UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Tópicos de Aproximação em Espaços Normados

Lucélia Aparecida Radin

Orientador: Prof. Dr. Ary Chiacchio

06 de março de 2002

Tópicos de Aproximação em Espaços Normados

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Lucélia Aparecida Radin** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 6 de março de 2002

Ary O. Chiacchio
Prof.Dr.: Ary O. Chiacchio
Orientador

Banca Examinadora:

1-Ary Orozimbo Chiacchio (0rientador)

2-Maria Sueli Marconi Roversi

3-Mary Lilian Lourenço.

Dissertação apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP**, como requisito parcial do Título de **Mestre** em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Radin, Lucélia Aparecida

R118t Tópicos de aproximação em espaços normados / Lucélia Aparecida Radin -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Ary O. Chiacchio

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Chebyshev, Aproximação de. 2. Sol. 3. Teoria da aproximação. I. Chiacchio, Ary Orozimbo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 06 de março de 2002 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

Prof (a). Dr (a). MARIA SUELI MARCONI ROVERSI

Prof (a). Dr (a). MARY LILIAN LOURENÇO

Aos meus pais, Mario e Idioni.

Aos meus irmãos, Lizandro e Lidiane.

A vovó Cristina.

Ao vovô Filipin

AGRADECIMENTOS

No meu modo de ver, nunca realizamos algo solitários, pois sempre somos auxiliados seja com idéias, com compreensão, com conselhos sinceros ou com um silêncio profundo. Neste contexto, gostaria de agradecer a todas as pessoas que colaboraram direta ou indiretamente para realização deste trabalho, em especial:

- *A Deus em primeiro lugar, pela saúde e esperança de que tudo ia dar certo.*

- *Aos meus pais e irmãos por confiarem em mim, pelo sorriso amigo em cada vez que eu voltava, pelo incentivo aos estudos e, principalmente, porque não consigo avançar sem lembrar que devo a eles tudo que sou. Enfim, obrigada por vocês existirem.*

- *Ao Professor Dr. Ary O. Chiacchio pela orientação.*

- *Aos membros da banca, professora Dra. Maria Sueli Marconi Roversi pela colaboração direta nos seminários e a professora Dra. Mary Lilian Lourenço .*

- *Meu sincero muito obrigada a uma pessoa muito especial: Vevê. Obrigada pelas discussões matemáticas, pelo carinho, pelo apoio moral e pela lição de vida.*

- *Agradeço aos colegas e professores pelas sugestões e discussões matemáticas muito proveitosas nesta dissertação. Desejo muito sucesso para vocês.*

- *Aos tios, tias, primos, primas e a toda gauchada amiga que ficou torcendo por mim.*

- *Aos colegas Fernando, Gilmar e Cleusiane pela ajuda no Latex.*

- *Aos funcionários do IMECC: Cidinha, Ednaldo e Tania pelo desenrolar das questões burocráticas da Pós-graduação.*

- *Finalmente, agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro.*

Conteúdo

RESUMO

Neste trabalho, abordamos alguns tópicos de Teoria de Aproximação em espaços normados reais tais como a existência e unicidade do elemento de melhor aproximação e a continuidade da projeção métrica.

Apresentamos exemplos e contra-exemplos de conjuntos de existência e de conjuntos de Chebyshev .

Abordamos também, o problema da conexidade dos conjuntos de Chebyshev em espaços de Hilbert. Além disso, estudamos algumas classes de espaços com propriedades específicas, tais como convexidade uniforme e suavidade, para os quais é possível garantir uma resposta afirmativa para a seguinte questão: todo conjunto de Chebyshev é convexo?

ABSTRACT

In this work we treat some topics of the Approximation Theory in the real normed spaces, such as the existence and uniqueness of the element of best approximation and the continuity of the metric projection.

We present examples and counter-examples of sets of existence and Chebyshev sets.

We also treat the problem of connectedness of Chebyshev sets in Hilbert spaces. Furthermore, we study some classes of spaces with specific geometrical properties such as uniform convexity and smootheness, for which is possible to guarantee an affirmative answer for the following question: is every set of Chebyshev convex?

Introdução

Um subconjunto não vazio e fechado M de um espaço normado X é um conjunto de Chebyshev se cada $x \in X \setminus M$ admite exatamente um elemento de melhor aproximação em M.

Um resultado básico em Teoria de Aproximação estabelece que um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Hilbert é um conjunto de Chebyshev. A questão recíproca, conhecida como o problema da convexidade dos conjuntos de Chebyshev, bem como a caracterização dos espaços de Banach para os quais a resposta a esta questão é afirmativa, permanecem abertas.

O problema da convexidade no plano euclidiano foi resolvido por Bunt [2] e Motzkin [11], mas continua sem solução, mesmo no caso de espaços de Hilbert.

Neste trabalho, apresentamos exemplos e contra-exemplos de conjuntos de Chebyshev e estudamos também a conexidade destes conjuntos em espaços de Hilbert. Abordamos o problema da convexidade dos conjuntos de Chebyshev considerando três formas diferentes de restrições:

- condições sobre o espaço;
- condições sobre o conjunto de Chebyshev;
- condições sobre a projeção métrica associada.

Neste contexto, estudamos propriedades importantes como solaridade e caracterizações geométricas dos espaços, que permitem responder, afirmativamente, à questão da convexidade.

Os resultados apresentados neste trabalho encontram-se em Vlasov [13], [14] e [15], Kreyszig [10] e Beauzamy [1].

No Capítulo 1, apresentamos os resultados básicos que serão utilizados nos demais capítulos.

O Capítulo 2 trata dos espaços estritamente convexos e dos espaços uniformemente convexos. Apresentamos exemplos, contra-exemplos e propriedades desses espaços.

No Capítulo 3, estudamos os conjuntos de Chebyshev e, através do critério de Haar, obtemos a unicidade da melhor aproximação de funções contínuas por polinômios de grau menor ou igual a n. Finalizamos este capítulo relacionando conjuntos aproximativamente compactos com a continuidade da projeção métrica.

No Capítulo 4, utilizamos o conceito de sol para obter a convexidade dos conjuntos de Chebyshev em espaços de Banach suaves.

Capítulo 1

Preliminares

Neste trabalho, X denota um espaço normado real e X^* o dual topológico de X. Fixamos também as seguintes notações:

$$B(x,r) = \{y \in X;\ \|x-y\| < r\};$$

$$B[x,r] = \{y \in X;\ \|x-y\| \leq r\};$$

$$S(x,r) = \{y \in X;\ \|x-y\| = r\}.$$

Os seguintes espaços normados são utilizados nesta dissertação :

- O espaço $I\!R^n$ das n-uplas reais $x = (x_i)_{i=1}^n$ munido de uma das seguintes normas:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

- O espaço l_p $(1 \leq p < \infty)$ das sequências $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ tais que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$, munido da norma usual $\|x\|_p = \big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}}$.

• O espaço l_∞ das sequências limitadas $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ com a norma usual

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|.$$

• O espaço c_0 das sequências reais que convergem a zero, munido da norma induzida de l_∞.

• O espaço $C([a, b]; \mathbb{R})$ das funções reais contínuas, definidas no intervalo $[a, b]$, munido da norma $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$.

A seguir, estabelecemos alguns resultados básicos para espaços normados que serão usados nos próximos capítulos.

Lema 1.1 *Sejam $x, y \in X$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ tais que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Então, existem $u, v \in X$ com $\|u\| = \|v\| = 1$ e $\|u + v\| = 2$.*

Demonstração. Sejam $\|x\| = a \neq 0$, $\|y\| = b \neq 0$. Por hipótese,

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| = a + b.$$

Considere $u = \dfrac{x}{a}$ e $v = \dfrac{y}{b}$. Daí $\|u\| = \|v\| = 1$. Logo, $\|u + v\| \leq 2$.
Suponha, por absurdo, que $\|u+v\| < 2$. Então, $ab\|u+v\| < 2ab$, isto é, $ab\left\|\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right\| < 2ab$, ou ainda, $\|bx + ay\| < 2ab$.

Por outro lado, como $\|ax + by\| \leq a\|x\| + b\|y\| = a^2 + b^2$, temos

$$(a + b)\|x + y\| = \|bx + ay + ax + by\| \leq \|bx + ay\| + \|ax + by\| < 2ab + a^2 + b^2 = (a + b)^2.$$

Logo, $\|x + y\| < a + b$, que contradiz a hipótese. Portanto, $\|u + v\| = 2$. ∎

Dados $x \in X$ e $M \subset X$, denotamos o diâmetro de M por $D(M) = \sup_{x,\ y \in M} \|x - y\|$ e a distância de x a M por $d(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$.

Proposição 1.2 *Seja X um espaço de Banach. Seja $\{F_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de subconjuntos fechados e não vazios de X satisfazendo:*

a) $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots;$

b) $\lim_{n\to\infty} D(F_n) = 0.$

Então existe $p \in X$ *tal que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{p\}$.

Demonstração. Sendo $F_n \neq \emptyset$ para todo n, podemos escolher uma sequência

$$(a_1, a_2, ...) \text{ tal que } a_1 \in F_1, a_2 \in F_2...$$

Afirmação 1: (a_n) é de Cauchy. De fato, dado $\epsilon > 0$, como $\lim_{n\to\infty} D(F_n) = 0$, existe $n_0 \in N$ tal que $D(F_n) < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Em particular $D(F_{n_0}) < \epsilon$. Logo, para $m, n \geq n_0$, como F_n, $F_m \subset F_{n_0}$ temos que $a_n, a_m \in F_{n_0}$. Então, $\|a_n - a_m\| \leq D(F_{n_0}) < \epsilon$ para todo $m, n > n_0$. Portanto (a_n) é de Cauchy em X. Como X é completo, existe $p \in X$ tal que $a_n \to p$.

Afirmação 2: $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. De fato, suponhamos que exista $k \in I\!N$ tal que $p \notin F_k$. Como F_k é fechado, $d(p, F_k) = \delta > 0$. Assim, F_k e a bola aberta $B(p, \frac{1}{2}\delta)$ são disjuntas, isto é,

$$F_k \bigcap B(p, \frac{1}{2}\delta) = \emptyset$$

Logo, para todo $n > k$, $a_n \in F_k$ e $a_n \notin B(p, \frac{1}{2}\delta)$, o que contradiz o fato de $a_n \to p$. Portanto $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Afirmação 3: $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ é um único ponto. De fato, suponhamos por absurdo que existam $p_1, p_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ com $p_1 \neq p_2$. Então,

$$0 < \|p_1 - p_2\| \leq \sup_{p,\ q \in F_n} \|p - q\| = D(F_n),$$

o que é uma contradição, já que $D(F_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. ∎

Proposição 1.3 *(Extensão da desigualdade de Hölder). Seja* $0 < s < 1$ *e sejam* $a = (a_1, a_2 \ldots)$, $b = (b_1, b_2 \ldots)$ *sequências de termos não negativos em* l_s *e* $l_{s'}$, *respectivamente, onde* $s' = \dfrac{s}{s-1}$. *Então*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^s\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^{s'}\right)^{\frac{1}{s'}}. \tag{1.1}$$

Demonstração. Observe inicialmente, que $s' < 0$. Se $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i)^{s'} = 0$, o resultado segue trivialmente. Então, podemos assumir $0 < \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{s'} < \infty$. Como $s' < 0$ temos $b_i > 0$ para todo i.

Sejam $q = \frac{1}{s}$ e $q' = \frac{1}{1-s}$ o conjugado de q. Defina $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots)$ tais que

$$\alpha_i = b_i^{-\frac{1}{q}}; \qquad \beta_i = b_i^{\frac{1}{q}} a_i^{\frac{1}{q}}.$$

Assim,

$$\alpha_i^{q'} = b_i^{\frac{1}{q(s-1)}} = b_i^{\frac{s}{s-1}} = b_i^{s'}.$$

Consequentemente $\alpha \in l_{q'}$.

Se $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = \infty$, então (1.1) vale trivialmente. Caso contrário, $ab \in l_1$ de modo que $\beta \in l_q$. Pela desigualdade de Hölder usual temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^s = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right)^{s} \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^{s'}\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^s\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^{s'}\right)^{-\frac{1}{q's}}.$$

Sendo $-\frac{1}{q's} = \frac{1}{s'}$, o lema está provado. ∎

Proposição 1.4 *(Extensão da desigualdade de Minkowski). Seja $0 < s < 1$ e sejam $a = (a_1, a_2 \ldots)$, $b = (b_1, b_2 \ldots)$ sequências de termos não negativos em l_s. Então,*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^s\right)^{\frac{1}{s}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i)^s\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{1.2}$$

Demonstração.

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i)^s = \sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i)^{s-1}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i)^{s-1}(a_i) + \sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i)^{s-1}(b_i).$$

Segue da Proposição 1.3 que

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i+b_i)^s \geq \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^s\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{i=1}^{\infty}(a_i+b_i)^{(s-1)s'}\right)^{\frac{1}{s'}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^s\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{i=1}^{\infty}(a_i+b_i)^{(s-1)s'}\right)^{\frac{1}{s'}}$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^s\right)^{\frac{1}{s}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^s\right)^{\frac{1}{s}}\right] \left(\sum_{i=1}^{\infty}(a_i+b_i)^s\right)^{1-\frac{1}{s}} \quad \left(\text{onde } s' = \frac{s}{s-1}\right).$$

Portanto, $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^s\right)^{\frac{1}{s}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}(a_i+b_i)^s\right)^{\frac{1}{s}}$ como queríamos. ∎

Lema 1.5 *A função $\varphi_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\varphi_1(t) = \frac{\left(\dfrac{1+t}{2}\right)^2}{\dfrac{1}{2}(1+t^2)}$$

é crescente e atinge seu máximo em $t = 1$.

Demonstração. É fácil verificar que $\varphi_1'(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,1]$. ∎

Lema 1.6 *Seja (x_n) uma sequência em X tal que $x_n \rightharpoonup x$. Então $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.*

Demonstração. Por hipótese $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ para toda $f \in X^*$ e $|f(x)| \leq \|f\|\|x_n\|$ para todo n. Assim, temos

$$|f(x)| \leq \|f\| \underline{\lim} \|x_n\|.$$

Por um corolário do Teorema de Hahn-Banach segue que

$$\|x\| = \sup\{|f(x)|; f \in X^*, \ \|f\| = 1\} \leq \underline{\lim}\|x_n\|.$$

∎

No que segue, M denota um subconjunto não vazio de X, $\overset{\circ}{M}$ o seu interior, M^C o seu complementar e ∂M sua fronteira.

Lema 1.7 $\overset{\circ}{M}= \emptyset$ *se, e somente se,* M^C *é denso em* X.

Demonstração. Sabemos que

$$X = \overset{\circ}{M} \cup \partial M \cup \overset{\circ}{M^C}.$$

Se $\overset{\circ}{M}= \emptyset$, para cada $x \in X$ tem-se $x \in \partial M$ ou $x \in \overset{\circ}{M^C}$. Mas, isso implica que para cada vizinhança V_x de x temos $V_x \cap M^C \neq \emptyset$. Logo, M^C é denso em X.

Reciprocamente, suponhamos que M^C é denso em X e que $\overset{\circ}{M} \neq \emptyset$. Então, $\overset{\circ}{M}$ é um aberto tal que $\overset{\circ}{M} \cap M^C = \emptyset$, o que é um absurdo, pois M^C é denso. ■

Lema 1.8 *Se* $x, y \in X$, *então* $|d(x,M) - d(y,M)| \leq ||x-y||$.

Demonstração. Se $z \in M$, segue da desigualdade triangular que

$$d(x,M) = \inf_{z \in M} ||x-z|| \leq ||x-y|| + ||y-z||.$$

Logo $d(x,M) - ||x-y|| \leq ||y-z||$ e consequentemente

$$d(x,M) \leq ||x-y|| + d(y,M). \tag{1.3}$$

Permutando x e y em (1.3) obtemos $d(y,M) - ||y-x|| \leq ||x-z||$ para todo $z \in M$. Logo,

$$d(y,M) - ||y-x|| \leq d(x,M) \quad \text{e} \quad -||y-x|| \leq d(x,M) - d(y,M). \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4) temos que $|d(x,M) - d(y,M)| \leq ||x-y||$. ■

Lema 1.9 *Sejam* (x_n) *e* (a_n) *sequências em* X *e* $M \subset X$. *Se* $x_n \to x'$ *então*

a) $||a_n - x_n|| - ||a_n - x'|| \to 0$;

b) $d(x_n, M) \to d(x', M)$.

