

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS**
**Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica - IMECC**
Departamento de Matemática

Reflexões, Isometrias e Árvores

Dissertação de Mestrado
Humberto Luiz Talpo

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Firer

Fevereiro de 2002
Campinas - SP

Reflexões, Isometrias e Árvores

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Humberto Luiz Talpo** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de Fevereiro de 2002.



Prof. Dr. Marcelo Firer

Banca Examinadora:

Prof. Dr. **Marcelo Firer**

Prof.^a. Dr.^a. **Dessislava H. Kochloukova**

Prof. Dr. **Arnaldo Mandel**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de **MESTRE** em Matemática.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

85677846

UNIDADE 80
Nº CHAMADA T/UNICAMP
T149r
V EX
TOMBO BCI 49122
PROC 16.837/00
C DX
PREÇO R\$ 11,00
DATA _____
Nº CPD _____

CM00167481-2

BIB ID 241025

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Talpo, Humberto Luiz

T149r Reflexões, isometrias e árvores / Humberto Luiz Talpo --
Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Marcelo Firer

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Isometria (Matemática). 2. Árvores. 3. Automorfismo. I. Firer,
Marcelo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de fevereiro de 2002 e aprovada pela
Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). MARCELO FIRER



Prof (a). Dr (a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA



Prof (a). Dr (a). ARNALDO MANDEL

*“Dedico este
trabalho aos meus
pais, minha esposa
e minha filha”*

Agradecimentos

Agradeço:

primeiramente a Deus, pela presença constante em minha vida e por me dar forças para concluir mais uma jornada.

ao Marcelo Firer pela competência e dedicação na orientação deste trabalho e principalmente pela amizade.

a FAPESP pela concessão da bolsa.

aos professores do IMECC.

a banca examinadora pelas sugestões, em especial a Prof^a Dessislava pela grande contribuição neste trabalho.

e finalmente aos amigos, que de algum modo incentivaram e contribuíram para a conclusão deste trabalho, em especial ao pessoal do “escritório”.

Resumo

Definimos uma reflexão em grafos como sendo um automorfismo involutivo cujo conjunto de pontos fixos é uma geodésica completa. Utilizando este conceito demonstramos que o produto de duas reflexões é uma isometria elíptica se e somente se os conjuntos de pontos fixos tem intersecção não vazia. Além disto, para o caso de árvores com valência $4k$ constante, mostramos que o fecho topológico do grupo gerado por reflexões tem índice 2 no grupo de automorfismos da árvore. Exploramos ainda uma possibilidade de inserir este conceito de reflexões em uma teoria axiomática similar a desenvolvida por Hjelslev.

Abstract

We define a reflection in a graph as an involutive automorphism whose set of fixed points is a complete geodesic. Using this concept, we prove that the product of two such reflections is an elliptic isometry if and only if its sets of fixed points has non-empty intersection. Moreover, for the case of a regular tree of valency $4k$, we prove that the topological closure of the group generated by reflections has index 2 in the group of automorphisms of the tree. We explore also a possibility to insert this concept of reflection in an axiomatic theory similar to the one developed by Hjelmslev.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	ix
1 Grafos e Árvores	1
1.1 Noções Básicas	1
1.2 Conceitos Geométricos e Topológicos	14
1.3 Isometrias	19
1.4 Ações de Grupos em Árvores	26
2 Reflexões e Grupos de Automorfismos	32
2.1 Reflexões	33
2.2 O Grupo de Automorfismos de Árvores Regulares	42
3 Grupos Pré-Hjelmslev e Árvores	50
3.1 Grupos Pré-Hjelmslev	51
3.2 Grupos Pré-Hjelmslev e Árvores: Caminhos Para a Axiomatização . . .	53

Introdução

Nos mais diferentes contextos geométricos, o conceito de reflexão tem sido exaustivamente explorado. O conceito de reflexão já havia sido utilizado por Euclides para demonstrar o que mais tarde, em ótica geométrica, ficou conhecido como Princípio de Fermat (restrito a um espelho) e J. Bernouill já havia explorado conceitos correlatos para resolver o problema da brachistocrona. Após o Erlangen Program de F. Klein, desenvolveram-se resultados e teorias fortemente baseados neste tipo de conceito. Temos desde a decomposição de isometrias como produtos de reflexões, realizada em geometria sintética seguindo os passos de Alexandrov ou, alternativamente, utilizando-se de resultados elementares de álgebra linear, até o estudo de grupos discretos de reflexão, os assim chamados grupos de Coxeter, com todos os seus desdobramentos.

Especialmente na última década, houve um grande desenvolvimento de métodos geométricos aplicados a teoria de grupos, considerando-se principalmente a ação de grupos combinatórios em grafos e árvores. No entanto, até onde chega o nosso conhecimento, não encontramos referências significativas sobre o estudo de reflexões neste contexto. A principal referência a este respeito é o trabalho de Moran ([Mo]), no qual explora um conceito de reflexão em uma linha (atribuída a Micha Perles) que ignora qualquer conceito geométrico.

A proposta inicial deste trabalho foi desenvolver um conceito geométrico (ao menos na inspiração) de reflexões em grafos e mais particularmente em árvores. O trabalho está dividido em três capítulos, organizados do seguinte modo:

O primeiro capítulo está dividido em quatro seções. Na primeira apresentamos os conceitos básicos sobre grafos e árvores fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, alguns resultados sobre a equivalência de estruturas combinatória e métrica em um grafo e alguns resultados específicos sobre árvores, utilizando principalmente sua estrutura métrica. As definições básicas seguem, grosso modo, a apresentação

feita por Cohen ([Co]), apesar de adaptarmos a notação àquela adotada por Chiswell ([Ch]). Na segunda seção, mostramos como realizar de maneira formal um grafo como sendo um espaço topológico e definimos, no contexto de grafos, alguns conceitos usuais de topologia, tais como grupo fundamental e espaço de recobrimento. Além disso, apresentamos alguns resultados que caracterizam um grafo em função da apresentação de seu grupo fundamental. Na terceira seção apresentamos a classificação das isometrias em uma árvore, de modo semelhante a classificação existente em espaços hiperbólicos, bem como alguns resultados que as caracterizam. As definições e notações básicas seguem a adotada por Chiswell ([Ch]), que adotamos pois distingue entre inversões e isometrias hiperbólicas, distinção que não é feita em alguns textos mas que é importante para o desenvolvimento deste trabalho. Na seção que encerra o capítulo apresentamos alguns resultados básicos sobre ações de grupos. A ação de grupos em grafos em geral e em árvores em particular tem um papel importante na teoria combinatória de grupos, e serve como base para a teoria de *Bass-Serre*, que trata principalmente de grafos de grupos (um tipo de grafo mais geral do que o tratado no texto) e suas ações. Como referência para esta teoria, citamos os textos de Dicks ([Di]), Serre ([Se]) e Cohen ([Co]).

O segundo capítulo é o cerne deste trabalho. Conforme já mencionado, este conceito é pouco explorado na literatura dentro deste contexto e a definição que adotamos é bem mais restritiva que a adotada, por exemplo, por Moran ([Mo]) e assemelha-se em suas propriedades com o conceito usual de reflexões em geometria absoluta. Adotada a definição, apesar de um certo grau de arbitrariedade na escolha dos pontos fixos (veja o exemplo 71, assim como a observação que o antecede), partimos para o estudo das reflexões e do grupo por elas gerado. Primeiramente estudamos a classificação de isometrias que se decompõem como produto de reflexões em termos da posição relativa das geodésicas de reflexão. A caracterização é clara para o produto de duas reflexões (Teorema 76 e Corolário 77) e menos definitiva no caso do produto de mais do que duas reflexões (Exemplo 78 e Proposição 79). Na última seção deste capítulo tratamos da questão principal deste trabalho, que é a determinação do "tamanho" do grupo gerado por reflexões. Consideramos o fecho topológico $\overline{\langle \mathcal{R} \rangle}$ deste no grupo de automorfismos $\text{Aut}(\Gamma)$ de uma árvore Γ e mostramos que, para árvores de valência constante $4k$, $\overline{\langle \mathcal{R} \rangle}$ tem índice 2 em $\text{Aut}(\Gamma)$.

No capítulo 3, introduzimos de forma extremamente breve o conceito de grupos

pré-Hjelmslev, uma teoria axiomática de grupos planos de reflexões, que engloba tanto o caso euclidiano como o caso hiperbólico, ou seja, uma teoria de isometrias de geometria neutra. A idéia inicial era conseguir axiomatizar a teoria de reflexões em árvores regulares, introduzindo-se o mínimo necessário de modificações no corpo de axiomas de grupos pré-Hjelmslev. Sob este ponto de vista, este capítulo quase que poderia ser considerado como um apêndice, pois além das definições apresentamos apenas um exemplo de tentativa frustrada de se adequar a teoria a este caso. No entanto, optamos por incluir o capítulo pois, já no final do trabalho de redação, surgiu uma idéia aparentemente promissora, um fio da meada a ser seguido em desenvolvimentos futuros

Capítulo 1

Grafos e Árvores

Apresentamos neste capítulo conceitos básicos sobre grafos, árvores e ações de grupos, bem como as notações que serão utilizadas no decorrer do texto. Também serão descritos alguns resultados sobre caracterização de árvores e suas propriedades. O título *Grafos e Árvores* pode até certo ponto parecer redundante, pois uma árvore nada mais é do que um tipo especial de grafo, porém, o que justifica o ênfase no nome árvores é o fato de que concentraremos nosso estudo neste tipo especial de grafo.

Como o objetivo principal deste capítulo é familiarizar o leitor, alguns resultados não serão demonstrados, mas deixaremos indicado onde encontrar a demonstração. Referências básicas sobre o assunto são, por exemplo, os textos de [Co], [Ch] ou [Se]. Todos os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados em ao menos um destes textos.

1.1 Noções Básicas

Definição 1 *Um grafo é uma quádrupla $\Lambda = (V(\Lambda), E(\Lambda), \sigma, \bar{})$ que consiste de dois conjuntos disjuntos, um conjunto $V(\Lambda)$ de vértices e um conjunto $E(\Lambda)$ de arestas de Λ , junto com duas aplicações*

$$\begin{aligned}\sigma &: E(\Lambda) \longrightarrow V(\Lambda) \\ \bar{} &: E(\Lambda) \longrightarrow E(\Lambda)\end{aligned}$$

tais que para todo $\varepsilon \in E(\Lambda)$, $\varepsilon \neq \bar{\varepsilon}$ e $\varepsilon\varepsilon = \bar{\bar{\varepsilon}}$.

Com base nas duas aplicações, definimos uma outra aplicação

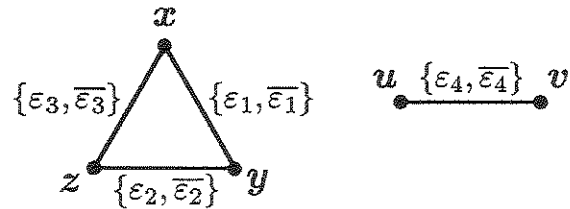
$$\tau : E(\Lambda) \longrightarrow V(\Lambda)$$

por $\tau(\varepsilon) = \sigma(\bar{\varepsilon})$. Chamamos $\tau(\varepsilon)$ de *vértice final* ou *ponto final*, $\sigma(\varepsilon)$ de *vértice inicial* ou *ponto inicial* e $\bar{\varepsilon}$ de *inverso* de ε , onde ε é uma aresta. Se os pontos inicial e final de uma mesma aresta coincidirem, isto é, $\sigma(\varepsilon) = \tau(\varepsilon)$, chamamos esta aresta de *laço*.

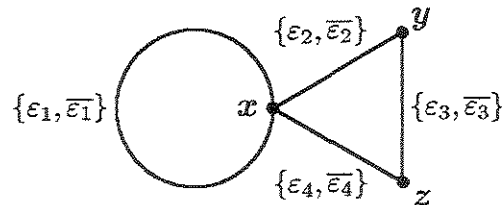
Na prática representamos um grafo por um diagrama, usando a seguinte convenção:

A cada vértice do grafo associamos um ponto e a cada par $\{\varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_i\}$ de arestas associamos um segmento, de modo que identificamos os extremos deste segmento aos pontos identificados como vértice inicial e vértice final da aresta. Uma apresentação mais rigorosa sobre a realização geométrica de grafos será feita na seção 1.2, mas por enquanto esta descrição pictórica é útil para ilustrarmos os exemplos.

Exemplo 2 Um grafo contendo cinco vértices x, y, z, u, v e oito arestas $\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}_1, \varepsilon_2, \bar{\varepsilon}_2, \varepsilon_3, \bar{\varepsilon}_3, \varepsilon_4, \bar{\varepsilon}_4$, com $x = \sigma(\varepsilon_1) = \tau(\varepsilon_3)$, $y = \tau(\varepsilon_1) = \sigma(\varepsilon_2)$, $z = \tau(\varepsilon_2) = \sigma(\varepsilon_3)$, $u = \sigma(\varepsilon_4)$ e $v = \tau(\varepsilon_4)$ é representado pelo diagrama



Exemplo 3 Também o diagrama



representa um grafo com três vértices, x, y, z e oito arestas $\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}_1, \varepsilon_2, \bar{\varepsilon}_2, \varepsilon_3, \bar{\varepsilon}_3, \varepsilon_4, \bar{\varepsilon}_4$, onde $x = \sigma(\varepsilon_1) = \tau(\varepsilon_1) = \sigma(\varepsilon_2) = \tau(\varepsilon_4)$, $y = \tau(\varepsilon_2) = \sigma(\varepsilon_3)$ e $z = \tau(\varepsilon_3) = \sigma(\varepsilon_4)$

Exemplo 4 Considere o seguinte diagrama, onde o conjunto de vértices é igual a $\mathbb{Z}$ com $\sigma(\varepsilon_n) = n$, $\tau(\varepsilon_n) = n + 1$ para $n \in \mathbb{Z}$

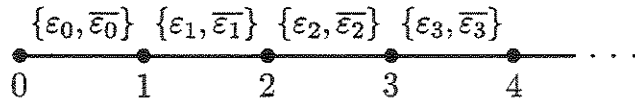


A este grafo damos o nome de grafo canônico de $\mathbb{Z}$.

Definição 5 Dados dois vértices $x, y \in V(\Lambda)$ dizemos que x e y são adjacentes se existe $\varepsilon \in E(\Lambda)$ tal que $\sigma(\varepsilon) = x$ e $\tau(\varepsilon) = y$.

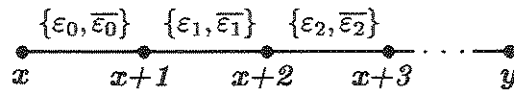
Definição 6 Seja Λ um grafo. Um subgrafo Λ_1 de Λ é um grafo cujos conjuntos V_1 dos vértices e E_1 das arestas são subconjuntos de V e E respectivamente e cujas aplicações σ e τ são as restrições à E_1 das mesmas aplicações em E .

Exemplo 7 Considere o subconjunto $\mathbb{N}$ de $\mathbb{Z}$. Então



representa um subgrafo do grafo canônico de $\mathbb{Z}$, onde o conjunto de vértices é $\mathbb{N}$. A este subgrafo, damos o nome de grafo canônico de $\mathbb{N}$.

Exemplo 8 Considere agora um intervalo fechado discreto $[x, y]_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$. Então



também representa um subgrafo do grafo canônico de $\mathbb{Z}$.

Um caminho de comprimento n em um grafo Λ é uma sequência $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ de arestas tal que o ponto final de ε_i é o ponto inicial de ε_{i+1} . Dizemos que $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ liga o seu ponto inicial $\sigma(\varepsilon_1)$ ao seu ponto final $\tau(\varepsilon_n)$. Se $c = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ é um caminho em Λ , então $c^{-1} = \bar{\varepsilon}_n \bar{\varepsilon}_{n-1} \dots \bar{\varepsilon}_1$ é o caminho inverso de c . Por convenção, o caminho definido pelo conjunto vazio, denotado por $\varepsilon_\emptyset$, é dito *caminho trivial* e seu ponto final coincide

com o inicial. Também por convenção, o vértice inicial (e final) pode ser escolhido arbitrariamente.

Um caminho é chamado *reduzível* se existe i tal que $\varepsilon_{i+1} = \overline{\varepsilon_i}$, caso contrário é chamado *irreduzível*. Um caminho $\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n$ é dito *fechado* se $\sigma(\varepsilon_1) = \tau(\varepsilon_n)$. Dentre os exemplos acima, 2 e 3 são os únicos com caminhos fechados irreduzíveis.

Se para quaisquer $x, y \in V(\Lambda)$ existe um caminho $\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n$ tal que $\sigma(\varepsilon_1) = x$ e $\tau(\varepsilon_n) = y$, dizemos que o grafo Λ é *conexo*. Todos os exemplos acima, com exceção do exemplo 2, são conexos.

Definição 9 Uma floresta é um grafo sem laços no qual todo caminho fechado é *reduzível*. Uma floresta conexa é chamada *árvore*.

Observe que as componentes conexas de uma floresta são árvores e que qualquer subgrafo de uma floresta é também uma floresta.

Do mesmo modo que foi definido subgrafos, também definimos *sub-árvores*, ou seja, uma sub-árvore é um subgrafo conexo no qual todo caminho fechado é *reduzível*.

Existem maneiras diferentes de se definir uma árvore, mas que são essencialmente equivalentes, e isso será mostrado nos resultados que seguem.

Proposição 10 Um grafo Λ é uma floresta se, e somente se, para todos dois vértices $x, y \in V(\Lambda)$ existe no máximo um caminho irreduzível de x à y .

Demonstração: Se supormos que Λ não é uma floresta, existe um caminho fechado $\varepsilon_1\dots\varepsilon_n$ que é irreduzível. Então $\varepsilon_1\dots\varepsilon_{n-1}$ e $\overline{\varepsilon_n}$ são caminhos irreduzíveis com mesmos pontos inicial e final.

Agora supomos que c e d são caminhos diferentes e irreduzíveis em Λ tais que c e d tem mesmos pontos inicial e final e o comprimento de c mais o comprimento de d é o menor possível com esta propriedade. Então cd^{-1} é caminho fechado e como a soma dos comprimentos é minimal, cd^{-1} é irreduzível, em particular Λ não é floresta. $\square$

Proposição 11 Um grafo Λ é uma árvore se, e somente se, para todos dois vértices $x, y \in V(\Lambda)$ existe um único caminho irreduzível de x à y . Ainda mais, se Λ é um grafo e x_0 é um vértice tal que para todo vértice x_1 , existe um único caminho irreduzível em Λ com ponto inicial x_0 e ponto final x_1 , então Λ é uma árvore.

Demonstração: A primeira parte é uma consequência direta da última proposição e do fato que uma floresta é uma árvore se, e somente se, for conexa. Para a segunda parte, observamos que se quaisquer dois vértices $x, y \in V(\Lambda)$ são ligados por um caminho, isto se aplica também ao caso particular $x = x_0$ e $y = x_1$.

