

UM MÉTODO EFICIENTE PARA TRANSFORMAR
SIMILARMENTE UMA MATRIZ QUALQUER NUMA
MATRIZ DE SCHWARZ

Sonia Regina Dal-Ri Múrcia



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Imagem

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

"Um método eficiente para transformar
similarmente uma matriz qualquer numa
matriz de Schwarz"

Por: Sônia Regina Dal-Ri Murcia

Orientador: Prof. José Vitório Zago

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciê
cia da Computação da UNICAMP, para obtenção do Título de Mestre
em Ciências.

Ao meu esposo Nelson e aos meus filhos:
Fernando, Vanessa e Rafael.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor José Vitório Zago, orientador da presente tese, pelas valiosas críticas e sugestões que foram apresentadas.

Ao Professor Biswa Nath Datta pela colaboração para a elaboração deste trabalho.

Ao Nelson pelo incentivo, apoio e confiança nas horas difíceis.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido.

SUMÁRIO

Este trabalho consiste num estudo em equações matriciais do tipo $AX = XB$. Nele desenvolvemos um novo método para transformar uma matriz companheira numa matriz de Schwarz por similaridade. Desenvolvemos também uma extensão deste novo método, que permite a transformação de uma matriz arbitrária numa matriz de Schwarz por similaridade.

Foram elaborados programas computacionais que permitem executar com rapidez as expressões obtidas no novo método.

ABSTRACT

This work is constituted by a study of matricial equations of the type, $AX = XB$. In it a new method for transforming Companion matrix into a Schwarz matrix by similarity is developed. An extension of this new method is also developed which permits the transformation of any matrix into a Schwarz matrix by similarity.

Computational programs were elaborated which permit the rapid execution of the expressions obtained by the use of the new method.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO	1
------------------	---

CAPÍTULO II

ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS	4
2.1 DEFINIÇÕES E TEOREMAS	4
2.1.1 Autovalor e Autovetor	4
2.1.2 Polinômio Característico	4
2.1.3 Teorema	4
2.1.4 Teorema de Cayley-Hamilton	5
2.1.5 Polinômio Mônico	5
2.1.6 Polinômio Mínimo	5
2.1.7 Matriz não Derrogatória	5
2.1.8 Matriz Companheira	6
2.1.9 Matriz Tridiagonal	6
2.1.10 Matriz de Hessenberg	7
2.2 OS TEOREMAS DE INÉRCIA	7
2.2.1 Definição	7
2.2.2 Teorema de Carlson e Datta	8
2.2.3 Teorema de Chen-Wimmer	12
2.3 ESTABILIDADE E ALGUNS CONCEITOS RELACIONADOS ..	12
2.3.1 Definição de Estabilidade	12
2.3.2 Esquema de Routh	12
2.3.3 Matriz de Hurwitz	13

2.3.4	Menores principais da matriz de Hurwitz	13
2.3.5	Crítério de Routh Hurwitz	14
CAPÍTULO III		
	EQUAÇÕES MATRICIAIS	15
3.1	EQUAÇÃO MATRICIAL GERAL	15
3.1.1	Método de Sylvester para solução da equação <u>ma</u> tricial geral	15
3.1.2	Método de Wedderburn	17
3.2	A EQUAÇÃO $AX = XB$	18
3.2.1	A existência da solução e discussão geral	18
3.2.2	A construção da solução geral	20
3.2.2.1	Método de Gantmacher para a solução da Equação $AX = XB$	20
3.2.3	Teorema de Carlson-Datta sobre a existência de soluções de $AX = XB$	23
3.2.4	Um algoritmo numérico para a solução de $AX = XB$	27
3.2.5	Alguns casos especiais da equação $AX=XB$	40
3.3	A EQUAÇÃO $AX + XB = C$	44
3.3.1	A existência e expressão da solução única	44
3.3.2	A equação matricial de Lyapunov	46
3.3.2.1	Condição necessária e suficiente para a solução da equação de Lyapunov	46
3.3.3	Alguns métodos para a solução da equação de Lyapunov	48
3.3.3.1	O método de Barnett-Storey	48
3.3.3.2	Método de Howland-Senez	49