Demonstração.

a) Segue da propriedade $\Big| ||a_n - x_n|| - ||a_n - x'|| \Big| \leq ||x_n - x'||$ e **b)** Segue do lema anterior. ■

Dados $x,\ y \in X$ denotamos por $[x,y]$ o conjunto dos elementos da forma $(1-\lambda)x+\lambda y$ com $\lambda \in [0,1]$

Lema 1.10 *Se $z \in [x,y]$, então $\|z-y\| = \|x-y\| - \|x-z\|$.*

Demonstração. Para $z \in [x,y]$ temos $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ para algum $\lambda \in [0,1]$. Então,

$$\begin{aligned}
\|x-z\| &= \|x - ((1-\lambda)x + \lambda y)\| \\
&= \|x - (1-\lambda)x - \lambda y\| \\
&= \|x(1-(1-\lambda)) - \lambda y\| \\
&= \|\lambda x - \lambda y\|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|z-y\| &= \|(1-\lambda)x + \lambda y - y\| = \|(1-\lambda)x - y(1-\lambda)\| = \|(1-\lambda)(x-y)\| \\
&= (1-\lambda)\|x-y\| = \|x-y\| - \|\lambda x - \lambda y\| = \|x-y\| - \|x-z\|. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 1.11 *Se $x,\ x' \in X$ e $r' \geq r > 0$ então $B[x,r] \subset B[x',r']$ se, e somente se, $\|x'-x\| \leq r'-r$.*

Demonstração. Suponha $\|x'-x\| \leq r'-r$. Então, para todo $y \in B[x,r]$ temos,

$$\|y-x'\| \leq \|y-x\| + \|x-x'\| \leq r + (r'-r) = r'.$$

Logo, $y \in B[x',r']$.

Reciprocamente, seja $B[x,r] \subset B[x',r']$. Considere a reta que passa por x e x' e seja y o ponto desta reta que está mais afastado de x' e que pertence a $S(x,r)$. Então,

$$x \in [y,x'] \text{ e } \|x-x'\| = \|y-x'\| - \|y-x\| = \|y-x'\| - r.$$

Como $y \in B[x,r] \subset B[x',r']$, temos $\|y-x'\| \leq r'$. Portanto, $\|x-x'\| \leq r'-r$. $\blacksquare$

Observação 1.12 *Se $x,\ x' \in X$ e $r' \geq r > 0$ então $B[x,r] \subset B(x',r')$ se, e somente se, $\|x'-x\| < r'-r$.*

Capítulo 2

Espaços Estritamente Convexos e Espaços Uniformemente Convexos

Neste capítulo estudamos os espaços estritamente convexos e os espaços uniformemente convexos. Estas propriedades da norma estão relacionadas à geometria da esfera unitária e às questões da existência e da unicidade da melhor aproximação.

Apresentamos definições, exemplos e algumas caracterizações desses espaços tendo como referências básicas: Beauzamy [1], Cheney [3], Diestel [5] e Istrătescu [8].

2.1 Espaços Estritamente Convexos

Definição 2.1.1 *Um espaço normado X é dito estritamente convexo se, dados $x, y \in X$ tais que $\|x\| = \|y\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$, então $x = y$.*

Proposição 2.1.2 *Para um espaço normado X, as seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) X é estritamente convexo;
(b) Todo subespaço $M \subset X$ de dimensão 2 é estritamente convexo;
(c) $S = \{x \in X; \|x\| = 1\}$ não contém segmentos;
(d) Se x, $y \in X$ são tais que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, então $x = \lambda y$ com $\lambda \geq 0$.

Demonstração. $(a) \Leftrightarrow (b)$ é imediato. Vamos provar que **i)** $(a) \Leftrightarrow (d)$ e **ii)** $(a) \Leftrightarrow (c)$

i) $(d) \Rightarrow (a)$. Suponha $\|x\| = \|y\| = \left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| = 1$. Então,

$$\|x+y\| = 2 = \|x\| + \|y\|$$

e por hipótese existe $\lambda \geq 0$ tal que $x = \lambda y$. Logo, $\|x\| = \lambda\|y\|$ e $\lambda = 1$.

$(a) \Rightarrow (d)$. Suponha $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Para $y = x = 0$, tome $\lambda = 0$. Para $x \neq 0$ e $y \neq 0$ considere $\|x\| = a$ e $\|y\| = b$. Pelo Lema 1.1, $u = \dfrac{x}{a}$ e $v = \dfrac{y}{b}$ são tais que $\|u\| = \|v\| = \left\|\dfrac{u+v}{2}\right\| = 1$. Como X é estritamente convexo, $u = v$, isto é, $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$. Logo, $x = \dfrac{a}{b}y$ com $\lambda = \dfrac{a}{b} > 0$.

ii) Vamos mostrar que X não é estritamente convexo se, e somente se, S contém segmentos. Com efeito, se X não é estritamente convexo, existem $x, y \in X$, $x \neq y$ tais que $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x+y\| = 2$. Afirmamos que todos os pontos do segmento $[x, y]$ tem norma 1. Caso contrário, existiria $0 < \lambda < 1$ tal que $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$. Então teríamos

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \|\lambda x + (1-\lambda)y + (1-\lambda)x + \lambda y\| \\ &\leq \|\lambda x + (1-\lambda)y\| + \|(1-\lambda)x + \lambda y\| \\ &< 2, \end{aligned}$$

que é uma contradição.

Reciprocamente, se S contém um segmento $[x, y]$, então $\|x\| = \|y\| = \left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| = 1$ e X não é estritamente convexo. ∎

Exemplo 2.1.3 *Todo espaço de Hilbert X é estritamente convexo.*

De fato, sejam $x, y \in X$com $x \neq y$ e $\|x\| = \|y\| = 1$. Pela identidade do paralelogramo temos:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 4.$$

Sendo $\|x-y\| > 0$, segue que $\|x+y\|^2 = 4 - \|x-y\|^2 < 4$. Logo, $\|x+y\| < 2$.

Exemplo 2.1.4 $I\!R^2$ *com a norma* $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{2} |x_i|$ *não é estritamente convexo.*

De fato, sejam $x = (0,1) \in I\!R^2$, $y = (1,0) \in I\!R^2$. Então,

$$\|x\|_1 = \|y\|_1 = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_1 = 1 \text{ e } x \neq y.$$

Exemplo 2.1.5 *O espaço l_1 com a norma usual não é estritamente convexo.*

De fato, sejam $x = (1,0,0...) \in l_1$, $y = (0,1,0...) \in l_1$. Então,

$$\|x\|_1 = \|y\|_1 = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_1 = 1 \text{ e } x \neq y.$$

Exemplo 2.1.6 *O espaço l_∞ com a norma usual não é estritamente convexo.*

De fato, sejam $x = (1,1,0...) \in l_\infty$, $y = (1,-1,0...) \in l_\infty$. Então

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_\infty = 1 \text{ e } x \neq y.$$

Exemplo 2.1.7 *O espaço $C([a,b]; I\!R)$ com a norma do máximo não é estritamente convexo.*

De fato, sejam $f_1(t) = 1$ e $f_2(t) = \dfrac{t-a}{b-a}$; $t \in [a,b]$. Então, $f_1, f_2 \in C([a,b]; I\!R)$,

$$\|f_1\| = \max_{t\in[a,b]} |f_1(t)| = 1, \ \|f_2\| = \max_{t\in[a,b]} |f_2(t)| = \frac{b-a}{b-a} = 1,$$

$$\|f_1 + f_2\| = \max_{t\in[a,b]} \left|1 + \frac{t-a}{b-a}\right| = 2 \text{ e } f_1 \neq f_2.$$

2.2 Espaços Uniformemente Convexos

Esta noção foi introduzida por Clarkson [4].

Definição 2.2.1 *Um espaço normado X é dito uniformemente convexo se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x - y\| < \epsilon$ sempre que $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta$.*

Definição 2.2.2 *O módulo de convexidade de X é a função $\delta_X : [0,2] \longrightarrow [0,1]$ definida por*

$$\delta_X(\epsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|; \ \|x\| = \|y\| = 1, \ \|x-y\| \geq \epsilon\right\}.$$

Proposição 2.2.3 *As seguintes propriedades são válidas:*
a) δ_X *é uma função decrescente;*
b) X *é uniformemente convexo se, e somente se, para cada* $\epsilon > 0$, $\delta_X(\epsilon) > 0$;
c) $\delta(0) = 0$.

Demonstração. Seguem diretamente da Definição 2.2.1. ∎

Exemplo 2.2.4 *Todo espaço de Hilbert* X *é uniformemente convexo.*

De fato, sejam $\epsilon > 0$ e $x,\ y \in X$ com $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \epsilon$. Pela identidade do paralelogramo, temos

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Logo,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = 1 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = 1 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 \leq 1 - \frac{1}{4}\epsilon^2.$$

Assim, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - 1 + \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Portanto, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$, onde $\delta = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}$ como queríamos.

Na Proposição 2.2.5 e no Exemplo 2.2.6 apresentamos as demonstrações originais de Clarkson [4].

Proposição 2.2.5 *Sejam* $x,\ y \in l_p$ *com* $2 \leq p < \infty$ *e* $q = \dfrac{p}{p-1}$. *Então as seguintes desigualdades são válidas:*

$$2(\|x\|^p + \|y\|^p) \leq \|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{2.1}$$

$$2(\|x\|^p + \|y\|^p)^{q-1} \leq \|x+y\|^q + \|x-y\|^q \tag{2.2}$$

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2(\|x\|^q + \|y\|^q)^{p-1}. \tag{2.3}$$

Para $1 < p \leq 2$ *estas desigualdades valem no sentido contrário.*

Demonstração. Primeiramente, afirmamos que a desigualdade da direita em (2.1) é equivalente a desigualdade da esquerda para todo p. Com efeito, sejam $x+y=z$ e $x-y=w$. Então $x=\dfrac{z+w}{2}$.e $y=\dfrac{z-w}{2}$. Logo, para a desigualdade da direita de (2.1), temos

$$\|z\|^p+\|w\|^p \leq 2^{p-1}\left(\left\|\frac{z+w}{2}\right\|^p+\left\|\frac{z-w}{2}\right\|^p\right) \Leftrightarrow$$

$$\|z\|^p+\|w\|^p \leq 2^{p-1}\frac{1}{2^p}(\|z+w\|^p+\|z-w\|^p) \Leftrightarrow$$

$$2(\|z\|^p+\|w\|^p) \leq \|z+w\|^p+\|z-w\|^p.$$

Além disso, (2.2) é equivalente a (2.3). De fato, sejam z e w definidos como acima. Então,

$$2\left(\left\|\frac{z+w}{2}\right\|^p+\left\|\frac{z-w}{2}\right\|^p\right)^{q-1} \leq \|z\|^q+\|w\|^q \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{2^{p(q-1)}}(\|z+w\|^p+\|z-w\|^p)^{q-1} \leq \|z\|^q+\|w\|^q \Leftrightarrow$$

$$(\|z+w\|^p+\|z-w\|^p)^{q-1} \leq 2^{q-1}(\|z\|^q+\|w\|^q) \Leftrightarrow$$

$$\|z+w\|^p+\|z-w\|^p \leq 2(\|z\|^q+\|w\|^q)^{\frac{1}{q-1}}.$$

Prova da Desigualdade (2.2).

- Primeiro caso: $1<p\leq 2$.

Afirmamos inicialmente que, para quaisquer x, y reais, temos

$$|x+y|^q+|x-y|^q \leq 2(|x|^p+|y|^p)^{q-1}. \tag{2.4}$$

De fato, assumindo $|x|\geq|y|$ e dividindo (2.4) por $|x|^q$, obtemos

$$\left|\frac{x+y}{x}\right|^q+\left|\frac{x-y}{x}\right|^q \leq 2\left(1+\left|\frac{y}{x}\right|^p\right)^{q-1}.$$

Então,

$$|1+c|^q+|1-c|^q \leq 2(1+|c|^p)^{q-1}, \quad c=\frac{y}{x}, \quad |c|\leq 1 \tag{2.5}$$

É suficiente considerar $0<c<1$. Neste caso, (2.5) é equivalente a

$$(1+c)^q+(1-c)^q \leq 2(1+c^p)^{q-1}$$

Dividindo esta última desigualdade por $(1+c)^q$, obtemos

$$1+\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^q \leq 2\frac{(1+c^p)^{q-1}}{(1+c)^q}.$$

Logo,

$$\left[1+\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^q\right]^{p-1} \leq 2^{p-1}\left[\frac{(1+c^p)^{q-1}}{(1+c)^q}\right]^{p-1} = 2^{p-1}\left[\frac{1+c^p}{(1+c)^p}\right].$$

Seja $z=\dfrac{1-c}{1+c}$. Então $0<z<1$. Como $c=\dfrac{1-z}{1+z}$, temos que

$$\frac{1+c^p}{(1+c)^p}=\frac{1}{2^p}[(1+z)^p+(1-z)^p].$$

Portanto (2.5) é equivalente a

$$[1+z^q]^{p-1} \leq \frac{1}{2}[(1+z)^p+(1-z)^p].$$

Então, basta mostrarmos que

$$S=\frac{1}{2}[(1+z)^p+(1-z)^p]-[1+z^q]^{p-1} \geq 0.$$

Para isso, vamos considerar a série de Taylor em torno de $z_0=0$ de cada termo de S.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[(1+z)^p+(1-z)^p] &= 1+\frac{p(p-1)}{2!}z^2+\frac{p(p-1)(2-p)(3-p)}{4!}z^4+\dots \\ &\quad +\frac{p(p-1)(2-p)\dots(2k-1-p)}{(2k)!}z^{2k}+\dots.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+z^q)^{p-1} &= 1+(p-1)z^q-\frac{(p-1)(2-p)}{2!}z^{2q}+\dots+\frac{(p-1)(2-p)...(2k-1-p)}{(2k-1)!}z^{(2k-1)q} \\ &\quad -\frac{(p-1)(2-p)...(2k-p)}{(2k)!}z^{(2k)q}+\dots.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{p(p-1)(2-p)\dots(2k-1-p)}{(2k)!}z^{2k} \quad -\frac{(p-1)(2-p)\dots(2k-1-p)}{(2k-1)!}z^{(2k-1)q} \\ &\qquad +\frac{(p-1)(2-p)\dots(2k-p)}{(2k)!}z^{(2k)q}\Big] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}z^{2k}\Big\{\Big[\frac{p(p-1)(2-p)\dots(2k-1-p)}{(2k)!}\Big] \quad -\Big[\frac{(p-1)(2-p)\dots(2k-1-p)}{(2k-1)!}z^{(2k-1)q-2k}\Big] \\ &\qquad +\Big[\frac{(p-1)(2-p)\dots(2k-p)}{(2k)!}z^{(2k)q-2k}\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

Como $(2k-1)q - 2k = \dfrac{2k-p}{p-1}$ e $(2k)q - 2k = 2k\dfrac{1}{p-1}$, temos

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2k}\Big\{\Big[\frac{p(p-1)(2-p)\dots(2k-1-p)(2k-p)}{(2k)!(2k-p}\Big]$$

$$-\Big[\frac{(p-1)(2-p)\dots(2k-1-p)(2k-p)}{(2k-1)!(2k-p)}z^{\frac{2k-p}{p-1}}\Big] + \Big[\frac{(p-1)(2-p)\dots(2k-p)}{(2k)!}z^{2k\frac{1}{p-1}}\Big]\Big\}$$

Mais precisamente,

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2k}\frac{(2-p)\dots(2k-1-p)(2k-p)}{(2k-1)!}\Big\{\frac{p(p-1)}{(2k)(2k-p)} - \frac{p-1}{2k-p}z^{\frac{2k-p}{p-1}} + \frac{p-1}{2k}z^{2k\frac{1}{p-1}}\Big\}.$$

Além disso, já que $\dfrac{p(p-1)}{(2k)(2k-p)} = \dfrac{p-1}{2k-p} - \dfrac{p-1}{2k}$ concluímos que

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2k}\frac{(2-p)\dots(2k-1-p)(2k-p)}{(2k-1)!}\Big\{\frac{1-z^{\frac{2k-p}{p-1}}}{(2k-p)/(p-1)} - \frac{1-z^{\frac{2k}{p-1}}}{2k/(p-1)}\Big\}.$$

Desta maneira, para provarmos que S tem apenas termos não negativos, basta mostrar que a função $f(t) = \dfrac{1-z^t}{t}$ é decrescente para $t > 0$ e $0 < z < 1$. Mas,

$$f'(t) = \frac{-tz^t\ln z - (1-z^t)}{t^2} \leq 0 \Leftrightarrow z^t(1 - t\ln z) \leq 1. \tag{2.6}$$

Considere a função $g(t) = a^t(1 - t\ln a)$ definida para $t \geq 0$ e $0 < a < 1$. Observe que $g(0) = 1$ e que $g'(t) = a^t\ln a(1 - t\ln a) + a^t(-\ln a) = -ta^t(\ln a)^2$ é sempre ≤ 0. Portanto, $g(t) \leq 1$ para $t \geq 0$ e $0 < a < 1$ e, por (2.6) temos que $f(t)$ é decrescente.

Voltando à prova de (2.2), considere $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots) \in l_p$. Então devemos provar que

$$\Big[\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^p\Big]^{\frac{q}{p}} + \Big[\sum_{i=1}^{\infty}|x_i - y_i|^p\Big]^{\frac{q}{p}} \leq 2\Big[\sum_{i=1}^{\infty}(|x_i|^p + |y_i|^p)\Big]^{q-1}. \tag{2.7}$$

Neste caso, pondo $\dfrac{p}{q} = s$, $a_i = |x_i + y_i|^q$, $b_i = |x_i + y_i|^q$, pela Proposição (1.4), temos que o lado esquerdo de (2.7) é

$$\leq \Big[\sum_{i=1}^{\infty}\big(|x_i + y_i|^q + |x_i - y_i|^q\big)^{\frac{p}{q}}\Big]^{\frac{q}{p}},$$

que, por (2.4), é

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(2(|x_i|^p+|y_i|^p)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{q}{p}} = 2\left[\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p+|y_i|^p\right]^{\frac{q}{p}}.$$

Como $\dfrac{q}{p}=q-1$, temos a desigualdade (2.7).