Para mostrar a recíproca usamos o fato de que existem caminhos irredutíveis c (de x_0 à x) e d (de x_0 à y). Então $c^{-1}d$ é um caminho de x à y , possivelmente não irredutível. Cancelamos todos os sub-caminhos da forma $\varepsilon_i \bar{\varepsilon}_i$ em $c^{-1}d$, repetidas vezes até obtermos um caminho irredutível h de x à y . Assumimos que existe um outro caminho irredutível j de x à y . Então c e dj^{-1} são caminhos de x_0 à x . Como d e j são irredutíveis, existe decomposição $d = d_1d_2$, $j = j_1j_2$ com d_i, j_i irredutíveis e d_2, j_2 maximais satisfazendo a condição $d_2 = j_2$. Segue então que $d_1j_1^{-1}$ é caminho irredutível de x_0 a x . Como estamos admitindo a existência de um único caminho irredutível de x_0 à x obtemos que $c = d_1j_1^{-1}$, donde $h = j$. $\square$

Antes de prosseguirmos com os resultados, vamos precisar de algumas definições:

Definição 12 *Uma floresta maximal de um grafo dado é uma floresta que não está propriamente contida (como subgrafo) em nenhuma outra floresta do grafo.*

Definição 13 *Sejam Λ_1 e Λ_2 subgrafos de Λ . Definimos a intersecção $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ como sendo um grafo, cujo conjunto de vértices e arestas são dados pela intersecção dos conjuntos de vértices e arestas de Λ_1 e Λ_2 e as aplicações σ e $\bar{}$ em $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ são as restrições das mesmas aplicações em Λ_1 ou Λ_2 . De modo semelhante definimos a união $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ como sendo um grafo, cujo conjunto de vértices e arestas são dados pela união dos conjuntos de vértices e arestas de Λ_1 e Λ_2 e as aplicações σ e $\bar{}$ em $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ são extensões das aplicações em Λ_1 ou Λ_2 .*

Proposição 14 *Seja F uma floresta maximal em um grafo Λ e seja Λ_1 uma componente conexa de Λ . Então F contém todo vértice de Λ e $F \cap \Lambda_1$ é uma floresta maximal em Λ_1 . Em particular $F \cap \Lambda_1$ é uma árvore.*

Demonstração: Seja x um vértice de Λ , se x não pertence à F então $F \cup \{x\}$ é uma floresta contendo F , contradizendo a maximalidade de F . Um subgrafo de uma floresta também é floresta, de modo que $F \cap \Lambda_1$ é uma floresta. Supomos que $F \cap \Lambda_1$ não é uma floresta maximal em Λ_1 e seja F_1 uma floresta maximal em Λ_1 que contém $F \cap \Lambda_1$. Então $F \cup F_1$ é a união disjunta de F_1 e $F \setminus \Lambda_1$, e é uma floresta que contém

como subconjunto próprio F , uma contradição. Para completar a demonstração, basta mostrar que $F \cap \Lambda_1$ é conexo. Mas é fácil ver que uma floresta maximal em um grafo conexo Λ_1 é conexo também, isto é, é uma árvore. $\square$

Definição 15 *Um grafo Λ é dito finito se ambos os conjuntos $E(\Lambda)$ e $V(\Lambda)$ forem finitos.*

Para o caso finito, árvores possuem outras caracterizações, que veremos nas proposições abaixo.

Proposição 16 *Seja Γ uma árvore finita com mais de um vértice. Então Γ contém ao menos dois vértices tais que cada um deles é o ponto inicial de uma única aresta em Γ .*

Demonstração: Como Γ é finita, existe o limite superior do comprimento dos caminhos com vértices distintos. Seja então $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ um caminho irredutível com vértices distintos e com comprimento máximo. Então ε_n é a única aresta que termina em $\tau(\varepsilon_n)$. De fato, suponha que ε_{n+1} é uma aresta diferente do inverso $\overline{\varepsilon_n}$ de ε_n que tem como ponto inicial $\tau(\varepsilon_n)$. Se o ponto final $\tau(\varepsilon_{n+1})$ de ε_{n+1} é o ponto inicial de ε_r para algum r , o caminho $\varepsilon_r \dots \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$ é um caminho fechado e irredutível, contradizendo o fato de que Γ é uma árvore. Então $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$ é um caminho que tem vértices diferentes, contradizendo a maximalidade do comprimento de $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$. Isto implica que ε_n é a única aresta que termina em $\tau(\varepsilon_n)$ e consequentemente, $\overline{\varepsilon_n}$ é a única aresta com ponto inicial $\sigma(\overline{\varepsilon_n}) = \tau(\varepsilon_n)$. De modo semelhante demonstra-se que ε_1 é a única aresta que tem como ponto inicial $\sigma(\varepsilon_1)$. $\square$

Proposição 17 *Seja Λ um grafo finito e conexo com n vértices e m pares de arestas do tipo $\{\varepsilon_i, \overline{\varepsilon_i}\}$. Então Λ é uma árvore se e somente se $n = m + 1$.*

Demonstração: Primeiro vamos supor que Λ é uma árvore. Se $n = 1$ então $m = 0$. Se Λ tem mais que um vértice, escolhemos uma aresta ε_r com ponto inicial x , tal que não exista nenhuma outra aresta com ponto inicial x . Seja Δ o grafo que é obtido a partir de Λ eliminando-se as arestas $\varepsilon_r, \overline{\varepsilon_r}$ e o vértice x . Então Δ é uma floresta. Mostremos que Δ é conexo, ou seja, Δ é uma árvore e por indução

$$n - 1 = |V(\Delta)| = |E(\Delta)| + 1 = (m - 1) + 1.$$

Dados $y, w \in \Delta$, existe um caminho irreduzível $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ em Λ tal que $\sigma(\varepsilon_1) = y$ e $\tau(\varepsilon_n) = w$. Se ele não é um caminho em Δ para algum $i = 1, \dots, n$, a aresta ε_i termina em x , isto é, $\tau(\varepsilon_i) = x$. Então ε_{i+1} tem como ponto inicial x , isto é, $\sigma(\varepsilon_{i+1}) = x$. Como $\overline{\varepsilon_r}$ é a única aresta que tem como ponto final x e ε_r é a única aresta que tem como ponto inicial x , obtemos que $\varepsilon_{i+1} = \overline{\varepsilon_i}$. Então o caminho não é irreduzível, uma contradição.

Agora supomos que Λ é um grafo finito e conexo tal que $n = m + 1$. Seja Γ uma árvore maximal em Λ . Como Γ é uma árvore maximal, Γ tem o mesmo número de vértices de Λ e conforme a primeira parte da demonstração, o número de pares de arestas de Γ é $n - 1$. Então Γ contém toda aresta de Λ e $\Gamma = \Lambda$. $\square$

No texto apresentado até o momento um grafo foi considerado como um objeto dotado de uma *estrutura combinatória* e os resultados foram demonstrados usando apenas esta estrutura. No entanto, é possível considerar um grafo como uma *estrutura métrica*, de modo que morfismos da relação de incidência (dado pelas aplicações σ e τ) traduzam-se por morfismos da estrutura métrica, conforme veremos no próximo teorema.

Porém, antes do teorema vamos precisar de algumas definições:

Definição 18 Um homomorfismo de grafos, que denotamos por $\psi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$, é um par de aplicações $\psi_E : E(\Gamma_1) \longrightarrow E(\Gamma_2)$, $\psi_V : V(\Gamma_1) \longrightarrow V(\Gamma_2)$, satisfazendo :

$$1. \sigma_2(\psi_E(\varepsilon)) = \psi_V(\sigma_1(\varepsilon)),$$

$$2. \psi_E(\overline{\varepsilon}) = \overline{\psi_E(\varepsilon)}$$

Ou seja, é uma aplicação que envia vértices à vértices, arestas à arestas e que comuta com as aplicações σ e τ , preservando a orientação das arestas.

Um homomorfismo é dito injetor (sobrejetor) se ambas as aplicações ψ_E e ψ_V forem injetoras (sobrejetoras).

Quando o homomorfismo é invertível chamamos de isomorfismo e um isomorfismo é chamado automorfismo quando $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Definição 19 Seja Λ um grafo. Uma geodésica de Λ é um subgrafo de Λ isomorfo ao grafo canônico de $\mathbb{Z}$. Similarmente, um subgrafo isomorfo ao grafo canônico de $\mathbb{N}$ é chamado semi-geodésica e um subgrafo isomorfo a um intervalo $[n, m]_{\mathbb{Z}}$ é chamado

segmento geodésico. Representamos um segmento geodésico por $[x, y]$ onde x, y são vértices em Λ .

Seja Γ um grafo e seja $x, y \in V(\Gamma)$. Dizemos que $v \in V(\Gamma)$ está entre x e y , fato que denotamos por $L(v; x, y)$, se v está contido em algum caminho irredutível minimal entre x e y . Note que da maneira como foi definido, x , e também y , estão entre x e y . Observe que se Γ for uma árvore o caminho irredutível minimal entre quaisquer dois vértices é único.

A função

$$d(x, y) := \min \{|\gamma|; \gamma \text{ é caminho entre } x \text{ e } y\}$$

é uma função distância em Γ . É imediato constatar as seguintes propriedades:

1. $x, y \in V(\Gamma)$ são adjacentes se, e somente se, $d(x, y) = 1$.
2. Um grafo é uma floresta se, e somente se, todo caminho irredutível de comprimento n é isomorfo ao intervalo discreto $[0, n]_{\mathbb{N}} := [0, n] \cap \mathbb{N}$, ou seja, se todo caminho irredutível é um segmento geodésico.
3. Um caminho em Γ é uma aplicação $\gamma : [a, b]_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \Gamma$ tal que

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) \leq |x - y|; \forall x, y \in [a, b]_{\mathbb{Z}}.$$

Para $x \in V(\Gamma)$, seja $B(x, i) := \{y \in V(\Gamma); d(x, y) = i\}$, $i \in \mathbb{N}$, a esfera de centro x e raio i . A cardinalidade $|B(x, i)|$ de uma esfera de raio 1 é chamada de *valência* de x , isto é, a valência de um vértice é o número de vértices adjacentes a ele. Uma árvore Γ é dita *regular* se quaisquer dois vértices de Γ tem a mesma valência.

Vamos agora apresentar o resultado que mostra a equivalência em se trabalhar com uma estrutura combinatória ou métrica em um grafo.

Teorema 20 *Sejam Γ e Λ grafos, então todo isomorfismo $\psi : \Gamma \longrightarrow \Lambda$ é uma isometria, ou seja, $d(\psi(x), \psi(y)) = d(x, y) \forall x, y \in V(\Gamma)$.*

Demonstração: Sejam $x, y \in V(\Gamma)$ e seja $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ um caminho irredutível minimal tal que $\sigma(\varepsilon_1) = x$ e $\tau(\varepsilon_n) = y$. Logo, por definição, $d(x, y) = n$. Se $\psi : \Gamma \longrightarrow \Lambda$ é um isomorfismo, segue que

$$\psi(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n) = \psi(\varepsilon_1) \psi(\varepsilon_2) \dots \psi(\varepsilon_n)$$

é um caminho irredutível minimal tal que

$$\sigma(\psi(e_1)) = \psi(\sigma(e_1)) = \psi(x)$$

e

$$\tau(\psi(e_n)) = \psi(\tau(e_n)) = \psi(y)$$

donde segue que

$$d(\psi(x), \psi(y)) = n = d(x, y)$$

□

Corolário 21 *Toda isometria $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Lambda$ sobrejetora é um isomorfismo.*

Demonstração: Segue de modo imediato do teorema anterior. □

Mostrado a equivalência entre as estruturas combinatória e métrica de um grafo, vamos a partir de agora dar um ênfase maior a árvores, pois este é nosso principal objeto de estudo neste trabalho. Assim sendo, os resultados que serão descritos a seguir estão relacionados apenas com árvores. Estes resultados são simples, porém úteis, e envolvem as propriedades métricas de uma árvore. Começemos com o seguinte:

Proposição 22 *Sejam x, y, z e w vértices de uma árvore Γ , tal que $[x, y] \cap [x, z] = [x, w]$. Então:*

1. $[y, w] \cap [w, z] = \{w\}$, $[y, z] = [y, w] \cup [w, z]$ e $[x, y] \cap [w, z] = \{w\}$;
2. Se y_m é um ponto de $[x, y]$ tal que $d(x, y_m) = m$ e z_n é um ponto de $[x, z]$ tal que $d(x, z_n) = n$, então $d(y_m, z_n) = m + n - 2 \min\{m, n, d(x, w)\}$;
3. w depende somente do conjunto $\{x, y, z\}$ e não da ordem em que os elementos são escritos.

Demonstração:

(1) Temos que $y, w \in [x, y]$, logo $[y, w] \subseteq [x, y]$, do mesmo modo $[w, z] \subseteq [x, z]$, assim sendo, se $u \in [y, w] \cap [w, z]$ então $u \in [x, y] \cap [x, z] = [x, w]$. Portanto $u \in$

$[x, w] \cap [y, w] = \{w\}$, uma vez que $w \in [x, y]$. Consequentemente $[y, w] \cap [w, z] = \{w\}$, e $[y, z] = [y, w] \cup [w, z]$, pois Γ é árvore. Finalmente, como $w \in [x, y]$, $[x, y] = [x, w] \cup [w, y]$, deste modo $[x, y] \cap [w, z] = ([x, w] \cap [w, z]) \cup ([y, w] \cap [w, z])$, e ambas intersecções são iguais a $\{w\}$ ($w \in [x, z]$).

(2) Se $m \leq d(x, w)$ então $y_m, z_n \in [x, z]$ e deste modo $d(y_m, z_n) = |m - n|$. De maneira análoga se $n \leq d(x, w)$ então $y_m, z_n \in [x, y]$ e $d(y_m, z_n) = |m - n|$. Caso contrário, se $m > d(x, w)$ e $n > d(x, w)$, então $y_m \in [y, w]$ e $z_n \in [z, w]$, e por (1) obtemos que

$$\begin{aligned} d(y_m, z_n) &= d(y_m, w) + d(w, z_n) \\ &= (d(x, y_m) - d(x, w)) + (d(x, z_n) - d(x, w)) \\ &= m + n - 2d(x, w) \end{aligned}$$

deste modo $d(y_m, z_n) = m + n - 2 \min\{m, n, d(x, w)\}$.

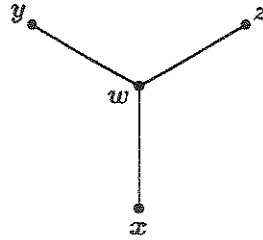
(3) Temos que

$$\begin{aligned} [y, x] \cap [y, z] &= [y, x] \cap ([y, w] \cup [w, z]) \\ &= [y, w] \cup ([y, x] \cap [w, z]) \\ &= [y, w] \cup ([y, w] \cap [w, z]) \cup ([w, x] \cap [w, z]) \end{aligned}$$

Mas pelo item (1), $[y, w] \cap [w, z] = \{w\}$ e segue que $[w, x] \cap [w, z] = \{w\}$, uma vez que $w \in [x, z]$, portanto $[y, x] \cap [y, z] = [y, w]$. De maneira análoga $[z, x] \cap [z, y] = [z, w]$, o que conclui a demonstração. $\square$

Segue dos itens (1) e (3) da proposição anterior que $[y, z] \cap [w, x] = \{w\}$ e $[z, x] \cap [w, y] = \{w\}$; também $[x, y] \cap [y, z] \cap [z, x] = \{w\}$.

Os segmentos ligando x, y e z são ilustrados pela seguinte figura, que justifica em alguns textos o nome de "Proposição -Y".



Denotamos o ponto $w = [x, y] \cap [x, z] \cap [y, z]$ obtido na proposição anterior por $Y(x, y, z)$.

Definição 23 Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ vértices de uma árvore Γ . Dizemos que $[x_1, x_n] = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ se $x_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ para todo x_i com $2 \leq i \leq n$.

Observações: Para vértices x, y, z em uma árvore, são equivalentes:

1. $[x, y] \cap [y, z] = \{y\}$;
2. $[x, z] = [x, y] \cup [y, z]$;
3. $[x, z] = [x, y, z]$, isto é, $y \in [x, z]$;
4. $Y(x, y, z) = y$;
5. $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$.

É possível generalizar (3) e (5) através da seguinte proposição:

Proposição 24 Seja Γ uma árvore e $x_0, x_1, \dots, x_n$ vértices em Γ . Então são equivalentes:

1. $[x_0, x_n] = [x_0, x_1, \dots, x_n]$;
2. $d(x_0, x_n) = \sum_{i=1}^n d(x_{i-1}, x_i)$.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) Basta usar indução sobre n e as observações anteriores.

(2) $\Rightarrow$ (1) Novamente vamos usar indução sobre n . A igualdade é trivial se $n = 1$ e segue direto das observações anteriores se $n = 2$. Se $n > 2$, pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} d(x_0, x_n) &\leq d(x_0, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_{i-1}, x_i) + d(x_{n-1}, x_n) = d(x_0, x_n) \end{aligned}$$

assim $d(x_0, x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} d(x_{i-1}, x_i)$, logo $[x_0, x_{n-1}] = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$ por indução. Também $d(x_0, x_n) = d(x_0, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n)$, donde segue

$$[x_0, x_n] = [x_0, x_{n-1}, x_n] = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]$$

□

Proposição 25 *Seja Γ uma árvore. Se $x_0, x_1, \dots, x_n$ são vértices com $x_i \neq x_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n-2$ e $[x_{i-1}, x_i] \cap [x_i, x_{i+1}] = \{x_i\}$ para $1 \leq i \leq n-1$, então $[x_0, x_n] = [x_0, x_1, \dots, x_n]$.*

Demonstração: Se $n \leq 2$ não há nada o que provar. Suponha $n = 3$. Assumimos $x_0 \neq x_1$ e $x_2 \neq x_3$, pois do contrário novamente não há o que provar. Seja $w = Y(x_0, x_2, x_3)$. Como $w \in [x_0, x_2]$ e $x_1 \in [x_0, x_2]$, temos que $[x_2, w] \cap [x_2, x_1] = [x_2, v]$, onde $v = w$ ou $v = x_1$, dependendo do qual está mais próximo de x_2 . Mas $[x_2, w] \cap [x_2, x_1] \subseteq [x_2, x_3] \cap [x_2, x_1] = \{x_2\}$, assim $v = x_2$. Como $x_1 \neq x_2$, concluímos que $w = x_2$, portanto $[x_0, x_2] \cap [x_2, x_3] = \{x_2\}$, o que implica $[x_0, x_3] = [x_0, x_2, x_3] = [x_0, x_1, x_2, x_3]$. Agora suponha $n > 3$. Por indução $[x_0, x_{n-1}] = [x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}] = [x_0, x_{n-2}, x_{n-1}]$, logo

$$[x_0, x_n] = [x_0, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = [x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$$

como queríamos. □

Proposição 26 *Sejam $[x, y]$, $[z, v]$ segmentos em uma árvore Γ .*

1. *Se $[x, y] \cap [z, v] \neq \emptyset$, então $[x, y] \cap [z, v] = [p, q]$, onde $p = Y(x, y, z)$ e $q = Y(x, y, v)$. Em particular, a intersecção de dois segmentos em Γ ou é vazia ou um segmento.*
2. *Se $[x, y] \cap [z, v] = \emptyset$, então $[x, z] \cap [y, v] \neq \emptyset$.*

Demonstração:

(1) Seja $w_1 \in [x, y] \cap [z, v]$, tal que $[x, y] \cap [x, z] = [x, w_1]$. Pela proposição 22 temos que $w_1 = Y(x, y, z) = p$. De maneira análoga, seja $w_2 \in [x, y] \cap [z, v]$ tal que $[x, y] \cap [x, v] = [x, w_2]$ (em particular $w_1 = w_2$ se $[x, y] \cap [z, v]$, tiver um único ponto), daí segue, novamente pela proposição 22 que $w_2 = Y(x, y, v) = q$, como $p, q \in [x, y] \cap [z, v]$, segue que $[p, q] = [x, y] \cap [z, v]$.

