

TRANSFERÊNCIA DE CALOR ENTRE DOIS DISCOS COAXIAIS GIRANDO  
COM APLICAÇÃO EXTERNA DE UM CAMPO MAGNÉTICO

*Matéria com aplicação e extensão*

Este exemplar corresponde a re-  
dação final da tese defendida pelo  
Sr. GILDÁSIO GUEDES FERNANDES e  
aprovado pela comissão julgadora.

Campinas, *07* de *Fevereiro* de 198*4*.

*R K Bhatnagar*

PROF.DR. RAKESH KUMAR BHATNAGAR

Dissertação apresentada ao Institu-  
to de Matemática, Estatística e  
Ciência da Computação, UNICAMP, co-  
mo requisito parcial para obtenção  
do título de Mestre em Matemática  
Aplicada.

Dezembro/1983.

**UNICAMP**  
**BIBLIOTECA CENTRAL**

A vida é um rosário de sacrifícios, mas também é um celeiro de sonhos. Não sonhos impossíveis, nem sacrifícios insuportáveis. Sonhos que trazem a gelêia necessária para não se vegetar. Sacrifícios que na medida que são superados revelam os valores de cada ser.

Gil

À Anita, Denise e Milena.

Todo trabalho é fruto do esforço e do interesse de um grupo de pessoas ou instituições. Devido a isto quero lembrar as pessoas e as instituições que de maneira direta ou indiretamente contribuíram para que este trabalho fosse realizado:

- Professor Doutor Rakesh Kumar Bhatnagar, pela paciente orientação e sugestões no decorrer deste trabalho;
- Professor Doutor José Vitório Zago, pelas sugestões dadas na aplicação do método numérico, bem como na correção;
- Professor Doutor Eduardo Sebastiani, pelas observações apresentadas na fase de correção;
- À Fundação Universidade Federal do Piauí, pelo apoio financeiro;
- À Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação do FUFPI, por sua política científica;
- Ao Departamento de Matemática da FUFPI, por acreditar em mim;
- Ao PICD-CAPES, pelas bolsas concedidas;
- A D. Hilda e ao Sr. Fausto, pelo apoio espiritual dado às minhas filhas;
- À Águas de Lindóia, pela sua doce, alegre e forte presença em minha vida;
- À Lourdes e a Elda, pelo longo e sadio trabalho de datilografia;

À todos meus sinceros agradecimentos.

Gil Guedes

## NOTAÇÃO

$R$  - número de Reynolds

$M$  - número de Hartmann

$E$  - número de Eckert

$\sigma$  - número de Prandtl

$\rho$  - densidade

$p$  - pressão isotrópica

$T$  - Temperatura

$T^*$  - Temperatura adimensionalizada

$S$  - constante de proporcionalidade da velocidade entre os dois discos.

$\Omega$  - velocidade angular do disco superior

$\mu$  - viscosidade

$d$  - distância entre os dois discos

$(r, \theta, z)$  - coordenada de um ponto do sistema de coordenadas cilíndricas polares

$\underline{V}$  - Vetor velocidade

$(u, v, w)$  - componentes do vetor velocidade nas direções crescentes de  $r, \theta, z$

$\phi$  - função dissipação

VC - Volume de Controle

SC - Superfície de Controle

$dv$  - volume de um elemento fluido

$\underline{F}_s$  - resultante das distribuições de força de contacto

B - força de campo

dA - normal externa à superfície de controle

$T_{ij}$  - Tensor de Tensões

$\tau$  - tensão de cisalhamento

$E_{ij}$  - tensor Simétrico de Deformação

$\nabla^2$  - Operador de Laplace

$H_0^2$  - campo magnético constante

$\mu_0$  - permeabilidade magnética

$c_p$  - calor específico

$\delta_{ij}$  - Delta de Kronecker.

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO . . . . .	i
CAPÍTULO I - FUNDAMENTOS TEÓRICOS . . . . .	1
1.1. Introdução às Equações Gerais do Escoamento .	1
1.1.1. Forma Diferencial da Equação de Continuidade .	5
1.1.2. Equações do Movimento . . . . .	8
1.1.3. Equações da Energia . . . . .	17
1.2. Introdução à Teoria de Perturbação . . . . .	24
1.3. Método das Diferenças Finitas para Problemas com Valores no Contorno . . . . .	29
CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E EQUAÇÕES DAS COMPO- NENTES DA VELOCIDADE . . . . .	33
2.1. Introdução . . . . .	33
2.2. Formulação do Problema . . . . .	34
2.3. Soluções das Equações das Componentes de Velo- cidade . . . . .	34
CAPÍTULO III - DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM ESCOAMENTO PERMANENTE DE FLUIDOS NEWTONIANOS COM A APLI- CAÇÃO DE FORÇAS EXTERNAS . . . . .	47
Primeiro Caso . . . . .	47
Segundo Caso . . . . .	60
Análise dos Resultados . . . . .	66
REFERÊNCIAS . . . . .	77

O objetivo principal deste trabalho é discutir e apresentar soluções para o problema da transferência de calor em um escoamento de fluidos do tipo newtoniano entre dois discos coaxiais giratórios, com a aplicação de um campo magnético na direção dos eixos.

Para o problema acima citado necessitamos das equações que descrevem o movimento do fluido, a saber: da continuidade e de Navier-Stokes. Usamos também a equação da Energia. Estas equações estão descritas em sua fórmula mais geral no Capítulo I. Temos também neste Capítulo, uma introdução elementar à teoria de perturbação, a técnica fundamental utilizada na solução das equações diferenciais resultante do problema em estudo. Foi escolhido como parâmetro de perturbação o número adimensional de Reynolds,  $R < 1$ . Descrevemos ainda no Capítulo I, o método das diferenças finitas que utilizamos para dar a solução numérica de algumas equações diferenciais que surgem do problema.

No Capítulo II formulamos o problema a ser estudado e apresentamos as soluções da distribuição de velocidade para o escoamento proposto entre os dois discos giratórios. De maneira que este Capítulo é fundamental para o objetivo que nos propusemos a alcançar.

O Capítulo III é caracterizado pelo uso da Equação de Energia, onde analisamos o comportamento da temperatura para o escoamento. Neste capítulo apresentamos a discussão dos resultados bem como os gráficos resultantes dos cálculos efetuados. Da análise dos gráficos, obtivemos algumas conclusões descritas com detalhes no final deste capítulo.

O método utilizado na solução aproximada das equações diferenciais do nosso trabalho, foi o método de Diferenças Finitas. Para efeito de comparação, um trabalho posterior pode ser realizado utilizando outros métodos.

Este trabalho pode ser estendido também, a um fluido do tipo não-newtoniano usando diversos modelos matemáticos.

## CAPÍTULO I

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

#### 1.1. INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES GERAIS DO ESCOAMENTO

Em termos simples, fluido é uma substância que não pode resistir a uma força ou a uma tensão de cisalhamento sem se mover. Os fluidos são normalmente classificados como líquidos ou gases. Um líquido tem forças intermoleculares que mantêm as moléculas juntas de modo a formar volume mas não uma forma definida. O gás consiste de moléculas em movimento que colidem entre si, tendendo dispersar-se de maneira a não ter volume ou forma definidos.

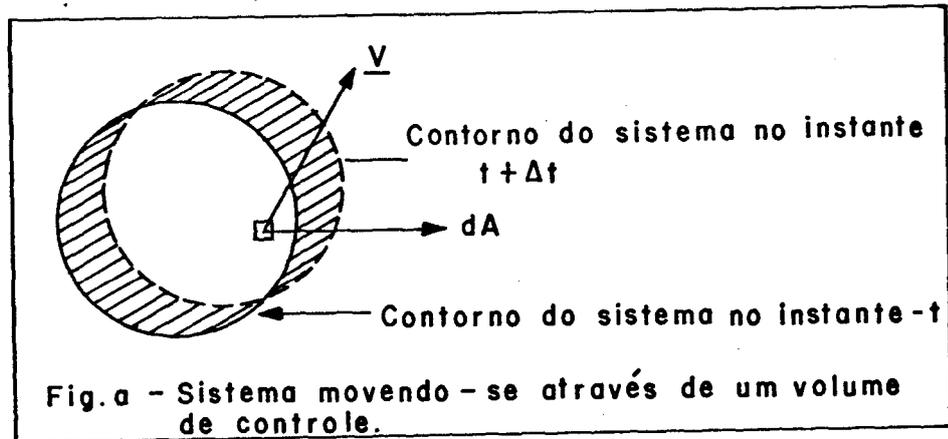
São cinco as variáveis básicas da mecânica dos fluidos: três componentes de velocidade e duas propriedades termodinâmicas. O campo de escoamento do fluido é completamente determinado pela especificação do vetor velocidade  $\underline{V}$  e duas propriedades termodinâmicas em função do espaço e do tempo. Assim, necessitamos de cinco equações independentes:

- (a) a equação da continuidade;
- (b) três equações de movimento;
- (c) a equação de energia.

Num fluido incompressível a equação da energia não é necessária, porque a massa específica é considerada conhecida e apenas a pressão e a velocidade precisam ser conhecidas para uma descrição completa do escoamento. A temperatura é então desvinculada, mas caso se necessite de tal informação, deve-se usar a equação da energia. No escoamento turbulento, a situação é um pouco mais complexa e não se pode desenvolver em geral um conjunto fechado de equações.

Existem dois tratamentos pelos quais podemos usar o campo de escoamento para se obter as equações. O tratamento mais comum, o método *Euleriano* nos permite focalizar a atenção numa região fixa no espaço sem identificar as partículas da região num dado instante de tempo, enquanto o *Lagrangeano* analisa o comportamento individual de uma partícula.

Fixando-nos ao tratamento *Euleriano*, o qual nos leva ao uso do *Volume de Controle* (fig. a) obtemos as seguintes equações integrais: [5], [14].



(a) Equação da Continuidade:

$$\int_{SC} \rho \underline{V} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dv ; \quad (1.1)$$

(b) Equações do Movimento:

$$\underline{F}_s + \int_{VC} \underline{B} \rho dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \underline{V} (\rho dv) + \int_{SC} \underline{V} (\rho \underline{V} \cdot d\mathbf{A}) \quad (1.2)$$

onde  $\rho$  é a densidade;  $\underline{V}$  é o vetor de velocidades;  $d\mathbf{A}$  é a normal externa à superfície de controle;  $v$  é o volume;  $VC$  é o volume de controle fixo no espaço;  $SC$  superfície de controle que limita o volume de controle;  $\underline{F}_s$  é a resultante das distribuições de força de contacto;  $\underline{B}$  é a força de campo, também chamada de força externa (a gravidade é a distribuição de força

de campo mais comum) por unidade de volume;  $\int_{SC}$ ,  $\int_{VC}$  indicam integral de superfície e integral de volume respectivamente, e  $dv$  o volume de um elemento fluido.

A Eq. (1.1) também denominada Equação de Conservação de Massa, afirma que "a taxa de decréscimo da massa dentro do volume de controle é igual à taxa de efluxo líquido da massa através da superfície de controle". Como nenhuma limitação de tamanho foi imposta ao volume de controle selecionado, esta equação será válida para qualquer região, finita ou infinitesimal. Ela também é válida para qualquer fluido - viscoso ou ideal, compressível ou incompressível, puro, multicomponente, escoamento com transferência de calor ou sem transferência, etc.

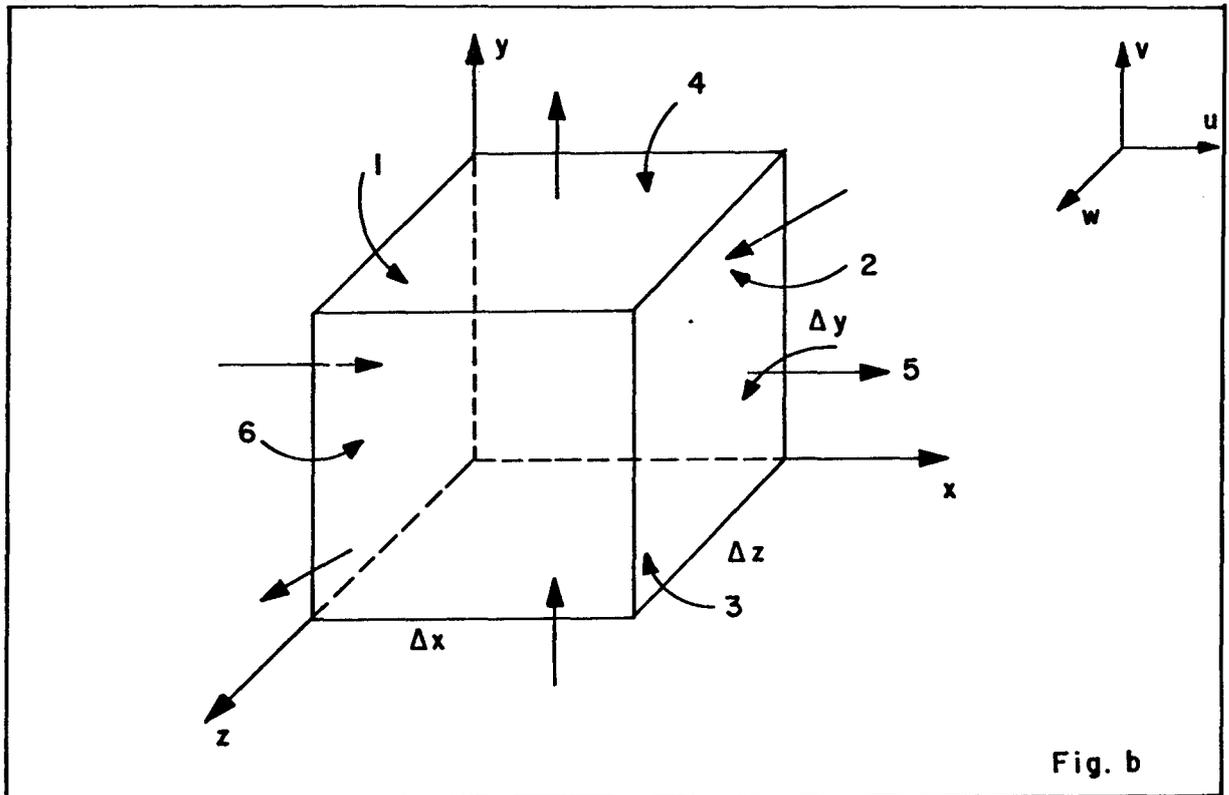
A Eq. (1.2) fundamenta-se na segunda lei de Newton e "igual a soma das distribuições de forças (forças de contato e força de campo) com a razão de efluxo da quantidade de movimento através da superfície de controle, mais a razão de variação da quantidade de movimento no interior do volume de controle".

#### EQUAÇÕES GERAIS DO ESCOAMENTO NA FORMA DIFERENCIAL

Para podermos efetuar deduções detalhadas, tais como, campo de velocidade ou distribuição de tensão através de uma região do escoamento, devemos usar as formas diferenciais das leis básicas em um ponto e integrá-las para satisfazer as condições de contorno do problema. Usaremos as equações integrais para deduzirmos as equações na forma diferencial:

### 1.1.1. FORMA DIFERENCIAL DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Consideremos um volume de controle infinitesimal fixo no espaço  $xyz$  conforme indica a fig. b, onde  $(u,v,w)$  são as componentes do vetor velocidade  $\underline{v}$ .



Como a Eq. (1.1) não possui limite de tamanho, ela pode ser aplicada para este volume de controle infinitesimal. Usando-se o Teorema de Valor Médio, a integral de volume fica sendo

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\xi} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (1.3)$$

onde  $\xi$  é um ponto médio.