CAPÍTULO IV

A EQUAÇÃO $XA= SX$ ONDE S É A FORMA CANÔNICA DE SCHWARZ .	53
4.1 O TEOREMA DE SCHWARZ	53
4.2 O MÉTODO DE DATTA PARA TRANSFORMAR UMA MATRIZ DE HESSENBERG NUMA MATRIZ DE SCHWARZ	54
4.3 MÉTODOS PARA TRANSFORMAR UMA MATRIZ COMPANHEIRA NUMA MATRIZ DE SCHWARZ POR SIMILARIDADE	56
4.3.1 <i>Método de Loo</i>	56
4.3.2 <i>Um novo método</i>	58
4.3.1.1 <i>Aplicação</i>	71
4.4 UMA NOVA DEDUÇÃO DO TEOREMA DE ROUTH-HURWITZ ..	73
4.5 UMA RELAÇÃO ENTRE OS ELEMENTOS DE UMA MATRIZ DE HESSENBERG E OS ELEMENTOS DUMA MATRIZ DE SCHWARZ	77
4.6 COMPARAÇÕES, CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS	85
4.6.1 <i>Comparação entre o novo método e método de Loo, para o cálculo dos elementos duma matriz de Schwarz</i>	85
4.6.1.1 <i>Comparação computacional</i>	85
4.6.1.2 <i>Análise do número de operações envolvidas</i>	87
4.6.2 <i>Comentários e Conclusões</i>	100
APÊNDICE	
A.1 Programa para o novo método	102
A.2 Programa para o método de Loo	103
A.3 Subrotina SIST.....	105
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	106

SIMBOLOGIA

$A_{m \times n}$	matriz de ordem $m \times n$
A^{-1}	matriz inversa de A
A^T	matriz transporta de A
$\bar{A}$	matriz conjugada de A
$\bar{A}^*$	matriz conjugada transposta de A
$\tilde{A}$	matriz A reduzida à forma canônica de Jordan
$A_{\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_m \\ j_1, j_2, \dots, j_n \end{pmatrix}}$	menor de ordem m da matriz A
$\det(A)$	determinante da matriz A
$I_n(A)$	inércia da matriz A
I	matriz identidade
λ	autovalor de uma matriz
$p_n(\lambda)$	polinômio característico de uma matriz
C	matriz companheira
H	matriz hermitiana
H	matriz de Hurwitz
S	matriz de Schwarz
Δ_n	determinante de Hurwitz
e_i	i -ésima linha da matriz identidade

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A resolução de equações matriciais é um problema clássico na teoria matricial e possui uma larga faixa de aplicação em diferentes ramos da ciência e da engenharia. Dentre os tópicos mais importantes podemos citar sua aplicação na solução de problemas de autovalores e na análise da estabilidade de sistemas de equações diferenciais.

No estudo de sistemas de equações diferenciais é importante saber sobre a estabilidade das matrizes que regem esses sistemas, pois a solução desses sistemas somente será estável se a matriz do sistema for estável.

Por exemplo se um fenômeno é descrito por meio de um sistema de equações diferenciais com condições iniciais as quais geralmente são resultados de certas medições e portanto são obtidos invariavelmente com certo erro, surge o problema sobre a influência de pequenas variações nas condições iniciais sobre a solução procurada. Se uma pequena variação nos valores iniciais pode trocar muito a solução, então essa solução não tem nenhum valor prático e pode não descrever nem aproximadamente o fenômeno estudado, caracterizando uma instabilidade no sistema.

Algumas matrizes nos dão a estabilidade de imediato, por exemplo a matriz na forma de Schwarz nos permite analisar sua estabilidade somente analisando os sinais de seus elementos. O problema é que raramente acontece da matriz do sistema ter essa

forma especial.

Uma das matrizes que aparece com freqüência em problemas físicos é a matriz companheira, por isso o objetivo principal do nosso trabalho baseou-se em buscar um algoritmo que transformasse uma matriz companheira para a sua forma similar de Schwarz, culminando em um algoritmo que transforma uma matriz arbitrária para sua forma similar de Schwarz. Obviamente com a utilização de tais algoritmo, podemos analisar a estabilidade de uma matriz qualquer, pois uma transformação de similaridade não modifica os seus autovalores.

Este trabalho está subdividido em quatro capítulos.

CAPÍTULO I

Este capítulo contém a colocação geral do problema matricial, nosso objetivo central, e a descrição geral do conteúdo da tese.

CAPÍTULO II

Este capítulo contém conceitos básicos, definições e teoremas que fornecem uma base razoável para a compreensão da tese.

CAPÍTULO III

Este capítulo contém as equações matriciais mais utilizadas, com alguns casos especiais de interesse, que ajudam a situar o problema em estudo.

CAPÍTULO IV

Este capítulo é o núcleo central da tese e contém o de desenvolvimento do nosso algoritmo bem como uma análise das operações envolvidas, comentários e conclusões.

CAPÍTULO II

ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS

2.1 DEFINIÇÕES E TEOREMAS

2.1.1 Autovalor e Autovetor

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e λ um escalar, tal que

$$AX = \lambda X, \quad X \neq 0,$$

então, λ é chamado autovalor da matriz A e o vetor X é chamado autovetor de A correspondente a λ .