(2) Assumimos que $[x, y] \cap [z, v] = \emptyset$, logo como Γ é uma árvore, existe um único vértice $p \in [x, y]$ e um único $q \in [z, v]$ (p e q necessariamente distintos) tal que $d([x, y], [z, v]) = d(p, q)$. Daí segue que $[p, q]$ está contido no caminho em Γ ligando x a z e no caminho ligando y a v , ou seja, $[p, q] \subset [x, z] \cap [y, v]$. □

Proposição 27 *Seja Γ uma árvore e Λ, Δ sub-árvores de Γ com $\Lambda \cap \Delta = \emptyset$. Se $x, z \in \Lambda$ e $y, v \in \Delta$, então $[x, y] \cap [z, v] = [p, q]$, onde $p \in \Lambda$ e $q \in \Delta$.*

Demonstração: Se $[x, y] \cap [z, v] = \emptyset$, então $[x, z] \cap [y, v] \neq \emptyset$, pela proposição anterior, o que implica que $\Lambda \cap \Delta \neq \emptyset$ uma contradição. Novamente pela proposição anterior $[x, y] \cap [z, v] = [p, q]$, mas $p = Y(x, y, z) \in [x, z]$, e $q = Y(x, y, v) \in [y, v]$, de modo que $p \in \Lambda$ e $q \in \Delta$. $\square$

Encerramos esta seção com mais um resultado envolvendo sub-árvores :

Proposição 28 *Sejam Λ, Δ sub-árvores disjuntas não vazias de uma árvore Γ . Então:*

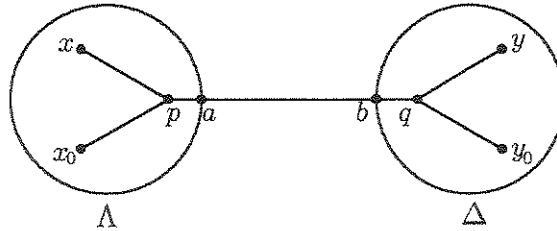
- (a) *Existe um único elemento $a \in \Lambda$ tal que, para todo $x \in \Lambda, y \in \Delta$, $a \in [x, y]$. Além disso, $[x, y] \cap \Lambda = [x, a]$.*
- (b) *Existem únicos pontos $a \in \Lambda, b \in \Delta$ tais que $[a, b] \cap \Lambda = \{a\}$, $[a, b] \cap \Delta = \{b\}$. Além disso, se $x \in \Lambda, y \in \Delta$, então $[a, b] \subseteq [x, y]$.*

Demonstração: Tome $x_0 \in \Lambda, y_0 \in \Delta$. Como $\Lambda \cap \Delta = \emptyset$, segue facilmente que $[x_0, y_0] \cap \Lambda = [x_0, a]$ para algum $a \in \Lambda$, e $[a, y_0] \cap \Lambda = \{a\}$. Sejam $x \in \Lambda, y \in \Delta$. Pela proposição anterior, $[x, y] \cap [x_0, y_0] = [p, q]$, onde $p \in \Lambda$ e $q \in \Delta$. Mas $[x_0, p] \subseteq [x_0, y_0] \cap \Lambda = [x_0, a]$ e como $[q, y_0] \subseteq \Delta$ e $[q, y_0] \cap \Lambda = \emptyset$, segue que

$$[x_0, a] = ([x_0, q] \cup [q, y_0]) \cap \Lambda = [x_0, q] \cap \Lambda \subseteq [x_0, q]$$

Portanto $[x_0, p] \subseteq [x_0, a] \subseteq [x_0, q]$, o que implica $[x_0, q] = [x_0, p, a, q]$, assim $a \in [p, q] \subseteq [x, y]$. Isto mostra a existência de a no item (a). Se $a' \in \Lambda$ também tem a propriedade que $a' \in [x, y]$ para todo $x \in \Lambda, y \in \Delta$, então $a' \in [a, y_0] \cap \Lambda = \{a\}$, mostrando a unicidade. Por fim, o item (b) segue facilmente aplicando-se o primeiro em ambos Λ e Δ . $\square$

A situação da prova da proposição acima é ilustrada pela seguinte figura:



Chamamos o ponto a da proposição acima de *projeção de Δ em Λ* , e o segmento $[a, b]$ é chamado *ponte* entre Λ e Δ .

1.2 Conceitos Geométricos e Topológicos

Como vimos no início da seção anterior, um grafo pode ser representado por um diagrama, associando a cada vértice do grafo um ponto e a cada par $\{\varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_i\}$ de arestas um intervalo, de modo que identificamos os extremos deste intervalo aos pontos identificados como vértice inicial e vértice final da aresta.

Conforme prometido, definiremos de maneira rigorosa a realização geométrica de um grafo e apresentaremos alguns resultados básicos referentes a topologia de grafos. Não nos estenderemos por demais nestas questões por fugirem ao escopo deste trabalho, e nos restringimos a mencionar como referência básica sobre o assunto o livro [Co].

Retornando ao diagrama de um grafo, este pode ser descrito de maneira formal pelo que chamamos de *realização geométrica* de um grafo.

Definição 29 *Seja Γ um grafo e seja $V = V(\Gamma)$, $E = E(\Gamma)$. Consideremos o espaço topológico T que é a união disjunta de V e $E \times [0, 1]$, ou seja, identificamos cada aresta ε_i com o intervalo unitário $I_{\varepsilon_i} := \{\varepsilon_i\} \times [0, 1]$, onde V e E são dotados com a topologia discreta. Seja $\sim$ a relação de equivalência em T para a qual*

$$\begin{aligned} (\varepsilon, t) &\sim (\bar{\varepsilon}, 1 - t) \\ (\varepsilon, 0) &\sim \sigma(\varepsilon) \\ (\varepsilon, 1) &\sim \tau(\varepsilon) \end{aligned}$$

para $\varepsilon \in E$ e $t \in [0, 1]$.

O espaço quociente $Real(\Gamma) = T / \sim$ é chamado de *realização geométrica do grafo* Γ .

Esta realização faz com que passemos a considerar um grafo (na verdade a realização geométrica do grafo) como sendo um espaço topológico, podendo assim usar métodos e ferramentas de topologia para resolver problemas que envolvem teoria de grafos.

Um dos conceitos topológicos mais interessantes e que tem muitos resultados importantes na teoria de grafos é o conceito de *grupo fundamental*, o qual apresentaremos a seguir. Antes porém, vamos esclarecer alguns conceitos.

Seja Γ um grafo e seja f o caminho $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ em Γ . Dizemos que o caminho g é obtido de f por *reduções elementares* se para algum i , $\varepsilon_{i+1} = \bar{\varepsilon}_i$ e g é o caminho $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i+2} \dots \varepsilon_n$.

Dizemos que o caminho f é *homotópico* ao caminho g , fato que denotamos por $f \simeq g$, se existe uma sequência de caminhos f_r com $1 \leq r \leq m$ (para algum m), tais que $f_1 = f$, $f_m = g$ e para todo $r < m$, f_{r+1} é uma redução elementar de f_r ou f_r é uma redução elementar de f_{r+1} . Esta é obviamente uma relação de equivalência e é imediato constatar que se f é um caminho de x a y e $f \simeq g$, então g é também um caminho de x a y , o mesmo acontecendo com seus inversos.

De modo usual definimos *classe de homotopia* dos caminhos, ou seja, a classe de homotopia $[f]$ de um caminho f , consiste de todos os caminhos homotópicos a f .

Se f e g são caminhos fechados com ponto inicial x , definimos o produto

$$[f][g] := [fg].$$

Este produto claramente independe dos representantes das classes de equivalência, ou seja, se $[f] = [f']$ e $[g] = [g']$ então $[fg] = [f'g']$. Este produto é associativo e o caminho trivial define o elemento neutro $[\varepsilon_\emptyset]$. Além disso, $[f][f^{-1}] = [\varepsilon_\emptyset]$. Assim, o conjunto das classes de homotopia de caminhos fechados em Γ com o mesmo ponto inicial x e com a operação definida acima, é um grupo chamado de *grupo fundamental do grafo* Γ com ponto base x , o qual denotamos por $\pi_1(\Gamma, x)$.

Quando o grafo Γ é conexo, o grupo fundamental não depende do ponto escolhido, ou seja, $\pi_1(\Gamma, x)$ e $\pi_1(\Gamma, y)$ são isomorfos, de modo que o denotamos simplesmente por $\pi_1(\Gamma)$.

Definição 30 *Seja Γ um grafo conexo. Qualquer caminho $\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n$ em Γ pode ser considerado como um produto de elementos do grupo livre $F(E)$, onde E é o conjunto das arestas de Γ . O conjunto $R = \{\varepsilon\bar{\varepsilon}; \varepsilon \in E\} \subseteq F(E)$, é chamado conjunto das relações de primeiro tipo.*

Fixemos um vértice $a \in \Gamma$, para cada vértice x de Γ escolhemos um caminho f_x de a a x , com f_a representando o caminho trivial. O conjunto $S = \{f_x; x \in V(\Gamma)\} \subseteq F(E)$ é chamado conjunto das relações de segundo tipo.

O seguinte teorema dá uma apresentação do grupo fundamental de um grafo com relação aos conjuntos de relações definidos acima.

Teorema 31 *$\langle E \mid R \cup S \rangle$ é uma apresentação do grupo fundamental $\pi_1(\Gamma, a)$. Nesta apresentação uma aresta ε_n é enviada a classe de homotopia do caminho $f_x\varepsilon_nf_y^{-1}$, onde $\sigma(\varepsilon_n) = x$ e $\tau(\varepsilon_n) = y$.*

Demonstração: Seja $G = \langle E \mid R \cup S \rangle$ e seja N o fecho normal de $R \cup S$ no grupo livre $F(E)$, desta maneira temos que gN é um elemento de G correspondente à $g \in F(E)$.

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \pi & : F(E) \longrightarrow \pi_1(\Gamma, a) \\ & : \varepsilon_n \longrightarrow [f_x \varepsilon_n f_y^{-1}] \end{aligned}$$

onde $\sigma(\varepsilon_n) = x$ e $\tau(\varepsilon_n) = y$ e f_x representa o caminho de a à x .

A aplicação π está bem definida, pois para cada aresta ε_n o caminho $f_x \varepsilon_n f_y^{-1}$ é um caminho fechado com ponto base a . Como $F(E)$ é livre, segue que π é um homomorfismo. Também é fácil verificar que para qualquer caminho f tal que $\sigma(f) = x$ e $\tau(f) = y$, o homomorfismo π envia f a classe de homotopia $[f_x f f_y^{-1}]$. Em particular, π envia $\varepsilon_n \overline{\varepsilon_n}$ ao elemento trivial, pois

$$\pi(\varepsilon_n \overline{\varepsilon_n}) = [f_x \varepsilon_n \overline{\varepsilon_n} f_x^{-1}] = [f_a] = 1$$

Observe que $f_x \in F(E)$ é um caminho com ponto inicial a e ponto final x , deste modo

$$\pi(f_x) = [f_a f_x f_x^{-1}] = [f_a] = 1$$

Portanto, π induz um homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi & : G \longrightarrow \pi_1(\Gamma, a) \\ & : gN \longrightarrow [f_a g f_x^{-1}] \end{aligned}$$

Agora definimos um homomorfismo $\psi : \pi_1(\Gamma, a) \longrightarrow G$, da seguinte maneira:

Se f é um caminho fechado em Γ com ponto inicial a , ψ envia a classe de homotopia de f à imagem canônica fN de f em G .

Esta aplicação está bem definida, pois dois caminhos fechados com um mesmo vértice a representam o mesmo elemento do grupo fundamental $\pi_1(\Gamma, a)$ se e somente se um deles é obtido do outro substituindo-se várias vezes o elemento trivial por $\varepsilon_r \overline{\varepsilon_r}$ ou vice-versa.

Mostramos assim que

$$\varphi\psi = id_{\pi_1(\Gamma, a)} \text{ e } \psi\varphi = id_G$$

pois

$$\begin{aligned}\psi\varphi(fN) &= \psi\pi(f) = \psi([f_a f f_a^{-1}]) = \psi([f]) = fN \\ \varphi\psi([f]) &= \varphi(fN) = \pi(f) = [f_a f f_a^{-1}] = [f]\end{aligned}$$

ou seja, φ é um isomorfismo. $\square$

O teorema seguinte fornece uma outra apresentação para o grupo fundamental de um grafo, usando agora uma árvore maximal.

Teorema 32 *Seja Γ uma árvore maximal num grafo conexo Λ . Então $\pi_1(\Lambda)$ tem apresentação $\langle E \mid R \cup \{\varepsilon_n; \varepsilon_n \in E(\Gamma)\} \rangle$.*

Demonstração: Seja a um vértice de Λ . Para cada vértice x em Λ , seja f_x o único caminho irredutível em Γ de a à x . Obviamente os elementos $f_x \in F(E)$ são consequências de elementos $\{\varepsilon_n; \varepsilon_n \in E(\Gamma)\}$. Mostremos que os elementos $\{\varepsilon_n; \varepsilon_n \in E(\Gamma)\}$ são consequências de $\{f_x; x \in V(\Lambda)\} \cup \{\varepsilon_n \overline{\varepsilon_n}; \varepsilon_n \in E(\Lambda)\}$. De fato, ε_r é uma aresta de Γ ligando x a y , então $f_x \varepsilon_r = f_y$ ou $f_x = f_y \overline{\varepsilon_r}$. Nos dois casos ε_r é uma consequência de $\{f_x; x \in V(\Lambda)\} \cup \{\varepsilon \overline{\varepsilon}; \varepsilon \in E(\Lambda)\}$. $\square$

Corolário 33 *Seja Λ um grafo conexo e Γ uma árvore maximal de Λ . Então $\pi_1(\Lambda)$ é um grupo livre cuja base contém exatamente um elemento de cada par $(\varepsilon_n, \overline{\varepsilon_n})$ que não está em Γ . O elemento de $\pi_1(\Lambda)$ que corresponde a aresta ε_n é a classe de homotopia de $f_x \varepsilon_n f_y$ onde x e y são respectivamente os pontos inicial e final de ε_n e f_x e f_y são os únicos caminhos irredutíveis em Γ do ponto básico aos pontos x e y .*

Demonstração: Segue imediatamente do teorema anterior. $\square$

Corolário 34 *Um grafo conexo é uma árvore se e somente se o seu grupo fundamental é trivial.*

Demonstração: Segue de modo imediato do corolário acima. $\square$

Para o caso de grafos finitos, podemos caracterizar o grupo fundamental em termos do número de vértices e de arestas.

Corolário 35 *Seja Λ um grafo finito e conexo com n vértices e m pares de arestas. Então $\pi_1(\Lambda)$ é um grupo livre de posto $m - n + 1$.*

Demonstração: Seja Γ uma árvore maximal em Λ . Então Γ tem n vértices e $n - 1$ pares de arestas. O posto de $\pi_1(\Lambda)$ é o número de pares de arestas que não estão em Γ , isto é, $m - n + 1$. $\square$

Definição 36 *Sejam Γ e $\tilde{\Gamma}$ grafos conexos e $\rho : \tilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ um homomorfismo de grafos. Se para todo vértice $\tilde{x} \in \tilde{\Gamma}$, a aplicação ρ induz uma bijeção do conjunto de arestas de $\tilde{\Gamma}$ com ponto inicial $\tilde{x}$ ao conjunto de arestas de Γ com ponto inicial $\rho(\tilde{x})$, então a aplicação ρ é chamada aplicação de recobrimento e $\tilde{\Gamma}$ é chamado grafo de recobrimento de Γ .*

Proposição 37 *Sejam Γ e $\tilde{\Gamma}$ grafos conexos e $\rho : \tilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ uma aplicação de recobrimento. Então $\rho(\tilde{\Gamma}) = \Gamma$.*

Demonstração: A condição de recobrimento assegura que $\rho(E(\tilde{\Gamma})) = E(\Gamma)$ se tivermos que $\rho(V(\tilde{\Gamma})) = V(\Gamma)$, ou seja, basta mostrar que ρ é sobrejetora sobre os vértices de Γ . Como os grafos são todos não vazios, existe $x_0 \in \rho(V(\tilde{\Gamma}))$. Dado $x \in V(\Gamma)$, consideramos um caminho $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ com ponto inicial x_0 e ponto final x . A condição de recobrimento nos garante que $\varepsilon_1 = \rho(\tilde{\varepsilon}_1)$, para algum $\tilde{\varepsilon}_1 \in \tilde{\Gamma}$. Como ρ é homomorfismo, temos que $\rho(\tau(\tilde{\varepsilon}_1)) = \tau(\varepsilon_1)$. Usando novamente a condição de recobrimento, obtemos que $\varepsilon_2 = \rho(\tilde{\varepsilon}_2)$, para algum $\tilde{\varepsilon}_2 \in \tilde{\Gamma}$ e, recursivamente, teremos que $\rho(\tau(\tilde{\varepsilon}_n)) = \tau(\varepsilon_n) = x$. $\square$

Proposição 38 *Sejam Γ e $\tilde{\Gamma}$ grafos conexos e $\rho : \tilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ uma aplicação de recobrimento. Seja f um caminho de Γ com ponto inicial $x \in V(\Gamma)$. Então para qualquer vértice $\tilde{x} \in V(\tilde{\Gamma})$ tal que $\rho(\tilde{x}) = x$, existe um único caminho $\tilde{f}$ de $\tilde{\Gamma}$ com ponto inicial $\tilde{x}$ e tal que $\rho(\tilde{f}) = f$.*

Demonstração: Seja $f = e_1 e_2 \dots e_n$ um caminho em Γ tal que $\sigma(f) = x$. Suponha que para algum r existam únicas arestas $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_r$ de $\tilde{\Gamma}$ tais que $\tilde{e}_1 \tilde{e}_2 \dots \tilde{e}_r$ é um caminho em $\tilde{\Gamma}$ com ponto inicial $\tilde{x}$ e tal que $\rho(\tilde{e}_i) = e_i$ para $i \leq r$ onde $\rho(\tilde{x}) = x$. Então

$\rho(\tau(\tilde{e}_r)) = \tau(e_r)$ e deste modo existe uma única aresta $\widetilde{e_{r+1}}$ tal que $\sigma(\widetilde{e_{r+1}}) = \tau(\tilde{e}_r)$ e com $\rho(\widetilde{e_{r+1}}) = e_{r+1}$. O resultado segue por indução. $\square$

Encerramos esta seção de modo um tanto abrupto, com a seguinte:

Proposição 39 [Co, Cap. 5, Prop. 29] *Sejam Γ e $\tilde{\Gamma}$ grafos conexos e*

$$\rho : \tilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$$

uma aplicação de recobrimento. Sejam $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ caminhos em $\tilde{\Gamma}$ tais que $\sigma(\tilde{f}) = \sigma(\tilde{g})$ e $\rho(\tilde{f}) = \rho(\tilde{g})$. Então $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$.

1.3 Isometrias

Alguns resultados e definições desta seção fazem sentido num contexto mais amplo de grafos, mas restringimo-nos exclusivamente ao caso de árvores, pois como foi dito anteriormente, este é nosso principal objeto de estudo. Também nesta seção consideraremos apenas as isometrias de uma árvore em si mesma, ou seja, estamos considerando na realidade automorfismos, mas preferimos usar o termo isometria e esta escolha fará sentido no decorrer do texto.

A idéia de isometrias em árvores é tratada por Chiswell ([Ch, Cap. 3]), em um contexto mais amplo que o nosso, o de Λ -árvores, que em poucas palavras são definidas como árvores onde a métrica utilizada assume valores em um grupo abeliano ordenado qualquer, por exemplo $\mathbb{R}$, e não necessariamente nos naturais.

Nesta seção, árvores e sub-árvores serão assumidas não vazias, segmento geodésico será chamado apenas de segmento, e a menos que seja especificado, quando dissermos que $x \in \Gamma$, na verdade queremos dizer que $x \in V(\Gamma)$.

A classificação de isometrias em árvores é similar à classificação de isometrias em espaços hiperbólicos. Antes de falar da classificação de isometrias em árvores, a título de motivação, vamos apresentar de modo sucinto a classificação de isometrias em espaços hiperbólicos. Começemos com a seguinte definição genérica:

Definição 40 *Dada uma isometria $\varphi : X \longrightarrow X$ de um espaço métrico (X, d) , a função de translação de φ é definida por*

$$d_\varphi(z) = d(z, \varphi(z))$$

Uma isometria $\varphi : X \longrightarrow X$, pode ser caracterizada de acordo com o ínfimo da função de translação, do seguinte modo:

1. φ é dita elíptica se

$$\inf_{x \in X} d_\varphi(x) = 0$$

e existe x_0 tal que $d_\varphi(x_0) = \inf_{x \in X} d_\varphi(x)$, ou seja, se φ possui ponto fixo.

2. φ é dita parabólica se

$$\inf_{x \in X} d_\varphi(x) = 0$$

mas não existe x_0 tal que $d_\varphi(x_0) = \inf_{x \in X} d_\varphi(x)$.

3. φ é dita hiperbólica se

$$\inf_{x \in X} d_\varphi(x) > 0$$

e existe x_0 tal que $d_\varphi(x_0) = \inf_{x \in X} d_\varphi(x) > 0$.

4. φ é dita loxodrômica se

$$\inf_{x \in X} d_\varphi(x) > 0$$

e não existe x_0 tal que $d_\varphi(x_0) = \inf_{x \in X} d_\varphi(x) > 0$.

Esta classificação é particularmente importante no caso das isometrias que preservam orientação no plano hiperbólico.