Supondo que o fluxo de massa em cada face seja uniforme e usando também o Teorema de Valor Médio, temos

$$\int_{sc1} \rho \underline{V} \cdot d\mathbf{A} = -(\rho u)_x \Delta y \Delta z ; \quad (1.4a)$$

$$\int_{sc2} \rho \underline{V} \cdot d\mathbf{A} = (\rho u)_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z ; \quad (1.4b)$$

$$\int_{sc3} \rho \underline{V} \cdot d\mathbf{A} = -(\rho v)_y \Delta x \Delta z ; \quad (1.4c)$$

$$\int_{sc4} \rho \underline{V} \cdot d\mathbf{A} = (\rho v)_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z ; \quad (1.4d)$$

$$\int_{sc5} \rho \underline{V} \cdot d\mathbf{A} = -(\rho w)_z \Delta x \Delta y ; \quad (1.4e)$$

$$\int_{sc6} \rho \underline{V} \cdot d\mathbf{A} = (\rho w)_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y ; \quad (1.4f)$$

Somando sobre todas as faces

$$\int_{sc} \underline{V} \cdot d\mathbf{A} = [(\rho u)_{x+\Delta x} - (\rho u)_x] \Delta y \Delta z + [(\rho v)_{y+\Delta y} - (\rho v)_y] \Delta x \Delta z + [(\rho w)_{z+\Delta z} - (\rho w)_z] \Delta x \Delta y \quad (1.4g)$$

Substituindo as equações (1.3) e (1.4g) na Eq. (1.1) e dividindo o resultado por  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{av} + \frac{(\rho u)_{x+\Delta x} - (\rho u)_x}{\Delta x} + \frac{(\rho v)_{y+\Delta y} - (\rho v)_y}{\Delta y} + \\ + \frac{(\rho w)_{z+\Delta z} - (\rho w)_z}{\Delta z} = 0 \end{aligned} \quad (1.4h)$$

Fazendo  $x, y, z$  tenderem a zero, o elemento de volume tende para um ponto, tomando-se o limite a Eq. (1.4h) reduz a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$

que é a forma diferencial da equação da continuidade.

Uma formulação mais geral é dada, usando o Teorema da Divergência de Gauss e a Eq. (1.5) torna-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{V} = 0, \quad (1.5a)$$

onde a divergência pode ser expressa em qualquer sistema de coordenadas.

Para um escoamento permanente a Eq. (1.5a) resume-se em

$$\nabla \cdot \rho \underline{V} = 0 \quad (1.5b)$$

e para um fluido incompressível,

$$\nabla \cdot \underline{V} = 0 \quad (1.6)$$

mesmo quando o fluxo não é estacionário, já que  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .

Seja  $\underline{V}$  o campo de velocidade com componentes  $u, v, w$  na direção crescente das coordenadas cartesianas  $x, y, z$  respectivamente, então a Eq. (1.6) torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \quad (1.7)$$

Em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  com componentes do campo de velocidade  $u, v, w$  na direção crescente de  $r, \theta, z$  respectivamente a Eq. (1.6) resume-se a : [13], [14].

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \quad (1.8)$$

### 1.1.2. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Para escoamento permanente e forças de campo desprezíveis a Eq. (1.2) torna-se

$$\underline{F}_S = \int_{SC} \underline{V} (\rho \underline{V} \cdot d\mathbf{A}) . \quad (1.9)$$

Como vemos a Eq. (1.9) é uma equação vetorial. As equações escalares componentes nas direções ortogonais  $x, y, z$  podem ser escritas, tomando-se as componentes dos vetores  $\underline{V} = (u, v, w)$  e  $F_s = ((F_s)_x, (F_s)_y, (F_s)_z)$ , assim:

$$(F_s)_x = \int_{SC} u(\rho \underline{V} \cdot d\mathbf{A}) \quad , \quad (1.10)$$

$$(F_s)_y = \int_{SC} v(\rho \underline{V} \cdot d\mathbf{A}) \quad , \quad (1.11)$$

$$(F_s)_z = \int_{SC} w(\rho \underline{V} \cdot d\mathbf{A}) \quad , \quad (1.12)$$

Usando o Teorema da Divergência de Gauss, obtemos, [1]:

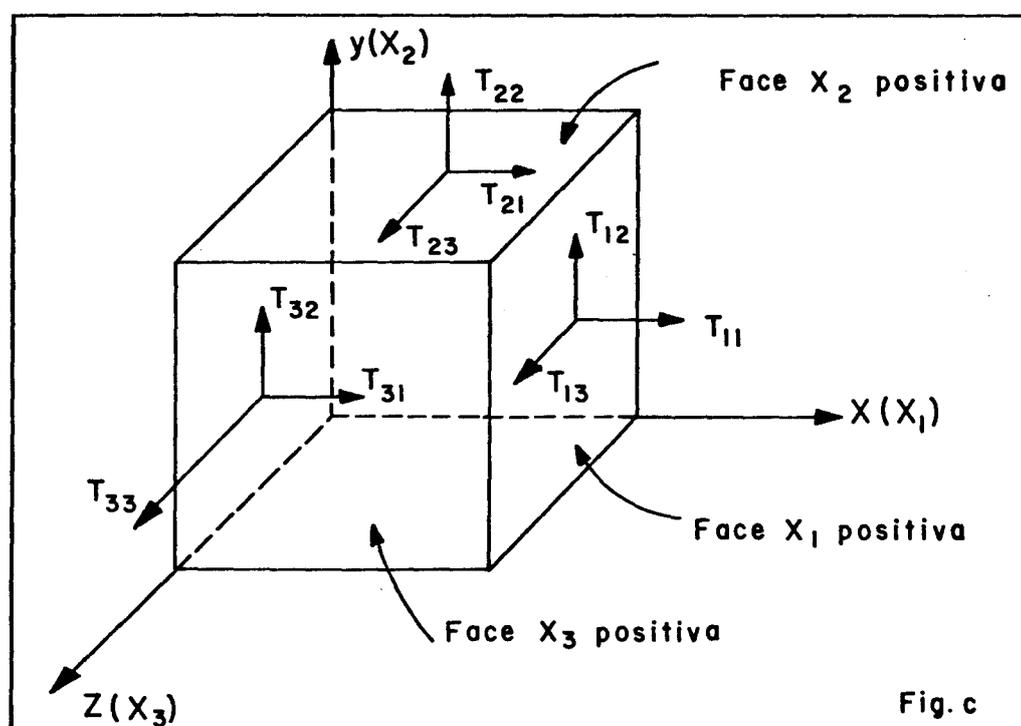
$$(F_s)_x = \int_{VC} \underline{V} \cdot \nabla (\rho u) dv \quad , \quad (1.13)$$

$$(F_s)_y = \int_{VC} \underline{V} \cdot \nabla (\rho v) dv \quad , \quad (1.14)$$

$$(F_s)_z = \int_{VC} \underline{V} \cdot \nabla (\rho w) dv \quad . \quad (1.15)$$

Apliquemos, agora, as formas integrais (1.13), (1.14), (1.15) a um volume elementar (pequeno cubo de fluido de arestas  $dx, dy, dz$ ) e definimos o Tensor de Tensões  $T_{ij}$  para descrever as forças de contacto " $F_s$ ", onde o primeiro índice indica a face de atuação da tensão, e o segundo indica a direção da tensão. A face é indicada como o plano perpendicular ao eixo do índice. Por exemplo, a face 1 é perpendicular ao eixo  $x$  ( $x_1$ ). A idéia de faces positivas e negativas está indicada na fig. c. O tensor de Tensão pode ser escrito

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}, \text{ sendo } T_{ij} = T_{ji}.$$



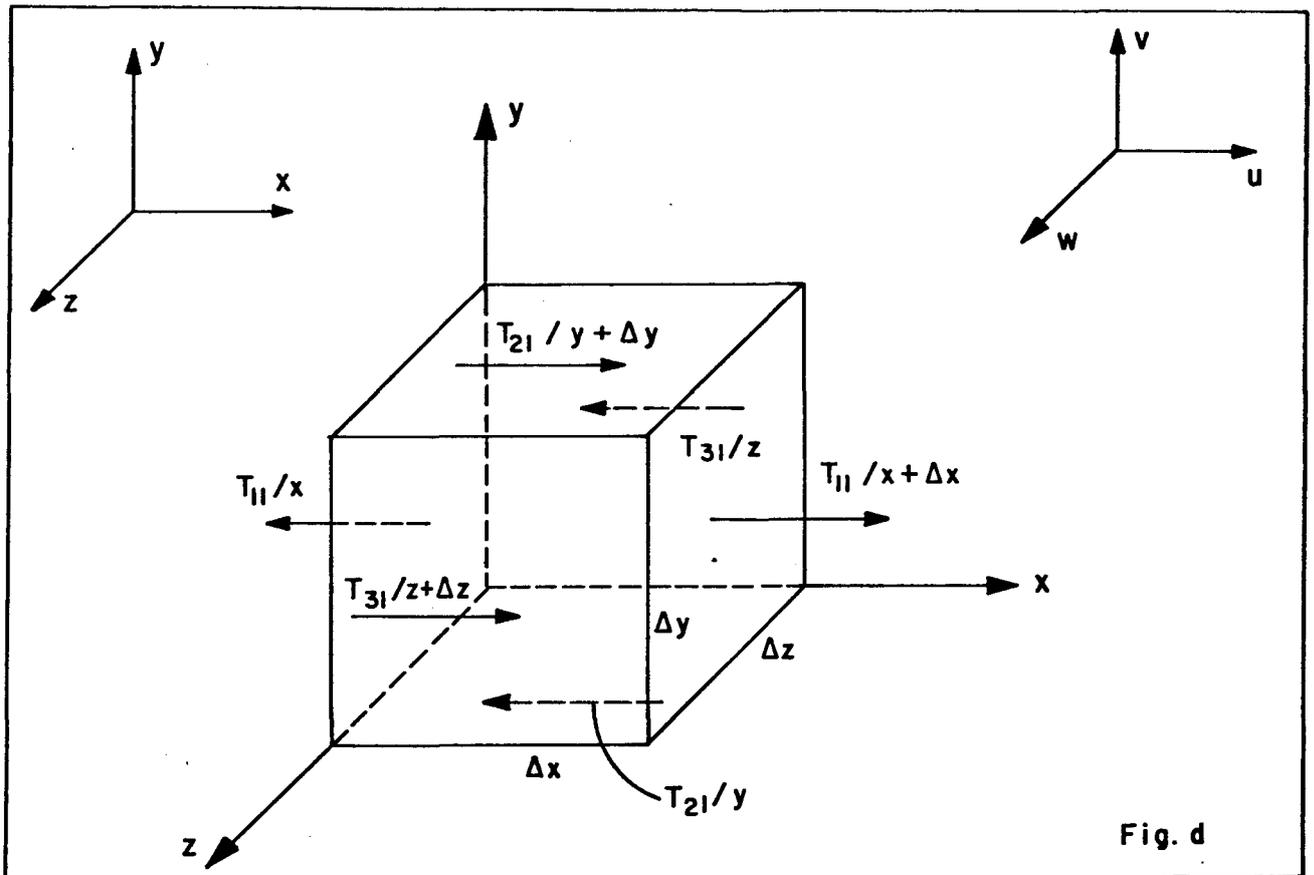


Fig. d

Analisando a fig. d, onde mostramos as forças na direção de  $x$  e a Eq. (1.13), que podemos aplicar a um cubo elementar onde as tensões compõem a força externa  $F_S$ , escrevemos o balanço da quantidade de movimento para direção  $x$ .

$$\begin{aligned}
 & (T_{11}|_{x+\Delta x} - T_{11}|_x) \Delta y \Delta z + (T_{21}|_{y+\Delta y} - T_{21}|_y) \Delta x \Delta z + (T_{31}|_{z+\Delta z} - \\
 & - T_{31}|_z) \Delta x \Delta y = \Delta y \Delta z (\rho u^2|_{x+\Delta x} - \rho u^2|_x) + \Delta x \Delta z (\rho uv|_{y+\Delta y} - \rho uv|_y) \\
 & + \Delta x \Delta y (\rho uw|_{z+\Delta z} - \rho uw|_z) . \qquad (1.16)
 \end{aligned}$$

Dividindo a Eq. (1.16) por  $\Delta x \Delta y \Delta z$  obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{(T_{11}|_{x+\Delta x} + T_{11}|_x)}{\Delta x} + \frac{(T_{21}|_{y+\Delta y} - T_{21}|_y)}{\Delta y} + \\ & + \frac{(T_{31}|_{z+\Delta z} - T_{31}|_z)}{\Delta z} = \\ & = \frac{(\rho u^2|_{x+\Delta x} - \rho u^2|_x)}{\Delta x} + \frac{(\rho uv|_{y+\Delta y} - \rho uv|_y)}{\Delta y} + \\ & + \frac{(\rho uw|_{z+\Delta z} - \rho uw|_z)}{\Delta z} . \end{aligned}$$

Tomando limite quando  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  tendem a zero resulta em

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{21}}{\partial y} + \frac{\partial T_{31}}{\partial z} = \rho \left[ \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \right] .$$

Efetuada as derivadas do segundo membro ,

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{21}}{\partial y} + \frac{\partial T_{31}}{\partial z} = \rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial z} \right] .$$

Agrupando os termos temos

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{21}}{\partial y} + \frac{\partial T_{31}}{\partial z} = \rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]$$

e usando a equação da continuidade (Eq. 1.6), obtemos

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{21}}{\partial y} + \frac{\partial T_{31}}{\partial z} = \rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] . \quad (1.17)$$

Usando a convenção de soma de Einstein, e tendo como campo de velocidade  $\underline{v} = (u_1, u_2, u_3)$  a Eq. (1.17) torna-se

$$\frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j} = \rho u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j} , \quad (j=1, 2, 3) \quad (1.18)$$

De maneira análoga temos na direções de  $y$  e de  $z$  respectivamente

$$\frac{\partial T_{2j}}{\partial x_j} = \rho u_j \frac{\partial u_2}{\partial x_j} , \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial T_{3j}}{\partial x_j} = \rho u_j \frac{\partial u_3}{\partial x_j} , \quad (1.20)$$

ou ainda na forma tensorial

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (i=1,2,3) . \quad (1.21)$$

### 1.1.3. EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

As equações de *Navier-Stokes* descrevem completamente o movimento de um fluido *Newtoniano*. Em geral os fluidos que obedecem a relação entre tensão de cisalhamento e gradiente de velocidade

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{onde a constante } \mu \text{ é a viscosidade,}$$

são chamados fluidos *newtonianos*. Devemos ressaltar que todos os gases e a maioria dos líquidos simples podem ser considerados fluidos *newtonianos* para a maior parte dos escoamentos. Para um fluido *newtoniano* o Tensor de Tensões é dado por

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + 2 \mu E_{ij} , \quad (1.22)$$

conhecida também como equação constitutiva dos fluidos *newtonianos* onde o Tensor de Tensão é dividido em duas partes: pressão e deformação;  $E_{ij}$  é o tensor simétrico de Deformação dado por

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) ; \quad (1.23)$$

$p$  é a pressão,  $\delta_{ij}$  é o Delta de Kronecker e  $\mu$  representa a viscosidade do fluido.