2.1.2 Polinômio Característico

Para uma matriz $A_{n \times n}$, o polinômio característico de A é;

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det (\lambda I_n - A) \\ &= \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_n \end{aligned}$$

A matriz $\lambda I_n - A$ é chamada matriz característica de A e a equação;

$$p(\lambda) = 0$$

é a equação característica de A .

2.1.3 Teorema

Para os p_i , coeficientes de polinômio característico, são válidas as seguintes relações:

$$p_1 = -\operatorname{tr}(A)$$

⋮

$$p_k = (-1)^k \cdot (\text{soma de todos os menores principais de ordem } k \text{ de } A)$$

⋮

$$p_n = (-1)^n \cdot \det(A)$$

2.1.4 Teorema de Cayley - Hamilton

Toda matriz A quadrada satisfaz a sua equação característica, isto é,

$$A^n + p_1 A^{n-1} + \dots + p_n I_n = 0$$

ou seja

$$p(A) = 0$$

2.1.5 Polinômio Mônico

O polinômio cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a unidade é chamado polinômio mônico.

2.1.6 Polinômio Mínimo

Além do polinômio característico podem existir outros polinômios $p_c(x)$ de grau menor ou igual a n , tais que $p_c(A) = 0$. Entre esses polinômios, o polinômio mônico de grau mínimo é chamado polinômio mínimo da matriz A .

2.1.7 Matriz não derogatória

Uma matriz A com o polinômio característico idêntico ao polinômio mínimo é chamada matriz não-derrogatória, caso contrário é chamada matriz derogatória.

2.1.8 Matriz Companheira

A matriz C da forma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

é chamada matriz companheira associada ao polinômio

$$p_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - c_n \lambda^{n-1} - c_{n-1} \lambda^{n-2} \dots - c_2 \lambda - c_1)$$

que é o polinômio característico de C .

2.1.9 Matriz Tridiagonal

A matriz da forma

$$\begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_{n,n-1} & \dots & t_{n,n} \end{bmatrix}$$

é chamada matriz tridiagonal

2.1.10 Matriz de Hessenberg

A matriz da forma

$$\begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & \dots\dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1,1} & h_{n-1,2} & h_{n-1,3} & \dots\dots\dots h_{n-1,n}^0 \\ h_{n,1} & h_{n,2} & h_{n,3} & h_{n,n} \end{bmatrix}$$

ou

$$h_{i,j} = 0, \text{ quando } i < j-1$$

é chamada matriz de Hessenberg inferior

2.2 OS TEOREMAS DE INÉRCIA

2.2.1 Definição

A inércia de uma matriz A é definida pela tripla $(\pi(A), \nu(A), \gamma(A))$ que são respectivamente os números de autovalores de A com partes reais positivas, negativas e nulas.

A inércia de A é denotada por $I_n(A)$.

Diversos teoremas de inércia, têm sido obtidos ultimamente⁽⁵⁾. Um aspecto básico desses teoremas é o seguinte: dada uma matriz A , arbitrária, sob certas condições, mostrar a existência de uma matriz hermitiana H cuja inércia é a mesma de A . Obviamente se a matriz existir e for computada, nós podemos utilizar os procedimentos numericamente estáveis e eficientes existentes na literatura, para a solução dos autovalores de matrizes.

2.2.2 Teorema de Carlson e Datta

Carlson e Datta, apresentaram um método para construir H , quando A é uma matriz Hessenberg inferior, com codiagonal unitária.

Praticamente não há perda de generalidade ao assumir esta forma particular de A , pois qualquer matriz A , não derogatória, pode ser transformada numa matriz de Hessenberg, e isto pode ser feito por meio de métodos numericamente estáveis e eficientes como os de Givens⁽⁸⁾ e Householder⁽⁹⁾.

Além disso o aparecimento de um zero na codiagonal da matriz transformada de Hessenberg, reduz o problema de autovalores da matriz original, para um problema de ordem inferior⁽¹¹⁾.