Se considerarmos o modelo do disco de Poincaré $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ cuja fronteira é o círculo unitário $\partial\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, o grupo de isometrias que preservam orientação pode ser identificado com $PSL(2, \mathbb{R}) := Sl(2, \mathbb{R}) / \{\pm Id\}$ e neste contexto, as diferentes classes de isometrias podem ser caracterizadas pelo seguinte resultado:

Teorema 41 [Fi, Teorema 5.5] *Seja φ uma isometria. São equivalentes as seguintes afirmações em cada item:*

1.
 - φ é elíptica se $|\text{traço}(\varphi)| < 2$;
 - φ possui um ponto fixo $z \in \mathbb{D}^2$;

- as esferas centradas em z são invariantes por φ .
2.
 - φ é parabólica se $|\text{traço } (\varphi)| = 2$;
 - existe um único ponto $z \in \partial \mathbb{D}^2$ fixo por φ ;
 - as horoesferas centradas em z são invariantes por φ .
 3.
 - φ é hiperbólica se $|\text{traço } (\varphi)| > 2$;
 - existem dois pontos $z, w \in \partial \mathbb{D}^2$ fixo por φ ;
 - existe geodésica invariante por φ .

Como veremos, diversas destas caracterizações serão válidas também no caso de isometrias em árvores.

Em uma árvore existem três possíveis classes de isometrias, *elípticas*, *hiperbólicas* e *inversões*, que serão caracterizadas a seguir. No caso de árvores porém, não existem isometrias parabólicas ou loxodrômicas, pois uma árvore é um espaço discreto e consequentemente o ínfimo (de uma função contínua) é sempre atingido.

Definição 42 *Seja Γ uma árvore e φ uma isometria de $\Gamma \longrightarrow \Gamma$. Dizemos que:*

1. φ é elíptica se φ possui pontos fixos;
2. φ é inversão se φ^2 possui pontos fixos, mas φ não possui;
3. φ é hiperbólica se não é elíptica, nem inversão.

Exemplo 43 *A aplicação*

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longrightarrow -n + m\end{aligned}$$

define uma isometria elíptica do grafo canônico de $\mathbb{Z}$ se m for par e uma inversão se m for ímpar.

Exemplo 44 *Já a aplicação*

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longrightarrow n + m\end{aligned}$$

define sempre uma isometria hiperbólica do grafo canônico de $\mathbb{Z}$.

O comportamento de uma isometria elíptica é descrito na proposição seguinte, onde $\langle \varphi \rangle$ denota o subgrupo cíclico gerado por φ (no grupo de automorfismos métricos de Γ). Antes de enunciar a proposição, definimos o *ponto médio* de um segmento $[x, y]$ como um ponto $p \in [x, y]$ tal que $d(x, p) = d(y, p)$. É imediato verificar que $[x, y]$ possui ponto médio se, e somente se, $d(x, y)$ for par.

Proposição 45 *Sejam Γ uma árvore e φ uma isometria elíptica. Seja*

$$Fix(\varphi) = \{x \in \Gamma; \varphi x = x\}$$

o conjunto dos pontos fixos de φ . Então

1. *$Fix(\varphi)$ é uma sub-árvore não vazia, $\langle \varphi \rangle$ -invariante de Γ .*
2. *Se $x \in \Gamma$ e $[x, p]$ é a ponte entre x e $Fix(\varphi)$, então para qualquer $a \in Fix(\varphi)$, $p = Y(x, a, \varphi x)$ e p é o ponto médio de $[x, \varphi x]$. Além disso, $d(x, \varphi x) = 2d(x, p) = 2d(x, Fix(\varphi))$ e $[x, p] \subseteq [x, \varphi x] \cap [x, \varphi^{-1}x]$.*

Demonstração:

(1) Se φ fixa x e y , ela fixa o segmento $[x, y]$, pois φ é uma isometria, ou seja, $Fix(\varphi)$ é subgrafo conexo de Γ , portanto uma sub-árvore claramente não vazia e $\langle \varphi \rangle$ -invariante.

(2) Seja $a \in Fix(\varphi)$ e $x \in \Gamma$. Se $y \in [a, x]$, então y é o único ponto de $[a, x]$ a distância $d(a, y)$ de a , deste modo, φy é o único ponto de $[a, \varphi x]$ a distância $d(a, y)$ de a , daí segue que $y \in [a, x] \cap [a, \varphi x]$ se e somente se $y = \varphi y$, isto é, $[a, x] \cap [a, \varphi x] = [a, x] \cap Fix(\varphi) = [a, p]$, onde $p = Y(x, a, \varphi x)$, $[x, \varphi x] = [x, p, \varphi x]$ e $[a, x] = [a, p, x]$.

Logo $[p, x] \cap Fix(\varphi) = \{p\}$. Aplicando φ a ambos os termos desta igualdade temos

$$[\varphi p, \varphi x] \cap Fix(\varphi) = [p, \varphi x] \cap Fix(\varphi) = \{p\}$$

portanto $[x, \varphi x] \cap Fix(\varphi) = [x, p, \varphi x] \cap Fix(\varphi) = \{p\}$. Como

$$d(x, p) = d(\varphi x, \varphi p) = d(\varphi x, p)$$

p é o ponto médio de $[x, \varphi x]$ donde segue que $d(x, \varphi x) = 2d(x, p) = 2d(x, Fix(\varphi))$, ou seja, $[p, x]$ é a ponte entre x e $Fix(\varphi)$. Agora trocando φ por φ^{-1} , e notando que $Fix(\varphi) = Fix(\varphi^{-1})$, segue que $[x, p] \subseteq [x, \varphi x] \cap [x, \varphi^{-1}x]$. $\square$

A seguir será dada uma série de equivalências para se caracterizar uma isometria que é inversão.

Proposição 46 *Seja Γ uma árvore e φ uma isometria. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. φ é uma inversão, ou seja, φ^2 tem pontos fixos, mas φ não tem;
2. φ^2 tem pontos fixos e $\forall x \in \Gamma, d(x, \varphi x) \neq 2n, n \in \mathbb{N}$.
3. Existe um segmento de Γ invariante por φ , e a restrição de φ a este segmento não tem pontos fixos;
4. Existe um segmento $[x, y]$ em Γ tal que $\varphi x = y, \varphi y = x$ e $d(x, y) \neq 2n, n \in \mathbb{N}$;

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja p um ponto fixo de φ^2 . Então φ^2 fixa os extremos de $[p, \varphi p]$, deste modo fixa pontualmente este segmento. Tome $x \in \Gamma$ e seja $[x, q]$ a ponte entre x e $[p, \varphi p]$. Então $[\varphi x, \varphi q]$ é a ponte entre φx e $[p, \varphi p]$, e $\varphi q \neq q$ por hipótese. Pela proposição 25 temos que $[x, \varphi x] = [x, q, \varphi q, \varphi x]$ logo

$$\begin{aligned} d(x, \varphi x) &= d(x, q) + d(q, \varphi q) + d(\varphi q, \varphi x) \\ &= 2d(x, q) + d(q, \varphi q) \end{aligned}$$

mas, φ^2 fixa q , e deste modo o segmento $[q, \varphi q]$ é invariante por φ . Portanto $d(q, \varphi q) \neq 2n$, pois do contrário φ fixaria o ponto médio de $[q, \varphi q]$. Segue da igualdade acima que $d(x, \varphi x) \neq 2n, n \in \mathbb{N}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja p um ponto fixo de φ^2 . Então $[p, \varphi p]$ é invariante por φ , e pelo lema anterior, φ não tem pontos fixos.

(3) $\Rightarrow$ (4) Suponha que $\varphi[x, y] = [x, y]$, onde $x, y \in \Gamma$ e φ não fixa pontos em $[x, y]$. Então φ deve permutar os extremos x e y , e $[x, y]$ não tem ponto médio (caso contrário, tal ponto seria fixado por φ), de modo que $d(x, y) \neq 2n, n \in \mathbb{N}$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Assumindo (4), segue da proposição anterior que φ não tem pontos fixos (caso contrário $d(x, y) = d(x, \varphi x) = 2d(x, \text{Fix}(\varphi))$), no entanto, φ^2 fixa os pontos x e y . □

Definição 47 *Suponha φ uma isometria em uma árvore Γ . O conjunto característico de φ é o subconjunto*

$$A_\varphi := \{p \in \Gamma; [\varphi^{-1}p, p] \cap [p, \varphi p] = \{p\}\}$$

Vimos na primeira seção deste capítulo que para vértices x, y, z em uma árvore, são equivalentes:

- $[x, y] \cap [y, z] = \{y\}$;
- $[x, z] = [x, y] \cup [y, z]$;
- $[x, z] = [x, y, z]$, isto é, $y \in [x, z]$;
- $Y(x, y, z) = y$;
- $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$.

Logo podemos reescrever A_φ da seguinte maneira

$$A_\varphi = \{p \in \Gamma; p \in [\varphi^{-1}p, \varphi p]\}$$

Se φ é elíptica, segue da proposição 45 que $A_\varphi = \text{Fix}(\varphi)$. Se φ é uma inversão, então A_φ é vazio. De fato, suponha $p \in A_\varphi$, φ não tem pontos fixos mas φ^2 os tem. Segue novamente da proposição 45 aplicado a φ^2 que o ponto médio p de $[\varphi^{-1}p, \varphi p]$ é fixo por φ^2 , equivalentemente $\varphi^{-1}p = \varphi p$, e desde que $p \in [\varphi^{-1}p, \varphi p]$, $p = \varphi p$, uma contradição.

Se φ é uma isometria hiperbólica, a estrutura de A_φ é descrita pelo seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [Ch, Cap.3, Teor. 1.4].

Teorema 48 *Sejam Γ uma árvore e φ é uma isometria hiperbólica. Então*

1. A_φ é uma geodésica $\langle \varphi \rangle$ -invariante.
2. φ restrito a A_φ é equivalente a uma translação $a \longrightarrow a + l(\varphi)$ para algum $l(\varphi) \in \mathbb{Z}$.
3. Se $x \in \Gamma$ e $[x, p]$ é a ponte entre x e A_φ , então $p = Y(\varphi^{-1}x, x, \varphi x)$, $[x, \varphi x] \cap A_\varphi = [p, \varphi p]$, $[x, \varphi x] = [x, p, \varphi p, \varphi x]$ e $d(x, \varphi x) = l(\varphi) + 2d(x, p)$.

Quando φ é hiperbólica, A_φ é chamado de eixo de φ .

De modo geral, consideramos a função translação $d_\varphi(x) = d(x, \varphi x)$ e denotamos

$$l(\varphi) := \min_{x \in \Gamma} d_\varphi(x).$$

Conforme observamos anteriormente, $l(\varphi) = 0$ se, e somente se, φ for elíptica.

O conjunto característico de uma isometria φ (que não seja inversão) está intimamente relacionado a $l(\varphi)$, conforme mostra o corolário a seguir:

Corolário 49 *Seja φ uma isometria em uma árvore Γ . Então φ é uma inversão se e somente se $A_\varphi = \emptyset$. Se φ não é uma inversão, então $l(\varphi) = \min \{d(x, \varphi x) ; x \in \Gamma\}$ e $A_\varphi = \{p \in \Gamma ; d(p, \varphi p) = l(\varphi)\}$.*

Demonstração: Segue do teorema anterior e de observar que se φ é elíptica, então $l(\varphi) = 0$ e $A_\varphi = \text{Fix}(\varphi)$. $\square$

Corolário 50 [Ch, Cap.3, Cor. 1.6] *Seja φ uma isometria em uma árvore Γ . Suponha que φ não é uma inversão. Então A_φ intercepta toda sub-árvore $\langle \varphi \rangle$ -invariante de Γ , e é minimal com esta propriedade.*

A seguir vamos listar algumas propriedades simples, porém importantes de A_φ .

Proposição 51 *Sejam φ e ψ isometrias de uma árvore Γ , então:*

1. $A_{\psi\varphi\psi^{-1}} = \psi A_\varphi$ e $l(\psi\varphi\psi^{-1}) = l(\varphi)$;
2. $A_{\varphi^{-1}} = A_\varphi$;
3. Se n é um inteiro, então $l(\varphi^n) = |n|l(\varphi)$, e $A_\varphi \subseteq A_{\varphi^n}$. Se $l(\varphi) > 0$ e $n \neq 0$ então $A_\varphi = A_{\varphi^n}$;
4. Se Λ é uma sub-árvore $\langle \varphi \rangle$ -invariante de Γ , então $l(\varphi) = l(\varphi|_\Lambda)$ e $A_{\varphi|_\Lambda} = A_\varphi \cap \Lambda$.

Demonstração: Se φ é uma inversão, $\psi\varphi\psi^{-1}$ também o é e (1) é satisfeito. Se φ não é uma inversão (1) segue do corolário 49.

Também o segundo item segue imediatamente da definição de A_φ .

Já o item (3) é evidente se $l(\varphi) = 0$ ou $n = 0$. (Se φ é uma inversão, potências ímpares de φ são inversões e potências pares são elípticas, pela proposição 46). Vamos assumir $l(\varphi) > 0$ e $n \neq 0$. Então φ^n age em A_φ como uma translação de amplitude $|n|l(\varphi)$, assim pela definição de A_{φ^n} , $A_\varphi \subseteq A_{\varphi^n}$. Além disso, por (1), A_{φ^n} é $\langle \varphi \rangle$ -invariante, e φ deve induzir uma translação em A_{φ^n} (uma vez que φ^2 não tem pontos fixos). Portanto pela definição de A_φ , $A_{\varphi^n} \subseteq A_\varphi$, e (3) é satisfeito.

Vamos agora provar a última afirmação. Se φ não é uma inversão, então $\Lambda \cap A_\varphi \neq \emptyset$, pelo corolário anterior, assim $l(\varphi) = l(\varphi|_\Lambda)$ e $A_{\varphi|_\Lambda} = A_\varphi \cap \Lambda$ pelo corolário 49. Se φ é uma inversão, então φ não tem pontos fixos em Λ , mas $\Lambda \cap A_{\varphi^2} \neq \emptyset$ pelo corolário 49, assim φ^2 tem um ponto fixo em Λ . Deste modo $\varphi|_\Lambda$ é uma inversão, e (4) é satisfeito. $\square$

1.4 Ações de Grupos em Árvores

De modo geral, a ação de grupos em grafos faz o papel de ponte entre as teorias combinatória de grupos e topologia. Esta teoria tem inúmeras aplicações. Por exemplo, a teoria de grupos agindo em árvores fornece uma caracterização dos grupos que tem um certo tipo de estrutura em função da ação destes grupos em árvores. Um dos primeiros resultados, como veremos mais adiante, é que um grupo G é livre se, e somente se G "age livremente em uma árvore". Uma consequência deste resultado é que qualquer subgrupo de um grupo livre é livre. Muitos outros exemplo de aplicações desta teoria e uma leitura mais abrangente pode ser encontrada em [Co], [Di] ou [Se], mas nos restringiremos aos resultados realmente básicos.

Definição 52 *Uma ação de um grupo G em um conjunto X é um homomorfismo $\phi : G \longrightarrow \text{Sim}(X)$, onde $\text{Sim}(X)$ é o grupo das permutações de X . Quando G age em X , dizemos que X é um G -conjunto.*

Por simplicidade denotamos $gx := \phi(g)(x)$ (onde $g \in G$ e $x \in X$) para representar a ação a esquerda de G .

Um grafo Γ é chamado um G -grafo se ambos $V(\Gamma)$ e $E(\Gamma)$ são G -conjuntos, e além disso $\overline{ge} = g\overline{e}$ e $\tau(ge) = g(\tau(e))$ para todo $g \in G$ e $e \in E(\Gamma)$.

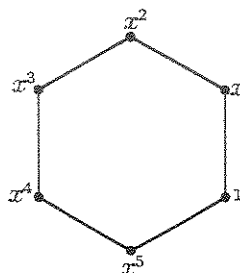
A um grupo G gerado por um conjunto S , podemos associar um grafo, conhecido como *grafo* ou *diagrama de Cayley* de G com relação a S , que é construído do seguinte modo:

Se G é um grupo com apresentação $G = \langle S \mid R \rangle$, o grafo ou diagrama de Cayley de G é o grafo $\Gamma(G, S)$ tal que $V(\Gamma(G, S)) = G$ e $E(\Gamma(G, S)) = G \times S \times \{-1, 1\}$, onde $\sigma(g, x, 1) = g$ e $\tau(g, x, 1) = gx$, e com $\overline{(g, x, \delta)} = (g, x, -\delta)$, para $\delta = \pm 1$, e dois vértices g, h são adjacentes se, e somente se, $g^{-1}h \in S$.

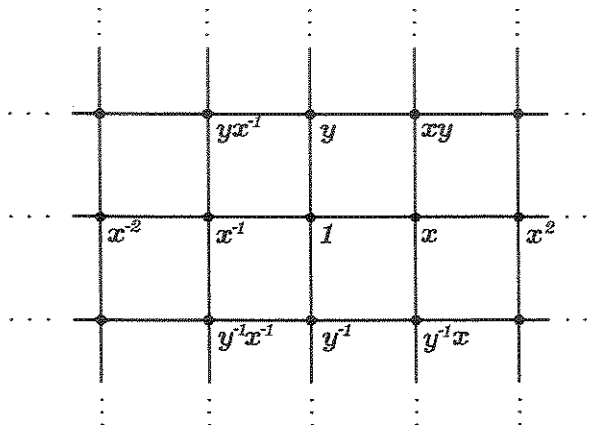
Observe que o grafo obtido é altamente dependente da apresentação do grupo.

Exemplo 53 *O grafo canônico de $\mathbb{Z}$ nada mais é que o grafo de Cayley da apresentação $\mathbb{Z} = \langle 1 \mid \emptyset \rangle$.*

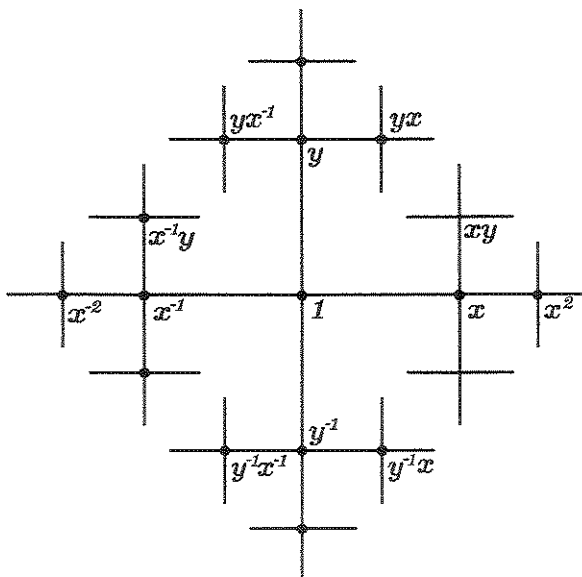
Exemplo 54 Seja $G = \langle x \mid x^6 = 1 \rangle$, então o grafo de Cayley é dado pelo seguinte diagrama



Exemplo 55 Seja $G = \langle x, y \mid xy = yx \rangle$, ou seja, G é um grupo abeliano livre com dois geradores. O grafo $\Gamma(G, \{x, y\})$ é dado por



Exemplo 56 Para o grupo livre $F = \langle x, y \rangle$, o grafo de Cayley $\Gamma(F, \{x, y\})$ é dado por



Seja G um grupo agindo em um grafo Γ . Se existe algum $g \in G$ e alguma aresta ε_n em Γ , tal que $g\varepsilon_n = \overline{\varepsilon_n}$, dizemos que G age com inversões, caso contrário dizemos que G age sem inversões.

Dizemos que um grupo G age livremente em um grafo Γ se para qualquer $g \in G - \{1\}$ e para qualquer vértice x de Γ , $gx \neq x$.

Dados $G = \langle X \mid R \rangle$ e $\Gamma = \Gamma(G, X)$, existe uma ação natural de G em Γ definida do seguinte modo:

Um elemento $g \in G$, associa o vértice x (que é um elemento de G) com o produto gx e a aresta (h, y, δ) com a aresta (gh, y, δ) . Note que $G = \langle X \mid R \rangle$ age livremente e sem inversões em seu grafo de Cayley.

A proposição a seguir mostra algumas relações entre a apresentação de um grupo e seu grafo de Cayley.