• Segundo caso: $p \geq 2$.

Afirmamos que (2.7) vale no sentido contrário. De fato, sejam x, y, a_i, b_i e s definidos como acima. Aplicando a desigualdade de Minkowski usual, concluímos que o lado esquerdo de (2.7) é

$$\geq \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(|x_i+y_i|^q+|x_i-y_i|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{q}{p}}. \tag{2.8}$$

Por outro lado, (2.3) (ou seu equivalente (2.2)) já foi provado para $p \leq 2$. Assim, usando essa desigualdade para números reais e $p > 2$, obtemos

$$|x_i+y_i|^q+|x_i-y_i|^q \geq 2(|x_i|^p+|y_i|^p)^{q-1}.$$

De fato, aplicando (2.4) para $1 < q \leq 2$, temos

$$|x_i+y_i|^p+|x_i-y_i|^p \leq 2(|x_i|^q+|y_i|^q)^{p-1},$$

que por (2.3) é equivalente a

$$|x_i+y_i|^q+|x_i-y_i|^q \geq 2(|x_i|^p+|y_i|^p)^{q-1}.$$

Decorre daí que (2.8) é

$$\geq \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(2\left[\,|x_i|^p+|y_i|^p\,\right]^{q-1}\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{q}{p}} = 2\left[\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p+|y_i|^p\right]^{q-1},$$

como queríamos.

Prova da Desigualdade (2.1).

• Primeiro caso: $p \geq 2$.

Considere a desigualdade da direita de (2.1). Para prová-la, aplicando (2.3), basta mostrar que para todo $a,\ b \geq 0$ temos

$$2(a^q + b^q)^{p-1} \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{2.9}$$

De fato, sem perda de generalidade, podemos supor $b > 0$ e $a \leq b$. Então, dividindo (2.9) por $b^{q(p-1)} = b^p$ obtemos

$$2(c^q + 1)^{p-1} \leq 2^{p-1}(c^p + 1) \Leftrightarrow \frac{2^{p-2}(c^p+1)}{(c^q+1)^{p-1}} \geq 1, \text{ onde } c = \frac{a}{b}.$$

Então, é suficiente mostrar que

$$h(c) := \frac{2^{\frac{p-2}{p}}(c^p+1)^{\frac{1}{p}}}{(c^q+1)^{\frac{1}{q}}} \geq 1, \text{ com } 0 \leq c \leq 1. \tag{2.10}$$

Observe que $h(1) = 1$. Logo, para provarmos (2.10) basta mostrar que $h'(c) \leq 0$ no intervalo considerado. Assim, como

$$h'(c) = \frac{[(c^p+1)^{\frac{1}{p}-1}c^{p-1}(c^q+1)^{\frac{1}{p}}] - [(c^p+1)^{\frac{1}{p}}(c^q+1)^{\frac{1}{q}-1}c^{q-1}]}{[(c^q+1)^{\frac{1}{q}}]^2},$$

temos que

$$h'(c) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{c^p}{(c^p+1)} \leq \frac{c^q}{(c^q+1)} \Leftrightarrow c^p(c^q+1) \leq c^q(c^p+1) \Leftrightarrow c^p \leq c^q.$$

Mas, a última desigualdade é verdadeira, pois $0 \leq c \leq 1$ e $p \geq 2 \geq q$. Logo, $h'(c) \leq 0$ como queríamos.

• Segundo caso: $1 < p \leq 2$.

Neste caso, a desigualdade (2.9) vale no sentido contrário. A demonstração é análoga ao caso anterior com $h'(c) \geq 0$. Portanto, a Proposição 2.2.5 está provada. ∎

Exemplo 2.2.6 *O espaço l_p $(1 < p < \infty)$ com a norma usual é uniformemente convexo.*

De fato, sejam $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \epsilon$. Temos dois casos a considerar.

• Primeiro caso: $p \geq 2$.

Pela desigualdade (2.1) segue que

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2^{p-1}(2) = 2^p.$$

Então temos,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p \leq 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p = 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p.$$

Portanto,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} = 1 - \delta,$$

onde

$$\delta = 1 - \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

- Segundo caso: $1 < p \leq 2$.

Pela desigualdade (2.2) segue que

$$\|x+y\|^q + \|x-y\|^q \leq (2)2^{q-1} = 2^q.$$

Então temos,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q \leq 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q = 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^q.$$

Portanto,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} = 1 - \delta,$$

onde

$$\delta = 1 - \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema 2.2.7 *Todo espaço uniformemente convexo X é estritamente convexo.*

Demonstração. Suponha $x, y \in X$ com $\|x\| = \|y\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$. Dado $\epsilon > 0$, para qualquer $\delta > 0$, $1 - \delta < 1 = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$. Como X é uniformemente convexo, $\|x-y\| < \epsilon$. Sendo ϵ arbitrário, temos que $x = y$. ∎

Corolário 2.2.8 *l_1, l_∞, $C([a,b]; I\!R)$ com as normas usuais não são uniformemente convexos.*

Teorema 2.2.9 *Todo espaço X estritamente convexo e de dimensão finita é uniformemente convexo.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, considere a norma em $X \times X$ definida por

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \quad \text{e}$$

$$K = \{(x, y) \in X \times X;\ \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x - y\| \geq \epsilon\}.$$

É imediato que K é limitado. Afirmamos que K é fechado. De fato, dado $z \in \overline{K}$, existe uma sequência $z_n = (x_n, y_n) \in K$ tal que $z_n \to z = (x, y)$. Conseqüentemente $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Como $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ para todo n, segue que $\|x\| = \|y\| = 1$. Além disso, $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon$ para todo n implica em $\|x - y\| \geq \epsilon$. Como X tem dimensão finita, K é compacto.

Considere a função contínua

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & K & \longrightarrow & I\!R \\ & (x, y) & \longmapsto & 1 - \frac{1}{2}\|x + y\| \end{array}$$

Sabemos que $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1$. Afirmamos que para $(x, y) \in K$, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$. De fato, se $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$, então como X é estritamente convexo, $x = y$, o que é impossível pela definição de K. Logo φ é estritamente positiva em K e, desde que K é compacto, assume mínimo aí, que denotamos por $\delta > 0$. Portanto, $(x, y) \in X \times X$ tal que $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \epsilon$ implicam que $\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta$. ∎

Observação 2.2.10 *Um exemplo de um espaço normado estritamente convexo que não é uniformemente convexo encontra-se em Beauzamy [1].*

2.3 Uma Caracterização dos Espaços Uniformemente Convexos

Lema 2.3.1 *Sejam X uniformemente convexo, x, $y \in X$ tais que $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$ e seja $\epsilon' = \|x - y\|$. Então, para todo t, $0 \leq t \leq 1$,*

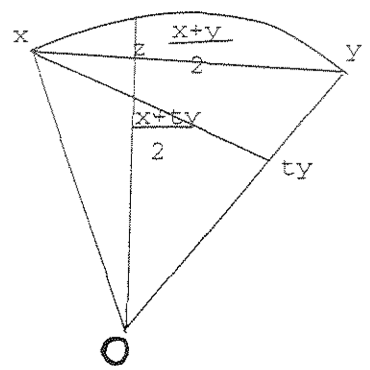
$$\left\|\frac{x + ty}{2}\right\| \leq \frac{1-t}{2} + t(1 - \delta(\epsilon')) = \frac{1+t}{2} - t\delta(\epsilon'). \tag{2.11}$$

Demonstração. Para $t = 0$ ou $t = 1$ a desigualdade (2.11) é trivial. Então vamos considerar apenas $0 < t < 1$.

Para $y = -x$ temos

$$\left\| \frac{x - tx}{2} \right\| = \frac{1-t}{2}\|x\| = \frac{1-t}{2} \leq \frac{1-t}{2} + t(1 - \delta(\epsilon')).$$

Então, podemos supor também que $y \neq -x$. Seja $z = \lambda \left(\frac{x + ty}{2} \right)$ tal que $z \in [x, y]$ (veja a figura).



Afirmamos que $z \in \left[x, \frac{x+y}{2}\right]$. De fato, suponha por absurdo, que $z \in \left(\frac{x+y}{2}, y\right]$. Então

$$\alpha\left(\frac{x+y}{2}\right) + (1-\alpha)y = \lambda\left(\frac{x+ty}{2}\right)$$

implica que $x(\alpha - \lambda) = y(t\lambda + \alpha - 2)$. Observe que não podemos ter $\alpha - \lambda \neq 0$ e $t\lambda + \alpha - 2 \neq 0$, pois x e y são distintos, $y \neq -x$ e ambos tem norma 1. Então,

$$\begin{cases} \alpha - \lambda = 0 \\ t\lambda + \alpha - 2 = 0 \end{cases}$$

e daí $\alpha = \frac{2}{t+1}$. Como $0 \leq \alpha \leq 1$, segue que $t \geq 1$, o que é uma contradição .

Assim, temos $z = \mu x + (1 - \mu)\frac{x+y}{2}$ para algum $0 \leq \mu \leq 1$. De

$$\lambda\left(\frac{x+ty}{2}\right) = \mu x + (1-\mu)\frac{x+y}{2}$$

segue que

$$x\left(\frac{\lambda}{2}-\mu-\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\right)=y\left(\frac{1-\mu}{2}-\frac{t\lambda}{2}\right).$$

Portanto,

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2}-\mu-\left(\dfrac{1-\mu}{2}\right)=0\\[2ex] \dfrac{1-\mu}{2}-\dfrac{t\lambda}{2}=0.\end{cases}$$

Decorre daí que

$$\lambda=\frac{2}{1+t},\qquad \mu=\frac{1-t}{1+t}.$$

Além disso, como $z=\mu x+(1-\mu)\dfrac{x+y}{2}$ e X é uniformemente convexo temos

$$\begin{aligned}\|z\|=\left\|\frac{1-t}{1+t}x+\left(1-\frac{1-t}{1+t}\right)\frac{x+y}{2}\right\| &\le \frac{1-t}{1+t}\|x\|+\left(1-\frac{1-t}{1+t}\right)\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\\ &\le \frac{1-t}{1+t}+\left(1-\frac{1-t}{1+t}\right)(1-\delta(\epsilon'))\\ &=1-\frac{2t}{1+t}\,\delta(\epsilon').\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left\|\frac{x+ty}{2}\right\|=\frac{1}{\lambda}\|z\|\le\frac{1+t}{2}\left(1-\frac{2t}{1+t}\,\delta(\epsilon')\right).$$

■

Proposição 2.3.2 *Seja X uniformemente convexo. Então, para cada $\epsilon>0$ existe um número $\delta_2(\epsilon)>0$ tal que para $x,\ y\in X$, com $\|x\|\le 1,\ \|y\|\le 1,\ \|x-y\|\ge\epsilon$, tem-se que*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2\le(1-\delta_2(\epsilon))\left(\frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)\right). \tag{2.12}$$

Portanto, se X é uniformemente convexo então para $x,\ y\in X$ temos

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2\le\left[1-\delta_2\left(\frac{\|x-y\|}{\max\{\|x\|,\ \|y\|\}}\right)\right]\left(\frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)\right). \tag{2.13}$$

Demonstração. Podemos assumir $\|x\| = 1$ e $\|y\| \leq 1$. Pondo $t = \|y\|$, temos $0 \leq t \leq 1$. Sejam $\|x - y\| \geq \epsilon$ e $\epsilon' = \|x - y'\|$ onde $y' = \dfrac{y}{\|y\|}$. Pelo Lema 2.3.1 aplicado a x e y' temos

$$\left\|\frac{x + ty'}{2}\right\| \leq \frac{1+t}{2} - t\delta(\epsilon').$$

Então,

$$\frac{\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|^2}{\dfrac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)} \leq \frac{\left(\dfrac{1+t}{2} - t\delta(\epsilon')\right)^2}{\dfrac{1}{2}(1+t^2)}.$$

Logo,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq \frac{\left(\dfrac{1+t}{2} - t\delta(\epsilon')\right)^2}{\dfrac{1}{2}(1+t^2)} \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{2.14}$$

Afirmamos que existe $\delta_2(\epsilon)$ tal que

$$\varphi(t) = \frac{\left(\dfrac{1+t}{2} - t\delta(\epsilon')\right)^2}{\dfrac{1}{2}(1+t^2)} \leq 1 - \delta_2(\epsilon). \tag{2.15}$$

De fato, dois casos podem ocorrer:

Primeiro caso.

Se $\epsilon' \leq \dfrac{\epsilon}{2}$, então $\|x - y'\| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Assim,

$$1 - t \ = \|y - y'\| \geq \|y - x\| - \|x - y'\| \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2},$$

ou seja,

$$t \leq 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $\varphi(t) \leq \dfrac{\left(\dfrac{1+t}{2}\right)^2}{\dfrac{1}{2}(1+t^2)} := \varphi_1(t)$ e $\varphi_1(t)$ é crescente pelo Lema 1.5, temos

$$\varphi(t) \leq \frac{\left(1 - \dfrac{\epsilon}{4}\right)^2}{\dfrac{1}{2}\left(1 + \left(1 - \dfrac{\epsilon}{2}\right)^2\right)}.$$

Logo,

$$1-\varphi(t) \geq 1-\frac{\left(1-\frac{\epsilon}{4}\right)^2}{\frac{1}{2}\left(1+\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)^2\right)}.$$

Segundo caso.

Se $\epsilon' > \frac{\epsilon}{2}$, então $\delta(\epsilon') \geq \delta(\frac{\epsilon}{2})$ e

$$\varphi(t) \leq \frac{\left(\frac{1+t}{2} - t\delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right)^2}{\frac{1}{2}(1+t^2)} := \psi(t).$$

Desta forma, $1-\varphi(t) \geq 1-\psi(t_0)$ onde $\psi(t_0)$ é o valor máximo para ψ em $[0,1]$. Escrevendo δ no lugar de $\delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$, temos que

$$\psi(t) = \frac{\left(\frac{1+t}{2} - t\delta\right)^2}{\frac{1}{2}(1+t^2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+t(1-2\delta))^2}{1+t^2}\right].$$

Analisando a função $\psi'(t)$ temos que o único ponto crítico de ψ é $t_0 = 1-2\delta$. Como

$$\psi(t_0) = (1-\delta)^2 + \delta^2 > (1-\delta)^2 = \psi(1),$$

$$\psi(t_0) = \frac{1}{2}[1+(1-2\delta)^2] > \frac{1}{2} = \psi(0)$$

e ψ é contínua, t_0 é ponto de máximo para ψ em $[0,1]$.

Portanto, para o primeiro caso temos

$$1-\varphi(t) \geq 1-\frac{\left(1-\frac{\epsilon}{4}\right)^2}{\frac{1}{2}\left(1+\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)^2\right)}$$

e para o segundo caso temos

$$1-\varphi(t) \geq 1-\left[\left(1-\delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right)^2 + \delta^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right].$$

Considerando

$$\delta_2(\epsilon) \leq \min\left\{ 1 - \frac{\left(1-\frac{\epsilon}{4}\right)^2}{\frac{1}{2}\left(1+\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)^2\right)},\ 1 - \left[\left(1-\delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right)^2 + \delta^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right] \right\},$$

o resultado segue como queríamos.

Para provar a desigualdade (2.13) basta considerar

$$x_1 = \frac{x}{\max\{\|x\|,\ \|y\|\}},\quad y_1 = \frac{y}{\max\{\|x\|,\ \|y\|\}}\quad \text{e}\quad \|x_1 - y_1\| = \epsilon.$$

■

Proposição 2.3.3 *Sejam X um espaço uniformemente convexo, $\delta > 0$ e $0 < h < H$. Então, quando $\delta \to 0^+$, o diâmetro*

$$D(\ B[z, \|z-y\| + \delta] \setminus B(x, \|x-y\|)\ ) \to 0 \tag{2.16}$$

uniformemente para todo x, y, z, com $z \in [x,y]$, $\|x-y\| = H$, $\|x-z\| = h$.

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x = 0$, $\|y\| = H = 1$. Assim $B(x, \|y\|) = B(0,1)$, $\|z\| = h < 1$, isto é, $z = hy$ e $\|z - y\| = 1 - h$. Além disso, podemos supor $h < \frac{1}{2}$, pois para $h < h'$ o Lema 1.11 nos garante que

$$B[h'y, 1-h'+\delta] \setminus B(0,1) \subset B[hy, 1-h+\delta] \setminus B(0,1),$$

de modo que, para cada δ fixo, o diâmetro (2.16) decresce quando h cresce.

