

**Universidade Estadual de Campinas**  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Departamento de Matemática

**Dissertação de Mestrado**

# **Álgebras de Cluster e Teoria de Representações**

**Matheus Batagini Brito**

**Orientador: Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura**

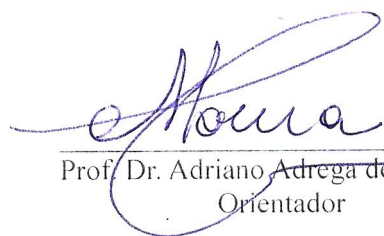
Campinas-SP  
Março, 2011

Este trabalho contou com o apoio financeiro da FAPESP.

## ÁLGEBRAS DE CLUSTER E TEORIA DE REPRESENTAÇÕES

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Matheus Batagini Brito** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de março de 2011



Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura  
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura (IMECC - Unicamp)
- 2 Profa. Dra. Iryna Kashuba (IME - USP)
- 3 Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti (IMECC - Unicamp)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**  
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Brito, Matheus Batagini  
B777a Álgebras de cluster e teoria de representações/Matheus Batagini  
Brito-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : Adriano Adrega de Moura  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Álgebras de cluster. 2. Grupos quânticos. 3. Quivers.  
4. Representações de álgebras. I. Moura, Adriano Adrega de. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística  
e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Cluster algebras and representation theory

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Cluster algebras. 2.Quantum groups. 3.Quivers.  
4.Representations of algebras.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura (IMECC – UNICAMP)  
Prof. Dra. Iryna Kashuba (IME – USP)  
Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti (IMECC - UNICAMP)

Data da defesa: 15/03/2011

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 15 de março de 2011 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



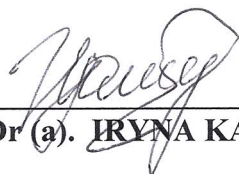
---

**Prof.(a). Dr(a). ADRIANO ADREGA DE MOURA**



---

**Prof. (a). Dr (a). PAULO ROBERTO BRUMATTI**



---

**Prof. (a). Dr (a). IRYNA KASHUBA**



# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por todas oportunidades que surgiram em minha vida e me guiaram até aqui.

Agradeço a toda minha família pelo apoio e incentivo. Em particular, a minha mãe, Vera, pela amizade de sempre, enorme dedicação e conselhos tão certos quanto 1 mais 1 são 2 (em um corpo de característica maior que 2!).

Agradeço a minha namorada, Vanessa, por sempre estar ao meu lado em cada uma de minhas escolhas, pelas palavras de incentivo e por sua amizade de sempre.

Agradeço aos meus amigos de graduação por excelentes momentos vividos e pelo incentivo e apoio no ingresso ao Mestrado. Aos amigos da pós-graduação por horas de estudos conjunto, paciência durante as dúvidas e, acima de tudo, pelo companheirismo. Em particular ao futuro brilhante matemático Marcelo, por seis anos de amizade indiscutível. Agradeço ainda, aos meus "irmãos" Fernanda e Tiago por sua real irmandade. Sempre prestativos e bem dispostos a ajudar se tornando essenciais para a conclusão deste texto.

Agradeço ainda aos funcionários e professores do IMECC. Em particular, os funcionários da secretaria de pós-graduação sempre simpáticos e eficientes. Não poderia deixar de citar meu bom amigo Prof. Dr. Marcos Jardim que se fez presente ao longo dos últimos anos, sempre com bons conselhos e motivações.

Agradeço a meu orientador, Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura. Primeiramente por ter visto potencial em mim ainda durante a graduação, fato que me motivou a seguir em frente. Em segundo lugar por realmente me orientar e ser muito bom nisso, ensinando a pensar de forma eficiente, sendo paciente, dedicado e, principalmente, persistente.

Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos que passaram em minha vida e me deixaram algum aprendizado ou alguma experiência e a todos que de alguma forma contribuíram para que eu estivesse aqui.



# Resumo

Na presente dissertação estudamos dois exemplos de relacionamento da teoria de álgebras de cluster com teoria de representações. A saber, estudamos os principais resultados dos artigos [5, 26]. O primeiro é uma relação entre álgebras de cluster e representações de certos quivers com relações que também estão relacionadas com triangulações de polígonos regulares. O segundo exemplo trata de um modelo de categorificação monoidal de certas álgebras de cluster via teoria de representações de dimensão finita do grupo quântico associado a uma álgebra de Kac-Moody afim de tipo  $A$ .

**Palavras-chave:** Álgebras de cluster, grupos quânticos, quivers,





# Abstract

In this dissertation we study two examples of interplay between the theory of cluster algebras from one side and representation theory on the other. Namely, we study the main results of the articles [5, 26]. The first one is a relation between cluster algebras of type  $A$  and representations of certain quiver with relations which are also related to triangulations of regular polygons. The second example concerns a model of monoidal categorification of certain cluster algebras via finite dimensional representation theory of the quantum group associated to an affine Kac-Moody algebra of type  $A$ .



# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Álgebras de Cluster</b>	<b>5</b>
1.1 Definições Básicas . . . . .	5
1.2 Principais Resultados . . . . .	12
1.3 $F$ -polinômios . . . . .	14
1.4 Diagramas de Dynking e Álgebras de Cluster do Tipo Geométrico de Posto $n$ com $n$ Coeficientes . . . . .	16
<b>2 Quivers com Relações Vindos de Clusters</b>	<b>19</b>
2.1 Quivers Associados às Sementes de Cluster . . . . .	19
2.2 Equivalência de Categorias . . . . .	22
2.2.1 Triangulações e Diagonais . . . . .	22
2.2.2 Grafos e Árvores . . . . .	26
2.2.3 Quivers . . . . .	26
2.2.4 O Funtor $\Theta$ . . . . .	29
2.3 Denominadores dos Polinômios de Laurent . . . . .	35

<b>3</b>	<b>Grupos Quânticos e Representações de Dimensão Finita</b>	<b>41</b>
3.1	Álgebra Universal Envelopante Quantizada . . . . .	41
3.2	Realização de Beck-Drinfeld das álgebras afins quantizadas . . . . .	42
3.3	Representações de Dimensão Finita . . . . .	45
3.3.1	$U_q(\mathfrak{g})$ -módulos de Peso . . . . .	45
3.3.2	O Reticulado de $\ell$ -pesos . . . . .	47
3.3.3	$U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulos de $\ell$ -peso . . . . .	49
3.4	Afinizações Minimais . . . . .	51
3.5	$q$ -character . . . . .	53
3.6	Algoritmo de Frenkel-Mukhin . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Álgebras de Cluster e as Categorias <math>\mathcal{C}_\ell</math></b>	<b>59</b>
4.1	As Categorias $\mathcal{C}_\ell$ . . . . .	59
4.2	$q$ -character Truncado . . . . .	61
4.3	$\mathcal{C}_1$ como Categorificação Monoidal de Álgebras de Cluster . . . . .	63
4.4	$q$ -caracteres via $F$ -polinômios . . . . .	70
4.5	Demonstração do Teorema . . . . .	73
<b>A</b>	<b>Apêndice</b>	<b>79</b>
A.1	Categorias e Funtores . . . . .	79
A.2	Sistema de Raízes . . . . .	86
A.3	Álgebras de Kac-Moody . . . . .	91
A.4	Quivers e Representações de Quiver . . . . .	92
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>101</b>
	<b>Índice remissivo</b>	<b>107</b>

# Introdução

As álgebras de cluster foram introduzidas por S. Fomin e A. Zelevinsky em [13] como parte de um projeto que objetivava desenvolver ferramentas combinatórias para estudar os resultados de G. Lusztig relacionados a positividade total para grupos algébricos [34] por um lado e bases canônicas [33] por outro. Embora o objetivo inicial ainda esteja um pouco longe de ser atingido (apesar do grande progresso obtido em [21, 20, 19]), a teoria de álgebras de clusters se tornou um dos principais tópicos de pesquisa nos últimos anos devido à descoberta de seu relacionamento com diversas outras áreas como

- Geometria de Poisson [22, 23],
- Sistemas integráveis [16],
- Geometria algébrica comutativa e não comutativa [3, 4, 29],
- Teoria de representações de quivers e álgebras de dimensão finita [40, 41],
- Teoria de representações de dimensão finita de álgebras de Kac-Moody afins e seus grupos quânticos [26],

entre outras listadas no portal [12].

Na presente dissertação estudaremos tal relacionamento com os dois últimos itens. No que tange o relacionamento com representações de quivers, apresentamos o resultado principal do artigo [5] enquanto que no que se refere a teoria de representações de álgebras afins quantizadas apresentaremos o resultado principal do artigo [26]. Em ambos os casos, apresentaremos boa parte dos detalhes das demonstrações. Antes de dar uma idéia destes resultados, expliquemos de maneira sucinta o que é uma álgebra de clusters e uma das principais conjecturas a seu respeito que, de certa forma, motivou ambos os artigos [5, 26].

Uma álgebra de cluster é um subanel do corpo de funções racionais em  $n$  variáveis gerado, como anel, por certos elementos desse corpo. Esses geradores (as *variáveis de cluster*), são

agrupados em subconjuntos (os *clusters*) de cardinalidade  $n$  construídos de forma recursiva usando *mutações*. O conjunto das variáveis de cluster pode ser finito ou infinito. Um resultado importante é: em uma álgebra de cluster, qualquer variável de cluster é expressa em termos de um dado cluster por meio de um polinômio de Laurent com coeficientes inteiros ([13]). Tal resultado é conhecido como *fenômeno de Laurent* e conjectura-se que os coeficientes deste polinômio são não negativos. Esta é a conjectura motivacional citada acima.

Passemos agora a dar uma idéia resumida do artigo [5] cuja descrição mais detalhada forma o corpo da primeira metade desta dissertação. Foi provado em [14] que as álgebras de clusters de tipo finito são classificadas pelos mesmos objetos que classificam as álgebras de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero: matrizes de Cartan (ou, equivalentemente, sistemas de raízes ou diagramas de Dynkin). Na teoria de representações de quivers, para matrizes de Cartan do tipo A, os autores de [5] associaram um quiver com relações para cada cluster de tal maneira que as representações indecomponíveis do quiver estão em bijeção com o conjunto de variáveis cluster fora daquele cluster. Este resultado se baseia em estudar os denominadores dos polinômios de Laurent com base no cluster dado. Este procedimento foi depois generalizado para as demais matrizes de Cartan simétricas em [6].

Finalmente, explicamos de maneira resumida o conteúdo central da segunda metade desta dissertação: o resultado central do artigo [26]. Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie simples do tipo *ADE* e  $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$  sua álgebra quantizada afim, com parâmetro  $q \in \mathbb{C}^\times$  onde  $q$  não é raiz da unidade. A categoria monoidal  $\mathcal{C}$  das representações de dimensão finita de  $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$  tem sido estudada por diversos autores sob diferentes perspectivas (veja, por exemplo, [10, 18, 37]). Em particular seus objetos simples foram classificados por Chari e Pressley, e Nakajima calculou seus caracteres em termos da cohomologia de certas variedades de quivers. Apesar destes resultados notáveis, muitas perguntas básicas continuam em aberto e, em particular, pouco é conhecido sobre a estrutura tensorial de  $\mathcal{C}$ .

Quando  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ , Chari e Pressley [11] provaram que todo objeto simples é isomorfo a um produto tensorial de objetos simples de um tipo especial chamados módulos de Kirillov-Reshetikhin. Por outro lado, eles provaram que um produto tensorial  $S_1 \otimes \cdots \otimes S_k$  de módulos de Kirillov-Reshetikhin é simples se, e somente se,  $S_i \otimes S_j$  é simples para todo  $1 \leq i < j \leq k$ . Além disso,  $S_i \otimes S_j$  é simples se, e somente se,  $S_i$  e  $S_j$  estão em “posição geral” (uma condição combinatorial sobre as raízes do polinômio de Drinfeld de  $S_i$  e  $S_j$ ).

Para  $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}_2$ , a situação é bem mais complicada. Quando  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$  não conhecemos uma fatoração geral para objetos simples. De fato, foi provado em [32] que o quadrado tensorial de um objeto simples de  $\mathcal{C}$  não é necessariamente simples em geral e, portanto, não podemos esperar resultados similares ao caso  $\mathfrak{sl}_2$  para outras álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Por conta desta dificuldade, os autores de [26] se concentraram em estudar algumas subcategorias de  $\mathcal{C}$ . Em particular as subcategorias monoidais  $\mathcal{C}_\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ , cujos objetos são caracterizados por certas restrições nas raízes dos polinômios de Drinfeld de seus constituintes irredutíveis. Por construção, o anel de Grothendieck  $R_\ell$  de  $\mathcal{C}_\ell$  é um anel de polinômios em  $n(\ell + 1)$  variáveis, onde  $n$  é o posto de  $\mathfrak{g}$ . O ponto de partida é que  $R_\ell$  está munido com uma estrutura de álgebra de cluster. Foi conjecturado em [31] que os caracteres dos módulos de Kirillov-Reshetikhin são soluções de um  $T$ -sistema e provado posteriormente por Nakajima [38] no caso  $ADE$  e por Hernandez [24] no caso geral. Facilmente verifica-se que as equações do  $T$ -sistema no caso  $ADE$  são exatamente da mesma forma que as relações de troca em uma álgebra de cluster. Isto induziu a introdução de uma estrutura de álgebra de cluster em  $R_\ell$  usando uma semente inicial consistindo de uma escolha de  $n(\ell + 1)$  módulos de Kirillov-Reshetikhin em  $\mathcal{C}_\ell$ . Pela definição da álgebra de cluster, pode-se obter novas sementes aplicando sequências de mutações na semente inicial. Assim, conjecturou-se que todas as variáveis de cluster obtidas dessa maneira são classes de objetos simples de  $\mathcal{C}_\ell$ .

Para  $\ell = 0$ , a estrutura de cluster de  $R_0$  é trivial: existe um único cluster consistindo apenas de variáveis congeladas (ou coeficientes no sentido de [13]).

O caso  $\ell = 1$  já é bem interessante e é o foco principal do artigo em questão. Através da classificação das álgebras de cluster citada no início temos que, para todo  $\mathfrak{g}$ , o anel  $R_1$  tem finitas variáveis de cluster e se  $R_1$  é do tipo  $X_n$  então o sistema de raízes de  $\mathfrak{g}$  é do tipo  $X_n$ . Desta maneira, esperava-se que a estrutura de produto tensorial dos objetos simples de  $\mathcal{C}_1$  pudesse ser descrita de "forma finita". De fato, conjectura-se que para todo  $\mathfrak{g}$  a categoria  $\mathcal{C}_1$  se comporta de forma "agradável" como a categoria  $\mathcal{C}$  para  $\mathfrak{sl}_2$ . Os autores de [26] provaram isto para  $\mathfrak{g}$  do tipo  $A_n$  e Nakajima [39] estendeu tais resultados para matrizes de Cartan do tipo  $ADE$  usando uma categoria tensorial de feixes perversos em variedades de quiver. Como consequência imediata, segue que a conjectura da positividade dos coeficientes do fenômeno de Laurent é verdadeira para álgebras de cluster do tipo  $ADE$ .

O texto está dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo definimos álgebra de cluster e citamos os principais resultados e propriedades de tais álgebras.

No segundo capítulo apresentamos o primeiro resultado estudado. Usaremos uma construção geométrica para criar uma categoria. Fixado um cluster de uma álgebra de cluster  $\mathcal{A}$  estabelecemos uma bijeção entre as classes de isomorfismo das representações indecomponíveis do quiver com relações associado a este cluster e as variáveis de cluster desta álgebra fora do cluster fixado.

No terceiro capítulo apresentamos as definições e construções básicas da álgebra universal envelopante quantizada (ou grupo quântico), além da realização de Beck-Drinfeld ("loop like



realization") das álgebras afins quantizadas, a mais usada na teoria de representações de dimensão finita destas álgebras. Além disso, apresentamos um pouco da teoria de representações das álgebras afins quantizadas e seus  $q$ -caracteres.

No quarto capítulo apresentamos o segundo resultado estudado. Definimos as categorias  $\mathcal{C}_\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ , e trabalhamos em particular com o caso  $\ell = 1$ . Nestas condições estudamos um truncamento do  $q$ -caracter dos objetos de  $\mathcal{C}_1$  e provamos que para  $\mathfrak{g}$  do tipo  $A$ ,  $\mathcal{C}_1$  é categorificação monoidal de uma álgebra de cluster  $\mathcal{A}$  do tipo  $A$  e que os objetos  $S(\alpha)$  (veja Seção 4.3) são *objetos simples de cluster*.

Para auxiliar na leitura do texto principal foi incluído um apêndice dividido em quatro seções. A primeira seção é sobre teoria de categorias, a segunda é sobre sistema de raízes, na terceira definimos uma álgebra de Kac-Moody e, por fim, na quarta seção é dada a teoria de quivers e suas representações.

# Capítulo 1

## Álgebras de Cluster

Este capítulo contém as principais definições, propriedades e resultados sobre álgebras de cluster. Usaremos como referência [13, 14, 15, 16, 26]. As demonstrações serão omitidas.

Para este capítulo utilizaremos as seguintes notações:

$$[x]_+ = \max(x, 0)$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$[1, n] = \{1, \dots, n\}$$

### 1.1 Definições Básicas

**Definição 1.1.1** *Uma matriz  $B \in M_n(\mathbb{Z})$  se diz antissimetrizável se existir matriz diagonal  $D = \operatorname{diag}(d_i : i = 1, \dots, n)$  com  $d_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ , tal que  $DB$  é antissimétrica, i.e.,  $d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$  para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Neste caso,  $D$  é chamada de matriz antissimetrizante*

**Definição 1.1.2** *Dizemos que  $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$  é semicorpo se  $(\mathbb{P}, \cdot)$  é grupo abeliano munido com uma operação binária  $\oplus$  que é comutativa, associativa e o produto de  $\mathbb{P}$  é distributivo sobre  $\oplus$ , i.e.:*

$$h(p \oplus q) = hp \oplus hq.$$

Denotaremos o elemento neutro de  $(P, \cdot)$  por 1.

**Exemplo 1.1.3** As estruturas algébricas  $(\mathbb{R}_{>0}, +, \cdot)$  e  $(\mathbb{R}, \max, +)$  são semicorpos, onde  $+$  e  $\cdot$  são, respectivamente, a soma e a multiplicação usual de  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.1.4** Seja  $J$  um conjunto finito de índices e tome  $\text{Trop}(u_j : j \in J)$  o grupo abeliano multiplicativo livremente gerado por  $\{u_j : j \in J\}$ . Definimos  $\oplus$  em  $\text{Trop}(u_j : j \in J)$  por:

$$\left( \prod_j u_j^{a_j} \right) \oplus \left( \prod_j u_j^{b_j} \right) = \prod_j u_j^{\min(a_j, b_j)}$$

e chamamos  $(\text{Trop}(u_j : j \in J), \oplus, \cdot)$  um semicorpo tropical. Observe que  $u_2 \oplus u_1^2 u_2^{-1} = u_2^{-1}$  em  $\text{Trop}(u_1, u_2)$ .

Dado grupo abeliano  $(\mathbb{P}, \cdot)$  livre de torção, considere os anéis de grupo  $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{Q}\mathbb{P}$  e, para cada  $n$ , seja  $\mathcal{F}(\mathbb{P}, n) = \mathbb{Q}\mathbb{P}(u_1, \dots, u_n)$  o corpo das funções racionais em  $n$  variáveis com coeficientes em  $\mathbb{Q}\mathbb{P}$ .

**Definição 1.1.5** Dados um grupo abeliano  $(\mathbb{P}, \cdot)$  e  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ , uma  $Y$ -semente de posto  $n$  em  $\mathbb{P}$  é um par  $(\mathbf{y}, B)$ , onde

- $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{P}^n$ ;
- $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$  é antissimetrizável.

Uma semente de posto  $n$  em  $\mathcal{F}(\mathbb{P}, n)$  é uma tripla  $\Sigma = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$  onde

- $(\mathbf{y}, B)$  é uma  $Y$ -semente de posto  $n$ ;
- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  uma  $n$ -upla de elementos de  $\mathcal{F}(\mathbb{P}, n)$  formando um conjunto gerador livre de  $\mathcal{F}(\mathbb{P}, n)$ . Isto é,  $x_1, \dots, x_n$  são algebricamente independentes sobre  $\mathbb{Q}\mathbb{P}$  e  $\mathcal{F}(\mathbb{P}, n) = \mathbb{Q}\mathbb{P}(x_1, \dots, x_n)$ .

A  $n$ -upla  $\mathbf{x}$  é chamada de cluster da semente  $\Sigma$ ,  $\mathbf{y}$  de  $n$ -upla coeficiente e  $B$  de matriz de troca.

Para simplificação de notação, a partir de agora fixamos  $n$  e  $\mathbb{P}$  e denotamos  $\mathcal{F}(\mathbb{P}, n)$  por  $\mathcal{F}$ ,  $\mathbf{y}$ -semente de posto  $n$  por  $\mathbf{y}$ -semente e semente de posto  $n$  por semente. Também assumimos que  $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$  é semicorpo. Observe que a soma de  $\mathcal{F}$  é denotada por “+”.

**Definição 1.1.6** *Seja  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$  uma semente em  $\mathcal{F}$  e  $k \in [1, n]$ . A mutação  $\mu_k$  na direção  $k$  transforma  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$  em uma semente  $\mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}', \mathbf{y}', B')$  definida por:*

- $B' = (b'_{ij})$  são dadas por:

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{se } i = k \text{ ou } j = k, \\ b_{ij} + \text{sgn}(b_{ik})[b_{ik}b_{kj}]_+ & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

- $\mathbf{y}' = (y'_1, \dots, y'_n)$ , onde:

$$y'_j = \begin{cases} y_k^{-1} & \text{se } j = k, \\ y_j y_k^{[b_{kj}]_+} (y_k \oplus 1)^{-b_{kj}} & \text{se } j \neq k; \end{cases}$$

- $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ , onde:

$$x'_j = \begin{cases} x_j & \text{se } j \neq k, \\ \frac{y_k \prod_{i=1}^n x_i^{[b_{ik}]_+} + \prod_{i=1}^n x_i^{[-b_{ik}]_+}}{x_k (y_k \oplus 1)} & \text{se } j = k. \end{cases}$$

Neste caso, diremos que as sementes  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$  e  $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', B')$  são *adjacentes*.

**Observação 1.1.7** (i) A mutação  $\mu_k$  é involução para todo  $k \in [1, n]$ .

(ii) Para todo  $i, j, k \in [1, n]$

$$b_{ij} + \text{sgn}(b_{ik})[b_{ik}b_{kj}]_+ = b_{ij} + \frac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2}.$$

Assim, se  $D$  é matriz tal que  $DB$  é antissimétrica,  $DB'$  também é antissimétrica. De fato, se  $k = i$  ou  $k = j$  então,

$$d_i b_{ij} = -d_j b_{ji} \Leftrightarrow d_i(-b_{ij}) = -d_j(-b_{ji}) \Leftrightarrow d_i b'_{ij} = -d_j b'_{ji}.$$

Caso contrário, temos

$$\begin{aligned}
d_i b'_{ij} &= d_i b_{ij} + \frac{d_i |b_{ik}| b_{kj} + d_i b_{ik} |b_{kj}|}{2} \\
&= -d_j b_{ji} + \frac{d_k |b_{ki}| b_{kj} - d_k b_{ki} |b_{kj}|}{2} \\
&= -d_j b_{ji} + \frac{-d_j |b_{ki}| b_{jk} - d_j b_{ki} |b_{jk}|}{2} \\
&= -d_j b'_{ji}.
\end{aligned}$$

**Definição 1.1.8** Um grafo  $\Gamma$  é dito uma árvore se for conexo e acíclico. Dado um vértice  $i$  de  $\Gamma$  chamamos de valência de  $i$  o número de arestas que incidem em  $i$ . Diremos que  $\Gamma$  é  $n$ -regular se todo vértice de  $\Gamma$  tem valência  $n$ . Diremos ainda que  $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$  é um caminho em  $\Gamma$  se  $\alpha_i$  são arestas de  $\Gamma$  tais que  $\alpha_{i+1}$  e  $\alpha_i$  possuem um vértice em comum.

Dada uma árvore  $n$ -regular  $\mathbb{T}_n$ , rotule cada aresta de  $\mathbb{T}_n$  por um inteiro  $k \in [1, n]$  de forma que, se  $k$  e  $k'$  são rótulos de duas arestas com um vértice em comum, então  $k \neq k'$ .

**Definição 1.1.9** Seja  $\mathbb{T}_n$  uma árvore  $n$ -regular. Um padrão de cluster em  $\mathbb{T}_n$  é uma associação de uma semente  $\Sigma_t = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), B(t))$  para cada vértice  $t \in \mathbb{T}_n$  tal que as sementes associadas a dois vértices unidos por uma aresta com rótulo  $k$  são obtidas uma da outra através de uma mutação na direção  $k$ . Os elementos de  $\Sigma_t$  são escritos da forma:

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad \mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad B(t) = (b_{ij}(t)).$$

**Exemplo 1.1.10** Seja  $n = 2$  e considere a árvore  $\mathbb{T}_2$ . Denotando seus vértices por  $\dots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots$  e indexamos seus caminhos da seguinte forma:

$$\dots \overset{2}{-} t_{-1} \overset{1}{-} t_0 \overset{2}{-} t_1 \overset{1}{-} t_2 \overset{2}{-} t_3 \overset{1}{-} \dots$$

Denotamos as sementes correspondentes por  $\Sigma_m = \Sigma_{t_m} = (\mathbf{x}(m), \mathbf{y}(m), B(m))$  para  $m \in \mathbb{Z}$ . Seja a semente inicial  $\Sigma_0$  da forma:

$$\mathbf{x}(0) = (x_1, x_2), \quad \mathbf{y}(0) = (y_1, y_2), \quad B(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, recursivamente, calculamos as sementes  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_5$  como mostradas na tabela 1.1. Observe que a semente  $\Sigma_5$  é obtida de  $\Sigma_0$  através da troca de índices 1 e 2. Consequentemente obtemos  $\Sigma_{10} = \Sigma_0$ .

$t$	$B(t)$	$\mathbf{y}(t)$	$\mathbf{x}(t)$
0	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$y_1 \quad y_2$	$x_1 \quad x_2$
1	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$y_1(y_2 \oplus 1) \quad \frac{1}{y_2}$	$x_1 \quad \frac{x_1 y_2 + 1}{x_2(y_2 \oplus 1)}$
2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{y_1(y_2 \oplus 1)} \quad \frac{y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1}{y_2}$	$\frac{x_1 y_1 y_2 + y_1 + x_2}{(y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1)x_1 x_2} \quad \frac{x_1 y_2 + 1}{x_2(y_2 \oplus 1)}$
3	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{y_1 \oplus 1}{y_1 y_2} \quad \frac{y_2}{y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1}$	$\frac{x_1 y_1 y_2 + y_1 + x_2}{(y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1)x_1 x_2} \quad \frac{y_1 + x_2}{x_1(y_1 \oplus 1)}$
4	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{y_1 y_2}{y_1 \oplus 1} \quad \frac{1}{y_1}$	$x_2 \quad \frac{y_1 + x_2}{x_1(y_1 \oplus 1)}$
5	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$y_2 \quad y_1$	$x_2 \quad x_1$

Tabela 1.1: Sementes do tipo  $A_2$

**Definição 1.1.11** *Dado um padrão de cluster em  $\mathbb{T}_n$ , seja*

$$\mathcal{X} = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} \mathbf{x}(t) = \{x_i(t) : t \in \mathbb{T}_n, i \in [1, n]\} \subseteq \mathcal{F},$$

a união dos clusters de todas as sementes do padrão de cluster. Nos referimos aos elementos  $x_i(t) \in \mathcal{X}$  por variáveis de cluster. A álgebra de cluster  $\mathcal{A}$  associada a um dado padrão de cluster é a  $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ -subálgebra do corpo ambiente  $\mathcal{F}$  gerada por todas variáveis de cluster:  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}\mathbb{P}[\mathcal{X}]$ . Denotamos  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ , onde  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), B(t))$  é alguma semente do padrão de cluster associado. Dizemos que  $\mathcal{A}$  é do tipo finito se  $\mathcal{X}$  é um conjunto finito

**Observação 1.1.12** *Originalmente ([13], [14]), definiu-se os coeficientes da álgebra de cluster de posto  $n$  como uma  $2n$ -upla  $\mathbf{p} = (p_1^\pm, \dots, p_n^\pm)$  de elementos de  $\mathbb{P}$  satisfazendo as condições de normalização:*

$$p_j^+ \oplus p_j^- = 1, \quad \forall j \in [1, n].$$

A equivalência desta configuração com a usada na definição de  $\mathbf{y}$  acima foi estabelecida em [13] por:

$$y_j = \frac{p_j^+}{p_j^-},$$

e os coeficientes  $p_j^\pm$  são recuperados via

$$p_j^+ = \frac{y_j}{y_j \oplus 1}, \quad p_j^- = \frac{1}{y_j \oplus 1}.$$

Com isso, a mutação das variáveis de cluster na direção  $k$  é dada por:

$$x'_k x_k = p_k^+ \prod_{i=1}^n x_i^{[b_{ik}]_+} + p_k^- \prod_{i=1}^n x_i^{[-b_{ik}]_+}.$$

**Definição 1.1.13** Dada uma álgebra de cluster, um monômio de cluster é um produto de variáveis de cluster pertencentes a um único cluster.

**Definição 1.1.14** Diremos que uma álgebra de cluster é do tipo geométrico se o semicorpo coeficiente  $\mathbb{P}$  é um semicorpo tropical.

No caso de uma álgebra de cluster de posto  $n$  do tipo geométrico, é conveniente denotar os geradores de  $\mathbb{P}$  por  $x_{n+1}, \dots, x_m$  (para algum  $m \geq n$ ) tal que  $\mathbb{P} = \text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_m)$ . Desta maneira, dada uma semente  $\Sigma$  desta álgebra, cada termo da  $n$ -upla coeficiente  $\mathbf{y}$  é um monômio de Laurent em  $x_{n+1}, \dots, x_m$ . Definimos então inteiros  $b_{ij}$  para  $i \in [1, n]$  e  $j \in [n+1, m]$  por

$$y_j = \prod_{i=n+1}^m x_i^{b_{ij}}.$$

Assim, estendemos a matriz de troca  $B$  de  $\Sigma$  para a matriz  $\tilde{B} = (b_{ij})$  com  $i \in [1, m]$  e  $j \in [1, n]$ . Com isso obtemos

$$p_j^+ = \prod_{i=n+1}^m x_i^{[b_{ij}]_+} \quad \text{e} \quad p_j^- = \prod_{i=n+1}^m x_i^{[-b_{ij}]_+}.$$

A mutação definida para a matriz  $B$  induz uma mutação da matriz  $\tilde{B}$ ,  $\mu_k(\tilde{B})$ , para  $k \in [1, n]$  dada igualmente pela Definição 1.1.6. Desta forma a mutação das variáveis de cluster é dada por:

$$x_k x'_k = \prod_{i=1}^m x_i^{[b_{ik}]_+} + \prod_{i=1}^m x_i^{[-b_{ik}]_+}, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Além disso, a mutação da matriz  $\tilde{B}$  induz a mutação da  $n$ -upla coeficiente  $\mathbf{y}$ , i.e., considere  $\tilde{B} = (b_{ij})_{m \times n}$  e  $\tilde{B}' = \mu_k(\tilde{B}) = (b'_{ij})_{m \times n}$ . Então

$$y'_j = \mu_k(y_j) = \prod_{i=n+1}^m x_i^{b'_{ij}}.$$

De fato, se  $j = k$ , pela definição 1.1.6 temos

$$y'_j = y_j^{-1} = \prod_{i=n+1}^m x_i^{-b_{ij}} = \prod_{i=n+1}^m x_i^{b'_{ij}}.$$

Por outro lado, se  $j \neq k$  temos

$$y'_j = \prod_{i=n+1}^m x_i^{b_{ij} + b_{ik}[b_{kj}]_+ + b_{kj}[-b_{ik}]_+}.$$

Por simplicidade, denote  $\alpha_{ij} = b_{ij} + b_{ik}[b_{kj}]_+ + b_{kj}[-b_{ik}]_+$ . Então temos três casos:

- se  $b_{ik} \geq 0$  então  $\alpha_{ij} = b_{ij} + b_{ik}[b_{kj}]_+ = b'_{ij}$ ;
- se  $b_{ik} < 0$  e  $b_{kj} \geq 0$  então  $\alpha_{ij} = b_{ij} + b_{ik}[b_{kj}]_+ - b_{ik}b_{kj} = b'_{ij}$ ;
- se  $b_{ik} < 0$  e  $b_{kj} < 0$  então  $\alpha_{ij} = b_{ij} - b_{ik}b_{kj} = b'_{ij}$ .

De qualquer maneira temos  $y'_j = \prod_{i=n+1}^m x_i^{b'_{ij}}$ .

Logo, toda  $Y$ -semente é unicamente determinada por uma única matriz retangular  $\tilde{B}(t_0)$  e, conseqüentemente, a correspondente álgebra de cluster do tipo geométrico é unicamente determinada a menos de isomorfismo. Além disso, quando for conveniente, omitiremos a  $n$ -upla coeficiente  $\mathbf{y}$  e denotaremos uma semente  $\Sigma$  desta álgebra por  $\Sigma = (\bar{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ , onde  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$  também é chamado de cluster. As variáveis  $x_i$ ,  $i \in [1, n]$ , são chamadas de *variáveis de cluster* (como anteriormente) e as variáveis  $x_j$ ,  $j \in [n+1, m]$ , são chamadas de *coeficientes* ou *variáveis de cluster congeladas* (pois estão presentes em todo cluster).

**Definição 1.1.15** Dizemos que um padrão de cluster  $t \mapsto (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), B(t))$  em  $\mathbb{T}_n$  (ou a correspondente álgebra de cluster) tem coeficientes principais em um vértice  $t_0$  se  $\mathbb{P} = \text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_{2n})$  e  $\mathbf{y}(t_0) = (x_{n+1}, \dots, x_{2n})$ . Neste caso, denotaremos  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\bullet(B(t_0))$ .

**Observação 1.1.16** A definição anterior pode ser rephraseada da seguinte maneira: uma álgebra de cluster  $\mathcal{A}$  tem coeficientes principais no vértice  $t_0 \in \mathbb{T}_n$  se  $\mathcal{A}$  é do tipo geométrico e está associada com a matriz  $\tilde{B}(t_0)$  de ordem  $2n \times n$  cuja parte principal (i.e., a parte  $n \times n$  superior) é  $B(t_0)$  e cuja parte complementar (i.e., a parte  $n \times n$  inferior) é a matriz  $\text{Id}_n$ .



## 1.2 Principais Resultados

Nesta seção citaremos alguns dos principais resultados sobre as álgebras de cluster e sua classificação que nos será útil ao longo de todo o texto. Em particular, nos concentraremos naquelas que são do tipo finito e relacionaremos suas variáveis de cluster a um subconjunto de algum sistema de raízes irredutível.

**Teorema 1.2.1** [13, Theorem 3.1] *Em uma álgebra de cluster, qualquer variável de cluster é expressa em termos de um dado cluster como um polinômio de Laurent com coeficientes em  $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ . Tal expressão é dita a expansão de Laurent daquela variável em relação ao cluster dado.*

O teorema acima é conhecido como *fenômeno de Laurent*. Conjectura-se [13] que cada um desses polinômios de Laurent tem coeficientes em  $\mathbb{Z}_{\geq 0}\mathbb{P}$ .

**Definição 1.2.2** [26, Definition 2.1] *Sejam  $\mathcal{A}$  uma álgebra de cluster e  $\mathcal{M}$  uma categoria monoidal abeliana. Dizemos que  $\mathcal{M}$  é uma categorificação monoidal de  $\mathcal{A}$  se o anel de Grothendieck de  $\mathcal{M}$  é isomorfo a  $\mathcal{A}$  e se*

- (i) *os monômios de cluster de  $\mathcal{A}$  são as classes de todos objetos reais de  $\mathcal{M}$ ;*
- (ii) *as variáveis de cluster de  $\mathcal{A}$  são as classes de todos objetos reais e primos de  $\mathcal{M}$ .*

**Proposição 1.2.3** [26, Proposition 2.2] *Suponha que a álgebra de cluster  $\mathcal{A}$  tenha uma categorificação monoidal  $\mathcal{M}$ . Então*

- (i) *toda variável de cluster de  $\mathcal{A}$  tem uma expansão de Laurent com coeficientes positivos sob qualquer cluster de  $\mathcal{A}$ ;*
- (ii) *os monômios de cluster de  $\mathcal{A}$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{Q}$ .*

**Definição 1.2.4** [14, §1.3] *Seja  $B = (b_{ij})$  uma matriz quadrada com coeficientes inteiros. Sua matriz de Cartan generalizada correspondente é a matriz  $A = A(B) = (a_{ij})$  de mesmo tamanho definida por:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j; \\ -|b_{ij}| & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

**Teorema 1.2.5** [14, Theorem 1.8] *Para uma álgebra de cluster  $\mathcal{A}$  de posto  $n$ , as seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $\mathcal{A}$  é do tipo finito;
- (ii) para toda semente  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$  em  $\mathcal{A}$  as entradas da matriz  $B = (b_{i,j})$  satisfazem  $|b_{ij}b_{ji}| \leq 3$  para todo  $i, j \in [1, n]$ ;
- (iii) para alguma semente  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$  em  $\mathcal{A}$  temos que  $A(B)$  é matriz de Cartan e que as entradas da matriz  $B = (b_{ij})$  satisfazem  $b_{ij}b_{ik} \geq 0$  para todo  $i, j, k \in [1, n]$ .

Se  $\mathcal{A}$  é do tipo finito, diremos que é do tipo  $X_n$  se a matriz de Cartan  $A(B)$  é do tipo  $X_n$ . Seja  $\Phi$  o sistema de raízes associado a  $A(B)$ . Lembre que (veja seção A.2)  $\Phi_{\geq -1} = \Phi_+ \sqcup -\Pi$ , onde  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  é base de  $\Phi$  e  $Q$  denota o reticulado de raízes associado a  $\Phi$ .

**Teorema 1.2.6** [14, Theorem 1.9] *Seja  $\mathcal{A}$ , uma álgebra de cluster do tipo  $X_n$  e  $\Phi$  o sistema de raízes associado. Fixado um cluster  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathcal{A}$ , existe única bijeção*

$$\begin{aligned} \Phi_{\geq -1} &\rightarrow \mathcal{X} \\ \alpha &\mapsto x[\alpha] \end{aligned}$$

tal que a variável de cluster  $x[\alpha]$  é expressa em termos de  $\mathbf{x}$  da seguinte maneira:

$$x[\alpha] = \frac{P_\alpha(\mathbf{x})}{\prod_{i=1}^n x_i^{[\alpha:\alpha_i]}}, \quad (1.2.1)$$

onde  $P_\alpha$  é um polinômio sobre  $\mathbb{Z}\mathbb{P}$  com termo constante não nulo. Sob esta bijeção,  $P_{-\alpha_i}$  é constante igual a 1 para todo  $i \in [1, n]$  e, portanto,  $x[-\alpha_i] = x_i$  para todo  $i \in [1, n]$ .

A equação (1.2.1) é um exemplo do fenômeno de Laurent. Além disso, [14, Theorem 1.10] prova a conjectura da positividade dos coeficientes de  $P_\alpha$  sob hipóteses do teorema.

**Exemplo 1.2.7** *Continuando o Exemplo 1.1.10 temos*

$$\begin{aligned} x[-\alpha_1] &= x_1 \\ x[-\alpha_2] &= x_2 \\ x[\alpha_1] &= \frac{(y_1 \oplus 1)^{-1}(y_1 + x_2)}{x_1} \end{aligned}$$

$$x[\alpha_2] = \frac{(y_2 \oplus 1)^{-1}(x_1 y_2 + 1)}{x_2}$$

$$x[\alpha_1 + \alpha_2] = \frac{(y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1)^{-1}(x_1 y_1 y_2 + y_1 x_2)}{x_1 x_2}$$

**Definição 1.2.8** [16] Nas hipóteses do Teorema 1.2.6, dados  $\alpha, \beta \in \Phi_{\geq -1}$ , diremos que  $\alpha$  e  $\beta$  são compatíveis se as variáveis de cluster  $x[\alpha], x[\beta]$  pertencerem a um mesmo cluster de  $\mathcal{A}$ .