Substituindo a Eq. (1.23) na Eq. (1.22) e esta na Eq. (1.21) obtemos

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -p \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (1.24)$$

calculando a equação na direção de  $x_1$ , isto é para  $i=1$  temos:

$$\rho u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right)$$

ou

$$\begin{aligned} \rho u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \rho u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \rho u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \\ + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1} \right] \end{aligned}$$

ou, ainda

$$\begin{aligned} \rho \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] \end{aligned}$$

Usando a equação da continuidade (1.7), temos

$$\rho \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \quad (1.25)$$

De maneira semelhante encontramos na direção de  $x_2$ ,

$$\rho \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right), \quad (1.26)$$

e na direção de  $x_3$ ,

$$\rho \left( u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right), \quad (1.27)$$

ou na forma tensorial

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \nabla^2 u_i, \quad (1.28)$$

Sendo  $\nabla^2$  o operador de Laplace dado por

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right). \quad (1.29)$$

Em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  e com um campo de velocidade  $\underline{V} = (u, v, w)$  na direção crescente das coordenadas  $r, \theta, z$  as equações (1.25), (1.26), (1.27) tomaram-se respectivamente:

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \\ + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

### 1.1.3. A EQUAÇÃO DA ENERGIA

A Lei de Conservação da Energia exige que a *diferença da*

taxa de fornecimento de energia em um volume  $V_0$  fixo no espaço com uma superfície  $S$  e a taxa a qual a energia flui através de  $S$  deve ser igual a taxa de crescimento de energia neste volume. Desta maneira a Lei de Conservação da energia dá a seguinte equação [13].

$$\int_{V_0} \frac{\partial Q}{\partial t} dV_0 + \int_S u_i (\tau_{ij} n_j) dS - \int_S E_t \rho u_j n_j dS + \int k \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} E_t \rho dV_0, \quad (1.33)$$

onde  $\partial Q/\partial t$  é a taxa de calor produzido por unidade de volume neste volume  $V_0$  por agentes externos,  $E_t$  é a energia total do sistema por unidade de massa, isto é

$$E_t = u_i u_i / 2 + K + E,$$

a convenção de soma é usada com  $i, j = 1, 2, 3$ ;  $u_i u_i = u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3$  sendo  $E$  a energia interna por unidade de massa em  $V_0$ ,  $K$  é a energia potencial, e  $u_i u_i / 2$  é a energia cinética por unidade de massa.  $u_i$  é a  $i$ -ésima componente do vetor velocidade. Os  $\tau_{ij}$  são as componentes dos tensores viscosos,  $n_i$  é a  $i$ -ésima componente da normal externa à superfície  $S$  e  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica. Os dois primeiros termos do primeiro membro da Eq. (1.33) são,

respectivamente, a taxa de energia produzida pelos agentes externos e a taxa de calor produzida pelos tensores viscosos em contacto com o lado de fora. Os outros dois termos representam a taxa de energia perdida por calor de convecção e calor de condução. A perda devida à radiação é desprezada.

Pelo teorema da *divergência de Gauss*

$$\int_S A_{\eta_j} dS = \int_{V_0} \frac{\partial A}{\partial x_j} dV_0 ,$$

nós transformamos as integrais de superfície em integrais de volume, então a Eq. (1.33) torna-se

$$\int \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial E_t^{\rho u_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial E_t^{\rho}}{\partial t} \right] dV_0 = 0 . \quad (1.34)$$

Como o volume foi escolhido arbitrariamente, concluímos que o integrando da Eq. (1.34) deve ser nulo e a equação da energia é então

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial E_t^{\rho u_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial E_t^{\rho}}{\partial t} = 0 . \quad (1.35)$$

As seguintes relações nos ajudam a simplificar a equação da energia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t \rho u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial E_t \rho}{\partial t} &= E_t \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) + \rho \left( \frac{\partial E_t}{\partial t} + u_j \frac{\partial E_t}{\partial x_j} \right) = \\ &= \rho \frac{DE_t}{Dt} = \rho \left( u_i \frac{Du_i}{Dt} + u_j \frac{\partial K}{\partial x_j} + \frac{DE}{Dt} \right) \end{aligned} \quad (1.36)$$

porque

$$\frac{\partial K}{\partial t} = 0$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} &= u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= u_i \rho \left( \frac{Du_i}{Dt} + \frac{\partial K}{\partial x_i} \right) + \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Substituindo as equações (1.36) e (1.37) na equação (1.35)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho u_i \frac{Du_i}{Dt} + \rho u_i \frac{\partial K}{\partial x_i} + \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \rho u_i \frac{Du_i}{Dt} - \rho u_i \frac{\partial K}{\partial x_i} \\ - \rho \frac{DE}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

além disso

$$p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = - p \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = p \rho \frac{D(1/\rho)}{Dt}$$

a equação de energia torna-se finalmente

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} (k \frac{\partial T}{\partial x_i}) = \rho \left[ \frac{DE}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right], \quad (1.39)$$

$$\text{onde } \tau'_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \cdot \delta_{ij},$$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ se } i=j \text{ e } \delta_{ij} = 0, \text{ } i \neq j.$$

Estes são os tensores viscosos sem os termos de pressão. A função dissipação é dada por

$$\phi = \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Em coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  a Eq. (1.39)

$$\rho \left[ \frac{DE}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right] = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) + \phi \quad (1.40)$$

com

$$\begin{aligned} \phi = & 2\mu \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 . \end{aligned}$$

Para um gás perfeito o segundo membro da Eq. (1.39) pode ser escrito como

$$\rho \left[ \frac{DE}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right] = \rho \frac{Dc_p T}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = \rho \frac{DH}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} \quad (1.41)$$

onde  $H = c_p T =$  entalpia.

$$\text{Temos também que } \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{c_p} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.42)$$

e assim a equação da Energia torna-se

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{c_p} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k}{c_p} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k}{c_p} \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \phi . \quad (1.43)$$

Para um fluido incompressível, com viscosidade constante e coeficiente de condutividade térmica a equação da energia é a seguinte

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \phi . \quad (1.44)$$

Em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  com componentes de velocidade de  $u, v, w$  nas direções crescente de  $r, \theta, z$  respectivamente a Eq. (1.40) tem a seguinte forma:

$$\rho \left[ \frac{DE}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right] = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (k \frac{\partial T}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) + \phi_c \quad (1.45)$$

onde  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z}$

$$\phi_c = \mu [2(e_{rr}^2 + e_{\theta\theta}^2 + e_{zz}^2) + e_{\theta z}^2 + e_{zr}^2 + e_{zr}^2] + \lambda (e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{zz})^2 \quad (1.46)$$

sendo que:

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$e_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad e_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad e_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}.$$

Veja também como é a equação da Energia para o caso específico que estamos tratando na pag. 48.

## 1.2. INTRODUÇÃO A TEORIA DE PERTURBAÇÃO

A maioria dos problemas que envolvem determinados modelos matemáticos, tais como aqueles usados nos parágrafos anteriores deste capítulo dão origem a equações diferenciais não lineares cuja solução é impossível ser encontrada na forma analítica. De maneira que, para obtermos informações é necessário recorrermos a aproximações, a soluções numéricas, ou até mesmo a combinação de uma solução aproximada com uma solução numérica.

Nos métodos de perturbação a solução é apresentada pelos primeiros termos de uma expansão assintótica obtida em torno de um parâmetro, que as vezes aparece na equação ou é introduzido artificialmente.

Seja a equação diferencial ordinária não linear de ordem  $n$ ,

$$u(x)^n + g_1(u(x)^{(n-1)}, u(x)^{(n-2)} \dots u'(x), u(x), x) + \dots$$

$$+ g_{n-1}(u'(x), u(x), x) + g_n(u(x), x) = v(x) \quad (1.47)$$

que denotaremos por

$$F(u) = v \quad (1.48)$$

sendo  $F$  um operador diferencial não linear.

Seja  $L$  um operador diferencial linear e

$$L(u) = v , \quad (1.49)$$

uma equação auxiliar da Eq. (1.48) com a mesma ordem de maneira que é possível dar uma solução explícita na seguinte forma

$$u = T(v) , \quad (1.50)$$

que é em geral a única solução da Eq. (1.49). Sendo  $L(u)$  linear, lembre-se que:

$$L(e_1 u_1 + e_2 u_2) = e_1 L(u_1) + e_2 L(u_2)$$

quaisquer que sejam as funções  $u_1, u_2$  e escalares  $e_1, e_2$ .

Assim podemos escrever a Eq. (1.48) como

$$L(u) + [F(u) - L(u)] = v. \quad (1.51)$$

Introduzindo uma nova função  $N(u) = L(u) - F(u)$  a Eq. (1.51) torna-se

$$L(u) = v + N(u) . \quad (1.52)$$

Introduz-se agora um parâmetro  $\varepsilon$ , de maneira que a Eq. (1.52) fique assim:

$$L(u) = v + \epsilon N(u). \quad (1.53)$$

Observe que se  $\epsilon = 0$ , a Eq. (1.53) é igual a Eq. (1.49) cuja solução por (1.50) é

$$u(x) = T(v) = u_0(x). \quad (1.54)$$

Vamos supor que (1.53) tenha uma solução na forma

$$u(x) = u_0(x) + \epsilon u_1(x) + \epsilon^2 u_2(x) + \epsilon^3 u_3(x) + \dots \quad (1.55)$$

isto é uma expansão em série de potências em torno de  $\epsilon = 0$  com coeficientes  $u_k(x)$  independentes de  $\epsilon$ .

Supondo que  $L$  é um operador linear e que  $N$  é analítica, temos pela Eq. (1.55)

$$L(u) = L(u_0) + \epsilon L(u_1) + \epsilon^2 L(u_2) + \epsilon^3 L(u_3) \quad (1.56)$$

$$N(u) = N(u_0) + \epsilon N_1(u_0, u_1) + \epsilon^2 N_2(u_0, u_1, u_2) + \dots \quad (1.57)$$

Substituindo (1.56) e (1.57) na Eq. (1.53) temos:

$$\begin{aligned} L(u_0) + \epsilon L(u_1) + \epsilon^2 L(u_2) + \epsilon^3 L(u_3) + \dots &= v + N(u_0) + \\ &+ \epsilon N(u_0, u_1) + \epsilon^2 N(u_0, u_1, u_2) + \dots \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de mesma potência de  $\epsilon$  temos o seguinte sistema infinito de equações :

$$L(u_0) = v , \quad (1.58)$$

$$L(u_1) = N(u_0) ,$$

$$L(u_2) = N_1(u_0, u_1) ,$$

$$L(u_3) = N_2(u_0, u_1, u_2) ,$$

⋮

$$L(u_{k+1}) = N_k(u_0, u_1, u_2, \dots, u_k) ,$$

que é resolvido recursivamente, pois a determinação de  $u_k(x)$  requer o conhecimento de

$$u_n(x) \quad (0 \leq n \leq k-1).$$

Da primeira equação do sistema de equações anterior obtemos uma aproximação de grau zero, sendo para a Eq. (1.53) uma solução de aproximação linear

$$u^0(x) = u_0(x) = T(v(x)) . \quad (1.59)$$

Da segunda equação obtemos uma aproximação de grau 1,

$$u^1(x) = u_0(x) + \epsilon u_1(x) = T(v(x)) + \epsilon T(N(T(v(x)))) \quad (1.60)$$

e assim por diante até o grau de aproximação desejado.

A expressão (1.55) que é uma série infinita e cujos coeficientes são determinados pelo sistema infinito (1.58) é chamada de solução formal da Eq. (1.53). Para se obter uma solução formal de (1.52), tomamos  $\epsilon = 1$

Este parâmetro ocorre, com naturalidade em um grande número de situações, representando diversos parâmetros físicos, tais como: a intensidade de um choque; constantes físicas como a constante de Planck ( $h$ ) ou amplitude de um termo forçante; no nosso trabalho o parâmetro será o número adimensional de Reynolds ( $R$ ). Nestes casos escrevemos a Eq. (1.47) perturbada da seguinte maneira

$$G(u^n, u^{n-1}, \dots, u', u, x, \epsilon) = 0 \quad , \quad (1.61)$$

impondo a condição de que  $G$  seja uma equação diferencial linear de ordem "n" no limite quando  $\epsilon$  tende a zero. A linearidade limite é que possibilita fazermos o processo de perturbação.

Assim, em torno de  $\epsilon = 0$  a Eq. (1.61) torna-se

$$G(u^n, \dots, u', u, x, 0) + \epsilon \cdot \frac{\partial G}{\partial \epsilon}(u^n, \dots, u', u, 0) + \frac{\epsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 G}{\partial \epsilon^2}(u^n, \dots, u', u, x, 0) + \frac{\epsilon^3}{3!} \frac{\partial^3 G}{\partial \epsilon^3}(u^n, \dots, u', u, x, 0) + \dots = 0. \quad (1.62)$$

Não é difícil ver que (1.62) é uma equação diferencial da forma [3], [4], [12].

$$L(u) - v(x) + \epsilon N(u) + \epsilon^2 M(u) + \dots = 0, \quad (1.63)$$

onde  $M$  é também analítica. Sendo equivalente a Eq. (1.53) o processo de redução é o mesmo.

### 1.3. MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS PARA PROBLEMAS COM VALORES NO CONTORNO.

Consideremos uma equação diferencial linear com condições especificadas nos pontos finais de um intervalo  $[a,b]$ . Dividamos o intervalo  $[a,b]$  em  $N$  partes iguais de amplitude  $h$ . Seja  $x_0 = a$ ,  $x_N = b$  definimos

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (1.64)$$

como sendo os pontos interiores do intervalo. Os correspondentes valores de  $y$  nesses pontos interiores são representados por

$$y_n = y(x_0 + nh), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N-1. \quad (1.65)$$

A fim de solucionar um problema de valores no contorno pelo método das diferenças finitas, cada derivada que aparece na equação, assim como nas condições de contorno, é aproximada por diferenças finitas. Diferenças centrais são usualmente preferidas, em virtude de conduzirem a uma maior precisão. Algumas aproximações típicas, baseadas nas diferenças centrais, são as seguintes

$$y'(x_n) = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} , \quad (1.66)$$

$$y''(x_n) = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} . \quad (1.67)$$

Em cada caso, a representação da diferença finita é uma aproximação  $O(h^2)$  para a respectiva derivada (veja [11]).

#### ILUSTRAÇÃO DO PROCEDIMENTO

Seja a equação

$$y''(x) + f(x)y' + g(x)y = q(x) \quad (1.68)$$

sujeita às seguintes condições de contorno

$$y(x_0) = \alpha \quad e \quad y(x_n) = \beta . \quad (1.69)$$

Substituindo (1.66) e (1.67) em (1.68) obtemos

$$\frac{Y_{n+1} - 2Y_n + Y_{n-1}}{h^2} + f(x_n) \left( \frac{Y_{n+1} - Y_{n-1}}{2h} \right) + g(x_n) Y_n = q(x_n). \quad (1.70)$$

Multiplicando ambos os membros por  $h^2$  e estabelecendo que  $f(x_n) = f_n$ ,  $g(x_n) = g_n$ ,  $q(x_n) = q_n$  temos

$$\left(1 - \frac{h}{2} f_n\right) Y_{n-1} + (-2 + h^2 g_n) Y_n + \left(1 + \frac{h}{2} f_n\right) Y_{n+1} = h^2 q_n. \quad (1.71)$$

$n=1, 2, 3, \dots, N-1$

Os coeficientes em (1.71) podem naturalmente ser calculados, uma vez que  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $q(x)$  são funções conhecidas de  $x$ . Na forma matricial temos

$$Ay = b, \quad (1.72)$$

onde

$$y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N-1})$$

representa o vetor das incógnitas;  $b$  representa o vetor das quantidades conhecidas no segundo membro;  $A$  a matriz dos coeficientes. A matriz  $A$ , neste caso, é tridiagonal e de ordem  $N-1$ . Ela possui a forma especial



## CAPÍTULO II

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E EQUAÇÕES DAS COMPONENTES DA VELOCIDADE

#### 2.1. INTRODUÇÃO

O escoamento de um fluido *viscoso clássico* entre um par de *discos coaxiais girando* tem sido motivo de estudo para diversos autores. Kármán [15] foi o primeiro a dar as soluções das equações de *Navier-Stokes* para um fluido *newtoniano* na vizinhança de um disco infinito girando. Este método foi mais tarde usado por Batchelor [16] e Stewartson [17] para calcular o escoamento estacionário entre dois discos infinitos coaxiais girando. Para número de Reynolds muito grande, Batchelor e Stewartson encontraram um único escoamento estacionário, embora qualitativamente diferentes. Mais recentemente, Bhatnagar e Zago [6] fizeram uma análise do escoamento de um fluido visco-elástico do tipo *Rivlin-Ericksen* entre dois discos girando. O nosso trabalho é baseado em uma recente pesquisa de Bhatnagar [8] analisando os efeitos de um campo magnético sobre o escoamento de um fluido *newtoniano* colocado entre dois discos coaxiais. O campo magnético é aplicado na direção perpendicular aos discos. Pastore [7] também fez uma pesquisa semelhante a esta, mas com uma diferença significativa, a de que um dos discos, o superior, mantém-se parado.