Descrição do Método de Carlson-Datta

Seja $A = a_{ij}$ uma matriz $n \times n$ ($n > 1$) Hessenberg inferior complexa, com codiagonal unitária, isto é $a_{i,i+1} = 1$ para $i = 1, 2 \dots n-1$ e $a_{i,j} = 0$ para $j > i+1$

PASSO 1

Construa uma matriz triangular inferior $L = (\ell_{ij})$, com diagonal $(1, -1, 1 \dots (-1)^{n-1})$ que satisfaça a equação matricial

$$LA + \bar{A}L = R \quad (2.1)$$

onde as $n-1$ primeiras linhas de R são nulas. Os $\frac{n(n-1)}{2}$ elementos abaixo da diagonal principal são determinados comparando os elementos na respectiva posição em ambos os lados de (2.1), e a ordem na qual os ℓ_{ij} devem ser calculados é:

$$\ell_{21}, (\ell_{31}, \ell_{32}), (\ell_{41}, \ell_{42}, \ell_{43}) \dots$$

PASSO 2

Tendo construído a matriz L , calcule a última linha de R .
Chame essa linha de r .

PASSO 3

Construa a matriz S , tendo as linhas $S_1, S_2 \dots S_n$ definidas por

$$S_n = r$$

$$S_i = S_{i+1} A - a_{i+1, i+1} S_{i+1} - \dots - a_{n, i+1} S_n$$

$$i = n-1, n-2, \dots, 2, 1$$

PASSO 4

Calcule $H = L^*S$

(4)

Teorema de Carlson-Datta

Dada uma matriz de Hessenberg inferior A , com codiagonal unitária, e H construída como acima.

- i) Se H é não singular, então $\det(A) \neq 0$
- ii) H é hermitiana, $I_n(A) = I_n(H)$ A é estável se e somente se H é negativa definida.

Exemplo:

Considere a matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

com autovalores 1, 2, 3, 4.

PASSO 1

Construir a Matriz L.

$$\ell_{21} = -2, \ell_{31} = 6, \ell_{41} = -24, \ell_{42} = -36, \ell_{43} = -12$$

PASSO 2

Calcular a última linha de R.

$$r = (-24, -36, -12, -1) A + (0, 0, 0, 4) L = (-120, -240, -120, -20)$$

PASSO 3

Construir a matriz S com última linha r

$$S_4 = r = (-120, -240, -120, -20)$$

$$S_3 = S_4 A - a_{44} S_4 = S_4 (A - a_{44} I) =$$

$$= (-120, -240, -120, -20) \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (360, 360, -120, -120)$$

$$S_2 = S_3 A - a_{33} S_3 - a_{43} S_4$$

$$= S_3(A - a_{33} I) = (360, 360-120, -120) \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (-720, 0, 360, -240)$$

$$S_1 = S_2 A - a_{22} S_2 - a_{33} S_3 - a_{42} S_4$$

$$= S_2(A - a_{22} I) = (-720, 0, 360, -240) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (720, -720, 360, -120)$$

PASSO 4

Construir a matriz $H = L^* S$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -24 \\ 0 & -1 & 6 & -36 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 720 & -720 & 360 & -120 \\ -720 & 0 & 360 & -240 \\ 360 & 360 & -120 & -120 \\ -120 & -240 & -120 & -20 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 7200 & 7200 & 1800 & 120 \\ 7200 & 10800 & 3240 & 240 \\ 1800 & 3240 & 1320 & 120 \\ 120 & 240 & 120 & 20 \end{bmatrix}$$

Pode ser verificado que a matriz H , é positiva definida e portanto nos concluímos que todos autovalores de A tem parte real positiva.

2.2.3 Teorema de Chen-Wimmer⁽⁷⁾

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e X uma matriz hermitiana, tal que $AX + XA^* = C$, onde C é positiva semi-definida e o posto de $(C, AC, A^2C \dots A^{n-1}C) = n$ então $\text{In}(A) = \text{In}(X)$

2.3 ESTABILIDADE E ALGUNS CONCEITOS RELACIONADOS

2.3.1 Definição de Estabilidade

a) A matriz A cujos autovalores têm partes reais negativas é chamada matriz estável.

b) A equação $\dot{x} = Ax$, onde $(\cdot)$ denota diferenciação no tempo, com coeficiente matricial A (estável) tem somente soluções estáveis.

2.3.2 O Esquema de Routh⁽²⁾

Considere o polinômio

$$f_r(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \dots a_n z + b_n \quad (2.2)$$

O esquema de Routh para o polinômio acima consiste na obtenção dos elementos do quadro abaixo.

$$\begin{array}{cccc}
 a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \dots \\
 b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \dots \\
 c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \dots \\
 d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

onde

$$c_0 = a_1 - \frac{a_0}{b_0} b_1 ; c_1 = a_2 - \frac{a_0}{b_0} b_2 ; c_3 = a_3 - \frac{a_0}{b_0} b_3$$

$$d_0 = b_1 - \frac{b_0}{c_0} c_1 ; d_1 = b_2 - \frac{b_0}{c_0} c_2 ; d_2 = b_3 - \frac{b_0}{c_0} c_3$$

2.3.3 Matriz de Hurwitz

A matriz de Hurwitz para o polinômio (2.2) é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & b_0 & \dots & b_{n-2} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} \end{bmatrix}$$

2.3.4 Menores principais da matriz de Hurwitz

$$\Delta_1 = H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Delta_2 = H \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \dots$$

$$\Delta_n = H \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

2.3.5 Critério de Routh-Hurwitz⁽²⁾

Todas as raízes do polinômio real (2.2) tem partes reais negativas se e somente se as desigualdades $\Delta_1 > 0$; $\Delta_2 > 0$, ... $\Delta_n > 0$ são satisfeitas.