**Definição 1.2.9** [16, Definition 3.10] Seja  $\gamma \in Q$ . Uma expansão de cluster de  $\gamma$  é uma forma de escrever  $\gamma$  como

$$\gamma = \sum_{\alpha \in \Phi_{\geq -1}} n_\alpha \alpha,$$

onde  $n_\alpha$  é inteiro não-negativo para todo  $\alpha$  e  $n_\alpha n_\beta = 0$  sempre que  $\alpha$  e  $\beta$  não são compatíveis.

**Teorema 1.2.10** [16, Theorem 3.11] Cada elemento  $\gamma \in Q$  tem uma única expansão de cluster.

### 1.3 $F$ -polinômios

Em [15] Fomin e Zelevinsky mostraram que as variáveis de cluster de  $\mathcal{A}$  tem uma boa expressão em termos de certos polinômios, chamados de  $F$ -polinômios, que são fortemente relacionados com os polinômios de Fibonacci de [16]. Além disso, [16] dá algumas fórmulas explícitas para os polinômios de Fibonacci nos tipos  $A$  e  $D$ .

Fixe  $n$  natural e considere  $I = [1, n]$ . Se  $F(t_1, \dots, t_n)$  é expressão racional livre de subtração com coeficientes inteiros em algumas variáveis  $t_i$ ,  $\mathbb{P}$  semicorpo e  $p_1, \dots, p_n$  elementos de  $\mathbb{P}$ , então denotamos por  $F|_{\mathbb{P}}(p_1, \dots, p_n)$  a avaliação de  $F$  em  $p_1, \dots, p_n$ . Por exemplo, se  $F(t_1, t_2) = t_1^2 - t_1 t_2 + t_2^2$  e  $\mathbb{P} = \text{Trop}(y_1, y_2)$ , então podemos reescrever  $F$  como  $F(t_1, t_2) = \frac{t_1^3 + t_2^3}{t_1 + t_2}$  e, portanto,  $F|_{\mathbb{P}}(y_1, y_2) = \frac{y_1^3 \oplus y_2^3}{y_1 \oplus y_2} = 1$ .

Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra de cluster de posto  $n$  do tipo finito definida por uma semente inicial  $\Sigma_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, B_0)$ , onde

$$\mathbf{x}_0 = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y}_0 = (y_1, \dots, y_n), \quad B_0 = (b_{ij}^0).$$

Para cada  $j \in I$ , defina

$$\hat{y}_j = y_j \prod_{i \in I} x_i^{b_{ij}^0}.$$

Para definir os  $F$ -polinômios, considere a álgebra de cluster  $\mathcal{A}_\bullet = \mathcal{A}_\bullet(\mathbf{u}(t_0), \mathbf{v}(t_0), B(t_0))$  com coeficientes principais em  $t_0$ , onde

$$\mathbf{u}(t_0) = (u_1, \dots, u_n), \quad \mathbf{v}(t_0) = (v_1, \dots, v_n) \quad \text{e} \quad B(t_0) = B_0,$$

isto é, a álgebra de cluster sobre o semicorpo  $\text{Trop}(v_1, \dots, v_n)$ . Como  $\mathcal{A}$  é do tipo finito,  $\mathcal{A}_\bullet$  também é e, portanto, pelo Teorema 1.2.6, cada variável de cluster de  $\mathcal{A}_\bullet$  é da forma

$$u[\alpha] = \frac{P_\alpha(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)}{u_1^{a_1} \dots u_n^{a_n}}$$

para algum  $\alpha = \sum_{i \in I} a_i \alpha_i \in \Phi_{\geq -1}$  e  $P_\alpha$ , polinômio em  $2n$  variáveis com coeficientes inteiros e termo constante não nulo. Definimos então, para cada  $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$ , o  $F$ -polinômio  $F_\alpha$ , especializando  $u_i$  em 1 para todo  $i \in I$ , ou seja:

$$F_\alpha(v_1, \dots, v_n) = P_\alpha(1, \dots, 1, v_1, \dots, v_n), \quad \forall \alpha \in \Phi_{\geq -1}.$$

**Exemplo 1.3.1** *Continuando o exemplo 1.1.10, o semicorpo coeficiente é  $\mathbb{P} = \text{Trop}(v_1, v_2)$ . Neste caso, as fórmulas da tabela 1.1 são consideravelmente simplificadas e obtemos os  $F$ -polinômios através do Exemplo 1.2.7 e da tabela 1.2 abaixo.*

$$F_{-\alpha_1} = F_{-\alpha_2} = 1, \quad F_{\alpha_1} = v_1 + 1, \quad F_{\alpha_2} = v_2 + 1, \quad F_{\alpha_1 + \alpha_2} = v_1 v_2 + v_2 + 1.$$

$t$	$B(t)$	$\mathbf{v}(t)$	$\mathbf{u}(t)$
0	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$v_1 \quad v_2$	$u_1 \quad u_2$
1	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$v_1 \quad \frac{1}{v_2}$	$x_1 \quad \frac{u_1 v_2 + 1}{u_2}$
2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{v_1} \quad \frac{1}{v_2}$	$\frac{u_1 v_1 v_2 + v_1 + u_2}{u_1 u_2} \quad \frac{u_1 v_2 + 1}{u_2}$
3	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{v_1 v_2} \quad v_2$	$\frac{u_1 v_1 v_2 + v_1 + u_2}{u_1 u_2} \quad \frac{v_1 + u_2}{u_1}$
4	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$v_1 v_2 \quad \frac{1}{v_1}$	$u_2 \quad \frac{v_1 + u_2}{u_1}$
5	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$v_2 \quad v_1$	$u_2 \quad u_1$

Tabela 1.2: Sementes do tipo  $A_2$ , coeficientes principais.

Dado  $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$ , considere  $g(\alpha)$  como em A.2.17. Escreva  $g(\alpha) = (g_1, \dots, g_n)$  com  $g_i = [g(\alpha) : \alpha_i]$ ,  $i \in I$ . Então:

**Teorema 1.3.2** [15, Corollary 6.3] *As variáveis de cluster de  $\mathcal{A}$  são dadas por*

$$x[\alpha] = \frac{F_\alpha(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)}{F_\alpha|_{\mathbb{P}(y_1, \dots, y_n)}} \mathbf{x}^{g(\alpha)}$$

para todo  $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$ , onde  $\mathbf{x}^{g(\alpha)} := x_1^{g_1} \dots x_n^{g_n}$ .

Em outras palavras, o teorema acima garante que cada variável de cluster  $x[\alpha]$  é completamente determinada pelo seu correspondente  $F$ -polinômio  $F_\alpha$  e  $g$ -vetor  $g(\alpha)$ .

**Proposição 1.3.3** [15, Corollary 10.10] *Para cada  $\alpha \in \Phi_+$ ,  $F_\alpha$  é um polinômio com termo constante igual a 1 e tem único monômio de grau máximo, a saber  $\prod_{i \in I} v_i^{[\alpha: \alpha_i]}$ . Além disso, este monômio tem coeficiente igual a 1 e é divisível por qualquer outro monômio de  $F_\alpha$ .*

**Proposição 1.3.4** [16, Proposition 2.10] *Sejam  $\Phi$  sistema de raízes do tipo  $A$  e  $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$ . Se  $Q_\alpha = \{\gamma \in Q : \gamma \text{ é } \alpha\text{-aceitável}\}$  (veja Definição A.2.18), então*

$$F_\alpha(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\gamma \in Q_\alpha} \mathbf{v}^\gamma,$$

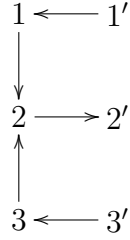
onde  $\mathbf{v}^\gamma = \prod_{i \in I} v_i^{[\gamma: \alpha_i]}$ .

## 1.4 Diagramas de Dynking e Álgebras de Cluster do Tipo Geométrico de Posto $n$ com $n$ Coeficientes

Construiremos agora uma certa álgebra de cluster a partir de uma matriz de Cartan. Essa construção será importante para os objetivos do Capítulo 4. Sejam  $C = (c_{ij})$ ,  $i, j \in I = [1, n]$ , uma matriz de Cartan do tipo  $ADE$ ,  $\Gamma$  seu diagrama de Dinkin e  $\Phi = \Phi(C)$  o sistema de raízes associado. Tome uma bipartição  $I_0 \sqcup I_1 = I$  de  $\Gamma$ .

Definiremos um quiver  $Q$  com  $2n$  vértices como se segue. Copiamos  $\Gamma$  e orientamos cada aresta  $\alpha$  de forma que  $c(\alpha) \in I_0$  e  $t(\alpha) \in I_1$ . Para cada  $i \in I$  adicionamos um vértice  $i'$  e uma flecha  $i' \rightarrow i$  se  $i \in I_0$  (respectivamente  $i \rightarrow i'$  se  $i \in I_1$ ).

**Exemplo 1.4.1** *Seja  $C$  do tipo  $A_3$  e  $I_0 = \{1, 3\}$ . O quiver  $Q$  é*



Seja  $I' = \{i' : i \in I\}$ . É conveniente identificar  $i'$  com  $i + n$  e, conseqüentemente,  $I'$  com  $[n + 1, 2n]$ . A partir de  $Q$  podemos obter uma matriz  $\tilde{B} = (b_{ij})$ ,  $i \in [1, 2n]$ ,  $j \in [1, n]$  definida por

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe flecha de } j \text{ para } i \text{ em } Q, \\ -1, & \text{se existe flecha de } i \text{ para } j \text{ em } Q, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Exemplo 1.4.2** *Continuando o exemplo anterior, temos*

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Seja  $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(\bar{x})$  corpo de funções racionais em  $2n$  variáveis  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n})$ . Considere  $\mathcal{A}_C = \mathcal{A}(\bar{x}, \tilde{B})$  a álgebra de cluster do tipo geométrico de posto  $n$  com  $n$  coeficientes. Por construção, a parte principal de  $\tilde{B}$  tem matriz de Cartan generalizada associada do tipo finito e, portanto, pelo Teorema 1.2.5,  $\mathcal{A}_C$  tem finitas variáveis de cluster. Além disso, pelo Teorema 1.2.6, as variáveis de cluster estão em bijeção com  $\Phi_{\geq -1}$ . Ponha  $f_i = x_{n+i}$  denotando os coeficientes indexados por  $i' \equiv i + n \in I'$  e denote por  $x[\beta]$  a variável de cluster associada a  $\beta \in \Phi_{\geq -1}$ .

**Exemplo 1.4.3** *Continuando o exemplo anterior temos  $\Phi_{\geq -1} = \{-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}$ . A álgebra de cluster  $\mathcal{A}_C$  é o subanel de  $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, f_1, f_2, f_3)$  gerado por*

$$x[-\alpha_1] = x_1, x[-\alpha_2] = x_2, x[-\alpha_3] = x_3, f_1, f_2, f_3$$

e pelas seguintes variáveis de cluster

$$\begin{aligned}
x[\alpha_1] &= \frac{x_2 + f_1}{x_1}, \\
x[\alpha_2] &= \frac{x_1x_3 + f_2}{x_2}, \\
x[\alpha_3] &= \frac{x_2 + f_3}{x_3}, \\
x[\alpha_1 + \alpha_2] &= \frac{f_2x_2 + f_1x_1x_3 + f_1f_2}{x_1x_2}, \\
x[\alpha_2 + \alpha_3] &= \frac{f_2x_2 + f_3x_1x_3 + f_2f_3}{x_2x_3}, \\
x[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3] &= \frac{f_2x_2^2 + f_1f_3x_1x_3 + f_1f_2x_2 + f_2f_3x_3 + f_1f_2f_3}{x_1x_2x_3}.
\end{aligned}$$

**Proposição 1.4.4** [2, Corollary 1.21] A álgebra de cluster  $\mathcal{A}_C$  é igual ao anel de polinômios em  $2n$  variáveis  $x[-\alpha_i], x[\alpha_i]$  para  $i \in I$ .

**Exemplo 1.4.5** Continuaremos o exemplo anterior. Os geradores de  $\mathcal{A}_C$  podem ser expressos por polinômios em

$$x[-\alpha_1], x[-\alpha_2], x[-\alpha_3], x[\alpha_1], x[\alpha_2], x[\alpha_3],$$

como se segue:

$$\begin{aligned}
f_1 &= x[-\alpha_1]x[\alpha_1] - x[-\alpha_2], \\
f_2 &= x[-\alpha_2]x[\alpha_2] - x[-\alpha_1]x[-\alpha_3], \\
f_3 &= x[-\alpha_3]x[\alpha_3] - x[\alpha_2], \\
x[\alpha_1 + \alpha_2] &= x[\alpha_1]x[\alpha_2] - x[-\alpha_3], \\
x[\alpha_2 + \alpha_3] &= x[\alpha_2]x[\alpha_3] - x[-\alpha_1], \\
x[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3] &= x[\alpha_1]x[\alpha_2]x[\alpha_3] - x[-\alpha_1]x[\alpha_1] - x[-\alpha_3]x[\alpha_3] + x[-\alpha_2].
\end{aligned}$$

# Capítulo 2

## Quivers com Relações Vindos de Clusters

Neste capítulo estudaremos o resultado principal do artigo [5]. Construiremos uma bijeção entre as classes de isomorfismo das representações indecomponíveis de um certo quiver com relações e um subconjunto das variáveis de cluster de uma determinada álgebra de cluster.

Sejam  $\mathbb{K}$  corpo algebricamente fechado de característica zero e  $\mathcal{A}$  uma álgebra de cluster de posto  $n$  do tipo  $ADE$  e  $\Phi$  o sistema de raízes de mesmo posto e tipo que  $\mathcal{A}$ . Omitiremos a  $n$ -upla  $\mathbf{y}$  de cada semente, pois não influenciará nos resultados. Quando  $\mathcal{A}$  for do tipo  $A$  mostraremos uma bijeção entre as classes de isomorfismo das representações de um certo quiver com relações e um subconjunto das variáveis de cluster de  $\mathcal{A}$ .

### 2.1 Quivers Associados às Sementes de Cluster

Seja  $\Sigma = (\mathbf{u}, B)$  alguma semente de  $\mathcal{A}$ , onde  $B = (b_{ij})$ . Para este capítulo será conveniente trabalhar com um quiver  $Q_B$  ao invés de trabalharmos com a matriz  $B$ . Defina  $Q_B = (Q_0, Q_1)_B$  da seguinte maneira:

- $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ ;
- existe flecha de  $i$  para  $j$  se, e somente se,  $b_{ij} > 0$  e neste caso existem  $|b_{ij}|$  flechas.

**Exemplo 2.1.1** *Se*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$



então

$$Q_B : 1 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} 2 \longrightarrow 3 .$$

Definimos também a mutação do quiver  $Q_B$  na direção  $k \in [1, n]$  por  $\mu_k(Q_B) = Q_{\mu_k(B)}$ . Essa mutação pode ser descrita da seguinte maneira.

- (i) invertem-se todas as flechas que chegam ou saem de  $k$ ;
- (ii) se existe uma flecha de  $i$  para  $k$  e outra de  $k$  para  $j$  em  $Q_C$  incluímos uma flecha de  $i$  para  $j$  no quiver mutado;
- (iii) excluimos os 2-ciclos possivelmente gerados do quiver mutado;
- (iv) as outras flechas de  $Q_C$  são mantidas no quiver mutado.

### Exemplo 2.1.2

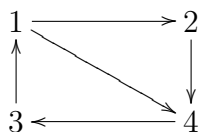
$$\text{Se } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ então } Q_B = 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 .$$

Desta forma,  $\mu_2(B)$  e  $\mu_2(Q_B)$  são dados respectivamente por:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad 1 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array} 2 .$$

**Definição 2.1.3** Dado um quiver  $Q$ , seja  $\beta$  um caminho sem repetição de flechas, antiparalelo a uma flecha  $\alpha$  em  $Q$ . Dizemos que  $\beta$  é caminho curto se não contém nenhum subcaminho cíclico próprio e se todo vértice do subquiver gerado pelo ciclo  $\alpha\beta$  tem valência 2.

**Exemplo 2.1.4** Seja  $Q$  o seguinte quiver



Então o caminho  $(3,1)(4,3)$  é um caminho curto de  $Q$  (com relação à flecha  $(1,4)$ ). Por outro lado, o caminho  $(4,3)(2,4)(1,2)$  não é caminho curto de  $Q$ , pois, apesar de ser antiparalelo à flecha  $(3,1)$ , o subquiver gerado pelo ciclo  $(4,3)(2,4)(1,2)(3,1)$  é o próprio quiver  $Q$  e, portanto, os vértices 2 e 4 têm valência 3.

**Observação 2.1.5** Foi observado em [5, §1] que se  $\mathcal{A}$  é uma álgebra de cluster do tipo ADE, então, para cada semente  $(\mathbf{u}, B)$  de  $\mathcal{A}$ , existem no máximo 2 caminhos curtos antiparalelos a cada flecha de  $Q_B$ .

**Definição 2.1.6** Seja  $\Sigma = (\mathbf{u}, B)$  uma semente de  $\mathcal{A}$ . Para cada flecha  $i \rightarrow j$  em  $Q_B$ , definimos a relação  $\text{Rel}_{i,j}$  como se segue. Considere o conjunto  $C$  dos caminhos curtos antiparalelos a  $i \rightarrow j$ :

- se  $\#C = 2$ , digamos  $C = \{c, c'\}$ , então  $\text{Rel}_{i,j} = \{c - c'\}$ ;
- se  $\#C \leq 1$ , então  $\text{Rel}_{i,j} = C$ .

Para cada semente  $\Sigma = (\mathbf{x}, B)$ , considere a categoria abeliana  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q_B, R_B)$  das representações do quiver  $Q_B$  com relações  $R_B$  definidas por

$$R_B = \bigcup_{(i,j) \in (Q_B)_1} \text{Rel}_{i,j}.$$

Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra de cluster do tipo A e fixe um cluster  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Nas notações do Teorema 1.2.6, considere  $\mathcal{X} = \{x[\alpha] : \alpha \in \Phi_{\geq -1}\}$  o conjunto de todas variáveis de cluster de  $\mathcal{A}$ . Sejam  $\Sigma = (\mathbf{u}, B)$  uma semente de  $\mathcal{A}$  onde  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  e  $B = B(\mathbf{u}) = (b_{ij}(\mathbf{u}), i, j \in I)$ . Tome  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Phi_{\geq -1}$  tal que  $x[\beta_i] = u_i$  para todo  $i \in I := \{1, \dots, n\}$ . Denote por  $\text{Ind}(Q_B, R_B)$  o conjunto das classes de isomorfismo dos objetos indecomponíveis de  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q_B, R_B)$ . Faremos abuso da notação da  $n$ -upla  $\mathbf{u}$  para nos referirmos ao subconjunto  $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq \mathcal{X}$ . Temos então como principal objetivo do capítulo demonstrar algumas partes do seguinte teorema.

**Teorema 2.1.7** *Existe bijeção*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ind}(Q_B, R_B) & \longrightarrow & \mathcal{X} \setminus \mathbf{u} \\ [V] & \mapsto & w_V \end{array}$$

tal que

$$w_V = \frac{P(u_1, \dots, u_n)}{\prod_{i=1}^n u_i^{n_i(V)}},$$

onde  $P$  é um polinômio tal que nenhum  $u_i$  o divide e  $n_i(V) = \dim(V_i)$ .

**Observação 2.1.8** *Através da bijeção entre representações indecomponíveis de  $Q$  e raízes positivas associadas a  $Q$  descrita pelo Teorema de Gabriel (A.4.28), o Teorema 1.2.6 é um caso particular do resultado acima quando o grafo associado a  $Q_B$  é do tipo A.*

Para demonstrar o teorema precisaremos de resultados preliminares que serão feitos ao longo das próximas seções.

## 2.2 Equivalência de Categorias

Afim de demonstrar o Teorema 2.1.7 definiremos uma categoria  $\mathbb{K}$ -linear aditiva através de uma construção geométrica envolvendo diagonais de um polígono regular. Mostraremos ainda que essa categoria é equivalente à categoria das representações do quiver com relações definido na seção anterior.

### 2.2.1 Triangulações e Diagonais

**Definição 2.2.1** *Seja  $\mathcal{P}$  um polígono convexo. Dados dois vértices  $v$  e  $w$  de  $\mathcal{P}$ , denotaremos por  $\langle v, w \rangle$  o seguimento que os une. Observe que  $\langle v, w \rangle$  ou é uma aresta ou é uma diagonal de  $\mathcal{P}$ . Diremos que  $w$  é sucessor de  $v$  se para ir de  $v$  para  $w$  por  $\langle v, w \rangle$  percorremos  $\mathcal{P}$  no sentido anti-horário. Denotaremos por  $s(v)$  o sucessor de um vértice  $v$  de  $\mathcal{P}$ . Denote por  $\Phi_{\mathcal{P}}$  o conjunto de todas as diagonais de  $\mathcal{P}$ . Nos referiremos aos elementos de  $\Phi_{\mathcal{P}}$  por raízes. Usaremos a notação reduzida  $\Phi$  ao invés de  $\Phi_{\mathcal{P}}$  quando não houver confusão. Uma triangulação  $T$  de  $\mathcal{P}$  é uma escolha de um subconjunto  $I$  de  $\Phi$  que dá origem a uma partição de  $\mathcal{P}$  em um conjunto de triângulos com interiores disjuntos, de tal forma que as arestas destes triângulos são ou arestas de  $\mathcal{P}$  ou diagonais de  $\mathcal{P}$  e os vértices desses triângulos são também vértices de  $\mathcal{P}$ . Nos referiremos aos elementos de  $I$  por raízes negativas da triangulação enquanto as demais raízes serão chamadas de positivas. Denotaremos por  $\Phi_+$  o conjunto das raízes positivas com respeito a  $T$ . Por convenção, as raízes negativas serão denotadas por  $-\alpha_i, i \in I$ . O suporte  $\text{supp } \alpha \subseteq I$  de uma raiz positiva  $\alpha$  é o conjunto de raízes negativas que intercepta  $\alpha$ .*

**Exemplo 2.2.2 (Triangulação cobra)** *Um modelo geométrico que será usado para obter importantes resultados nos capítulos 2 e 4 é a chamada triangulação cobra [14, 16]. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $\mathcal{P}$  o polígono regular convexo de  $n+3$  lados. Enumere seus vértices  $1, \dots, n+3$ , de forma*

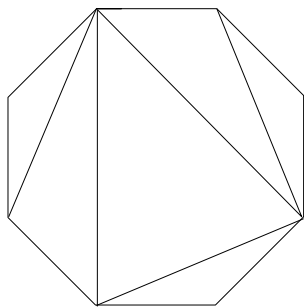


Figura 2.1: Exemplo de triangulação.

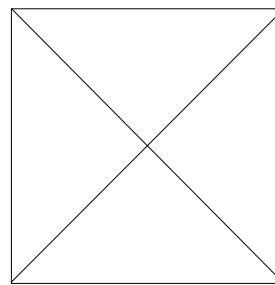


Figura 2.2: Não é uma triangulação.

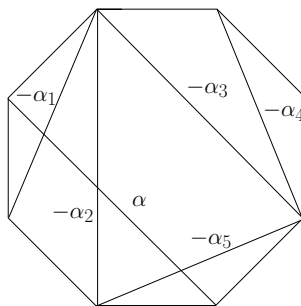


Figura 2.3:  $\text{supp } \alpha = \{-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_5\}$

ordenada no sentido anti-horário. Para  $i = 1, \dots, n$ , seja  $-\alpha_i$  a seguinte diagonal de  $\mathcal{P}$ :

$$-\alpha_i = \begin{cases} \langle (i+1)/2, n+3-(i+1)/2 \rangle & \text{se } i \text{ for ímpar,} \\ \langle i/2+1, n+3-i/2 \rangle & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Facilmente se verifica que  $I = \{-\alpha_i : i = 1, \dots, n\}$  dá origem a uma triangulação  $T$  de  $\mathcal{P}$ .

Dado um polígono regular  $\mathcal{P}$  seja  $J \subseteq \Phi_{\mathcal{P}}$  com a propriedade que duas a duas as diagonais de  $J$  não se cruzam. Se  $J$  não dá origem a uma triangulação de  $\mathcal{P}$  então existe um polígono de  $n > 3$  lados contido em  $\mathcal{P}$ . Com isto temos o seguinte lema.

**Lema 2.2.3** *Conjuntos maximais de diagonais que duas a duas não se cruzam dão origem a uma triangulação.*

Se  $C$  é matriz de Cartan do tipo  $A_n$  e  $\Phi(C)$  é o sistema de raízes associado, podemos identificar as diagonais de  $\mathcal{P}$  com as raízes quase positivas de  $\Phi(C)$  da seguinte maneira. As raízes negativas simples  $-\alpha_i$  de  $\Phi(C)$  são identificadas com as respectivas diagonais da triangulação  $T$ . Se  $\alpha \in \Phi(C)_+$ , então  $\alpha = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j$  para algum  $1 \leq i \leq j \leq n$ .

Assim identificamos as raízes positivas de  $\Phi(C)$  com a única diagonal  $\beta$  de  $\mathcal{P}$  tal que  $\text{supp } \beta = \{-\alpha_i, -\alpha_{i+1}, \dots, -\alpha_j\}$ .

**Proposição 2.2.4** [16, Proposition 3.14] *Sob a identificação acima, os conjuntos maximais de raízes compatíveis (no sentido da Definição 1.2.8) são coleções maximais de diagonais que mutualmente não se cruzam. Então, os clusters estão em bijeção com as triangulações de  $\mathcal{P}$ .*

Não faremos a demonstração desta proposição por ser muito extensa e pela exigência de definições que não serão utilizadas durante o texto.

**Exemplo 2.2.5** *Para  $n = 3$ , a identificação das raízes simples negativas com as diagonais da triangulação cobra do hexágono é mostrada na Figura 2.4. As raízes positivas são representadas pelas diagonais restantes como se segue:*

$$\alpha_1 \equiv \langle 2, 6 \rangle, \quad \alpha_2 \equiv \langle 3, 5 \rangle, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \equiv \langle 4, 6 \rangle, \quad \alpha_2 + \alpha_3 \equiv \langle 1, 3 \rangle, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv \langle 3, 6 \rangle.$$

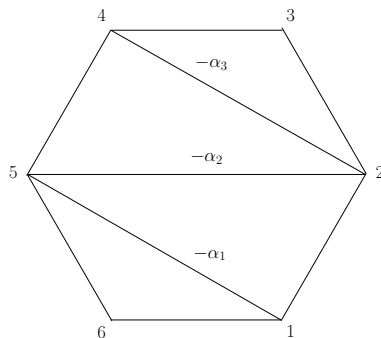


Figura 2.4: Triangulação cobra do hexágono

**Definição 2.2.6** *Sejam  $\mathcal{P}$  um polígono convexo e  $T$  uma triangulação de  $\mathcal{P}$ . Se duas raízes negativas  $-\alpha_i, -\alpha_j$  delimitam o mesmo triângulo em  $T$ , definimos a relação  $<$  como se segue: Seja  $x$  o vértice comum de  $-\alpha_i, -\alpha_j$ , então  $-\alpha_i < -\alpha_j$  se a rotação com ângulo mínimo em  $x$  manda a reta estendida por  $-\alpha_i$  na reta estendida por  $-\alpha_j$  no sentido positivo (anti-horário) (veja Figura 2.5).*

Sejam  $v$  um vértice de  $\mathcal{P}$  e  $A$  o conjunto das arestas de  $\mathcal{P}$ . Definimos a função  $P_v : \Phi \cup A \cup \{0\} \rightarrow \Phi \cup A \cup \{0\}$  por  $P_v(0) = 0$  e, para dois vértices  $u, w$  de  $\mathcal{P}$  tais que  $\langle u, w \rangle \in \Phi \cup A$ ,

$$P_v(\langle u, w \rangle) = \begin{cases} \langle v, s(w) \rangle, & \text{se } u = v \text{ e } v \neq s(w), \\ \langle s(u), v \rangle, & \text{se } w = v \text{ e } v \neq s(u), \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

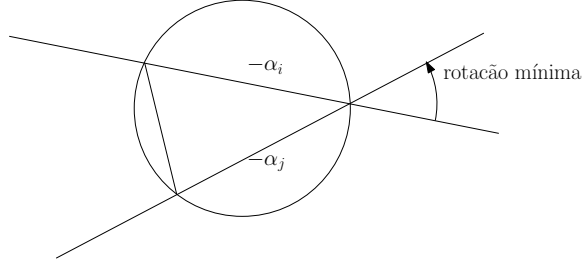


Figura 2.5:  $-\alpha_i < -\alpha_j$

A função  $P_v$  será chamada de movimento de rotação elementar no pivô  $v$ .

Definimos ainda a função  $\bar{P}_v : \Phi_+ \cup \{0\} \rightarrow \Phi_+ \cup \{0\}$  por  $\bar{P}_v(0) = 0$  e, para dois vértices  $u, w$  de  $\mathcal{P}$  tais que  $\langle u, w \rangle \in \Phi_+$ ,

$$\bar{P}_v(\langle u, w \rangle) = \begin{cases} P_v(\langle u, w \rangle), & \text{se } P_v(\langle u, w \rangle) \in \Phi_+, \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Se  $\alpha, \alpha' \in \Phi_+$ , diremos que  $\alpha$  está relacionada a  $\alpha'$  por um movimento de rotação elementar se  $\alpha' = P_v(\alpha)$  para algum vértice  $v$ . Denotaremos por  $\mathcal{R}$  o semigrupo gerado por  $\bar{P}_v$  para todo vértice  $v$  de  $\mathcal{P}$  e por  $\mathbb{K}\mathcal{R}$  a álgebra de semigrupo associada.

Uma relação de malha em  $\mathbb{K}\mathcal{R}$  é um elemento da forma

$$P(\beta, \beta') := \bar{P}_{s(v_2)}\bar{P}_{v_1} - \bar{P}_{s(v_1)}\bar{P}_{v_2}, \quad \beta = \langle v_1, v_2 \rangle, \beta' = \langle s(v_1), s(v_2) \rangle \in \Phi_+. \quad (2.2.1)$$

Denote por  $\mathcal{M}$  o ideal bilateral de  $\mathbb{K}\mathcal{R}$  gerado por todas as relações de malha  $P(\beta, \beta')$  satisfazendo as condições acima.

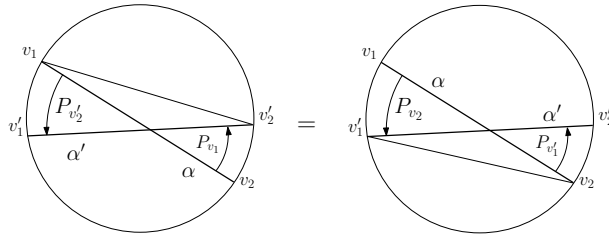


Figura 2.6: relação de malha  $\bar{P}_{v_2'}\bar{P}_{v_1} = \bar{P}_{v_1'}\bar{P}_{v_2}$

Um caminho de rotação de uma raiz positiva  $\alpha$  para uma raiz positiva  $\alpha'$  é um elemento  $\bar{P}_{v_1} \cdots \bar{P}_{v_k} \in \mathcal{R}$  tal que  $\bar{P}_{v_k} \cdots \bar{P}_{v_1}(\alpha) = \alpha'$ . Em particular,  $P_{v_j} \cdots P_{v_1}(\alpha) \in \Phi_+$  para todo  $1 \leq j \leq k$ . Denote por  $\mathcal{R}(\alpha, \alpha')$  o subespaço de  $\mathbb{K}\mathcal{R}$  gerado por todos os caminhos de rotação de  $\alpha$  para  $\alpha'$

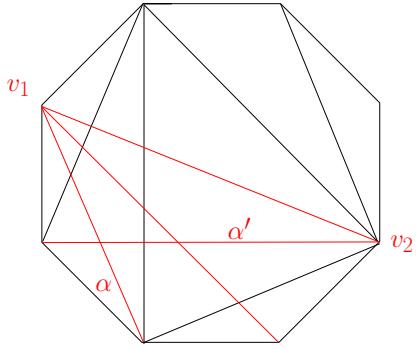


Figura 2.7:  $\overline{P}_{v_2}\overline{P}_{v_1}\overline{P}_{v_1}$  é caminho de rotação de  $\alpha$  para  $\alpha'$ .

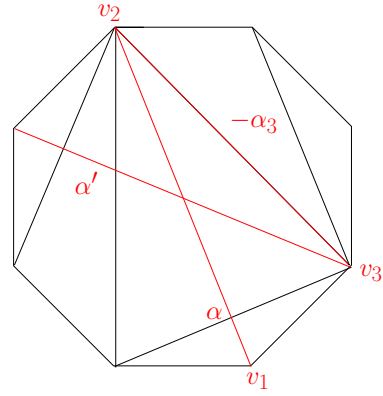


Figura 2.8:  $\overline{P}_{v_3}\overline{P}_{v_2}$  não é caminho de rotação de  $\alpha$  para  $\alpha'$  pois  $P_{v_2}(\alpha) \notin \Phi_+$ .

Podemos definir uma categoria combinatorial aditiva  $\mathbb{K}$ -linear  $\mathcal{C}_T$  como se segue. Os objetos são combinações lineares inteiras de raízes positivas. Pela aditividade, basta definir os morfismos entre raízes positivas. Assim, dadas  $\alpha, \alpha' \in \Phi_+$ , defina  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\alpha, \alpha')$  como a imagem de  $\mathcal{R}(\alpha, \alpha')$  no quociente de  $\mathbb{C}\mathcal{R}$  por  $\mathcal{M}$ .

### 2.2.2 Grafos e Árvores

Seja  $T$  uma triangulação. Podemos definir uma *árvore*  $t_T$  como se segue. Seus vértices são os triângulos de  $T$  e as arestas ligam dois vértices se os triângulos associados são adjacentes. Observe que os vértices de  $t_T$  tem valência 1, 2 ou 3 e cada árvore tem pelo menos um vértice de valência 1. Chamaremos de *folha* uma aresta de  $t_T$  tal que pelo menos um dos vértices tenha valência 1. De  $T$  podemos definir ainda um grafo  $\Gamma_T$ . A cada diagonal de  $T$  é associado um vértice em  $\Gamma_T$  e dois vértices são ligados por uma aresta se as diagonais associadas delimitam um mesmo triângulo em  $T$ . Uma *mutação* de  $T$  sobre uma de suas diagonais, digamos  $-\alpha_k$ , é a única triangulação  $T'$  de  $\mathcal{P}$  que pode ser obtida mantendo as diagonais  $-\alpha_i, i \neq k$ , de  $T$  em  $T'$  e substituindo  $-\alpha_k$  pela única outra diagonal do quadrilátero triangulado por  $-\alpha_k$ .

### 2.2.3 Quivers

Seja  $T$  uma triangulação. Definimos o quiver  $Q_T$  cujo grafo associado é o grafo  $\Gamma_T$  definido anteriormente. Observe que os vértices estão associados às diagonais de  $T$  e, portanto, em bijeção com o conjunto  $I$  das raízes negativas de  $T$ . Observe que se há aresta de  $i$  para  $j$  em  $\Gamma_T$ ,  $-\alpha_i$  e  $-\alpha_j$  delimitam o mesmo triângulo em  $T$  e portanto têm um vértice em comum.

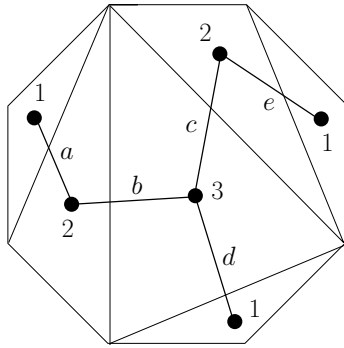


Figura 2.9: Árvore  $t_T$ . Os números indicam a valência do vértice e as arestas  $a, b$  e  $e$  são folhas.

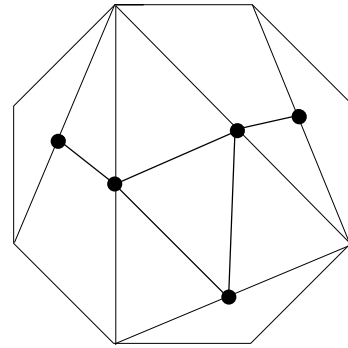


Figura 2.10: Grafo  $\Gamma_T$

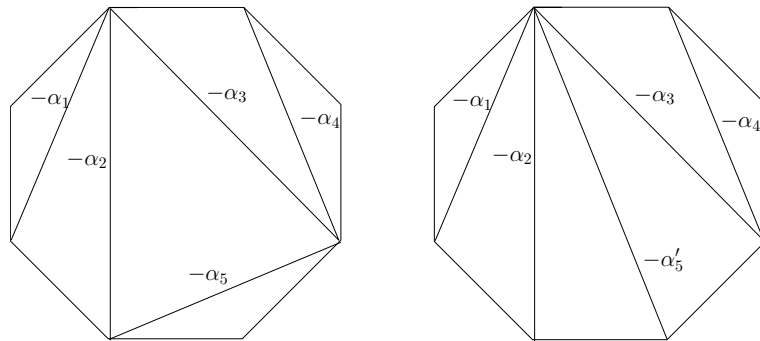


Figura 2.11: Triangulação  $T$  e sua mutação na raiz  $-\alpha_5$

Assim  $-\alpha_i$  e  $-\alpha_j$  são comparáveis com relação a  $<$  definida em 2.2.1 e a aresta é orientada  $i \leftarrow j$  se  $-\alpha_i < -\alpha_j$ . Desta definição segue que todo triângulo em  $Q_T$  é orientado.



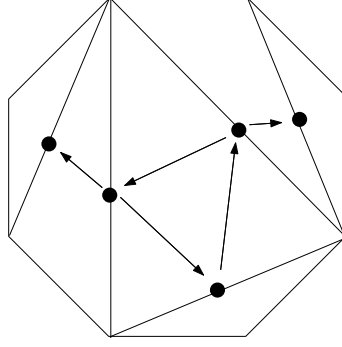


Figura 2.12: Quiver obtido do grafo  $Q_T$

**Lema 2.2.7** *A mutação de quivers definida na seção 2.1 corresponde ao quiver obtido através da mutação de triangulações descrita acima.*

**Demonstração:** Dada  $T$  triangulação de  $\mathcal{P}$  considere  $Q_T$  seu quiver. Denote a mutação de  $I$  na diagonal  $-\alpha_k$  por  $\mu_k(I)$  e por  $\mu_k(T)$  a triangulação associada ao conjunto  $\mu_k(I)$ . Como  $I$  está em bijeção com  $(Q_T)_0$  temos que provar que  $Q_{\mu_k(T)} = \mu_k(Q_T)$ . Denote por  $-\alpha'_k$  a diagonal de  $\mathcal{P}$  tal que  $\{-\alpha'_k\} = \mu_k(I) \setminus I$ . Se existe flecha  $i \rightarrow k$  em  $Q_T$  então  $-\alpha_k < -\alpha_i$ . Nesta condição temos  $-\alpha_i < -\alpha'_k$  e então existe flecha  $k \rightarrow i$  em  $Q_{\mu_k(T)}$ . Analogamente,  $k \rightarrow i$  em  $Q_T$  implica  $i \rightarrow k$  em  $Q_{\mu_k(T)}$ . Isto significa que invertemos as flechas incidentes em  $k$ .