## 2.2. FORMULAÇÕES DO PROBLEMA

Consideremos dois discos infinitos coaxiais e giratórios. Aplicamos um campo magnético,  $\vec{H}_0$ , constante, numa direção perpendicular aos discos. Representamos o escoamento pelo campo de velocidade  $\underline{V} = (u, v, w)$  nas direções crescentes das coordenadas cilíndricas  $r, \theta$  e  $z$  onde  $r$  é a coordenada radial,  $\theta$  a coordenada angular e  $z$  estende-se ao longo do eixo dos discos. Seja o disco inferior situado em  $z = 0$  tendo uma velocidade angular  $\Omega S$ , enquanto que o disco superior situado em  $z = d$  tem uma velocidade angular  $\Omega$ .  $\Omega$  e  $S$  são constantes;  $S$  indica o sentido do movimento do disco inferior.

As seguintes condições são impostas ao escoamento:

- 1) o fluido a ser usado no escoamento é o Newtoniano;
- 2) prevalece o estado permanente do escoamento;
- 3) o fluido é incompressível;
- 4) o escoamento é axialmente simétrico.

## 2.3. SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DAS COMPONENTES DA VELOCIDADE

Passemos agora, a descrever as equações que regem o escoamento deste fluido a fim de obtermos as componentes de velocidade e posteriormente a temperatura do fluido quando os discos estão submetidos a certas condições térmicas. Analisaremos dois casos:

- a) quando os discos rodam no mesmo sentido;
- b) quando os discos rodam em sentido contrário.

Para tal problema, utilizamos as equações de Maxwell, para o estado estacionário juntamente com as equações do movimento onde foram introduzidas as contribuições devido à força de Lorentz.

Sejam as equações do movimento, Eq.(1.28) escrita na forma vetorial e acrescida de uma força externa, isto é:

$$\rho \left[ \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (\underline{V} \cdot \nabla) \underline{V} \right] = - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{V} + \vec{f} \quad (2.1)$$

onde  $\vec{f}$  representa a força eletromagnética dada por

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B} , \quad (2.2)$$

sendo  $\vec{J}$  a densidade de corrente;  $\vec{B}$  o campo de indução magnética.

Fazendo-se uso da lei de Ohm

$$\vec{J} = \tau_0 (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \quad (2.3)$$

$\tau_0$  é a condutividade;  $\vec{E}$  o campo elétrico, assim a Eq.(2.2) é equivalente a

$$\vec{f} = \tau_0 (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} . \quad (2.4)$$

Utilizando as equações de Maxwell e escrevendo-se  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , eliminamos o campo elétrico  $E$ , da Eq. (2.4) e esta equação pode ser escrita da seguinte forma

$$\vec{f} = \tau_0 \mu_0^2 (\vec{V} \times \vec{H}) \times \vec{H} , \quad (2.5)$$

onde  $\mu_0$  representa a permeabilidade magnética;  $\vec{H}$  o campo magnético.

Substituindo a Eq. (2.5) na equação do movimento (2.1), temos

$$\rho \left[ \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (\underline{V} \cdot \nabla) \underline{V} \right] = - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{V} + \tau_0 \mu_0^2 (\underline{V} \times \vec{H}) \times \vec{H} . \quad (2.6)$$

Escrevendo então, a equação da continuidade e a Eq. (2.6) especificamente para nosso problema em coordenadas cilíndricas polares, temos

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 , \quad (2.7)$$

$$\rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right] = - \frac{\partial p}{\partial r} +$$

$$+ \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] - \mu_0^2 \tau_0 u \vec{H}_0^2 , \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left[ u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \right] \\ &= \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right] - \mu_0 \tau_0 v \bar{H}_0^2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left[ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

As quatro equações acima formam um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares envolvendo 4 incógnitas: três componentes da velocidade e a pressão isotrópica. De maneira que para as resolver faremos as seguintes transformações que satisfazem a equação da continuidade

$$u = - \frac{1}{2} r \Omega H'(\eta), \quad v = r \Omega G(\eta), \quad w = d \Omega H(\eta), \quad (2.11)$$

onde  $\eta = z/d$ , sendo  $d$  a distância entre os dois discos.

Estas transformações tem como objetivo reduzir as equações acima a um novo conjunto de equações, bem como adimensionalizá-las.

As condições de contorno do problema são:

$$u = 0, v = r\Omega S, w = 0 \quad \text{para } z = 0 \quad (2.12)$$

$$u = 0, v = r\Omega, w = 0 \quad \text{para } z = d$$

Derivando as transformações (2.11) em relação a  $r, z$  e substituindo na Eq. (2.19), usando a notação de que  $H(\eta) = H$ ,  $H'(\eta) = H'$ ,  $G(\eta) = G$ ,  $G'(\eta) = G'$  e assim sucessivamente

$$\frac{\rho\Omega d^2}{\mu} [-H'G + HG'] = G'' - \frac{\mu^2 \tau_o d^2 H_o^2}{\mu} G$$

$$G'' - R(HG' - H'G) - M^2 G = 0 \quad (2.13)$$

onde

$$M^2 = \frac{\mu_o^2 d^2 H_o^2 \tau_o}{\mu}, \quad \text{é o número de Hartmann}$$

$$R = \frac{\rho\Omega d^2}{\mu}, \quad \text{é o número de Reynolds.}$$

Derivando a Eq. (2.10) em relação a  $r$  temos:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + u \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial r} \right] = - \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial r} +$$

$$\mu \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial r} \right],$$

substituindo as transformações (2.11) encontramos

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial r} = 0 . \quad (2.14)$$

Agora derivando a Eq. (2.8) em relação a  $z$ ,

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2v}{r} \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} +$$

$$\mu \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial z} \right] - \mu_0^2 \tau_0 \bar{H}_0^2 \frac{\partial u}{\partial z} . \quad (2.15)$$

Substituindo as transformações (2.11) e usando a Eq.(2.14), a Eq. (2.15) torna-se

$$\rho \left[ \frac{r\Omega^2 H'H''}{4d} + \frac{r\Omega^2 H'H''}{4d} - \frac{r\Omega^2 H'H''}{2d} - \frac{r\Omega^2 H H'''}{2d} - \frac{2r\Omega^2 G G'}{d} \right] =$$

$$\mu \left[ -\frac{\Omega H''}{2rd} - \frac{r\Omega H^{iv}}{2d^3} + \frac{\Omega H''}{2rd} \right] + \frac{\mu_0^2 \tau_0 \bar{H}_0^2 r\Omega H''}{2d} . \quad (2.16)$$

Fazendo as simplificações devidas, a Eq. (2.16) ficará reduzida a

$$H^{iv} - R(HH''' + 4GG') - M^2 H'' = 0 \quad (2.17)$$

Este novo conjunto (2.13) e (2.17) de equações diferenciais ordinárias não lineares será resolvido com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned}
 G(0) &= S , & G(1) &= 1 ; \\
 H(0) &= 0 , & H(1) &= 0 ; \\
 H'(0) &= 0 , & H'(1) &= 0 .
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

Para resolvermos o sistema de equações formado pelas equações (2.13) e (2.17) com as condições de contorno (2.18) assumiremos o número de Reynolds ( $R$ ) menor que 1. Assim, podemos usar a teoria de perturbações regulares, expandindo as funções  $G$  e  $H$  em série de potência de  $R$ , isto é:

$$G(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n G_n(\eta) , \quad H(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n H_n(\eta) .
 \tag{2.19}$$

Substituindo estas funções  $G$  e  $H$  nas equações (2.13) , (2.17) respectivamente e fazendo-se uso das condições de contorno (2.18) temos equações de várias ordens.

a) Solução de ordem zero

As equações para  $G_0(\eta)$  e  $H_0(\eta)$  são:

$$G_0'' - M^2 G_0 = 0 ,
 \tag{2.20}$$

e

$$H_0^{iv} - M^2 H_0'' = 0 .
 \tag{2.21}$$

Usando as condições de contorno

$$G_0(0) = S \quad , \quad G_0(1) = 1 ;$$

e

$$H_0(0) = H_0(1) = H_0'(0) = H_0'(1) = 0$$

obtemos a seguinte solução

$$G_0(\eta) = \frac{1}{\sinh(M)} [\sinh(M\eta) + S \sinh\{M(1-\eta)\}] \quad (2.22)$$

e

$$H_0(\eta) = 0 \quad . \quad (2.23)$$

b) Solução de primeira ordem

As funções  $G_1(\eta)$  e  $H_1(\eta)$  satisfazem as seguintes equações

$$G_1'' - M^2 G_1 = 0 \quad , \quad (2.24)$$

e

$$H_1^{iv} - M^2 H_1'' = 4G_0 G_0' \quad . \quad (2.25)$$

Usando as seguintes condições de contorno

$$G_1(0) = G_1(1) = 0 \quad ; \quad H_1(0) = H_1(1) = H_1'(0) = H_1'(1) = 0 \quad ,$$

obtemos a solução para  $G_1(\eta)$  e  $H_1(\eta)$  :

$$G_1(\eta) = 0 \quad , \quad (2.26)$$

e

$$\begin{aligned} H_1(\eta) = & a_1 + a_2 \eta + (a_3/M^2) \cosh(M\eta) + (a_4/M^2) \sinh(M\eta) \\ & + a_0 [\sinh(2M\eta) + 2S \operatorname{sech}\{M(1-2\eta)\} \\ & - S^2 \sinh\{2M(1-\eta)\}] \quad , \quad (2.27) \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} a_1 = & - \frac{a_0}{b_0} [(1-S^2) (1-\cosh M) \sinh(2M) - 2(M-\sinh M) (S^2 + \cosh 2M) \\ & + 2(1+S^2 \cosh 2M) (M \cosh M - \sinh M) + 2SM\{\sinh^2(M) \\ & + 2(1-\cosh M) \cosh M\} - S^2 M \sinh(M) \sinh(2M)] \quad , \quad (2.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 = & - \frac{a_0}{b_0} M [(1+S^2) \{\sinh(M) \sinh(2M) + 2(1-\cosh M) (1+\cosh 2M)\} \\ & - 4S\{\sinh^2(M) + 2\cosh(M) (1-\cosh M)\}] \quad , \quad (2.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 = & \frac{a_0}{b_0} M^2 [(1+S^2) (1-\cosh M) \sinh(2M) - 2(S^2 + \cosh 2M) (M-\sinh M) \\ & + 2(1+S^2 \cosh 2M) (M \cosh M - \sinh M) \\ & - 4S(1-\cosh M) (\sinh M - M \cosh M)] \quad , \quad (2.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_4 = & \frac{a_0}{b_0} M^2 [2(S^2-1)(1-\cosh M)(1-\cosh 2M) - (2M - \sinh 2M)\sinh(M) \\
 & - 4S\{\sinh(M) - M \cosh(M)\}\sinh(M) + \\
 & + S^2 \sinh(M)\{\sinh(2M) - 2M \cosh(2M)\}] , \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{6M^3 \sinh^2(M)} , \quad (2.32)$$

e

$$b_0 = M \sinh(M) + 2(1 - \cosh M) . \quad (2.33)$$

c) Solução de segunda ordem

As funções  $G_2(\eta)$  e  $H_2(\eta)$  satisfazem as seguintes equações

$$G_2'' - M^2 G_2 = H_1 G_1' - H_1' G_1 \quad (2.34)$$

$$H_2^{iv} - M_2 H_2'' = 0 , \quad (2.35)$$

que são resolvidas usando as seguintes condições de contorno

$$G_2(0) = 0 , \quad G_2(1) = 0 ;$$

e

$$H_2(0) = H_2(1) = H_2'(0) = H_2'(1) = 0 .$$

Integrando as equações (2.34) e (2.35) sob as condições de contorno dadas acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 G_2(\eta) = & \cosh(M\eta) \left[ D_1 + (\eta/4M^2) \{-r_0 a_2 + 2Mp_0 - 2q_0 a_2 M^2 + 2M^3 [a_0 q_0 \right. \\
 & \left. + 2S^2 (a_0 q_0 + 8)] \} \right] + \sinh(M\eta) \left[ D_2 + \frac{\eta r_0}{4M} (2a_1 + a_2 \eta) \right] \\
 & + \frac{1}{8M^2} \sinh(3M\eta) \cdot [(p_0 - a_0 q_0 M^2) + \frac{3S}{8} \sinh\{M(1-3\eta)\} [8 - a_0 q_0] \\
 & \frac{MS\eta}{2} \cosh\{M(1+\eta)\} [8 + a_0 q_0] + \frac{S\eta^2}{4M} \cosh\{M(1-\eta)\} [r_0 a_2 \\
 & + 2q_0 a_2 M^2 - 2M^3 \{16M^3 + 2a_0 q_0 + S^2 (8 + a_0 q_0)\}] \\
 & - \frac{3S^2}{8} \sinh\{M(2-3\eta)\} (8 - a_0 q_0) + \frac{MS^2 \eta}{2} \cosh\{M(2-\eta)\} (8 - a_0 q_0) \\
 & + \frac{S^3}{8} \sinh\{3M(1-\eta)\} (8 - a_0 q_0) + \frac{r_0 S}{4M} \sinh\{M(1-\eta)\} (1 + Ma_2 \eta^2) \\
 & + \frac{q_0 \eta}{M^2} [a_4 S \sinh(M) - a_3 (1 - S \cosh M)] , \tag{2.36}
 \end{aligned}$$

onde

$$p_0 = \frac{a_0 M}{2 \sinh(M)} , \tag{2.37}$$

$$q_0 = \frac{1}{M \sinh(M)} , \tag{2.38}$$

$$r_o = \frac{1}{\sinh(M)} , \quad (2.39)$$

$$D_1 = \frac{S}{8} (a_o q_o - p_o / M^2) [3 \sinh(M) - 3S \sinh(2M) + S^2 \sinh(3M)] , \quad (2.40)$$

$$D_2 = \frac{S \cosh(M)}{8} \left( \frac{p_o}{M^2} - a_o q_o \right) [3 \sinh(M) - 3S \sinh(2M) + S^2 \sinh(3M)]$$

$$- \frac{p_o}{8M^2 \sinh(M)} [ \sinh(3M) + 4M \cosh(M) - S \{ 3 \sinh(2M) + 4M \cosh(2M) + 8M \} + 3S^2 \{ \sinh(M) + 4M \cosh(M) \} - 4MS^3 ]$$

$$- \frac{q_o}{8 \sinh(M)} \left[ -\frac{8a_3}{M^2} (1 - S \cosh(M)) + \frac{8a_4 S}{M^2} \sinh(M) - 4a_2 \cosh(M) + 4a_2 S - q_o \{ \sinh(3M) - 4M \cosh(M) + S [8M - 3 \sinh(2M) + 4M \cosh(2M) - S^2 [12M \cosh(M) - 3 \sinh(M)] + 4MS^3 \} \right.$$

$$\left. - \frac{r_o}{4M^2 \sinh(M)} [ 2Ma_1 \sinh(M) + a_2 (M \sinh M - \cosh(M) + S) ] \right] . \quad (2.41)$$

e

$$H_2(\eta) = 0 .$$

Deste modo, para uma aproximação de ordem dois temos

$$G(\eta) = G_0(\eta) + R^2 G_2(\eta) ,$$

e

(2.42)

$$H(\eta) = RH_1(\eta) ; H'(\eta) = RH'_1(\eta) .$$

### CAPÍTULO III

#### DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM ESCOAMENTO PERMANENTE DE FLUIDOS NEWTONIANOS COM A APLICAÇÃO DE FORÇAS EXTERNAS

Neste capítulo estudaremos o problema da transferência de calor em um escoamento permanente de um fluido newtoniano com aplicação de forças externas, quando os discos estão submetidos a dois tipos de condições térmicas:

1) O disco inferior (situado no plano  $z = 0$ ), está mantido a uma temperatura constante  $T = T_1$  e o disco superior (situado no plano  $z = d$ ), a uma temperatura constante  $T = T_2$ ;

2) O disco inferior (plano  $z = 0$ ), será mantido a uma temperatura constante  $T = T_1$  e o disco superior (plano  $z = d$ ), permanecerá termicamente isolado.