Sejam $y \in S(0,1)$ e $u \in B[z, 1-h+\delta] \setminus B(0,1)$ escolhidos arbitrariamente para um dado $\delta > 0$. Se mostrarmos que $\|y - u\| \to 0$, quando $\delta \to 0^+$, o lema estará provado, pois

$$\|u_1 - u_2\| \leq \|u_1 - y\| + \|y - u_2\| \to 0 \ \text{ para todo } \ u_1,\ u_2 \in B[z, 1-h+\delta] \setminus B(0,1)$$

implica que

$$\sup_{u_1,u_2 \in B[z,1-h+\delta]\setminus B(0,1)} \|u_1 - u_2\| = \ D(\ B[z, 1-h+\delta] \setminus B(0,1)\ ) \to 0 \ \text{ quando } \ \delta \to 0^+.$$

Para dar continuidade a esta demonstração, seja $v = \dfrac{u}{\|u\|}$. Afirmamos que se $h < \dfrac{1}{2}$, então $0 \in B[z, 1-h+\delta]$. De fato, $h < \dfrac{1}{2}$ implica que $2h \leq 1+\delta$. Então, $\|z\| = h \leq 1-h+\delta$. Como $u \in B[z, 1-h+\delta]$, segue que $[0,u] \subset B[z, 1-h+\delta]$, pois toda bola fechada de um espaço normado é convexa.
Além disso, $v \in [0,u] \subset B[z, 1-h+\delta]$ (pois v é múltiplo de u e $\dfrac{1}{\|u\|} < 1$). Então, $\|v - z\| \leq 1 - h + \delta$ e daí $-\|v-z\| \geq -(1-h+\delta)$. Tomando $\theta = \dfrac{1}{1+h}$ temos

$$\theta(2h - \delta) = 1 - \theta(1 - h + \delta) \leq 1 - \theta\|v - z\|. \tag{2.17}$$

Note que $\|v\| = 1$ e $\|v - \theta(z + hv)\| = \theta\|v - z\|$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|v - \theta(z+hv)\| = \left\| v - \frac{1}{1+h}(z+hv) \right\| &= \left\| v\left(1 - \frac{1}{1+h}\right) - \frac{1}{1+h}z \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{1+h}(v - z) \right\| \\
&= \theta\|v - z\|.
\end{aligned}$$

Agora, voltando a desigualdade (2.17) temos

$$\theta(2h - \delta) \leq \|v\| - \|v - \theta(z+hv)\| \leq \|\theta(z+hv)\| = \theta\|z + hv\|.$$

Para $z = hy$ segue que $2h - \delta \leq \|hy + hv\| = h\|y + v\|$. Então,

$$2 - \frac{\delta}{h} \leq \|y + v\| \leq \|y\| + \|v\| = 2.$$

Logo, $\|y + v\| \to 2$ quando $\delta \to 0^+$. Como X é uniformemente convexo, $\|y - v\| \to 0$.

Por outro lado, como $v \in [0,u]$ temos

$$\begin{aligned}
\|u - v\| = \|u\| - \|v\| = \|u\| - 1 &= \|u - z + z\| - 1 \\
&\leq \|u - z\| + \|z\| - 1 \\
&= \|u - z\| + h - 1 \\
&\leq (1 - h + \delta) + h - 1 = \delta.
\end{aligned}$$

Então, fazendo $\delta \to 0^+$, $\|u - v\| \to 0$. Consequentemente,
$\|y - u\| \leq \|u - v\| + \|v - u\| \to 0$ quando $\delta \to 0^+$. ∎

Capítulo 3

Aproximação e Conjuntos de Chebyshev

Neste capítulo apresentamos exemplos e contra exemplos de conjuntos de existência e de conjuntos de Chebyshev. Estudamos também os conjuntos aproximativamente compactos e a continuidade da projeção métrica associada.

3.1 Melhor Aproximação

Dado $M \subset X$ denotamos por $\overline{M}$ o fecho de M em X.

Definição 3.1.1 *Dado $x \in X$, dizemos que $y \in M$ é um elemento de melhor aproximação de x em M se $\|x - y\| = d(x, M)$.*

Denotamos por $P_M(x)$ o conjunto dos elementos de melhor aproximação de x em M.

Definição 3.1.2 *$M \subset X$ é dito um conjunto de existência se, para cada $x \in X$, $P_M(x)$ é não vazio.*

Segue imediatamente da definição que todo conjunto de existência é não vazio e fechado.

Lema 3.1.3 *Se M é um conjunto de existência então $P_M(x)$ é fechado, para cada $x \in X$.*

Demonstração. Seja $y \in \overline{P_M}(x)$. Então existe $(y_n) \subset P_M(x)$ tal que $y_n \to y$. Como M é fechado segue que $y \in M$. Decorre do fato que $\|x - y_n\| = d(x, M)$ para todo n, que $\|x-y\| = d(x,M)$. Logo, $y \in P_M(x)$. ■

Lema 3.1.4 *Seja $M \subset X$ um subconjunto convexo não vazio. Então $P_M(x)$ é convexo, para cada $x \in X$.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $d = d(x,M)$. Se $P_M(x)$ é vazio ou unitário, o resultado é trivial. Então suponha que $y,\ z \in P_M(x)$ e seja $w = \alpha y + (1-\alpha)z$, onde $0 \leq \alpha \leq 1$. Como $\|x-y\| = \|x-z\| = d$ segue que

$$\begin{aligned}\|x-w\| = \|\alpha(x-y) + (1-\alpha)(x-z)\| &\leq \alpha\|x-y\| + (1-\alpha)\|x-z\| \\ &= \alpha d + (1-\alpha)d \\ &= d.\end{aligned}$$

Como $w \in M$ temos $w \in P_M(x)$, o que prova a convexidade de $P_M(x)$. ■

Lema 3.1.5 *Sejam $M \subset X$ e $x \in X$. Se $y \in P_M(x)$ e $z \in [x,y]$ então $y \in P_M(z)$.*

Demonstração. Sejam $y \in P_M(x)$ e $z \in [x,y]$. Aplicando os Lemas 1.8 e 1.10, temos

$$d(z,M) \leq \|z-y\| = \|x-y\| - \|x-z\| = d(x,M) - \|x-z\| \leq d(z,M)$$

Logo, como $y \in M$ e $d(z,M) = \|z-y\|$, segue que $y \in P_M(z)$. ■

Proposição 3.1.6 *Todo conjunto compacto $M \subset X$ é um conjunto de existência.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $d = d(x,M)$. Pela definição de ínfimo, podemos encontrar um sequência (y_n) em M tal que $\|x-y_n\| \to d$. Pela compacidade de M, existe uma subsequência (y_{n_j}) de (y_n) tal que $y_{n_j} \to y_0 \in M$. Afirmamos que $y_0 \in P_M(x)$. De fato, como $\|x-y_0\| \leq \|x-y_{n_j}\| + \|y_{n_j} - y_0\|$, fazendo $j \to \infty$ temos $\|x-y_0\| \leq d$. ■

Exemplo 3.1.7 *Toda bola fechada de um espaço normado de dimensão finita é um conjunto de existência.*

Teorema 3.1.8 *Todo subespaço M de dimensão finita de um espaço normado X é um conjunto de existência.*

Demonstração. Seja $x \in X \setminus M$. Considere $K = M \cap B[0, r]$ onde $r = 2\|x\|$. Como $0 \in K$ temos $d(x, K) \leq \|x\|$. Para $y \in M \setminus K$, como $\|y\| > 2\|x\|$ segue que

$$\|x - y\| \geq \|y\| - \|x\| > \|x\| \geq d(x, K). \tag{3.1}$$

Decorre daí que $d(x, K) = d(x, M)$ e que esse valor não pode ser assumido por um elemento $y \in M \setminus K$. Logo, se existe uma melhor aproximação y_0 em M para x, devemos ter $y_0 \in K$. Como K é limitado e fechado e M tem dimensão finita, K é compacto e o resultado segue da Proposição 3.1.6. ∎

O seguinte exemplo mostra que a hipótese de dimensão finita não pode ser retirada do teorema anterior.

Exemplo 3.1.9 *Seja $\varphi : c_0 \longrightarrow I\!R$ o funcional linear definido por $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n$, para cada $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Então, $M = ker\varphi$ é um subespaço de c_0 tal que $P_M(y) = \emptyset$, para todo $y \in c_0 \setminus M$.*

De fato, dado $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 \setminus M$, seja $\varphi(y) = \lambda \neq 0$. Considere os seguintes elementos de c_0

$$z_m = \frac{-2^m}{2^m - 1} (\underbrace{\lambda, \lambda, \ldots, \lambda}_{m \text{ vezes}}, 0, \ldots); \; m \geq 1.$$

Como

$$\varphi(z_m) = \frac{-2^m}{2^m - 1} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2^2} + \ldots + \frac{\lambda}{2^m} \right) = -\lambda,$$

segue que $\varphi(z_m + y) = 0$, para todo $m \geq 1$. Logo, $x_m = z_m + y \in M$ e consequentemente, $d(y, M) \leq \|y - x_m\|$ para todo $m \geq 1$. Como

$$\|x_m - y\| = \|z_m\| = \frac{2^m}{2^m - 1} |\lambda| \to |\lambda|,$$

segue que $d(y, M) \leq |\lambda|$.

Para concluir que M não pode ser um conjunto de existência, é suficiente mostrar que $\|w - y\| > |\lambda|$, para todo $w \in M$. De fato, se $w \in M$, escolhemos n_0 tal que

$$|w_n - y_n| < \frac{1}{2}\,|\lambda| \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Suponha que $\|y - w\| = \sup\limits_j |y_j - w_j| \leq |\lambda|$. Temos então,

$$\begin{aligned} |\lambda| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} y_n\Big| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(y_n - w_n)\Big| \; &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|y_n - w_n| \\ &\leq |\lambda| \sum_{n<n_0} 2^{-n} + \frac{1}{2}\,|\lambda| \sum_{n \geq n_0} 2^{-n} \\ &= |\lambda|\,\Big(\sum_{n<n_0} 2^{-n} + \frac{1}{2}\,\sum_{n\geq n_0} 2^{-n}\Big) < |\lambda|, \end{aligned}$$

que é uma contradição.

Geralmente, o elemento de melhor aproximação , cuja existência é garantida pelo Teorema 3.1.8, não é único, como ilustra o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1.10 *Considere o espaço $\mathbb{R}^2$ com a norma $\|x\| = max\{|x_1|, |x_2|\}$ e o subespaço*

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_2 = 0\}.$$

Se $z = (0, 1)$ então $d(z, M) = 1$ é atingida em todos os pontos $(\xi, 0)$ tais que $|\xi| \leq 1$.

Definição 3.1.11 *$M \subset X$ é dito um conjunto de unicidade se, para cada $x \in X$ tal que $P_M(x) \neq \emptyset$ tem-se que $P_M(x)$ unitário.*

Teorema 3.1.12 *Sejam X um espaço estritamente convexo, $M \subset X$ um subconjunto convexo de X e $x \in X \setminus M$ tal que $P_M(x) \neq \emptyset$. Então $P_M(x)$ é unitário.*

Demonstração. Sejam $x \in X \setminus M$ e $d(x, M) = d$. Se $y_0,\ y_1 \in P_M(x)$, então

$$\|y_0 - x\| = \|y_1 - x\| = d.$$

Daí,

$$\left\|\frac{1}{2}(y_0 + y_1) - x\right\| \leq \frac{1}{2}\|y_0 - x\| + \frac{1}{2}\|y_1 - x\| = d.$$

Como M é convexo, $\frac{1}{2}(y_0+y_1) \in M$ e assim, $\left\|\frac{1}{2}(y_0+y_1)-x\right\| = \|y_0-x\| = \|y_1-x\| = d$. Sendo X estritamente convexo, segue-se que $y_1 = y_0$. ∎

Corolário 3.1.13 *Se X é estritamente convexo e $M \subset X$ é um subespaço de X tal que $P_M(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X \setminus M$, então M é um conjunto de unicidade.*

Definição 3.1.14 *Dizemos que $M \subset X$ é um conjunto de Chebyshev se M é um conjunto de existência e de unicidade.*

Exemplo 3.1.15 *Todo subespaço de dimensão finita de um espaço estritamente convexo é um conjunto de Chebyshev.*

Teorema 3.1.16 *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Todo conjunto $M \subset X$ convexo e fechado é um conjunto de Chebyshev.*

Demonstração. Sejam $x \in X$, $x \notin M$ e $d = d(x, M)$. Considere

$$A_n = \left\{z \in M;\ \|x-z\| \leq d + \frac{1}{n}\right\} = M \cap B\left[x, d+\frac{1}{n}\right].$$

Observe que $\{A_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de conjuntos fechados tais que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ Para $z_1,\ z_2 \in A_n$, pela Proposição 2.3.2 temos

$$\left\|x - \frac{z_1+z_2}{2}\right\|^2 \leq \left[1 - \delta_2\left(\frac{\|z_1-z_2\|}{\max\{\|x-z_1\|,\ \|x-z_2\|\}}\right)\right]\frac{1}{2}(\|x-z_1\|^2 + \|x-z_2\|^2).$$

Como $\frac{z_1+z_2}{2} \in M$, segue que $\left\|x - \frac{z_1+z_2}{2}\right\|^2 \geq d^2$. Assim, obtemos

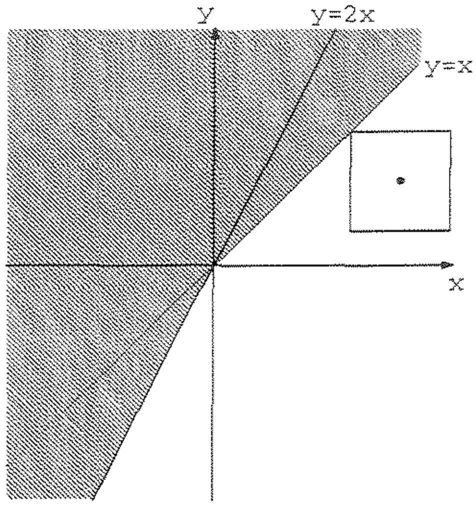
$$d^2 \leq \left[1 - \delta_2\left(\frac{\|z_1-z_2\|}{\max\{\|x-z_1\|,\ \|x-z_2\|\}}\right)\right]\left(d+\frac{1}{n}\right)^2.$$

Segue daí que o diâmetro de A_n tende a zero, quando $n \to \infty$. Pela Proposição 1.2, existe um único $y \in \cap_{n\geq 1} A_n$. Consequentemente, $y \in M$ e $\|x-y\| \leq d + \frac{1}{n}$, para todo $n \geq 1$. Portanto, $y \in P_M(x)$. ∎

Exemplo 3.1.17 *No espaço $\mathbb{R}^2$ munido com a norma do máximo, o conjunto*

$$M = \{(x,y);\ y \geq x\} \cup \{(x,y);\ y \geq 2x\}$$

é de Chebyshev mas não é convexo.



3.2 Aproximação Uniforme

Esta seção é dedicada à *aproximação uniforme* no espaço $C([a,b];\mathbb{R})$, também conhecida como *Aproximação de Chebyshev.* (Veja Kreyszig [10]).

Considere um subespaço n-dimensional $M \subset C([a,b];\mathbb{R})$. O Teorema 3.1.8 garante que M é um conjunto de existência. Entretanto, como $C([a,b];\mathbb{R})$ não é estritamente convexo (veja o Exemplo 2.1.7), o problema da unicidade requer uma investigação especial.

A seguinte definição, introduzida por A. Haar em 1918, é importante para estabelecer a unicidade da melhor aproximação em $C([a,b];\mathbb{R})$, por polinômios.

O espaço dos polinômios reais de grau $\leq n$ definidos em $[a,b]$ é denotado por $P_n([a,b])$.

Definição 3.2.1 *Um subespaço n-dimensional $M \subset C([a,b];\mathbb{R})$ satisfaz a condição de Haar se, todo $y \in M$, $y \neq 0$, tem no máximo $n-1$ zeros em $[a,b]$.*

Exemplo 3.2.2 *$P_{n-1}([a,b])$ satisfaz a condição de Haar.*

Observação 3.2.3 *O subespaço M satisfaz a condição de Haar se, e somente se, todo $y \in M$ com n ou mais zeros em $[a, b]$ é identicamente nulo.*

Proposição 3.2.4 *A condição de Haar é equivalente à seguinte condição: para toda base $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset M$ e toda n-upla de pontos distintos $t_1, \ldots, t_n$ em $[a, b]$ tem-se:*

$$\begin{vmatrix} y_1(t_1) & y_1(t_2) & \ldots & y_1(t_n) \\ y_2(t_1) & y_2(t_2) & \ldots & y_2(t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n(t_1) & y_n(t_2) & \ldots & y_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.2}$$

Demonstração. Seja $\{y_1, \ldots, y_n\}$ uma base de M e seja y um elemento de M que possui, pelo menos, n zeros distintos $t_1, \ldots, t_n$ em $[a, b]$. Se $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$ então o sistema

$$y(t_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k(t_j) = 0, \qquad 1 \leq j \leq n, \tag{3.3}$$

tem solução única $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ se, e somente se, o determinante (3.2) é diferente de zero. Mas $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ equivale a y ser identicamente nulo, o que completa a demonstração. ■

Definição 3.2.5 *Um ponto extremal de uma função $x \in C([a, b]; \mathbb{R})$ é um elemento $t_0 \in [a, b]$ tal que $|x(t_0)| = \|x\|$.*

Lema 3.2.6 *Seja $M \subset C([a, b]; \mathbb{R})$ um subespaço de dimensão n e suponha que M satisfaz a condição de Haar. Se $x \in C([a, b]; \mathbb{R})$, $y \in M$ e a função $x - y$ tem menos que $n + 1$ pontos extremais, então $y \notin P_M(x)$.*

Demonstração. Por hipótese, a função $v = x - y$ tem $m \leq n$ pontos extremais $t_1, \ldots, t_m$. Se $m < n$, escolhemos pontos adicionais em $[a, b]$ até obtermos n pontos distintos $t_1, \ldots, t_n$. Usando estes pontos e uma base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de M, consideramos o sistema linear não homogêneo

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k(t_j) = v(t_j), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Como M satisfaz a condição de Haar, por (3.2) o sistema acima tem solução única $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Definimos

$$y_0 = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_n y_n \quad \text{e} \quad y' = y + \epsilon y_0 \qquad (\epsilon > 0).$$

Mostraremos que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno a função $v' = x - y'$ satisfaz

$$\|v'\| < \|v\|.$$

Subdividimos $J = [a, b]$ em dois conjuntos N e $K = J \setminus N$, onde N contém os pontos extremais $t_1, \ldots, t_m$ de v.

