se temos vários detectores espalhados sobre toda a parede C, e a fonte F tem intensidade muito

baixa, então somente um detector registrará a chegada de um elétron, e decorrido um pequeno intervalo de tempo outro detector registrará a chegada de mais um elétron e assim por diante. Nunca ocorrerá uma meia resposta do detector, quer dizer, ou um elétron inteiro chega ou nada acontece; e mais ainda, dois detectores nunca responderão si multaneamente, exceção feita para a coincidência que a fonte emitiu dois elétrons dentro do tempo de resolução dos detectores, uma coincidência cuja probabilidade decresce com a diminuição da intensidade da fonte F. Quer dizer então que o detector registra a passagem de um simples corpúsculo viajando de F a uma fenda na parede B e daí para o ponto x como esquematizado na Figura 1.

Na experiência descrita, o que mediremos para várias posições x do detector é o número médio de pulsos por segundo. Em outras palavras determinaremos experimentalmente a probabilidade (relativa) P que o elétron passe de F para x, como uma função de x.

Tanto a Mecânica Quântica quanto a Mecânica Quântica Estocástica prevêm que o gráfico da probabilidade P(x) é a curva ilustrada qualitativamente na Figura 2, quando ambas as fendas se encontram abertas.

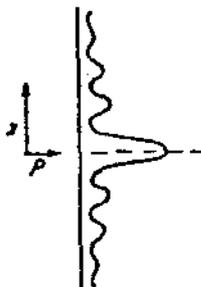
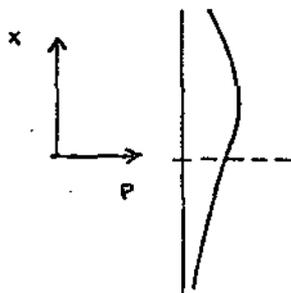
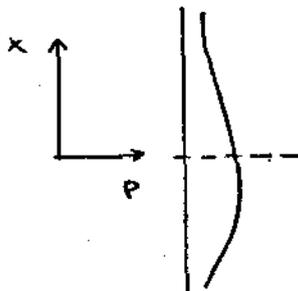


Figura 2

Todavia se s3mte uma das fendas est3 aberta, a situa33o 3 diferente. Por exemplo, se s3mte a fenda 1 se encontra aberta o resultado do gr3fico 3 o da Figura 3;

Figura 3

Enquanto que se a fenda 2 se encontra aberta e a fenda 1 bloqueada, o gr3fico de $P(x)$ 3 o da Figura 4.

Figura 4

Se agora imaginarmos cada el3tron passando atrav3s de uma

fenda ou de outra, esperaríamos a curva mostrada na Figura 5 quando ambas as fendas estão abertas.

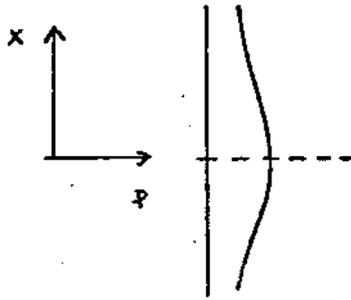


Figura 5

Nesta última situação (Figura 5) não ocorre interferência e isto é consideravelmente diferente do que foi estabelecido na Figura 2, onde ocorreu interferência,

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1]- ALBEVERIO, S. & HØEGH-KROHN, R.
"A Remark on the Connection Between Stochastic Mechanics
and the Heat Equation"
J. of Math. Phys., 15 (10), 1745 (1974).
- [2]- BALLENTINE, L.S.
"The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics"
Rev. Mod. Phys., 42, 358, (1970).
- [3]- BOHM, D.
"Quantum Theory"
Prentice-Hall, Inc. (1951).
- [4]- BOHM, D.
"Causality and Chance in Modern Physics"
Routledge & Kegan Paul, LTD (1967).
- [5]- BOTH, N. T.
"Mecânica Quântica Estocástica"
Tese de Mestrado - UNICAMP (1981).
- [6]- BUONOMANO, V.
"Quantum Mechanics as a Non-Ergodic Classical Statistical
Theory"
Il Nuovo Cimento 57 B (1), 146, (1980).
- [7]- BUONOMANO, V.
"A Limitation on Bell's Inequality"
Ann. Inst. Henry Poincaré 29 A, 379, (1978).