PRIMEIRO CASO: Neste caso, nós temos as seguintes condições de contorno:

$$T = T_1 \quad \text{para } z = 0 \quad \text{e} \quad T = T_2 \quad \text{para } z = d. \quad (3.1)$$

Seja agora a equação da energia em coordenadas cilíndricas polares como dada no Capítulo I, de forma específica para nosso

problema formulado no Capítulo II:

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \nabla^2 T + \mu \Phi, \quad (3.2)$$

onde

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

e

$$\begin{aligned} \Phi = & 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{u}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & + \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2. \end{aligned}$$

Utilizando as transformações (2.11), definindo a temperatura adimensional por

$$T^* = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad \text{ou} \quad T = T^* (T_2 - T_1) + T_1, \quad (3.3)$$

e em seguida substituindo na Eq. (3.2) obtemos:

$$\begin{aligned} \rho c_p \left[ - \frac{r \Omega H'}{2} (T_2 - T_1) \frac{\partial T^*}{\partial r} + \Omega H (T_2 - T_1) \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right] = \\ k \left[ (T_2 - T_1) \frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} (T_2 - T_1) \frac{\partial T^*}{\partial r} + (T_2 - T_1) \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} \frac{1}{d^2} \right] + 2\mu \left[ \left( - \frac{\Omega H'}{2} \right)^2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left( -\frac{\Omega H'}{2} \right)^2 + (\Omega H')^2 ] + \mu \left[ + \left( \frac{r\Omega G'}{d} \right)^2 + \left( -\frac{r\Omega H''}{2d} \right)^2 \right]$$

ou

$$\begin{aligned} \rho c_p (T_2 - T_1) \Omega \left[ -r \frac{H'}{2} \frac{\partial T^*}{\partial r} + H \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right] &= k (T_2 - T_1) \left[ \frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial T^*}{\partial r} + \frac{1}{d^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \\ &+ \mu \Omega^2 \left[ 3H'^2 + \frac{r^2}{d^2} (G'^2 + \frac{H''^2}{4}) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Introduzindo a variável adimensional  $\bar{r} = \frac{r}{d}$ , a Eq. (3.4) torna-se

$$\begin{aligned} \rho c_p (T_2 - T_1) \Omega \left[ -\frac{\bar{r}}{2} \frac{H'}{\partial \bar{r}} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{r}} + H \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right] &= k \left( \frac{T_2 - T_1}{d^2} \right) \left[ \frac{\partial^2 T^*}{\partial \bar{r}^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} \left. \right] + \mu \Omega^2 \left\{ 3H'^2 + \bar{r}^2 \left[ \left( \frac{H''}{2} \right)^2 + G'^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Multiplicando ambos os membros da Eq. (3.5) por

$$\frac{d^2}{\mu c_p (T_2 - T_1)} \text{ obtemos:}$$

$$\frac{d^2 \rho \Omega}{\mu} \left[ -\frac{\bar{r} H'}{2} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{r}} + H \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right] = \frac{k}{\mu c_p} \left[ \frac{\partial^2 T^*}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} \right] +$$

$$+ \frac{\Omega^2 d^2}{c_p (T_2 - T_1)} \{ 3H'^2 + \bar{r}^2 [\frac{H''^2}{4} + G'^2] \} . \quad (3.6)$$

Introduzindo os seguintes números adimensionais:

$$R = \frac{d^2 \rho \Omega}{\mu} \quad , \quad \text{o número de Reynolds,}$$

$$\sigma = \frac{\mu c_p}{k} \quad , \quad \text{o número de Prandtl,}$$

$$E = \frac{\Omega^2 d^2}{c_p (T_2 - T_1)} \quad , \quad \text{o número de Eckert,}$$

temos então da eq. (3.6),

$$R \left( - \frac{\bar{r} H'}{2} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{r}} + H \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial T^*}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} \right) + E [3H'^2 + \bar{r}^2 (\frac{1}{4} H''^2 + G'^2)] . \quad (3.7)$$

Desde que a equação (3.7) depende somente de  $\bar{r}$  e  $\eta$  vamos escrever sua solução como:

$$T^*(\bar{r}, \eta) = \bar{T}(\eta) + \bar{r}^2 \tilde{T}(\eta) \quad , \quad (3.8)$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

BC/5369

$$T^*(\bar{r}, 0) = 0 \quad \text{e} \quad T^*(\bar{r}, 1) = 1 . \quad (3.9)$$

Substituindo (3.8) em (3.7) temos então

$$\begin{aligned} R\sigma [-\bar{r}^2 H' \tilde{T} + H \bar{T}' + \bar{r}^2 H \tilde{T}'] = 4\tilde{T} + \bar{T}'' + \bar{r}^2 \tilde{T} + \\ + E\sigma [3H'^2 + \frac{\bar{r}^2 H''^2}{4} + \bar{r}^2 G'^2] \end{aligned} \quad (3.10)$$

ou

$$\begin{aligned} \bar{r}^2 [-R\sigma H' \tilde{T} + R\sigma H \tilde{T}' - \tilde{T}'' - E\sigma (\frac{H''^2}{4} + G'^2)] - \\ \bar{T}'' + R\sigma H \bar{T}' - 3E\sigma H'^2 - 4\tilde{T} = 0 . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Igualando os termos de mesma potência de  $\bar{r}$  da equação (3.11) a zero:

$$\tilde{T}'' - R\sigma H \tilde{T}' + R\sigma H' \tilde{T} + E\sigma (\frac{H''^2}{4} + G'^2) = 0 \quad , \quad (3.12)$$

$$\bar{T}'' - R\sigma H \bar{T}' + 3E\sigma H'^2 + 4\tilde{T} = 0 . \quad (3.13)$$

As condições de contorno (3.9) dão origem às condições para se resolver as equações (3.12) e (3.13).

$$T^* = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} ; \quad \bar{r} = \frac{r}{d} ; \quad \eta = \frac{z}{d}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } \eta = 0 \implies T^*(\bar{r}, 0) = \bar{T}(0) + \bar{r}^2 \tilde{T}(0) \implies \bar{T}(0) + \bar{r}^2 \tilde{T}(0) = 0 \\ \implies \bar{T}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{T}(0) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } \eta = 1 \implies T^*(\bar{r}, 1) = \bar{T}(1) + \bar{r}^2 \tilde{T}(1) \implies \bar{T}(1) + \bar{r}^2 \tilde{T}(1) = 1 \\ \implies \bar{T}(1) = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{T}(1) = 0. \end{aligned}$$

Temos então:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}(0) = 0 & , & \tilde{T}(1) = 0 \\ \bar{T}(0) = 0 & , & \bar{T}(1) = 1 \end{aligned} \right\} , \quad (3.14)$$

Para resolvermos as equações (3.12) e (3.13) utilizaremos a teoria de perturbações regulares com as condições (3.14).

Escrevendo  $\tilde{T}$  e  $\bar{T}$  em série de potência de  $R$ , isto é,

$$\tilde{T}(\eta) = \tilde{T}_0(\eta) + R\tilde{T}_1(\eta) + R^2\tilde{T}_2(\eta) + \dots ,$$

$$\bar{T}(\eta) = \bar{T}_0(\eta) + R\bar{T}_1(\eta) + R^2\bar{T}_2(\eta) + \dots ,$$

e observando que  $G(\eta) = G_0 + R^2G_2$  ,

$$H(\eta) = RH_1 ,$$

a equação (3.12) torna-se:

$$\begin{aligned} \tilde{T}'' - R\sigma\tilde{T}'(RH_1) + R\sigma\tilde{T}(RH_1') + E\sigma\left(\frac{R^2H_1''^2}{4} + G_0'^2 + \right. \\ \left. + 2R^2G_0'G_2' + R^4G_2'^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Substituindo  $T(\eta) = \tilde{T}_0 + R\tilde{T}_1 + R^2\tilde{T}_2 \dots$  temos:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0'' + R\tilde{T}_1'' + R^2\tilde{T}_2'' \dots - R^2\sigma(\tilde{T}_0' + R\tilde{T}_1' + R^2\tilde{T}_2' \dots)H_1 + \\ + R^2\sigma(\tilde{T}_0 + R\tilde{T}_1 + R^2\tilde{T}_2 \dots)H_1' + E\sigma\left(\frac{R^2H_1''^2}{4} + \right. \\ \left. + G_0'^2 + 2R^2G_0'G_2' + R^4G_2'^2\right) = 0 . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Temos então as seguintes equações diferenciais lineares de (3.15)

$$\tilde{T}_0'' + E\sigma G_0'^2 = 0 \quad (3.16)$$

$$\tilde{T}_1'' = 0 \quad (3.17)$$

$$\tilde{T}_2'' - \sigma\tilde{T}_0'H_1 + \sigma\tilde{T}_0H_1' + E\sigma\left(\frac{H_1''^2}{4} + 2G_0'G_2'\right) = 0 \quad (3.18)$$

De (3.13) fazendo o mesmo processo obtemos:

$$T''_0 - R\sigma\bar{T}'(RH_1) + 3E\sigma(R^2H_1'^2) + 4\tilde{T} = 0 ,$$

ou

$$T''_0 - R^2\sigma\bar{T}'H_1 + 3\sigma ER^2H_1'^2 + 4\tilde{T} = 0 .$$

Substituindo  $\bar{T}(\eta) = \bar{T}_0 + R\bar{T}_1 + R^2\bar{T}_2 + \dots$ , temos

$$\begin{aligned} \bar{T}''_0 + R\bar{T}''_1 + R^2\bar{T}''_2 \dots - R^2\sigma(\bar{T}'_0 + R\bar{T}'_1 + R^2\bar{T}'_2 \dots)H_1 + 3\sigma ER^2H_1'^2 + \\ + 4(\tilde{T}_0 + R\tilde{T}_1 + R^2\tilde{T}_2 \dots) = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\bar{T}''_0 + 4\tilde{T}_0 = 0 \quad (3.20)$$

$$\bar{T}''_1 + 4\tilde{T}_1 = 0 \quad (3.21)$$

$$\bar{T}''_2 - \sigma\bar{T}'_0H_1 + 3\sigma EH_1'^2 + 4\tilde{T}_2 = 0 \quad (3.22)$$

que serão resolvidos com as seguintes condições

$$\tilde{T}_n(0) = 0 , \quad \tilde{T}_n(1) = 0 , \quad n \geq 0 \quad (3.23)$$

$$\bar{T}_0(0) = 0 , \quad \bar{T}_0(1) = 1 , \quad (3.24)$$

$$\bar{T}_n(0) = \bar{T}_n(1) = 0 , \quad n \geq 1 . \quad (3.25)$$

a) Solução da equação (3.16) com as condições:

$$\tilde{T}_0''(\eta) + E\sigma(G'_0(\eta))^2 = 0, \quad \tilde{T}_0(0) = 0, \quad \tilde{T}_0(1) = 0.$$

Substituindo  $G'_0(\eta)$  e resolvendo obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0(\eta) = & -Y_{01} \left\{ \left[ \frac{1 - 2S \cosh(M)}{8M^2} \right] \cosh(2M\eta) + \frac{S \sinh(M)}{4M^2} \sinh(2M\eta) \right. \\ & + \frac{S^2}{8M^2} [\cosh 2M(1-\eta)] + \left. \left( \frac{1 - 2S \cosh(M) + S^2}{4} \right) \eta^2 \right\} + \\ & + c_1 \eta + c_2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

com

$$c_2 = Y_{01} \left[ \frac{1 - 2S \cosh(M) + S^2 \cosh(2M)}{8M^2} \right],$$

$$\begin{aligned} c_1 = Y_{01} \left\{ \frac{\cosh(2M) - 2S \cosh(M) \cosh(2M) + 2S \sinh(M) \sinh(2M) + S^2 +}{8M^2} \right. \\ \left. + \frac{(1 - 2S \cosh(M) + S^2) 2M^2}{8M^2} \right\} - c_2. \end{aligned}$$

onde

$$Y_{01} = \frac{EM^2 \sigma}{\sinh^2(M)}.$$

b) Solução da equação (3.20) com as condições

$$\bar{T}_0''(\eta) + 4\tilde{T}_0(\eta) = 0 \quad \text{com} \quad \bar{T}_0(0) = 0, \quad \bar{T}_0(1) = 1$$

substituindo (3.26) e resolvendo obtemos:

$$\bar{T}_0''(\eta) = -4\tilde{T}_0(\eta)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_0(\eta) = & 4y_{01} \left\{ \left( \frac{1-2S \cosh(M)}{32M^4} \right) \cosh(2M\eta) + \frac{S \sinh(M)}{16M^4} \sinh(2M\eta) \right. \\ & + \frac{S^2}{32M^4} \cosh[2M(1-\eta)] + \left. \left( \frac{1-2S \cosh(M) + S^2}{48} \right) \eta^4 \right\} \\ & - \frac{2c_1}{3} \eta^3 - 2c_2 \eta^2 + c_3 \eta + c_4, \end{aligned} \quad (3.27)$$

com

$$\begin{aligned} c_3 = & -4y_{01} \left[ \frac{(1-2S \cosh(M)) \cosh(2M)}{32M^4} + \frac{S \sinh(M) \sinh(2M)}{16M^4} + \frac{S^2}{32M^4} + \right. \\ & \left. + \frac{(1-2S \cosh(M) + S^2)}{48} \right] + \frac{2c_1}{3} + 2c_2 - c_4 + 1, \end{aligned}$$

$$c_4 = -y_{01} \left[ \frac{(1 - 2S \cosh(M) + S^2 \cosh(2M))}{8M^4} \right].$$

c) Solução da equação (3.17) com as condições

$$\tilde{T}_1''(\eta) = 0 \quad \text{com} \quad \tilde{T}_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{T}_1(1) = 0$$

Temos então:

$$\tilde{T}_1(\eta) = c_5\eta + c_6$$

usando que

$$\tilde{T}_1(0) = 0 \implies c_6 = 0$$

$$\tilde{T}_1(1) = 0 \implies c_5 = 0$$

logo:

$$\tilde{T}_1(\eta) = 0 \tag{3.28}$$

d) Solução da equação (3.21) com as condições

$$\bar{T}_1''(\eta) + 4\tilde{T}_1(\eta) = 0 \quad \text{com} \quad \bar{T}_1(0) = 0, \quad \bar{T}_1(1) = 0$$

substituindo (3.28) obtemos

$$\bar{T}_1(\eta) = c_7\eta + c_8$$

usando que

$$\bar{T}_1(0) = 0 \implies c_8 = 0$$

$$\bar{T}_1(1) = 0 \implies c_7 = 0$$

logo:

$$\bar{T}_1(\eta) = 0 \quad (3.29)$$

Temos que:

$$\boxed{T^*(\bar{r}, \eta) = \bar{T}(\eta) + \bar{r}^2 \tilde{T}(\eta)} \quad (3.30)$$

$$\bar{T}(\eta) = \bar{T}_0(\eta) + R\bar{T}_1(\eta) + R^2\bar{T}_2(\eta) \quad (3.31)$$

$$\tilde{T}(\eta) = \tilde{T}_0(\eta) + R\tilde{T}_1(\eta) + R^2\tilde{T}_2(\eta) \quad (3.32)$$

$$T^*(\bar{r}, \eta) = 4y_{01} \left\{ \frac{(1-2S \cosh(M))}{32M^4} \cosh(2M\eta) + \frac{S \sinh(M)}{16M^4} \sinh(2M\eta) \right. \\ \left. + \frac{S^2}{32M^4} \cosh[2M(1-\eta)] + \frac{(1-2S \cosh(M) + S^2)}{48} \eta^4 \right\}$$

$$- \frac{2c_1}{3} \eta^3 - 2c_2 \eta^2 + c_3 \eta + c_4 + R^2 \bar{T}_2(\eta) + \bar{r}^2 \{ -y_{01} \{$$

$$\frac{(1-2S \cosh(M))}{8M^2} \cosh(2M\eta) + \frac{S \sinh(M)}{4M^2} \sinh(2M\eta) +$$

$$+ \frac{S^2}{8M^2} \cosh[2M(1-\eta)] + \frac{(1-2S \cosh(M) + S^2)}{4} \eta^2 \} +$$

$$c_1 \eta + c_2 + R^2 \tilde{T}_2(\eta) \} \quad (3.33)$$

com  $T^*(\bar{r}, 0) = 0$  e  $T^*(\bar{r}, 1) = 1$

e  $\tilde{T}_2(\eta)$ ,  $\bar{T}_2(\eta)$  resolvidos numericamente.