Nos pontos extremais, $|v(t_i)| = \|v\|$ e como $v = x - y \neq 0$, $\|v\| > 0$. Além disso, $y_0(t_i) = v(t_i)$ para $i = 1, \ldots, n$.

Pela continuidade da função $t \mapsto |v(t)|$ em t_i, para cada $i = 1, \ldots, m$, existe uma vizinhança aberta N_i' de t_i tal que $|v(t)| > \frac{1}{2}\|v\| > 0$, para todo $t \in N_i'$. Logo,

$$\inf_{t \in N_i'} |v(t)| > 0.$$

Analogamente, existe uma vizinhança aberta N_i'' de t_i tal que

$$\inf_{t \in N_i''} |y_0(t)| \geq \frac{1}{2}\|v\|.$$

Tome $N_i = N_i' \cap N_i''$. Observe que as funções v e y_0 preservam seus respectivos sinais em N_i.

Defina $N = N_1 \cup N_2 \ldots \cup N_m$. Então,

$$\mu = \inf_{t \in N} |v(t)| > 0, \quad \inf_{t \in N} |y_0(t)| \geq \frac{1}{2}\|v\| \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{3.4}$$

Como $y_0(t_i) = v(t_i) \neq 0$, temos $\dfrac{y_0(t)}{v(t)} > 0$, para todo $t \in N$, e de (3.4) segue que

$$\frac{y_0(t)}{v(t)} = \frac{|y_0(t)|}{|v(t)|} \geq \frac{\inf |y_0(t)|}{\|v\|} \geq \frac{1}{2}.$$

Seja $m_0 = \sup_{t \in N} |y_0(t)|$. Então, para $0 < \epsilon < \dfrac{\mu}{m_0}$ e $t \in N$ obtemos

$$\frac{\epsilon y_0(t)}{v(t)} = \frac{\epsilon |y_0(t)|}{|v(t)|} \leq \frac{\epsilon m_0}{\mu} < 1.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} |v'(t)| = |v(t) - \epsilon y_0(t)| &= |v(t)| \left(1 - \frac{\epsilon y_0(t)}{v(t)}\right) \\ &\le \|v\| \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \qquad (3.5) \\ &< \|v\|. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $m_1 = \max_{t \in K} |y_0(t)|$ e $m_2 = \max_{t \in K} |v(t)|$, como N contém todos os pontos extremais de v, temos $m_2 < \|v\|$ e podemos escrever

$$\|v\| = m_2 + \eta, \qquad \eta > 0.$$

Tomando $0 < \epsilon < \dfrac{\eta}{m_1}$, obtemos

$$|v'(t)| = |v(t) - \epsilon y_0(t)| \le m_2 + \epsilon m_1 < \|v\|, \quad \text{para todo} \quad t \in K. \tag{3.6}$$

Assim, escolhendo $0 < \epsilon < \min\left\{\dfrac{\mu}{m_0}, \dfrac{\eta}{m_1}\right\}$, segue de (3.5) e (3.6) que $\|v'\| < \|v\|$. Decorre daí que $y \notin P_M(x)$. ∎

Teorema 3.2.7 *Seja $M \subset C([a,b]; I\!R)$ um subespaço de dimensão n. Então, o elemento de melhor aproximação para $x \in C([a,b]; I\!R)$ em M é único se, e somente se, M satisfaz a condição de Haar.*

Demonstração.

a) Suficiência: Suponha que M satisfaz a condição de Haar, mas existem $y_1,\ y_2 \in P_M(x)$. Então, para $v_1 = x - y_1$ e $v_2 = x - y_2$ temos

$$v_2 - v_1 = y_1 - y_2 \quad \text{e} \quad \|v_1\| = \|v_2\| = d, \quad \text{onde} \quad d = d(x, M).$$

Pelo Lema 3.1.4, $\dfrac{y_1 + y_2}{2} \in P_M(x)$. Pelo Lema 3.2.6 obtemos que

$$v = x - \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2} \tag{3.7}$$

tem no mínimo $n+1$ pontos extremais $t_1, \ldots, t_{n+1}$. Como $|v(t_j)| = \|v\| = d$, de (3.7) decorre que

$$2v(t_j) = v_1(t_j) + v_2(t_j) = 2d \text{ ou } -2d.$$

Mas $|v_1(t_j)| \leq \|v_1\| = d$; $|v_2(t_j)| \leq \|v_2\| = d$. Portanto, $v_1(t_j) = v_2(t_j) = d$ ou $-d$. Mas isso implica que $y_1 - y_2 = v_2 - v_1$ tem, no mínimo, $n+1$ zeros em $[a,b]$. Logo, pela condição de Haar, $y_1 - y_2 = 0$ e segue que $y_1 = y_2$.

b) Necessidade: Suponhamos que M não satisfaz a condição de Haar. Pela Proposição 3.2.4 existe uma base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de M e $t_1, \ldots, t_n$ em $[a,b]$ tais que o determinante (3.2) é nulo. Portanto, o sistema homogêneo

$$\gamma_1 y_k(t_1) + \gamma_2 y_k(t_2) + \ldots + \gamma_n y_k(t_n) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$

tem uma solução não trivial $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Para qualquer $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \in M$ temos

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j y(t_j) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k(t_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left[\sum_{j=1}^{n} \gamma_j y_k(t_j) \right] = 0. \tag{3.8}$$

Além disso, o sistema transposto

$$\beta_1 y_1(t_j) + \beta_2 y_2(t_j) + \ldots + \beta_n y_n(t_j) = 0, \quad (j = 1, \ldots, n)$$

também tem uma solução não trivial $\beta_1, \ldots, \beta_n$.

Definimos $y_0 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k$. Então $y_0 \neq 0$ e $y_0(t_j) = 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Sejam λ tal que $\|\lambda y_0\| \leq 1$, $z \in C([a,b]; \mathbb{R})$ com $\|z\| = 1$ e $z(t_j) = \text{sgn } \gamma_j$.

Definimos $x \in C([a,b]; \mathbb{R})$ por $x(t) = z(t)(1 - |\lambda y_0(t)|)$. Então,

$$x(t_j) = z(t_j)(1 - |\lambda y_0(t_j)|) = z(t_j) = \text{sgn } \gamma_j$$

e ainda $\|x\| = 1$.

Provaremos inicialmente que

$$\|x - y\| \geq 1, \quad \text{para todo } y \in M. \tag{3.9}$$

Com efeito, suponha que para algum $y' \in M$, $\|x - y'\| < 1$. Então as condições

$$x(t_j) = \text{sgn } \gamma_j = \pm 1, \quad |x(t_j) - y'(t_j)| \leq \|x - y'\| < 1$$

implicam que, para todo $\gamma_j \neq 0$, temos sgn $y'(t_j) =$ sgn $x(t_j) =$ sgn γ_j. Logo,

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j y'(t_j) > 0,$$

o que contradiz (3.8).

Por outro lado, para todo $\alpha \in [-1, 1]$ e todo $t \in [a, b]$ temos

$$\begin{aligned}
|x(t) - \alpha\lambda y_0(t)| &\leq |x(t)| + |\alpha\lambda y_0(t)| \\
&= |z(t)|(1 - |\lambda y_0(t)|) + |\alpha\lambda y_0(t)| \\
&\leq 1 - |\lambda y_0(t)| + |\alpha\lambda y_0(t)| \\
&= 1 - |\lambda y_0(t)| + |\alpha||\lambda y_0(t)| \\
&= 1 - (1 - |\alpha|)\lambda y_0(t)| \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Logo, $\|x - \alpha\lambda y_0\| \leq 1$. Consequentemente, $\|x - \alpha\lambda y_0\| = 1 = d(x, M)$ e x tem infinitos elementos de melhor aproximação em M, o que contradiz a hipótese. ∎

Corolário 3.2.8 *O subespaço $P_n([a, b]) \subset C([a, b]; I\!R)$ é um conjunto de Chebyshev.*

3.3 Conjuntos Aproximativamente Compactos

A noção de conjunto aproximativamente compacto foi introduzida por Efimov e Stechkin [7] e está relacionada à existência da melhor aproximação e a certas condições de continuidade da projeção métrica.

Definição 3.3.1 *Uma sequência $(y_n) \subset M$ é chamada minimizante para $x \in X$ se*

$$\|x - y_n\| \to d(x, M).$$

Definição 3.3.2 *Um conjunto $M \subset X$ é dito aproximativamente compacto se, para cada $x \in X$, toda sequência minimizante $(y_n) \subset M$ tem uma subsequência (y_{n_k}) que converge para um elemento de M.*

Denotamos por AC a classe dos subconjuntos aproximativamente compactos de X.

No que segue, também utilizamos as seguintes notações: B denota uma bola fechada em X e $\overset{\circ}{B}$ denota uma bola aberta em X.

Definição 3.3.3 *Um conjunto $M \subset X$ é dito limitadamente compacto se $M \cap B = \emptyset$ ou $M \cap B$ é compacto, para cada bola fechada B.*

Denotamos por BC a classe dos subconjuntos limitadamente compactos de X.

Dados $x \in X$, $\delta > 0$ e $M \subset X$, denotamos $P_{\delta,M}(x) = M \cap B[x, d(x, M) + \delta]$.

Definição 3.3.4 *Um conjunto $M \subset X$ é dito δ-compacto se, para cada $x \notin M$, existe $\delta > 0$ tal que $P_{\delta,M}(x)$ é compacto.*

Denotamos por δC a classe dos subconjuntos δ-compactos de X.

Definição 3.3.5 *Um conjunto $M \subset X$ é dito P-compacto se, para cada $x \in X$, $P_M(x)$ é não vazio e compacto.*

Exemplo 3.3.6 *Todo conjunto $M \subset X$ tal que $P_M(x)$ é um conjunto finito é P-compacto. Em particular, todo conjunto de Chebyshev é P-compacto.*

Observação 3.3.7 *Se C denota a classe dos subconjuntos compactos de X, então*

$$C \subset BC \subset \delta C \subset AC. \tag{3.10}$$

Definição 3.3.8 *$M \subset X$ é dito $\overset{\circ}{B}$-conexo se, para cada bola aberta $\overset{\circ}{B}$ a interseção $M \cap \overset{\circ}{B}$ é vazia ou conexa.*

Proposição 3.3.9 *Todo conjunto localmente compacto, P-compacto e $\overset{\circ}{B}$ - conexo $M \subset X$ é δ-compacto.*

Demonstração. Como M é P-compacto, M é um conjunto de existência e $P_M(x)$ é um subconjunto compacto do espaço localmente compacto M. Então, existe uma vizinhança compacta U de $P_M(x)$ em M. Seja ∂U a fronteira de U em M. Afirmamos que

$$d(x, \partial U) > d(x, M).$$

De fato, caso contrário, pela compacidade de ∂U existe $u \in \partial U$ tal que

$$\|x - u\| = d(x, \partial U) = d(x, M).$$

Portanto $u \in P_M(x)$, o que é impossível pois $P_M(x) \subset \overset{\circ}{U}$ e $\overset{\circ}{U} \cap \partial U = \emptyset$. Então, escolha $\delta > 0$ tal que

$$2\delta < d(x, \partial U) - d(x, M). \tag{3.11}$$

Por hipótese, $A = M \cap B(x, d(x, M) + \delta)$ é conexo e como $P_M(x) \subset A \cap U$ temos que $A \cap U \neq \emptyset$ e $A \cap \partial U = \emptyset$ (veja a desigualdade (3.11)). Afirmamos que $A \subset U$. De fato, como U é compacto, $\partial U = U \cap (\overset{\circ}{U})^C$. Sendo $A \cap \partial U = \emptyset$, segue que $A \subset (\partial U)^C$, ou seja, $A \subset U^C \cup \overset{\circ}{U}$. Então, $A \subset \overset{\circ}{U} \subset U$, pois $A \cap U \neq \emptyset$. Decorre daí que

$$P_{\delta,M}(x) = M \cap B[x, d(x, M) + \delta] \subset A \subset U.$$

Como $P_{\delta,M}(x)$ é um fechado e U é compacto, segue que $P_{\delta,M}(x)$ é compacto. Logo M é δ-compacto. ∎

Corolário 3.3.10 *Todo conjunto localmente compacto, P-compacto e $\overset{\circ}{B}$-conexo $M \subset X$ é aproximativamente compacto.*

Proposição 3.3.11 *Se uma sequência $(y_n) \subset M$ é minimizante para $x \in X$ e converge fracamente para $y \in M$, então $y \in P_M(x)$.*

Demonstração. Suponha $y_n \rightharpoonup y \in M$. Então, $y_n - x \rightharpoonup y - x$ e pelo Lema 1.6,

$$\|y - x\| \leq \underline{\lim} \|y_n - x\| = d(x, M).$$

Como $y \in M$, segue que $y \in P_M(x)$. ∎

Proposição 3.3.12 *Se $M \subset X$ é aproximativamente compacto então:*
a) *M é um conjunto de existência;*
b) *M é P-compacto.*

Demonstração.

a) Sejam $x \in X \setminus M$ e $d = d(x, M)$. Para cada n, existe $y_n \in M$ tal que

$$d \leq \|x - y_n\| < d + \frac{1}{n}.$$

Consequentemente, (y_n) é minimizante para x. Por hipótese, existem $y \in M$ e uma subsequência (y_{n_k}), tais que $y_{n_k} \to y$. Resulta daí que

$$\|x - y\| \leq \|x - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - y\| \leq d$$

e assim, $y \in P_M(x)$.

b) Por a) $P_M(x)$ é não vazio, para todo $x \in X$. Se $(y_n) \subset P_M(x)$ então $y_n \in M$ e $\|x - y_n\| = d(x, M)$, ou seja, (y_n) é minimizante para x. Então existe (y_{n_k}) tal que $y_{n_k} \to y \in M$. Pela Proposição 3.3.11, $y \in P_M(x)$ e portanto, $P_M(x)$ é compacto. ■

3.4 Continuidade da Projeção Métrica

Algumas propriedades geométricas de subconjuntos de um espaço normado estão relacionadas a certas condições de continuidade da projeção métrica associada. (Veja Wulbert [16]).

Definição 3.4.1 *Sejam E e F dois conjuntos e 2^F o conjunto de todos os subconjuntos de F. Uma aplicação $\varphi : E \longrightarrow 2^F$ é chamada aplicação multivalente.*

Definição 3.4.2 *Sejam E e F dois espaços topológicos. A aplicação $\varphi : E \longrightarrow 2^F$ é chamada semicontínua superiormente [inferiormente] se o conjunto $\{x \in E;\ \varphi(x) \subset G\}$ é aberto [fechado] em E, para cada aberto [fechado] G em F.*

Observação 3.4.3 *Se $\varphi(x)$ é unitário, para cada $x \in E$, então as definições de semi-continuidade superior e inferior coincidem com a definição usual de continuidade.*

Definição 3.4.4 *Sejam X um espaço normado e $M \subset X$. A aplicação multivalente*

$$\begin{array}{rccc} P_M : & X & \longrightarrow & 2^M \\ & x & \longmapsto & P_M(x) \end{array}$$

é chamada projeção métrica.