Proposição 57 [Co, Cap.8, Lema 1] *Sejam G um grupo, S um subconjunto de G e $\Gamma(G, S)$ o grafo de Cayley de G com relação a S . Então:*

1. $\Gamma(G, S)$ é conexo se, e somente se, G é gerado por S ;
2. $\Gamma(G, S)$ é uma floresta se, e somente se, $\langle S \rangle$ é livremente gerado por S ;
3. $\Gamma(G, S)$ é uma árvore se, e somente se, G é livre com base S .

Vamos agora ver alguns resultados que relacionam a estrutura de um grupo com a estrutura topológica de um grafo no qual o grupo age. Começamos com a seguinte definição:

Definição 58 *Seja Γ um grafo e $\tilde{\Gamma}$ seu grafo de recobrimento. Um automorfismo de $\tilde{\Gamma}$ cuja projeção sobre a base é identidade, é chamado transformação de recobrimento de $\tilde{\Gamma}$.*

Proposição 59 *Seja $\rho : \tilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ um recobrimento de grafos. Então o grupo G das transformações de recobrimento ρ atua livremente e sem inversões sobre $\tilde{\Gamma}$.*

Demonstração: Seja g um elemento não trivial de G tal que $gx = x$ para algum $x \in V(\tilde{\Gamma})$. Por definição a imagem do automorfismo $g \in G$ de $\tilde{\Gamma}$ via a aplicação ρ é a identidade de Γ , isto é, g como automorfismo é uma extensão da identidade de Γ . É obvio que a identidade de $\tilde{\Gamma}$ é extensão da identidade de Γ . Como toda extensão é

única, temos que g é identidade de $\tilde{\Gamma}$, absurdo, pois tomamos g não trivial. Finalmente assumimos que $g\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ para alguma aresta ε em $\tilde{\Gamma}$. Então $\rho(\varepsilon) = \rho(g\varepsilon) = \rho(\bar{\varepsilon}) = \overline{\rho(\varepsilon)}$, uma contradição. $\square$

Teorema 60 *Um grupo G é livre se, e somente se existe uma árvore Γ e uma ação livre e sem inversões de G em Γ .*

Demonstração: Seja Γ uma árvore e seja G um grupo que atua livre e sem inversões sobre Γ . Então a aplicação $\bar{\cdot}: E(\Gamma/G) \longrightarrow E(\Gamma/G)$ pode ser definida porque a ação do grupo G é sem inversões e segue que Γ/G é também um grafo. A aplicação $\Gamma \longrightarrow \Gamma/G$ é um recobrimento pois a ação de G sobre Γ é livre. O grupo fundamental do grafo Γ/G é isomorfo à G . Como o grupo fundamental de qualquer grafo é um grupo livre, G é livre.

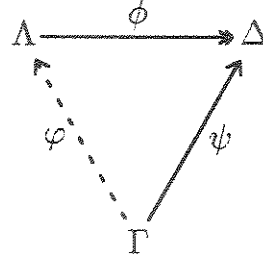
Reciprocamente, sejam $G = F(S)$ um grupo livre e Γ_0 um grafo com apenas um vértice e um par de arestas $\{\varepsilon, \bar{\varepsilon}\}$ para cada elemento de S , onde cada uma destas arestas é um ciclo, ou seja, $\sigma(\varepsilon) = \tau(\varepsilon)$. Seja ainda Γ o recobrimento universal de Γ_0 . Então Γ é simplesmente conexo. $F(S)$ é o grupo fundamental de Γ_0 e é isomorfo ao grupo de automorfismos do recobrimento $\Gamma \longrightarrow \Gamma_0$. Esse grupo atua livre e sem inversões sobre Γ que portanto é uma árvore, na realidade o grafo de Cayley $\Gamma(G, S)$. $\square$

Definição 61 *Um homomorfismo de grafos $\phi: \Gamma \longrightarrow \Delta$ é chamado localmente sobrejetor se para todo vértice $x \in \Gamma$ e toda aresta $e \in \Delta$, tal que $\sigma(e) = \phi(x)$ existe uma aresta e_1 de Γ com $\sigma(e_1) = x$ e $\phi(x) = e$. Dizemos que ϕ é localmente injetor se para quaisquer duas arestas distintas e_1 e e_2 de Γ tais que $\sigma(e_1) = \sigma(e_2)$, as arestas $\phi(e_1)$ e $\phi(e_2)$ de Δ são distintas. Um homomorfismo ϕ é localmente bijetor se é localmente injetor e localmente sobrejetor.*

Observação: Um homomorfismo localmente bijetor, é um recobrimento de grafos.

Proposição 62 *Seja $\phi: \Lambda \longrightarrow \Delta$ um homomorfismo de grafos localmente sobrejetor. Seja Γ uma árvore e seja $\psi: \Gamma \longrightarrow \Delta$ um homomorfismo de grafos. Seja ainda $a \in V(\Gamma)$ e $x \in V(\Lambda)$ tais que $\phi(x) = \psi(a)$. Então existe um homomorfismo de grafos $\varphi: \Gamma \longrightarrow \Lambda$ tal que $\varphi(a) = x$ e $\phi \circ \varphi = \psi$.*

Demonstração: Consideremos todos os pares (Γ_1, φ_1) tais que Γ_1 é uma sub-árvore de Γ com $a \in V(\Gamma_1)$, $\varphi_1 : \Gamma_1 \longrightarrow \Lambda$ é um homomorfismo de grafos tal que $\varphi_1(a) = x$ e $\phi \circ \varphi_1$ é a restrição de ψ sobre Γ_1 . Tais pares existem, por exemplo $\Gamma_1 = \{a\}$ satisfaz as condições.



Definimos a relação $(\Gamma_1, \varphi_1) < (\Gamma_2, \varphi_2)$ se Γ_1 é uma sub-árvore de Γ_2 e φ_1 é a restrição de φ_2 sobre Γ_1 . Usando o lema de Zorn obtemos que existe um par maximal (Γ_0, φ_0) .

Suponha que $\Gamma_0 \neq \Gamma$. Então existe uma aresta ε tal que $\sigma(\varepsilon) \in \Gamma_0$ e $\tau(\varepsilon) \notin \Gamma_0$. Como ϕ é um homomorfismo localmente sobrejetor obtemos que existe uma aresta ε_1 de Λ tal que $\sigma(\varepsilon_1) = \varphi_0(\sigma(\varepsilon))$ e tal que $\phi(\varepsilon_1) = \psi(\varepsilon)$. Então definimos $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\varepsilon, \bar{\varepsilon}, \tau(\varepsilon)\}$ e φ_1 é a extensão de φ_0 à Γ_1 dada por $\varphi_1(\varepsilon) = \varepsilon_1$, contradizendo a maximalidade do par (Γ_0, φ_0) . $\square$

Proposição 63 *Seja $\phi : \Gamma \longrightarrow \Delta$ um homomorfismo de grafos que é localmente injetor. Sejam φ e ψ homomorfismos de um grafo conexo Λ à Γ tais que $\phi \circ \varphi = \phi \circ \psi$. Se existir um vértice x de Λ tal que $\varphi(x) = \psi(x)$ então $\varphi = \psi$.*

Demonstração: Seja $S = \{x \in V(\Lambda) ; \varphi(x) = \psi(x)\}$. Consideremos uma aresta ε em Λ tal que $\sigma(\varepsilon) \in S$. Então $\varphi(\varepsilon)$ e $\psi(\varepsilon)$ são arestas em Γ com mesmos pontos iniciais e mesma imagem em Δ . Como ϕ é localmente injetor isso implica que $\varphi(\varepsilon) = \psi(\varepsilon)$ e então $\tau(\varepsilon) \in S$. Isso implica que $S = V(\Lambda)$ e $\varphi = \psi$. $\square$

Proposição 64 *Sejam $\phi : \Gamma_1 \longrightarrow \Delta$, $\psi : \Gamma_2 \longrightarrow \Delta$, homomorfismos de grafos localmente bijetores onde Γ_1 e Γ_2 são árvores. Sejam x e y vértices de Γ_1 e Γ_2 respectivamente, tais que $\phi(x) = \psi(y)$. Então existe um único isomorfismo de grafos $\varphi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ tal que $\varphi(x) = y$ e $\psi \circ \varphi = \phi$.*

Demonstração: Como Γ_1 é uma árvore e ψ é localmente sobrejetor, existe um homomorfismo $\varphi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ tal que $\varphi(x) = y$ e $\psi \circ \varphi = \phi$. Como ψ é localmente injetor φ é o único homomorfismo com essas propriedades. Agora trocamos os papéis de Γ_1 e Γ_2 e obtemos um único homomorfismo $\omega : \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma_1$ tal que $\omega(y) = x$ e $\phi \circ \omega = \psi$. Então $\omega \circ \varphi(x) = x = id_{\Gamma_1}(x)$ e como ϕ é localmente injetor obtemos que $\omega \circ \varphi = id_{\Gamma_1}$. Usando a mesma idéia provamos que $\omega \circ \varphi = id_{\Gamma_2}$. $\square$

Proposição 65 *Seja $\phi : \Gamma \longrightarrow \Lambda$ um homomorfismo de grafos.*

1. *Se ϕ é localmente sobrejetor e Λ é conexo, então ϕ é sobrejetor.*
2. *Se ϕ é localmente injetor, Γ conexo e Λ uma árvore, então ϕ é injetor.*
3. *Se ϕ é localmente bijetor e Γ e Λ são árvores, então ϕ é bijetor.*

Demonstração:

(1) Seja ε uma aresta de Λ tal que $\sigma(\varepsilon) \in \phi(V(\Gamma))$. Tome um vértice x de Γ tal que $\phi(x) = \sigma(\varepsilon)$. Como ϕ é localmente sobrejetor, existe uma aresta ε_1 de Γ tal que $\sigma(\varepsilon_1) = x$ e $\phi(\varepsilon_1) = \varepsilon$. Logo temos que $\tau(\varepsilon) \in \phi(V(\Gamma))$, como Λ é conexo, segue que ϕ é sobrejetor.

(2) É suficiente mostrar que ϕ é injetor sobre os vértices. Supomos que x e y são vértices diferentes tais que $\phi(x) = \phi(y)$. Como Γ é conexo existe um caminho irredutível $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ de x a y . Então $\phi(\varepsilon_1) \phi(\varepsilon_2) \dots \phi(\varepsilon_n)$ é um caminho fechado em Λ . Como Λ é uma árvore, existe i tal que $\phi(\varepsilon_i) = \overline{\phi(\varepsilon_{i+1})} = \phi(\overline{\varepsilon_{i+1}})$. Como ϕ é localmente injetor, obtemos que $\varepsilon_i = \overline{\varepsilon_{i+1}}$, uma contradição.

(3) Segue imediatamente dos itens anteriores. $\square$

Diversos outros resultados sobre ações de grupos em grafos, obtidos por exemplo através de extensões HNN e produtos livres amalgamados de grupos, podem ser interessantes para o estudo de reflexões em contextos mais amplos que aquele que desenvolveremos no próximo capítulo e portanto serão omitidos nesta seção.

Capítulo 2

Reflexões e Grupos de Automorfismos

Motivados pelo estudo dos grupos gerados por reflexões em espaços de curvatura constante, como por exemplo os grupos de Coxeter [Hu], surgiu a idéia de estudar os grupos gerados por reflexões em outros espaços, como por exemplo árvores.

A primeira questão que surge é como definir uma reflexão em uma árvore. Ao tentar escolher uma definição de reflexões em árvores, deparamo-nos com um grau de liberdade muito grande para sua escolha pois, por exemplo, em um espaço euclidiano ou hiperbólico uma reflexão em um hiperplano é definida usualmente de modo geométrico e as únicas exigências são que a reflexão seja uma involução que deixe fixo um conjunto convexo de pontos. Por outro lado, em um trabalho de 1982 ([Mo]), Gadi Moran define reflexão em uma árvore apenas como um automorfismo que é também uma involução e demonstra usando esta definição que em uma árvore regular (quaisquer dois vértices da árvore tem a mesma valência) todo automorfismo pode ser escrito como uma bi-reflexão, ou seja, como o produto de duas reflexões ([Mo, teor. 4.13])

O nosso objetivo é conseguir uma definição significativa de reflexões em árvores e estudar as propriedades decorrentes da definição adotada, ou seja, usando uma definição mais restrita que a usada por Moran, tentar verificar o que acontece com o grupo dos automorfismos de uma árvore Γ em relação ao grupo gerado por reflexões.

2.1 Reflexões

A definição de reflexão que adotamos é válida para árvores, assim como grafos em geral. Não obstante, restringiremos nosso estudo ao caso de árvores regulares, uma opção razoável neste contexto, se considerarmos que num certo sentido estas são um equivalente discreto a se trabalhar com curvatura constante. Desta maneira segue abaixo a definição escolhida e que usaremos no decorrer do trabalho.

Definição 66 *Uma **reflexão** em um grafo Γ é um automorfismo de grafos $\phi : \Gamma \longrightarrow \Gamma$, satisfazendo:*

1. ϕ é uma involução, ou seja, $\phi^2 = \text{Id}$.
2. O conjunto de pontos fixos de ϕ é uma geodésica completa $\gamma \subset \Gamma$, ou seja, $\phi(x) = x \Leftrightarrow x \in \gamma$.

Dizemos nesta circunstância que ϕ é uma reflexão na geodésica γ .

Uma *geodésica completa* é um segmento, semi-geodésica ou geodésica γ tal que todo vértice $x \in \gamma$ de valência maior ou igual a 2 em Γ , tiver valência 2 em γ .

A aplicação ϕ deve ser um automorfismo de ordem 2 pois, mimetizando o que ocorre em outras estruturas, queremos que uma reflexão seja uma isometria bijetora e uma involução. A escolha de uma geodésica completa como conjunto de pontos fixos segue do fato de uma geodésica ser um conjunto convexo não limitado maximal no sentido de podermos estender qualquer subconjunto convexo limitado, e de certa maneira está relacionada com a noção de reta de reflexão em planos euclidianos e hiperbólicos. Esta não é obviamente a única escolha natural, poderíamos escolher outras classes de conjuntos convexos ilimitados como conjuntos de pontos fixos. Outras possibilidades de escolha serão discutidas mais adiante.

Definição 67 *Dada uma geodésica completa γ , definimos G_γ como o conjunto de todas as reflexões na geodésica $\gamma \in \Gamma$. Denotamos por $\langle G_\gamma \rangle$ o sub-grupo de $\text{Aut}(\Gamma)$ gerado por G_γ .*

Dadas geodésicas γ e β , os conjuntos G_γ e G_β são essencialmente equivalentes se a árvore Γ for regular. Começamos por demonstrar o seguinte:

Lema 68 *Sejam γ e β duas geodésicas em uma árvore regular Γ . Então, existe uma isometria $\psi : \Gamma \longrightarrow \Gamma$, tal que $\psi(\gamma) = \beta$.*

Demonstração: Este é um resultado que imaginamos ser conhecido mas que decidimos demonstrar tanto por não encontrarmos referência bibliográfica, tanto por apresentar mecanismos que serão utilizados novamente mais adiante.

Primeiramente vamos supor que $\gamma \cap \beta = \{x_0\}$, ou seja, este vértice x_0 divide as geodésicas γ e β em semi-geodésicas. Denotaremos por γ_1, γ_2 e β_1, β_2 estas semi-geodésicas de γ e β respectivamente. A partir deste vértice rotulamos os vértices de Γ de uma maneira sistemática, embora um tanto abstrata. Começamos por enumerar os vértices que distam 1 de x_0 por $x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}$ onde n é a valência de Γ . Como Γ é regular, cada um dos vértices $x_{0,i}$ está ligado a exatamente $n - 1$ vértices que distam 2 de x_0 . Denotamos estes vértices por $x_{0,i,1}, x_{0,i,2}, \dots, x_{0,i,n-1}$. Seguindo deste modo, cada vértice $x \in \Gamma$ recebe um rótulo $x_{0,i_1,i_2,\dots,i_k}$ onde $i_1 \in 1, 2, \dots, n$, $i_j \in 1, 2, \dots, n - 1$ se $j \geq 2$ e $k = d(x, x_0)$.

Observe que a distância entre dois vértices pode ser facilmente determinada a partir de seus rótulos. Sejam $x = x_{0,i_1,i_2,\dots,i_k}$ e $y = x_{0,j_1,j_2,\dots,j_l}$ dois vértices de Γ . Seja

$$r = \max \{s \leq \min \{k, l\} \mid i_t = j_t \text{ se } t \leq s\},$$

onde por convenção, $i_0 = j_0 = 0$. Então, $d(x, y) = k + l - 2r$.

Como $\gamma \cap \beta = \{x_0\}$, os rótulos de Γ podem ser escolhidos de modo a termos as semi-geodésicas $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2$ determinadas respectivamente pelas sequências

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= x_0, x_{0,1}, x_{0,1,1}, \dots, x_{0,1,1,\dots,1}; \\ \gamma_2 &:= x_0, x_{0,2}, x_{0,2,1}, \dots, x_{0,2,1,\dots,1}; \\ \beta_1 &:= x_0, x_{0,n}, x_{0,n,1}, \dots, x_{0,n,1,\dots,1}; \\ \beta_2 &:= x_0, x_{0,n-1}, x_{0,n-1,1}, \dots, x_{0,n-1,1,\dots,1}. \end{aligned}$$

Definimos então uma aplicação do seguinte modo:

$$\psi(x) = \begin{cases} x_{0,n,i_2,\dots,i_k} & \text{se } x = x_{0,1,i_2,\dots,i_k} \\ x_{0,n-1,i_2,\dots,i_k} & \text{se } x = x_{0,2,i_2,\dots,i_k} \\ x_{0,1,i_2,\dots,i_k} & \text{se } x = x_{0,n,i_2,\dots,i_k} \\ x_{0,2,i_2,\dots,i_k} & \text{se } x = x_{0,n-1,i_2,\dots,i_k} \\ x & \text{caso contrário} \end{cases}$$

É imediato constatar que ψ é uma isometria. Além disto, por construção, temos que $\psi(\gamma_i) = \beta_i$ para $i = 1, 2$.

O caso em que $\gamma \cap \beta$ contém mais de um ponto pode ser resolvido de modo semelhante. Se a intersecção destas geodésicas for infinita, esta deve ser uma semi-geodésica, comum, digamos $\gamma_2 = \beta_2$. Tomamos então x_0 como ponto inicial desta e rotulamos os vértices de Γ tomando o cuidado de termos γ_1 e β_1 rotuladas respectivamente por

$$\begin{aligned} & x_0, x_{0,1}, x_{0,1,1}, \dots, x_{0,1,1,\dots,1}; \\ & x_0, x_{0,n}, x_{0,n,1}, \dots, x_{0,n,1,\dots,1}. \end{aligned}$$

Definimos então

$$\psi(x) = \begin{cases} x_{0,n,i_2,\dots,i_k} & \text{se } x = x_{0,1,i_2,\dots,i_k} \\ x_{0,1,i_2,\dots,i_k} & \text{se } x = x_{0,n,i_2,\dots,i_k} \\ x & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e aplicamos o mesmo raciocínio.

O caso em que $\gamma \cap \beta$ contém mais de um ponto mas é finito, pode ser reduzido ao caso anterior. Neste caso, a intersecção das geodésicas é um segmento. Escolhemos um dos seus pontos iniciais e o rotulamos por x_0 . Chamamos de γ_1 (β_1) a semi-geodésica de γ (β) com ponto inicial x_0 que intercepta β (γ) apenas neste ponto. Definimos então uma isometria ψ como no caso anterior e obtemos que $\psi(\gamma_1) = \beta_1$. Temos então que $\psi(\gamma) \cap \beta = \psi(\gamma_1) \cup (\gamma \cap \beta)$ é uma semi-geodésica, de modo que caímos no caso anterior.