Se existem flechas  $i \rightarrow k \rightarrow j$  em  $Q_T$  então temos  $-\alpha_j < -\alpha_k < -\alpha_i$  em  $I$ . Esta configuração nos dá  $-\alpha_j < -\alpha_i < -\alpha'_k < -\alpha_j$  em  $\mu_k(I)$  e portanto temos flecha  $i \rightarrow j$  em  $Q_{\mu_k(T)}$ . Se não há flecha entre os vértices  $i$  e  $k$  então  $-\alpha_i$  e  $-\alpha_k$  não delimitam o mesmo triângulo em  $T$  e conseqüentemente em  $\mu_k(T)$ . Logo não há flechas entre  $i$  e  $k$  em  $Q_{\mu_k(T)}$ .  $\square$

**Definição 2.2.8** *Dado  $Q$  um quiver, definimos as relações triangulares  $R$  em  $\mathbb{K}Q$  da seguinte maneira: em qualquer triângulo orientado, a composição de duas flechas sucessivas é zero. Sejam  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q_T, R)$ , a categoria  $\mathbb{K}$ -linear abeliana das representações do quiver  $Q_T$  com relações triangulares, e  $\text{Ind}(Q_T, R)$ , o conjunto das classes de isomorfismo dos objetos indecomponíveis de  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q_T, R)$ .*

**Observação 2.2.9** *Observe que essas relações são as mesmas descritas na Definição 2.1.6.*

**Lema 2.2.10** *O suporte  $\text{supp } \alpha$  de uma raiz positiva  $\alpha$  é conexo visto como subconjunto do quiver  $Q_T$ .*

**Demonstração:** Sejam  $-\alpha_i, -\alpha_j$  duas raízes negativas distintas em  $\text{supp } \alpha$ . Mostremos que existe um caminho não orientado de  $i$  para  $j$  em  $Q_T \cap \text{supp } \alpha$ . As diagonais  $-\alpha_i$  e  $-\alpha_j$  cortam o polígono em três partes. Denote por  $P_{ij}$  a parte que contém  $-\alpha_i$  e  $-\alpha_j$ . Procederemos por indução em  $m$  o número de raízes negativas em  $P_{ij}$ . Se  $m = 1$ , então  $-\alpha_i = -\alpha_j$  e não há nada a provar. Assuma  $m > 1$  e seja  $\Delta$  o único triângulo em  $T$  que contém  $-\alpha_i$  e está contido em  $P_{ij}$ . Como  $\alpha$  atravessa tanto  $-\alpha_i$  como  $-\alpha_j$ , então  $\alpha$  tem que atravessar exatamente um dos dois lados diferentes de  $-\alpha_i$  em  $\Delta$ . Este lado não pode ser o bordo do polígono, então tem de ser uma raiz negativa, suponha  $-\alpha_k$ . Então existe uma aresta entre  $-\alpha_i$  e  $-\alpha_k$  em  $Q_T$  e  $i, k \in \text{supp } \alpha$ . Podemos supor por indução que existe um caminho não orientado em  $\text{supp } \alpha$  de  $k$  para  $j$  o que termina a demonstração.  $\square$

## 2.2.4 O Funtor $\Theta$

Definiremos um funtor  $\mathbb{K}$ -linear  $\Theta$  de  $\mathcal{C}_T$  para  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q_T, R)$ . Pela aditividade é suficiente definir  $\Theta$  nas raízes positivas. A imagem de uma raiz positiva  $\alpha$  é o módulo  $(M^\alpha, f^\alpha) = (M_i^\alpha, f_{ij}^\alpha)$  definidos por

$$M_i^\alpha = \begin{cases} \mathbb{K} & \text{se } i \in \text{supp } \alpha, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad e \quad f_{ij}^\alpha = \begin{cases} \text{id}_{\mathbb{K}} & \text{se } M_i^\alpha = \mathbb{K} = M_j^\alpha, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isto é, de fato, um objeto em  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q_T, R)$  pois uma raiz positiva  $\alpha$  pode atravessar apenas dois lados de um triângulo em  $T$ , o que implica que em cada triângulo de  $Q_T$  há no máximo uma flecha  $i \rightarrow j$  tal que  $f_{ij}^\alpha \neq 0$  e portanto as relações triangulares da Definição 2.2.8 são mantidas. Agora definimos o funtor nos morfismos. Pela aditividade, é suficiente definir o funtor nos morfismos de uma raiz positiva para outra raiz positiva. Definiremos o funtor nos movimentos de rotação elementar e depois verificaremos que as relações de malha são respeitadas.

Sejam  $\alpha, \alpha' \in \Phi_+$  tais que  $\overline{P}_v(\alpha) = \alpha'$ . Defina o morfismo  $\Theta(\overline{P}_v)$  de  $(M^\alpha, f^\alpha)$  para  $(M^{\alpha'}, f^{\alpha'})$  sendo  $\Theta(\overline{P}_v)_i = \text{id}_{\mathbb{K}}$  sempre que  $i \in \text{supp } \alpha \cap \text{supp } \alpha'$  e 0 caso contrário. Verifiquemos agora que  $\Theta(\overline{P}_v)$  é de fato um morfismo em  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q_T, R)$ . Para uma dada flecha  $i \rightarrow j$  em  $Q_T$ , temos que verificar a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M_i^\alpha & \xrightarrow{f_{ij}^\alpha} & M_j^\alpha \\ \Theta(\overline{P}_v)_i \downarrow & & \downarrow \Theta(\overline{P}_v)_j \\ M_i^{\alpha'} & \xrightarrow{f_{ij}^{\alpha'}} & M_j^{\alpha'} \end{array}$$

Se  $M_i^\alpha = 0$  ou  $M_j^{\alpha'} = 0$  e ainda se ambos  $M_j^\alpha$  e  $M_i^{\alpha'}$  forem 0, o diagrama claramente comuta. Suponha  $M_i^\alpha \neq 0$  e  $M_j^{\alpha'} \neq 0$ . Se  $M_j^\alpha \neq 0$  e  $M_i^{\alpha'} \neq 0$  então as quatro transformações lineares são  $\text{id}_{\mathbb{K}}$  e o diagrama comuta. O único caso restante é se exatamente ou  $M_j^\alpha \neq 0$  ou  $M_i^{\alpha'} \neq 0$ . Suponha que  $M_i^{\alpha'} = 0$  e  $M_j^\alpha \neq 0$ , isto é,  $i, j \in \text{supp } \alpha$ ,  $j \in \text{supp } \alpha'$  e  $i \notin \text{supp } \alpha'$ . Como  $P_v$  é um movimento de rotação elementar temos que  $-\alpha_i$  atravessa  $\alpha$ , que  $-\alpha_i$  e  $\alpha'$  tem um vértice em comum e que  $-\alpha_j$  atravessa  $\alpha$  e  $\alpha'$ . Isto implica que  $-\alpha_i < -\alpha_j$  e isto contradiz a orientação  $i \rightarrow j$  no quiver  $Q_T$ . O outro caso pode ser excluído de maneira análoga.

Para mostrar que a definição acima se estende a um funtor, resta apenas verificar que as relações de malha são respeitadas. Seja  $P = \overline{P}_{s(v_2)}\overline{P}_{v_1}$  um caminho de rotação de  $\alpha = \langle v_1, v_2 \rangle$  para  $\alpha' = \langle s(v_1), s(v_2) \rangle$  e considere  $\beta = P_{v_1}(\alpha) = \langle v_1, s(v_2) \rangle \in \Phi_+$ . Seja  $\beta' = P_{v_2}(\alpha)$  e suponha inicialmente que  $\beta' \in \Phi_+$ . Temos que verificar a comutatividade do diagrama para todo  $i$ :

$$\begin{array}{ccc} M_i^\alpha & \xrightarrow{\Theta(\overline{P}_{v_1})_i} & M_i^\beta \\ \Theta(\overline{P}_{v_2})_i \downarrow & & \downarrow \Theta(\overline{P}_{s(v_2)})_i \\ M_i^{\beta'} & \xrightarrow{\Theta(\overline{P}_{s(v_1)})_i} & M_i^{\alpha'} \end{array}$$

O único caso não trivial é quando  $i \in \text{supp } \alpha \cap \text{supp } \alpha'$ . Neste caso, temos também  $i \in \text{supp } \beta \cap \text{supp } \beta'$  pois qualquer diagonal atravessando  $\alpha$  e  $\alpha'$  deve atravessar também  $\beta$  e  $\beta'$ . Assim, todas as transformações lineares são  $\text{id}_{\mathbb{K}}$  e o diagrama comuta. Suponha agora que  $\beta'$  é uma aresta ou uma raiz negativa, e portanto  $\overline{P}_{v_2}(\alpha) = 0$ . Temos que mostrar que a composição  $M_i^\alpha \xrightarrow{\Theta(\overline{P}_{v_1})_i} M_i^\beta \xrightarrow{\Theta(\overline{P}_{s(v_2)})_i} M_i^{\alpha'}$  é zero para todo  $i$ . Mas neste caso nenhuma raiz negativa pode interceptar  $\alpha$  e  $\alpha'$ . Então  $\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \alpha'$  é vazio, e então a composição é zero. Assim as relações malha são respeitadas, com as convenções feitas em sua definição.

**Lema 2.2.11** *O espaço vetorial  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\alpha, \alpha')$  é diferente de zero se, e somente se, existe  $i \in \text{supp } \alpha \cap \text{supp } \alpha'$  tal que as posições relativos de  $\alpha, \alpha'$  e  $-\alpha_i$  são como na Figura 2.13. Isto é, sejam  $v_1, v_2$  os vértices de  $-\alpha_i$  e  $u_1, u_2$  (respectivamente  $u'_1, u'_2$ ) os vértices de  $\alpha$  (respectivamente  $\alpha'$ ). Então existe ordenação de tais vértices no sentido trigonométrico positivo, digamos, começando em  $v_1$  e  $v_1 < u_1 \leq u'_1 < v_2 < u_2 \leq u'_2$ . Neste caso,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\alpha, \alpha')$  é de dimensão 1.*

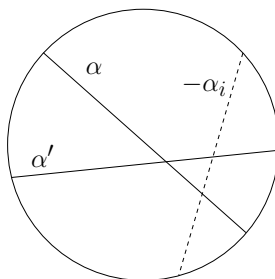


Figura 2.13: Posição relativa.

**Demonstração:** Suponha que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\alpha, \alpha') \neq 0$ . Seja  $P = \overline{P}_{i_m} \dots \overline{P}_{i_2} \overline{P}_{i_1} \neq 0$  um caminho de rotação de  $\alpha$  para  $\alpha'$  e denote por  $\alpha^k = P_{i_k} \dots P_{i_1}(\alpha)$  para todo  $k = 1, \dots, m$ . Pelas relações de malha, podemos supor que os  $k$  primeiros movimentos de rotação elementar  $\overline{P}_{i_1}, \dots, \overline{P}_{i_k}$  tem pivô em  $i_1$  e os últimos  $(m-k)$  movimentos de rotação elementar  $\overline{P}_{i_{k+1}}, \dots, \overline{P}_{i_m}$  tem pivô em  $i_{k+1}$ . Observe que neste caso temos que  $i_1$  é um dos vértices de  $\alpha$  e  $i_{k+1}$  o vértice que está na interseção de  $\alpha'$  e  $\alpha^k$ . Temos dois casos possíveis:

- (a) Se  $m = k$ , então  $\alpha$  e  $\alpha'$  tem um vértice em comum, o pivô de  $\overline{P}_{i_1}$ . Suponha por simplicidade que  $m = 1$  e o caso geral é provado de forma análoga. Temos então  $\alpha' = \overline{P}_{i_1}(\alpha)$ . Suponha por absurdo que não existe  $i \in \text{supp } \alpha \cap \text{supp } \alpha'$ . Como  $\alpha$  e  $\alpha'$  delimitam um triângulo em  $\mathcal{P}$  existe  $j \in I$  tal que  $-\alpha_j$  tem um vértice em comum com  $\alpha$  e cruza  $\alpha'$  ou tem um vértice em comum com  $\alpha'$  e cruza  $\alpha$ . Suponhamos, sem perda de generalidade, a primeira configuração. Observe que  $\alpha$  e  $-\alpha_j$  dividem o polígono em 2 partes. Denote por  $R_1$  a parte que contém  $-\alpha_j$  e  $R_2$  a outra parte. Pela hipótese e por  $-\alpha_j \in T$  nenhuma diagonal de  $T$  com vértice em  $R_2$  pode cruzar  $\alpha$ . Com isto, os elementos de  $T$  triangulam completamente os polígonos  $R_1$  e  $R_2$  e isso implica que  $\alpha \in T$  contradizendo que  $\alpha$  é raiz positiva. Logo, existe  $i \in \text{supp } \alpha \cap \text{supp } \alpha'$  e a situação da Figura 2.13 é satisfeita.
- (b) Se  $m > k$ , denote por  $V_1$  (respectivamente  $V_2$ ) o conjunto dos vértices de  $\alpha, \alpha^1, \dots, \alpha^k$  (respectivamente  $\alpha^{k+1}, \dots, \alpha^m$ ) exceto  $i_1$  (respectivamente  $i_{k+1}$ ). Como  $P \neq 0$ , isto implica que  $\alpha$  e  $\alpha'$  se interceptam e, pelas relações de malha, todas diagonais com um vértice em  $V_1$  e outro em  $V_2$  são positivas. Além disso, os vértices de  $\alpha$  e  $\alpha'$  formam um quadrilátero no polígono sem que nenhuma diagonal da triangulação  $T$  atravessasse-o de  $V_1$  para  $V_2$ . Pelo item (a), existe  $i \in \text{supp } \alpha \cap \text{supp } \alpha^k$ . Analogamente, existe  $j \in \text{supp } \alpha' \cap \text{supp } \alpha^k$ . Se  $-\alpha_i$  ou cruza  $\alpha'$  ou  $-\alpha_j$  cruza  $\alpha$ , está terminado. Caso contrário, existirá  $-\alpha_k \in T$  com um vértice  $v_2$  tal que  $u'_1 < v_2 < u_2$  e o outro vértice  $v_2$  é tal que  $w_2 < v_1 < w_1$ . Logo, temos a situação da Figura 2.13.

Por outro lado, na condição do diagrama, é claro que existe um morfismo diferente de zero

de  $\alpha$  para  $\alpha'$ . Por fim, a dimensão de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\alpha, \alpha')$  é no máximo um, pois quaisquer dois caminhos de rotação diferentes de zero de  $\alpha$  para  $\alpha'$  estão na mesma classe.  $\square$

**Lema 2.2.12** *Sejam  $\alpha$  e  $\alpha'$  raízes positivas, então  $\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \alpha'$  é conexo.*

**Demonstração:** Suponha por redução ao absurdo que  $\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \alpha'$  é desconexo. Escreva  $S = \text{supp } \alpha$  e  $S' = \text{supp } \alpha'$  por simplicidade. Sejam,  $i, k \in S \cap S'$  dois vértices que pertencem a componentes conexas diferentes de  $S \cap S'$ . Como  $S$  e  $S'$  são conexos, pelo Lema 2.2.10, podemos escolher dois caminhos  $p : i = i_1, i_2, \dots, i_p = k$  em  $S$  e  $p' : i = j_1, j_2, \dots, j_{p'} = k$  em  $S'$ . Seja  $m$  o menor inteiro tal que  $i_{m+1} \neq j_{m+1}$ . Na triangulação  $T$ , cada uma das diagonais  $-\alpha_{i_{m-1}}, -\alpha_{i_{m+1}}, -\alpha_{j_{m+1}}$  tem um vértice em comum com  $-\alpha_{i_m}$ . Como uma raiz positiva pode atravessar apenas dois lados de um triângulo, temos que  $-\alpha_{i_m}, -\alpha_{i_{m+1}}$  e  $-\alpha_{j_{m+1}}$  formam um triângulo  $\Delta$  em  $T$ . Além disso  $i_{m+1} \in S \setminus S'$  e  $j_{m+1} \in S' \setminus S$ . Agora, retirando o triângulo  $\Delta$ , dividimos o polígono em três partes:  $R_{i_m}, R_{i_{m+1}}$  e  $R_{j_{m+1}}$  tal que  $R_l$  contém  $-\alpha_l$ ,  $l = i_m, i_{m+1}, j_{m+1}$ . Além disso  $-\alpha_{i_l}, l \geq m+1$  pertencem a  $R_{i_{m+1}}$  e  $-\alpha_{j_l}, l \geq m+1$  pertencem a  $R_{j_{m+1}}$ . Mas isto contradiz o fato de  $-\alpha_{j_{p'}} = -\alpha_k = -\alpha_{i_p}$ , e portanto  $S \cap S'$  é conexo.  $\square$

**Lema 2.2.13** *Sejam  $\alpha, \alpha'$  raízes positivas de  $T$ ,  $S = \text{supp } \alpha$  e  $S' = \text{supp } \alpha'$ . O espaço vetorial  $\text{Hom}_{\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q_T, R)}((M^\alpha, f^\alpha), (M^{\alpha'}, f^{\alpha'}))$  é diferente de zero se, e somente se, as seguintes condições são verificadas:*

- (i)  $S \cap S' \neq \emptyset$ ;
- (ii) não existe flecha de  $S \setminus S'$  para  $S \cap S'$  em  $Q_T$ ;
- (iii) não existe flecha de  $S \cap S'$  para  $S' \setminus S$  em  $Q_T$ ;

Neste caso,  $\text{Hom}_{\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q_T, R)}((M^\alpha, f^\alpha), (M^{\alpha'}, f^{\alpha'}))$  é de dimensão um.

**Demonstração:** Seja  $P \in \text{Hom}_{\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q_T, R)}((M^\alpha, f^\alpha), (M^{\alpha'}, f^{\alpha'})), P \neq 0$ . Segue que a condição (i) é satisfeita. Suponha que a condição (ii) não seja verdadeira. Então existe flecha  $i \rightarrow j$  em  $Q_T$  com  $i \in S \setminus S', j \in S \cap S'$  tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} M_i^\alpha & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{K}}} & M_j^\alpha \\ P_i \downarrow & & \downarrow P_j \\ 0 & \xrightarrow{0} & M_j^{\alpha'} \end{array}$$

Assim  $P_i$  e  $P_j$  são ambos zero. Agora, tome  $k$  qualquer vértice em  $S \cap S'$ . Mostremos que  $P_k = 0$ . Pelo Lema 2.2.12 existe um caminho não orientado  $k = k_0 - k_1 - \dots - k_m = i$  em  $Q_T$  tal que cada  $k_i \in S \cap S'$ . Procederemos por indução em  $m$ . Quando  $m = 0$  está feito acima. Supondo  $m > 0$ , por indução  $P_{k_1}$  é zero e a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_k^\alpha & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{K}}} & M_{k_1}^\alpha \\ P_k \downarrow & & \downarrow 0 \\ M_k^{\alpha'} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{K}}} & M_{k_1}^{\alpha'} \end{array}$$

implica que  $P_k$  é zero para ambas as possibilidades de orientação de  $k - k_1$  em  $Q_T$ . A condição (iii) é demonstrada de maneira análoga.

Para provar a recíproca, tome  $\alpha, \alpha'$  satisfazendo as três condições. Defina  $P \in \text{Hom}_{\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q_T, R)}((M^\alpha, f^\alpha), (M^{\alpha'}, f^{\alpha'}))$  por

$$P_i = \begin{cases} \text{id}_{\mathbb{K}}, & \text{se } i \in S \cap S' \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, (i) implica que  $P \neq 0$ . Resta apenas mostrar que  $P$  é um morfismo de módulos de quiver, ou seja, que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_i^\alpha & \xrightarrow{f_{ij}^\alpha} & M_j^\alpha \\ P_i \downarrow & & \downarrow P_j \\ M_i^{\alpha'} & \xrightarrow{f_{ij}^{\alpha'}} & M_j^{\alpha'} \end{array}$$

comuta para toda  $i \rightarrow j$  em  $Q_T$ . Mas isto é verdade pelas condições (ii) e (iii).

Por fim, a dimensão de  $\text{Hom}_{\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q_T, R)}((M^\alpha, f^\alpha), (M^{\alpha'}, f^{\alpha'}))$  é no máximo um, pois cada espaço vetorial  $M_i^\alpha, M_i^{\alpha'}$  é de dimensão zero ou um, e pela conexidade da interseção dos suportes.

□

**Lema 2.2.14** *As condições do Lema 2.2.11 e do Lema 2.2.13 são equivalentes.*

**Demonstração:** Suponha  $\alpha, \alpha'$  como no Lema 2.2.11. Então  $i \in S \cap S'$  o que implica (i). Suponha que existe flecha  $j \rightarrow k$  em  $Q_T$  tal que  $j \in S \setminus S'$  e  $k \in S \cap S'$ . Então  $-\alpha_k$  atravessa tanto  $\alpha$  quanto  $\alpha'$  enquanto  $-\alpha_j$  atravessa apenas  $\alpha$ . Como  $j \rightarrow k$ , sabemos que  $-\alpha_j$  e  $-\alpha_k$

são dois lados de um triângulo em  $T$  e que  $-\alpha_k < -\alpha_j$ . Isto é impossível pela maneira como  $-\alpha_i$  intercepta  $\alpha$  e  $\alpha'$ . Assim, a condição (ii) é satisfeita, e podemos mostrar (iii) de maneira análoga.

Por outro lado, suponha que  $\alpha, \alpha'$  satisfazem as condições (i), (ii) e (iii) do Lema 2.2.13. Por (i), existe  $-\alpha_i \in S \cap S'$ . Sejam  $v_1, v_2$  os vértices de  $-\alpha_i$ . Considere as duas partes do polígono  $R_l$  e  $R_r$  delimitadas por  $-\alpha_i$ . Cada uma delas contém exatamente um vértice de  $\alpha$  e um vértice de  $\alpha'$ . Considere as raízes positivas  $\alpha, \alpha'$  como caminhos de  $R_r$  para  $R_l$ . A sequência de raízes negativas dada pela interseção sucessiva do caminho  $\alpha$  (respectivamente  $\alpha'$ ) com elementos de  $T$  mantém uma ordenação de  $\text{supp } \alpha$  (respectivamente  $\text{supp } \alpha'$ ). Seja  $S_l = \{-\alpha_i = -\alpha_{i_1}, -\alpha_{i_2}, \dots, -\alpha_{i_p}\}$  (respectivamente  $S'_l = \{-\alpha_i = -\alpha_{j_1}, -\alpha_{j_2}, \dots, -\alpha_{j_q}\}$ ) o conjunto de raízes negativas em  $R_l$  atravessando  $\alpha$  (respectivamente  $\alpha'$ ) nesta ordem. Seja  $m$  o maior inteiro tal que  $-\alpha_{i_m} = -\alpha_{j_m}$ . Temos quatro casos possíveis:

- (i)  $m = p = q$ , então na fronteira de  $R_l$ , indo dos vértices de  $-\alpha_i$  no sentido positivo, encontramos  $\alpha$  e  $\alpha'$  ao mesmo tempo.
- (ii)  $m = p < q$ , então  $-\alpha_{j_{m+1}}$  e  $-\alpha_{j_m}$  delimitam o mesmo triângulo em  $T$ . A aresta correspondente em  $Q_T$  é orientada  $j_{m+1} \rightarrow j_m$  por (iii). Isto implica que indo dos vértices de  $-\alpha_i$  no sentido positivo na fronteira de  $R_l$ , encontramos primeiro  $\alpha$  e depois  $\alpha'$ .
- (iii)  $m = q < p$ , então  $-\alpha_{i_{m+1}}$  e  $-\alpha_{i_m}$  delimitam o mesmo triângulo em  $T$ . A aresta correspondente em  $Q_T$  é orientada  $i_{m+1} \leftarrow i_m$  por (ii). Isto implica novamente que indo dos vértices de  $-\alpha_i$  no sentido positivo pela fronteira de  $R_l$ , encontramos primeiro  $\alpha$  e depois  $\alpha'$ .
- (iv)  $m < p$  e  $m < q$ , então  $-\alpha_{i_{m+1}}, -\alpha_{i_m}$  e  $-\alpha_{j_{m+1}}$  são três diferentes diagonais que delimitam o mesmo triângulo em  $T$ . Os vértices correspondentes em  $Q_T$  são orientados por  $i_{m+1} \leftarrow i_m$  por (ii) e  $j_{m+1} \rightarrow j_m$  por (iii). Isto implica mais uma vez que indo dos vértices de  $-\alpha_i$  no sentido positivo pela fronteira de  $R_l$ , encontramos primeiro  $\alpha$  depois  $\alpha'$ .

Por simetria, obtemos os mesmos resultados na outra parte  $R_r$ . Isto implica que a posição relativa de  $\alpha, \alpha'$  e  $-\alpha_i$  é exatamente a descrita no Lema 2.2.11.  $\square$

**Proposição 2.2.15** *O funtor  $\Theta$  é pleno e fiel.*

**Demonstração:** Como  $\Theta$  é funtor  $\mathbb{K}$ -linear, é suficiente analisar nos objetos simples  $\alpha, \alpha'$ . Se  $\text{Hom}_{\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q_T, R)}((M^\alpha, f^\alpha), (M^{\alpha'}, f^{\alpha'})) \neq \{0\}$ , então as condições (i) – (iii) do Lema 2.2.13 são satisfeitas e, pelos Lemas 2.2.4 e 2.2.11,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, \alpha') \neq \{0\}$ . Logo, existem  $P \neq 0$ , caminho de rotação de  $\alpha$  para  $\alpha'$ , e  $i \in \text{supp } \alpha \cap \text{supp } \alpha'$ . Pela definição de  $\Theta$ , temos  $\Theta(P)_i = \text{id}_{\mathbb{K}}$  o que implica  $\Theta(P) \neq 0$ . Como sabemos que a dimensão de cada espaço de morfismo é no máximo 1 segue que  $\Theta$  é pleno. Para provar que  $\Theta$  é fiel é suficiente mostrar que a imagem de um morfismo não nulo entre raízes positivas é um morfismo não nulo. Tome  $P \in \text{Hom}(\alpha, \alpha')$  um morfismo. Então  $P$  é dado por uma sequência de movimentos elementares de rotação  $\alpha = \alpha^1 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha^m = \alpha'$ . Esta sequência sendo um morfismo não nulo implica que existe uma raiz negativa  $-\alpha_i$  atravessando todo  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , pelo Lema 2.2.11. Por definição,  $\Theta(P)_i = \text{id}_{\mathbb{K}}$ , portanto não nulo.  $\square$

**Teorema 2.2.16** [5, Theorem 2.9] *O funtor  $\Theta$  nos dá uma equivalência de categorias de  $\mathcal{C}_T$  para  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q_T, R)$ .*

Pela proposição anterior, resta apenas mostrar que  $\Theta$  é essencialmente sobrejetivo. Essa demonstração será omitida pois faz uso da teoria de Auslander-Reiten, o que foge do alcance deste texto. Os corolários a seguir seguem trivialmente do teorema.

**Corolário 2.2.17** *A categoria  $\mathcal{C}_T$  é abeliana.*

**Corolário 2.2.18** *Existe única bijeção  $\phi$  entre  $\text{Ind}(Q_T, R)$  e as diagonais do polígono que não estão em  $T$ . Além disso, para  $[V]$  em  $\text{Ind}(Q_T, R)$  e qualquer vértice  $i \in Q_T$ , a multiplicidade dos módulos simples  $S_i$  no módulo  $V$  é 1 se  $\phi(V)$  atravessa a  $i$ -ésima diagonal de  $T$  e 0 caso contrário. Em particular, para duas classes de isomorfismo  $[V], [V']$  em  $\text{Ind}(Q_T, R)$ , temos  $[V] = [V']$  se, e somente se,  $V_i \cong V'_i$  para todo  $i$ .*

## 2.3 Denominadores dos Polinômios de Laurent

Os últimos requisitos necessários para demonstrarmos o Teorema 2.1.7 se concentram em calcular os expoentes dos denominadores dos polinômios de Laurent. Para simplificar, usaremos a notação da matriz de troca utilizada em [14], denotando  $b_{ij}(\mathbf{u})$  por  $b_{\beta_i, \beta_j}(\mathbf{u})$  para todo  $i, j \in I$ . Para esta seção lembre as involuções  $\tau_{\pm}$  do conjunto  $\Phi_{\geq -1}$  como na Definição A.2. Então temos as seguintes propriedades:



**Proposição 2.3.1** (i) [16, §3.1] Existe uma única função  $(\|\cdot\|) : \Phi_{\geq -1} \times \Phi_{\geq -1} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que

a)  $(-\alpha_i \|\beta) = \max(0, [\beta : \alpha_i]);$

b)  $(\tau_{\pm}(\alpha) \|\tau_{\pm}(\beta)) = (\alpha \|\beta).$

c)  $(\alpha \|\beta) = 0$  se  $\alpha$  e  $\beta$  são compatíveis e 1 caso contrário.

Além disso  $(\|\cdot\|)$  é simétrica para sistemas de raízes do tipo ADE.

(ii) [16, Proposition 3.5] O conjunto  $\tau_{\pm}(\mathbf{u}) = \{x[\tau_{\pm}(\beta_i)] : i \in I\}$  é o conjunto das variáveis de cluster de algum cluster de  $\mathcal{A}$ , isto é, existe uma ordenação das variáveis que o torna cluster.

Não faremos a demonstração desta proposição por ser muito extensa e pela exigência de definições que não serão utilizadas durante o texto. Usaremos a mesma notação,  $\tau_{\pm}(\mathbf{u})$ , para fazer referência ao cluster e não ao conjunto. Desta maneira, existe matriz  $B(\tau(\mathbf{u}))$  tal que  $\tau(\Sigma) := (\tau(\mathbf{u}), B(\tau(\mathbf{u})))$  é uma semente de  $\mathcal{A}$  para  $\tau \in \{\tau_+, \tau_-\}$ .

**Lema 2.3.2** [14, Lemma 4.8] Para  $\tau \in \{\tau_+, \tau_-\}$  temos

$$b_{\tau(\beta_i)\tau(\beta_j)}(\tau(\mathbf{u})) = -b_{\beta_i\beta_j}(\mathbf{u}).$$

Também omitiremos a demonstração deste lema pelos motivos acima citados. Pelo fenômeno de Laurent, para todo  $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$ , podemos escrever

$$x[\alpha] = \frac{R_{\alpha, \mathbf{u}}}{\prod_{i=1}^n u_i^{[\alpha, \beta_i, C]}},$$

onde  $R_{\alpha, \mathbf{u}}$  é um polinômio nas variáveis  $u_1, \dots, u_n$  tal que nenhum dos  $u_i$  divide  $R_{\alpha, \mathbf{u}}$ , e  $[\alpha, \beta_i, C] \in \mathbb{Z}$ . Em particular,

$$x[\beta_i] = \frac{1}{u_i^{-1}}.$$

**Lema 2.3.3** [5, Lema 3.2] Para cada par de raízes quase positivas  $\alpha, \beta_i$  e qualquer par de clusters  $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$  tal que  $u_i \in \mathbf{u} \cap \mathbf{u}'$ , temos

$$[\alpha, \beta_i, \mathbf{u}] = [\alpha, \beta_i, \mathbf{u}'].$$

Omitiremos a demonstração deste lema por envolver a teoria de esferas simpliciais. Como consequência deste lema, o inteiro  $[\alpha, \beta_i, \mathbf{u}]$  será denotado simplesmente por  $[\alpha, \beta_i]$ .

**Lema 2.3.4** *Sejam  $\alpha, \beta \in \Phi_{\geq -1}$ . Então*

$$[\alpha, \beta] = [\tau_{\pm}\alpha, \tau_{\pm}\beta].$$

**Demonstração:** Considere a sequência de sementes adjacentes

$$\Sigma_0 \leftrightarrow \Sigma_1 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \Sigma_N,$$

com  $x[\alpha] \in \mathbf{u}_0$  e  $x[\beta] \in \mathbf{u}_N$ , onde  $\Sigma_i = (\mathbf{u}_i, B(\mathbf{u}_i))$  para todo  $i = 0, \dots, N$ . Como a mutação de cada semente depende apenas das suas matrizes então, pela Proposição 2.3.1 (ii), temos uma nova cadeia de sementes adjacentes

$$\tau(\Sigma_0) \leftrightarrow \tau(\Sigma_1) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \tau(\Sigma_N)$$

onde  $\tau(\alpha) \in \tau(\Sigma_0)$ ,  $\tau(\beta) \in \tau(\Sigma_N)$  e

$$b_{\tau(\gamma'), \tau(\gamma'')}(\tau(\mathbf{u}_i)) = -b_{\gamma', \gamma''}(\mathbf{u}_i),$$

para todas raízes  $\gamma', \gamma''$  tal que  $x[\gamma'], x[\gamma''] \in \mathbf{u}_i$  para cada  $i = 0, \dots, N$ . Este sinal de menos não altera as relações de troca e portanto a expressão da variável de cluster  $x[\alpha]$  nas variáveis do cluster  $\mathbf{u}_N$  é a mesma que a expressão da variável  $x[\tau(\alpha)]$  nas variáveis dos cluster  $\tau(\mathbf{u}_N)$ .  $\square$

**Lema 2.3.5** *Sejam  $-\alpha_i \in -\Pi$  e  $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$ . Então*

$$[\alpha, -\alpha_i] = [\alpha : \alpha_i].$$

**Demonstração:** O valor  $[\alpha, -\alpha_i]$  segue imediatamente da bijeção do Teorema 1.2.6 descrita por

$$x[\alpha] = \frac{R_{\alpha, \mathbf{x}}}{\prod_{i=1}^n x_i^{[\alpha : \alpha_i]}}.$$

$\square$

Observe que no caso em que  $\alpha \neq \alpha_i$ , temos  $[\alpha : \alpha_i] = (-\alpha_i || \alpha)$  e, portanto,

$$[\alpha, -\alpha_i] = (\alpha || -\alpha_i).$$

**Proposição 2.3.6** *Sejam  $\alpha, \beta \in \Phi_{\geq -1}$  tal que  $\alpha \neq \beta$ . Então*

$$[\alpha, \beta] = (\alpha || \beta).$$

**Demonstração:** Defina uma função  $b : \Phi_{\geq -1} \times \Phi_{\geq -1} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  por

$$b(\alpha, \beta) = \begin{cases} [\beta, \alpha] & \text{se } \alpha \neq \beta \\ 0 & \text{se } \alpha = \beta \end{cases}$$

Esta função está bem definida pelo Lema 2.3.3. Além disso

- a)  $b(-\alpha_i, \beta) = [\beta, -\alpha_i] = (\beta || -\alpha_i) = (-\alpha_i || \beta) = \max(0, [\beta : \alpha_i])$  (pelo Lema 2.3.5);
- b)  $b(\tau_{\pm}(\alpha), \tau_{\pm}(\beta)) = [\tau_{\pm}(\beta), \tau_{\pm}(\alpha)] = [\beta, \alpha] = b(\alpha, \beta)$  (pelo Lema 2.3.4);

Pela proposição 2.3.1 (i), a função  $( || ) : \Phi_{\geq -1} \times \Phi_{\geq -1} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  é a única função satisfazendo as propriedades acima. Logo  $b(\alpha, \beta) = (\alpha || \beta)$  e, no caso ADE, se  $\alpha \neq \beta$  temos

$$[\alpha, \beta] = b(\beta, \alpha) = (\beta || \alpha) = (\alpha || \beta).$$

□

Sejam  $\mathcal{P}$  polígono regular de  $n + 3$  lados e  $I_0 = \{-\alpha_1, \dots, -\alpha_n\}$  o conjunto de diagonais que formam uma triangulação cobra de  $\mathcal{P}$ . Identifique  $\Phi_{\geq -1}$  com  $\Phi_{\mathcal{P}}$  como no Exemplo 2.2.2 e, então, pela Proposição 2.2.4, o conjunto  $I_{\mathbf{u}} := \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  dá origem a uma triangulação  $T_{\mathbf{u}}$  de  $\mathcal{P}$ . Lembre que  $(\mathbf{u}, B)$  é uma semente de  $\mathcal{A}$ . Então temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.3.7** [14, Proposition 12.5] *Os quivers  $Q_B$  e  $Q_{T_{\mathbf{u}}}$  são iguais.*

Omitiremos a demonstração desta proposição por ser muito extensa e pela exigência de definições que não serão utilizadas durante o texto. Juntamente com a Observação 2.2.9, segue que  $(Q_B, R_B) = (Q_{T_{\mathbf{u}}}, R_{T_{\mathbf{u}}})$ . Agora já temos todos os resultados necessários para demonstrar o Teorema 2.1.7.

**Demonstração:** Na seção 2.2, mostramos a bijeção  $[M^{\alpha}] \mapsto \alpha$  entre  $\text{Ind}(Q_B, R_B)$  e  $\Phi_{\mathcal{P}} \setminus I_{\mathbf{u}}$ . Logo, temos

$$\text{Ind}(Q_B, R_B) \xrightarrow{\phi} \Phi_{\mathcal{P}} \setminus I_{\mathbf{u}} \equiv \Phi_{\geq -1} \setminus \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \xrightarrow{x} \mathcal{X} \setminus \mathbf{u}$$

Defina a bijeção  $\kappa = x \circ \phi$ . Então  $\kappa([S_i]) = x[\beta]$ , onde  $\beta$  é a única diagonal em  $\Phi_{\mathcal{D}} \setminus I_{\mathbf{u}}$  que atravessa  $\beta_i$  e não atravessa nenhuma outra diagonal em  $I_{\mathbf{u}} \setminus \{\beta_i\}$ . Se  $[V] \in \text{Ind}(Q_B, R_B)$ , então  $[V] = [M^\alpha]$  para algum  $\alpha \in \Phi_{\mathcal{D}} \setminus I_{\mathbf{u}}$ , donde  $\phi([V]) = \alpha$  e, portanto, pelo Lema 2.3.3, temos

$$x_V = x[\alpha] = \frac{R_{\alpha, \mathbf{x}}}{\prod_{i=1}^n u^{[\alpha, \beta_i]}}.$$

Resta mostrar que  $[\alpha, \beta_i] = \dim(V_i)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Note que  $\alpha \neq \beta_i$  pois  $\alpha \notin I_{\mathbf{u}}$ , donde, usando a Proposição 2.3.6 temos  $[\alpha, \beta_i] = (\alpha || \beta_i)$  e pela Proposição 2.3.1 (i)(c) isto é igual a 1 se as diagonais  $\alpha$  e  $\beta_i$  se cruzam e 0 caso contrário. Logo

$$[\alpha, \beta_i] = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se } i \in \text{supp } \alpha \\ 0 & \text{caso contrário} \end{array} \right\} = \dim(V_i).$$

□



# Capítulo 3

## Grupos Quânticos e Representações de Dimensão Finita

Para este capítulo considere  $\mathbb{K}$  corpo algebricamente fechado de característica zero e  $I = \{1, \dots, n\}$ . Fixe uma matriz de Cartan generalizada  $C = (c_{ij})_{i,j \in I}$  simétrica. Considere a álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$  e  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{n}^\pm$  as subálgebras de  $\mathfrak{g}$  como na seção A.3. As principais referências para as seções 3.1 a 3.4 são [10, 27, 36]. Para as demais, daremos as referências na própria seção.

### 3.1 Álgebra Universal Envelopante Quantizada

Considere  $q \in \mathbb{K}$  não raiz da unidade e, dado  $p \in q^{\mathbb{Z}}$ , defina

$$[m]_p = \frac{p^m - p^{-m}}{p - p^{-1}}, \quad [r]_p! = [r]_p [r-1]_p \cdots [2]_p [1]_p, \quad \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}_p = \frac{[m]_p!}{[r]_p! [m-r]_p!},$$

para  $m, r \in \mathbb{Z}$ ,  $r \geq 0$ . Observe que, como  $q^s \neq 1$  para todo  $s \in \mathbb{Z}$ , tais números estão sempre bem definidos e são sempre diferentes de 0.