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2''(\eta) = \sigma \tilde{T}_0'(\eta) H_1(\eta) - \sigma H_1'(\eta) \tilde{T}_0(\eta) - \frac{E\sigma}{4} [ H_1''^2(\eta) ] - \\ 2E\sigma [ G_0'(\eta) G_2'(\eta) ] \quad \text{com} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\tilde{T}_2(0) = 0 \quad , \quad \tilde{T}_2(1) = 0$$

$$\bar{T}_2''(\eta) = \sigma \bar{T}_0' H_1 - 3\sigma E H_1'^2 - 4\tilde{T}_2(\eta) \quad \text{com} \quad (3.35)$$

$$\bar{T}_2(0) = 0 \quad , \quad \bar{T}_2(1) = 0 .$$

Observe que as equações (3.34) e (3.35) são equações diferenciais ordinárias lineares e que por esta razão é possível explicitar uma solução analítica para ambas as equações. A solução foi calculada, no entanto a expressão algébrica resultante foi tão grande que ao final os cálculos já não tem uma boa margem de exatidão devido aos muito prováveis erros cometidos durante a manipulação algébrica. Tendo em vista, isto resolvemos optar por uma solução numérica e já que é um problema de valores no contorno, utilizamos o método das diferenças finitas descrito no Capítulo I deste trabalho. Para estas equações a matriz (1.73) resume-se



$$T^*(\bar{r}, 0) = 0$$

$$T^{*'}(\bar{r}, 1) = 0 .$$

O conjunto de equações a ser resolvido é (3.16), (3.17), (3.18) e (3.20), (3.21), (3.22) sujeitas às seguintes condições de contorno

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}_n(0) = 0, \quad \tilde{T}'_n(1) = 0 \quad \forall n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N} \\ \bar{T}_n(0) = 0, \quad \bar{T}'_n(1) = 0 \quad \forall n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Resolvendo a equação

$$\tilde{T}_0''(\eta) + E\sigma[G'_0(\eta)]^2 = 0$$

sujeita à  $\tilde{T}_0(0) = 0$  e  $\tilde{T}'_0(1) = 0$

obtemos então:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0(\eta) = -Y_{01} \left\{ \frac{(1-2S \cosh(M))}{8M^2} \cosh(2M\eta) + \frac{S \sinh(M)}{4M^2} \sinh(2M\eta) \right. \\ \left. + \frac{S^2}{8M^2} \cosh[2M(1-\eta)] + \frac{(1-2S \cosh(M) + S^2)}{4} \eta^2 \right\} + \\ c_9 \eta + c_{10} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\tilde{T}'_0(\eta) = -Y_{01} \left\{ \frac{(1-2S \cosh(M))}{4M} \sinh(2M\eta) + \frac{S \sinh(M)}{2M} \cosh(2M\eta) \right.$$

$$- \frac{S^2}{4M} \cosh [ 2M(1-\eta) ] + \frac{(1-2S \cosh(M) + S^2)}{2} \eta \} + c_9$$

$$\text{De } \bar{T}_0(0) = 0 \implies c_{10} = Y_{01} \left\{ \frac{1-2S \cosh(M) + S^2 \cosh(2M)}{8M^2} \right\}$$

$$\text{De } \bar{T}'_0(1) = 0 \implies c_9 =$$

$$= Y_{01} \left\{ \frac{(1-2S \cosh(M))}{4M} \sinh 2M + \frac{S \sinh(M)}{2M} \cosh(2M) + \right. \\ \left. + \frac{(1-2S \cosh(M) + S^2)}{2} \right\}$$

Resolvendo então a equação

$$\bar{T}''_0(\eta) + 4\bar{T}_0(\eta) = 0$$

sujeita a  $\bar{T}_0(0) = 0$  e  $\bar{T}'_0(1) = 0$

$$\bar{T}_0(\eta) = 4Y_{01} \left\{ \frac{(1-2S \cosh(M))}{32M^4} \cosh(2M\eta) + \frac{S \sinh(M)}{16M^4} \sinh(2M\eta) \right.$$

$$+ \frac{S^2}{32M^4} \cosh [ 2M(1-\eta) ] + \frac{(1-2S \cosh(M) + S^2)}{48} \eta^4 \left. \right\}$$

$$- \frac{2c_9}{3} \eta^3 - 2c_{10} \eta^2 + c_{11}\eta + c_{12} \quad (3.40)$$

$$\text{De } \bar{T}_0(0) = 0 \implies c_{12} = -Y_{01} \left\{ \frac{(1-2S \cosh(M)) + S^2 \cosh(2M)}{8M^4} \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}'_0(\eta) = 4y_{01} \left\{ \frac{(1-2S \cosh(M))}{16M^3} \sinh(2M\eta) + \frac{S \sinh(M)}{8M^3} \cosh(2M\eta) + \right. \\ \left. - \frac{S^2}{16M^3} \sinh[2M(1-\eta)] + \frac{(1-2S \cosh(M) + S^2)}{12} \eta^3 \right\} \\ - 2c_9 \eta^2 - 4c_{10} \eta + c_{11} \end{aligned}$$

$$\text{De } \bar{T}'_0(1) = 0 \implies$$

$$\begin{aligned} c_{11} = -4y_{01} \left\{ \frac{(1-2S \cosh(M))}{16M^3} \sinh(2M) + \frac{S \sinh(M)}{8M^3} \cosh(2M) + \right. \\ \left. + \frac{(1-2S \cosh(M) + S^2)}{12} \right\} + 2c_9 + 4c_{10} \end{aligned}$$

Como as condições de contorno no Segundo Caso não são as mesmas que no Primeiro Caso, para aplicarmos o método descrito no Capítulo I fizemos a seguinte modificação:

Usando como caso anterior

$$T^*(\bar{r}, \eta) = \bar{T}(\eta) + \bar{r}^2 \tilde{T}(\eta), \quad (3.30)$$

$$\bar{T}(\eta) = \bar{T}_0(\eta) + R\bar{T}_1(\eta) + R^2\bar{T}_2(\eta), \quad (3.31)$$

$$\tilde{T}(\eta) = \tilde{T}_0(\eta) + R\tilde{T}_1(\eta) + R^2\tilde{T}_2(\eta), \quad (3.32)$$

$$T^*(\bar{r}, \eta) = 4y_{01} \frac{(1-2S \cosh(M))}{32M^4} \cosh(2M\eta) + \frac{S \sinh(M)}{16M^4} \sinh(2M\eta)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{S^2}{32M^4} \cosh [2M(1-\eta)] + \left( \frac{1-2S \cosh(M) + S^2}{48} \right) \eta^4 \} \\
& - \frac{2c_9}{3} \eta^3 - 2c_{10} \eta^2 + c_{11} \eta + c_{12} + R^2 \bar{T}_2(\eta) + \\
& + \bar{r}^2 \{ -y_{01} \left\{ \frac{(1-2S \cosh(M))}{8M^2} \cosh(2M\eta) + \frac{S \sinh(M)}{4M^2} \sinh(2M\eta) \right. \\
& + \frac{S^2}{8M^2} \cosh [2M(1-\eta)] + \left. \frac{(1-2S \cosh(M) + S^2)}{4} \eta^2 \right\} + \\
& \left. c_9 \eta + c_{10} + R^2 \tilde{T}_2(\eta) \right\} .
\end{aligned}$$

Com  $\bar{T}_2(\eta)$  e  $\tilde{T}_2(\eta)$  resolvidos também como no primeiro caso, numericamente usando diferenças finitas.

Usamos a interpolação quadrática e aproximamos

$$y'(x_N) = \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h}, \text{ e igualamos a zero que é o valor no}$$

contorno dado. Ou seja,

$$3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2} = 0$$

$$y_N = \frac{4y_{N-1}}{3} - \frac{y_{N-2}}{3}$$

Substituindo  $y_N$  na última linha do sistema de ordem N-1 temos:



### 3.3. ANÁLISE DOS RESULTADOS

#### PRIMEIRO CASO

As figuras 1, 2, 3 e 4 são baseadas nos resultados dos cálculos do primeiro caso, ou seja, com condições de contorno (3.1). Enquanto que as figuras 5, 6, 7 e 8 estão relacionadas com os cálculos do segundo caso, cujas condições de contorno são (3.37). É mostrado o comportamento da temperatura  $T^*$  em função de  $\eta$ ,  $\eta = z/d$ , quando os dois discos estão girando. O disco inferior situado em  $z = 0$  tem uma velocidade angular  $\Omega S$ , enquanto o disco superior situado em  $z = d$  tem uma velocidade angular  $\Omega$ .

Na figura 1 em que  $\bar{r} = 0.5$ ,  $M = 1.0$ ,  $S = -3.0, -2.0$  e  $2.0$ , usamos o número de Reynolds,  $R = 0.4$  e  $0.8$ . O número de Eckert e o número de Prandtl são iguais  $E = \sigma = 0.5$ . Observamos que  $T^*$  é aumentada quando  $S$  é negativo, ou seja, se compararmos a distribuição de temperatura  $T^*$  para  $S = 2.0$  e  $S = -2.0$ , fixados os demais parâmetros, notamos que para  $S = -2.0$  há um considerável aumento. Observamos ainda que para  $S = -3.0$ , as curvas de  $T^*$  crescem mais se comparadas com  $S = -2.0$ . Notamos que se  $R = 0.8$  e  $S = -2.0$  o crescimento é maior do que a curva em que  $S = -3.0$  e  $R = 0.4$ .

Na figura 2 em que  $M = 0.8$  com os demais parâmetros,

sendo os mesmos da figura 1 observamos que em cada curva comparada com a correspondente da figura 1 a temperatura  $T^*$  decresce muito. Concluimos então, que um aumento de  $M$  provoca um aumento da temperatura  $T^*$ .

Nas figuras 3 e 4 temos  $\sigma = 1.0; 0.8; 0.6; 0.5$ . O número de Reynolds fixado é  $R = 0.6$ . Na figura 3 o número Hartmann escolhido é  $M = 1.0$ , enquanto que na figura 4,  $M = 1.2$ . As curvas foram feitas tendo dois valores para  $E$  e dois valores para  $\sigma$ . O valor de  $S = 3.0$  e  $\bar{r} = 1.0$ . Fazendo uma comparação entre as duas figuras, notamos que na figura 3 as curvas decrescem um pouco em relação as curvas correspondentes da figura 4 até mais ou menos  $\eta = 0.55$  e para valores de  $\eta > 0.55$  crescem um pouco, se comparadas as mesmas curvas.

## SEGUNDO CASO

Como afirmamos anteriormente, as figuras 5, 6, 7, 8 são baseadas nos resultados dos cálculos do segundo caso, cujas condições de contorno são as (3.37).

A figura 5 e a figura 6 têm como número de Prandtl  $\sigma = 1.0; 0.8; 0.6; 0.5$ , o número de Hartmann, é  $M = 1.0$ . Tem como número de Eckert dois valores,  $E = 0.7$  e  $0.3$ . O parâmetro que dá o sentido do disco inferior  $S$  é  $3.0$ . Observamos que

qualquer que seja o valor de  $\sigma$ , para  $E = 0.7$  a temperatura  $T^*$  é sempre maior que para  $E = 0.3$ . Este fenômeno se repete tanto na figura 5 como na figura 6. Outro fenômeno observado é que  $T^*$  está sempre crescendo. O número de Reynolds,  $R$ , para a figura 5 é  $R = 0.3$  enquanto que na figura 6,  $R = 0.6$ . Comparando as duas figuras observamos que para um aumento do número de Reynolds  $T^*$  cresce. Veja que na figura 5 o maior valor para  $T^* \cong 5.43$  e para  $\eta = 1.0$ . enquanto que na figura 6 o maior valor  $T^* \cong 13.0$  está em  $\eta = 1.0$ .

Na figura 7 e na figura 8 em que  $E = 0.5$ , quando os discos estão rodando em sentido contrário, ou seja  $S$  negativo,  $T^*$  aumenta consideravelmente. Isto não ocorre quando os discos giram no mesmo sentido. Observando a figura 7 quando  $S = -2.0$  e  $S = 2.0$ , fixados os demais parâmetros, notamos que para  $R = 0.8$  o maior valor para  $T^* \cong 26.5$ , enquanto que para os mesmos parâmetros e  $S = 2.0$ , o maior valor de  $T^* \cong 1.0$ . Na figura 7 temos  $M = 1.0$  e na figura 8,  $M = 0.8$ . Comparando as duas figuras, observamos que com o aumento de  $M$  temos um considerável aumento para  $T^*$ .

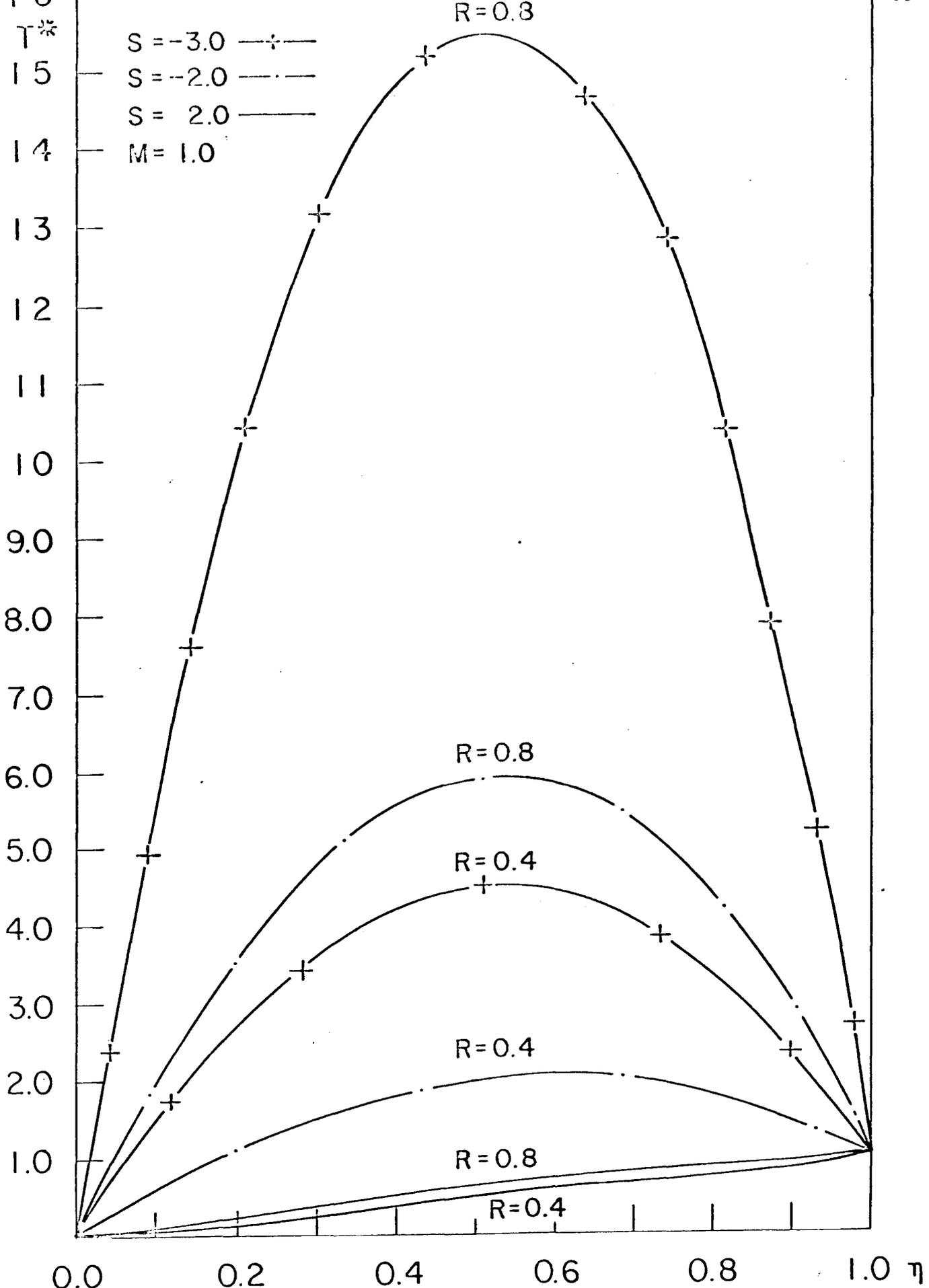


Fig. 1

Distribuição de Temperatura para  $\bar{r} = 0.5$  e  $M = 0.8$ .