Suponha então que $\gamma \cap \beta = \emptyset$. Denotamos por α_1 o segmento geodésico ligando γ a β e por x_0 e y_0 seus pontos extremos em γ e β respectivamente. Sejam então γ_1 e β_1 semi-geodésicas de γ e β com pontos iniciais x_0 e y_0 respectivamente. Temos então que $\alpha := \gamma_1 \cup \beta_1 \cup \alpha_1$ é uma geodésica que intercepta β em uma semi-geodésica. Sabemos então que existe ψ tal que $\psi(\gamma) \cap \beta = \psi(\gamma_1)$ é uma semi-geodésica e caímos no caso anterior, o que conclui a demonstração do lema. $\square$

Proposição 69 *Seja Γ uma árvore regular, γ e β geodésicas dadas em Γ , então G_β é conjugado à G_γ , ou seja, existe automorfismo ψ tal que $\psi \circ G_\gamma \circ \psi^{-1} = G_\beta$.*

Demonstração: Uma reflexão ϕ pertence a $G_\gamma \Leftrightarrow \phi(x) = x, \forall x \in \gamma$. Pelo lema anterior, existe ψ isometria, tal que $\psi(\gamma) = \beta$, logo $\forall x \in \beta$, existe $y \in \gamma$ tal que $y = \psi(x)$. Como $\phi(x) = x$, temos que

$$\phi(\psi^{-1}(y)) = \psi^{-1}(y) \Rightarrow \psi \circ \phi \circ \psi^{-1}(y) = y,$$

de modo que $(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1})$ fixa a geodésica β . Como $(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1})^2 = \text{Id}$, segue que G_β é conjugado à G_γ . $\square$

Corolário 70 *Para quaisquer geodésicas γ e β em uma árvore regular, os subgrupos $\langle G_\gamma \rangle$ e $\langle G_\beta \rangle$ são conjugados em $\text{Aut}(\Gamma)$.*

Demonstração: Segue imediatamente da proposição anterior. $\square$

Reflexões existem e podem ser construídas de modo sistemático. Mostraremos como construir e descrever uma reflexão genérica em árvores regulares de valência par. A hipótese de paridade deve-se ao fato de que a definição adotada não é satisfeita em árvores de valência ímpar, pois neste caso, necessariamente teríamos pontos fixos não pertencentes à geodésica completa escolhida, é o que mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 71 *Seja Γ uma árvore regular de valência 3 e $\gamma \subset \Gamma$ uma geodésica completa. Se ϕ for uma isometria de Γ que fixa γ pontualmente, então ϕ fixa todos os vértices que distam 1 de γ .*

Esta restrição poderia ser contornada se modificássemos ligeiramente a definição de reflexão, determinando que o conjunto de pontos fixos seja um conjunto convexo completo, no mesmo sentido adotado na definição 66, ou seja, um conjunto conexo que pode ser descrito como união (não necessariamente finita) de geodésicas, semi-geodésicas ou segmentos completos. Não desenvolveremos este conceito neste trabalho e nos restringiremos no restante deste capítulo ao caso de árvores regulares de valência par. Como estas podem ser olhadas como o grafo de Cayley de um grupo livre, que tem importância singular em teoria de grupos, acreditamos que este contexto continua sendo interessante.

Acreditamos que o desenvolvimento destas idéias para casos mais gerais pode ser feito seguindo a mesma linha que desenvolvemos abaixo, exigindo no entanto cuidados adicionais, principalmente se considerarmos o aspecto essencialmente construtivo que adotamos. Assim, este tipo de generalização permanece como uma possibilidade de desenvolvimento futuro.

Definição 72 *Seja Γ uma árvore regular de valência par $m \geq 2$, e γ uma geodésica completa em Γ . Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos:*

1. $V_n(\gamma) = V_n := \{x \in V(\Gamma); d(x, \gamma) = n\}$, ou seja, o conjunto formado pelos vértices que distam n da geodésica γ . Observe que $V_0 = \gamma$;
2. $U_n(\gamma) = U_n := \{x \in V(\Gamma); d(x, \gamma) \leq n\} = \cup_{j=0}^n V_j$;
3. Para cada $y \in V_n$, $\Gamma_j^y(\gamma) = \Gamma_j^y := \{x \in V_{n+j} | d(x, y) = j\}$;
4. Para cada $y \in V_n$, $\Gamma^{y,k}(\gamma) = \Gamma^{y,k} := \cup_{j=0}^k \Gamma_j^y =$ árvore finita maximal contida em $U_{n+k} \setminus U_{n-1}$.
5. Para cada $y \in V_n$, $\Gamma^y(\gamma) = \Gamma^y := \cup_{j=0}^{\infty} \Gamma_j^y =$ árvore maximal contida em $\Gamma \setminus U_{n-1}$.

Introduzimos um rotulamento dos vértices de Γ ligeiramente distinto do que usamos na demonstração do lema 68. Lembramos que estamos trabalhando com uma árvore regular de valência m par. Começamos rotulando os vértices de γ por

$$\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

onde $d(x_i, x_j) = |i - j|$. Dado então um ponto $x_n \in \gamma$, rotulamos os vértices de $\Gamma_1^{x_n}$ por $x_{n,1}, \dots, x_{n,m-2}$. A seguir, rotulamos os vértices de $\Gamma_1^{x_{n,i}}$ por $x_{n,i,1}, \dots, x_{n,i,m-1}$, com $i = 1, \dots, m-2$. Prosseguimos de modo similar: dado vértice $x_{n,i_1,i_2,\dots,i_k}$, rotulamos os vértices de $\Gamma_1^{x_{n,i_1,i_2,\dots,i_k}}$ por $x_{n,i_1,i_2,\dots,i_k,1}, \dots, x_{n,i_1,i_2,\dots,i_k,m-1}$. Também neste caso é fácil determinar a distância entre dois vértices em termos de seus rótulos. Se $x = x_{n,i_1,i_2,\dots,i_k}$ e $y = x_{p,j_1,j_2,\dots,j_l}$, definimos

$$r = \max \{s \leq \min \{k, l\} | i_t = j_t \text{ se } t \leq s\},$$

onde, por convenção, $i_0 = n$ e $j_0 = p$. Então,

$$d(x, y) = k + l - 2r + |n - p|.$$

Dado $n \in \mathbb{Z}$, escolhemos $\phi_{n,1}^* \in S_{m-2}$ (conjunto das permutações de $m-2$ elementos) de modo que $\phi_{n,1}^*$ seja produto de exatamente $\frac{m-2}{2}$ transposições disjuntas. Já para $i > 1$, escolhemos $\phi_{n,i}^* \in S_{m-1}$ (conjunto das permutações de $m-1$ elementos) de modo que $\phi_{n,i}^*$ seja produto de transposições disjuntas, não necessariamente envolvendo todos os elementos ($\phi_{n,i}^*$ pode inclusive ser a identidade em S_{m-1}).

Consideramos as seguintes aplicações:

1. $\tilde{\sim}_{n,1} : S_{m-2} \longrightarrow S_{\Gamma_1^{x_n}}$ (conjunto das permutações dos $m - 2$ elementos de $\Gamma_1^{x_n}$) um isomorfismo e definimos $\tilde{\phi}_{n,1} = \tilde{\sim}_{n,1} (\phi_{n,1}^*)$;
2. $\tilde{\sim}_{n,i} : S_{m-1} \longrightarrow S_{\Gamma_1^{x_n, j_1, j_2, \dots, j_{i-1}}}$ (conjunto das permutações dos $m - 1$ elementos de $\Gamma_1^{x_n, j_1, j_2, \dots, j_{i-1}}$) um isomorfismo e definimos $\tilde{\phi}_{n,i} = \tilde{\sim}_{n,i} (\phi_{n,i}^*)$ $i \geq 2$.

Definição 73 Dado $x \in \Gamma$, x rotulado por $x = x_{n, j_1, j_2, \dots, j_l}$, definimos $\phi_i \in \text{Aut}(\Gamma^{x_n})$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= x_{n, j_1, j_2, \dots, \tilde{\phi}_{n,i}(j_i), j_{i+1}, \dots, j_l} & \text{se } d(x, x_n) = l \geq i \\ \phi_i(x) &= x & \text{se } d(x, x_n) = l < i \end{aligned}$$

Proposição 74 Fixamos uma geodésica completa $\gamma \subset \Gamma$. Dado um vértice $x = x_{n, j_1, \dots, j_l} \in \Gamma$ definimos $\phi(x) := \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_l(x)$, com cada ϕ_i como acima. Então, ϕ é uma reflexão em γ .

Demonstração: Vamos considerar o rotulamento feito acima. Primeiramente ϕ está bem definida, pois cada ϕ_i fixa os pontos de γ e restrito às sub-árvores $\Gamma^{x_n, l}$ é um automorfismo.

Da maneira como cada ϕ_j foi definida, temos que ϕ_j permuta os vértices de Γ^{x_n} que distam j do vértice x_n , ou seja, temos que para $x = x_{n, i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_l}$

$$\phi_j(x) = x_{n, i_1, i_2, \dots, \tilde{\phi}_{n,j}(i_j), \dots, i_l}$$

Logo

$$\begin{aligned} \phi^2(x) &= (\phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_l)^2(x) \\ &= \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_l \circ \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_l(x) \\ &= \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_l \circ \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_l(x_{n, i_1, i_2, \dots, i_l}) \\ &= \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_l \circ \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_{l-1} \left(x_{n, i_1, i_2, \dots, \tilde{\phi}_{n,l}(i_l)} \right) \\ &= \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_l \circ \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_{l-2} \left(x_{n, i_1, i_2, \dots, \tilde{\phi}_{n,l-1}(i_{l-1}), \tilde{\phi}_{n,l}(i_l)} \right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_l \left(x_{n, \tilde{\phi}_{n,1}(i_1), \tilde{\phi}_{n,2}(i_2), \dots, \tilde{\phi}_{n,l}(i_l)} \right) \\
&= \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_{l-1} \left(x_{n, \tilde{\phi}_{n,1}(i_1), \tilde{\phi}_{n,2}(i_2), \dots, \tilde{\phi}_{n,l}^2(i_l)} \right) \\
&= \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_{l-2} \left(x_{n, \tilde{\phi}_{n,1}(i_1), \tilde{\phi}_{n,2}(i_2), \dots, \tilde{\phi}_{n,l-1}^2(i_{l-1}), \tilde{\phi}_{n,l}^2(i_l)} \right) \\
&\quad \vdots \\
&= \phi_1 \left(x_{n, \tilde{\phi}_{n,1}(i_1), \tilde{\phi}_{n,2}^2(i_2), \dots, \tilde{\phi}_{n,l}^2(i_l)} \right) \\
&= \left(x_{n, \tilde{\phi}_{n,1}^2(i_1), \tilde{\phi}_{n,2}^2(i_2), \dots, \tilde{\phi}_{n,l}^2(i_l)} \right) = x
\end{aligned}$$

pois por construção, cada $\tilde{\phi}_{n,j}$ é uma involução, ou seja, ϕ , definida como acima, é uma involução. Para concluir a demonstração falta apenas mostrar que $\phi(x) = x$ se, e somente se, $x \in \gamma$.

Se $x \in \gamma$ é óbvio que $\phi(x) = x$, pela própria definição. Vamos supor por absurdo que $\phi(x) = x$ e que $x \notin \gamma$. Como Γ é uma árvore, existe um único $x_n \in \gamma$ tal que $d(x, \gamma) = d(x, x_n)$. Temos então que todo o segmento $[x_n, x]$ é fixo por ϕ , em particular o vértice $x_{n,i}$ adjacente a x_n , um absurdo, pois $\tilde{\phi}_{n,1}(j) \neq j$ para todo $j = 1, 2, \dots, m-2$ (lembre que $\phi_{n,1}^*$ envolve exatamente $\frac{m-2}{2}$ transposições disjuntas) e além disto $\phi_s \left(x_{n, \tilde{\phi}_{n,1}(i)} \right) = x_{n, \tilde{\phi}_{n,1}(i)}$ para todo $s \geq 2$. Portanto $\text{Fix}(\phi) = \gamma$ e temos que ϕ é uma reflexão. $\square$

Antes de prosseguirmos com o texto na busca de respostas sobre a relação entre o grupo de automorfismos de uma árvore regular e o grupo gerado pelas reflexões nas geodésicas desta árvore, vamos abrir um parênteses e olhar como se comportam as reflexões com relação a classificação das isometrias discutida no capítulo anterior.

Obviamente, reflexões são isometrias elípticas, pois os pontos da geodésica são pontos fixos. Procuramos então classificar as isometrias geradas por reflexões em termos da posição relativa das geodésicas de reflexão. Antes de tudo, devemos observar que uma inversão não pode ser obtida como produto de reflexões. De fato, se φ é uma inversão, temos que $d(x, \varphi(x))$ é sempre ímpar pela proposição 46, enquanto $d(x, \phi(x))$ é sempre par, para toda reflexão ϕ e para todo vértice $x \in V(\Gamma)$, é o que mostra o seguinte lema:

Lema 75 *Sejam $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ reflexões em uma dada árvore Γ e $\varphi(x) = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_n(x)$ uma isometria. Então $d_\varphi(x) \equiv 0 \pmod{2}$ para todo $x \in \Gamma$, onde d_φ é a função de translação de φ .*

Demonstração: Se ϕ é uma reflexão na geodésica $\gamma = \text{Fix}(\phi)$, então, para todo $x \in \Gamma$, o ponto $x_0 \in \gamma$ que realiza a distância $d(x, \gamma)$ é ponto médio do segmento $[x, \phi(x)]$. Se considerarmos duas reflexões ϕ_1 e ϕ_2 , então o caminho $[x, \phi_2(x)] \cup [\phi_2(x), \phi_1 \circ \phi_2(x)]$ é um caminho de comprimento par ligando x a $\phi_1 \circ \phi_2(x)$, não necessariamente irreduzível. Para obter-se um caminho irreduzível, deve-se eventualmente cancelar um segmento final de $[x, \phi_2(x)]$ com um segmento inicial de $[\phi_2(x), \phi_1 \circ \phi_2(x)]$. Como o cancelamento ocorre aos pares, o caminho irreduzível $[x, \phi_1 \circ \phi_2(x)]$ tem comprimento par, ou seja, $d(x, \phi_1 \circ \phi_2(x)) \equiv 0 \pmod{2}$. O caso geral segue por indução sobre n de modo análogo. $\square$

Teorema 76 *Sejam Γ uma árvore regular e φ uma isometria definida como $\varphi = \phi_2 \circ \phi_1$, onde ϕ_1, ϕ_2 são reflexões em geodésicas γ_1 e γ_2 respectivamente. Então, φ é elíptica se e somente se $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$.*

Demonstração: Se $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$, é óbvio que φ é elíptica, pois qualquer vértice na intersecção é fixo por ambas as reflexões.

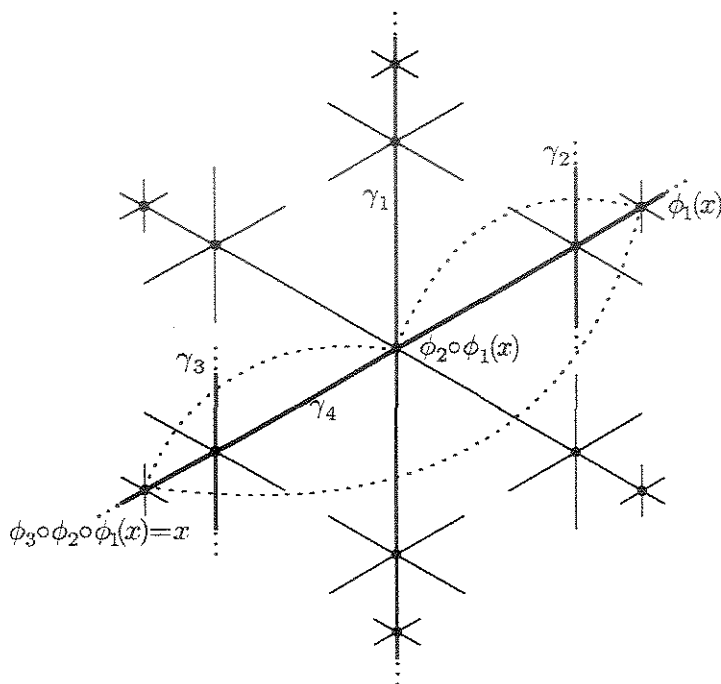
Se φ é elíptica, então existe $x \in \Gamma$, tal que $\varphi(x) = x$. Como ϕ_1 é reflexão, $d(x, \phi_1(x))$ é par, logo existe $x_1 \in \gamma_1$, tal que x_1 é o ponto médio do caminho reduzido entre x e $\phi_1(x)$. Como ϕ_2 também é reflexão, existe $x_2 \in \gamma_2$, tal que x_2 é o ponto médio do caminho reduzido entre $\phi_1(x)$ e $\phi_2 \circ \phi_1(x)$, pois $d(x, \phi_2(x))$ é par para todo $x \in V(\Gamma)$, em particular $\phi_1(x) \in V(\Gamma)$. Por hipótese, $\phi_2 \circ \phi_1(x) = x$, e temos que x_2 é o ponto médio do caminho reduzido entre x e $\phi_1(x)$. Mas, como Γ é uma árvore, o ponto médio é único e temos que $x_1 = x_2$, ou seja, $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$. $\square$

Corolário 77 *Seja $\varphi = \phi_2 \circ \phi_1$ como acima. Então φ é hiperbólica se, e somente se $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$.*

Demonstração: Segue imediatamente do caso anterior, pois φ não pode ser uma inversão. $\square$

Infelizmente uma isometria que se expressa como produto de mais de duas reflexões, não pode ser classificada de modo imediato pela posição relativa das geodésicas. É o que mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 78 Sejam Γ uma árvore regular de valência 6, e $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ geodésicas disjuntas como na figura abaixo. Seja γ_4 uma geodésica transversal a cada γ_i , ou seja, a intersecção de γ_4 com cada γ_i é exatamente um ponto, onde $i = 1, 2, 3$. Suponha que γ_4 seja invariante com relação as reflexões ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 que são definidas nas respectivas geodésicas γ_1, γ_2 e γ_3 , ou seja, φ restrito a γ_4 age como reflexão em $\mathbb{Z}$, onde $\varphi(x) := \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1(x)$. Apesar de γ_1, γ_2 e γ_3 serem disjuntas, φ é elíptica.



Mesmo não sendo possível a classificação com relação a posição das geodésicas, podemos fazê-lo se admitirmos a existência de geodésica invariante por todas elas.

Proposição 79 Sejam Γ uma árvore regular de valência par e $\varphi = \phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \dots \circ \phi_1$, onde ϕ_i é reflexão na geodésica γ_i . Suponha que existe uma geodésica γ invariante por φ e transversal às geodésicas de reflexão γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, isto é, a intersecção de γ com cada γ_i é exatamente um ponto. Então:

1. Se n for par, φ é hiperbólica, a menos que a restrição de φ à γ seja a identidade.
2. Se n for ímpar, φ é elíptica.

Demonstração: O isomorfismo entre o grafo canônico de $\mathbb{Z}$ e γ induz uma ação de cada ϕ_i em $\mathbb{Z}$, cada uma das quais da forma $x \mapsto -x + 2m_i$ (exemplo 43), onde m_i é

o elemento de $\mathbb{Z}$ correspondente a intersecção $\gamma \cap \gamma_i$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \dots \circ \phi_1(x) \\ &= \phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \dots \circ \phi_2(-x + 2m_1) \\ &= \phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \dots \circ \phi_3(x - 2m_1 + 2m_2) \\ &\vdots \\ &= (-1)^n x + 2 \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} m_i.\end{aligned}$$

Como γ é invariante por φ , temos que a função translação d_φ assume seu mínimo em γ .

Se n for par, temos que $\varphi(x) = x + 2 \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} m_i$. Como $2 \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} m_i$ é um inteiro par, se existir x_0 tal que $\varphi(x_0) = x_0$, teremos que $2 \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} m_i = 0$, implicando que $\varphi(x) = x$ para todo $x \in \gamma$, ou seja, a menos que a restrição de φ a γ seja a identidade, temos que φ é hiperbólica.

Se n for ímpar, temos que $\varphi(x) = -x + 2 \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} m_i$. Segue que o ponto $x_0 = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} m_i$ é fixo por φ , ou seja, φ é elíptica. $\square$

2.2 O Grupo de Automorfismos de Árvores Regulares

Voltamos agora a nossa questão principal, a determinação do índice do grupo gerado por reflexões no grupo de automorfismos de Γ .