**Definição 3.1.1 (Drinfeld-Jimbo)** A álgebra universal envelopante quantizada, ou grupo quântico,  $U_q(\mathfrak{g})$  sobre  $\mathbb{K}$  é a  $\mathbb{K}$ -álgebra associativa (com identidade) dada por geradores  $x_i^\pm$ ,  $k_i^{\pm 1}$ ,  $i \in I$ , e relações:

- (i)  $k_i k_i^{-1} = 1$  para todo  $i \in I$ ;

- (ii)  $k_i k_j = k_j k_i$  para todos  $i, j \in I$ ;
- (iii)  $k_i x_j^\pm k_i^{-1} = q^{\pm c_{ij}} x_j^\pm$  para todos  $i, j \in I$ ;
- (iv)  $[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}}$  para todos  $i, j \in I$ ;
- (v)  $\sum_{m=0}^{1-c_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1 - c_{ij} \\ m \end{bmatrix}_q (x_i^\pm)^{1-c_{ij}-m} x_j^\pm (x_i^\pm)^m = 0$  para todos  $i, j \in I, i \neq j$ .

As relações (v) são chamadas de  $q$ -relações de Serre. Se  $C$  é matriz de Cartan generalizada de um grafo do tipo euclidiano (veja Seção A.4), então  $U_q(\mathfrak{g})$  é chamada de álgebra afim quantizada.

Sejam  $U_q(\mathfrak{n}^\pm)$  as subálgebras de  $U_q(\mathfrak{g})$  geradas por  $\{x_i^\pm : i \in I\}$ , respectivamente, e  $U_q(\mathfrak{h})$  a subálgebra gerada por  $\{k_i^{\pm 1} : i \in I\}$ .

**Observação 3.1.2** *Os grupos quânticos são também álgebras de Hopf e, portanto, faz sentido falar de produto tensorial de suas representações. Omitiremos a fórmula da comultiplicação uma vez que não será explicitamente usada.*

**Proposição 3.1.3** *A multiplicação induz isomorfismo de espaços vetoriais:*

$$U_q(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{K}} U_q(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{K}} U_q(\mathfrak{n}^+) \longrightarrow U_q(\mathfrak{g}).$$

Seja  $J \subseteq I$ . Considere a subálgebra  $U_q(\mathfrak{g}_J)$  gerada por  $x_j^\pm, k_j^{\pm 1}$ , para todo  $j \in J$ . Se  $J = \{j\}$ , a álgebra  $U_q(\mathfrak{g}_J) := U_q(\mathfrak{g}_J)$  é isomorfa a  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ .

## 3.2 Realização de Beck-Drinfeld das álgebras afins quantizadas

**Definição 3.2.1** *Suponha que  $C$  seja matriz de Cartan e seja  $\theta = \sum_{i \in I} c_i \alpha_i$  a única raiz maximal de  $\mathfrak{g}$ . Defina  $\hat{C} = (\hat{c}_{ij})_{i,j \in \hat{I}}$ , onde  $\hat{I} = I \cup \{0\}$  por:*

- (i)  $\hat{c}_{ij} = c_{ij}$  para todos  $i, j \in I$ ;
- (ii)  $\hat{c}_{00} = 2$ ;

$$(iii) \hat{c}_{i0} = - \sum_{j \in I} c_j c_{ij} \text{ para todo } i \in I;$$

$$(iv) \hat{c}_{0i} = - \sum_{j \in I} c_j c_{ji} \text{ para todo } i \in I.$$

A matriz  $\hat{C}$  é chamada de matriz de Cartan estendida. É fácil verificar que  $\hat{C}$  é a matriz de Cartan generalizada associada ao grafo euclidiano  $\tilde{X}_n$  se  $C$  é de tipo  $X_n$ .

No restante do capítulo  $C$  será uma matriz de Cartan,  $\hat{C}$  como acima,  $\hat{I} = I \dot{\cup} \{0\}$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$  e  $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}(\hat{C})$ . Denotaremos por  $P$  e  $Q$  os reticulados de pesos e de raízes e seus subconjuntos  $P^+$  e  $Q^+$  como na seção A.3. Considere  $\theta$  a única raiz maximal de  $\mathfrak{g}$  e escreva  $\theta = \sum_{i \in I} \theta_i \alpha_i$

**Definição 3.2.2** A álgebra de laços quantizada  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$  é o quociente de  $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$  pelo ideal bilateral gerado por  $k_0 k_\theta - 1$ , onde  $k_\theta := \prod_{i \in I} k_i^{\theta_i}$ .

**Teorema 3.2.3** A álgebra universal envelopante quantizada  $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$  é isomorfa a  $\mathbb{K}$ -álgebra associativa  $A_q(\mathfrak{g})$  dada por geradores  $x_{i,s}^{\pm 1}$ ,  $k_i^{\pm}$ ,  $h_{i,r}$ ,  $c^{\pm 1/2}$ ,  $i \in I$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}$ ,  $r \neq 0$ , e relações:

$$(i) c^{\pm 1/2} \text{ são centrais};$$

$$(ii) c^{+1/2} c^{-1/2} = 1 = k_i k_i^{-1} \text{ para todo } i \in I;$$

$$(iii) k_i k_j = k_j k_i \text{ para todos } i, j \in I;$$

$$(iv) k_i h_{j,r} = h_{j,r} k_i \text{ para todos } i \in I \text{ e } r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$$

$$(v) [h_{i,r}, h_{i,s}] = \delta_{r,-s} \frac{[rc_{ij}]_q}{r} \frac{c^r - c^{-r}}{q - q^{-1}} \text{ para todos } i, j \in I \text{ e } r, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \text{ onde } c^{\pm r} := (c^{\pm 1/2})^{2r};$$

$$(vi) k_i x_{j,r}^{\pm} k_i^{-1} = q^{\pm c_{ij}} x_{j,r}^{\pm} \text{ para todos } i, j \in I \text{ e } r \in \mathbb{Z};$$

$$(vii) [h_{i,r}, x_{j,s}^{\pm}] = \pm \frac{1}{r} [rc_{ij}]_q x_{j,r+s}^{\pm} (c^{\mp 1/2})^{|r|} \text{ para todos } i, j \in I, r, s \in \mathbb{Z} \text{ e } r \neq 0;$$

$$(viii) x_{i,r+1}^{\pm} x_{j,r}^{\pm} - q^{\pm c_{ij}} x_{j,s}^{\pm} x_{i,r+1}^{\pm} = q^{\pm c_{ij}} x_{i,r}^{\pm} x_{j,s+1}^{\pm} - x_{j,s+1}^{\pm} x_{i,s}^{\pm} \text{ para todos } i, j \in I \text{ e } r, s \in \mathbb{Z};$$

$$(ix) [x_{i,r}^+, x_{j,s}^-] = \delta_{ij} \frac{c^{\frac{r-s}{2}} \psi_{i,r+s}^+ - \psi_{i,r+s}^- c^{\frac{s-r}{2}}}{q - q^{-1}} \text{ para todos } i, j \in I \text{ e } r, s \in \mathbb{Z}, \text{ onde } c^{\frac{l}{2}} := (c^{+1/2})^l \text{ e } \psi_{i,l}^{\pm} \text{ serão definidos abaixo};$$

$$(x) \sum_{\sigma \in S_{1-c_{ij}}} \sum_{m=0}^{1-c_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1 - c_{ij} \\ m \end{bmatrix}_q x_{i,r_{\sigma(1)}}^{\pm} \dots x_{i,r_{\sigma(m)}}^{\pm} x_{j,s}^{\pm} x_{i,r_{\sigma(m+1)}}^{\pm} \dots x_{i,r_{\sigma(1-c_{ij})}}^{\pm} = 0 \text{ para todos } i, j \in I, i \neq j \text{ e } r_1, r_2, \dots, r_{1-c_{ij}}, s \in \mathbb{Z}.$$



Aqui  $\psi_{i,r}^\pm$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ , são definidos pela seguinte igualdade de séries de potências em  $u$ :

$$\sum_{r \geq 0} \psi_{i,\pm r}^\pm u^r = k_i^{\pm 1} \exp \left( \pm (q - q^{-1}) \sum_{s > 0} h_{i,\pm s} u^s \right) = k_i^{\pm 1} \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l!} \left( \pm (q - q^{-1}) \sum_{s > 0} h_{i,\pm s} u^s \right)^l.$$

Em particular,  $\psi_{i,-r}^+ = 0$  e  $\psi_{i,r}^- = 0$  se  $r > 0$ . Os primeiros casos são:

$$\psi_{i,0}^\pm = k_i^\pm, \quad \psi_{i,\pm 1}^\pm = \pm k_i^\pm (q - q^{-1}) h_{i,\pm 1}, \quad \psi_{i,\pm 2}^\pm = \pm k_i^\pm ((q - q^{-1}) h_{i,\pm 2} + (q - q^{-1})^2 h_{i,\pm 1}^2).$$

**Corolário 3.2.4**  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}) \cong \frac{A_q(\mathfrak{g})}{(c^{\pm 1} - 1)}$ .

De agora em diante identificaremos  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$  com este quociente de  $A_q(\mathfrak{g})$ .

Sejam  $U_q(\tilde{\mathfrak{n}}^\pm)$  as subálgebras de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$  geradas por  $\{x_{i,r}^\pm : i \in I, r \in \mathbb{Z}\}$ , respectivamente, e  $U_q(\tilde{\mathfrak{h}})$  a subálgebra de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$  gerada por  $\{k_i^{\pm 1}, h_{i,s} : i \in I, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ . Se  $J \subseteq I$  defina ainda  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_J)$  a subálgebra de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$  gerada por  $\{x_{j,r}^\pm, k_{j,r}^\pm; j \in J, r \in \mathbb{Z}\}$ . Quando  $J = \{i\}$  denotaremos  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_J)$  por  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_i)$ . Neste caso  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_i) \cong U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_2)$ .

**Proposição 3.2.5** (i) A multiplicação induz isomorfismo de espaços vetoriais:

$$U_q(\tilde{\mathfrak{n}}^-) \otimes_{\mathbb{K}} U_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \otimes_{\mathbb{K}} U_q(\tilde{\mathfrak{n}}^+) \longrightarrow U_q(\tilde{\mathfrak{g}}).$$

(ii) A subálgebra de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$  gerada por  $x_i^\pm := x_{i,0}^\pm, k_i^{\pm 1}, i \in I$ , é isomorfa a  $U_q(\mathfrak{g})$ .

(iii) Dado  $a \in \mathbb{K}^\times$ , existe único automorfismo  $\tau_a$  de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$  dado por:

$$x_{i,r}^\pm \mapsto a^r x_{i,r}^\pm, \quad h_{i,s} \mapsto a^s h_{i,s}, \quad k_i \mapsto k_i, \quad c^{\pm \frac{1}{2}} \mapsto c^{\pm \frac{1}{2}}, \quad \forall i \in I, r \geq 0, s \geq 1.$$

Existe também um único automorfismo involutivo  $\sigma$  dado por:

$$x_{i,r}^\pm \mapsto x_{i,-r}^\mp, \quad h_{i,s} \mapsto -h_{i,-s}, \quad k_i^{\pm 1} \mapsto k_i^\mp, \quad c^{\pm \frac{1}{2}} \mapsto c^\mp, \quad \forall i \in I, r \geq 0, s \geq 1.$$

Defina elementos  $\Lambda_{i,r} \in U_q(\tilde{\mathfrak{h}})$ ,  $i \in I, r \in \mathbb{Z}$ , pela igualdade de séries de potências em  $u$ :

$$\sum_{r \geq 0} \Lambda_{i,\pm r} u^r = \exp \left( - \sum_{s \geq 1} \frac{h_{i,\pm s}}{[s]_q} u^s \right) = \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l!} \left( - \sum_{s \geq 1} \frac{h_{i,\pm s}}{[s]_q} u^s \right)^l.$$

Por exemplo,

$$\Lambda_{i,0} = 1, \quad \Lambda_{i,\pm 1} = -h_{i,\pm 1}, \quad \Lambda_{i,\pm 2} = -\frac{h_{i,\pm 2}}{[2]_q} + \frac{(h_{i,\pm 1})^2}{2!}.$$

## 3.3 Representações de Dimensão Finita

### 3.3.1 $U_q(\mathfrak{g})$ -módulos de Peso

**Definição 3.3.1** Um  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo  $V$  é chamado de módulo integrável se  $x_i^\pm$ ,  $i \in I$ , age localmente nilpotentemente, ou seja, para cada  $i \in I$  e  $v \in V$  existe  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $(x_i^+)^m v = 0$  e  $(x_i^-)^m v = 0$ ,

**Proposição 3.3.2** Seja  $V$  um  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo integrável. Então, para cada  $i \in I$ ,  $k_i$  age de maneira semissimples em  $V$ , isto é,  $V$  possui uma base de autovetores para a transformação linear  $k_i : V \rightarrow V$ ,  $v \mapsto k_i v$ . Além disso,  $U_q(\mathfrak{g}_i)v$  tem dimensão finita para todos  $v \in V$  e  $i \in I$ .

**Definição 3.3.3** Seja  $V$  um  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo. Para cada  $\mu \in P$ , defina o espaço de peso de  $V$  de peso  $\mu$  por

$$V_\mu := \{v \in V : k_i v = q^{\mu(h_i)} v \text{ para todo } i \in I\}.$$

Se  $V_\mu \neq \{0\}$ , então  $\mu$  é chamado de peso de  $V$ .

**Observação 3.3.4** Se  $V$  é um  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo, então a relação  $k_i x_j^\pm k_i^{-1} = q^{\pm c_{ij}} x_j^\pm$  implica  $x_i^\pm V_\mu \subseteq V_{\mu \pm \alpha_i}$  para todos  $i \in I$  e  $\mu \in P$ . Além disso, se  $\mu \neq \mu'$ , então  $V_\mu \cap V_{\mu'} = \{0\}$  e  $\bigoplus_{\mu \in P} V_\mu$  é um  $U_q(\mathfrak{g})$ -submódulo de  $V$ .

**Definição 3.3.5** Um  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo  $V$  é chamado de módulo de peso se  $V = \bigoplus_{\mu \in P} V_\mu$ .

**Observação 3.3.6** O que foi definido aqui como módulo de peso é usualmente chamado de módulo de peso de tipo 1. Não vamos dizer aqui o que significa tipo 1, mas mencionamos que todo  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo de dimensão finita é obtido de um módulo de peso de tipo 1 tensorizando-se por um módulo unidimensional. Para maiores detalhes veja, por exemplo, [10, 36].

**Definição 3.3.7** A categoria  $\mathcal{O}_q$  é a subcategoria plena de  $\text{mod-}U_q(\mathfrak{g})$  que consiste dos objetos  $V$  satisfazendo:

- (i)  $V$  é um módulo de peso com todos os seus espaços de pesos de dimensão finita.
- (ii) Existem  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in P^+$ , dependendo de  $V$ , tais que  $V_\mu \neq \{0\}$  somente se  $\mu \leq \lambda_j$  para algum  $j = 1, \dots, m$ .

A categoria  $\mathcal{O}_q^{\text{int}}$  é a subcategoria plena de  $\mathcal{O}_q$  formada pelos módulos integráveis.

As categorias  $\mathcal{O}_q$  and  $\mathcal{O}_q^{\text{int}}$  são fechadas sobre submódulos, somas diretas finitas, quocientes e produtos tensoriais. Observe que, se  $V$  é um  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo de peso de dimensão finita, então  $V \in \mathcal{O}_q^{\text{int}}$ .

**Definição 3.3.8** *Seja  $V$  um  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo. Um vetor não nulo  $v \in V_\mu$  é chamado de vetor de peso  $\mu$ . Um vetor de peso  $\nu$  é chamado de vetor de peso máximo se  $x_i^+ v = 0$  para todo  $i \in I$ . O módulo  $V$  é chamado de módulo de peso máximo se  $V$  é gerado por um vetor de peso máximo  $v$ .*

**Proposição 3.3.9** (i) *Dois módulos de peso máximo podem ser isomorfos somente se eles têm o mesmo peso máximo.*

(ii) *Todo módulo de peso máximo tem um único submódulo próprio maximal e, conseqüentemente, um único quociente irredutível.*

(iii) *Se  $V$  é um módulo de peso máximo, então  $V \in \mathcal{O}_q$ .*

(iv) *Dois módulos de peso máximo irredutíveis são isomorfos se, e somente se, eles têm o mesmo peso máximo.*

**Definição 3.3.10** *Dado  $\lambda \in P$  define-se o módulo de Verma  $M_q(\lambda)$  de peso máximo  $\lambda$  como sendo o quociente de  $U_q(\mathfrak{g})$  pelo ideal à esquerda gerado por  $\{x_i^+, k_i - q^{\lambda(h_i)} : i \in I\}$ .*

Observe que, se  $v$  é a imagem de 1 em  $M_q(\lambda)$ , então  $v$  é um vetor de peso máximo de peso  $\lambda$  e  $M_q(\lambda) = U_q(\mathfrak{g})v$  é um módulo de peso máximo  $\lambda$ . Além disso, qualquer outro  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo de peso máximo  $\lambda$  é isomorfo a um quociente de  $M_q(\lambda)$ . Por este motivo,  $M_q(\lambda)$  também é conhecido como *módulo universal de peso máximo*  $\lambda$ .

Denota-se por  $V_q(\lambda)$  o único (a menos de isomorfismo)  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo irredutível de peso máximo  $\lambda$ , que é o mesmo que o único quociente irredutível do módulo de Verma  $M_q(\lambda)$ .

**Teorema 3.3.11**  *$V_q(\lambda)$  é integrável se, e somente se,  $\lambda \in P^+$ . Neste caso,  $V_q(\lambda)$  é o quociente de  $U_q(\mathfrak{g})$  pelo ideal à esquerda gerado por*

$$x_i^+, \quad (x_i^-)^{\lambda(h_i)+1}, \quad k_i - q^{\lambda(h_i)}, \quad \text{para todo } i \in I.$$

*Além disso,  $V_q(\lambda)$  tem dimensão finita.*

**Proposição 3.3.12** *Se  $V$  é um  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo irredutível em  $\mathcal{O}_q$ , então  $V \cong V_q(\lambda)$ , para algum  $\lambda \in P$ .*

**Teorema 3.3.13** *Todo  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo em  $\mathcal{O}_q^{\text{int}}$  é de dimensão finita e completamente redutível. Além disso,  $\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$  para todos  $\mu \in P$  e  $w \in \mathcal{W}$ .*

Seja  $\mathbb{Z}[P]$  o anel de grupo de  $P$ . Denote por  $e^\lambda$  a imagem de  $\lambda$  em  $\mathbb{Z}[P]$ . Observe que  $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$ .

**Definição 3.3.14** *Seja  $V$  é uma representação de dimensão finita de  $U_q(\mathfrak{g})$ . O caracter de  $V$  é o seguinte elemento de  $\mathbb{Z}[P]$ :*

$$\text{ch}(V) = \sum_{\mu \in P} \dim(V_\mu) e^\mu.$$

### 3.3.2 O Reticulado de $\ell$ -pesos

**Definição 3.3.15** *O reticulado de  $\ell$ -pesos associado a  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$  é definido por*

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{\mu} = (\mu_i(u))_{i \in I} : \mu_i(u) \in \mathbb{K}(u) \text{ e } \mu_i(0) = 1 \text{ para todo } i \in I\}.$$

Aqui,  $\mathbb{K}(u)$  denota o anel de funções racionais em  $u$  sobre  $\mathbb{K}$ . Os elementos de  $\mathcal{P}$  são chamados de  $\ell$ -pesos. Define-se o conjunto dos  $\ell$ -pesos dominantes  $\mathcal{P}^+$  como sendo o subconjunto de  $\mathcal{P}$  dado por

$$\mathcal{P}^+ = \{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P} : \mu_i(u) \in \mathbb{K}[u] \text{ para todo } i \in I\}.$$

Ou seja,  $\mathcal{P}^+$  é formado por  $n$ -uplas de polinômios de  $\mathbb{K}[u]$  com termos constantes iguais a 1. Os elementos em  $\mathcal{P}^+$  são chamados de  $\ell$ -pesos dominantes.

O conjunto  $\mathcal{P}$  é um grupo abeliano com a operação definida pela multiplicação usual de  $\mathbb{K}(u)$  coordenada a coordenada. Desta forma,  $\mathcal{P}^+$  é então submonóide de  $\mathcal{P}$ . Dados  $i \in I$  e  $a \in \mathbb{K}^\times$ , denote por  $\boldsymbol{\omega}_{i,a}$  o elemento de  $\mathcal{P}^+$  dado por

$$(\boldsymbol{\omega}_{i,a})_j(u) = 1 - \delta_{ij} a u.$$

Os elementos  $\boldsymbol{\omega}_{i,a}$  são chamados de  $\ell$ -pesos fundamentais.

Como  $\mathbb{K}$  é algebricamente fechado, todo elemento em  $\mathcal{P}$  pode ser escrito como um produto de  $\ell$ -pesos fundamentais e seus inversos. Daí, existe um único epimorfismo de grupos (função peso)  $\text{wt} : \mathcal{P} \rightarrow P$  tal que  $\text{wt}(\boldsymbol{\omega}_{i,a}) = \omega_i$  para todos  $i \in I$  e  $a \in \mathbb{K}^\times$ .

Considere os elementos  $\omega_{\lambda,a}$ ,  $\lambda \in P$ ,  $a \in \mathbb{F}^\times$ , definidos por

$$\omega_{\lambda,a} := \prod_{i \in I} (\omega_{i,a})^{\lambda(h_i)}.$$

Dados  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  com  $\lambda_i(u) = \prod_j (1 - a_{i,j}u)$ , onde  $a_{i,j}$  pertence a  $\mathbb{K}$ , considere  $\lambda^- \in \mathcal{P}^+$  definido por  $\lambda_i^-(u) = \prod_j (1 - a_{i,j}^{-1}u)$ . Também usa-se a notação  $\lambda^+ = \lambda$ . Dois elementos  $\lambda$  e  $\mu$  de  $\mathcal{P}^+$  são *relativamente primos* se  $\lambda_i(u)$  e  $\mu_j(u)$  são relativamente primos em  $\mathbb{K}[u]$  para todos  $i, j \in I$ . Observe que cada  $\nu \in \mathcal{P}$  pode ser escrito de maneira única como  $\nu = \lambda\mu^{-1}$  com  $\lambda, \mu \in \mathcal{P}^+$  relativamente primos.

Os elementos  $\omega_{i,a}^{-1}$  podem ser naturalmente considerados como uma  $n$ -upla de séries de potências formais em  $u$  com termos constantes iguais a 1 (escrevendo  $\frac{1}{1-au} = \sum_{k \geq 0} (au)^k$ ).

**Proposição 3.3.16** *Dado  $\nu \in \mathcal{P}$ , onde  $\nu = \lambda\mu^{-1}$  com  $\lambda, \mu \in \mathcal{P}^+$  relativamente primos, existe um único homomorfismo de  $\mathbb{K}$ -álgebras  $\Psi_\nu : U_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \rightarrow \mathbb{K}$  tal que*

$$\Psi_\nu(k_i^{\pm 1}) = q^{\pm \text{wt}(\nu)(h_i)}, \quad \sum_{r \geq 0} \Psi_\nu(\Lambda_{i,\pm r}) u^r = \frac{(\lambda^\pm)_i(u)}{(\mu^\pm)_i(u)},$$

onde a divisão é a de séries de potências formais em  $u$ . Além disso, a função  $\Psi : \mathcal{P} \rightarrow (U_q(\tilde{\mathfrak{h}}))^*$  dada por  $\nu \mapsto \Psi_\nu$  é injetora.

Vamos identificar  $\mathcal{P}$  com sua imagem em  $(U_q(\tilde{\mathfrak{h}}))^*$  por  $\Psi$ .

Dados  $i \in I$ ,  $a \in \mathbb{K}^\times$  e  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , considere

$$\omega_{i,a,r} := \prod_{j=0}^{r-1} \omega_{i,aq^{r-1-2j}}.$$

Defina também os polinômios

$$f_{a,r}(u) := \prod_{j=0}^{r-1} (1 - aq^{r-1-2j}u).$$

**Proposição 3.3.17** *Seja  $f(u) \in \mathbb{K}[u]$  um polinômio tal que  $f(0) = 1$ . Então, existem únicos  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}^\times$  e  $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  tais que*

$$f(u) = \prod_{k=1}^m f_{a_k, r_k}(u) \quad \text{com} \quad \frac{a_l}{a_j} \neq q^{\pm(r_l + r_j - 2p)} \quad \text{para} \quad 0 \leq p < \min\{r_l, r_j\}.$$

Esta decomposição é chamada de  $q$ -fatoração de  $f(u)$ .

Em particular, dado  $\lambda \in \mathcal{P}^+$ , existem únicos  $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $a_{i,k} \in \mathbb{K}^\times$  e  $r_{i,k} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  tais que

$$\lambda = \prod_{i \in I} \prod_{k=1}^{m_i} \omega_{i,a_{i,k},r_{i,k}}$$

com

$$\frac{a_{i,j}}{a_{i,l}} \neq q^{\pm(r_{i,j}+r_{i,l}-2p)} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{m_i} r_{i,k} = \text{wt}(\lambda)(h_i)$$

para todos  $i \in I$ ,  $j \neq l$  e  $0 \leq p < \min\{r_{i,j}, r_{i,l}\}$ . Analogamente, esta decomposição é chamada de  $q$ -fatoração de  $\lambda$ .

**Definição 3.3.18** *Dados  $i \in I$  e  $a \in \mathbb{K}^\times$ , define-se a  $\ell$ -raiz simples  $\alpha_{i,a}$  por*

$$\alpha_{i,a} = \omega_{i,aq,2} \left( \prod_{j \neq i} \omega_{j,aq,-c_{ji}} \right)^{-1}.$$

O subgrupo de  $\mathcal{P}$  gerados pelas  $\ell$ -raízes simples é chamado de reticulado de  $\ell$ -raízes de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$  e será denotado por  $\mathcal{Q}_q$ . Considere  $\mathcal{Q}_q^+$  o submonóide de  $\mathcal{Q}_q$  gerado pelas  $\ell$ -raízes simples e  $(\mathcal{Q}_q^+)^{-1}$  o submonóide gerado pelo inverso das  $\ell$ -raízes simples. Observe que  $\text{wt}(\alpha_{i,a}) = \alpha_i$  para todos  $i \in I$  e  $a \in \mathbb{K}^\times$ .

Define-se uma ordem parcial em  $\mathcal{P}$  por  $\mu \leq \lambda$  se, e somente se,  $\lambda\mu^{-1} \in \mathcal{Q}_q^+$ . Se  $J \subseteq I$  e  $\lambda \in \mathcal{P}$ , seja  $\lambda_J$  a  $J$ -upla de funções racionais associada. Observe que  $\lambda_J$  pode ser considerado como um elemento do reticulado de  $\ell$ -pesos de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_J)$ .

### 3.3.3 $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulos de $\ell$ -peso

**Proposição 3.3.19** *Seja  $V$  um  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo de dimensão finita. Então os elementos  $c^{\pm 1/2}$  agem de maneira semissimples em  $V$  com autovalores 1 ou  $-1$ .*

**Observação 3.3.20** *Segue da Proposição 3.3.19 que toda representação de dimensão finita de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$  é uma representação de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ . Aquelas onde  $c^{1/2}$  age como  $-1$  podem ser obtidas da que age como 1 por tensorização com uma representação unidimensional. Assim, só consideraremos aquelas onde agem como 1, o que é equivalente a estudar representações da álgebra quociente pelo ideal gerado por  $c^{1/2} - 1$ .*

**Definição 3.3.21** *Seja  $V$  um  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo. Para cada  $\mu \in \mathcal{P}$ , considere*

$$V_\mu := \{v \in V : \text{para cada } \eta \in U_q(\tilde{\mathfrak{h}}) \text{ existe } k \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ com } (\eta - \Psi_\mu(\eta))^k v = 0\}.$$

*Um vetor não nulo  $v \in V$  é um vetor de  $\ell$ -peso se  $v \in V_\mu$  para algum  $\mu \in \mathcal{P}$ . Neste caso,  $\mu$  é o  $\ell$ -peso de  $v$ .*

**Definição 3.3.22** *Um  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo  $V$  é chamado de módulo de  $\ell$ -peso se*

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{P}} V_\mu.$$

**Definição 3.3.23** *Seja  $V$  um  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo. Um vetor  $v$  de  $\ell$ -peso  $\lambda$  é chamado de vetor de  $\ell$ -peso máximo se  $\eta v = \Psi_\lambda(\eta)v$  para todo  $\eta \in U_q(\tilde{\mathfrak{h}})$  e  $x_{i,r}^+ v = 0$  para todos  $i \in I$  e  $r \in \mathbb{Z}$ .  $V$  é chamado de módulo de  $\ell$ -peso máximo se  $V$  é gerado por um vetor de  $\ell$ -peso máximo.*

**Proposição 3.3.24** *Seja  $V$  um  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo de dimensão finita gerado por um vetor  $v$  satisfazendo*

$$x_{i,r}^+ v = 0, \quad k_i v = q^{\lambda(h_i)} v, \quad \Lambda_{i,r} v = \lambda_{i,r} v, \quad \text{para todos } i \in I \text{ e } r \in \mathbb{Z},$$

*onde  $\lambda \in P^+$  e  $\lambda_{i,r} \in \mathbb{K}$ . Então  $\lambda_{i,r} = 0$  se  $r > \lambda(h_i)$  e  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  dado por*

$$\lambda_i(u) = 1 + \sum_{r=1}^{\lambda(h_i)} \lambda_{i,r} u^r$$

*é único tal que  $\eta v = \Psi_\lambda(\eta)v$  para todo  $\eta \in U_q(\tilde{\mathfrak{h}})$ . Ou seja,  $v$  é um vetor de  $\ell$ -peso máximo de  $\ell$ -peso  $\lambda$  e  $\text{wt}(\lambda) = \lambda$ .*

O elemento  $\lambda$  da proposição acima é chamado de *polinômio de Drinfeld* associado a  $v$ .

Se  $V$  é um  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo de  $\ell$ -peso de dimensão finita, então  $V$  é um  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo de dimensão finita (por restrição da ação de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$  para  $U_q(\mathfrak{g})$ ). Além disso,  $V$  é um módulo de peso pois

$$V_\mu = \bigoplus_{\substack{\mu \in \mathcal{P}^+ \\ \text{wt}(\mu) = \mu}} V_\mu.$$

Observe também que  $x_{i,r}^\pm V_\mu \subseteq V_{\mu \pm \alpha_i}$  para todo  $i \in I$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ . Em particular, se  $V$  é um  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo de  $\ell$ -peso máximo  $\lambda$ , então,

$$\dim(V_{\text{wt}(\lambda)}) = 1 \quad \text{e} \quad V_\mu \neq 0 \Rightarrow \mu \leq \text{wt}(\lambda).$$

**Proposição 3.3.25** (i) *Todo  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo de  $\ell$ -peso máximo possui um único  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -submódulo próprio maximal e, conseqüentemente, um único quociente irredutível. Em particular, todo  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo de  $\ell$ -peso máximo é indecomponível.*

(ii) *Dois  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulos de  $\ell$ -peso máximo irredutíveis são isomorfos se, e somente se, eles têm o mesmo  $\ell$ -peso máximo.*

**Definição 3.3.26** *Sejam  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  e  $\lambda = \text{wt}(\lambda)$ . O módulo de Weyl  $W_q(\lambda)$  de  $\ell$ -peso máximo  $\lambda$  é o  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo dado pelo quociente de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$  pelo ideal à esquerda gerado por*

$$x_{i,r}^+, \quad (x_{i,r}^-)^{\lambda(h_i)+1}, \quad \eta - \Psi_\lambda(\eta), \quad \text{para todos } i \in I, \quad r \in \mathbb{Z} \text{ e } \eta \in U_q(\tilde{\mathfrak{h}}).$$

*Denote por  $V_q(\lambda)$  o único quociente irredutível de  $W_q(\lambda)$ .*

Por definição, o módulo de Weyl  $W_q(\lambda)$  é um módulo de  $\ell$ -peso máximo, com  $\ell$ -peso máximo  $\lambda$ .

**Teorema 3.3.27** *Para cada  $\lambda \in \mathcal{P}^+$ , o módulo de Weyl  $W_q(\lambda)$  tem dimensão finita. Além disso, todo  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo de  $\ell$ -peso máximo  $\lambda$  de dimensão finita é isomorfo a um quociente do módulo de Weyl  $W_q(\lambda)$ .*

**Corolário 3.3.28** *Todo  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo de  $\ell$ -peso irredutível de dimensão finita é isomorfo a  $V_q(\lambda)$  para algum  $\lambda \in \mathcal{P}^+$ .*

**Teorema 3.3.29** [25, Theorem 1.1] *Sejam  $V_1, \dots, V_n$   $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulos irredutíveis de dimensão finita. O produto tensorial  $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$  é irredutível se, e somente se,  $V_i \otimes V_j$  é irredutível para todo  $i < j$ .*

## 3.4 Afinações Minimais

Apresentaremos aqui a noção de afinização minimal de um  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo irredutível introduzida em [7].

**Definição 3.4.1** *Dado  $\lambda \in P^+$ , um  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo  $V$  de dimensão finita é uma afinização de  $V_q(\lambda)$  se, como um  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo,*

$$V \cong V_q(\lambda) \oplus \bigoplus_{\mu < \lambda} V_q(\mu)^{\oplus m_\mu(V)},$$



para alguns  $m_\mu(V) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Duas afinizações de  $V_q(\lambda)$  são equivalentes se são isomorfas como  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulos.

**Exemplo 3.4.2** *Sejam  $\lambda \in \mathcal{P}_q^+$ ,  $\lambda = \text{wt}(\lambda)$  e  $V$  um quociente não trivial de  $W_q(\lambda)$ . Como  $V$  é gerado por um vetor  $v$  de  $\ell$ -peso máximo (em particular  $v$  é vetor de peso máximo), tem-se*

$$V = U_q(\tilde{\mathfrak{g}})v = U_q(\tilde{\mathfrak{n}}^-)v.$$

Além disso,  $v \in V_\lambda$  e  $\dim V_\lambda = 1$ . Como  $x_{i,r}^- V_\mu \subseteq V_{\mu - \alpha_i}$ , segue que

$$V \cong V_q(\lambda) \oplus \bigoplus_{\mu < \lambda} V_q(\mu)^{\oplus m_\mu(\lambda)},$$

como  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo. Logo  $V$  é uma afinização de  $V_q(\lambda)$ .

A ordem parcial em  $P^+$  induz uma ordem parcial no conjunto das (classes de equivalências das) afinizações de  $V_q(\lambda)$  da seguinte maneira: se  $V$  e  $W$  são afinizações de  $V_q(\lambda)$ , então  $V \leq W$  se uma das seguintes condições forem satisfeitas:

- (i)  $m_\mu(V) \leq m_\mu(W)$  para todo  $\mu \in P^+$ ;
- (ii) para todo  $\mu \in P^+$  tal que  $m_\mu(V) > m_\mu(W)$ , existe  $\mu < \nu < \lambda$  tal que  $m_\nu(V) < m_\nu(W)$ .

Um elemento minimal com relação a essa ordem parcial é chamado de *afinização minimal* de  $V_q(\lambda)$ .

**Teorema 3.4.3** *Sejam  $\lambda \in \mathcal{P}^+$ ,  $\lambda = \text{wt}(\lambda)$  e  $V = V_q(\lambda)$ . Suponha que  $\mathfrak{g}$  é do tipo A. Então  $V$  é uma afinização minimal de  $V_q(\lambda)$  se, e somente se, existem  $a \in \mathbb{K}^\times$  e  $\epsilon \in \{1, -1\}$  tais que*

$$\lambda = \prod_{i=1}^n \omega_{i, a_i, \lambda(h_i)} \quad \text{com} \quad a_1 = a \quad \text{e} \quad \frac{a_{i+1}}{a_i} = q^{\epsilon(\lambda(h_i) + \lambda(h_{i+1}) + 1)}$$

para todo  $i \in I$ ,  $i < n$  respeitando a enumeração dada em A.2.11. Se  $\mathfrak{g}$  é do tipo D ou E, suponha que  $\text{supp}_P(\lambda)$  está contido em um subdiagrama conexo  $J \subseteq I$  de tipo A. Então,  $V$  é uma afinização minimal de  $V_q(\lambda)$  se, e somente se,  $V_q(\lambda_J)$  é uma afinização minimal de  $V_q(\lambda_J)$ .

**Definição 3.4.4** *Dado  $\mu \in P$ , definimos o fecho conexo de  $\text{supp}_P(\mu)$ , denotado por  $\overline{\text{supp}}_P(\mu)$ , como sendo o menor subdiagrama conexo de  $I$  que contém  $\text{supp}_P(\mu)$*

**Corolário 3.4.5** *Seja  $\lambda \in P^+$  tal que  $\overline{\text{supp}}_P(\lambda)$  seja do tipo A. Então,  $V_q(\lambda)$  tem uma única classe de equivalência de afinizações minimais.*

**Corolário 3.4.6** *Para cada  $a \in \mathbb{K}^\times$ ,  $i \in I$  e  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , o  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulo  $V_q(\omega_{i,a,m})$  é uma afinização minimal de  $V_q(m\omega_i)$ .*

Os módulos  $V_q(\omega_{i,a,m})$  são conhecidos como *módulos de Kirillov-Reshetikhin*.

### 3.5 $q$ -character

Denote por  $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$  a categoria de todos os  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulos de  $\ell$ -peso de dimensão finita. Quando não causar confusão usaremos a notação reduzida  $\mathcal{C}$ . Como referência para esta seção citamos [18, 26].

**Definição 3.5.1** *Seja  $\mathbb{Z}[\mathcal{P}]$  o anel de grupo sobre  $\mathcal{P}$ . Defina-se o  $q$ -character de  $V \in \mathcal{C}$  por*

$$q\text{ch}(V) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} \dim(V_\mu) \mu \in \mathbb{Z}[\mathcal{P}].$$

**Observação 3.5.2** *Como  $V_\mu = \bigoplus_{\substack{\mu \in \mathcal{P} \\ \text{wt}(\mu) = \mu}} V_\mu$  segue que  $\text{ch}(V) = \text{wt}(q\text{ch}(V))$  onde  $\text{wt}$  é estendida a uma função de  $\mathbb{Z}[\mathcal{P}]$  para  $\mathbb{Z}[P]$  de maneira natural.*

Dado  $\varphi = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} \eta_\mu \mu \in \mathbb{Z}[\mathcal{P}]$  defina  $\text{wt}_\ell(\varphi) = \{\mu \in \mathcal{P} : \eta_\mu \neq 0\}$  e  $[\varphi : \mu] = \eta_\mu$ . Se  $\varphi = q\text{ch}(V)$  para algum  $V \in \mathcal{C}$ , simplificaremos a notação escrevendo  $\text{wt}_\ell(V)$  ao invés de  $\text{wt}_\ell(q\text{ch}(V))$ . Assim,  $\text{wt}_\ell(V) = \{\mu \in \mathcal{P} : V_\mu \neq 0\}$ .

**Teorema 3.5.3** *Sejam  $\lambda \in \mathcal{P}^+$ ,  $\mu \in \mathcal{P}$  e  $V$  um quociente não trivial de  $W_q(\lambda)$ . Então  $\mu \in \text{wt}_\ell(V)$  somente se  $\mu \leq \lambda$ . Em particular*

$$q\text{ch}(V) = \lambda \left( 1 + \sum_p \mu_p \right)$$

onde os  $\mu_p \in (\mathcal{Q}_q^+)^{-1}$  para todo  $p$ .