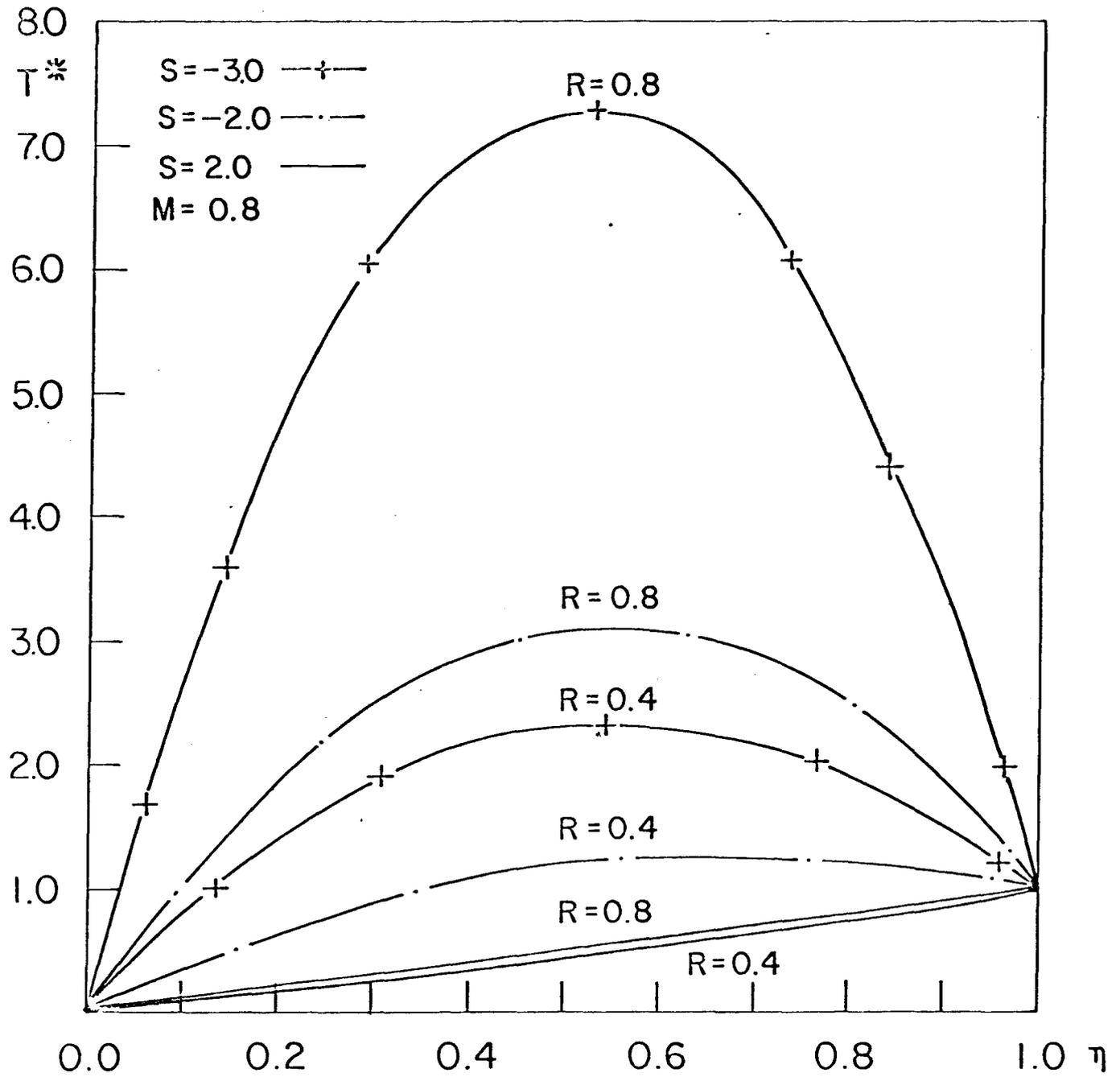


Fig. 2

Distribuição de Temperatura para  $R = 0.6$ ,  $S = 3.0$ ,  
 $\bar{r} = 1.0$  e  $M = 1.0$ .

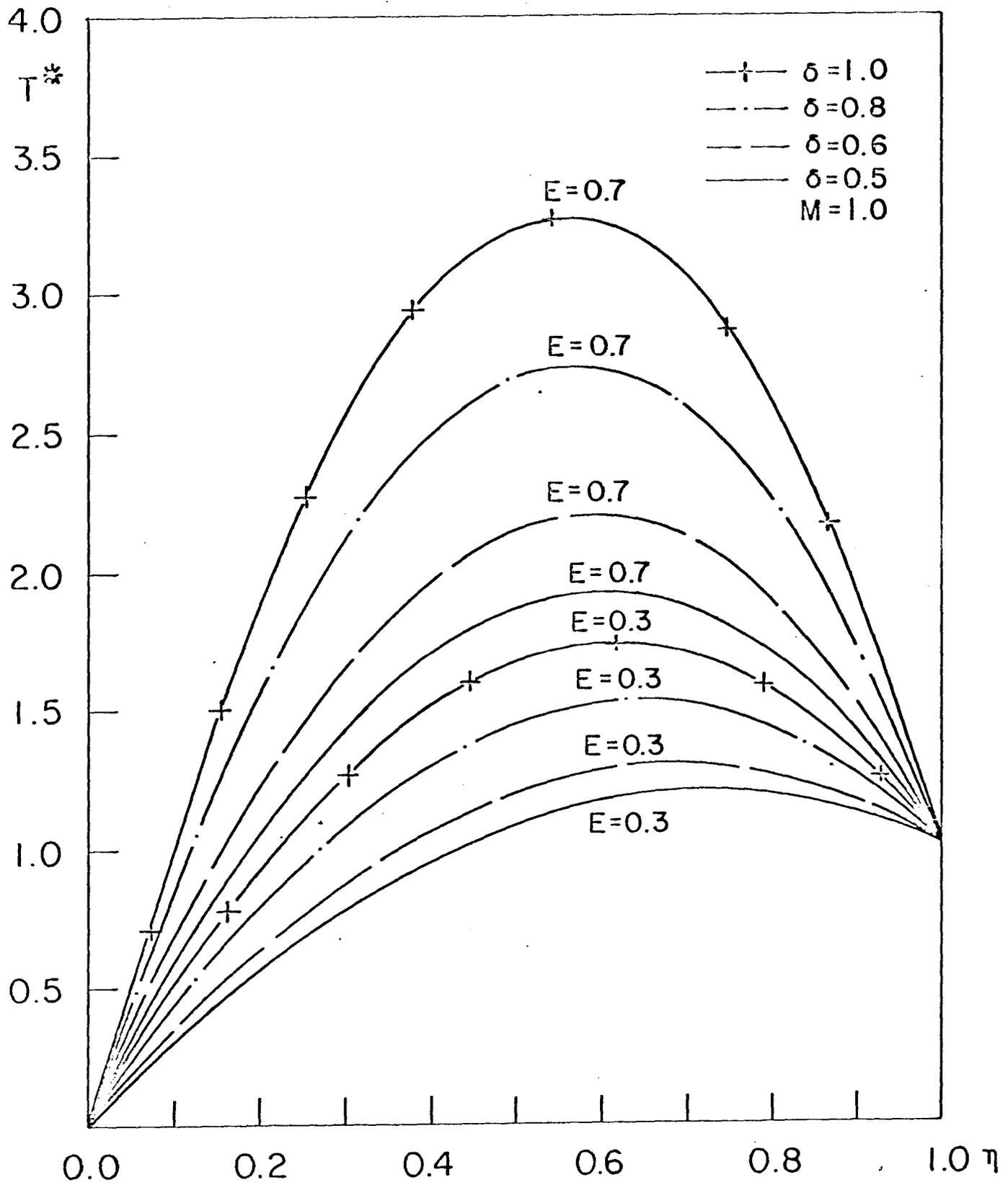


Fig. 3

Distribuição de Temperatura para  $R = 0.6$ ,  $S = 3.0$ ,  
 $\bar{r} = 1.0$  e  $M = 1.2$ .

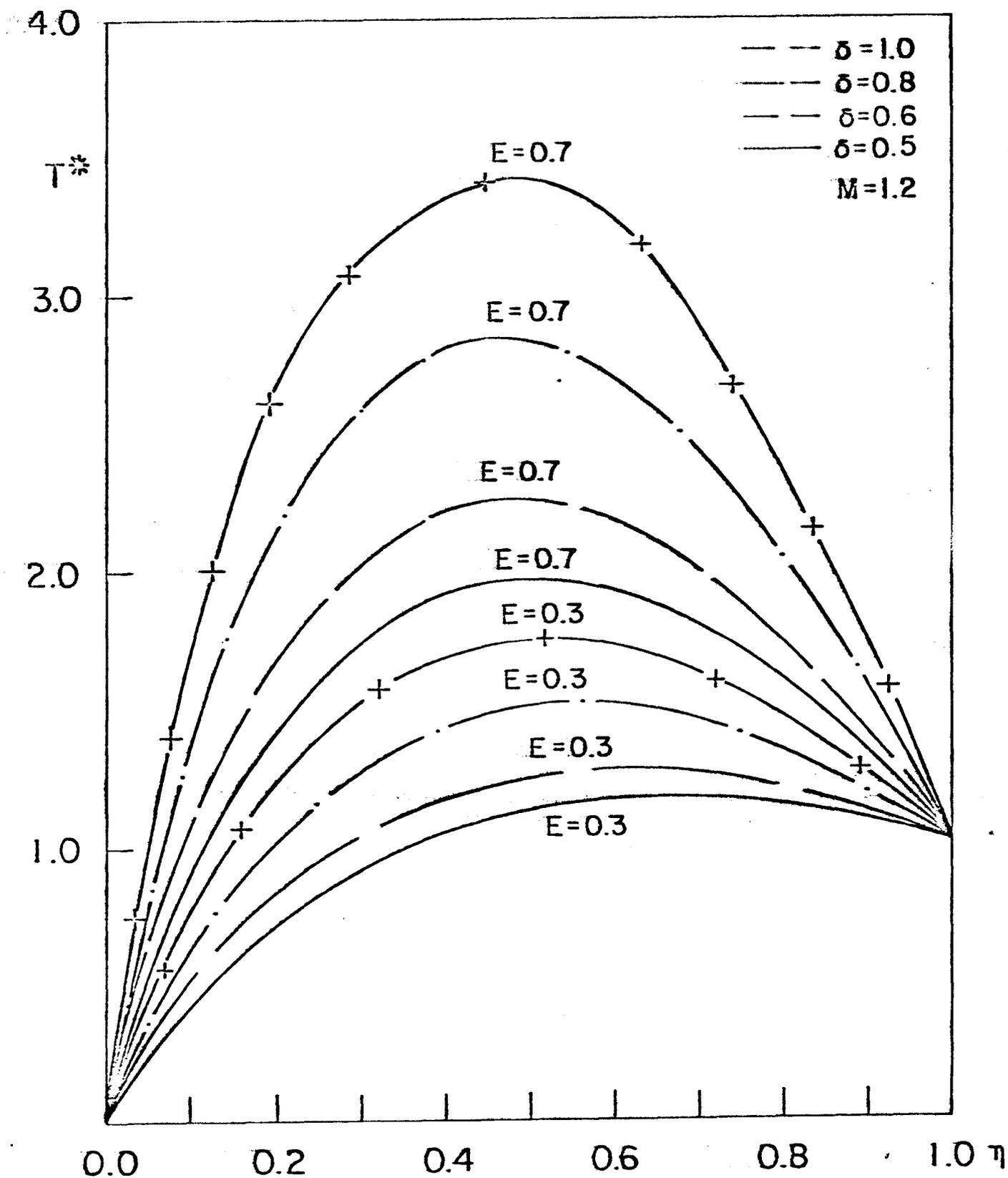


Fig.4

Distribuição de Temperatura para  $M=1.0$ ,  $S=3.0$  e  $R=0.3$ .

$$\bar{r} = 1.0$$

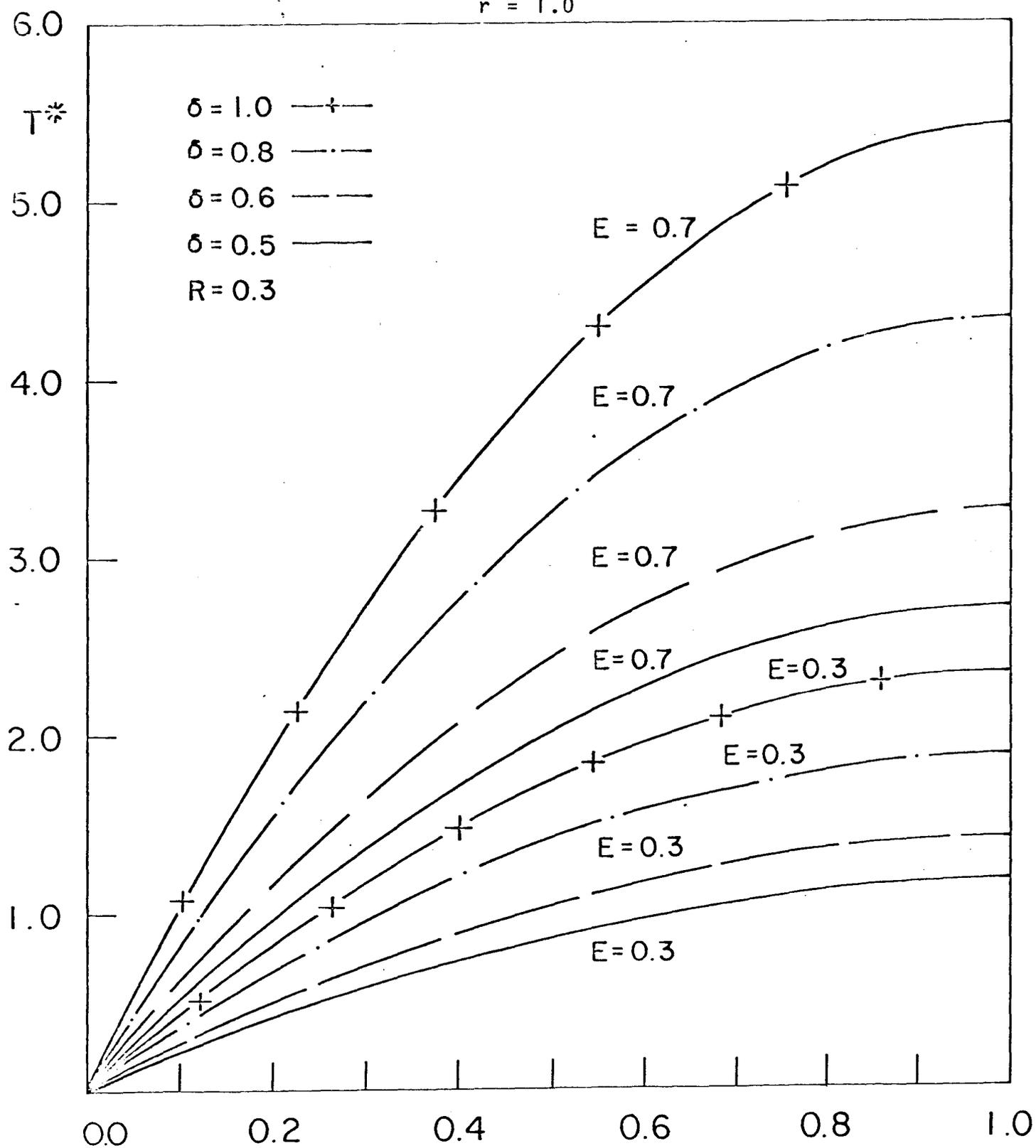


Fig. 5

Distribuição de Temperatura para  $M=1.0$ ,  $S=3.0$  e  $R=0.6$ .