Definição 80 *Sejam Γ uma árvore e $\mathcal{H}(\Gamma)$ o conjunto das semi-geodésicas em Γ . Dizemos que $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{H}(\Gamma)$ tem a mesma direção se $\gamma_1 \cap \gamma_2$ é uma semi-geodésica.*

É fácil ver que isto define uma relação de equivalência em $\mathcal{H}(\Gamma)$. As classes de equivalência são chamadas *direções*. Definimos $\mathcal{D}(\Gamma)$ como o conjunto das direções em Γ . Note que se $x \in V(\Gamma)$ então existe uma e somente uma semi-geodésica em uma dada direção começando em x .

Sejam Γ uma árvore regular de valência $n \in \mathbb{N}$ e $G := \text{Aut}(\Gamma)$. A condição de que todo vértice em Γ tem a mesma valência é exatamente o que precisamos para tornar G transitivo. Isto também assegura que $B(x, i)$ é uma órbita de G_x . Além

disso, podemos ver que G é transitivo no conjunto de geodésicas e semi-geodésicas em Γ . Se $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{H}(\Gamma)$ tem a mesma direção, então $g\gamma_1$ e $g\gamma_2$ tem a mesma direção, onde $g \in G$.

Seguindo os passos de Möller ([Mö]), definimos uma relação $\sim$ em Γ por:

$$x \sim y \iff d(x, y) = 0 \bmod (2)$$

É fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência em Γ . Se $x \in \Gamma$, então $\{\sim(x)\}$ denota o conjunto de vértices que estão a uma distância par de x , deste modo $\sim$ tem duas classes de equivalência. Como vimos no teorema 20 distâncias em Γ são preservadas por G , deste modo $\sim$ é preservada por G . Definimos então

$$G_0 := \{g \in G; x \sim gx \text{ para todo } x \in \Gamma\}$$

É claro que como $G = \text{Aut}(\Gamma)$, então G_0 é subgrupo de G .

Proposição 81 [Mö, Prop.1] *O grupo G_0 é normal em G e o índice $|G : G_0| = 2$.*

Este resultado obtido por Möller, nos motivou ainda mais a investigar o grupo dos automorfismos gerados por reflexões, pois se g é um automorfismo gerado por reflexões $d(x, gx) = 0 \bmod (2)$ para todo $x \in \Gamma$. A questão é saber se todo automorfismo $g \in G_0$ se escreve como produto de reflexões.

Conforme já mencionado, adotamos uma definição de reflexão bem mais restritiva que aquela adotada por Moran. Apesar de trabalharmos com um conjunto sensivelmente menor, no caso em que Γ tem valência constante $4k$, é possível demonstrar que estas reflexões são suficientes para construir os automorfismos de translação par, no sentido que todo automorfismo $\varphi \in G_0$ pode ser expresso como limite do produto de reflexões. Para isso, necessitamos de alguns resultados preliminares.

No restante deste capítulo, Γ representará uma árvore regular de valência $4k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Esta condição é estritamente necessária para o lema seguinte.

Lema 82 *Sejam $x_0 \in \Gamma$ e $x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,4k}$ vértices de Γ tais que, $d(x_{0,i}, x_0) = 1$, $i = 1, 2, \dots, 4k$. Seja ψ_{ij} uma isometria tal que $\psi_{ij}(x_0) = x_0$, $\psi_{ij}(x_{0,i}) = x_{0,j}$, $\psi_{ij}(x_{0,j}) = x_{0,i}$ e $\psi_{ij}(x_{0,n}) = x_{0,n}$ para todo $n \neq i, j$. Então existem reflexões $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r$ tais que $\phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_r(x_{0,n}) = \psi_{ij}(x_{0,n})$, para todo $n \in \{1, 2, \dots, 4k\}$.*

Demonstração: Sejam $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r$, reflexões tais que $\phi_i(x_0) = x_i, i = 1, 2, \dots, r$. Por definição, (ver construção que precede a proposição 74) em uma árvore de valência par m , temos que cada reflexão restrita aos vértices que distam 1 da geodésica de reflexão pode ser escrita como produto disjunto de transposições envolvendo $(m - 2)$ vértices, em particular, como x_0 é fixo por cada ϕ_i , x_0 pertence a cada geodésica de reflexão, ou seja, como a valência de Γ é $4k$, cada $\phi_i \mid_{B(x_0,1)}$ pode ser escrita como produto de $(2k - 1)$ transposições disjuntas. Tomemos ϕ_j e ϕ_l , tais que:

$$\begin{aligned}\phi_j(x_{0,j_1}) &= x_{0,j_2} \text{ e } \phi_j(x_{0,j_2}) = x_{0,j_1} \\ \phi_j(x_{0,l_1}) &= x_{0,l_2} \text{ e } \phi_j(x_{0,l_2}) = x_{0,l_1} \\ \phi_l(x_{0,j_1}) &= x_{0,j_2} \text{ e } \phi_l(x_{0,j_2}) = x_{0,j_1} \\ \phi_l(x_{0,l_1}) &= x_{0,l_2} \text{ e } \phi_l(x_{0,l_2}) = x_{0,l_1} \\ \phi_j(x_{0,i}) &= \phi_l(x_{0,i}) \text{ para todo } i \neq j_1, j_2, l_1, l_2\end{aligned}$$

onde $x_{0,j_1}, x_{0,j_2}, x_{0,l_1}, x_{0,l_2}$ são distintos e pertencem à $\{x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,4k}\}$. Agora tomemos $\phi_j \circ \phi_l \mid_{B(x_0,1)}$, se escrevermos ϕ_j e ϕ_l como produto de transposições é imediato verificar que

$$\phi_j \circ \phi_l \mid_{B(x_0,1)} = (x_{0,j_1} x_{0,j_2}) (x_{0,l_1} x_{0,l_2})$$

ou seja, obtemos um par de transposições. De modo semelhante, é possível escolher reflexões duas a duas a fim de obter qualquer par de transposições disjuntas dos vértices $x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,4k}$. Em particular, podemos obter como resultado da composição de reflexões, k pares de transposições disjuntas e distintas, ou seja, $2k$ transposições, como segue:

$$\phi = (\phi_{i_1} \circ \phi_{i_2} \circ \dots \phi_{i_{2k}}) \mid_{B(x_0,1)} = (x_{0,i_1} x_{0,i_2}) (x_{0,i_3} x_{0,i_4}) \dots (x_{0,i_{4k-1}} x_{0,i_{4k}})$$

onde $x_{0,i_1}, x_{0,i_2}, x_{0,i_3}, x_{0,i_4}, \dots, x_{0,i_{4k-1}}, x_{0,i_{4k}}$ é uma ordenação arbitrária dos vértices $x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,4k}$.

Como cada $\phi_i \mid_{B(x_0,1)}$ é escrita como $(2k - 1)$ transposições disjuntas, escolhemos ϕ_i da seguinte maneira:

$$\phi_i \mid_{B(x_0,1)} = (x_{0,i_1} x_{0,i_2}) \dots (x_{0,i_{j-2}} x_{0,i_{j-1}}) (x_{0,i_{j+2}} x_{0,i_{j+3}}) \dots (x_{0,i_{4k-1}} x_{0,i_{4k}})$$

ou seja, $\phi_i \mid_{B(x_0,1)}$ fixa os vértices x_{0,i_j} e $x_{0,i_{j+1}}$.

É imediato verificar que

$$\phi \circ \phi_i \mid_{B(x_0,1)} = (x_{0,i}, x_{0,i+1})$$

ou seja, obtemos a transposição de quaisquer dois vértices como produto de reflexões. $\square$

Proposição 83 *Sejam $x_0 \in \Gamma$ e $x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,4k}$ vértices de Γ tais que, $d(x_{0,i}, x_0) = 1$, $i = 1, 2, \dots, 4k$. Dada uma isometria elíptica $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Gamma$, com $\varphi(x_0) = x_0$, existem reflexões $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l$ com $\phi_i(x_0) = x_{0,i}$, $i = 1, 2, \dots, l$ tais que $\phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_l(x_{0,n}) = \varphi(x_{0,n})$, para todo $n \in \{1, 2, \dots, 4k\}$.*

Demonstração: Como qualquer isometria restrita à $B(x_0, 1)$ se escreve como permutação dos vértices $x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,4k}$ e qualquer permutação é produto de transposições, segue pelo lema anterior que qualquer isometria restrita à $B(x_0, 1)$ se escreve como produto de reflexões. $\square$

Lema 84 *Dados x_0, v_1, v_2 vértices de Γ tais que $d(v_1, x_0) = d(v_2, x_0) = R$ e $w_1^1, w_2^1, w_1^2, w_2^2$ satisfazendo:*

1. $d(w_j^i, v_i) = 1$, ou seja, w_j^i e v_i são adjacentes, com $i, j = 1, 2$;
2. $d(w_j^i, x_0) > d(v_i, x_0)$, ou seja, $v_i \in [x_0, w_j^i]$ com $i, j = 1, 2$;

Existem reflexões ϕ e ψ tais que:

1. $\phi(x_0) = \psi(x_0) = x_0$;
2. $\phi \circ \psi(w_1^i) = w_2^i$ e $\phi \circ \psi(w_2^i) = w_1^i$, com $i = 1, 2$;
3. $\phi \circ \psi(x) = x$ se $d(x, x_0) \leq R + 1$ e $x \neq w_j^i$, com $i, j = 1, 2$.

Demonstração: Como $d(v_1, x_0) = d(v_2, x_0) = R$, segue que $d(v_1, v_2)$ é par. Seja x_1 o ponto médio do caminho que liga v_1 à v_2 (eventualmente coincidente com x_0). Identifiquemos o caminho que liga x_1 à v_1 pela sequência de vértices $x_1 = x_1^1, x_2^1, \dots, x_{l-1}^1, x_l^1 = v_1$ e o que liga x_1 à v_2 por $x_1 = x_1^2, x_2^2, \dots, x_{l-1}^2, x_l^2 = v_2$. Seja γ uma geodésica passando

por x_0 e x_1 e tal que os vértices x_2^1 e x_2^2 não pertençam a esta geodésica. Seja ϕ uma reflexão em γ , definida da seguinte maneira:

$$\phi|_{B(x_0, R+1)} = (S) (x_2^1 x_2^2) (x_3^1 x_3^2) \dots (x_{l-1}^1 x_{l-1}^2) (v_1 v_2) (w_1^1 w_1^2) (w_2^1 w_2^2)$$

onde S representa um produto qualquer das transposições envolvendo os outros vértices. Tome agora ψ também uma reflexão em γ definida da seguinte maneira:

$$\psi|_{B(x_0, R+1)} = (S) (x_2^1 x_2^2) (x_3^1 x_3^2) \dots (x_{l-1}^1 x_{l-1}^2) (v_1 v_2) (w_1^1 w_1^2) (w_2^1 w_2^2)$$

onde S é o mesmo produto de transposições definido acima.

Como $x_0 \in \gamma$, temos que

$$\phi(x_0) = \psi(x_0) = x_0$$

Tomando agora a composta $\phi \circ \psi$ temos que

$$\phi \circ \psi = (w_1^1 w_2^2) (w_2^1 w_1^2) (w_1^1 w_1^2) (w_2^1 w_2^2) = (w_2^1 w_1^1) (w_2^2 w_1^2)$$

ou seja,

$$\phi \circ \psi(w_1^i) = w_2^i \text{ e } \phi \circ \psi(w_2^i) = w_1^i \text{ onde } i = 1, 2$$

além disso,

$$\phi \circ \psi(x) = x \text{ se } d(x, x_0) \leq R + 1 \text{ e } x \neq w_j^i \text{ onde } i, j = 1, 2$$

□

Lema 85 Dados v, x_0 vértices de Γ tal que $d(v, x_0) = R$ e w_1, w_2 satisfazendo:

1. $d(w_i, v) = 1$, ou seja, w_i e v são adjacentes, com $i = 1, 2$;
2. $d(w_i, x_0) > d(v, x_0)$, ou seja, $v \in [x_0, w_i]$, com $i = 1, 2$.

Então existem reflexões ϕ e ψ tais que:

1. $\phi \circ \psi(w_1) = w_2$ e $\phi \circ \psi(w_2) = w_1$;
2. $\phi \circ \psi(x) = x$ se $d(x, x_0) \leq R + 1$ e $x \neq w_i$ onde $i = 1, 2$.

Demonstração: Tomemos $y_0 \in V(\Gamma)$, tal que

$$\begin{aligned} d(y_0, x_0) &= 1 \\ d(v, y_0) &> d(v, x_0) \end{aligned}$$

Identifiquemos agora $v = v_1, w_1 = w_1^1, w_2 = w_2^1$ e tomemos $v_2 \in V(\Gamma)$, de modo que y_0 seja o ponto médio do caminho que liga v_1 à v_2 . Escolhemos agora w_1^2 e w_2^2 satisfazendo

$$\begin{aligned} d(w_1^2, v_2) &= d(w_2^2, v_2) = 1 \\ d(w_i^2, y_0) &> d(v_2, y_0) \text{ onde } i = 1, 2 \end{aligned}$$

Pelo lema anterior, existem reflexões ϕ e ψ tais que:

$$\begin{aligned} \phi(y_0) &= \psi(y_0) = y_0 \\ \phi \circ \psi(w_1^i) &= w_2^i \text{ e } \phi \circ \psi(w_2^i) = w_1^i \text{ onde } i = 1, 2 \\ \phi \circ \psi(x) &= x \text{ se } d(x, y_0) \leq R + 2 \text{ e } x \neq w_j^i, \text{ } i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Por construção, temos que $B(x_0, R + 1) \subset B(y_0, R + 2)$ e também que

$$d(w_i^2, x_0) = d(w_i^2, y_0) + d(y_0, x_0) = R + 3$$

logo segue que

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi(w_1) &= w_2 \text{ e } \phi \circ \psi(w_2) = w_1 \\ \phi \circ \psi(x) &= x \text{ se } d(x, x_0) \leq R + 1 \text{ e } x \neq w_i \text{ onde } i = 1, 2 \end{aligned}$$

□

Proposição 86 *Seja $x_0 \in \Gamma$ e seja $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Gamma$, uma isometria elíptica tal que $\varphi(x_0) = x_0$. Então para todo $R \geq 1$, existem reflexões $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l$ tais que $\varphi|_{B(x_0, R)} = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_l|_{B(x_0, R)}$.*

Demonstração: Vamos usar indução sobre R .

O caso $R = 1$ foi demonstrado na proposição 83.

Supondo a proposição válida para $r < R$, temos que existem reflexões $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ tais que

$$\varphi|_{B(x_0, R-1)} = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_m|_{B(x_0, R-1)}$$

Seja $v \in V(\Gamma)$ tal que $d(v, x_0) = R - 1$ e sejam $w_1, w_2, \dots, w_{4k-1}$ vértices tais que

$$d(w_i, v) = 1 \text{ e } d(w_i, x_0) = R, \text{ onde } i = 1, 2, \dots, 4k - 1$$

Seja $v' = \varphi(v)$ e $w'_i = \varphi(w_i)$. Como $d(v, x_0) = R - 1$, temos que

$$v' = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_m(v)$$

além disso,

$$\phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_m(w_i) = w'_j \text{ para algum } j \in \{1, 2, \dots, 4k - 1\}$$

Para concluir a demonstração, basta observar que toda permutação se escreve como produto de transposições e aplicar o lema anterior. $\square$

A sequência $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l$ da proposição anterior é chamada de *construção de φ* , ou *φ -construção*.

Antes de apresentar o teorema principal desta seção, e que é consequência dos resultados acima, vamos fazer algumas considerações.

Um grupo G de isometrias de um espaço métrico (X, d) pode ser dotado de uma topologia, conhecida como topologia da convergência uniforme sobre os compactos. Definida do seguinte modo:

Dada uma sequência $g_n \in G$, dizemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g_0 \in G$ se, para todo compacto $K \subseteq X$, dado $\delta > 0$ existir $N > 0$ tal que $d(g_n(x), g_0(x)) < \delta$ para todo $n \geq N$ e todo $x \in K$. Restringindo-nos ao caso em questão, quando $G = \text{Aut}(\Gamma)$, como os compactos são conjuntos finitos e a métrica de Γ é discreta, basta dizermos que $\lim \phi_n = \phi_0$ se para todo $x \in \Gamma$ existir N_x tal que $\phi_n(x) = \phi_0(x)$ para todo $n > N_x$.

Considerando esta topologia em $\text{Aut}(\Gamma)$, definimos $\overline{\langle \mathcal{R} \rangle}$ como o grupo gerado pelo fecho de $\langle \mathcal{R} \rangle$ em $\text{Aut}(\Gamma)$. Na prática, $\overline{\langle \mathcal{R} \rangle}$ é dado por sequências $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{R}$ tal que

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \dots \circ \phi_1(x)$$

existe para todo $x \in \Gamma$ e tais $\phi(x) \in \text{Aut}(\Gamma)$, assim como composição destas. Com estas definições, a proposição seguinte segue de modo imediato da proposição 86:

Proposição 87 *Seja Γ uma árvore regular com valência $4k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Dado $x_0 \in \Gamma$, denote por $\mathcal{R}_{x_0}$ o conjunto de reflexões que fixam o vértice x_0 e por $\text{Aut}(\Gamma)_{x_0}$ o estabilizador de x_0 em $\text{Aut}(\Gamma)$. Então $\overline{\langle \mathcal{R}_{x_0} \rangle} = \text{Aut}(\Gamma)_{x_0}$.*

Demonstração: Segue de modo imediato da proposição anterior, pois todo automorfismo que fixa x_0 é uma isometria elíptica. $\square$

Teorema 88 *Seja Γ uma árvore regular com valência $4k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Seja*

$$\langle \mathcal{R} \rangle := \langle \phi; \phi \text{ é reflexão} \rangle$$

o grupo gerado por reflexões. Então $\overline{\langle \mathcal{R} \rangle} = G_0$ onde

$$G_0 := \{ \phi \in \text{Aut}(\Gamma); d(x, \phi(x)) \equiv 0 \pmod{2} \text{ para todo } x \in \Gamma \}.$$

Demonstração: Para mostrar que $\overline{\langle \mathcal{R} \rangle} = G_0$, basta mostrar que $G_0 \subseteq \overline{\langle \mathcal{R} \rangle}$, pois a inclusão $\overline{\langle \mathcal{R} \rangle} \subseteq G_0$ é óbvia, uma vez que pelo lema 75 todo produto de reflexões é par.

Se $\phi \in G_0$ tem pontos fixos, então ϕ é uma isometria elíptica e pela proposição 87, segue que $\phi \in \overline{\langle \mathcal{R} \rangle}$. Suponha então que ϕ não tem pontos fixos, então como $\phi \in G_0$, $d(x, \phi(x)) = 0 \pmod{2}$, existe $p \in \Gamma$, ponto médio entre x e $\phi(x)$. Escolhemos $\varphi \in \mathcal{R}$ tal que $\varphi(\phi(x)) = x$, de modo que $\varphi \circ \phi$ tem x como ponto fixo. Segue então que $\varphi \circ \phi \in \overline{\langle \mathcal{R} \rangle}$ e como φ também pertence a $\overline{\langle \mathcal{R} \rangle}$, isso implica que $\phi \in \overline{\langle \mathcal{R} \rangle}$, ou seja, $G_0 \subseteq \overline{\langle \mathcal{R} \rangle}$. $\square$

Corolário 89 *O fecho $\overline{\langle \mathcal{R} \rangle}$ do grupo $\langle \mathcal{R} \rangle$ gerado por reflexões tem índice dois no grupo de automorfismos de Γ .*

Demonstração: Consequência imediata do teorema anterior e da proposição 81. $\square$

Capítulo 3

Grupos Pré-Hjelmslev e Árvores

Por não ser um tópico canônico em teoria de grupos, sentimos a necessidade de fazer uma breve apresentação sobre os grupos pré-Hjelmslev.

Preocupado com os fundamentos da geometria, J. Hjelmslev, já no início do século passado (aproximadamente 1907), teve a idéia, que posteriormente foi levada adiante por F. Bachmann [Ba], do que conhecemos hoje como Grupos de Hjelmslev e Pré-Hjelmslev. Estes são definidos, como veremos no texto, como grupos gerados por involuções satisfazendo um determinado conjunto de axiomas. A partir de tal grupo de involuções, constrói-se de modo axiomático um plano geométrico “absoluto”. O termo “absoluto” indica que tanto o plano euclidiano quanto o hiperbólico encaixam-se neste sistema. Para maiores detalhes e notações ver também [Kn] e [Bu].