**Proposição 3.5.4** *Se  $V \in \mathcal{C}$  então  $qch(V)$  determina as constituíntes irredutíveis de  $V$  com multiplicidades. Em particular, se  $V$  e  $W$  são irredutíveis, então  $V \cong W$  se, e somente se,  $qch(V) = qch(W)$ .*

**Corolário 3.5.5** *Sejam  $V$  e  $W$  objetos de  $\mathcal{C}$ . Se  $[qch(V) : \lambda] = [qch(W) : \lambda]$  para todo  $\lambda \in \mathcal{P}^+$ , então  $qch(V) = qch(W)$ .*

**Proposição 3.5.6** *Se  $V, W \in \mathcal{C}$  então  $qch(V \otimes W) = qch(V)qch(W)$ .*

**Proposição 3.5.7** *Sejam  $\mathfrak{g}$  é do tipo  $A_{n+1}$  e  $a \in \mathbb{K}^\times$ . Então*

$$qch(V_q(\omega_{1,a})) = \omega_{1,a} + \omega_{1,aq}^{-1} \omega_{2,aq} + \omega_{2,aq^2}^{-1} \omega_{3,aq^2} + \cdots + \omega_{n,aq^n}^{-1}.$$

**Proposição 3.5.8** *Sejam  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ ,  $I = \{i\}$ ,  $a \in \mathbb{K}^\times$  e  $r \geq 0$ . Então*

$$qch(V_q(\omega_{i,a,r})) = \sum_{k=0}^r \omega_{i,a,r} \left( \prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{i,aq^{r-1-2j}} \right)^{-1}.$$

**Teorema 3.5.9** *Seja  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  e  $I = \{i\}$ . Dado  $\lambda \in \mathcal{P}^+$ , seja  $\lambda = \prod_{k=1}^m \omega_{i,a_k,r_k}$  a  $q$ -fatoração de  $\lambda$ . Então*

$$V_q(\lambda) \cong \bigotimes_{k=1}^m V_q(\omega_{i,a_k,r_k}).$$

## 3.6 Algoritmo de Frenkel-Mukhin

Nesta seção descreveremos o algoritmo proposto por Frenkel e Mukhin em [17] para o cálculo do  $q$ -caracter dos módulos  $V_q(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathcal{P}^+$ . Para cada  $\ell$ -peso dominante  $\lambda$  o algoritmo associa um elemento  $FM(\lambda) \in \mathbb{Z}[[\mathcal{P}]]$ , conjunto das somas infinitas enumeráveis de elementos de  $\mathcal{P}$  com coeficiente inteiros. Como referência para esta seção citamos [17, 26]. Usaremos a notação abreviada  $qch(\lambda)$  para  $qch(V_q(\lambda))$  para todo  $\lambda \in \mathcal{P}^+$ .

Dado  $J \subseteq I$ , considere  $\pi_J : \mathbb{Z}[\mathcal{P}] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{P}]$  dada por

$$\pi_J(\omega_{i,a}) = \begin{cases} \omega_{i,a} & \text{se } i \in J, \\ 1 & \text{se } i \notin J. \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{K}^\times.$$

Seja  $\mathcal{P}_J$  o subgrupo de  $\mathcal{P}$  gerado por  $\omega_{j,a}$ ,  $j \in J$ ,  $a \in \mathbb{K}^\times$  e ponha  $\mathcal{P}_J^+ = \mathcal{P}^+ \cap \mathcal{P}_J$ . Se  $J = \{i\}$  denotamos  $\pi_J$  por  $\pi_i$ .

**Definição 3.6.1** Dado  $J \subseteq I$  diremos que  $\lambda \in \mathcal{P}$  é  $J$ - $\ell$ -dominante se  $\pi_J(\lambda) \in \mathcal{P}_J^+$ . Denote por  $\mathcal{P}_{J,+} = \{\lambda \in \mathcal{P} : \lambda \text{ é } J\text{-}\ell\text{-dominante}\}$ .

Denote por  $\mathcal{Q}_J$  (respectivamente  $\mathcal{Q}_J^+$ ) o subgrupo (respectivamente submonóide) de  $\mathcal{Q}_q$  gerado por  $\alpha_{j,a}$ ,  $j \in J$ ,  $a \in \mathbb{K}^\times$ . Defina  $(\mathcal{Q}_J^+)^{-1}$  analogamente. Identifique  $\mathcal{P}_J$  e  $\pi_J(\mathcal{Q}_J)$  com os reticulados de  $\ell$ -pesos e  $\ell$ -raízes de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_J)$ , respectivamente. Assim, dado  $\lambda \in \mathcal{P}_{J,+}$ , podemos considerar o  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_J)$ -módulo  $V_q(\pi_J(\lambda))$ . Logo

$$qch(\pi_J(\lambda)) = \pi_J(\lambda) \left( 1 + \sum_p \pi_J(\mu_p) \right)$$

onde  $\mu_p \in (\mathcal{Q}_J^+)^{-1}$ . Defina então

$$\varphi_J(\lambda) := \lambda \left( 1 + \sum_p \mu_p \right).$$

**Observação 3.6.2** Se  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  então  $\mu \in \text{wt}_\ell(\varphi_J(\lambda))$  se, e somente se,  $\mu \in \text{wt}_\ell(V_q(\lambda))$  e  $\lambda^{-1}\mu \in (\mathcal{Q}_{I \setminus J}^+)^{-1}$ . Além disso  $[\varphi_J(\lambda) : \mu] = [qch(\lambda) : \mu]$ .

**Proposição 3.6.3** Seja  $V$  um objeto de  $\mathcal{C}$  e  $J \subseteq I$ . Então existe uma única decomposição de  $qch(V)$  como soma finita

$$qch(V) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{J,+}} a_\lambda \varphi_J(\lambda),$$

onde  $a_\lambda$  são inteiros não negativos. Em particular, se  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  e  $\mu \in \text{wt}_\ell(V_q(\lambda))$  é tal que  $\lambda^{-1}\mu \in (\mathcal{Q}_{I \setminus J}^+)^{-1}$ , então  $\mu \in \mathcal{P}_{J,+}$  e  $[qch(\lambda) : \nu] = [\varphi_J(\lambda) : \nu]$  para todo  $\nu \in \text{wt}_\ell(\varphi_J(\lambda))$ .

O algoritmo Frenkel-Mukhin usará a construção acima apenas com  $J = \{i\}$  para algum  $i \in I$ . Neste caso, denotaremos  $\varphi_J(\lambda)$  por  $\varphi_i(\lambda)$ . Dado  $\lambda \in \mathcal{P}_{i,+}$  dizemos que  $\varphi_i(\lambda)$  é a  $i$ -ésima expansão de  $\lambda$ . Lembre que, neste caso,  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_i) \cong U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_2)$ .

Dado  $\lambda \in \mathcal{P}^+$ , defina o subconjunto  $D_\lambda$  de  $\mathcal{P}$  como se segue. Um  $\ell$ -peso  $\lambda'$  pertence à  $D_\lambda$  se existe uma sequência finita  $(\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_t = \lambda')$  satisfazendo a seguinte propriedade. Dado  $r = 1, \dots, t$  existe  $i \in I$  tal que  $\lambda_{r-1} \in \mathcal{P}_{i,+}$  e  $\lambda_r \in \text{wt}_\ell(\varphi_i(\lambda_{r-1}))$ . Desta maneira,  $D_\lambda$  é enumerável e todo  $\lambda' \in D_\lambda$  satisfaz  $\lambda' \leq \lambda$ . Podemos ainda escrever

$$D_\lambda = \{\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$$

de forma que se  $\lambda_t \leq \lambda_r$  então  $t \geq r$ . Por fim, defina indutivamente as sequências de inteiros  $(s(\lambda_r))_{r \geq 0}$  e  $(s_i(\lambda_r))_{r \geq 0}$ ,  $i \in I$ , como se segue. As condições iniciais são  $s(\lambda_0) = 1$  e  $s_i(\lambda_0) = 0$  para todo  $i \in I$ . Para  $t \geq 1$ , defina

$$s_i(\lambda_t) = \sum_{\substack{r < t \\ \lambda_r \in \mathcal{P}_{i,+}}} (s(\lambda_r) - s_i(\lambda_r))[\varphi_i(\lambda_r) : \lambda_t], \quad i \in I,$$

$$s(\lambda_t) = \max\{s_i(\lambda_t); i \in I\}.$$

Finalmente, defina

$$\text{FM}(\lambda) := \sum_{r \geq 0} s(\lambda_r) \lambda_r.$$

Observe que  $\text{FM}(\lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[[\mathcal{P}]]$  para todo  $\lambda \in \mathcal{P}^+$ .

**Exemplo 3.6.4** *Seja  $\mathfrak{g}$  do tipo  $A_2$  e  $\lambda = \omega_{1,1}\omega_{2,q^3} \in \mathcal{P}^+$ . Então  $\pi_1(\lambda) = \omega_{1,1}$  e*

$$q\text{ch}(\pi_1(\lambda)) = \pi_1(\lambda)(1 + \pi_1(\alpha_{1,1}^{-1})).$$

*Logo,*

$$\varphi_1(\lambda) = \lambda(1 + \alpha_{1,1}^{-1}) = \omega_{1,1}\omega_{2,q^3}(1 + \omega_{1,1}^{-1}\omega_{1,q^2}^{-1}\omega_{2,q}) = \omega_{1,1}\omega_{2,q^3} + \omega_{1,q^2}^{-1}\omega_{2,q}\omega_{2,q^3}.$$

*Como  $\pi_2(\lambda) = \omega_{2,q^3}$ , então*

$$q\text{ch}(\pi_2(\lambda)) = \pi_2(\lambda)(1 + \pi_2(\alpha_{2,q^3}^{-1})).$$

*Logo,*

$$\varphi_2(\lambda) = \omega_{1,1}\omega_{2,q^3}(1 + \alpha_{2,q^3}^{-1}) = \omega_{1,1}\omega_{2,q^3}(1 + \omega_{2,q^3}^{-1}\omega_{2,q^5}^{-1}\omega_{1,q^4}) = \omega_{1,1}\omega_{2,q^3} + \omega_{2,q^5}^{-1}\omega_{1,1}\omega_{1,q^4}.$$

*Ponha  $\lambda_1 = \omega_{1,q^2}^{-1}\omega_{2,q}\omega_{2,q^3}$  e  $\lambda_2 = \omega_{2,q^5}^{-1}\omega_{1,1}\omega_{1,q^4}$ . Então,  $\lambda_1 \in \mathcal{P}_{2,+}$  e  $\lambda_2 \in \mathcal{P}_{1,+}$ . Como  $\pi_2(\lambda_1) = \omega_{2,q}\omega_{2,q^3}$ , então*

$$q\text{ch}(\pi_2(\lambda_1)) = \pi_2(\lambda_1)(1 + \pi_2(\alpha_{2,q^3}^{-1}) + \pi_2(\alpha_{2,q}^{-1})\pi_2(\alpha_{2,q^3}^{-1})),$$

*e*

$$\varphi_2(\lambda_1) = \omega_{1,q^2}^{-1}\omega_{2,q}\omega_{2,q^3} + \omega_{1,q^2}^{-1}\omega_{2,q}\omega_{2,q^5}^{-1}\omega_{1,q^4} + \omega_{2,q^3}^{-1}\omega_{2,q^5}^{-1}\omega_{1,q^4}.$$

Para calcular  $\varphi_1(\lambda_2)$ , observe que  $qch(\pi_1(\lambda_2)) = qch(\pi_1(\omega_{1,1}))qch(\pi_1(\omega_{1,q^4}))$  (Proposição 3.5.6). Logo,

$$\varphi_1(\lambda_2) = \omega_{1,1}\omega_{1,q^4}\omega_{2,q^5}^{-1} + \omega_{1,q^2}^{-1}\omega_{1,q^4}\omega_{2,q}\omega_{2,q^5}^{-1} + \omega_{1,1}\omega_{1,q^6}^{-1} + \omega_{1,q^2}^{-1}\omega_{1,q^6}^{-1}\omega_{2,q}.$$

Ponha  $\lambda_3 = \omega_{1,q^2}^{-1}\omega_{2,q}\omega_{2,q^5}^{-1}\omega_{1,q^4}$ ,  $\lambda_4 = \omega_{2,q^3}^{-1}\omega_{2,q^5}^{-1}\omega_{1,q^4}$ ,  $\lambda_5 = \omega_{1,1}\omega_{1,q^6}^{-1}$  e  $\lambda_6 = \omega_{1,q^2}^{-1}\omega_{1,q^6}^{-1}\omega_{2,q}$ . Vemos que  $\lambda_3$  não é nem 1 nem 2- $\ell$ -dominante.  $\lambda_4$  é 1- $\ell$ -dominante e

$$\varphi_1(\lambda_4) = \omega_{1,q^4}\omega_{2,q^3}^{-1}\omega_{2,q^5}^{-1} + \omega_{1,q^6}^{-1}\omega_{2,q^3}^{-1}.$$

Analogamente,  $\lambda_5$  e  $\lambda_6$  são 2- $\ell$ -dominante,

$$\varphi_2(\lambda_5) = \omega_{1,1}\omega_{1,q^6}^{-1} \quad \text{e} \quad \varphi_2(\lambda_6) = \omega_{1,q^2}^{-1}\omega_{1,q^6}^{-1}\omega_{2,q} + \omega_{1,q^6}^{-1}\omega_{2,q^3}^{-1}.$$

Por fim, ponha  $\lambda_7 = \omega_{1,q^6}^{-1}\omega_{2,q^3}^{-1}$ , que não é nem 1 nem 2- $\ell$ -dominante. Então

$$D_\lambda = \{\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7\}.$$

Com isto verifica-se que

$$FM(\lambda) = \lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7.$$

**Definição 3.6.5** Dado  $\lambda \in \mathcal{P}^+$ , dizemos que o módulo  $V_q(\lambda)$  é minúsculo se  $\text{wt}_\ell(V_q(\lambda)) \cap \mathcal{P}^+ = \{\lambda\}$ .

**Teorema 3.6.6** [9, Theorem 8] Afinizações minimais do tipo A são minúsculas.

**Lema 3.6.7** Seja  $V \in \mathcal{C}$ ,  $i \in I$ ,  $\lambda \in \mathcal{P}_{i,+} \cap \text{wt}_\ell(V)$ . Suponha que  $[qch(V) : \lambda'] = 0$  para todo  $\lambda' \in \mathcal{P}_{i,+} \setminus \{\lambda\}$  tal que  $[\varphi_i(\lambda') : \lambda] \neq 0$ . Então  $[\varphi_i(\lambda) : \mu] = [qch(V) : \mu]$  para todo  $\mu \in \text{wt}_\ell(\varphi_i(\lambda))$ .

**Definição 3.6.8** Dado  $\mu \in (\mathcal{Q}^+)^{-1}$ , diremos que  $\alpha_{i,a}^{-1}$  divide  $\mu$ , para algum  $i \in I$ ,  $a \in \mathbb{K}^\times$ , se  $\mu \in \alpha_{i,a}^{-1}(\mathcal{Q}^+)^{-1}$  e denotaremos por  $\alpha_{i,a}^{-1}|\mu$ . Caso contrário, diremos que  $\alpha_{i,a}^{-1}$  não divide  $\mu$  e denotaremos por  $\alpha_{i,a}^{-1} \nmid \mu$ .

**Proposição 3.6.9** Sejam  $\lambda \in \mathcal{P}^+$ ,  $i \in I$  e  $\mu \in \text{wt}_\ell(V_q(\lambda))$ . Suponha que  $\alpha_{i,a}^{-1}$  não divide  $\lambda^{-1}\mu$  para todo  $a \in \mathbb{K}^\times$ . Então  $\mu \in \mathcal{P}_{i,+}$  e  $[\varphi_i(\mu) : \nu] = [qch(\lambda) : \nu]$  para todo  $\nu \in \text{wt}_\ell(\varphi_i(\mu))$ .

**Teorema 3.6.10** *Seja  $\lambda \in \mathcal{P}^+$ . Se  $[qch(\lambda) : \nu] = [FM(\lambda) : \nu]$  para todo  $\nu \in \mathcal{P}^+$ , então  $FM(\lambda) = qch(\lambda)$ . Em particular, se  $\lambda$  é minúsculo, então  $FM(\lambda) = qch(\lambda)$ .*

**Observação 3.6.11** *A segunda afirmação segue da primeira pois  $\lambda \in wt_\ell(FM(\lambda))$  implica  $wt_\ell(V_q(\lambda)) \cap \mathcal{P}^+ \subseteq wt_\ell(FM(\lambda))$ . A primeira afirmação foi demonstrada em [17] no caso que  $V_q(\lambda)$  é minúsculo. Foi observado em [26, Remark 5.7(ii)] que a demonstração de [17] funciona sob a hipótese mais geral feita acima.*

**Teorema 3.6.12** [38, Theorem 3.2(i)] *Módulos de Kirillov-Reshetikhin são minúsculos. Em particular,  $FM(\omega_{i,a,r}) = qch(\omega_{i,a,r})$  para todo  $i \in I$ ,  $a \in \mathbb{K}^\times$ ,  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ .*

Foi conjecturado em [17] que  $FM(\lambda) = qch(\lambda)$  para todo  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  para qualquer álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , mesmo não sendo do tipo *ADE*. Atualmente se sabe que tal afirmação não é verdade em geral. Em particular, para o tipo  $A_2$  o algoritmo falha, como veremos no Exemplo 4.3.4.

# Capítulo 4

## Álgebras de Cluster e as Categorias $\mathcal{C}_\ell$

Neste capítulo estudaremos o resultado principal do artigo [26]. Pelas dificuldades de se estudar os  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulos de dimensão finita quando  $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}_2$ , é conveniente focarmos em subcategorias monoidais de  $\mathcal{C}$ . Em particular, mostraremos que quando  $C$  é matriz de Cartan do tipo  $A$ , uma determinada subcategoria de  $\mathcal{C}$  é uma categorificação monoidal da álgebra de cluster associada a matriz  $C$  definida na seção 1.4.

Fixe  $C = (c_{ij})$ ,  $i, j \in I = \{1, \dots, n\}$ , uma matriz de Cartan do tipo  $ADE$  e considere  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$  como anteriormente. Sejam  $\Phi = \Phi(C)$ , o sistema de raízes associado a  $C$ ,  $\Pi = \{\alpha_i : i \in I\}$  o conjunto das raízes simples e  $Q = \mathbb{Z}\Pi$  o reticulado de raízes. Fixe uma bipartição  $I_0 \sqcup I_1 = I$  do diagrama de Dynkin associado a  $C$  e tome  $\varepsilon_i, \xi_i, i \in I$ , como na Definição A.2.15. Considere  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$  a álgebra quantizada afim de  $\mathfrak{g}$ , com parâmetro  $q \in \mathbb{C}^\times$  tal que  $q$  não seja raiz da unidade e  $\mathcal{C}$  a categoria de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -módulos de  $\ell$ -peso de dimensão finita.

### 4.1 As Categorias $\mathcal{C}_\ell$

**Proposição 4.1.1** *Seja  $\lambda = \prod_{k=1}^r \omega_{i_k, a_k} \in \mathcal{P}^+$  e  $\lambda\mu \in \text{wt}_\ell(q\text{ch}(\lambda))$  com  $\mu \in (\mathcal{Q}_q^+)^{-1}$ . Se  $\alpha_{j,b}^{-1}$  divide  $\mu$ , existe  $k \in \{1, \dots, r\}$  e  $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tal que  $b = a_k q^l$ . Além disso, existem sequências finitas*

$$(j_1 = i_k, \dots, j_s) \in I^s, \quad (1 = l_1, \dots, l_s = l) \in \mathbb{N}^s$$

*tais que  $c_{j_t, j_{t+1}} = -1$  e  $\alpha_{j_t, a_k q^{l_t}}^{-1}$  divide  $\mu$  para todo  $t = 1, \dots, s-1$ . Por fim,  $l_t$  é ímpar se  $\varepsilon_{j_t} = \varepsilon_{i_k}$  e par caso contrário.*

**Demonstração:** Se  $\lambda = \omega_{i,a}$  então  $q\text{ch}(\lambda) = \text{FM}(\lambda)$  e a proposição é verdadeira pela definição



do algoritmo de Frenkel-Mukhin. No caso geral,  $V_q(\boldsymbol{\lambda})$  é um subquociente do produto tensorial  $\otimes_{k=1}^r V_q(\boldsymbol{\omega}_{i_k, a_k})$  e, portanto,  $[q\text{ch}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\nu}] \leq [\prod_{k=1}^r q\text{ch}(\boldsymbol{\omega}_{i_k, a_k}) : \boldsymbol{\nu}]$  para todo  $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{P}$  o que prova a proposição.  $\square$

Defina  $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}^+ = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^+ : \forall i \in I, \boldsymbol{\lambda}_i(a) = 0 \text{ somente se } a \in q^{2\mathbb{Z} + \xi_i}\}$  e considere  $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$  a subcategoria plena de  $\mathcal{C}$  cujos objetos  $V$  tenham constituintes irreduzíveis  $V_q(\boldsymbol{\lambda})$  com  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}^+$ . Defina  $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$  como o subgrupo de  $\mathcal{P}$  gerado por  $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}^+$ .

**Observação 4.1.2** *Se  $V \in \mathcal{C}$  e  $a \in \mathbb{K}^\times$ , denotamos por  $V(a)$  o pull-back de  $V$  pelo o automorfismo  $\tau_a$  e por  $V^\sigma$  o pull-back de  $V$  por  $\sigma$ . É bem conhecido (segue, por exemplo, dos resultados de [8]) que, para cada objeto simples  $S$  de  $\mathcal{C}$  existem objetos simples  $S_1, \dots, S_k$  de  $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$  e elementos  $a_i \in \mathbb{K}^\times$  com  $a_i a_j^{-1} \notin q^{2\mathbb{Z}}$  e  $1 \leq i < j \leq k$  tal que  $S \cong_{U_q(\mathfrak{g})} S_1(a_1) \otimes \dots \otimes S_k(a_k)$ . Com isto, a descrição dos objetos simples de  $\mathcal{C}$  essencialmente se reduz à descrição dos objetos simples de  $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ .*

Segue da proposição acima que, se  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}^+$ , então  $\boldsymbol{\mu} \in \text{wt}_\ell(V_q(\boldsymbol{\lambda}))$  somente se  $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ . Para simplificar a notação, escreveremos  $\boldsymbol{\omega}_{i,r}$  ao invés de  $\boldsymbol{\omega}_{i,q^r}$  e  $\boldsymbol{\alpha}_{i,r}$  ao invés de  $\boldsymbol{\alpha}_{i,q^r}$ . Introduziremos agora uma sequência crescente de subcategorias de  $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ .

**Definição 4.1.3** *Para cada  $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  defina*

$$\mathcal{P}_{(\ell)}^+ = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^+ : \forall i \in I, \boldsymbol{\lambda}_i(a) = 0 \text{ somente se } a \in \{q^{-2k - \xi_i} : 0 \leq k \leq \ell\}\}.$$

Defina ainda,  $(\mathcal{Q}_{(\ell)}^+)^{-1}$  (respectivamente  $(\mathcal{Q}_{\mathbb{Z}}^+)^{-1}$ ) o submonóide de  $(\mathcal{Q}_q^+)^{-1}$  gerado por  $\{\boldsymbol{\alpha}_{i,r}^{-1} : i \in I, r = 2k + \xi_i : 0 \leq k \leq \ell - 1\}$  (respectivamente  $\{\boldsymbol{\alpha}_{i,r}^{-1} : i \in I, r \in 2\mathbb{Z} + \xi_i\}$ ).

A categoria  $\mathcal{C}_\ell$  é a subcategoria de  $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$  cujos objetos  $V$  tenham constituintes irreduzíveis da forma  $V_q(\boldsymbol{\lambda})$  com  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{(\ell)}^+$  e denotaremos por  $R_\ell$  seu anel de Grothendieck.

**Exemplo 4.1.4** *Os objetos simples da categoria  $\mathcal{C}_0$  são descritos facilmente. De fato, observe que  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{(0)}^+$  se, e somente se, existem  $b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i \in I$ , tais que  $\boldsymbol{\lambda} = \prod_{i \in I} \boldsymbol{\omega}_{i, \xi_i}^{b_i}$ . Segue então de [17, Proposition 6.15] que*

$$V_q(\boldsymbol{\lambda}) \cong \bigotimes_{i \in I} V_q(\boldsymbol{\omega}_{i, \xi_i})^{\otimes b_i}.$$

*Ou seja, todo objeto simples de  $\mathcal{C}_0$  é produto tensorial de módulos fundamentais. Em particular, todo produto tensorial de objetos simples é simples.*

**Observação 4.1.5** A definição da categoria  $\mathcal{C}_\ell$  depende da função  $i \mapsto \xi_i$  que pode ser escolhida de duas formas diferentes. No entanto, escolhida uma partição temos uma auto-equivalência com a outra partição através de um automorfismo de representações. Omitiremos esse automorfismo por não fazermos uso ao longo do texto.

Denote por  $R$  o anel de Grothendieck de  $\mathcal{C}$ . É bem conhecido [18] que  $R$  é o anel de polinômios sobre  $\mathbb{Z}$  nas classes  $[V_q(\omega_{i,a})]$ ,  $i \in I, a \in \mathbb{K}^\times$ , dos módulos fundamentais. O anel de Grothendieck  $R_{\mathbb{Z}}$  de  $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$  é o subanel de  $R$  gerado pelas classes  $[V_q(\omega_{i,q^{2k+\xi_i}})]$ ,  $i \in I, k \in \mathbb{Z}$ .

**Proposição 4.1.6** As classes dos módulos de Kirillov-Reshetikhin  $[V_q(\omega_{i,a,r})]$ ,  $i \in I, a \in \mathbb{K}^\times, r \geq 1$ , em  $R$  satisfazem o seguinte sistema de equações, chamados de  $T$ -sistemas:

$$[V_q(\omega_{i,a,r})][V_q(\omega_{i,aq^2,r})] = [V_q(\omega_{i,a,k+1})][V_q(\omega_{i,aq^2,k-1})] + \prod_{j \neq i: c_{ij} \neq 0} [V_q(\omega_{j,aq,k})].$$

Este resultado foi conjecturado em [31] e provado em [24, 38]. Usando estas equações, pode-se calcular indutivamente as expressões de qualquer  $[V_q(\omega_{i,a,k})]$  como um polinômio nas classes  $[V_q(\omega_{i,a})]$  dos módulos fundamentais.

**Proposição 4.1.7** Para cada  $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  o anel de Grothendieck de  $\mathcal{C}_\ell$  é o anel de polinômios

$$R_\ell = \mathbb{Z} [[V_q(\omega_{i,2k+\xi_i})] : 0 \leq k \leq \ell].$$

**Demonstração:** Temos que mostrar apenas que  $\mathcal{C}_\ell$  é fechada sob o produto tensorial. Sejam  $\lambda, \lambda' \in \mathcal{P}_{(\ell)}^+$ . Se  $V_q(\varpi)$  é um constituinte irredutível de  $V_q(\lambda) \otimes V_q(\lambda')$  então  $\varpi = \lambda \lambda' \mu$  onde  $\mu \in (\mathcal{Q}^+)^{-1}$ . Afirmamos que, para  $\varpi$  ser dominante,  $\mu \in (\mathcal{Q}_{(\ell)}^+)^{-1}$ . De fato, pela proposição 4.1.1, sabemos que  $\mu \in (\mathcal{Q}_{\mathbb{Z}}^+)^{-1}$ . Seja

$$s = \min\{r : \mu \in (\mathcal{Q}_{(r)}^+)^{-1}\}.$$

Se  $s \geq \ell$  então  $\omega_{i,\xi_i+2s+2}^{-1} | \varpi$  e, portanto,  $\varpi$  não pode ser dominante. Logo  $s < \ell$ , o que implica  $\mu \in (\mathcal{Q}_{(\ell)}^+)^{-1}$  e  $\varpi \in \mathcal{P}_{(\ell)}^+$ . Portanto  $V_q(\varpi) \in \mathcal{C}_\ell$ .  $\square$

## 4.2 $q$ -character Truncado

O algoritmo de Frenkel-Mukhin é uma ferramenta importante para o cálculo do  $q$ -character de um objeto simples de  $\mathcal{C}$ . Porém, até mesmo quando o algoritmo nos dá o  $q$ -character, em geral,

é impossível de manuseá-lo. No entanto, quando lidamos com a subcategoria  $\mathcal{C}_1$ , podemos trabalhar com certos truncamentos do  $q$ -caracter, como explicaremos nesta seção.

Seja  $\psi \in \mathbb{Z}[\mathcal{P}]$  tal que podemos escrevê-lo como

$$\psi = \sum_k \lambda_k (1 + \sum_p \mu_p^{(k)}) \quad (4.2.1)$$

onde  $\lambda_k \in \mathcal{P}_{(1)}^+$  e  $\mu_p^{(k)} \in (\mathcal{Q}_{\mathbb{Z}}^+)^{-1}$ .

**Observação 4.2.1** *A fatoração  $\mu = \lambda_k \mu_p^{(k)}$  em geral não é única. Por exemplo, para tipo  $A_2$  temos  $\omega_{1,0} \omega_{1,2} \alpha_{1,0}^{-1} = \omega_{2,1}$ . No entanto, suponha que  $\lambda_k \mu_p^{(k)}$  é tal que  $\alpha_{i,r}^{-1}$  divide  $\mu_p^{(k)}$  para algum  $i \in I$  e algum  $r \geq 2$ . Neste caso, para qualquer outra expressão  $\lambda_k \mu_p^{(k)} = \widetilde{\lambda}_k \widetilde{\mu}_p^{(k)}$ , então  $\alpha_{j,s}^{-1}$  divide  $\widetilde{\mu}_p^{(k)}$  para algum  $j \in I$  e  $s \geq 2$ , como observado em [26, §6.2].*

Dado  $\psi$  como em (4.2.1), seja  $S(\psi) := \{(k, p) : \alpha_{i,r}^{-1} \nmid \mu_p^{(k)}, \forall r \geq 2, \forall i \in I\}$ . Definimos

$$\psi_{\leq 1} := \sum_{(k,p) \in S(\psi)} \lambda_k (1 + \mu_p^{(k)}).$$

Observe que se  $V \in \mathcal{C}_1$  então  $qch(V)$  pode ser escrito como na equação (4.2.1) e, consequentemente, se  $\lambda \in \mathcal{P}_{(1)}^+$ ,  $FM(\lambda)$  também admite tal decomposição. Desta maneira, dado  $V \in \mathcal{C}_1$  definimos o  $q$ -caracter truncado de  $V$  por  $qch(V)_{\leq 1}$ . A motivação para esta definição é a seguinte proposição.

**Proposição 4.2.2** *A função  $\Psi : R_1 \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{P}]$  definida por  $\Psi([V]) := qch(V)_{\leq 1}$  é um monomorfismo de anéis.*

**Demonstração:** Claramente a função está bem definida pois  $[V] = [W]$  em  $R_1$  se, e somente se,  $qch(V) = qch(W)$ . Além disso, segue da definição que o  $q$ -caracter truncado é aditivo e multiplicativo e portando induz o homomorfismo  $\Psi$ . Para a injetividade, seja  $\lambda \in \mathcal{P}_{(1)}^+$  e considere  $V_q(\lambda) \in \mathcal{C}_1$  tal que  $qch(V_q(\lambda)) = \lambda(1 + \sum_p \mu_p)$ , onde  $\mu \in (\mathcal{Q}^+)^{-1}$ . Se  $\alpha_{i,r}^{-1}$  divide  $\mu_p$  para algum  $r \geq 2$  então  $\lambda \mu_p$  não pode ser dominante. Assim,  $wt_{\ell}(V_q(\lambda)) \cap \mathcal{P}^+ = wt_{\ell}(qch(V_q(\lambda))_{\leq 1}) \cap \mathcal{P}^+$ . Logo, se para dois objetos  $V$  e  $W$  de  $\mathcal{C}_1$  temos  $qch(V)_{\leq 1} = qch(W)_{\leq 1}$ , então  $[qch(V) : \nu] = [qch(W) : \nu]$  para todo  $\nu \in \mathcal{P}^+$  e, portanto, pelo corolário 3.5.5, segue o resultado.  $\square$

**Exemplo 4.2.3** Continuando o exemplo 3.6.4 no tipo  $A_2$ . Na atual notação, temos  $\lambda = \omega_{1,0}\omega_{2,3}$  e temos, pelo Teorema 3.4.3, que  $V_q(\lambda)$  é afinização minimal, logo, pelo Teorema 3.6.6,  $V_q(\lambda)$  é minúsculo e, portanto,  $qch(\lambda) = \text{FM}(\lambda)$ . Então

$$qch(\lambda)_{\leq 1} = \lambda + \lambda_1 = \omega_{1,0}\omega_{2,3} + \omega_{1,2}^{-1}\omega_{2,1}\omega_{2,3} = \omega_{1,0}\omega_{2,3}(1 + \alpha_{1,0}^{-1}).$$

**Exemplo 4.2.4** Seja  $\mathfrak{g}$  do tipo ADE. Então, para  $i \in I$

$$qch(\omega_{i,2})_{\leq 1} = \omega_{i,2}, \quad qch(\omega_{i,1})_{\leq 1} = \omega_{i,1}(1 + \alpha_{i,1}^{-1}),$$

$$qch(\omega_{i,0})_{\leq 1} = \omega_{i,0} \left( 1 + \alpha_{i,0}^{-1} \prod_{j \in I: c_{ij} = -1} (1 + \alpha_{j,1}^{-1}) \right),$$

$$qch(\omega_{i,\xi_i}\omega_{i,\xi_i+2})_{\leq 1} = \omega_{i,\xi_i}\omega_{i,\xi_i+2}.$$

De fato, para todos esses módulos o  $q$ -character é dado pelo algoritmo de Frenkel-Mukhin (os três primeiros são módulos fundamentais e o último é um módulo de Kirillov-Reshetikhin).

Dados  $\varphi, \psi \in \mathbb{Z}[\mathcal{P}]$  denotamos  $\varphi \leq \psi \iff \psi - \varphi \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[\mathcal{P}]$ .

**Corolário 4.2.5** Seja  $\lambda \in \mathcal{P}_{(1)}^+$  e suponha que  $qch(V_q(\lambda))_{\leq 1} \leq \text{FM}(\lambda)$ . Então  $qch(V_q(\lambda)) = \text{FM}(\lambda)$ .

**Demonstração:** Pela demonstração da Proposição 4.2.2,  $[qch(\lambda) : \nu] = [qch(\lambda)_{\leq 1} : \nu]$  para todo  $\nu \in \mathcal{P}^+$ , e o corolário segue do Teorema 3.6.10.  $\square$

### 4.3 $\mathcal{C}_1$ como Categorificação Monoidal de Álgebras de Cluster

Para cada  $\beta \in \Phi_{\geq -1}$  associamos um módulo simples  $S(\beta) \in \mathcal{C}_1$  da seguinte maneira.

Para as raízes negativas  $-\alpha_i$  definimos

$$S(-\alpha_i) = \begin{cases} V_q(\omega_{i,2}) & \text{se } i \in I_0, \\ V_q(\omega_{i,1}) & \text{se } i \in I_1. \end{cases}$$

Para  $\beta = \sum_{i \in I} b_i \alpha_i \in \Phi_+$ , defina

$$\pi_\beta := \prod_{i \in I_0} \omega_{i,0}^{b_i} \prod_{i \in I_1} \omega_{i,3}^{b_i} \in \mathcal{P}_{(1)}^+$$

e  $S(\beta) = V_q(\pi_\beta)$ . Definimos ainda  $F_i, i \in I$ , como o módulo de Kirillov-Reshetikhun dado por

$$F_i = V_q(\omega_{i,1+\xi_i,2}).$$

Considere a álgebra de cluster  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_C$  definida como na seção 1.4 através da matriz de Cartan  $C$ . Pela proposição 4.1.7,  $R_1$  é o anel de polinômios nas classes dos  $2n$  módulos fundamentais  $S(-\alpha_i), S(\alpha_i), i \in I$ . Pelo Lema 1.4.4 temos um isomorfismo de anéis  $\iota : \mathcal{A} \rightarrow R_1$  tal que

$$x[-\alpha_i] \mapsto [S(-\alpha_i)], \quad x[\alpha_i] \mapsto [S(\alpha_i)], \quad i \in I.$$

Podemos agora enunciar o teorema principal do capítulo.

**Teorema 4.3.1** *Suponha  $\mathfrak{g}$  do tipo  $A_n$ . Então*

- (i)  $\iota(x[\beta]) = [S(\beta)]$  e  $\iota(f_i) = [F_i]$ , para todo  $\beta \in \Phi_+$  e para todo  $i \in I$ .
- (ii) Se identificarmos  $\mathcal{A}$  com  $R_1$  via  $\iota$ ,  $\mathcal{C}_1$  se torna uma categorificação monoideal de  $\mathcal{A}$ . Além disso a classe de qualquer objeto simples de  $\mathcal{C}_1$  é um monômio de cluster.

**Corolário 4.3.2** (i) *Os objetos  $S(\beta), \beta \in \Phi_{\geq -1}$ , e  $F_i, i \in I$ , são os objetos primos de  $\mathcal{C}_1$ .*

- (ii) *Cada objeto simples de  $\mathcal{C}_1$  é um produto tensorial de primos cujas classes pertencem a um cluster de  $\mathcal{A}$ .*
- (iii) *Todas as potências tensoriais de um objeto simples de  $\mathcal{C}_1$  são simples.*
- (iv) *Os monômios de cluster formam uma  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{A}$ .*

**Definição 4.3.3** *Os primos  $S(\beta)$  são chamados de objetos simples de cluster e os  $F_i$  de objetos simples congelados.*

Ao longo do capítulo mostraremos resultados preliminares para se demonstrar o Teorema 4.3.1 que será concluído na seção 4.5. Assumindo-o podemos dar um exemplo onde o algoritmo de Frenkel-Mukhin não fornece o  $q$ -character.

**Exemplo 4.3.4** Seja  $\mathfrak{g}$  do tipo  $A_2$ ,  $I_0 = \{1\}$  e  $\lambda = \omega_{1,0}^2 \omega_{2,3}$ . Desta forma,  $V_q(\lambda) \in \mathcal{C}_1$  e usando o Teorema 4.3.1 (ii) temos

$$V_q(\lambda) \cong S(\alpha_1) \otimes S(\alpha_1 + \alpha_2) \cong V_q(\omega_{1,0}) \otimes V_q(\omega_{1,0} \omega_{2,3}).$$

Logo, pela Proposição 3.5.7, temos

$$qch(\lambda) = (\omega_{1,0} + \omega_{1,2}^{-1} \omega_{2,1} + \omega_{2,3}^{-1}) qch(\omega_{1,0} \omega_{2,3}),$$

e então

$$[qch(\lambda) : \lambda \alpha_{1,0}^{-1} \alpha_{2,1}^{-1}] = 1.$$

observando que  $\omega_{2,3}^{-1} \omega_{1,0} \omega_{2,3} = \omega_{1,0} = \lambda \alpha_{1,0}^{-1} \alpha_{2,1}^{-1}$ .