$$\bar{r} = 1.0$$

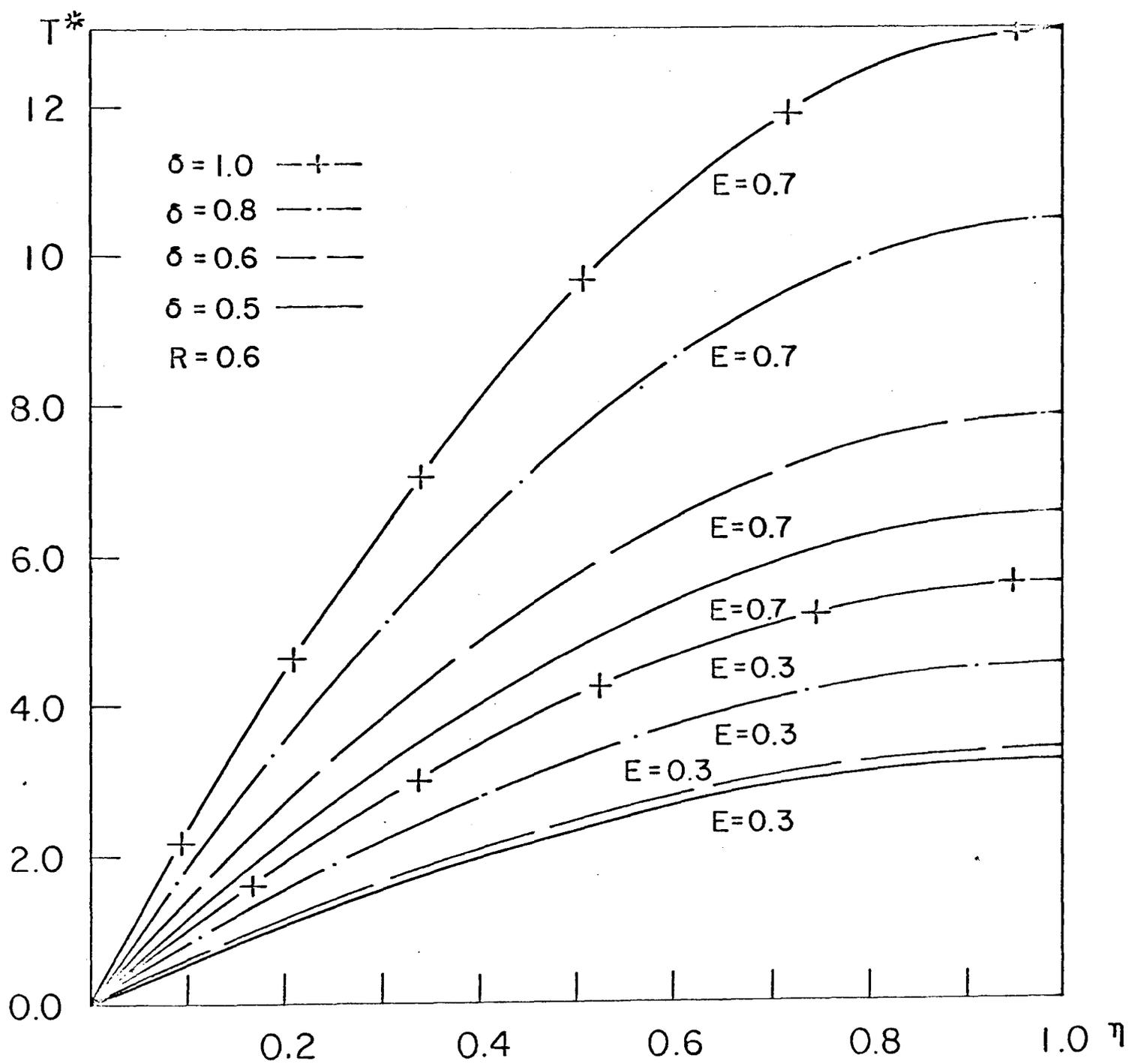


Fig.6

Distribuição de Temperatura quando  $\sigma = E = 0.5$  e  $M = 1.0$ .

$\bar{r} = 0.5$

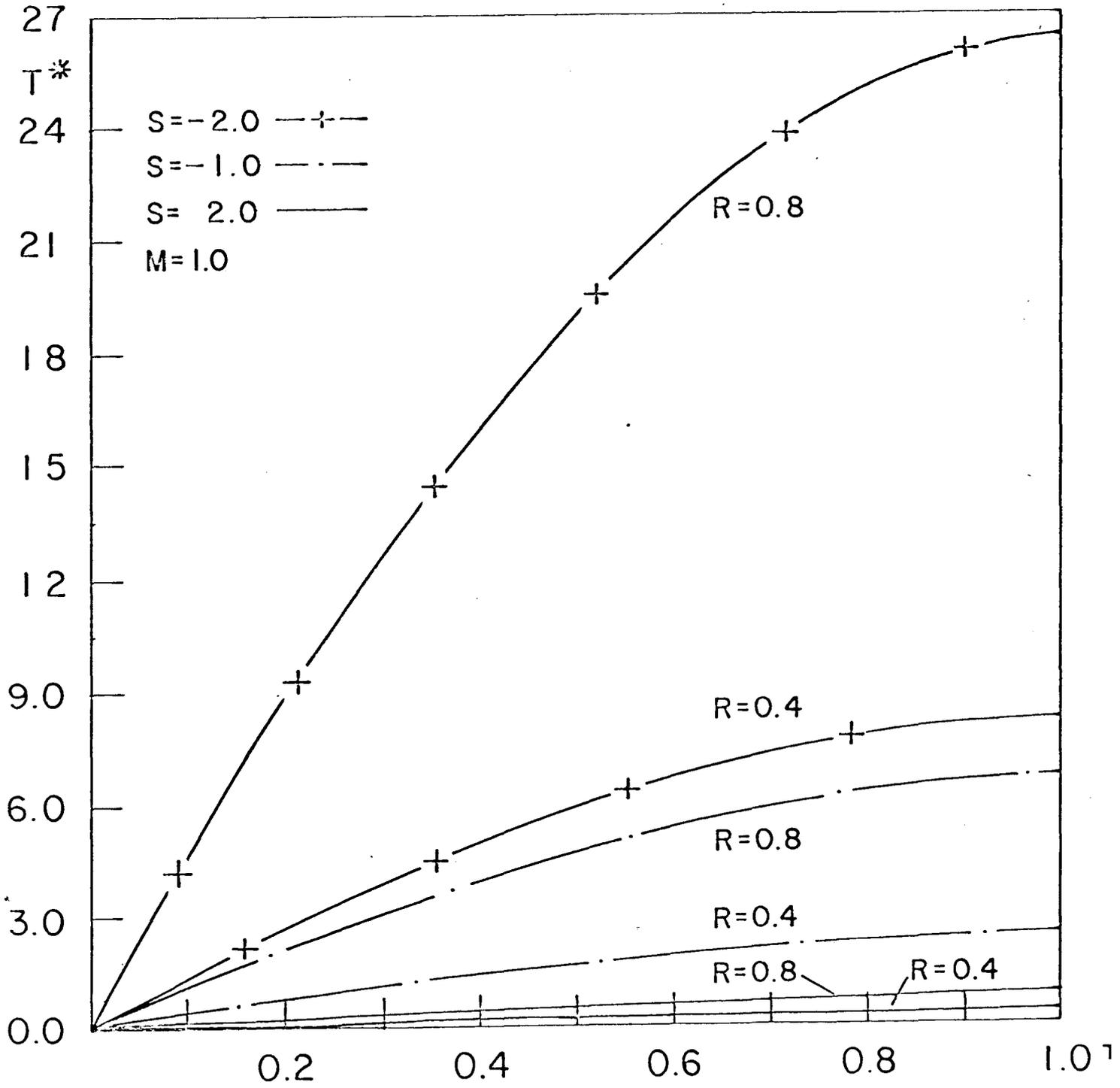


Fig. 7

Distribuição de Temperatura para  $\sigma = E = 0.5$  e  $M = 0.8$ .

$$\bar{r} = 0.5$$

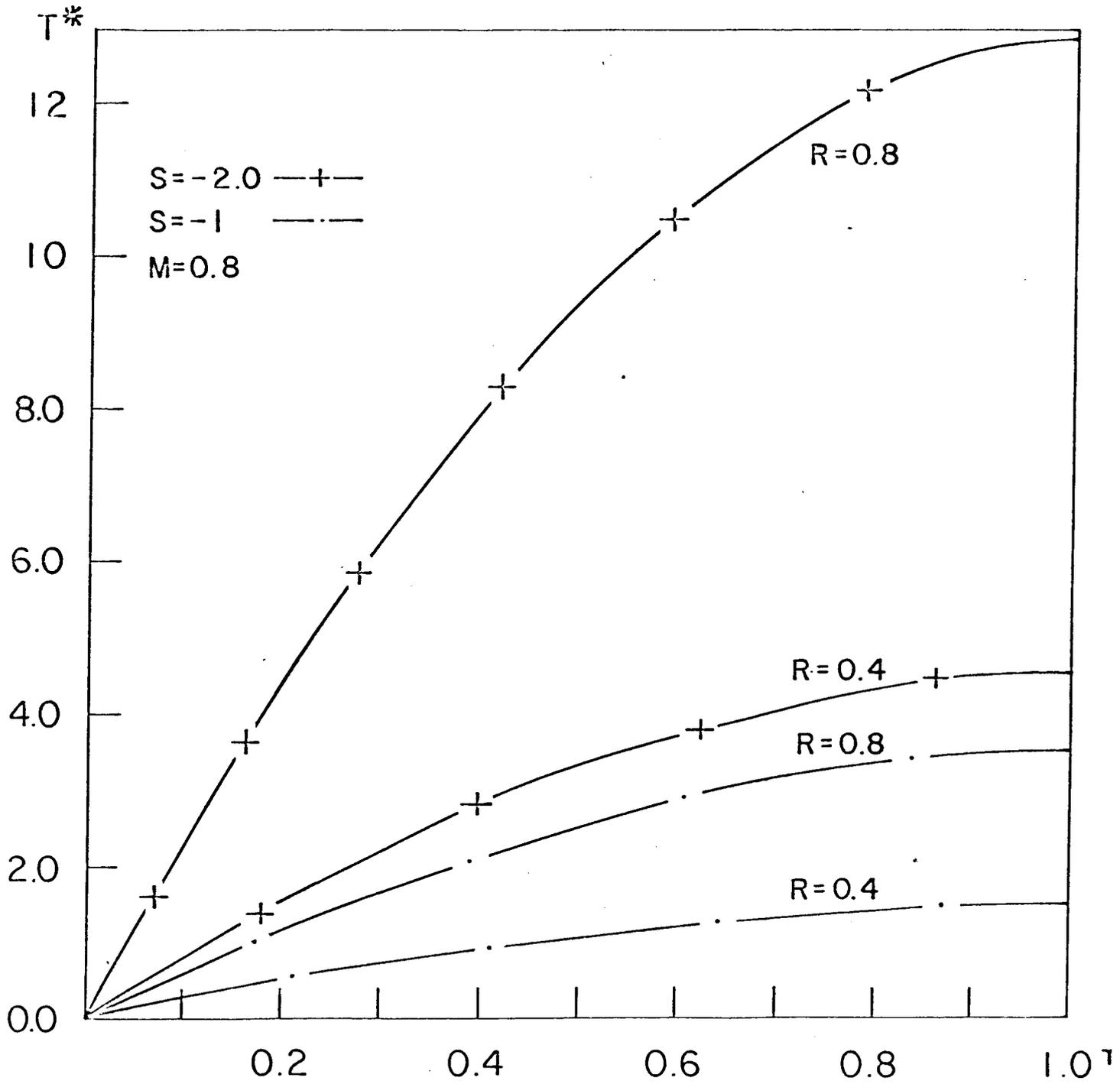


Fig. 8

## REFERÊNCIAS

1. WILLIAMSON, RICHARD E. et alii - Cálculo de Funções Vetoriais. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1975.
2. CONTE, S.D. - Elementos de Análise Numérica, Porto Alegre, Globo, 1977.
3. BELLMAN, R. - Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering, New York, Dover 1966, 118 p.
4. NAYFEH, A.H. - Perturbation Methods, New York, Wiley, 1973, 425 p.
5. SHAMES, I.H. - Mecânica dos Fluidos, São Paulo, Edgar Blücher, 1973, 2V.
6. BHATNAGAR, R.K. & ZAGO, J.V. - Numerical Investigation of the Flow of Viscoelastic Fluids between Rotating Coaxial Disks, Rheol. Acta, 17: 557-567, 1978.
7. PASTORE, E. - Transferência de Calor entre Discos Rotativos - Tese de Mestrado, UNICAMP, IMECC, 1980.

8. BHATNAGAR, R.K. - Non-Newtonian Fluids between Coaxial Rotating Disks: Efeitos of Externally-Applied Magnetic field. Computational and Applied Mathematics. V. 2, Nº 2, Campus, 1983.
9. COLLATZ, L. - The Numerical Treatment of Differential Equations. Springer-Verlag, New York, Inc. 1966.
10. KOPEHENOVA, N.K. e MARON, I.A. - Computational Mathematics, Moscou, MIR., Publishers, 1975, 395 p.
11. ORTEGA, J.M. - Numerical Analysis, New York, Academic Press, 1972, 201 p.
12. FIORENTINI, D. - Distribuição de Temperatura em Escoamento de Fluidos Newtonianos através de Tubos Cilíndricos Porosos - Tese de Mestrado, UNICAMP, IMECC, 1980.
13. PAI, SHIH-I - Viscous Flow Theory. D. Van Nostrand, Company, Inc., New York, 1965.
14. PITTS, R.D. e SISSON, E.L. - Elements of Transport Phenomena. Mc Graw-Hill, Inc. 1972.

15. KÁRMÁN, T. VON - Laminar und Turbulente Reibung ZAMM. ,  
vol. I, 1921.
16. BATCHELOR, G.K. - Note on a class of solution of the Na-  
vier-Stokes equations representing rotationally symmetric  
flow. Quart. J. Mechs. Appl. Math., vol. 4, 1951.
17. STEWARTSON, K. - On the flow between two rotating coaxial  
disks. Proc. Camb. Phil. Soc., vol. 49, 1953.