Proposição 3.4.5 *Se $M \subset X$ é um conjunto aproximativamente compacto, então P_M é semicontínua superiormente.*

Demonstração. Seja G um aberto em M. Suponha, por absurdo, que

$$A = \{x \in X;\ P_M(x) \subset G\}$$

não é aberto em X. Então existe $x \in X$ tal que $P_M(x) \subset G$ e, para todo $r > 0$ temos $B(x, r) \not\subset A$. Portanto, para cada $n \geq 1$ existe $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ tal que $x_n \notin A$. Assim, $P_M(x_n) \not\subset G$. Então, $x_n \to x$ e existe $y_n \in P_M(x_n)$ tal que $y_n \notin G$. Pelo Lema 1.8, temos

$$\begin{aligned} d(x, M) \leq \|x - y_n\| &\leq \|x - x_n\| + \|x_n - y_n\| \\ &= \|x - x_n\| + d(x_n, M) \\ &\leq \|x - x_n\| + \|x - x_n\| + d(x, M) \\ &= 2\|x - x_n\| + d(x, M). \end{aligned}$$

Segue que $\|x - y_n\| \to d(x, M)$ e (y_n) é uma sequência minimizante para x. Então existe uma subsequência (y_{n_k}) tal que $y_{n_k} \to y \in M$ e, pela Proposição 3.3.11, $y \in P_M(x)$. Logo, $y \in G$. Assim, existe k_0 tal que $y_{n_k} \in G$, para todo $k \geq k_0$, o que é uma contradição. Portanto P_M é semicontínua superiormente. ∎

Corolário 3.4.6 *Se $M \subset X$ é um conjunto de Chebyshev aproximativamente compacto, então P_M é contínua.*

Demonstração. Segue da Observação 3.4.3. ∎

Corolário 3.4.7 *Se $M \subset X$ é um conjunto compacto, limitadamente compacto ou δ-compacto, então P_M é semicontínua superiormente.*

Demonstração. Segue da Observação 3.3.7. ∎

Corolário 3.4.8 *Se $M \subset X$ é um conjunto localmente compacto, P-compacto e $\mathring{B}$-conexo então P_M é semicontínua superiormente.*

Demonstração. Segue da Proposição 3.3.9 e do corolário anterior. ∎

Capítulo 4

Propriedades dos Conjuntos de Existência

Neste capítulo apresentamos alguns resultados sobre a estrutura dos conjuntos de Chebyshev. Não se sabe, por exemplo, se todo conjunto de Chebyshev em um espaço de Hilbert é convexo. Entretanto, o resultado é verdadeiro se admitirmos algumas restrições a estes conjuntos, tais como compacidade local e continuidade da projeção métrica associada.

4.1 Os conjuntos T_M e T'_M

Nesta seção utilizamos as seguintes notações: (Veja Vlasov [13])

$$T_M = \{x \in X : \ P_M(x) \text{ é unitário}\}$$

$$D_M(x) = \lim_{\delta \to 0^+} D(\ P_{\delta,M}(x)\ )$$

$$T'_M = \{x \in X : \ D_M(x) = 0\}$$

Proposição 4.1.1 *Sejam X um espaço de Banach e $M \subset X$ um conjunto fechado. Então:*

i) $M \subset T'_M \subset T_M$;

ii) $[x, P_M(x)] \subset T'_M$, para todo $x \in T'_M$.

Demonstração.

i) Seja $x \in M$. Então, $P_{\delta,M}(x) = M \cap B[x, d(x,M) + \delta] = M \cap B[x, \delta]$. Assim, para $y,\ z \in P_{\delta,M}(x)$ temos $y,\ z \in M$ e $y,\ z \in B[x,\delta]$. Logo,

$$\|y - z\| \leq \|y - x\| + \|x - z\| \leq \delta + \delta = 2\delta.$$

Então, $D(P_{\delta,M}(x)) \leq 2\delta$. Fazendo $\delta \to 0^+$ segue que $D_M(x) = 0$. Portanto, $M \subset T'_M$.

Agora, suponha $x \in T'_M$. Para $\delta = \dfrac{1}{n}$ temos $P_{\frac{1}{n},M}(x) = M \cap B\left[x, d(x,M) + \frac{1}{n}\right]$. Além disso, valem as seguintes propriedades:

a) $P_{\frac{1}{n},M}(x)$ é fechado.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} D(P_{\frac{1}{n},M}(x)) = 0$ por hipótese.

c) $P_{\frac{1}{n},M}(x) \supset P_{\frac{1}{n+1},M}(x)$ para todo n. De fato, seja $y \in P_{\frac{1}{n+1},M}(x)$. Então, $y \in M$ e

$$\|x - y\| \leq d(x,M) + \frac{1}{n+1} \leq d(x,M) + \frac{1}{n}, \quad \forall\ n.$$

Logo, $y \in M \cap B\left[x, d(x,M) + \dfrac{1}{n}\right] = P_{\frac{1}{n},M}(x)$.

d) $P_{\frac{1}{n},M}(x) \neq \emptyset$ para todo n pois, dado $y \in M$, segue-se que $\|x - y\| \leq d(x,M) + \dfrac{1}{n}$.

Em vista das propriedades acima, a Proposição 1.2 nos garante que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} P_{\frac{1}{n},M}(x) = \{y_0\}.$$

Então, $y_0 \in M$ e $\|x - y_0\| \leq d(x,M) + \dfrac{1}{n}$ para todo n. Fazendo $n \to \infty$ segue que $y_0 \in P_M(x)$. Logo $x \in T_M$.

ii) Se $x \in T'_M$ então $P_M(x) = \{y\}$, pois por i), $T'_M \subset T_M$. Assim, dado $z \in [x,y]$ temos $\|z - x\| + \|z - y\| = \|x - y\|$ e pela Proposição 3.1.5, $y \in P_M(z)$. Além disso,

$$P_{\delta,M}(z) \subset P_{\delta,M}(x). \tag{4.1}$$

Com efeito, se $w \in P_{\delta,M}(z)$ então $w \in M$, $\|w - z\| \leq d(z,M) + \delta$ e

$$\begin{aligned}
\|w - x\| \leq \|w - z\| + \|z - x\| \quad &\leq d(z,M) + \delta + \|z - x\| \\
&= \|z - y\| + \|z - x\| + \delta \\
&= \|x - y\| + \delta \\
&= d(x,M) + \delta.
\end{aligned}$$

Logo, $w \in B[x, d(x,M) + \delta]$. Segue daí que $w \in P_{\delta,M}(x)$.

Vamos mostrar que $z \in T'_M$, ou seja, $D_M(z) = 0$. Suponha que $D_M(z) > 0$. Por (4.1) segue que

$$D(P_{\delta,M}(z)) \leq D(P_{\delta,M}(x)).$$

Logo,

$$0 < D_M(z) = \lim_{\delta \to 0^+} D(P_{\delta,M}(z)) \leq \lim_{\delta \to 0^+} D(P_{\delta,M}(x)) = D_M(x).$$

que é uma contradição, pois como $x \in T'_M$, temos $D_M(x) = 0$. ∎

Teorema 4.1.2 *Seja M um conjunto fechado e não vazio de um espaço de Banach X uniformemente convexo. Então, cada um dos conjuntos T_M e T'_M é o complementar de um conjunto de primeira categoria. Em particular, T_M e T'_M são densos em X.*

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$ e $F_\epsilon = \{x \in X;\ D_M(x) \geq \epsilon\}$. Afirmamos que F_ϵ é fechado. De fato, seja $(x_n) \subset F_\epsilon$ tal que $x_n \to x$. Então $D_M(x_n) \geq \epsilon$ e existe n_0 tal que $\|x_n - x\| < \dfrac{\delta}{4}$ para todo $n \geq n_0$. Além disso, $P_{\eta,M}(x_n) \subset P_{\delta,M}(x)$ para $\eta < \dfrac{\delta}{4}$ e $\|x_n - x\| < \dfrac{\delta}{4}$. Com efeito, seja $x' \in P_{\eta,M}(x_n)$. Então, $x' \in M$ e

$$\begin{aligned} \|x' - x\| \leq \|x' - x_n\| + \|x_n - x\| &\leq d(x_n, M) + \eta + \frac{\delta}{4} \\ &< d(x_n, M) + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} \qquad (4.2) \\ &= d(x_n, M) + \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para todo $y \in M$ temos

$$d(x_n, M) \leq \|x_n - y\| \leq \|x_n - x\| + \|x - y\| < \frac{\delta}{4} + \|x - y\|.$$

Então, $d(x_n, M) - \dfrac{\delta}{4} \leq d(x, M)$, ou seja, $d(x_n, M) \leq d(x, M) + \dfrac{\delta}{4}$. Voltando em (4.2) segue que $\|x' - x\| \leq d(x_n, M) + \dfrac{\delta}{2} \leq d(x, M) + \dfrac{\delta}{4} + \dfrac{\delta}{2} < d(x, M) + \delta$. Logo, $x' \in P_{\delta,M}(x)$ como queríamos. Consequentemente,

$$D(P_{\delta,M}(x)) \geq D(P_{\eta,M}(x_n)) \geq \lim_{\eta \to 0^+} D(P_{\eta,M}(x_n)) = D_M(x_n) \geq \epsilon, \quad \text{para todo } \delta > 0.$$

Decorre daí que $D_M(x) \geq \epsilon$ e então $x \in F_\epsilon$. Logo F_ϵ é fechado.

Agora mostraremos que $\overset{\circ}{F_\epsilon} = \emptyset$. Suponha que $\overset{\circ}{F_\epsilon} \neq \emptyset$. Então existe $h > 0$ tal que $B(x,h) \subset F_\epsilon$. Mas isso implica que $B[x,h] \subset F_\epsilon$, pois F_ϵ é fechado. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x = 0$ e $d(x, M) = 1 > h$. Pela Proposição 2.3.3 existe um $\delta > 0$ tal que $D(B[z, 1-h+2\delta] \setminus B(0,1)) < \epsilon$, para qualquer $y \in S(0,1)$ e $z = hy$. Como $d(0, M) = 1$, existe $y_1 \in M$ tal que $\|y_1\| \leq 1 + \delta$. Seja $y = \dfrac{y_1}{\|y_1\|}$. Como $z \in [0, y_1]$ segue que

$$\|z - y_1\| = \|y_1\| - \|z\| \leq 1 + \delta - h.$$

Além disso, para $u \in P_{\delta,M}(z)$ temos $u \in M$ e

$$\|z - u\| \leq d(z, M) + \delta \leq \|z - y_1\| + \delta \leq 1 - h + 2\delta.$$

Logo, $u \in B[z, 1-h+2\delta]$ e $u \notin B(0,1)$ pois $u \in M$ e $1 = d(0, M) \leq \|u\|$. Decorre daí que

$$P_{\delta,M}(z) \subset B[z, 1-h+2\delta] \setminus B(0,1).$$

Consequentemente,

$$D(P_{\delta,M}(z)) \leq D(B[z, 1-h+2\delta] \setminus B(0,1)) < \epsilon.$$

Então,

$$D_M(z) \leq D(P_{\delta,M}(z)) \leq D(B[z, 1-h+2\delta] \setminus B(0,1)) < \epsilon,$$

o que contradiz o fato de $z \in B[x,h] \subset F_\epsilon$. Portanto, $\overset{\circ}{F_\epsilon} = \emptyset$.

Assim, o conjunto

$$\{x;\ D_M(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$$

é de primeira categoria e

$$T'_M = \{x \in X;\ D_M(x) = 0\} = \{x \in X;\ D_M(x) > 0\}^C$$

como queríamos. Além disso, como

$$T'_M = \{x \in X;\ D_M(x) > 0\}^C \subset T_M$$

segue que

$${T_M}^C \subset \{x \in X;\ D_M(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}.$$

Logo,

$$T_M{}^C = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}} \cap T_M{}^C,$$

é também um conjunto de primeira categoria, ou seja, T_M é o complementar de um conjunto de primeira categoria.

Como X é um espaço de Baire segue que $T_M'{}^C = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$ tem interior vazio. Pelo Lema 1.7, T_M' é denso em X. Analogamente, T_M é denso em X. ■

4.2 Conexidade

Nesta seção estudamos a conexidade dos conjuntos de Chebyshev em espaços de Hilbert.

Definição 4.2.1 *$M \subset X$ é dito B-conexo se, para cada bola fechada B, a interseção $M \cap B$ é vazia ou conexa.*

Proposição 4.2.2 *Todo conjunto B-conexo $M \subset X$ é $\overset{\circ}{B}$ - conexo. Além disso, todo $\overset{\circ}{B}$-conexo é conexo e localmente conexo.*

Demonstração. Seja M um conjunto B-conexo. Observe que, para qualquer bola aberta $B(x, r)$ temos

$$B(x,r) \cap M = \bigcup_{n=1}^{\infty} B\left[x, \frac{n}{n+1}r\right] \cap M.$$

Se $B\left[x, \frac{n}{n+1}r\right] \cap M = \emptyset$ para todo n, o resultado segue trivialmente. Se, para algum n_0, $B\left[x, \frac{n_0}{n_0+1}r\right] \cap M \neq \emptyset$ temos que $B\left[x, \frac{n}{n+1}r\right] \cap M$ é não vazio e conexo, para todo $n \geq n_0$. Segue que M é $\overset{\circ}{B}$-conexo.

Agora suponha que M é $\overset{\circ}{B}$-conexo. Escrevendo $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0,n) \cap M$, como

$$B(0, n_0) \cap M \neq \emptyset$$

para algum n_0, então $B(0,n) \cap M$ é não vazio e conexo, para todo $n \geq n_0$. Logo, M é conexo.

Afirmamos ainda que M é localmente conexo. Isto segue do fato que, para cada $x \in M$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x,\epsilon) \cap M$ é conexo. ■

Definição 4.2.3 *Um conjunto $M \subset X$ é dito P-conexo se, para cada $x \in X$, $P_M(x)$ é não vazio e conexo.*

Teorema 4.2.4 *Todo conjunto P-conexo $M \subset X$ com projeção métrica semicontínua superiormente é $\overset{\circ}{B}$-conexo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo que M não é $\overset{\circ}{B}$-conexo. Então existe uma bola aberta $\overset{\circ}{B}= B(x,r)$ tal que $\overset{\circ}{B} \cap M$ é desconexo e não vazio, ou seja, $\overset{\circ}{B} \cap M = C \cup D$, onde C e D são não vazios, disjuntos e abertos em M. Entretanto, para $y \in C \cup D = \overset{\circ}{B} \cap M$ temos $\|y - x\| < r$ e $y \in M$. Logo,

$$d(x, M) \leq d(x, \overset{\circ}{B} \cap M) < r.$$

Segue daí que $P_M(x) \subset \overset{\circ}{B} \cap M = C \cup D$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $P_M(x) \subset C$.

Sejam $d \in D$, $z \in [x,d]$ e $z' \in P_M(z)$ (tal z' existe devido a M ser P-conexo). Então,

$$\|x - z'\| \leq \|x - z\| + \|z - z'\| \leq \|x - z\| + \|z - d\| = \|x - d\| < r.$$

Logo, $P_M(z) \subset \overset{\circ}{B}$. Mais precisamente, $P_M(z) \subset \overset{\circ}{B} \cap M = C \cup D$, para todo $z \in [x,d]$. Além disso, como a restrição da projeção métrica P_M ao intervalo $[x,d]$, é semicontínua superiormente, os conjuntos disjuntos

$$C' = \{z \in [x,d] : \ P_M(z) \subset C\}, \quad D' = \{z \in [x,d] : \ P_M(z) \subset D\}$$

são abertos em $[x,d]$. Afirmamos que C' e D' são não vazios. De fato, $P_M(x) \subset C$ e como $d \in P_M(d)$, segue que $P_M(d)$ não pode estar contido em C' pois, caso contrário, temos $d \in C$, que é um absurdo já que $C \cup D = \emptyset$.

Desta maneira, segue da P-conexidade de M que $[x,d] = C' \cup D'$. Mas isso contradiz a conexidade de $[x,d]$. ■

Teorema 4.2.5 *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Todo conjunto P-conexo $M \subset X$ é B-conexo.*

Demonstração. Suponhamos que M é P-conexo, mas não é B-conexo, isto é, existe uma bola fechada $B = B[x, r]$ tal que $B \cap M = C \cup D$, onde C e D são conjuntos não vazios, fechados e disjuntos. Afirmamos inicialmente que

$$P_M(x) \subset B \cap M. \tag{4.3}$$

De fato, como $B \cap M \neq \emptyset$, para $w \in B \cap M$, temos $\|x - w\| \leq r$. Logo, $d(x, B \cap M) \leq r$. Assim, se $y \in P_M(x)$ temos $y \in M$ e

$$\|x - y\| = d(x, M) \leq d(x, B \cap M) \leq r.$$

Portanto, $y \in B \cap M$.

Vamos dividir a demonstração em duas partes.

Na parte I, mostramos que é possível considerar apenas o caso em que $B[x, r] \cap M = C \cup D$ com $d(x, C) = d(x, D) < r$ e $\rho(C, D) > 0$, onde $\rho(C, D) = \inf\{d(x, D);\ x \in C\}$.

Na parte II, apresentamos a demonstração para este caso, que chamamos de caso básico.

- **Parte I**

Temos as seguintes possibilidades:

$$\textbf{1)}\ d(x, C) = d(x, D) = r, \qquad \textbf{2)}\ 0 \leq d(x, C) < d(x, D) = r,$$

$$\textbf{3)}\ 0 \leq d(x, C) < d(x, D) < r, \qquad \textbf{4)}\ d(x, C) = d(x, D) < r.$$

1) $d(x, C) = d(x, D) = r$. Neste caso, $d(x, M) = r$. De fato, já que $D \subset M$ temos $d(x, M) \leq d(x, D)$. Suponha que $d(x, M) < d(x, D)$. Então, existe $y \in M$ tal que

$$\|x - y\| = d(x, M) < d(x, D) = r. \tag{4.4}$$

Por (4.3) segue que $y \in C$ ou $y \in D$. Por (4.4) $y \notin D$. Logo, $y \in C$ e temos $\|x - y\| < d(x, D) = d(x, C)$ que é um absurdo. Portanto, $d(x, M) = r$.