Por outro lado,  $\varphi_1(\lambda) = \lambda(1 + 2\alpha_{1,0}^{-1} + \alpha_{1,0}^{-2})$  e  $\varphi_2(\lambda) = \lambda(1 + \alpha_{2,3}^{-1})$ . Definindo  $\lambda_1 := \lambda \alpha_{1,0}^{-1} \in \mathcal{P}_{2,+}$  e então  $\varphi_2(\lambda_1) = \lambda_1(1 + \alpha_{2,3}^{-1} + \alpha_{2,1}^{-1} \alpha_{2,3}^{-1})$ . Assim,

$$FM(\lambda) - \lambda - 2\lambda_1 = \lambda \mu$$

para algum  $\mu \in \mathbb{Z}[\alpha_{1,0}^{-2}, \alpha_{2,3}^{-1}]$  tal que ou  $\alpha_{1,0}^{-2} \mu$  ou  $\alpha_{2,3}^{-1} \mu$ . Portanto,  $[FM(\lambda) : \lambda \alpha_{1,0}^{-1} \alpha_{2,1}^{-1}] = 0$  o que implica  $qch(\lambda) \neq FM(\lambda)$ . Além disso, o  $q$ -caracter truncado de  $V_q(\lambda)$  é dado por:

$$\begin{aligned} qch(\omega_{1,0}^2 \omega_{2,3})_{\leq 1} &= qch(\omega_{1,0})_{\leq 1} qch(\omega_{1,0} \omega_{2,3})_{\leq 1} \\ &= \omega_{1,0} (1 + \alpha_{1,0}^{-1} + \alpha_{1,0}^{-1} \alpha_{2,1}^{-1}) \omega_{1,0} \omega_{2,3} (1 + \alpha_{1,0}^{-1}) \\ &= \omega_{1,0}^2 \omega_{2,3} (1 + 2\alpha_{1,0}^{-1} + \alpha_{1,0}^{-2} + \alpha_{1,0}^{-1} \alpha_{2,1}^{-1} + \alpha_{1,0}^{-2} \alpha_{2,1}^{-1}). \end{aligned}$$

Dado  $\beta = \sum_{i \in I} b_i \alpha_i \in Q^+$ , considere  $\pi_\beta \in \mathcal{P}_{(1)}^+$ . Suponha que  $J = \text{supp}_Q(\beta)$  é conexo e seja  $K = \{k \in I \setminus J : c_{kj} = -1 \text{ para algum } j \in J\}$  o subconjunto de vértices adjacentes a  $J$ . Para  $k \in K$  denote por  $j_k$  o único  $j \in J$  tal que  $c_{kj} = -1$ . Escreva

$$\varphi_J(\pi_\beta)_{\leq 1} = \pi_\beta \left( 1 + \sum_p \mu_p \right)$$

onde  $\mu_p \in (\mathcal{Q}_{(1)}^+)^{-1}$ . De fato, pela Proposição 4.1.1 cada  $\mu_p$  pode ser escrito da forma  $\mu_p = \prod_{j \in J} \alpha_{j, \xi_j}^{-\mu_{j,p}}$  para algum  $\mu_{j,p} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Nestas condições, temos:

**Proposição 4.3.5**

$$qch(V_q(\pi_\beta))_{\leq 1} = \pi_\beta \left( 1 + \sum_p \mu_p \prod_{k \in K \cap I_1} (1 + \alpha_{k,1}^{-1})^{\mu_{j_k,p}} \right).$$

**Demonstração:** Escreva  $\lambda = \pi_\beta$ . Pela proposição 3.6.3 temos que  $\varphi_J(\lambda) \leq qch(\lambda)$ . Se  $k \in K \cap I_1$ , então  $j_k \in J \cap I_0$ . Observe que  $\omega_{k,r}$  não divide  $\lambda$  para nenhum  $r \in \mathbb{Z}$  pois  $b_k = 0$ . Consequentemente, se  $\alpha_{j_k,0}^{-\mu_{j_k,p}} | \mu_p$  com  $\mu_{j_k,p} > 0$ , então  $\omega_{k,1}^{\mu_{j_k,p}} | \lambda \mu_p$  e  $\omega_{k,r}$  não divide  $\lambda \mu_p$  para  $r \neq 1$ . Logo,  $\lambda \mu_p$  é  $\{k\}$ - $\ell$ -dominante e, usando o Lema 3.6.7, temos

$$\varphi_k(\lambda \mu_p) = \lambda \mu_p (1 + \alpha_{k,1}^{-1})^{\mu_{j_k,p}} \leq qch(\lambda).$$

Isto implica que

$$\psi := \lambda \left( 1 + \sum_p \mu_p \prod_{k \in K \cap I_1} (1 + \alpha_{k,1}^{-1})^{\mu_{j_k,p}} \right) \leq qch(\lambda)_{\leq 1}. \quad (4.3.1)$$

Note que se  $k \in K \cap I_0$  então  $j_k \in J \cap I_1$  e, se  $\lambda \mu_p \in \mathcal{P}_{k,+}$ , então  $\omega_{k,2}^{\mu_{j_k,p}} | \lambda \mu_p$ . Assim, neste caso,  $\varphi_k(\lambda \mu_p)_{\leq 1} = \lambda \mu_p$  não contribui em nada novo para o  $q$ -caracter truncado.

Mostremos que vale a igualdade em (4.3.1). Suponha por contradição que a desigualdade é estrita e tome  $\mu \in \text{wt}_\ell(qch(\lambda)_{\leq 1})$  tal que  $[\psi : \mu] < [qch(\lambda)_{\leq 1} : \mu]$ . Pela Proposição 3.6.3 temos que, se  $\alpha_{j,\xi_j}^{-1} \varpi \in \text{wt}_\ell(qch(\lambda))$  para algum  $j \in J$ , então  $[\varphi_J(\lambda) : \alpha_{j,\xi_j}^{-1} \varpi] = [qch(\lambda) : \alpha_{j,\xi_j}^{-1} \varpi]$ . Desta forma,  $\alpha_{k,\xi_k}^{-1} | \lambda^{-1} \mu$  para algum  $k \notin J$ . Pela Proposição 4.1.1 podemos assumir  $k \in K \cap I_1$ . Assumiremos também que  $\mu$  é maximal com essa propriedade. Considere

$$r = [qch(\lambda) : \mu] \quad \text{e} \quad \nu = \max\{s : \alpha_{k,2}^{-s} | \lambda^{-1} \mu\}.$$

Assim,  $\alpha_{i,2}^{-1}$  não divide  $\mu$  se  $c_{ik} = -1$ , pois  $\mu \in \text{wt}_\ell(qch(\lambda)_{\leq 1})$  e então  $\omega_{k,3}^{-\nu} | \mu$ . Portanto  $\mu$  não é  $k$ - $\ell$ -dominante. Logo, pela proposição 3.6.3, existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathcal{P}_{k,+} \cap \text{wt}_\ell(qch(\lambda))$  tais que

$$[\varphi_k(\lambda_i) : \mu] = r_i \neq 0, \quad \forall i \quad \text{e} \quad r_1 + \dots + r_l = r.$$

Como  $\mu < \lambda_i$  para todo  $i$ ,  $[\psi : \lambda_i] = [qch(\lambda)_{\leq 1} : \lambda_i]$ . Além disso, por construção,  $\sum_i \varphi_k(\lambda_i) \leq \psi$  e, portanto,  $[\psi : \mu] \geq r$  o que contradiz nossa hipótese. Logo vale a igualdade em (4.3.1).

□

Dado  $J \subseteq I$  defina  $\alpha_J := \sum_{j \in J} \alpha_j \in Q$ .

**Proposição 4.3.6** *Sejam  $J \subseteq I$  conexo,  $\beta = \alpha_J$ ,  $\eta \in \{0, 1\}^I$  a função característica de  $J$  e*

$$\mathcal{S} = \left\{ \nu \in \{0, 1\}^I : \nu_i \leq \eta_i \quad \forall i \in I_0 \quad \text{e} \quad \nu_i \leq \max \left( 0, -\eta_i + \sum_{j:c_{ij}=-1} \nu_j \right) \quad \forall i \in I_1 \right\}.$$

Então:

$$qch(S(\beta))_{\leq 1} = \pi_\beta \sum_{\nu \in \mathcal{S}} \prod_{i \in I} \alpha_{i,\xi_i}^{-\nu_i}. \quad (4.3.2)$$

**Demonstração:** Primeiramente, suponha  $J = I$  e observe que  $\eta_i \equiv 1$ , donde  $\nu_i \leq \eta_i$  para todo  $\nu \in \{0, 1\}^I$ . Procederemos por indução em  $n = \#I$ . Para  $n = 1$ , temos

$$\begin{aligned} qch(S(\beta))_{\leq 1} &= qch(\omega_{1,0})_{\leq 1} = \omega_{1,0}(1 + \alpha_{1,0}^{-1}) \quad \text{se } 1 \in I_0 = I \text{ e} \\ qch(S(\beta))_{\leq 1} &= qch(\omega_{1,3})_{\leq 1} = \omega_{1,3} \quad \text{se } 1 \in I_1 = I. \end{aligned}$$

Por outro lado, o lado direito de (4.3.2) é

$$\omega_{1,0} \sum_{k=0}^1 \alpha_{1,0}^{-k} = \omega_{1,0}(1 + \alpha_{1,0}^{-1}), \text{ se } 1 \in I_0 = I \quad \text{e} \quad \omega_{1,3}, \text{ se } 1 \in I_1 = I.$$

Suponha  $n \geq 2$  e  $\mu \in \text{wt}_\ell(qch(\pi_\beta)_{\leq 1})$ . Podemos supor que o vértice 1 é monovalente e adjacente ao vértice 2. Sejam  $I' = \{2, \dots, n\}$ ,  $\lambda = \pi_\beta$  e considere os dois casos possíveis

- (a) Se  $1 \in I_1$ , então  $\lambda = \omega_{1,3}\omega_{2,0}\omega_{3,3}\cdots$ . Defina  $\lambda' = \lambda\omega_{1,3}^{-1}$ . Como  $\lambda$  é  $\ell$ -peso máximo de  $V_q(\omega_{1,3}) \otimes V_q(\lambda')$ , temos que  $V_q(\lambda)$  é um subquociente deste produto e

$$qch(\omega_{1,3})_{\leq 1} qch(\lambda')_{\leq 1} = \omega_{1,3} qch(\lambda')_{\leq 1}.$$

Logo temos  $\mu = \omega_{1,3}\mu'$  para algum  $\mu' \in \text{wt}_\ell(qch(\lambda')_{\leq 1})$ . Pela Proposição 4.3.5,  $qch(\lambda')_{\leq 1}$  pode ser calculado através de  $\varphi_{I'}(\lambda')_{\leq 1}$  e, por indução em  $n$ , assumimos que

$$\varphi_{I'}(\lambda')_{\leq 1} = \lambda' \sum_{\nu \in \mathcal{S}'} \prod_{i \in I'} \alpha_{i,\xi_i}^{\nu_i},$$

onde  $\mathcal{S}'$  é definido como  $\mathcal{S}$  substituindo  $I$  por  $I'$ . Pela Proposição 4.3.5, se  $[qch(\lambda')_{\leq 1} : \nu] \neq [\varphi_{I'}(\lambda')_{\leq 1} : \nu]$  para algum  $\nu \in \mathcal{P}$ , então  $\nu = \mu_p \alpha_{1,1}^{-r}$  para algum  $p$  e  $1 \leq r \leq \mu_{2,p}$  e, então, o expoente  $\nu_i$  de  $\alpha_{i,\xi_i}^{-1}$  em  $\mu\lambda^{-1}$  satisfaz a condição do conjunto  $\mathcal{S}$  para todo  $i \in I'$ . Resta mostrar que  $\nu_1 = 0$ . Para isto, usamos o fato que  $qch(\lambda) \leq qch(\omega_{1,3}\omega_{2,0})qch(\lambda'\omega_{2,0}^{-1})$ . Agora, pela Proposição 4.3.5 e pelo Exemplo 4.2.3 (com os vértices 1 e 2 de  $A_2$  trocados), temos

$$qch(\omega_{1,3}\omega_{2,0})_{\leq 1} = \omega_{1,3}\omega_{2,0} \left( 1 + \alpha_{2,0}^{-1} \prod_{j \neq 1: c_{j2} = -1} (1 + \alpha_{j,1}^{-1}) \right).$$

Portanto,  $\alpha_{1,1}^{-1} \nmid \omega_{1,3}^{-1}\omega_{2,0}^{-1}\varpi$  para todo  $\varpi \in \text{wt}_\ell(qch(\omega_{1,3}\omega_{2,0})_{\leq 1})$ . Além disso, é claro que  $\alpha_{1,1}^{-1} \nmid \lambda'^{-1}\omega_{2,0}\varpi$  para todo  $\varpi \in \text{wt}_\ell(qch(\lambda'\omega_{2,0}^{-1})_{\leq 1})$ .

- (b) Se  $1 \in I_0$  então  $2 \in I_1$  e  $\nu_2 \leq 1$ . Assuma que o vértice 3 é adjacente a 2 e, conseqüentemente,  $\lambda = \omega_{1,0}\omega_{2,3}\omega_{3,0}\cdots$ . Definindo  $\lambda' = \lambda\omega_{1,0}^{-1}$ , temos  $\mu = \varpi\mu'$  onde  $\varpi \in \text{wt}_\ell(qch(\omega_{1,0})_{\leq 1})$



e  $\mu' \in \text{wt}_\ell(q\text{ch}(\lambda')_{\leq 1})$ . Pela Proposição 4.3.5,  $\varpi \in \{\omega_{1,0}, \omega_{1,0}\alpha_{1,0}^{-1}, \omega_{1,0}\alpha_{1,0}^{-1}\alpha_{2,1}^{-1}\}$ . Por outro lado, novamente pela Proposição 4.3.5,

$$q\text{ch}(\lambda')_{\leq 1} = \varphi_{I'}(\lambda')_{\leq 1},$$

neste caso, conhecido por indução. Se  $\varpi \neq \omega_{1,0}\alpha_{1,0}^{-1}\alpha_{2,1}^{-1}$  vemos que o expoente  $\nu_i$  de  $\alpha_{i,\xi_i}^{-1}$  em  $\lambda^{-1}\mu$  satisfaz as condições do conjunto  $\mathcal{S}$  para todo  $i \in I$ . Se  $\varpi = \omega_{1,0}\alpha_{1,0}^{-1}\alpha_{2,1}^{-1}$ , a condição falha se  $\alpha_{3,0}^{-1} \nmid \mu'(\lambda')^{-1}$ , ou seja,  $\nu_3 = 0$ , pois teríamos  $\nu_2 = 0$ , contradizendo  $\alpha_{2,1}^{-1} \mid \varpi\mu'\lambda^{-1}$ . Mas neste caso,  $\varpi\mu'$  não pode pertencer a  $\text{wt}_\ell(q\text{ch}(\lambda)_{\leq 1})$ . De fato, provemos que se  $\alpha_{2,1}^{-1} \mid \varpi\mu'\lambda^{-1}$  então  $\alpha_{3,0}^{-1} \mid \varpi\mu'\lambda^{-1}$ . Temos a desigualdade

$$q\text{ch}(\lambda)_{\leq 1} \leq q\text{ch}(\omega_{1,0}\omega_{2,3}\omega_{3,0})_{\leq 1} q\text{ch}(\mu'\omega_{2,3}^{-1}\omega_{3,0}^{-1})_{\leq 1}.$$

Para tipo  $A_3$ , novamente pelo Exemplo 4.2.3 e pela Proposição 4.3.5, temos

$$q\text{ch}(\omega_{2,3}\omega_{3,0})_{\leq 2} = \omega_{2,3}\omega_{3,0}(1 + \alpha_{3,0}^{-1}), \quad q\text{ch}(\omega_{1,0}\omega_{2,3})_{\leq 1} = \omega_{1,0}\omega_{2,3}(1 + \alpha_{1,0}^{-1}).$$

Assim, obtemos as desigualdades

$$q\text{ch}(\omega_{1,0}\omega_{2,3}\omega_{3,0})_{\leq 1} \leq q\text{ch}(\omega_{1,0})_{\leq 1} q\text{ch}(\omega_{2,3}\omega_{3,0})_{\leq 1} \quad \text{e}$$

$$q\text{ch}(\omega_{1,0}\omega_{2,3}\omega_{3,0})_{\leq 1} \leq q\text{ch}(\omega_{1,0}\omega_{2,3})_{\leq 1} q\text{ch}(\omega_{3,0})_{\leq 1}.$$

Como consequência, segue que

$$q\text{ch}(\omega_{1,0}\omega_{2,3}\omega_{3,0})_{\leq 1} \leq \omega_{1,0}\omega_{2,3}\omega_{3,0}(1 + \alpha_{1,0}^{-1} + \alpha_{3,0}^{-1} + \alpha_{1,0}^{-1}\alpha_{3,0}^{-1}(1 + \alpha_{2,1}^{-1})) \quad (4.3.3)$$

e, portanto, a proposição é verdadeira quando  $J = I$ . Por fim, o caso geral segue do caso  $I = J$ . De fato, podemos assumir  $\varphi_J(\lambda) = q\text{ch}(\pi_J(\lambda))$  e, pelo caso provado acima, a proposição 4.3.5 assegura o resultado para  $q\text{ch}(\lambda)_{\leq 1}$ .

□

**Corolário 4.3.7** *Se  $\beta \in \Phi_+$ , então  $q\text{ch}(\pi_\beta) = \text{FM}(\pi_\beta)$ .*

**Demonstração:** Seja  $\lambda := \pi_\beta$ . Pelo Corolário 4.2.5, basta mostrar que  $q\text{ch}(\lambda)_{\leq 1} \leq \text{FM}(\lambda)$ . Observe que a proposição anterior nos dá  $q\text{ch}(\lambda)_{\leq 1}$  explicitamente e que  $[q\text{ch}(\lambda)_{\leq 1} : \mu] \leq 1$  para todo  $\mu \in \mathcal{P}$ . Assim, basta mostrar que  $\mu \in \text{wt}_\ell(\text{FM}(\lambda))$  para todo  $\mu \in \text{wt}_\ell(q\text{ch}(\lambda)_{\leq 1})$ . Procedendo como na demonstração da proposição anterior, vemos que basta fazer isso no caso  $A_3$  para  $\lambda = \omega_{1,0}\omega_{2,3}\omega_{3,0}$ . Neste caso, pela equação ((4.3.3)), basta provar que

$$\lambda\alpha_{1,0}^{-1}, \lambda\alpha_{3,0}^{-1}, \lambda\alpha_{1,0}^{-1}\alpha_{3,0}^{-1}, \lambda\alpha_{1,0}^{-1}\alpha_{3,0}^{-1}\alpha_{2,1}^{-1} \in \text{wt}_\ell(\text{FM}(\lambda)).$$

Observe que  $\varphi_j(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}(1 + \boldsymbol{\alpha}_{j,0}^{-1})$  para  $j = 1, 3$ , e que  $\varphi_3(\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_{1,0}^{-1}) = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_{1,0}^{-1}(1 + \boldsymbol{\alpha}_{3,0}^{-1})$ . Segue que  $\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_{1,0}^{-1}, \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_{3,0}^{-1}, \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_{1,0}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{3,0}^{-1} \in \text{wt}_\ell(\text{FM}(\boldsymbol{\lambda}))$ .

Para simplificar a notação, escreva  $\boldsymbol{\varpi} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}_{1,0}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{3,0}^{-1}$ . Afirmamos que  $\boldsymbol{\varpi}\boldsymbol{\alpha}_{2,1}^{-1} \in \text{wt}_\ell(\varphi_2(\boldsymbol{\varpi}))$ , o que completa a demonstração. De fato,  $\pi_2(\boldsymbol{\varpi}) = \boldsymbol{\omega}_{2,1}^2\boldsymbol{\omega}_{2,3}$  e, assim,

$$\varphi_2(\boldsymbol{\varpi})\boldsymbol{\varpi}^{-1} = \varphi_2(\boldsymbol{\omega}_{2,1}^2\boldsymbol{\omega}_{2,3})(\boldsymbol{\omega}_{2,1}^2\boldsymbol{\omega}_{2,3})^{-1}.$$

Logo, resta mostrar que  $\boldsymbol{\omega}_{2,1}^2\boldsymbol{\omega}_{2,3}\boldsymbol{\alpha}_{2,1}^{-1}$  é um  $\ell$ -peso do  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_2)$ -módulo  $V_q(\pi_2(\boldsymbol{\omega}_{2,1}^2\boldsymbol{\omega}_{2,3}))$ . Isto segue facilmente da fórmula para o  $q$ -caracter de  $V_q(\pi_2(\boldsymbol{\omega}_{2,1}))$  dado pela Proposição 3.5.8 e do isomorfismo de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_2)$ -módulos

$$V_q(\pi_2(\boldsymbol{\omega}_{2,1}^2\boldsymbol{\omega}_{2,3})) \cong V_q(\pi_2(\boldsymbol{\omega}_{2,1})) \otimes V_q(\pi_2(\boldsymbol{\omega}_{2,1}\boldsymbol{\omega}_{2,3}))$$

dado pelo Teorema 3.5.9. □

**Exemplo 4.3.8** *Sejam  $\mathfrak{g}$  do tipo  $A_3$  e  $I_0 = \{1, 3\}$ . Os  $q$ -caracteres truncados dos módulos  $S(\alpha)$ ,  $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$  são*

$$\begin{aligned} q\text{ch}(S(-\alpha_1))_{\leq 1} &= \boldsymbol{\omega}_{1,2}, & q\text{ch}(S(\alpha_1))_{\leq 1} &= \boldsymbol{\omega}_{1,0}(1 + \boldsymbol{\alpha}_{1,0}^{-1} + \boldsymbol{\alpha}_{1,0}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{2,1}^{-1}), \\ q\text{ch}(S(-\alpha_2))_{\leq 1} &= \boldsymbol{\omega}_{2,1}(1 + \boldsymbol{\alpha}_{2,1}^{-1}), & q\text{ch}(S(\alpha_2))_{\leq 1} &= \boldsymbol{\omega}_{2,3}, \\ q\text{ch}(S(-\alpha_3))_{\leq 1} &= \boldsymbol{\omega}_{3,1}, & q\text{ch}(S(\alpha_3))_{\leq 1} &= \boldsymbol{\omega}_{3,0}(1 + \boldsymbol{\alpha}_{3,0}^{-1} + \boldsymbol{\alpha}_{3,0}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{2,1}^{-1}), \\ \\ q\text{ch}(S(\alpha_1 + \alpha_2))_{\leq 1} &= \boldsymbol{\omega}_{1,0}\boldsymbol{\omega}_{2,3}(1 + \boldsymbol{\alpha}_{1,0}^{-1}), \\ q\text{ch}(S(\alpha_2 + \alpha_3))_{\leq 1} &= \boldsymbol{\omega}_{2,3}\boldsymbol{\omega}_{3,0}(1 + \boldsymbol{\alpha}_{3,0}^{-1}), \\ q\text{ch}(S(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3))_{\leq 1} &= \boldsymbol{\omega}_{1,0}\boldsymbol{\omega}_{2,3}\boldsymbol{\omega}_{3,0}(1 + \boldsymbol{\alpha}_{1,0}^{-1} + \boldsymbol{\alpha}_{3,0}^{-1} + \boldsymbol{\alpha}_{1,0}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{3,0}^{-1} + \boldsymbol{\alpha}_{1,0}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{2,1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{3,0}^{-1}). \end{aligned}$$

*De fato, para  $S(-\alpha_i), S(\alpha_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , o  $q$ -caracter truncado é dado pelo Exemplo 4.2.4. Já os  $q$ -caracteres truncados de  $S(\alpha_1 + \alpha_2)$  e  $S(\alpha_2 + \alpha_3)$  são dados pelo Exemplo 4.2.3. Por fim, observe que, pelo Teorema 3.4.3,  $S(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$  é uma afinização minimal e, portanto, pelo Teorema 3.6.6, é minúsculo. Assim seu  $q$ -caracter é dado pelo algoritmo de Frenkel-Mukhin e, pela demonstração do corolário anterior, segue sua expressão.*

**Corolário 4.3.9** *Então  $S(\alpha)$  é um objeto primo de  $\mathcal{C}_1$  para todo  $\alpha \in \Phi_+$ .*

**Demonstração:** Seja

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\pi}_{\alpha_J} = \prod_{i \in J \cap I_0} \boldsymbol{\omega}_{i,0} \prod_{i \in J \cap I_1} \boldsymbol{\omega}_{i,3}$$

e suponha que  $S(\alpha_J)$  não seja primo. Então

$$S(\alpha_J) \cong V_q(\boldsymbol{\lambda}_1) \otimes \cdots \otimes V_q(\boldsymbol{\lambda}_n),$$

para algum  $\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_n \in \mathcal{P}^+$  tal que  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_1 \dots \boldsymbol{\lambda}_n$ . Observe que deve existir  $i \in J \cap I_0$  e  $j \in J \cap I_1$  com  $c_{ij} = -1$  tal que  $\boldsymbol{\lambda}_r = \boldsymbol{\omega}_{i,0} \boldsymbol{\mu}_r$  e  $\boldsymbol{\lambda}_s = \boldsymbol{\omega}_{j,3} \boldsymbol{\mu}_s$  para algum  $\boldsymbol{\mu}_s, \boldsymbol{\mu}_r \in \mathcal{P}^+$  com  $1 \leq r, s \leq n$ , com  $r \neq s$ . Pela Proposição 4.3.5,  $\boldsymbol{\lambda}_r \boldsymbol{\alpha}_{i,0}^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{j,1}^{-1} \in \text{wt}_\ell(V_q(\boldsymbol{\lambda}_r))$  e, portanto,  $\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\alpha}_{i,0}^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{j,1}^{-1} \in \text{wt}_\ell(V_q(\boldsymbol{\lambda}_1) \otimes \dots \otimes V_q(\boldsymbol{\lambda}_n))$ . Por outro lado, segue da Proposição 4.3.6 que  $\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\alpha}_{i,0}^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{j,1}^{-1} \notin \text{wt}_\ell(S(\alpha_J))$  o que contradiz a hipótese. Portanto  $S(\alpha_J)$  é objeto primo de  $\mathcal{C}_1$ .  $\square$

## 4.4 $q$ -caracteres via $F$ -polinômios

A fim de provar o Teorema 4.3.1 será conveniente trabalhar com outra semente de  $\mathcal{A}$ . Considere a semente  $(\bar{\mathbf{z}}, \tilde{B}_{\mathbf{z}})$  obtida de  $(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{B})$  através da composição de mutações  $\prod_{k \in I_1} \mu_k$ . Desta forma, temos

$$z_i = \begin{cases} x[-\alpha_i] & \text{se } i \in I_0, \\ x[\alpha_i] & \text{se } i \in I_1, \\ f_i & \text{se } i \in I' \end{cases} \quad \text{e} \quad b_{ij}^{\mathbf{z}} = \begin{cases} \varepsilon_j c_{ij} & \text{se } i, j \in I \text{ e } i \neq j, \\ -1 & \text{se } j \in I \text{ e } i = j + n \in I', \\ -c_{kj} & \text{se } j \in I_0 \text{ e } i = k + n \in I' \text{ com } k \neq j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde  $C = (c_{ij})$  é a matriz de Cartan fixada no início do capítulo. A involução  $\tau_-$  definida em A.2.1 identifica naturalmente as variáveis de cluster de  $\mathbf{x}$  com as de  $\mathbf{z}$ . Escreveremos  $z[\alpha] = x[\tau_-(\alpha)]$ . Em particular, como  $\tau_-(-\alpha_i) = -\varepsilon_i \alpha_i$ , temos  $z_i = z[-\alpha_i]$  para todo  $i \in I$ .

Podemos usar a notação  $(\mathbf{z}, \mathbf{y}_{\mathbf{z}}, B_{\mathbf{z}})$  ao invés de  $(\bar{\mathbf{z}}, \tilde{B}_{\mathbf{z}})$ , onde  $B_{\mathbf{z}}$  é a parte principal de  $\tilde{B}_{\mathbf{z}}$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$  e  $\mathbf{y}_{\mathbf{z}} = (y_1, \dots, y_n)$  com  $y_j = \prod_{i \in I} f_i^{b_{i+n,j}^{\mathbf{z}}}$ . Tomando a álgebra de cluster com coeficientes principais  $\mathcal{A}_\bullet(\mathbf{z}, \mathbf{y}_{\mathbf{z}}, B_{\mathbf{z}})$ , pelo Teorema 1.3.2, temos

$$z[\alpha] = \frac{F_\alpha(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)}{F_\alpha|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)} \mathbf{z}^{g(\alpha)}, \quad (4.4.1)$$

onde  $\hat{y}_j = y_j \prod_{i \in I} z_i^{b_{ij}^{\mathbf{z}}}$ .

Observe que a mutação do cluster  $\mathbf{x}$  na direção  $i$  para a variável de cluster  $x[-\alpha_i]$  é dada por

$$x[\alpha_i] x[-\alpha_i] = f_i + \prod_{j: c_{ij} = -1} x[-\alpha_j].$$

Comparando esta equação com as equações dos  $T$ -sistemas (4.1.6) satisfeitas pelos módulos de Kirillov-Reshetikhin  $S(\alpha_i)$  e  $S(-\alpha_i)$ , o isomorfismo  $\iota : \mathcal{A} \rightarrow R_1$  nos dá

$$\iota(f_i) = [F_i], \quad i \in I.$$

Pela Proposição 4.2.2, podemos ver  $\iota$  como um isomorfismo de  $\mathcal{A}$  para o subanel de  $\mathbb{Z}[\mathcal{P}]$  gerado pelos  $q$ -caracteres truncados de  $\mathcal{C}_1$ . Então temos:

$$\iota(z_i) = \omega_{i,\xi_i+2}, \quad \iota(f_i) = \omega_{i,\xi_i+1,2}, \quad i \in I. \quad (4.4.2)$$

Lembre que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ , onde  $\mathcal{F}$  é corpo de funções racionais em  $2n$  variáveis. Assim, estendendo  $\iota$  para um homorfismo de  $\mathcal{F}$  para  $\mathbb{Q}[\mathcal{P}]$ , podemos considerar os elementos  $\iota(\hat{y}_j)$ .

**Lema 4.4.1** *Para todo  $j \in I$  temos*

$$\iota(\hat{y}_j) = \alpha_{j,\xi_j}^{-1}.$$

**Demonstração:** Se  $j \in I_1$ , temos

$$\iota(\hat{y}_j) = \iota(f_i)^{-1} \prod_{i \neq j} \iota(z_i)^{-c_{ij}} = \omega_{j,\xi_j+1,2}^{-1} \prod_{i \neq j} \omega_{i,\xi_i+2}^{-c_{ij}} = \alpha_{j,\xi_j},$$

considerando que  $\xi_i + 2 = \xi_j + 1$  se  $i \in I_0$  e  $j \in I_1$ . Por outro lado, se  $j \in I_0$ , temos

$$\iota(\hat{y}_j) = \iota(f_j)^{-1} \prod_{i \neq j} \iota\left(\frac{z_i}{f_i}\right)^{c_{ij}} = \omega_{j,\xi_j+1,2}^{-1} \prod_{i \neq j} \omega_{i,\xi_i+2}^{c_{ij}} \omega_{i,\xi_i+1,2}^{-c_{ij}} = \omega_{j,\xi_j+1,2}^{-1} \prod_{i \neq j} \omega_{i,\xi_i}^{-c_{ij}} = \alpha_{j,\xi_j}^{-1}$$

considerando que  $\xi_i = \xi_j + 1$  se  $j \in I_0$  e  $i \in I_1$ . □

**Lema 4.4.2** *Sejam  $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$  e  $\beta = \tau_-(\alpha)$ . Então*

$$\iota\left(\frac{\mathbf{z}^{g(\alpha)}}{F_\alpha|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)}\right) = \begin{cases} \pi_\beta & \text{se } \beta > 0, \\ \omega_{i,2-\xi_i} & \text{se } \beta = -\alpha_i. \end{cases}$$

**Demonstração:** Escreva  $\alpha = \sum_i a_i \alpha_i$  e  $\beta = \sum_i b_i \alpha_i$ . Se  $\alpha = -\alpha_i$  então  $F_\alpha = 1$ . Além disso,  $\beta = -\varepsilon_i \alpha_i$ ,  $g(\alpha) = \alpha_i$  e, portanto,

$$\iota\left(\frac{\mathbf{z}^{g(\alpha)}}{F_\alpha|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)}\right) = \iota(z_i) = \omega_{i,\xi_i+2}.$$

Por outro lado, se  $\alpha > 0$ , pela Proposição 1.3.3 o polinômio  $F_\alpha$  tem um único monômio de grau máximo da forma  $m = \prod_{i \in I} v_i^{\alpha_i}$  e termo constante 1. Avaliando  $m$  em  $v_i = y_i = \prod_{k \in I} f_k^{b_k^{\alpha_i}}$  temos

$$\prod_{i \in I} f_i^{-\alpha_i} \prod_{i \in I_1} f_i^{-\sum_{j \neq i} \alpha_j c_{ij}} = \prod_{i \in I_0} f_i^{-\alpha_i} \prod_{i \in I_1} f_i^{-\alpha_i - \sum_{j \neq i} \alpha_j c_{ij}} = \prod_{i \in I_0} f_i^{-b_i} \prod_{i \in I_1} f_i^{b_i}.$$

Se  $\beta > 0$  então  $b_i \geq 0$  para todo  $i \in I$  e então

$$F_\alpha|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i \in I_0} f_i^{-b_i}.$$

Caso contrário, se  $\beta = -\alpha_i$  com  $i \in I_0$  já foi resolvido no primeiro caso, pois temos  $\beta = \alpha$ . Se  $i \in I_1$ , temos  $F_\alpha|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n) = f_i^{-1}$ . Por outro lado, como  $g(\alpha) = U(\beta) = -\sum_{i \in I} b_i \varepsilon_i \alpha_i$ , se  $\beta > 0$  então

$$\iota \left( \frac{\mathbf{z}^{g(\alpha)}}{F_\alpha|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)} \right) = \prod_{i \in I_0} \iota(f_i)^{b_i} \prod_{i \in I_0} \iota(z_i)^{-b_i} \prod_{i \in I_1} \iota(z_i)^{b_i} = \prod_{i \in I_0} \omega_{i,0}^{b_i} \prod_{i \in I_1} \omega_{i,3}^{b_i}.$$

Se  $\beta = -\alpha_i$  onde  $i \in I_1$ , temos  $\iota \left( \frac{\mathbf{z}^{g(\alpha)}}{F_\alpha|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)} \right) = \iota(f_i) \iota(z_i)^{-1} = \omega_{i,1}$ . □

**Corolário 4.4.3** *Seja  $\beta \in \Phi_{\geq -1}$  e considere  $\alpha = \tau_-(\beta)$ . Então*

$$\iota(x[\beta]) = \pi_\beta F_\alpha(\alpha_{1,\xi_1}^{-1}, \dots, \alpha_{n,\xi_n}^{-1}).$$

**Demonstração:** Pela equação (4.4) temos

$$x[\beta] = z[\tau_-(\beta)] = z[\alpha] = \frac{\mathbf{z}^{g(\alpha)}}{F_\alpha|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)} F_\alpha(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n).$$

Portanto, o corolário segue dos Lemas 4.4.1 e 4.4.2. □

**Teorema 4.4.4** *Se  $\beta \in \Phi_+$ , então*

$$\pi_\beta^{-1} qch(S(\beta))_{\leq 1} = F_{\tau_-(\beta)}(\alpha_{1,\xi_1}^{-1}, \dots, \alpha_{n,\xi_n}^{-1}).$$

**Demonstração:** Suponha  $\beta = \alpha_i$ , com  $i \in I_1$ . Então  $qch(S(\beta))_{\leq 1} = \omega_{1,3}$ , e  $\tau_-(\beta) = -\alpha_i$ , donde  $F_{\tau_-(\beta)} = 1$  e, portanto, a afirmação é verdadeira. Suponha agora que  $\beta = \alpha_J$  com  $J \subseteq I$  conexo tal que  $J \neq \{i\}$  para algum  $i \in I_1$ . Defina

$$J' = \{j \in J : j \in I_1 \text{ e } c_{ij} = -1 \text{ para algum } i \in I \setminus J\},$$

$$K' = \{i \in I \setminus J : i \in I_1 \text{ e } c_{ij} = -1 \text{ para algum } j \in J\}$$

e  $K = (J \setminus J') \sqcup K'$ . Segue da definição de  $\tau_-$  que  $\alpha_K = \tau_-(\alpha_J)$ .

Compararemos as seqüências  $\nu \in \mathcal{S}$  da Proposição 4.3.6 para  $\alpha_J$ , com os vetores  $\alpha_K$ -aceitáveis,  $\gamma = \sum_{i \in I} c_i \alpha_i$ . Segue da definição dos conjuntos citados que, se  $i \notin K \cup J = K' \sqcup (J \setminus J') \sqcup J'$  então,  $\nu_i = c_i = 0$ . Para  $j \in J \cap I_0 = K \cap I_0$  a única condição satisfeita por  $\nu_j$  e  $c_j$  é que ambos pertencem a  $\{0, 1\}$ . Se  $j \in (J \setminus J') \cap I_1$ , então  $j$  tem vértices adjacentes  $j_1, j_2 \in J \cap I_0$  e a condição em  $\nu_j$  é  $0 \leq \nu_j \leq \max(0, \nu_{j_1} + \nu_{j_2} - 1)$ , enquanto a condição em  $c_j$  é  $0 \leq c_j \leq \min(c_{j_1}, c_{j_2}) = \max(0, c_{j_1} + c_{j_2} - 1)$  pois  $c_{j_1}, c_{j_2} \in \{0, 1\}$ . Se  $j \in K'$ , então  $j$  é adjacente a um único vértice  $j_1 \in J$ , e a condição em  $\nu_j$  é  $0 \leq \nu_j \leq \nu_{j_1}$ , enquanto a condição em  $c_j$  é  $0 \leq c_j \leq c_{j_1}$ . Por fim, se  $j \in J'$ , então  $j$  é adjacente a um único vértice  $j_1 \in J$  e a condição em  $\nu_j$  é  $0 \leq \nu_j \leq \max(0, -1 + \nu_{j_1})$  enquanto a condição em  $c_j$  é  $c_j = 0$ . Claramente a condição em  $\nu_j$  o força a ser 0. Portanto, os expoentes  $\nu$  e os vetores  $\gamma$  satisfazemos as mesmas condições, e o teorema segue das fórmulas explícitas de  $F_{\tau_-(\beta)}$  e  $qch(S(\beta))_{\leq 1}$  dadas, respectivamente, pelas Proposições 1.3.4 e 4.3.6.  $\square$

## 4.5 Demonstração do Teorema

Seja  $C = (c_{ij}), i, j \in I = \{1, \dots, n\}$ , matriz de Cartan do tipo  $A$ . Suponha que os vértices do diagrama de Dynkin associado a  $C$  estão indexados pelo intervalo  $I$  em ordem linear.

Dados  $i \leq j \in I$ , seja  $[i, j] = \{i, i+1, \dots, j\} \subseteq I$ . Se  $\alpha \in \Phi_+$  então  $\alpha = \alpha_{[i, j]}$  para algum  $i, j \in I$ . Assim, toda raiz positiva satisfaz as hipóteses do Teorema 4.4.4 e com as equações 4.4.2 o Teorema 4.3.1(i) está provado. Para a parte (ii) dado  $\gamma = \sum_{i \in I} c_i \alpha_i \in Q$  defina

$$\lambda^\gamma := \prod_{c_i < 0} \omega_{i, 2-\xi_i}^{|c_i|} \prod_{c_i > 0} \omega_{i, \xi_i - \varepsilon_i + 1}^{c_i} \in \mathcal{P}^+.$$

Observe que se  $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$  então  $\lambda^\alpha = \pi_\alpha$ . Seja  $\varpi = \prod_{i \in I} \omega_{i, \xi_i}^{a_i} \omega_{i, \xi_i + 2}^{b_i} \in \mathcal{P}_{(1)}^+$  com  $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Seja  $c_i = \min(a_i, b_i)$  para todo  $i \in I$  e considere  $\gamma \in Q$  dado por

$$[\gamma : \alpha_i] = \begin{cases} \varepsilon_i(a_i - c_i) & \text{se } a_i \geq b_i, \\ -\varepsilon_i(b_i - c_i) & \text{se } a_i < b_i, \end{cases},$$

e observe que

$$\varpi = \left( \prod_{i \in I} \omega_{i, \xi_i + 1, 2}^{\min(a_i, b_i)} \right) \lambda^\gamma.$$

Então, pelo Teorema 1.2.10, temos uma única expansão de cluster de  $\gamma$ , como na Definição 1.2.9, e obtemos

$$\varpi = \prod_{i \in I} \omega_{i, \xi_i + 1, 2}^{\min(a_i, b_i)} \prod_{\alpha \in \Phi_{\geq -1}} (\lambda^\alpha)^{n_\alpha}.$$

Suponha verdadeira a afirmação (i) do Teorema 4.3.1. Como  $S(\alpha) = V_q(\lambda^\alpha)$  e  $F_i = V_q(\omega_{i, \xi_i + 1, 2})$ , para provar a afirmação (ii) precisamos mostrar que

$$V_q(\varpi) \cong \left( \bigotimes_{i \in I} F_i^{\otimes \min(a_i, b_i)} \right) \otimes \left( \bigotimes_{\alpha \in \Phi_{\geq -1}} S(\alpha)^{\otimes n_\alpha} \right).$$

Dado que  $\varpi$  é  $\ell$ -peso máximo de ambos módulos, é suficiente provar que o produto tensorial acima é simples. Pelo Teorema 3.3.29, este módulo é simples se, e somente se, o produto tensorial de cada par de fatores for simples. Então a demonstração da parte (ii) se reduz a verificar que:

1.  $F_i \otimes S(\alpha)$  e  $F_i \otimes F_j$  são simples para todo  $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$  e  $i, j \in I$ ;
2. se  $\alpha, \beta \in \Phi_{\geq -1}$  são compatíveis, então  $S(\alpha) \otimes S(\beta)$  é simples;
3. para cada  $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$ ,  $S(\alpha)$  é primo.