O nosso objetivo neste capítulo, além de definir o que são grupos pré-Hjelmslev, é tentar encontrar relações entre esses grupos e nossa estrutura de trabalho, árvores. Como vimos no capítulo anterior, o fecho do grupo gerado por reflexões (que são involuções) tem índice dois no grupo de automorfismos de uma árvore, deste modo queremos verificar até que ponto este grupo satisfaz os axiomas de um grupo pré-Hjelmslev e dependendo desta relação encontrada, investigar as possibilidades de resgatar a geometria existente em uma árvore, como uma geometria puramente axiomática.

3.1 Grupos Pré-Hjelmslev

Dado um grupo G , sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{P}$ conjuntos de involuções de G , invariantes sob automorfismos internos e tais que:

1. $\mathcal{S}$ gera G
2. $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \emptyset$
3. $\emptyset \neq \mathcal{P} \subset \mathcal{S}^2 = \{ab; a, b \in \mathcal{S}\}$, ou seja, $\mathcal{P} = \{ab; a, b \in \mathcal{S} \text{ e } (ab)^2 = \text{Id}\}$

Sob estas hipóteses básicas associamos à $(G, \mathcal{S}, \mathcal{P})$ um grupo plano onde, os elementos de $\mathcal{P}$ são chamados de *pontos* e os elementos de $\mathcal{S}$ *retas* deste plano. Esta associação faz sentido, pois tanto no plano euclidiano como no hiperbólico, existe uma bijeção entre retas e reflexões, permitindo que identifiquemos a reflexão com a sua reta de reflexão.

Na sequência desta seção, letras minúsculas $a, b, c, \dots$ denotarão retas (elementos de $\mathcal{S}$) e letras maiúsculas $A, B, C, \dots$ pontos (elementos de $\mathcal{P}$).

Dizemos que o ponto A é incidente com a reta b se Ab (onde o produto é a composição) é uma involução, e as retas $a, b \in \mathcal{S}$ são ditas ortogonais se $ab \in \mathcal{P}$; notação: A/b e a/b respectivamente. Novamente, o produto de duas reflexões no plano (euclidiano ou hiperbólico) é uma involução se e somente se as retas de reflexão forem ortogonais, ou seja, o produto destas reflexões determina uma rotação de π em torno de um ponto, e obtemos uma bijeção entre elementos de $\mathcal{P}$ e os pontos do plano, seja este euclidiano ou hiperbólico.

Todo $\alpha \in G$, induz um “movimento” neste grupo plano, isto é, um automorfismo $X \mapsto X^\alpha := \alpha^{-1}X\alpha$ e $x \mapsto x^\alpha := \alpha^{-1}x\alpha$ para $X \in \mathcal{P}$ e $x \in \mathcal{S}$. Se $\alpha \in \mathcal{P}$, chamamos este “movimento” de reflexão no ponto α , se $\alpha \in \mathcal{S}$ temos uma reflexão na reta α .

Seja $A/b, c$. Então $\alpha := bc$ é chamado de *rotação* ao redor do ponto A . O conjunto $D(A)$ das rotações ao redor do ponto A é um subgrupo comutativo de G , ele é um subgrupo normal de índice dois do grupo gerado pelas retas passando por A . Se b/A e $\alpha \in D(A)$, então $\alpha = bc$ para algum c/A . Seja $a/b, c$ então bc é chamado *translação* ao longo da reta a . O conjunto $T(a)$ das translações ao longo da reta a é um grupo comutativo, ele é um subgrupo normal de índice dois do grupo gerado pelas retas ortogonais a a . Se b/a e $\alpha \in T(a)$ então $\alpha = bc$ para algum c/a .

Definição 90 Um grupo Pré-Hjelmslev é uma tripla $(G, S, \mathcal{P})$, satisfazendo as hipóteses acima e os seguintes axiomas:

- (A_1) Dados A, b , então $A, b/c$ para algum c ;
- (A_2) Se $A, b/c, d$, então $c = d$;
- (A_3) Se $a, b, c/d$, então $abc \in S$;
- (A_4) Se $A, B, C/d$, então $ABC \in \mathcal{P}$;

Interpretação geométrica de (A_1) e (A_2) : Dado um ponto A e uma reta b , existe uma única reta passando por A e perpendicular à b . Denotamos por (A, b) esta reta.

Para alguns resultados, é necessário considerar o seguinte axioma de enriquecimento:

- (W) Existem retas a, b, c, d tais que $ab = cd \in \mathcal{P}$ e quaisquer duas destas retas se interceptam em um único ponto.

Como nosso objetivo nesta seção é apenas definir grupos pré-Hjelmslev, não nos aprofundaremos nos resultados e construções desta geometria "absoluta", apresentando somente alguns resultados elementares que são consequências diretas dos axiomas, mais a título de mostrar que estes resultados são claramente compatíveis tanto com o plano euclidiano quanto o hiperbólico. Uma leitura mais abrangente, inclusive as demonstrações dos resultados acima, podem ser encontradas em [Kn].

Proposição 91 Seja $(G, S, \mathcal{P})$ um grupo pré-Hjelmslev. Então

- i)* A/b se e somente se $A^b = A$.
- ii)* Se $A/b, c$ e b/c então $A = bc$. Se A/b então $Ab \in S$ e $Ab = (A, b)$ onde (A, b) significa a reta passando por A e ortogonal à b .
- iii)* Se $A, B, C/d$ então $ABC \in \mathcal{P}$ e ABC/d .
- iv)* Se $a, b, c/D$ então $abc \in S$ e abc/D .
- v)* Se $a, b, c/d$ então $abc \in S$ e abc/d .

3.2 Grupos Pré-Hjelmslev e Árvores: Caminhos Para a Axiomatização

Começamos esta seção chamando a atenção para o fato que o grupo de automorfismos de uma árvore gerado por reflexões não é um grupo pré-Hjelmslev, pois de início o axioma (A_2) da definição 90 não é satisfeito: diferentemente dos casos euclidiano e hiperbólico, não existe bijeção entre o conjunto de reflexões e as geodésicas de reflexão em uma árvore, ou seja, em uma mesma geodésica é possível definir mais de uma reflexão. Além disto, tampouco temos a unicidade de geodésica passando por um par de pontos. Este obstáculo é incontornável, de modo que nosso objetivo foi verificar se existiam os conjuntos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{P}$ de modo a formar a tripla $(G, \mathcal{S}, \mathcal{P})$ e de maneira que os outros três axiomas fossem satisfeitos.

A primeira tentativa foi definir $\mathcal{S}$ como conjunto das reflexões e $\mathcal{P}$ como o conjunto formado pelas involuções que possam ser expressas como o produto de duas reflexões. Esta tentativa não foi satisfatória pois os axiomas (A_3) e (A_4) não eram satisfeitos. Vejamos, no exemplo abaixo, que o axioma (A_3) não é satisfeito, ou seja, nem sempre o produto de três reflexões é uma reflexão.

Exemplo 92 *Sejam Γ uma árvore regular de valência 8, $x_0 \in \Gamma$ e $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ reflexões em Γ , tais que $\phi_1(x_0) = \phi_2(x_0) = \phi_3(x_0) = \phi_4(x_0) = x_0$. Começemos por rotular os vértices adjacentes a x_0 por $x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, x_{0,4}, x_{0,5}, x_{0,6}, x_{0,7}, x_{0,8}$. Cada reflexão restrita aos vértices que distam 1 da geodésica pode ser expressa como produto de exatamente 3 transposições disjuntas. Suponhamos que o sejam da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}\phi_{1|B(x_0,1)} &= (x_{0,1}, x_{0,2})(x_{0,3}, x_{0,4})(x_{0,5}, x_{0,6}) \\ \phi_{2|B(x_0,1)} &= (x_{0,1}, x_{0,2})(x_{0,3}, x_{0,4})(x_{0,7}, x_{0,8}) \\ \phi_{3|B(x_0,1)} &= (x_{0,1}, x_{0,2})(x_{0,5}, x_{0,6})(x_{0,7}, x_{0,8}) \\ \phi_{4|B(x_0,1)} &= (x_{0,3}, x_{0,4})(x_{0,5}, x_{0,6})(x_{0,7}, x_{0,8})\end{aligned}$$

É fácil ver que $\phi_1 \circ \phi_4, \phi_2 \circ \phi_4$ e $\phi_3 \circ \phi_4$ são involuções, ou seja, pertencem ao conjunto $\mathcal{P}$, em outras palavras, chamando $\phi_1 = a, \phi_2 = b, \phi_3 = c$ e $\phi_4 = d$ estamos nas condições do axioma (A_3) $a, b, c/d$. Mas o produto $abc \notin \mathcal{S}$, pois

$$\begin{aligned}abc|_{B(x_0,1)} &= \phi_{1|B(x_0,1)} \circ \phi_{2|B(x_0,1)} \circ \phi_{3|B(x_0,1)} \\ &= (x_{0,1}, x_{0,2})\end{aligned}$$

que não é uma reflexão, pois não envolve 3 transposições disjuntas.

A partir desta tentativa frustrada de escolha dos conjuntos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{P}$, tentamos construí-los de modo a satisfazer, por construção, os axiomas (A_3) e (A_4) e as hipóteses básicas, definindo $\mathcal{G}$ como o grupo gerado por $\mathcal{S}$. A determinação explícita de $\mathcal{G}$, ou ao menos o índice de $\mathcal{G}$ no grupo $\text{Aut}(\Gamma)$ ficaria então como uma questão a ser determinada.

Sejam Γ uma árvore regular de valência $4k$, $k \in \mathbb{N}$, $x_0 \in V(\Gamma)$ e

$$\mathcal{G}_{x_0} := \text{Aut}(\Gamma)_{x_0} = \overline{\langle \mathcal{R}_{x_0} \rangle}$$

(a última igualdade foi demonstrada na Proposição 87) o grupo de automorfismos gerado pelas reflexões que fixam x_0 .

Seja

$$\mathcal{F} := \{(\varphi, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}); \varphi \in \mathcal{G}_{x_0} \text{ e } \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ é uma construção de } \varphi\},$$

onde adotamos o termo construção no sentido definido na página 48. Cada elemento de $\mathcal{F}$ é um par constituído por um automorfismo que fixa x_0 e uma construção (não necessariamente única) deste automorfismo.

Definição 93 Dado um par $(\varphi, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{F}$, dizemos que ϕ_n é x -primitiva se

$$\phi_n|_{B(x_0, d(x, x_0))} = \text{Id}$$

mas $\phi_n|_{B(x, 1)} \neq \text{Id}$.

Observação: Dado um par $(\varphi, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{F}$, para todo $x \in \Gamma$ existe no máximo uma reflexão ϕ_{n_0} que é x -primitiva.

Seja $x \in \Gamma$ e $x_1, x_2, \dots, x_{4k}$ um rotulamento dos vértices adjacentes a x , onde assumimos que x_1 está entre x_0 e x . Dados elementos $(\varphi, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}), (\varphi', \{\phi'_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{F}$, suponha que ϕ_{n_0} e ϕ'_{m_0} sejam ambas reflexões x -primitivas. As restrições de cada uma destas reflexões a $B(x, 1)$ se expressa de modo único como produto de transposições disjuntas $(x_{i_1}, x_{j_1}) \dots (x_{i_r}, x_{j_r})$ e $(x_{i'_1}, x_{j'_1}) \dots (x_{i'_s}, x_{j'_s})$ dos vértices adjacentes a x , sem envolver o vértice x_1 .

Definição 94 Assumindo a notação acima, consideremos os conjuntos de índices envolvidos nas decomposições de ϕ_{n_0} e ϕ'_{m_0} , $\{x_{i_1}, x_{j_1}, \dots, x_{i_r}, x_{j_r}\}$ e $\{x_{i'_1}, x_{j'_1}, \dots, x_{i'_s}, x_{j'_s}\}$

respectivamente. Dizemos que $(\varphi, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ e $(\varphi', \{\phi'_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ são x -compatíveis se quando os conjuntos de índices não forem disjuntos, as transposições envolvendo a intersecção forem as mesmas para ambos $(\varphi, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ e $(\varphi', \{\phi'_n\}_{n \in \mathbb{N}})$, ou seja, se $x_{i_t} = x_{i'_s}$, então $(x_{i_t}, x_{j_t}) = (x_{i'_s}, x_{j'_s})$. Dizemos que $(\varphi, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ e $(\varphi', \{\phi'_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ são compatíveis se forem x -compatíveis para todo $x \in \Gamma$.

Denotamos por $\mathbf{P}(\mathcal{F})$ o conjunto das partes de $\mathcal{F}$. Consideremos apenas a família $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{P}(\mathcal{F})$, chamado de *conjuntos compatíveis*, formado por subconjuntos de pares $\{(\varphi_i, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}})\}$ compatíveis dois a dois. A família dos conjuntos compatíveis possui dois subconjuntos distinguidos disjuntos:

A família $\mathcal{C}^+$ é constituída por subconjuntos $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ tais que, para todo elemento $(\varphi, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{A}$, se ϕ_n for x -primitiva que se expressa como o produto $(x_{i_1}, x_{j_1}) \dots (x_{i_r}, x_{j_r})$ de transposições disjuntas dos vértices adjacentes a x , então r é ímpar. Estamos assumindo que Γ tem valência $4k$, de modo que para todo vértice x fixo por φ , a restrição de ϕ_n a x deve permutar exatamente $4k - 2$ vértices adjacentes a x (ficam excluídos apenas os 2 vértices adjacentes pertencentes a geodésica de reflexão), ou seja, a decomposição de ϕ_n envolve $\frac{4k-2}{2} = 2k - 1$ transposições disjuntas. Temos assim que a família $\mathcal{C}^+$ é não vazia.

De modo similar, definimos a família $\mathcal{C}^-$ que é constituída por subconjuntos $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ tais que, para todo $(\varphi, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{A}$, se ϕ_n for x -primitiva se expressando como o produto $(x_{i_1}, x_{j_1}) \dots (x_{i_r}, x_{j_r})$ de transposições disjuntas dos vértices adjacentes, então r é par sempre que $\varphi(x) \neq x$. Conforme acabamos de ver, devemos exigir que x não seja ponto fixo de φ para que a família $\mathcal{C}^-$ não seja vazia.

Obviamente, por construção, temos que $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- = \emptyset$.

Ambas as famílias são ordenadas por inclusão e toda cadeia maximal em alguma delas possui limitante superior, dado pela união dos elementos da cadeia. Pelo Lema de Zorn, cada uma destas possui elemento maximal. Denotamos então por $\mathcal{S}$ um elemento maximal de $\mathcal{C}^+$, por $\mathcal{P}$ um elemento maximal de $\mathcal{C}^-$ e por $\mathcal{G}$ o grupo gerado pelos elementos φ tais que $(\varphi, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{S}$.

Os conjuntos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{P}$ são claramente disjuntos. Além disto, parece-nos plausível demonstrar que $\mathcal{P}$ é gerado por $\mathcal{S}$, visto que, restrito a cada vértice, a x -primitiva ϕ_n (com $(\varphi, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{P}$) pode ser expressa com um número par de transposições disjuntas, e deste modo pode ser expressa (restrita a cada vértice) como produto de duas x -primitivas que são expressas com um número ímpar de transposições disjuntas,

ou seja, pertencentes a $\mathcal{S}$.

A condição de compatibilidade é importante para que os axiomas (A_3) e (A_4) sejam satisfeitos, pois, se ϕ_n^1, ϕ_n^2 e ϕ_n^3 forem x -primitivas com a restrição aos vértices adjacentes a x dadas respectivamente pelos produtos disjuntos de transposições $(x_{i_1^1}, x_{j_1^1}) \dots (x_{i_r^1}, x_{j_r^1}), (x_{i_1^2}, x_{j_1^2}) \dots (x_{i_s^2}, x_{j_s^2})$ e $(x_{i_1^3}, x_{j_1^3}) \dots (x_{i_t^3}, x_{j_t^3})$, então, o produto

$$(x_{i_1^1}, x_{j_1^1}) \dots (x_{i_r^1}, x_{j_r^1}) (x_{i_1^2}, x_{j_1^2}) \dots (x_{i_s^2}, x_{j_s^2}) (x_{i_1^3}, x_{j_1^3}) \dots (x_{i_t^3}, x_{j_t^3})$$

envolve um número ímpar de transposições se tivermos r, s e t ímpares e um número par se r, s e t forem todos pares.

Imaginamos que com estas definições seja possível provar de fato que a tripla $(\mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{P})$ satisfaça as condições básicas de um grupo pré-Hjelslev, assim como os axiomas (A_1) , (A_3) e (A_4) . Devido a complexidade da construção, esta demonstração permanece em aberto, assim como a determinação do grupo $\mathcal{G}$ e de seu índice em $\text{Aut}(\Gamma)_{x_0}$.

Referências Bibliográficas

- [Ba] Bachmann, F. - *Aufbau der geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Springer, 1959.
- [Bu] Buekenhout, Francis - *Handbook of Incidence Geometry: buildings and foundations*, North-Holland, 1995.
- [Ch] Chiswell, Ian - *Introduction to Λ -Trees*, World Scientific Publishing, 2001.
- [Co] Cohen, Daniel E. - *Combinatorial Group Theory: a topological approach*, Cambridge University Press, 1989.
- [Di] Dicks, Warren and Dunwoody, M.J.- *Groups acting on graphs*, Cambridge University Press, 1989.
- [Fi] Firer, Marcelo - *Grupos Fuchsianos*, versão preliminar, 2000.
- [Fo] Fountain, John - *Semigroups, Formal Languages and Groups*, Kluwer Acad. Publ., 1993.
- [Hu] Humphreys, James - *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, 1990.
- [Kn] Knüppel, Frieder - *On pre-Hjelmslevgroups and related topics in Generators and relations in groups theory* (A. Barlotti; E.W. Willers; P. Plaumann; K. Strmbach), Kluwer Acad. Publ. 124-164, 1991.
- [Ko] Kochloukova, Dessislava - *Métodos combinatoriais e geométricos na teoria de grupos*, Notas de aula - IMECC-Unicamp, 2001.
- [Mo] Moran, Gadi - *Trees and the Bireflection property*, *Israel Journal of Mathematics* 41 (3), 1982, 244-260.

- [Mö] Möller, Rögnnvaldur - *The automorphism groups of regular trees*, J. London Math. Soc. 43 (2) 1991, 236-252.
- [Se] Serre, Jean-Pierre - *Trees*, Springer Verlag, 1980.

Índice Remissivo

- árvore, 4
 - regular, 8
- ação de grupos, 26
- ação livre, 28
- aplicação de recobrimento, 18
- arestas, 1
- automorfismo, 7
- caminho, 3
 - fechado, 4
 - homotópico, 15
 - inverso, 3
 - redutível, 4
 - trivial, 3
- Cayley
 - grafo de, 26
- classes de homotopia, 15
- compatíveis
 - conjuntos, 55
- conjunto característico, 23
- direções, 42
- distância, 8
- estrutura
 - combinatória, 7
 - métrica, 7
- floresta, 4
- maximal, 5
- função de translação, 19
- G-conjunto, 26
- geodésica, 7
 - completa, 33
- grafo, 1
 - canônico, 3
 - conexo, 4
 - de recobrimento, 18
 - finito, 6
- grupo fundamental, 14
 - de um grafo, 15
- grupo Pré-Hjelmslev, 52
- homomorfismo, 7
 - injetor, 7
 - localmente
 - bijetor, 29
 - injetor, 29
 - sobrejetor, 29
 - sobrejetor, 7
- inversões, 21
- isometria, 8, 19
 - elíptica, 20, 21
 - hiperbólica, 20, 21
 - loxodrômica, 20
 - parabólica, 20

isomorfismo, 7, 8

laço, 2

ponte, 13

ponto

 médio, 22

primitiva, 54

projecção, 13

Proposição - Y, 10

realização geométrica, 14

reduções elementares, 14

reflexões, 33

rotação, 51

segmento geodésico, 8

semi-geodésica, 7

sub-árvores, 4

subgrafo, 3

transformação de recobrimento, 28

translação, 51

vértices, 1

 adjacentes, 3

 final, 2

 inicial, 2

valência, 8