Além disso, para $c \in C$ temos $\|x - c\| \leq r = d(x, C)$ e decorre daí que $c \in P_C(x)$. Logo, $C \subset P_C(x)$ e, consequentemente, $P_C(x) = C$. Analogamente, $P_D(x) = D$.

Para finalizar este caso afirmamos que

$$P_M(x) = P_C(x) \cup P_D(x). \tag{4.5}$$

De fato,

i) $P_M(x) \subset C \cup D = P_C(x) \cup P_D(x)$.

ii) Se $y \in P_C(x) \cup P_D(x)$ então $y \in P_C(x)$ ou $y \in P_D(x)$. Se $y \in P_C(x)$ segue que $y \in C \subset M$ e $\|x - y\| = d(x, C) = d(x, M)$. Logo, $y \in P_M(x)$. Analogamente para $y \in P_D(x)$. Portanto, $P_C(x) \cup P_D(x) \subset P_M(x)$.

Mas, (4.5) contradiz a P-conexidade de M. Logo, este caso não pode ocorrer.

2) $0 \leq d(x, C) < d(x, D) = r$. Observe inicialmente que se existe $d \in D \cap \overset{\circ}{B}$ temos $\|x - d\| < r = d(x, D)$, o que é um absurdo. Como $D \subset B$ temos então

$$D \subset B \setminus \overset{\circ}{B}\,. \tag{4.6}$$

Decorre daí que $D = P_D(x)$.

Seja $y \in D$. Afirmamos que existe $z \in [x, y]$ tal que $d(z, C) = d(z, D) = \|z - y\| < r$. De fato, note que a função contínua

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & I\!R \\ & w & \longmapsto & d(w, C) - d(w, D) \end{array}$$

muda de sinal em $[\,x, y\,]$ pois, $f(x) = d(x, C) - d(x, D) < 0$, por hipótese, e $f(y) = d(y, C) - d(y, D) > 0$, desde que $y \notin C$ e C é fechado. Seja $\epsilon > 0$ tal que $\rho(\,C, B[y, \epsilon]\,) > 0$. Pela Proposição 2.3.3, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $B_1 = B[z, \|z - y\| + \delta]$ temos

$$D(B_1 \setminus \overset{\circ}{B}) < \epsilon. \tag{4.7}$$

Sejam $C_1 = B_1 \cap C$ e $D_1 = (B_1 \setminus \overset{\circ}{B}) \cap M$. Como D_1 e C_1 são não vazios, fechados e $y \in D_1$, por (4.7) temos $D_1 \subset B[y, \epsilon]$ e $\rho(C_1, D_1) \geq \rho(C, D_1) \geq \rho(C, B[y, \epsilon]) > 0$. Logo, $C_1 \cap D_1 = \emptyset$.

Afirmamos que $B_1 \cap M = C_1 \cup D_1$. De fato, $C_1 \cup D_1 \subset B_1 \cap M$ claramente. Assim, é suficiente provar que se $v \in B_1 \cap M$, $v \notin D_1$ então $v \in C_1$. Mas, $v \notin D_1$ implica que $v \in \overset{\circ}{B}$. Logo, $v \in M \cap \overset{\circ}{B} \subset M \cap B = C \cup D$. Como $D \subset B \setminus \overset{\circ}{B}$, segue que $v \in C$. Portanto, $v \in C_1$.

Falta provar que $d(z, C_1) = d(z, D_1)$. Para isso basta mostrar que

$$d(z, C) = d(z, C_1) \ \text{ e } \ d(z, D) = d(z, D_1) \tag{4.8}$$

Com efeito, como $C_1 \subset C$ temos $d(z, C) \leq d(z, C_1)$. Suponha que $d(z, C) < d(z, C_1)$. Então existe $c \in C \setminus C_1$ tal que $\|z - c\| < d(z, C_1)$. Como $c \notin B_1$ segue que $\|z - c\| > d(z, C) + \delta$. Então temos $d(z, C) + \delta < \|z - c\| < d(z, C_1)$. Mas isso é uma contradição, já que para todo $c_1 \in C_1$, temos $\|z - c_1\| \leq d(z, C) + \delta$, pois $C_1 \subset B_1$. Logo, $d(z, C) = d(z, C_1)$.

Por outro lado, como $y \in D_1$, temos $d(z, D_1) \leq \|z - y\| = d(z, D)$. Suponha que $d(z, D_1) < d(z, D)$. Então existe $d_1 \in D_1$, $d_1 \notin D$ tal que $\|z - d_1\| < d(z, D)$. Se $d_1 \in B$, como $d_1 \in C \cup D$ e $d_1 \notin D$, segue que $d_1 \in C$. Daí, $\|z - d_1\| < d(z, D) = d(z, C)$, que é um absurdo. Logo $d_1 \notin B$. Considere a bola $B' = B[z, \|z - y\|]$. Segue do Lema 1.11 que $B' \subset B$ e como $d_1 \notin B$, temos que $d_1 \notin B'$. Logo, $\|z - d_1\| > \|z - y\| = d(z, D)$, o que é uma contradição. Logo, $d(z, D) = d(z, D_1)$.

Assim, reduzimos o caso **2**) ao caso básico, com $d(z, C_1) = d(z, D_1)$ e $\rho(C_1, D_1) > 0$.

3) $0 \leq d(x, C) < d(x, D) < r$. Considere a função contínua

$$\begin{aligned} h: \ X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto d(w, D) - d(w, C). \end{aligned}$$

Por hipótese, $h(x) > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $3\delta < r - d(x, D)$ e, para todo $z \in B[x, \delta]$ temos $h(z) > 0$, ou seja, $d(z, D) > d(z, C)$. Além disso, afirmamos que para todo $z \in B[x, \delta]$,

$$B[z, d(z, D) + \delta] \subset B[x, r]. \tag{4.9}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|x - z\| \leq \delta \leq r - d(x, D) - 2\delta &\leq r - (d(z, D) - \|z - x\|) - 2\delta \\ &= r - d(z, D) + \|z - x\| - 2\delta \\ &\leq r - (d(z, D) + \delta), \end{aligned}$$

e o resultado segue do Lema 1.11.

Pelo Teorema 4.1.2, T'_D é denso em X. Logo, existe $z \in T'_D \cap B[x, \delta]$. Como a função h muda de sinal em $[z, z']$ onde $z' = P_D(z)$, existe $x_1 \in [z, z']$ tal que $d(x_1, C) = d(x_1, D)$. Como C é fechado e $z' \notin C$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\rho(C, B[z', \epsilon]) > 0$. Como $z' = P_D(z)$, a Proposição 3.1.5 garante que $z' \in P_D(x_1)$. Assim, $\|x_1 - z'\| = d(x_1, D)$ e portanto $z' \in D \cap B[x_1, d(x_1, D) + \alpha]$, para todo $\alpha > 0$. Pela Proposição 4.1.1, $x_1 \in T'_D$ e então existe $0 < \delta' < \delta$ tal que

$$P_{\delta', D}(x_1) = D \cap B[x_1, d(x_1, D) + \delta'] \subset B[z', \epsilon].$$

Sejam $C_1 = P_{\delta',C}(x_1)$ e $D_1 = P_{\delta',D}(x_1)$. Obviamente C_1 e D_1 são não vazios e fechados. Como $\rho(C_1, D_1) \geq \rho(C, D_1) \geq \rho(C, B[z', \epsilon]) > 0$, segue que $C_1 \cap D_1 = \emptyset$.

Note que $B_1 = B[x_1, \|x_1 - z'\| + \delta'] \subset B[z, \|z - z'\| + \delta] \subset B[x, r]$. De fato,

$$\|z - x_1\| \leq \|z - z'\| + \delta - (\|x_1 - z'\| + \delta') = \|z - x_1\| + \delta - \delta'$$

e o resultado segue do Lema 1.11.

Afirmamos ainda que $B_1 \cap M = C_1 \cup D_1$. Com efeito, $C_1 \cup D_1 \subset B_1 \cap M$ claramente. Assim, é suficiente mostrar que, se $v \in B_1 \cap M$, $v \notin D_1$ então $v \in C_1$. Mas $v \notin D_1$ implica que $v \notin D$. Como $B_1 \subset B[x, r]$ temos que $B_1 \cap M \subset B[x, r] \cap M = C \cup D$. Então $v \in C$ e, consequentemente, $v \in P_{\delta',C}(x_1) = C_1$.

Finalmente, $d(x_1, C) = d(x_1, C_1)$ e $d(x_1, D) = d(x_1, D_1)$. A prova destas afirmações é análoga à prova da primeira igualdade de (4.8). Desta maneira, o caso **3**) está reduzido ao caso básico, com $d(x_1, C_1) = d(x_1, D_1)$ e $\rho(C_1, D_1) > 0$.

4) $d(x, C) = d(x, D) < r$. Afirmamos inicialmente que $d(x, C) > 0$. De fato, pois se $d(x, C) = 0$, então existe uma sequência $(c_n) \subset C$ tal que $\|x - c_n\| \to 0$ e como C é fechado, segue-se que $x \in C$. Analogamente, $x \in D$. Absurdo, já que $C \cap D = \emptyset$.

Considere, agora, a função contínua

$$\begin{array}{rccl} g: & X & \longrightarrow & I\!R \\ & x' & \longmapsto & r - d(x', D). \end{array}$$

Como $g(x) > 0$, analogamente ao caso **3**), para $\delta > 0$ tal que $3\delta < r - d(x, D)$ temos $g(z) > 0$, para todo $z \in B[x, \delta]$. Note ainda que para todo $z \in B[x, \delta]$ temos

$$. \, B[z, d(z, D) + \delta] \subset B[x, r].$$

Pelo Teorema 4.1.2 existe $z \in B[x, \delta] \cap T'_C \cap T'_D$. Nestas condições, há duas possibilidades:

a) $d(z, C) = d(z, D)$. Então $P_M(z) = P_C(z) \cup P_D(z)$, o que contraria a P-conexidade de M.

b) $d(z, C) \neq d(z, D)$. Este é o caso anterior, comutando C e D, se necessário.

- **Parte II**

Voltamos agora à demonstração do teorema, para o caso básico. Nessas condições afirmamos que:

$$\begin{cases} \text{dado } d_n \in D \text{ com } \|x - d_n\| \to d(x, D) := H, \\ \text{para todo } 0 < h < H \text{ e} \\ z_n \in [x, d_n] \text{ tal que } \|z_n - x\| = h \text{ temos} \\ \overline{\lim} d(z_n, D) \leq H - h < \underline{\lim} d(z_n, C) \end{cases} \tag{4.10}$$

De fato, escolhemos $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < \rho(C, D)$ e encontramos $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que, pela Proposição 2.3.3, temos $D(B_1 \setminus \overset{\circ}{B}) < \epsilon$, onde

$$B_1 = B[z_n, \|z_n - y_n\| + \delta], \ y_n \in [x, d_n], \ \|x - y_n\| = H \text{ e } \overset{\circ}{B} = B(x, H).$$

Como

$$d(z_n, D) \leq \|z_n - d_n\| = \|x - d_n\| - \|x - z_n\| = \|x - d_n\| - h \to H - h,$$

temos que $\overline{\lim} d(z_n, D) \leq H - h$.

Por outro lado, suponha que $\underline{\lim} d(z_n, C) \leq H - h$. Então existe $a_n \in C$ tal que $\|z_n - a_n\| \leq H - h + \delta$ para todo $n > n_0$ e $\|x - a_n\| \geq d(x, C) = H$. Resulta daí que $a_n \notin B(x, H) = \overset{\circ}{B}$. Observe ainda que $a_n \in B_1$, pois

$$\|z_n - a_n\| \leq H - h + \delta = \|y_n - x\| - \|x - z_n\| + \delta \leq \|y_n - z_n\| + \delta.$$

Portanto, $a_n \in B_1 \setminus \overset{\circ}{B}$. Como também $d_n \in B_1 \setminus \overset{\circ}{B}$ para todo $n > n_1 > n_0$, temos

$$\|a_n - d_n\| \leq D(B_1 \setminus \overset{\circ}{B}) < \epsilon < \rho(C, D)$$

para todo $n \geq n_1$, que é claramente uma contradição.

Afirmamos que (4.10) implica na seguinte propriedade:

$$\begin{cases} \text{Se } d(x, C) = d(x, D) > 0 \text{ com } \rho(C, D) > 0, \text{ então existe} \\ w_j \in T'_C \text{ tal que } w_j \to x \text{ e } d(w_j, D) < d(w_j, C) \end{cases} \tag{4.11}$$

De fato, considere a função contínua definida por $f(y) = d(y, C) - d(y, D)$. Por (4.10) $f(z_n) > 0$ para $z_n \in [x, d_n]$ e $\|z_n - x\| = h$. Então existe $r > 0$ tal que $f(B(z_n, r)) > 0$.

Portanto, $B(z_n, r) \cap B(x, h) \neq \emptyset$. Mais precisamente, existe $w \in B(z_n, r) \cap B(x, h)$ tal que $d(w, D) < d(w, C)$. Além disso, como o conjunto $\{z \in X;\ d(z, D) < d(z, C)\}$ é aberto e, pelo Teorema 4.1.2 T'_C é denso em X, podemos supor $w \in T'_C$.

Portanto, pela construção acima, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $w_j \in T'_C$ tal que

$$w_j \in B(x, \frac{1}{j}) \text{ e } d(w_j, D) < d(w_j, C)$$

como queríamos.

Continuando a nossa demonstração, se $d(z, C) = d(z, D) > 0$, $\rho(C, D) > 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in B[x, \delta]$, $B[z, d(z, D) + \delta] \subset B[x, r]$. Mas isso implica que $B[z, d(z, D) + \delta] \cap M \subset B[x, r] \cap M = C \cup D$. Como $D \subset M$ temos $d(z, M) + \delta \leq d(z, D) + \delta$. Então $B[z, d(z, M) + \delta] \cap M \subset B[z, d(z, D) + \delta] \cap M \subset C \cup D$, isto é, $P_{\delta, M}(z) \subset C \cup D$. Consequentemente,

$$P_M(z) \subset C \cup D.$$

Considere agora

$$Q = \{z \in \dot{B}[x, \delta];\ d(z, C) = d(z, B)\} \ e \ F_\epsilon = \{z \in X;\ D_C(z) \geq \epsilon\}.$$

Vamos mostrar que $Q \cap F_\epsilon$ tem interior vazio em Q. Supondo o contrário, existe $x' \in (Q \cap F_\epsilon)^\circ = \overset{\circ}{Q} \cap \overset{\circ}{F_\epsilon}$ em Q. Logo, existe $h > 0$ tal que $B(x', h) \cap Q \subset Q \cap F_\epsilon \subset F_\epsilon$. Afirmamos que existe uma bola $B' = B[x', r'] \subset B[x, \delta]$ tal que $B' \cap Q \subset F_\epsilon$. De fato, como F_ϵ é fechado (veja a prova do Teorema 4.1.2), $\overline{B(x', h) \cap Q} \subset F_\epsilon$. Tomando $0 < \epsilon < h$, podemos considerar $\overline{B(x', \epsilon)} \subset B(x', h)$. Então, $\overline{B(x', \epsilon)} \cap Q \subset B(x', h) \cap Q$. Sendo Q fechado, segue que

$$B[x', \epsilon] \cap Q = \overline{B(x', \epsilon)} \cap Q \subset \overline{B(x', h) \cap Q} \subset F_\epsilon. \tag{4.12}$$

Por outro lado, como $x' \in \overset{\circ}{Q}$, existe $r > 0$ tal que $B(x', r) \subset Q$.

Tomando $r' = \min\{r, \epsilon\}$ temos $B(x', r') \subset B(x', \epsilon)$. Disto e de (4.12) segue que

$$B[x', r'] \cap Q = \overline{B(x', r')} \cap Q \subset \overline{B(x', \epsilon)} \cap Q = B[x', \epsilon] \cap Q \subset F_\epsilon.$$

Além disso, como Q é fechado, $B(x', r') \subset Q$ e $Q \subset B[x, \delta]$, temos $B[x', r'] \subset B[x, \delta]$. Logo, tomando $B' = B[x', r']$ temos o que queríamos.