Provemos estes três itens.

1. Segue do exemplo 4.2.4 que

$$qch(F_i \otimes F_j)_{\leq 1} = qch(\omega_{i, 1 + \xi_i, 2})_{\leq 1} qch(\omega_{j, 1 + \xi_j, 2})_{\leq 1} = \omega_{i, 1 + \xi_i, 2} \omega_{j, 1 + \xi_j, 2}$$

e portanto  $qch(F_i \otimes F_j) \cap \mathcal{P}^+ = \{\omega_{i, 1 + \xi_i, 2} \omega_{j, 1 + \xi_j, 2}\}$  o que implica que  $F_i \otimes F_j$  é simples pela Proposição 3.5.4. Para provar que  $F_i \otimes S(\alpha)$  é simples, pela demonstração da Proposição 4.2.2, é suficiente provar que  $qch(F_i \otimes S(\alpha))_{\leq 1} \leq qch(\omega_{i, 1 + \xi_i, 2} \pi_\alpha)_{\leq 1}$ . Usando o fato que  $qch(S(\alpha))$  é dado pelo algoritmo de Frenkel-Mukhin (veja Exemplo 4.2.4 e Corolário 4.3.7) e que  $S(\alpha) = V_q(\pi_\alpha)$ , temos

$$\text{FM}(\omega_{i, 1 + \xi_i, 2} \pi_\alpha)_{\leq 1} = \omega_{i, 1 + \xi_i, 2} \text{FM}(\pi_\alpha)_{\leq 1} = \omega_{i, 1 + \xi_i, 2} qch(\pi_\alpha)_{\leq 1}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} qch(F_i \otimes S(\alpha))_{\leq 1} &= qch(\omega_{i, 1 + \xi_i, 2})_{\leq 1} qch(\pi_\alpha)_{\leq 1} \\ &= \omega_{i, 1 + \xi_i, 2} qch(\pi_\alpha)_{\leq 1} \\ &= \text{FM}(\omega_{i, 1 + \xi_i, 2} \pi_\alpha)_{\leq 1} \\ &\leq qch(\omega_{i, 1 + \xi_i, 2} \pi_\alpha)_{\leq 1}. \end{aligned}$$

2. As raízes compatíveis no tipo  $A$  são descritas pelo modelo geométrico da Seção 2.2.2. Segue deste modelo que todos os pares de raízes compatíveis  $(\alpha, \beta)$  de  $\Phi_{\geq -1}$  são de uma das seguintes formas:

- (a)  $\alpha = -\alpha_i, \beta = -\alpha_j$ ;
- (b)  $\alpha = -\alpha_i, \beta \in \Phi_+$  com  $[\beta : \alpha_i] = 0$ ;
- (c)  $\alpha = \alpha_{[i,j]}, \beta = \alpha_{[k,l]}$  com  $k > j + 1$  (dois intervalos disjuntos);
- (d)  $\alpha = \alpha_{[i,j]}, \beta = \alpha_{[i,l]}$  ou  $\alpha = \alpha_{[i,k]}, \beta = \alpha_{[k,l]}$ ;
- (e)  $\alpha = \alpha_{[i,k]}, \beta = \alpha_{[j,l]}$  com  $i < j \leq k < l$  e  $k - j$  par;
- (f)  $\alpha = \alpha_{[i,l]}, \beta = \alpha_{[j,k]}$  com  $i < j < k < l$  e  $k - j$  ímpar;

Provemos que  $S(\alpha) \otimes S(\beta)$  é simples em todos estes casos.

- (a) Segue do Exemplo 4.1.4. De fato,  $S(-\alpha_i)$  e  $S(-\alpha_j)$  são módulos fundamentais em um shift da subcategoria  $\mathcal{C}_0$ .
- (b) Escreva  $\beta = \alpha_j$ . Observe que

$$\pi_\beta = \prod_{j \in J \cap I_0} \omega_{j,0} \prod_{j \in J \cap I_1} \omega_{j,3}$$

e que  $\lambda := \omega_{i,1+\xi_i} \pi_\beta$  é o  $l$ -peso máximo de  $S(-\alpha_i) \otimes S(\beta)$ . Além disso,

$$qch(S(-\alpha_i) \otimes S(\beta))_{\leq 1} = qch(\omega_{i,1+\xi_i})_{\leq 1} qch(S(\beta))_{\leq 1}.$$

que tem suas formas explicitas das pelo Exemplo 4.2.4 e Proposição 4.3.6. Como  $i \notin J$ , observe que

$$qch(\lambda)_{\leq 1} \leq qch(\omega_{i,1+\xi_i})_{\leq 1} qch(S(\beta))_{\leq 1} = \varphi_i(\omega_{i,1+\xi_i})_{\leq 1} FM(\pi_\beta)_{\leq 1} \leq FM(\lambda).$$

Logo, pelo Corolário 4.2.5, segue que  $FM(\lambda) = qch(\lambda)$  e, portanto,  $qch(\lambda) = qch(S(-\alpha_i) \otimes S(\beta))$  implicando que  $S(-\alpha_i) \otimes S(\beta)$  é simples.

- (c) É demonstrado usando-se os mesmos argumentos do item anterior.
- (d) Assuma que  $i \leq j \leq l$  e proceda por indução em  $s = l - i$ . Se  $s = 0$ , temos que verificar que  $S(\alpha_i) \otimes S(\alpha_i)$  é simples. Pela Observação 4.1.5 podemos escolher  $i \in I_1$  e então  $qch(S(\alpha_i))_{\leq 1} = \omega_{i,3}$  e portanto  $qch(S(\alpha_i) \otimes S(\alpha_i))_{\leq 1} = \omega_{i,3}^2$ . Logo  $qch(S(\alpha_i) \otimes S(\alpha_i)) \cap \mathcal{P}^+ = \{\omega_{i,3}^2\}$  e, portanto,  $S(\alpha_i) \otimes S(\alpha_i)$  é simples. Suponha que a afirmação vale quando  $l - i = s$ , e seja  $l - i = s + 1$ . Pela demonstração da Proposição 4.2.2, é suficiente provar que  $qch(S(\alpha) \otimes S(\beta))_{\leq 1} \leq qch(\pi_\alpha \pi_\beta)_{\leq 1}$ . Escolha



novamente  $i \in I_1$  e então, pela Proposição 4.3.6 temos que se  $\boldsymbol{\mu} \in \text{wt}_\ell(q\text{ch}(S(\gamma))_{\leq 1})$  então  $\boldsymbol{\alpha}_{k, \xi_k}^{-1} \uparrow \boldsymbol{\pi}_\gamma^{-1} \boldsymbol{\mu}$  para todo  $k \leq i$  e  $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$ . Além disso,

$$\varphi_{[i+1, j+1]}(\boldsymbol{\pi}_\alpha)_{\leq 1} = \boldsymbol{\pi}_\alpha \left( 1 + \sum_p \boldsymbol{\mu}_p \right)$$

para alguns  $\boldsymbol{\mu}_p \in (\mathcal{Q}_{(1)}^+)^{-1} \cap (\mathcal{Q}_{[i+1, j+1]}^+)^{-1}$ . Dessa forma, segue da Observação 3.6.2 e da Proposição 4.3.6 que

$$q\text{ch}(S(\alpha))_{\leq 1} = \varphi_{[i+1, j+1]}(\boldsymbol{\pi}_\alpha)_{\leq 1}.$$

Um raciocínio análogo nos dá

$$q\text{ch}(S(\beta))_{\leq 1} = \varphi_{[i+1, l+1]}(\boldsymbol{\pi}_\beta)_{\leq 1}.$$

Afirmamos que

$$\varphi_{[i+1, l+1]}(\boldsymbol{\pi}_\alpha \boldsymbol{\pi}_\beta)_{\leq 1} = \varphi_{[i+1, l+1]}(\boldsymbol{\pi}_\alpha)_{\leq 1} \varphi_{[i+1, l+1]}(\boldsymbol{\pi}_\beta)_{\leq 1}.$$

De fato, considere  $\boldsymbol{\lambda} := \boldsymbol{\pi}_\alpha \boldsymbol{\pi}_\beta$ ,  $K = [i+1, l+1]$  e lembre que

$$\varphi_K(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}(\pi_K(\boldsymbol{\lambda}))^{-1} q\text{ch}(V_q(\pi_K(\boldsymbol{\lambda}))),$$

onde  $V_q(\pi_K(\boldsymbol{\lambda}))$  é visto como  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_K)$ -módulo. Assim, usando a hipótese de indução, temos

$$q\text{ch}(V_q(\pi_K(\boldsymbol{\lambda}))) = q\text{ch}(V_q(\pi_K(\boldsymbol{\pi}_\alpha))) q\text{ch}(V_q(\pi_K(\boldsymbol{\pi}_\beta))),$$

e, portanto

$$\begin{aligned} \varphi_K(\boldsymbol{\lambda}) &= (\boldsymbol{\pi}_\alpha(\pi_K(\boldsymbol{\pi}_\alpha))^{-1} q\text{ch}(V_q(\pi_K(\boldsymbol{\pi}_\alpha)))) (\boldsymbol{\pi}_\beta(\pi_K(\boldsymbol{\pi}_\beta))^{-1} q\text{ch}(V_q(\pi_K(\boldsymbol{\pi}_\beta)))) \\ &= \varphi_K(\boldsymbol{\pi}_\alpha) \varphi_K(\boldsymbol{\pi}_\beta). \end{aligned}$$

Logo, segue da Observação 3.6.2 que

$$q\text{ch}(S(\alpha) \otimes S(\beta))_{\leq 1} = \varphi_{[i+1, l+1]}(\boldsymbol{\pi}_\alpha \boldsymbol{\pi}_\beta)_{\leq 1} \leq q\text{ch}(\boldsymbol{\pi}_\alpha \boldsymbol{\pi}_\beta)_{\leq 1}.$$

Isto mostra que  $S(\alpha) \otimes S(\beta) \cong V_q(\boldsymbol{\pi}_\alpha \boldsymbol{\pi}_\beta)$  é simples. O outro caso é análogo.

(e)(f) Seja  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\pi}_{\alpha_{[i, k]}} \boldsymbol{\pi}_{\alpha_{[j, l]}} = \boldsymbol{\pi}_{\alpha_{[i, l]}} \boldsymbol{\pi}_{\alpha_{[j, k]}}$ . Novamente usando a demonstração da Proposição 4.2.2, basta provar que

$$q\text{ch}(\boldsymbol{\lambda})_{\leq 1} = \boldsymbol{\psi} := \begin{cases} q\text{ch}(\boldsymbol{\pi}_{\alpha_{[i, k]}})_{\leq 1} q\text{ch}(\boldsymbol{\pi}_{\alpha_{[j, l]}})_{\leq 1} & \text{se } k - j \text{ é ímpar} \\ q\text{ch}(\boldsymbol{\pi}_{\alpha_{[i, l]}})_{\leq 1} q\text{ch}(\boldsymbol{\pi}_{\alpha_{[j, k]}})_{\leq 1} & \text{se } k - j \text{ é par.} \end{cases} \quad (4.5.1)$$

Para isto, é suficiente provar que para todo  $\mu \in \mathcal{P}$  tal que  $[\psi : \mu] \neq 0$  então  $[\psi : \mu] = [qch(\lambda)_{\leq 1} : \mu]$ . Procederemos por indução em  $l - i \geq 2$ . Para  $l - i = 2$  estamos necessariamente no caso **(e)** com  $j = k = i + 1 = l - 1$ . Novamente pela Observação 4.1.5 escolha  $i \in I_1$ , e então  $l \in I_1$ . Pela Proposição 4.3.5, temos

$$qch(\pi_{\alpha_{[i,k]}})_{\leq 1} = \varphi_{[i,l]}(\pi_{\alpha_{[i,k]}})_{\leq 1}, \quad qch(\pi_{\alpha_{[j,l]}})_{\leq 1} = \varphi_{[i,l]}(\pi_{\alpha_{[i,k]}})_{\leq 1}.$$

Assuma, por simplicidade, que  $I = [i, l] = [1, 3]$  e então

$$\psi = qch(\pi_{\alpha_{[1,2]}})_{\leq 1} qch(\pi_{\alpha_{[2,3]}})_{\leq 1} = \lambda(1 + \alpha_{2,0}^{-1} + \alpha_{2,0}^{-1}\alpha_{3,1}^{-1})(1 + \alpha_{2,0}^{-1} + \alpha_{1,1}^{-1}\alpha_{2,0}^{-1}).$$

Além disso, do item **(d)** segue a igualdade

$$\varphi_{[2,3]}(\pi_{\alpha_{[1,2]}})_{\leq 1} \varphi_{[2,3]}(\pi_{\alpha_{[2,3]}})_{\leq 1} = \varphi_{[2,3]}(\lambda)_{\leq 1} \leq qch(\lambda)_{\leq 1}.$$

Se  $\mu \in \mathcal{P} \cap \text{wt}_\ell(\psi)$  é tal que  $\alpha_{1,1}^{-1} \nmid \lambda^{-1}\mu$  então  $\mu \in \text{wt}_\ell(\varphi_{[2,3]}(\mu)_{\leq 2})$ . Pela mesma razão, se  $\alpha_{3,1}^{-1} \nmid \mu$  então  $\mu \in \text{wt}_\ell(qch(\lambda))$ . Se  $\mu \in \text{wt}_\ell(\psi)$  é tal que  $\alpha_{1,1}^{-1} \mid \mu$  e  $\alpha_{3,1}^{-1} \mid \mu$  então  $\mu = \lambda \alpha_{1,1}^{-1} \alpha_{2,0}^{-2} \alpha_{3,1}^{-1}$ . Agora, defina  $\lambda' := \lambda \alpha_{2,0}^{-2} \alpha_{3,1}^{-1} = \omega_{1,1}^2 \omega_{1,3} \omega_{2,2}^{-1} \omega_{3,1}$  e observe que  $\lambda' \in \text{wt}_\ell(qch(\lambda)) \cap \mathcal{P}_{1,+}$ . Assim,  $\varphi_1(\lambda') = \lambda' + \mu$  e, portanto, pela Lema 3.6.7,  $[qch(\lambda) : \mu] = [\varphi_1(\lambda') : \mu] = 1$ . Logo, isso prova a equação (4.5.1) quando  $l - i = 2$ . Assuma que a equação (4.5.1) vale quando  $l - i = s$ . Suponha  $l - i = s + 1$  e escolha  $i \in I_1$ . Usando a Proposição 4.3.5, podemos assumir sem perda de generalidade que  $I = [i, l] = [i, s + 1]$ . Com os mesmos argumentos do caso  $l - i = 2$  e usando ou **(c)** ou **(d)** ou a hipótese de indução, vemos que se  $\mu \in \text{wt}_\ell(\psi)$  e  $\alpha_{1,\xi_1}^{-1} \cdots \alpha_{s+1,\xi_{s+1}}^{-1} \nmid \lambda^{-1}\mu$  então  $[\psi : \mu] = [qch(\lambda) : \mu]$ . Assim, basta considerar  $\mu \in \text{wt}_\ell(\psi)$  tal que  $\mu = \lambda \alpha_{1,\xi_1}^{-c_1} \cdots \alpha_{s+1,\xi_{s+1}}^{-c_{s+1}}$  com  $c_k > 0$  para todo  $k \in I$ . Pela Proposição 4.3.6 podemos verificar que existe  $k$  com  $c_k = 2$  e o menor  $k$  com essa propriedade, digamos  $k_m$ , pertence a  $I_0$ . Seja  $\mu' := \alpha_{k_m-1,\xi_{k_m-1}} \mu$  e, novamente pela Proposição 4.3.6, temos que  $\mu' \in \text{wt}_\ell(\psi)$  e, pelo dito acima,  $[\psi : \mu'] = [qch(\lambda) : \mu']$ . Além disso,  $\mu'$  é  $k_m - 1$ - $\ell$ -dominante e  $\varphi_{k_m-1}(\mu') = \mu' + \mu$  e, pelo Lema 3.6.7, temos  $[\psi : \mu] = [qch(\lambda) : \mu]$ .

### 3. Segue do Corolário 4.3.9

**Exemplo 4.5.1** *Continuando o Exemplo 4.3.8 temos que, pelo Corolário 4.3.2, para  $\mathfrak{g}$  do tipo  $A_3$  a categoria  $\mathcal{C}_1$  tem 12 objetos primos:*

$$S(-\alpha_1), S(-\alpha_2), S(-\alpha_3), S(\alpha_1), S(\alpha_2), S(\alpha_3), \\ S(\alpha_1 + \alpha_2), S(\alpha_2 + \alpha_3), S(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), F_1, F_2, F_3.$$

Os primeiros 6 módulos são fundamentais,  $F_1, F_2, F_3$  são módulos de Kirillov-Reshetikhin,  $S(\alpha_1 + \alpha_2), S(\alpha_2 + \alpha_3)$  são afinizações minimais, mas  $S(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$  não é afinização minimal. Vista como  $U_q(\mathfrak{g})$ -módulo é isomorfa a  $V(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \oplus V(\omega_2)$ .

Usando as dimensões conhecidas dos módulos fundamentais e as equações do Exemplo 1.4.5, podemos calcular suas dimensões, a saber (na mesma ordem):

$$4, 6, 4, 4, 6, 4, 20, 20, 70, 10, 20, 10.$$

A álgebra de cluster  $\mathcal{A}$  tem 14 clusters, com suas variáveis de cluster  $x[\beta]$  identificadas apenas por  $\beta$ :

$$\begin{aligned} & \{-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3\}, \{\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3\}, \{-\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3\}, \{-\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3\}, \\ & \{-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3\}, \{-\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3\}, \{-\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}, \{-\alpha_3, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2\}, \\ & \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}, \\ & \{\alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}, \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}. \end{aligned}$$

A lista acima foi obtida considerando todas as possíveis triangulações do hexágono e aplicando-se a bijeção entre o sistema de raízes quase positivas e as variáveis de cluster de  $\mathcal{A}_C$ . Os objetos simples de  $\mathcal{C}_1$  são, exatamente, todos os produtos tensoriais da forma

$$S(\beta_1)^{\otimes k_1} \otimes S(\beta_2)^{\otimes k_2} \otimes S(\beta_3)^{\otimes k_3} \otimes F_1^{\otimes l_1} \otimes F_2^{\otimes l_2} \otimes F_3^{\otimes l_3}, \quad k_i, l_j \in \mathbb{N}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

onde  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  percorrem os 14 clusters citados acima.

# Apêndice A

## Apêndice

### A.1 Categorias e Funtores

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições e propriedades, sem demonstrações, sobre a teoria de categorias. Os fatos aqui expostos e suas demonstrações podem ser encontrados em [1].

**Definição A.1.1** *Uma categoria  $\mathcal{C}$  consiste em:*

- (i) *uma classe  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  cujos elementos são chamados objetos de  $\mathcal{C}$ ;*
- (ii) *uma classe  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  para cada par de objetos  $X, Y \in \mathcal{C}$ , cujos elementos são chamados morfismos e são denotados por  $\phi : X \rightarrow Y$ ;*
- (iii) *uma função*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

*para cada tripla de objetos  $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  que associa o par  $\phi : X \rightarrow Y, \psi : Y \rightarrow Z$  a um morfismo de  $X$  a  $Z$  denotado por  $\psi \circ \phi$  ou  $\psi\phi$ .*

*As seguintes condições devem ser satisfeitas por estes dados*

- a.** *para cada objeto  $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  existe um morfismo identidade*

$$\text{id}_X : X \rightarrow X$$

tal que

$$\phi \circ \text{id}_X = \phi \text{ e } \text{id}_X \circ \psi = \psi$$

se  $\phi : X \rightarrow Y$  e  $\psi : Y \rightarrow X$

b. a composição de morfismos é associativa, isto é, para  $\phi : X \rightarrow Y$ ,  $\psi : Y \rightarrow Z$  e  $\xi : Z \rightarrow U$ , temos

$$(\xi\psi)\phi = \xi(\psi\phi).$$

Vamos denotar  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  por  $\text{Hom}(X, Y)$  quando estiver claro no contexto de qual categoria se trata. Denotamos  $\text{Mor}(\mathcal{C}) = \bigcup_{X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})} \text{Hom}(X, Y)$ .

Listaremos alguns dos vários exemplos de categorias.

**Exemplo A.1.2** (i) A classe dos espaços vetoriais, onde os morfismos são as transformações lineares formam uma categoria;

(ii) Dada uma álgebra associativa de dimensão finita  $A$ , a classe dos  $A$ -módulos à esquerda de dimensão finita formam os objetos de uma categoria onde os morfismos são os homomorfismos de módulos à esquerda. Tal categoria será denotada por  $\text{mod-}A$ .

Vale lembrar que uma categoria é definida pela classe de objetos e classe de morfismos. Podemos ter categorias que tem a mesma classe de objetos porém com morfismos diferentes. Serão categorias distintas.

**Definição A.1.3** Sejam  $X$  e  $Y$  objetos de uma categoria  $\mathcal{C}$ . Um morfismo  $h : X \rightarrow X$  em  $\mathcal{C}$  é chamado de endomorfismo de  $X$ .

Um morfismo  $u : X \rightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$  é um monomorfismo se para cada objeto  $Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  e cada par de morfismos  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$  tivermos  $u \circ f = u \circ g$  somente se  $f = g$ .

Um morfismo  $p : X \rightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$  é um epimorfismo se para cada objeto  $Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  e cada par de morfismos  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  tivermos  $f \circ p = g \circ p$  somente se  $f = g$ .

Um morfismo  $u : X \rightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$  é um isomorfismo se existe um morfismo  $v : Y \rightarrow X$  em  $\mathcal{C}$  tal que  $uv = \text{id}_Y$  e  $vu = \text{id}_X$ . Neste caso o morfismo  $v$  é unicamente determinado por  $u$ , chamado de inverso de  $u$  e denotado por  $u^{-1}$ .

**Definição A.1.4** Sejam  $\mathcal{C}$  uma categoria,  $X_1, X_2 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ . Um objeto  $Y$  com duas funções

$$i_1 : X_1 \longrightarrow Y \quad \text{e} \quad i_2 : X_2 \longrightarrow Y$$

é dito coproduto ou soma direta de  $X_1$  e  $X_2$  se vale a seguinte propriedade:

para cada objeto  $Z$  e quaisquer dois morfismos  $g_1 : X_1 \rightarrow Z$  e  $g_2 : X_2 \rightarrow Z$ , existe único morfismo  $f : Y \rightarrow Z$  tal que

$$g_1 = f \circ i_1 \quad e \quad g_2 = f \circ i_2,$$

isto é, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ i_1 \nearrow & \downarrow f & \nwarrow i_2 \\ X_1 & \xrightarrow{g_1} Z \xleftarrow{g_2} & X_2 \end{array}$$

Este coproduto é único a menos de isomorfismo e denotamos por

$$Y = X_1 \oplus X_2.$$

**Definição A.1.5** Uma categoria  $\mathcal{C}$  é uma categoria aditiva se:

- (i) para qualquer conjunto finito de objetos  $X_1, \dots, X_n$  de  $\mathcal{C}$  existe uma soma direta  $X_1 \oplus \dots \oplus X_n \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ;
- (ii) para qualquer par  $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , o conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  está munido com uma estrutura de grupo abeliano (sua operação será denotada pelo símbolo “+” e seu elemento neutro por “0”);
- (iii) para qualquer tripla de objetos  $X, Y, Z$  de  $\mathcal{C}$ , a composição de morfismos em  $\mathcal{C}$

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

distribui sobre a soma, isto é,  $(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$  e  $f \circ (g + g') = f \circ g + f \circ g'$ , para todo  $f, f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  e  $g, g' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ;

- (iv) existe um objeto  $0 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  tal que o morfismo identidade  $\text{id}_0$  é o elemento zero do grupo abeliano  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0)$ .

**Observação A.1.6** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria aditiva e  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  um conjunto, então  $(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X), +, \circ)$  é um anel com  $1 = \text{id}_X$ . Além disso,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0) = \{\text{id}_0\}$ .

**Definição A.1.7** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria aditiva e  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo em  $\mathcal{C}$ . Um núcleo de  $f$  é um objeto  $\ker f$  junto com um morfismo  $u : \ker f \rightarrow X$  satisfazendo as seguintes condições:

- (i)  $f \circ u = 0$ ;
- (ii) para qualquer objeto  $Z$  de  $\mathcal{C}$  e qualquer morfismo  $h : Z \rightarrow X$  em  $\mathcal{C}$  tal que  $f \circ h = 0$ , existe um único morfismo  $h' : Z \rightarrow \ker f$  tal que  $h = u \circ h'$ .

Um conúcleo de  $f$  é um objeto  $\operatorname{coker} f$  junto com um morfismo  $p : Y \rightarrow \operatorname{coker} f$  satisfazendo as seguintes condições:

- (i)  $p \circ f = 0$ ;
- (ii) para qualquer objeto  $Z$  de  $\mathcal{C}$  e qualquer morfismo  $g : Y \rightarrow Z$  em  $\mathcal{C}$  tal que  $g \circ f = 0$ , existe um único morfismo  $g' : \operatorname{coker} f \rightarrow Z$  tal que  $g = g' \circ p$ .

Observe que nas notações acima  $u$  é monomorfismo e  $p$  epimorfismo.

Assuma que todo morfismo em  $\mathcal{C}$  admite núcleo e conúcleo. Então para cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$ , existe um único morfismo  $\bar{f}$  em  $\mathcal{C}$  que faz comutar o quadrado do diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc} \ker f & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{p} & \operatorname{coker} f \\ & & \downarrow p' & & \uparrow u' & & \\ & & \operatorname{coker} u & \xrightarrow{\bar{f}} & \ker p & & \end{array}$$

(ou seja,  $f = u' \circ \bar{f} \circ p'$ ), onde  $u' : \ker p \rightarrow Y$  é o núcleo de  $p$  e  $p' : X \rightarrow \operatorname{coker} u$  é o conúcleo de  $u$ . De fato, como  $p \circ f = 0$ , existe um único morfismo  $f' : X \rightarrow \ker p$  tal que  $f = u' \circ f'$ . Além disso, como  $u' \circ f' \circ u = f \circ u = 0$  e  $u'$  é um monomorfismo,  $f' \circ u = 0$  e então, pela definição de conúcleo, existe único morfismo  $\bar{f} : \operatorname{coker} u \rightarrow \ker p$  tal que  $f' = \bar{f} \circ p'$ . Consequentemente, o morfismo  $\bar{f}$  faz o quadrado acima comutar. O objeto  $\ker p$  é chamado de *imagem* de  $f$  e denotado por  $\operatorname{Im} f$ . Um objeto  $S \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$  é dito *simplex* se para todo objeto  $X$  e todo monomorfismo  $u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S)$ ,  $u$  é 0 ou é isomorfismo.

**Definição A.1.8** Uma categoria aditiva  $\mathcal{C}$  é dita abeliana se cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$  admite um núcleo  $u : \ker f \rightarrow X$  de  $f$ , um conúcleo  $p : Y \rightarrow \operatorname{coker} f$  de  $f$  e o morfismo induzido  $\bar{f} : \operatorname{coker} u \rightarrow \ker p$  é um isomorfismo.

**Definição A.1.9** Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e  $\mathcal{C}$  uma categoria.  $\mathcal{C}$  é dita  $\mathbb{K}$ -linear se  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial para todo  $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  e a composição de morfismos em  $\mathcal{C}$  é bilinear (em particular,  $\mathcal{C}$  é aditiva).

**Exemplo A.1.10** Seja  $A$  uma álgebra associativa sobre  $\mathbb{K}$ . A categoria das representações de dimensão finita de  $A$ , denotada por  $\text{mod-}A$ , é uma categoria  $\mathbb{K}$ -linear abeliana.

**Definição A.1.11** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  duas categorias. Um funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  consiste em

- (i) uma função entre  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  e  $\text{Obj}(\mathcal{D})$  que associa  $X$  a  $F(X)$ ;
- (ii) uma função entre  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  e  $\text{Mor}(\mathcal{D})$  que dado  $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$  associa  $F(\phi) \in \text{Hom}(F(X), F(Y))$  e satisfaz para quaisquer  $X, Y, Z \in \text{Obj} \mathcal{C}$ ,  $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$  e  $\psi \in \text{Hom}(Y, Z)$  :

$$F(\psi\phi) = F(\psi)F(\phi).$$

**Observação A.1.12** Se  $\mathcal{C}$  é uma categoria, podemos definir um funtor identidade  $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  por

$$\text{id}_{\mathcal{C}}(X) = X, \forall X \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \quad \text{e} \quad \text{id}_{\mathcal{C}}(\phi) = \phi, \forall \phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \forall X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C}).$$

Dadas duas categorias  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ , podemos construir uma nova categoria  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ , chamada de produto de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ . Os objetos de  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  são pares ordenados  $(X, Y)$  de objetos  $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  e  $Y \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ . Dados  $(X, Y)$  e  $(X', Y')$  objetos de  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ , um morfismo de  $(X, Y)$  para  $(X', Y')$  é um par  $(\phi, \psi)$  com  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$  e  $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$ . Além disso, a composição de dois morfismos

$$(X, Y) \xrightarrow{(\phi, \psi)} (X', Y) \xrightarrow{(\phi', \psi')} (X'', Y'')$$

é definida em termos das composições em  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  por

$$(\phi', \psi') \circ (\phi, \psi) = (\phi' \circ \phi, \psi' \circ \psi).$$

**Definição A.1.13** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  duas categorias aditivas e  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  um funtor. Diremos que  $T$  preserva somas diretas se, para quaisquer objetos  $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$ , os morfismos

$$T(X_1) \xrightarrow{T(i_1)} T(X_1 \oplus X_2) \xleftarrow{T(u_2)} T(X_2)$$

induzem um isomorfismo

$$T(X_1) \oplus T(X_2) \xrightarrow{\cong} T(X_1 \oplus X_2).$$



Diremos que  $T$  é aditivo se  $T$  preserva somas diretas e, para todo  $X, Y \in \mathcal{C}$  a função

$$\begin{aligned} T_{XY} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(T(X), T(Y)) \\ h &\longmapsto T(h) \end{aligned}$$

satisfaz  $T(f + g) = T(f) + T(g)$ , para todo  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .

Se  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  são categorias  $\mathbb{K}$ -lineares, então o funtor  $T$  é dito  $\mathbb{K}$ -linear se  $T$  é aditivo e  $T_{XY}$  é transformação  $\mathbb{K}$ -linear para todo  $X, Y \in \mathcal{C}$ .

**Definição A.1.14** Uma categoria  $\mathcal{C}$  é dita monoidal (ou tensorial) se existe

- (i) um funtor  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , chamado de produto tensorial;
- (ii) um objeto  $I \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  chamado de unidade;
- (iii) três isomorfismos

a) associatividade:

$$\alpha_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$$

para quaisquer  $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ;

b) identidade à esquerda:

$$\lambda_X : I \otimes X \rightarrow X, \text{ para todo } X \in \text{Obj}(\mathcal{C});$$

c) identidade à direita:

$$\rho_X : X \otimes I \rightarrow X, \text{ para todo } X \in \text{Obj}(\mathcal{C}).$$

Esses isomorfismos mostram que o produto tensorial é associativo e possui  $I$  como identidade à direita e à esquerda. Eles devem satisfazer as seguintes condições (chamadas condições de coerência).

- (i) Para quaisquer  $X, Y, Z, U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes U & \xrightarrow{\alpha_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_U} & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes U & \xrightarrow{\alpha_{X,Y \otimes Z,U}} & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes U) \\ \downarrow \alpha_{X \otimes Y,Z,U} & & & & \downarrow \text{id}_X \otimes \alpha_{Y,Z,U} \\ (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes U) & \xrightarrow{\alpha_{X,Y,Z \otimes U}} & & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes U)) \end{array}$$

(ii) Para todo  $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 (X \otimes I) \otimes Y & \xrightarrow{\alpha_{X,I,Y}} & X \otimes (I \otimes Y) \\
 \rho_X \otimes \text{id}_Y \searrow & & \swarrow \text{id}_X \otimes \lambda_Y \\
 & X \otimes Y &
 \end{array}$$

**Definição A.1.15** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria monoidal abeliana. Diremos que um objeto simples  $S$  de  $\mathcal{C}$  é primo se, para todo  $S_1, S_2 \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \setminus \{I\}$ ,  $S \not\cong S_1 \otimes S_2$ . Diremos que  $S$  é real se  $S \otimes S$  é simples.

**Definição A.1.16** Sejam  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorias e  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  um funtor.

(i) Dizemos que  $F$  é pleno se para todo par  $X, Y$  de objetos de  $\mathcal{C}$  a função

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

é sobrejetiva.

(ii) dizemos que  $F$  é fiel se para todo par  $X, Y$  de objetos de  $\mathcal{C}$  a função

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

é injetiva.

**Definição A.1.17** Sejam  $T, T' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  funtores. Um morfismo de funtores  $\Psi : T \rightarrow T'$  é uma família  $\Psi = \{\Psi_X\}_{X \in \text{Obj}(\mathcal{C})}$  de morfismos  $\Psi_X : T(X) \rightarrow T'(X)$  tal que, para qualquer morfismo  $f : X \rightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$ , o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 T(X) & \xrightarrow{\Psi_X} & T'(X) \\
 T(f) \downarrow & & \downarrow T'(f) \\
 T(Y) & \xrightarrow{\Psi_Y} & T'(Y)
 \end{array}$$

é comutativo em  $\mathcal{C}'$ . Neste caso, escrevemos  $\Psi : T \rightarrow T'$ . Chamamos  $\Psi$  um isomorfismo de funtores se, para qualquer  $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , o morfismo  $\Psi_X : T(X) \rightarrow T'(X)$  é um isomorfismo em  $\mathcal{C}'$  e usaremos a notação usual “ $\cong$ ” para tanto.

**Definição A.1.18** Dizemos que o funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  é equivalência de categorias quando existe um funtor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $GF \cong \text{id}_{\mathcal{C}}$  e  $FG \cong \text{id}_{\mathcal{D}}$ .

**Definição A.1.19** O funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  é essencialmente sobrejetivo quando para qualquer  $Y \in \text{Obj}(\mathcal{D})$  existe algum  $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  tal que  $Y$  é isomorfo a  $F(X)$ .

**Teorema A.1.20** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  duas categorias e  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  um funtor. Então,  $F$  é equivalência de categorias se, e somente se  $F$  é pleno, fiel e essencialmente sobrejetivo.

## A.2 Sistema de Raízes

Nesta seção serão apresentadas definições e propriedades, sem demonstrações, sobre sistema de raízes. Para maiores detalhes e demonstrações citamos [42, 16]. Ao longo da seção  $E$ , será um espaço vetorial sobre  $\mathbb{Q}$  de dimensão finita munido de um produto interno  $(\cdot, \cdot)$ .

Dado um vetor não nulo  $\alpha \in E$ ,  $\sigma_{\alpha}$  denotará a reflexão ortogonal relativa ao hiperplano normal a  $\alpha$ ,  $P_{\alpha} = \{\beta \in E : (\beta, \alpha) = 0\}$ . Explicitamente,

$$\sigma_{\alpha}(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \text{ para todo } \beta \in E.$$

**Definição A.2.1** Um subconjunto  $\Phi \subseteq E$  é um sistema de raízes se:

- (i)  $\Phi$  é finito, gera  $E$  e não contém  $0$ .
- (ii) Se  $\alpha \in \Phi$ , então os únicos múltiplos escalares de  $\alpha$  em  $\Phi$  são  $\pm\alpha$ .
- (iii) Se  $\alpha \in \Phi$ , então a reflexão  $\sigma_{\alpha}$  deixa  $\Phi$  invariante, ou seja,  $\sigma_{\alpha}$  permuta os elementos de  $\Phi$ .
- (iv) Se  $\alpha, \beta \in \Phi$ , então  $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$ .

Os elementos de  $\Phi$  são chamados de raízes.

**Definição A.2.2** Sejam  $(E_1, (\cdot, \cdot)_1)$ ,  $(E_2, (\cdot, \cdot)_2)$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{Q}$  de dimensão finita com produto interno e  $\Phi_1, \Phi_2$  sistemas de raízes de  $E_1, E_2$ , respectivamente. Um isomorfismo entre os sistemas de raízes  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  é um isomorfismo linear  $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$  tal que  $\varphi(\Phi_1) = \Phi_2$  e  $(\alpha, \beta)_1 = (\varphi(\alpha), \varphi(\beta))_2$  para todos  $\alpha, \beta \in \Phi_1$ .

**Definição A.2.3** Um subconjunto  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de  $\Phi$  é uma base de  $\Phi$  se:

- (i)  $\Pi$  é base para  $E$ ;
- (ii) para toda raiz  $\alpha \in \Phi$ , as coordenadas de  $\alpha$  com relação a  $\Pi$  são todas inteiras não negativas ou todas inteiras não positivas.

**Teorema A.2.4** Todo sistema de raízes possui base

Seja  $\Pi$  uma base para um sistema de raízes  $\Phi$ . As raízes em  $\Pi$  são chamadas de *raízes simples* (em relação a  $\Pi$ ). Se  $\alpha \in \Phi$  tem coordenadas inteiras não negativas com relação a  $\Pi$ ,  $\alpha$  é chamada de *raiz positiva*, e se  $\alpha \in \Phi$  tem coordenadas inteiras não positivas com relação a  $\Pi$ ,  $\alpha$  é chamada de *raiz negativa*. Denota-se por  $\Phi_+$  o conjunto das raízes positivas e por  $\Phi_-$  o conjunto das raízes negativas. Claramente  $\Phi = \Phi_+ \cup \Phi_-$  e  $\Phi_+ = -\Phi_-$ . A *altura* de uma raiz  $\alpha = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$  é definida como  $ht \alpha = a_1 + \dots + a_n$ , onde  $\alpha_i$  são as raízes simples.

Fixada uma base, define-se em  $\Phi$  a ordem parcial  $\alpha \leq \beta$  se, e somente se,  $\beta - \alpha$  é uma soma de raízes positivas, ou equivalentemente, uma soma de raízes simples.

Dadas  $\alpha, \beta \in \Phi$ , denotamos  $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 2 \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|} \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Proposição A.2.5** Se  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes, então:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3.$$

**Definição A.2.6** (i) Seja  $\Phi$  um sistema de raízes em  $E$ . O grupo de Weyl de  $\Phi$  é o subgrupo de  $\text{Aut}(E)$  gerado pelas reflexões  $\sigma_\alpha$ ,  $\alpha \in \Phi$ , e será denotado por  $\mathcal{W}$ .

- (ii) O posto de um sistema de raízes  $\Phi$  é a cardinalidade de uma (e portanto de toda) base  $\Pi$  de  $\Phi$ .
- (iii) A matriz de Cartan de  $\Phi$  é a matriz  $C = (c_{ij})_{n \times n}$  com  $c_{ij} = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ , onde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  são as raízes simples.