- [8]- COURANT, R.
"Differential and Integral Calculus"
Wiley-Interscience, Vol. 2, (1968).
- [9]- COX, D. R., MILLER, H. D.
"The Theory of Stochastic Processes"
Chapman and Hall (1972).
- [10]- DE LA PEÑA, L. & CETTO, A. M.
"Stochastic Theory of Classical and Quantum Systems"
Foundations of Physics, 5 (2), 355 (1975).
- [11]- DIRAC, P. A. M.
"The Principles of Quantum Mechanics"
Oxford University Press (1978).
- [12]- FOCK, V. A.
"Fundamentals of Quantum Mechanics"
Mir (1982).
- [13]- FRIEDMAN, A.
"Foundations of Modern Analysis"
Dover (1982).
- [14]- GHIRARDI, G. C.; OMERO, C.; RIMINI, A. & WEBER, T.
"The Stochastic Interpretation of Quantum Mechanics"
Rivista del Nuovo Cimento, 1 (3), (1978).
- [15]- GELMAN, I. I.; SKOROHOD, A. V.
"Introduction à La Théorie Des Processus Aleatoires"
Mir (1980).

- [16]- GILSON, J. G.
"On Stochastic Theories of Quantum Mechanics"
Proc. Camb. Phil. Soc. 64, 1061 (1968).
- [17]- GRABERT, H.; HÄNGGI, P. & TALKNER, P.
"Is Quantum Mechanics Equivalent to a Classical Stochastic Process?"
Phys. Rev. A, 19 (6), 2440, (1979).
- [18]- GRAVES, L. M.
"The Theory of Functions of Real Variables"
McGraw-Hill Co, (1956).
- [19]- JAMMER, M.
"The Philosophy of Quantum Mechanics"
John Wiley & Sons (1974).
- [20]- KARLIN, S.
"A First Course in Stochastic Processes"
Academic Press (1966).
- [21]- KARLIN, S.; TAYLOR, H. M.
"A Second Course in Stochastic Processes"
Academic Press (1981).
- [22]- KINNEY, J. R.
"Continuity Properties of Sample Functions of Markov Processes"
Trans. Amer. Math. Soc., 74, 280-302 (1953).

- [23]- KOLMOGOROV, A. N.; FOMIN, S. V.
"Introductory Real Analysis"
Dover (1972).
- [24]- KRACKLAUER, A. F.
"Comment on Derivation of The Schrödinger Equation From
Newtonian Mechanics"
Phys. Rev. D, 10 (4), 1358 (1974).
- [25]- LAVENDA, B. H.
"On The Equivalence Between Classical Markov Processes and
Quantum Mechanics"
Lettere al Nuovo Cimento, 27 (14), 433, (1980).
- [26]- MIELNIK, B.; TENGSTRAND, T.
"Nelson-Brown Motion: Some Question Marks"
Int. Jour. Theor. Phys. 19 (3), 239 (1980).
- [27]- MOORE, S. M.
"Can Stochastic Physics be a Complete Theory of Nature?"
Found. Phys., 9, 237 (1979).
- [28]- NELSON, E.
"Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Me-
chanics"
Phys. Rev. 150 (4), 1079 (1966).
- [29]- NELSON, E.
"Dynamical Theories of Brownian Motion"
Princeton Univ. Press (1967).

[30]- ONOFRI, E.

"The Stochastic Interpretation of Quantum Mechanics: A Reply to Ghirardi et Al"

Lettere Al Nuovo Cimento, 24 (8), 253 (1979).