Continuando, como $d(x', C) = d(x', D)$ podemos aplicar (4.11) para x'. Então existe $x_n \in T'_C$ tal que $x_n \to x'$ e

$$d(x_n, D) < d(x_n, C). \tag{4.13}$$

Sejam $0 < h < \frac{r'}{2} < r'$, $z_n \in [x', a_n]$, $\|z_n - x'\| = h$ onde

$$a_n = P_C(x_n), \ z'_n \in [x_n, a_n], \ \ \|z'_n - x_n\| = h.$$

Então, $\|z'_n - z_n\| \to 0$ e $\|z'_n - z_n\| < h$ para todo $n \geq n_0$. Com efeito, para $t_n, \ s_n \in [0, 1]$ temos

$$z'_n = (1 - t_n)x_n + t_n a_n \ \text{ e } \ z_n = (1 - s_n)x' + s_n a_n,$$

que implica em

$$z'_n - x_n = t_n(a_n - x_n) \ \text{ e } \ z_n - x' = s_n(a_n - x').$$

Logo,

$$\|z'_n - x_n\| = t_n\|a_n - x_n\| \ \text{ e } \ \|z_n - x'\| = s_n\|a_n - x'\|,$$

ou seja,

$$h = t_n\|a_n - x_n\| \ \text{ e } \ h = s_n\|a_n - x'\|.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} z'_n - z_n &= (1 - t_n)x_n + t_n a_n - (1 - s_n)x' - s_n a_n \\ &= (x_n - x') - t_n x_n + t_n a_n + s_n x' - s_n a_n \\ &= (x_n - x') - t_n x_n + t_n x' - t_n x' + t_n a_n + s_n x' - s_n a_n \\ &= (x_n - x') - t_n(x_n - x') + (t_n - s_n)a_n - (t_n - s_n)x' \\ &= (x_n - x') - t_n(x_n - x') + (t_n - s_n)(a_n - x'). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|z'_n - z_n\| \leq \|x_n - x'\| + t_n\|x_n - x'\| + |t_n - s_n|\|a_n - x'\|. \tag{4.14}$$

Considerando que $h = t_n\|a_n - x_n\| = s_n\|a_n - x'\|$, mostraremos que $|t_n - s_n|\|a_n - x'\| \to 0$.

a) Se $t_n - s_n > 0$, temos

$$(t_n - s_n)\|a_n - x'\| = -t_n\|a_n - x_n\| + t_n\|a_n - x'\| = t_n(\|a_n - x'\| - \|a_n - x_n\|),$$

que pelo Lema 1.9 tende a zero.

b) Se $t_n - s_n > 0$, temos

$$(s_n - t_n)\|a_n - x'\| = t_n(\|a_n - x_n\| - \|a_n - x'\|),$$

que obviamente também tende a zero.

Como $x_n \to x'$, por a), b) e (4.14), segue que $\|z'_n - z_n\| \to 0$ e $\|z'_n - z_n\| < h$ para todo $n > n_0$.

Afirmamos também que $a_n = P_C(x_n)$ é uma sequência minimizante para x'. Com efeito, se $\|x_n - a_n\| = d(x_n, C)$ então $\|x_n - a_n\| - \|x' - a_n\| = d(x_n, C) - \|x' - a_n\|$. Segue do Lema 1.9 que $\|x' - a_n\| \to d(x', C)$ como queríamos. Então podemos aplicar (4.10) para $a_n \in C$, isto é, $\overline{\lim} d(z_n, C) \leq H - h < \underline{\lim} d(z_n, D)$. No entanto, como $\|z'_n - z_n\| \to 0$ temos que

$$\overline{\lim} d(z'_n, C) \leq H - h < \underline{\lim} d(z'_n, D). \tag{4.15}$$

Com efeito,

i) $d(z'_n, C) \leq \|z'_n - a\| \leq \|z_n - a\| + \|z'_n - z_n\| \leq H - h + \|z'_n - z_n\|$. Então,

$$\overline{\lim} d(z'_n, C) \leq \overline{\lim}\big(H - h + \|z'_n - z_n\|\big) \quad \leq \overline{\lim}(H - h) + \overline{\lim}\|z'_n - z_n\|) = H - h.$$

Logo, $\overline{\lim} d(z'_n, C) \leq H - h$.

ii) $d(z_n, D) \leq \|z - d\| \leq \|z'_n - z_n\| + \|z'_n - d\|$. Então, $d(z_n, D) \leq \|z'_n - z_n\| + d(z'_n, D)$. Logo,

$$\underline{\lim} d(z_n, D) \leq \underline{\lim}\big(\|z'_n - z_n\| + d(z'_n, D)\big) \leq \overline{\lim}\|z'_n - z_n\| + \underline{\lim} d(z'_n, D).$$

Como $H - h < \underline{\lim} d(z_n, D)$, temos $H - h < \underline{\lim} d(z'_n, D)$.

Assim, de (4.15) segue-se que $d(z'_n, C) < d(z'_n, D)$ para todo $n > n_1$. Este fato junto com (4.13) implica que existe $z''_n \in [x_n, z'_n]$ tal que $d(z''_n, C) = d(z''_n, D)$, ou seja, $z'' \in Q$. Pela Proposição 4.1.1, $[x_n, a_n] \subset T'_C$. Então, como $[x_n, z'_n] \subset [x_n, a_n]$, temos $z''_n \in T'_C$.

Além disso, $\|z''_n - x'\| \leq \|z''_n - x_n\| + \|x_n - x'\| < r'$ para todo $n > n_2$ pois, $\|x_n - x'\| \to 0$ e

$$\|x_n - z''_n\| = \|x_n - z'_n\| - \|z''_n - z'_n\| = h - \|z''_n - z'_n\| < h < \frac{r'}{2} < r'.$$

Decorre daí que $z''_n \in B' = B[x', r']$. Portanto, $z''_n \in B' \cap Q \subset F_\epsilon$ para todo $n > n_0 + n_1 + n_2$, que contradiz o fato de $z''_n \in T'_C$. Assim, está provado que $Q \cap F_\epsilon$ tem interior vazio em Q para todo $\epsilon > 0$.

Consequentemente, o conjunto

$$\{z \in Q;\ D_C(z) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q \cap F_{\frac{1}{n}})$$

é de primeira categoria em Q. Comutando C e D e usando os mesmos argumentos acima, deduzimos que $\{z \in Q;\ D_D(z) > 0\}$ é também de primeira categoria em Q. Portanto, $Q_1 = \{z \in Q;\ D_C(z) > 0$ ou $D_D(z) > 0\}$ é de primeira categoria em Q. Como Q é um espaço métrico completo segue que $Q \setminus Q_1 = Q \cap T'_C \cap T'_D \neq \emptyset$. Seja $z \in Q \setminus Q_1$. Então, como $P_M(z) \subset C \cup D$, temos $P_M(z) = P_C(z) \cup P_D(z)$ o que contradiz o fato de M ser P-conexo. Esta ultima contradição prova o teorema. ∎

Corolário 4.2.6 *Todo conjunto de Chebyshev em um espaço de Hilbert é B-conexo (consequentemente conexo).*

Teorema 4.2.7 *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Então, cada conjunto localmente compacto, P-compacto e P-conexo $M \subset X$ é δ-compacto, aproximativamente compacto e tem projeção métrica semicontínua superiormente.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.2.5, M é B-conexo e pela Proposição 4.2.2 M é $\mathring{B}$-conexo. Então o resultado segue da Proposição 3.3.9. ∎

4.3 Solaridade e Convexidade

Nesta seção consideramos o conceito de sol, introduzido por Efimov e Stechkin [6], e sua relação com a convexidade de conjuntos de Chebyshev.

Definição 4.3.1 *Um conjunto $M \subset X$ é um sol se, para cada $x \in X$ existe $y \in P_M(x)$ tal que $y \in P_M(\lambda x + (1-\lambda)y)$, para todo $\lambda \geq 0$.*

O conjunto dos elementos $z_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)y$ com $\lambda \geq 0$, denotado por $\overrightarrow{yx}$, é chamado raio partindo de y e passando por x. Note que $M \subset X$ é um sol se, sempre que $y \in M$ é uma melhor aproximação para $x \in X$, então y é também uma melhor aproximação para todo elemento do raio $\overrightarrow{yx}$.

Exemplo 4.3.2 *No espaço $\mathbb{R}^2$ com a norma euclidiana, toda reta é um sol.*

Exemplo 4.3.3 *Considere o espaço* $\mathbb{R}^2$ *com a norma do máximo. Sejam* $x = (0,1)$ *e* $M = \{(t,0);\ t \in \mathbb{R}\}$. *É fácil verificar que* $y = (0,0) \in P_M(\lambda(0,1))$ *para todo* $\lambda \geq 0$.

Teorema 4.3.4 *Se* X *é um espaço de Banach, então todo conjunto de Chebyshev localmente compacto* $M \subset X$ *cuja projeção métrica é contínua, é um sol.*

Demonstração. Suponha que M não é um sol. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $0 \notin M$ e que $P_M(0) = \{0'\}$. Assumimos ainda que 0 denota o elemento do raio $\overrightarrow{0'0}$, mais afastado de $0'$ dentre os que possuem $0'$ como melhor aproximação em M.

Como M é localmente compacto, seja V' uma vizinhança compacta de $0'$ em M. Pela continuidade da projeção métrica, existe uma vizinhança $V = B[0,r]$ de 0 tal que $P_M(V) \subset V'$. Então, $\overline{P_M(V)}$ é compacto.

Defina

$$\begin{aligned} \varphi :\ V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto -r\frac{v'}{\|v'\|} \end{aligned}$$

onde $P_M(v) = \{v'\}$. Como $\varphi = f \circ P$ onde P denota a restrição de P_M à vizinhança V e f é a função contínua definida por

$$\begin{aligned} f :\ M &\longrightarrow V \\ y &\longmapsto -r\frac{y}{\|y\|}, \end{aligned}$$

segue que φ é contínua.

Além disso, como $\varphi(V) = f(P_M(V)) \subset f(\overline{P_M(V)})$, temos que $\overline{\varphi(V)}$ é compacto. Pelo Princípio de Schauder (veja [9]) existe $v_0 \in V$ tal que $v_0 = \varphi(v_0) = -r\frac{v_0'}{\|v_0'\|}$. Segue daí que $0 = (1-\lambda)v_0 + \lambda v_0'$, onde $\lambda = \frac{r}{r + \|v_0'\|}$. Logo, $0 \in [v_0, v_0']$ e pela Proposição 3.1.5, $v_0' = 0'$. Observe que v_0 pertence ao raio $\overrightarrow{0'0}$ e está mais afastado de $0'$ do que 0, o que é uma contradição. ∎

Corolário 4.3.5 *Em um espaço de Banach, todo conjunto de Chebyshev limitadamente compacto é um sol.*

Demonstração. Se $M \subset X$ é um conjunto de Chebyshev limitadamente compacto, segue do Corolário 3.4.7 que P_M é contínua. Como a classe dos conjuntos limitadamente compactos está contida na classe dos conjuntos localmente compactos, o resultado segue do teorema anterior. ∎

Definição 4.3.6 *Sejam $x \in X$ e $r > 0$. Dizemos que H é um hiperplano suporte a $B[x,r]$ se $\rho(H, B[x,r]) = 0$ e $H \cap B(x,r) = \emptyset$.*

Definição 4.3.7 *Um espaço normado X é dito suave se para cada $y \in S(x,r)$ existe um único hiperplano H suporte a $B[x,r]$ tal que $y \in H$.*

Observação 4.3.8 *Se H é um hiperplano suporte a $B[x,r]$ então existe uma única $f \in X^*$ com $\|f\| = 1$ tal que $H = \{y \in X;\ f(x-y) = r\}$ (veja [12]).*

Exemplo 4.3.9 *Todo espaço de Hilbert é um espaço suave.*

Proposição 4.3.10 *Em um espaço de Banach suave todo sol $M \subset X$ é um conjunto convexo.*

Demonstração. Suponha que M é um sol mas não é convexo. Então existem $a,\ b \in M$ e $0 < \lambda_0 < 1$ tais que $c = \lambda_0 a + (1-\lambda_0)b \notin M$. Seja $p \in P_M(c)$. Afirmamos que um dos segmentos $[a,p]$, $[b,p]$ intercepta a bola $B(c, \|c-p\|)$. De fato, caso contrário, pelo Teorema de Hahn-Banach, existem hiperplanos H_1 e H_2 tais que

$$H_i \cap B(c, \|c-p\|) = \emptyset \quad (i = 1,2),$$

$$\{\lambda a + (1-\lambda)p\ ;\ \lambda \in I\!R\} \subset H_1 \quad \text{e} \quad \{\lambda b + (1-\lambda)p\ ;\ \lambda \in I\!R\} \subset H_2.$$

Como $p \in H_i \cap S(c, \|c-p\|)$ $(i = 1,2)$, temos que H_1 e H_2 são hiperplanos suportes a $B[c, \|c-p\|\ ]$ e portanto, existem $f_1,\ f_2 \in X^*$ com $\|f_i\| = 1$ $(i = 1,2)$ tais que $f_1[c - \lambda a - (1-\lambda)p] = \|c-p\|$ e $f_2[c - \lambda b - (1-\lambda)p] = \|c-p\|$ para todo $\lambda \in I\!R$. Note que $f_1 \neq f_2$. De fato, se $f_1 = f_2$ temos $f_1[c - \lambda_0 a - (1-\lambda_0)p] = \|c-p\|$, $f_1[c - (1-\lambda_0)b - (1-(1-\lambda_0))p] = \|c-p\|$ e portanto, somando estas equações obtemos $f_1(c-p) = 2\|c-p\|$. Então, $2\|c-p\| \leq \|f_1\|\ \|c-p\| = \|c-p\|$ implica em $c = p$, o que contradiz $c \notin M$. Logo, H_1 e H_2 são hiperplanos distintos e X não é suave.

Vamos supor que $[a,p] \cap B(c, \|c-p\|) \neq \emptyset$, isto é, existe $0 < \lambda \leq 1$ tal que

$$\lambda a + (1-\lambda)p \in B(c, \|c-p\|).$$

Considere $y = \frac{1}{\lambda}\, c + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) p$. Temos então $y \in \overrightarrow{pc}$ e

$$\begin{aligned} \|y - a\| &= \left\| \frac{1}{\lambda}\, c + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) p - a \right\| \\ &= \frac{1}{\lambda} \| c - \lambda a - (1 - \lambda) p \, \| \\ &< \frac{1}{\lambda} \| c - p \| \\ &= \| y - p \|. \end{aligned}$$

Logo, p não é uma melhor aproximação para y em M, o que contradiz o fato de M ser um sol. ∎

Corolário 4.3.11 *Em um espaço de Banach suave todo conjunto de Chebyshev que é um sol é convexo.*

Demonstração. Imediata. ∎

Teorema 4.3.12 *Se X é um espaço de Banach suave, então todo conjunto de Chebyshev limitadamente compacto $M \subset X$ é convexo.*

Demonstração. Segue do Corolário 4.3.5 e da Proposição 4.3.10. ∎

Teorema 4.3.13 *Em um espaço de Banach X todo conjunto de Chebyshev localmente compacto e $\overset{\circ}{B}$-conexo $M \subset X$ é um sol (se X é suave então M é convexo).*

Demonstração. Segue da Proposição 3.3.9 e do Teorema 4.3.4. ∎

Teorema 4.3.14 *Em um espaço de Banach uniformemente convexo X todo conjunto de Chebyshev $M \subset X$ localmente compacto é um sol (se X é suave então M é convexo).*

Demonstração. Segue dos teoremas 4.2.5 e 4.3.13. ∎

Bibliografia

[1] Beauzamy, B., *Introduction to Banach spaces and their geometry*, North-Holland Mathematics Studies, $n^{\underline{o}}$ 68 (1982).

[2] Bunt, L. N. H., *Contributions to the theory of convex points sets*, Ph.D Thesis, Univ. of Groningen, (1934).

[3] Cheney, E. W., *Introduction to approximation theory*, second edition, Chelsea Publishing Company, New York, N. Y. (1982).

[4] Clarkson, J. A., *Uniformly convex spaces*, Trans.Amer. Math. Soc. **40** (1936), 396-414.

[5] Diestel, J., *Geometry of Banach spaces*, Lecture Notes in Math. 485, (1975).

[6] Efimov, N. V. and Stechkin, S. B., *Some properties of Chebyshev sets*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **118** (1958), 17-19.

[7] Efimov, N. V. and Stechkin, S. B., *Aproximative compactness and Chebyshev sets*, Soviet Math. Dokl **2** (1961), 1226-1228.

[8] Istrătescu, I., *Strict convexity and complex strict convexity*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **89**, (1984).

[9] Kantorovich, L.V. and Akilov, G. P., *Functional analysis*, Second Edition, Pergamon Press, New York (1982).

[10] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, New York (1978).

[11] Motzkin. T. S., *Sur quelques propriétés caratéristiques des ensambles convexes*, Rend. Acad. dei Lincei, Roma **21** (1935), 562-567.

[12] Singer. I., *Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970).

[13] Vlasov, L.P., *Aproximative properties of sets in normed linear spaces*, Russian Math. Surveys **28** (1973), $n^{\underline{0}}$ 6, 1-66.

[14] Vlasov, L.P., *Chebyshev sets and some generalizations of them*, Math. Zametki **3** (1968), 59-69.

[15] Vlasov, L.P., *Chebyshev sets in Banach spaces*, Soviet Math. Dokl **2** (1961), 1373-1374.

[16] Wulbert, D.E., *Continuity of metric projection*, Trans. Amer. Math. Soc **134** (1968), 335-341.