**Proposição A.2.7** O grupo de Weyl de um sistema de raízes é finito.

**Proposição A.2.8** Seja  $C = (c_{ij})_{n \times n}$  a matriz de Cartan de  $\Phi$ . Então, para  $1 \leq i, j \leq n$ :

- (i)  $c_{ii} = 2$ ;

(ii)  $-3 \leq c_{ij} \leq 0$ , para todo  $i \neq j$ ;

(iii) se  $c_{ij} < -1$ , então  $c_{ji} = -1$ ;

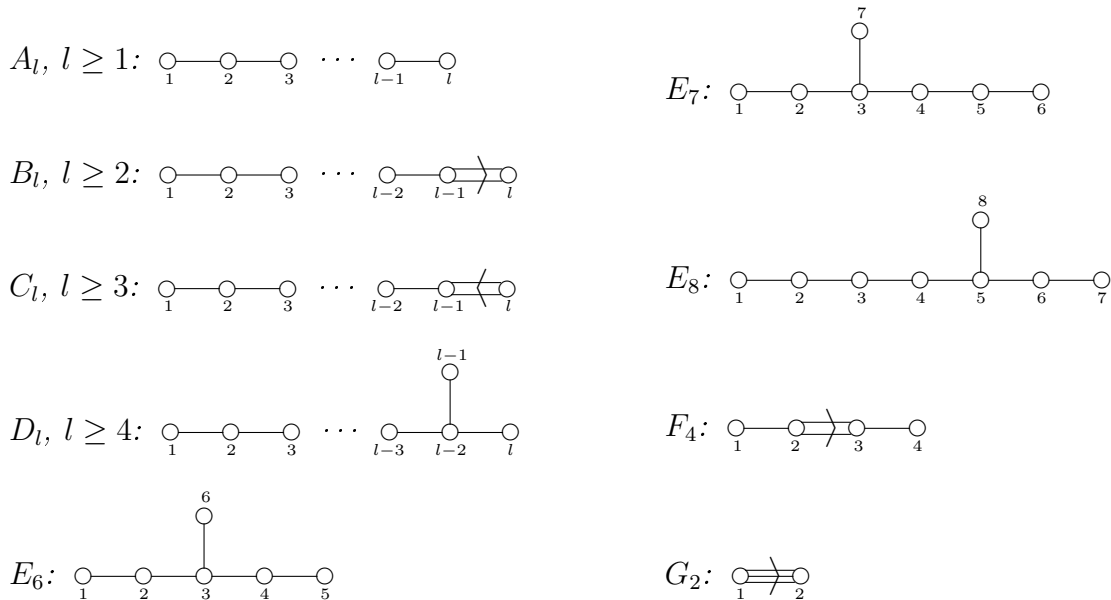
(iv)  $c_{ij} = 0$  se, e somente se,  $c_{ji} = 0$ .

**Definição A.2.9** Seja  $C = (c_{ij})_{n \times n}$  a matriz de Cartan de  $\Phi$ . O diagrama de Dynkin de  $\Phi$  é um grafo com  $n$  vértices, onde os vértices distintos  $i$  e  $j$  são ligados por  $c_{ij}c_{ji}$  arestas e, se  $c_{ij}c_{ji} > 1$ , então uma flecha aponta para  $i$  ou  $j$  conforme  $\alpha_i$  ou  $\alpha_j$  seja a raiz de menor comprimento, isto é, uma flecha aponta para  $i$  se  $|c_{ij}| > 1$ .

Observe que a matriz de Cartan e o diagrama de Dynkin de  $\Phi$  não dependem de  $\Pi$ , uma vez que  $\mathcal{W}$  permuta as bases de  $\Phi$ , e  $\mathcal{W}$  é formado por isometrias de  $E$ , logo preserva ângulos e comprimentos dos vetores de  $\Pi$ .

**Definição A.2.10** Um sistema de raízes  $\Phi$  é irredutível se o seu diagrama de Dynkin é conexo e  $\Phi$  é redutível caso contrário.

**Teorema A.2.11** Seja  $\Phi$  um sistema de raízes irredutível. Então o diagrama de Dynkin de  $\Phi$  é um dos seguintes:





**Teorema A.2.12** (i) Cada um dos diagramas  $A_l, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$  é o diagrama de Dynkin de um sistema de raízes.

(ii) Dois sistemas de raízes  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são isomorfos se, e somente se,  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  têm o mesmo diagrama de Dynkin.

**Proposição A.2.13** Seja  $\Phi$  um sistema de raízes irredutível. Então existe uma única raiz maximal  $\theta$  com relação a ordem parcial definida em  $\Phi$ . Além disso  $\theta$  é raiz positiva e  $\text{ht } \alpha < \text{ht } \theta$  para toda  $\alpha \in \Phi \setminus \{\theta\}$ .

**Definição A.2.14** Seja  $\Phi$  um sistema de raízes de posto  $n$  e  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  uma base. Definimos o conjunto de raízes quase positivas de  $\Phi$  por  $\Phi_{\geq -1} = \Phi_+ \cup -\Pi$ . Além disso, definamos o reticulado de raízes  $Q = \mathbb{Z}\Pi$  e, para cada  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \in Q$ ,  $[\alpha : \alpha_i] = a_i$ . Considere ainda o conjunto  $\text{supp}_Q(\alpha) = \{i \in I : [\alpha : \alpha_i] \neq 0\}$ , chamado de  $Q$ -suporte.

Daqui até o fim da seção, considere  $\Phi$  um sistema de raízes irredutível de posto  $n$  do tipo  $ADE$ ,  $C = (c_{ij})$ ,  $i, j \in I = \{1, \dots, n\}$  sua matriz de Cartan e  $\Gamma$  seu diagrama de Dynkin. Lembre que, neste caso,  $\Gamma$  é um grafo bipartível (veja A.4.1). Como  $\Gamma$  é bipartível (veja A.4.1), escolha uma partição  $I_0 \sqcup I_1$  de  $I$ .

**Definição A.2.15** Sejam  $\Gamma$  um grafo bipartível e  $I_0 \sqcup I_1$  uma bipartição de  $I$ . Definimos

$$\varepsilon_i = (-1)^{\xi_i}, \quad \text{onde} \quad \xi_i = \begin{cases} 0, & \text{se } i \in I_0, \\ 1, & \text{se } i \in I_1. \end{cases}$$

para todo  $i \in I$ .

Considere o automorfismo linear  $U : Q \longrightarrow Q$  dado por

$$U(\alpha_i) = -\varepsilon_i \alpha_i, \quad \forall i \in I$$

e as involuções  $\tau_{\pm} : Q \longrightarrow Q$  definidas por

$$[\tau_{\pm}(\gamma) : \alpha_i] = \begin{cases} -[\gamma : \alpha_i] - \sum_{j \neq i} c_{ij} \max(0, [\gamma : \alpha_j]) & \text{se } \varepsilon_i = \pm 1, \\ [\gamma : \alpha_i] & \text{se } \varepsilon_i \neq \pm 1. \end{cases} \quad (\text{A.2.1})$$

**Lema A.2.16** [16, Proposition 2.4]  $\tau_{\pm}(\Phi_{\geq -1}) \subseteq \Phi_{\geq -1}$ .

**Definição A.2.17** Para cada  $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$  definimos o  $g$ -vetor

$$g(\alpha) = U(\tau_-(\alpha)).$$

**Definição A.2.18** Suponha  $\Phi$  do tipo  $A$  e  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  uma base. Sejam  $\alpha \in \Phi_+$  e  $\gamma \in Q$ . Diremos que  $\gamma$  é  $\alpha$ -aceitável se

- (i)  $0 \leq [\gamma : \alpha_i] \leq [\alpha : \alpha_i]$  para todo  $i \in I$ ;
- (ii) para todo  $i \in I_1$ ,  $[\gamma : \alpha_i] \leq \min\{[\gamma : \alpha_j] : j \in \text{supp}_Q(\alpha) \text{ e } c_{ij} = -1\}$ .

### A.3 Álgebras de Kac-Moody

Nesta seção, apenas definiremos o que é uma álgebra de Kac-Moody e enunciaremos um resultado referente a sua decomposição triangular. Maiores detalhes podem ser encontradas em [28, 35]. Fixe  $\mathbb{K}$  um corpo de característica zero.

**Definição A.3.1** Seja  $I = \{1, \dots, n\}$  um conjunto finito. Uma matriz  $C = (c_{ij})_{i,j \in I}$  é uma matriz de Cartan generalizada se:

- (i)  $c_{ii} = 2$  para todo  $i \in I$ ;
- (ii)  $c_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$  para todos  $i \neq j$ ,  $i, j \in I$ ;
- (iii)  $c_{ij} = 0$  se, e somente se,  $c_{ji} = 0$ , para todos  $i, j \in I$ .

Observe que, pela Proposição A.2.8, a matriz de Cartan de um sistema de raízes é uma matriz de Cartan generalizada.

**Definição A.3.2** Seja  $C$  uma matriz de Cartan generalizada. A álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{g}(C)$  é a álgebra de Lie sobre  $\mathbb{K}$  dada por geradores  $x_i^+, x_i^-, h_i$ ,  $i \in I$ , e relações:

- (i)  $[h_i, h_j] = 0$  para todos  $i, j \in I$ ;
- (ii)  $[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_j$  para todos  $i, j \in I$ ;
- (iii)  $[h_i, x_j^+] = c_{ij} x_j^+$ ,  $[h_i, x_j^-] = -c_{ij} x_j^-$ , para todos  $i, j \in I$ ;



(iv)  $(\text{ad}(x_i^+))^{1-c_{ij}}(x_j^+) = 0$  para todos  $i, j \in I, i \neq j$ ;

(v)  $(\text{ad}(x_i^-))^{1-c_{ij}}(x_j^-) = 0$  para todos  $i, j \in I, i \neq j$ .

**Exemplo A.3.3** Se  $C = (2)$ , a álgebra  $\mathfrak{g}(C)$  é a álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}_2$  das matrizes  $2 \times 2$  com traço zero.

Denote por  $\mathfrak{h}$  a subálgebra de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$  gerada por  $h_i, i \in I$ , e por  $\mathfrak{n}^\pm$  as subálgebras geradas por  $x_i^\pm, i \in I$ , respectivamente.

**Proposição A.3.4** A álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{g}$  tem a seguinte decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$$

como soma direta de espaços vetoriais.

Definimos o reticulado de pesos de  $\mathfrak{g}$  como o conjunto

$$P = \{\mu \in \mathfrak{h}^* : \mu(h_i) \in \mathbb{Z} \forall i \in I\}.$$

Os elementos de  $P$  são chamados de *pesos integrais*. Defina ainda,

$$P^+ = \{\mu \in P : \mu(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \forall i \in I\}.$$

Os elementos de  $P^+$  são chamados de *pesos integrais dominantes*. Dado  $i \in I$ , o único elemento  $\omega_i \in \mathfrak{h}^*$  satisfazendo  $\omega_i(h_j) = \delta_{ij}$  para todo  $j \in I$  é chamado de  *$i$ -ésimo peso fundamental*. Observe que  $\{\omega_i : i \in I\}$  é base de  $\mathfrak{h}^*$  e, portanto, dado  $\mu \in P$ , podemos escrever  $\mu = \sum_{i \in I} m_i \omega_i$  onde  $m_i \in \mathbb{K}$  para todo  $i \in I$ . Definimos então o  *$P$ -suporte* de  $\mu$  por

$$\text{supp}_P(\mu) = \{i \in I : m_i \neq 0\}.$$

Dado  $\Phi = \Phi(C)$  sistema de raízes com base  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , identifique  $\alpha_j$  com o elemento de  $P$  dado por  $\alpha_j(h_i) = c_{ij}$ . Consequentemente, identificamos o reticulado de raízes  $Q = \mathbb{Z}\Pi$  e  $Q^+ = \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$  como subconjuntos de  $\mathfrak{h}^*$ .

## A.4 Quivers e Representações de Quiver

Este capítulo apresenta algumas definições, propriedades e resultados acerca de quivers e suas representações. As demonstrações serão omitidas e podem ser encontradas em [30], [43].

**Definição A.4.1** Um grafo é um par de conjuntos  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ , onde  $\Gamma_0$  é chamado de conjunto dos vértices de  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  é uma família de pares não ordenados de vértices chamados de arestas. Cada elemento do par é chamado de vértice da aresta. Diremos que um grafo  $\Gamma$  é bipartível se existir partição de  $\Gamma_0$  em dois subconjuntos disjuntos  $I_0$  e  $I_1$  tal que não exista aresta em  $\Gamma_1$  com ambos vértices numa mesma parte. Diremos que  $\Gamma$  é finito se  $\#\Gamma_0 \leq \infty$  e  $\Gamma_1$  é família finita.

**Definição A.4.2** Um quiver é um grafo  $Q = (Q_0, Q_1)$  equipado com duas funções  $c, t : Q_1 \rightarrow Q_0$  (começo e término), onde dizemos que  $a \in Q_1$  começa em  $i_0$  e termina em  $i_1$ , com  $i_0, i_1 \in Q_0$ , quando  $c(a) = i_0$  e  $t(a) = i_1$ . Os elementos de  $Q_1$  serão chamados de flechas.

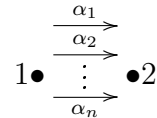
Em outras palavras,  $Q_1$  é uma família de pares ordenados  $(i, j)$  com  $i, j \in Q_0$ , tais que  $c(i, j) = i$  e  $t(i, j) = j$ .

Faremos restrição ao uso de quivers tais que seus conjuntos de índices e flechas sejam finitos.

**Exemplo A.4.3** (i) Um quiver pode ter laços, isto é, flechas que começam e terminam no mesmo vértice, como o quiver de Jordan, que tem apenas um vértice e uma flecha



(ii) O quiver de Kronecker, que tem dois vértices e  $n$  flechas ligando-os (todas na mesma direção)



**Definição A.4.4** Dado um corpo  $\mathbb{K}$ , uma representação  $V = (V_i, V_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  de um quiver  $Q$  sobre o corpo  $\mathbb{K}$  é uma coleção de  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais  $\{V_i\}_{i \in Q_0}$  e uma coleção  $\{V_\alpha : V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{t(\alpha)}\}_{\alpha \in Q_1}$  de transformações lineares (sobre  $\mathbb{K}$ ).

Diremos que uma representação é de *dimensão finita* se, para todo  $i \in Q_0$ ,  $V_i$  é de dimensão finita. Definiremos o *vetor dimensão* de uma representação de dimensão finita  $V$  como o vetor  $\dim(V) \in \mathbb{Z}^{Q_0}$  com  $\dim(V)_i = \dim(V_i)$ . A classe de todas as representações de dimensão finita sobre um corpo  $\mathbb{K}$  de um quiver  $Q$  será denotado por  $\text{Rep}_{\mathbb{K}} Q$ .

**Definição A.4.5** Dado um quiver  $Q$ , um morfismo  $f : V \rightarrow W$  entre as representações  $V$  e  $W$  de  $Q$  é um conjunto de transformações lineares  $(f_i)_{i \in Q_0}$  tal que o seguinte diagrama comuta para toda flecha  $\alpha \in Q_1$

$$\begin{array}{ccc}
V_{c(\alpha)} & \xrightarrow{V_\alpha} & V_{t(\alpha)} \\
f_{c(\alpha)} \downarrow & & \downarrow f_{t(\alpha)} \\
W_{c(\alpha)} & \xrightarrow{W_\alpha} & W_{t(\alpha)}
\end{array}$$

**Definição A.4.6** Dada uma representação  $V$  de um quiver  $Q$ , dizemos que a representação  $W$  de  $Q$  é uma sub representação de  $V$  quando  $W_i \subset V_i$  é subespaço vetorial para todo  $i \in Q_0$  e  $j : W \rightarrow V$  dada pela inclusão de espaços vetoriais é um morfismo entre representações, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
V_{c(\alpha)} & \xrightarrow{V_\alpha} & V_{t(\alpha)} \\
j_{c(\alpha)} \uparrow & & \uparrow j_{t(\alpha)} \\
W_{c(\alpha)} & \xrightarrow{W_\alpha} & W_{t(\alpha)}
\end{array}$$

comuta para cada  $\alpha \in Q_1$ .  $W$  é dita sub-representação trivial se  $W_i = \{0\}$  para todo  $i \in Q_0$ .

**Definição A.4.7** Sejam  $V$  e  $W$  duas representações do quiver  $Q$ . A representação soma direta de  $V$  e  $W$ , denotada por  $X = V \oplus W$  é dada por:

- $X_i = V_i \oplus W_i$ , para todo  $i \in Q_0$ ;
- $X_\alpha(v, w) = (V_\alpha(v), W_\alpha(w))$ , para todo  $\alpha \in Q_1$ ,  $v \in V_{c(\alpha)}$  e  $w \in W_{c(\alpha)}$ .

Observe que  $\text{Rep}_{\mathbb{K}} Q$  é categoria  $\mathbb{K}$ -linear abeliana.

**Definição A.4.8** Uma representação  $V$  de um quiver  $Q$  é dita decomponível quando é isomorfa à soma direta de duas de suas sub-representações não-triviais e é dita indecomponível caso contrário.

**Definição A.4.9** Um caminho em um quiver  $Q$  é ou um vértice ou uma sequência de flechas,  $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$ , onde  $c(\alpha_{j+1}) = t(\alpha_j)$ . Por conveniência de notação, denotaremos o caminho associado a  $i \in Q_0$  por  $e_i$  e definimos  $c(e_i) = i = t(e_i)$ . Nos referiremos aos caminhos  $e_i, i \in Q_0$ , por caminhos triviais. Dado um caminho não-trivial  $\alpha$ , como descrito acima, defina  $c(\alpha) = c(\alpha_1)$  e  $t(\alpha) = t(\alpha_n)$ . Um ciclo orientado é um caminho não-trivial  $\alpha$  tal que  $c(\alpha) = t(\alpha)$ . Dados dois caminhos não triviais  $\alpha$  e  $\beta$  diremos que eles são antiparalelos se  $c(\alpha) = t(\beta)$  e  $c(\beta) = t(\alpha)$ .

**Definição A.4.10** Dado um quiver  $Q$ , a álgebra de caminhos do quiver  $Q$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , denotada por  $\mathbb{K}Q$ , é o  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial que tem como base todos os caminhos de  $Q$  com a multiplicação definida pela concatenação de caminhos:

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha\beta, & \text{se } t(\beta) = c(\alpha) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$e_i * \beta = \begin{cases} \beta, & \text{se } t(\beta) = i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\alpha * e_i = \begin{cases} \alpha, & \text{se } c(\alpha) = i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são caminhos não triviais.

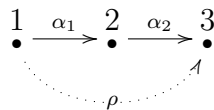
Observe que  $\mathbb{K}Q$  é álgebra associativa com unidade,  $e = e_1 + \dots + e_n$ , onde  $n = \#Q_0$ .

**Teorema A.4.11** As categorias  $\text{Rep}_{\mathbb{K}} Q$  e  $\text{mod-}\mathbb{K}Q$  são equivalentes.

**Definição A.4.12** Uma relação em um quiver  $Q$  é um elemento de  $\mathbb{K}Q$  dado pela combinação linear de caminhos que começam e terminam nos mesmos vértices. Se  $R$  é um conjunto de relações em  $Q$ , diremos que o par  $(Q, R)$  é um quiver com relações  $R$ .

A álgebra de caminhos de um quiver com relações é o quociente  $\mathbb{K}Q/I$  onde  $I$  é o ideal de  $\mathbb{K}Q$  gerado pelas relações do quiver.

**Exemplo A.4.13** Considere o quiver



Podemos então ter a relação  $\rho = \alpha_2\alpha_1$ .

Seja  $Q$  um quiver e  $V$  uma representação de  $Q$ . Para um caminho não trivial  $\lambda = \alpha_k \dots \alpha_2\alpha_1$  definimos a avaliação de  $V$  no caminho  $\lambda$  como a transformação  $\mathbb{K}$ -linear definida por

$$V_\lambda = V_{\alpha_k} \dots V_{\alpha_2} V_{\alpha_1}.$$

Tal definição se estende para relações em  $Q$  da seguinte maneira. Seja

$$\rho = \sum_{i=1}^m a_i \lambda_i$$

uma relação, onde  $a_i \in \mathbb{K}$  e  $\lambda_i$  é um caminho para cada  $i$ . Então

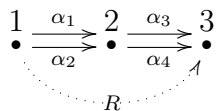
$$V_\rho = \sum_{i=1}^m a_i V_{\lambda_i}.$$

**Definição A.4.14** *Seja  $R$  um conjunto de relações em  $Q$ . Uma representação  $V = (V_i, V_\alpha)$  de  $Q$  satisfaz as relações de  $R$  se temos*

$$V_\rho = 0, \quad \forall \rho \in R.$$

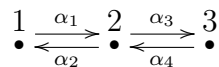
*Denotaremos por  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q, R)$  a categoria das representações de  $Q$  que satisfazem o conjunto de relações  $R$ .*

**Exemplo A.4.15** *Dado o quiver  $Q$*



*uma representação  $V$  de  $Q$  satisfaz a relação  $\{\lambda_1 \alpha_3 \alpha_1 - \lambda_2 \alpha_4 \alpha_2\}$  se  $\lambda_1 V_{\alpha_3} V_{\alpha_1}(v) = \lambda_2 V_{\alpha_4} V_{\alpha_2}(v)$  para todo  $v \in V_1$ .*

*No quiver seguinte*



*podemos ter, por exemplo, a relação  $R = \{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4\}$ .*

**Teorema A.4.16** *Sejam  $Q$  um quiver,  $R$  um conjunto de relações em  $Q$  e  $I$  o ideal de  $\mathbb{K}Q$  gerado por  $R$ . Então as categorias  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q, R)$  e  $\text{mod-}\left(\frac{\mathbb{K}Q}{I}\right)$  são equivalentes.*

Agora definiremos uma forma bilinear associada a um quiver e, a partir desta, associaremos a ele um sistema de raízes.

**Definição A.4.17** Seja  $Q$  um quiver e  $n = \#Q_0$ . A forma de Euler é a forma bilinear  $\langle -, - \rangle : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} y_{t(\alpha)}$$

A partir desta forma, obtemos uma forma bilinear simétrica em  $\mathbb{Z}^n$  dada por:

$$(x, y) = \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle.$$

Esta última é a forma de Cartan associada ao quiver  $Q$  e sua matriz com relação à base canônica de  $\mathbb{Z}^n$  é chamada de matriz de Cartan do quiver  $Q$ . A forma quadrática  $q(x) = (x, x)$ ,  $x \in \mathbb{Z}^n$  associada a forma de Cartan é chamada de forma de Tits do quiver  $Q$ .

**Exemplo A.4.18** Seja  $Q$  o quiver

$$1 \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_1} \\ \xrightarrow{\alpha_2} \end{array} \bullet 2$$

Se  $x, y \in \mathbb{Z}^2$ , então

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - 2x_1 y_2, \quad (x, y) = 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1,$$

a matriz de Cartan deste quiver é

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

e a forma de Tits de  $Q$  é  $q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 x_2$ .

Note que a forma de Cartan não depende das orientações das flechas do quiver  $Q$ , e sim de quantas flechas existem entre dois vértices dados. Assim, a forma de Cartan só depende do grafo  $\Gamma$  subjacente a  $Q$ . Em geral, dado um grafo  $\Gamma$ , sua forma de Cartan é dada por

$$(x, y) = \sum_{i \in \Gamma_0} 2x_i y_i - \sum_{(i, j) \in \Gamma_1} (x_i y_i + x_j y_j).$$

Sua matriz de Cartan e forma de Tits são então definidas como antes.

**Exemplo A.4.19** Se  $\Gamma$  é um diagrama de Dynkin de tipo ADE então sua matriz de Cartan é dada pelo Teorema A.2.11.

**Definição A.4.20** Seja  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  uma forma quadrática.

(i) O radical da forma  $q$  é definido por

$$\text{rad } q = \{x \in \mathbb{Z}^n ; (x, -) = 0\};$$

(ii)  $q$  é positiva definida se  $q(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{Z}^n$  diferente de zero;

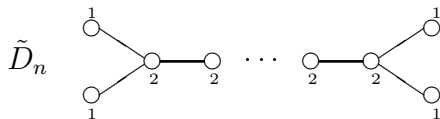
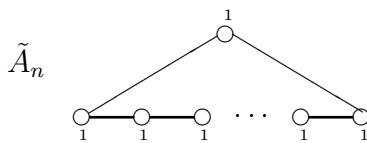
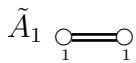
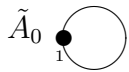
(iii)  $q$  é positiva semidefinida se  $q(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{Z}^n$ .

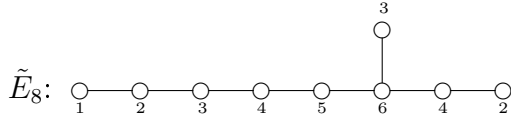
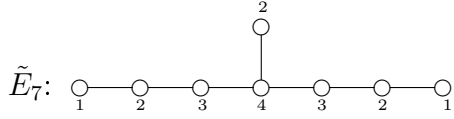
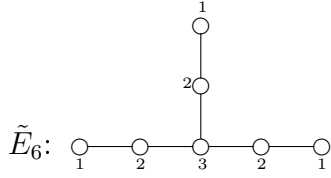
Dados  $x, y \in \mathbb{Z}^n$ , diremos que  $x > y$  se  $x \neq y$  e  $x_i \geq y_i$  para todo  $i$ . Um vetor  $x \in \mathbb{Z}^n$  é *sincero* quando  $x_i \neq 0$  para todo  $i$ .

**Lema A.4.21** *Seja  $\Gamma$  um grafo conexo e  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  sua forma de Tits. Se existe  $y \in \text{rad } q$  com  $y > 0$  então  $y$  é sincero e a forma  $q$  é positiva semidefinida. Neste caso, para  $x \in \mathbb{Z}^n$  temos que:*

$$q(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}y \Leftrightarrow x \in \text{rad } q.$$

Os grafos a seguir são chamados de *grafos euclidianos*. Os números que acompanham os vértices indicam as coordenadas do vetor  $\delta$  do Teorema A.4.23 na base canônica de  $\mathbb{Z}^n$ .





Considerando a enumeração dos vértices como nos diagramas de Dynkin e denotando por 0 o vértice adicionado temos que as matrizes de Cartan correspondentes aos diagramas Euclidianos são:

$$\tilde{A}_n: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \tilde{D}_n: \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{E}_6: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \tilde{E}_7: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\tilde{E}_8 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Observação A.4.22** *As matrizes de Cartan dos grafos euclidianos também são matrizes de Cartan generalizadas.*

**Teorema A.4.23** *Seja  $\Gamma$  um grafo conexo.*

- (i) *A forma de Tits de  $\Gamma$  é positiva definida se, e somente se,  $\Gamma$  é um diagrama de Dynkin do tipo ADE.*
- (ii) *A forma de Tits de  $\Gamma$  é positiva semidefinida mas não positiva definida se, e somente se,  $\Gamma$  é um diagrama Euclidiano. Neste caso existe um único vetor positivo  $\delta \in \mathbb{Z}^n$  tal que  $\text{rad } q = \mathbb{Z}\delta$*

**Definição A.4.24** *Dado um grafo  $\Gamma$ , definimos  $\Phi_\Gamma = \{x \in \mathbb{Z}^n : q(x) \leq 1\}$ , onde  $n = \#\Gamma_0$  e  $q$  sua forma de Tits. Um elemento de  $\Phi_\Gamma$  diferente de zero é chamado de raiz de  $\Gamma$ .*

**Proposição A.4.25** *Seja  $\Gamma$  grafo de Dynkin do tipo ADE ou Euclideano e  $n = \#\Gamma_0$ .*

- (i) *Os elementos da base canônica de  $\mathbb{Z}^n$  são raízes.*
- (ii) *Se  $x \in \Phi_\Gamma$  e  $y \in \text{rad } q$  então  $-x, x + y \in \Phi_\Gamma$ .*
- (iii) *Cada raiz é positiva ou negativa.*
- (iv) *Se  $\Gamma$  é Euclideano, então  $\Phi_\Gamma \setminus \text{rad } q$  é finito.*
- (v) *Se  $\Gamma$  é Dynkin do tipo ADE, então  $\Phi_\Gamma$  é finito.*

Dado um grafo  $\Gamma$  com  $n = \#\Gamma_0$ , será conveniente estender sua forma de Cartan a uma forma bilinear em  $\mathbb{Q}^n$  de maneira natural. Observe que se  $(\ , \ )$  é positiva definida, então  $(\ , \ )$  é produto interno em  $\mathbb{Q}^n$ .

**Teorema A.4.26** *Sejam  $\Gamma$  grafo do tipo ADE e  $C$  sua matriz de Cartan. Suponha que  $\Phi \subseteq \mathbb{Q}^n$  seja sistema de raízes com matriz de Cartan  $C$ . Então existe transformação linear ortogonal  $\psi : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^n$  tal que  $\psi(\Phi_\Gamma) = \Phi$ .*

Por família a um parâmetro de elementos em uma classe  $\mathcal{C}$  queremos dizer uma função entre  $\mathbb{K}$  e  $\mathcal{C}$ .

**Definição A.4.27** *Uma álgebra  $A$  é dita de tipo finito de representação quando existe apenas uma quantidade finita de classes de isomorfismo de  $A$ -módulos indecomponíveis.*

*Uma álgebra  $A$  é dita de tipo manso de representação quando:*

- para todo  $n \in \mathbb{N}$  a família das classes de isomorfismos de  $A$ -módulos indecomponíveis de dimensão  $n$  é uma família a um parâmetro de  $\mathbb{K}$  a menos de uma quantidade finita;
- $A$  não é do tipo finito.

Como temos a equivalência de categorias entre  $\text{Rep}_{\mathbb{K}} Q$  e  $\text{mod-}\mathbb{K}Q$ , dizemos que o quiver  $Q$  é de tipo finito ou manso de representação, respectivamente, quando a álgebra  $\mathbb{K}Q$  o for.

**Teorema A.4.28** *(Gabriel) Um quiver conexo  $Q$  é do tipo finito de representação se, e somente se, o grafo associado a  $Q$  for um diagrama de Dynkin do tipo ADE. Um quiver conexo  $Q$  é de tipo manso de representação se, e somente se, o grafo associado a  $Q$  for do tipo Euclidiano.*

*Em particular, quando  $Q$  é do tipo finito de representação a função  $V \mapsto \dim(V)$  induz uma bijeção entre  $\text{Ind}(Q)$  e as raízes positivas associadas ao quiver  $Q$ .*

# Referências Bibliográficas

- [1] I Assem, D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Volume 1 Techniques of Representation Theory*. Cambridge: University Press, 2006.
- [2] A. Berenstein, S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras III: upper bounds and double Bruhat cells*, Duke Math. J. **126** (2005), 1-52.
- [3] T. Bridgeland, *t-structures on some local Calabi-Yau varieties*, J. Algebra **289** (2005), 453–483.
- [4] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math. (2) **166** (2007), 317–345.
- [5] P. Caldero, F. Chapoton and R. Schiffler, *Quivers with relations arising from clusters ( $A_n$  case)*, Amer. Math. Soc. **358** (2006) 3, 1347-1364.
- [6] P. Caldero, F. Chapoton and R. Schiffler, *Quivers with relations and cluster tilted algebras*, Algebras and Rep. Theory **9** (2006), 259–376.
- [7] V. Chari, *Minimal affinizations of representations of quantum groups: the rank 2 case*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **31** no.5, 1995, 873-911.
- [8] V. Chari, *Braid group actions and tensor products*, Int. Math. Res. Not. 2002, no. 7, 357-382.
- [9] V. Chari and D. Hernandez, *Beyond Kirillov-Reshetikhin modules*, Contemp. Math. **506** (2010), 49-81.
- [10] V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups*. Cambridge University Press, 1994.
- [11] V. Chari and A. Pressley, *Quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **142** (1991), 261 - 283

- [12] S. Fomin, Cluster algebras portal, [www.math.lsa.umich.edu/~fomin/cluster.html](http://www.math.lsa.umich.edu/~fomin/cluster.html).
- [13] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529 (electronic).
- [14] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras II: Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003), 63–121.
- [15] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras IV: Coefficients*, Compos. Math. **143** (2007), 1, 112 - 164.
- [16] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Y-systems and generalized associahedra*, Ann. of Math. (2) **158** (2003), 977–1018.
- [17] E. Frenkel and E. Mukhin, *Combinatorics of  $q$ -characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **216** (2001), 23 - 57.
- [18] E. Frenkel and N. Reshetikhin, *The  $q$ -characters of representations of quantum affine algebras*, Recent developments in quantum affine algebras and related topics, Contemp. Math. **248** (1999), 163 - 205.
- [19] C. Geiß, B. Leclerc, and J. Schröer, *Semicanonical bases and preprojective algebras*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), 193–253.
- [20] C. Geiß, B. Leclerc, and J. Schröer, *Preprojective algebras and cluster algebras*, EMS Ser. Congr. Rep. (2008), 253 - 283.
- [21] C. Geiß, B. Leclerc, and J. Schröer, *Cluster algebra structures and semicanonical bases for unipotent groups*, arXiv:math/0703039.
- [22] M. Gekhtman, M. Shapiro, and A. Vainshtein, *Cluster algebras and Poisson geometry*, Mosc. Math. J. **3** (2003), 899–934
- [23] M. Gekhtman, M. Shapiro, and A. Vainshtein, *Cluster algebras and Weil-Petersson forms*, Duke Math. J. **127** (2005), 291–311.
- [24] D. Hernandez, *The Kirillov-Reshetikhin conjecture and solutions of  $T$ -systems*, J. Reine Angew. Math **596**, 63-87.
- [25] D. Hernandez, *Simple tensor products*, Invent. Math. **181** (2010), 3, 649-675.
- [26] D. Hernandez and B. Leclerc, *Cluster algebras and quantum affine algebras*, Duke Math. J. **154** (2010), no. 2, 265 - 341.

- [27] J. Jantzen, *Lectures on quantum groups*. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics 6, 1996.
- [28] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge: University Press, 1985.
- [29] M. Kontsevich, *Donaldson-Thomas invariants*, Mathematische Arbeitstagung, [www.mpim-bonn.mpg.de/preprints/](http://www.mpim-bonn.mpg.de/preprints/).
- [30] H. Krause, *Representations of quivers via reflection functors*, lecture notes, preprint arXiv:0804.1428.
- [31] A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki, *Functional relations in solvable lattice models. I. Functional relations and representation theory*. Internat. J. Modern Phys. A **9** (1994), 5215-5266.
- [32] B. Leclerc, *Imaginary vectors in the dual canonical basis of  $U_q(\mathfrak{n})$* , Transform. Groups **8** (2003), 95 - 104.
- [33] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447-498.
- [34] G. Lusztig, *Total positivity in reductive groups*, Lie theory and geometry, Progr. Math. **123** (1994), 53-568.
- [35] R. V. Moody and A. Pianzola, *Lie Algebras with Triangular Decompositions*. New York: Wiley-Interscience, 1995.
- [36] A. Moura, *Lectures on finite-dimensional representations of quantum affine algebras*. Preprint.
- [37] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 145-238.
- [38] H. Nakajima,  *$t$ -analogs of  $q$ -characters of quantum affine algebras*, Represent. Theory **7** (2003), 259-274.
- [39] H. Nakajima, *Quiver varieties and cluster algebras*, arXiv:0905.0002.
- [40] I. Reiten, *Tilting theory and cluster algebras*, preprint available at [www.institut.math.jussieu.fr/~keller/ictp2006/lecturenotes/reiten.pdf](http://www.institut.math.jussieu.fr/~keller/ictp2006/lecturenotes/reiten.pdf).
- [41] C.M. Ringel, *Some remarks concerning tilting modules and tilted algebras Origin. Relevance. Future.*, Handbook of Tilting Theory, LMS Lecture Note Series **332** (2007), 49-104.

- [42] L. A. B. San Martin, *Álgebras de Lie*. Editora da UNICAMP, 1999.
- [43] V. da Silva, *Sistema de Raízes e Representações de Quivers*. *Dissertação de Mestrado*. IMECC - UNICAMP (2009).



# Índice Remissivo

- $\ell$ -peso
  - J- $\ell$ -dominante, 55
- $\ell$ -peso de um vetor, 50
- $\ell$ -pesos, 47
  - dominantes, 47
  - fundamentais, 47
- $\ell$ -raiz simples, 49
- álgebra
  - de caminhos, 95
  - de cluster, 9
    - do tipo geométrico, 10
- árvore, 8, 26
- álgebra
  - afim quantizada, 42
  - de Kac-Moody, 91
  - de laços quantizada, 43
  - universal envelopante
    - quantizada, 41
- afinização, 51
  - minimal, 52
- afinizações equivalentes, 52
- altura de uma raiz, 87
- aresta, 93
- base de um sistema de raízes, 87
- bipartível, 93
- caminho, 8, 94
  - curto, 20
  - de rotação, 25
  - trivial, 94
- caminhos antiparalelos, 94
- caracter, 47
- categoria, 79
  - $\mathbb{K}$ -linear, 83
  - abeliana, 82
  - aditiva, 81
  - monoidal, 84
- categoria  $\mathcal{O}_q$ , 45
- categoria  $\mathcal{O}_q^{\text{int}}$ , 46
- categoria  $\mathcal{C}_\ell$ , 60
- categorificação monoidal, 12
- ciclo orientado, 94
- cluster, 6
- conúcleo de morfismo, 82
- diagrama
  - de Dynkin, 88
- espaço de peso, 45
- expansão de cluster, 14
- fenômeno de Laurent, 12
- flecha, 93
- folha, 26
- forma
  - de Cartan, 97
  - de Euler, 97
  - de Tits, 97
  - positiva definida, 98
  - positiva semidefinida, 98
- funtor, 83
  - $\mathbb{K}$ -linear, 84



- aditivo, 84
- equivalência de categorias, 86
- essencialmente sobrejetivo, 86
- fiel, 85
- pleno, 85
- produto tensorial, 84
  
- g-vetor, 91
- grafo, 93
  - $n$ -regular, 8
- grupo de Weyl, 87
  
- imagem de morfismo, 82
- isomorfismo
  - de sistemas de raízes, 86
  
- laço, 93
  
- módulo
  - de  $\ell$ -peso
    - minúculo, 57
- módulo
  - de  $\ell$ -peso, 50
    - máximo, 50
  - de Kirillov-Reshetikhin, 53
  - de peso, 45
    - máximo, 46
  - de Verma, 46
  - de Weyl, 51
  - integrável, 45
- matriz
  - de Cartan
    - generalizada, 91
  - de troca, 6
    - antissimetrizável, 5
    - antissimetrizante, 5
  - de Cartan, 87, 97
    - estendida, 43
    - correspondente, 12
  
- monômio de cluster, 10
- morfismo, 79
  - de representações de quiver, 93
- mutação
  - de semente, 7
  - em uma triangulação, 26
  
- núcleo de morfismo, 82
  
- objeto, 79
  - primo, 85
  - real, 85
  - simples, 82
    - congelado, 64
    - de cluster, 64
  
- P-suporte, 92
- padrão de cluster, 8
- peso, 45
  - peso integral, 92
    - dominante, 92
- pivô, 25
- polinômio de Drinfeld, 50
- posto de um sistema de raízes, 87
  
- $q$ -character, 53
  - truncado, 62
- $q$ -fatoração, 48
- $q$ -relações de Serre, 42
- $Q$ -suporte, 90
- quiver, 93
  - com relações, 95
  - de Jordan, 93
  - de Kronecker, 93
  
- raízes compatíveis, 14
- radical de uma forma quadrática, 98
- raiz, 86, 100
  - negativa, 87

- positiva, 87
- simples, 87
- aceitável, 91
- de uma triangulação, 22
- quase positiva, 90
- relação em um quiver, 95
- relações triangulares, 28
- representação
  - de quiver, 93
    - decomponível, 94
    - indecomponível, 94
- reticulado
  - de  $\ell$ -pesos, 47
  - de  $\ell$ -raízes de  $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ , 49
  - de pesos, 92
  - de raízes, 90
- semente, 6
- sementes adjacentes, 7
- semicorpo, 5
  - tropical, 6
- sistema de raízes, 86
  - irredutível, 88
  - reduzível, 88
- soma direta de objetos, 81
- suporte de uma diagonal, 22
- T-sistemas, 61
- triangulação, 22
  - cobra, 22
- vértice, 93
- valência de um vértice, 8
- variáveis de cluster, 9
  - congeladas, 11
- vetor
  - de  $\ell$ -peso, 50
    - máximo, 50
  - de peso, 46
    - máximo, 46
- dimensão, 93
- sincero, 98
- Y-semente, 6