CAPÍTULO III

EQUAÇÕES MATRICIAIS

3.1 EQUAÇÃO MATRICIAL GERAL

Em muitos problemas físicos obtemos um grande conjunto de equações as quais podem ser representadas compactamente numa forma matricial.

A equação matricial geral é da forma

$$A_1 XB_1 + A_2 XB_2 + \dots A_n XB_n = C \quad (3.1)$$

onde as matrizes A_i são conhecidas e X incôgnita.

É muito importante sabermos operar com essas equações, para tal, temos diversos métodos os quais serão expostos a seguir.

3.1.1 Método de Sylvester para solução da equação matricial geral

A equação (3.1) foi primeiramente estudada por Sylvester, ele observou que a equação (3.1) é essencialmente equivalente ao sistema de n^2 equações lineares algébricas e n^2 elementos x_{rs} de x , reduzindo assim o problema de resolver a equação (3.1) para a solução do sistema de equação lineares da forma

$Gx = C$, portanto esse método praticamente retorna a origem prática do problema.

Posteriormente descobriu-se que a matriz G , do sistema era a soma dos produtos diretos entre as matrizes A_i e B_i .

$$G = (A_1 \times B_1^T + \dots A_n \times B_n^T) \quad (3.2)$$

Portanto, temos o seguinte teorema:

TEOREMA DE MACDUFFE

A condição necessária e suficiente para que a equação (3.1) tenha uma solução é que as matrizes G e a matriz augmentada $[G, c]$ tenham o mesmo posto.

EXEMPLO

Sejam: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Vamos resolver a equação matricial

$$A \times B = C$$

temos $G = (A \times B^T)$ $G = \begin{bmatrix} a_{11} & B^T & a_{12} & B^T \\ a_{21} & B^T & a_{22} & B^T \end{bmatrix}$

Resolvendo $Gx = C$ $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1/3 \\ -3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

Como podemos verificar G , e $|G, c|$, têm o mesmo posto.

3.1.2 Método de Wedderburn

Em 1904 Wedderburn⁽¹⁹⁾ deu uma solução para equação matricial (3.1) na forma de séries infinitas, e mostrou que a solução quando existe, pode ser exibida como uma função analítica dos coeficientes. Ele considerou primeiramente a seguinte equação linear

$$X - AXB = C \quad (3.3)$$

De (3.3) temos:

$$X = C + AXB$$

Substituindo X no segundo termo do lado esquerdo de (3.3), obtemos

$$X - A(C + AXB) = C$$

$$X - ACB - A^2XB^2 = C$$

Repetindo esse processo n-vezes temos:

$$X - A^{n+1}XB^{n+1} = C + ACB + A^2CB^2 + \dots A^nCB^n = \pi_n \quad (3.4)$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n$ quando é convergente, será solução de (3.3).

A equação matricial (3.1), pode ser resolvida desta maneira colocando-a na forma (3.3). Para isto basta escolher uma matriz A_j e pré-pós multiplicá-la a cada termo de (3.1) por A_j^{-1} e B_j^{-1} respectivamente.

A solução geral X neste caso pode ser colocada na seguinte forma

$$X = C + PC + P^2C + \dots$$

onde P é uma matriz de ordem n^2

3.2 A EQUAÇÃO $AX = XB$

A equação matricial $AX = XB$ é de grande utilidade prática por representar um grande número de problemas físicos reais.

3.2.1 A existência da solução e discussão geral

A equação

$$AX = XB \quad (3.5)$$

é um caso especial da equação (3.1). É conhecido que a equação (3.5) tem uma solução, não singular, se somente se, as matrizes $(\lambda I - A)$ e $(\lambda I - B)$ tem o mesmo fator invariante. Isto

segue de fato que, quando X é não singular as matrizes A e B são similares, e duas matrizes são similares, se somente se, as correspondentes matrizes características tem o mesmo fator invariante. Por outro lado, a equação (3.5) é equivalente ao sistema de equações lineares homogêneo.

$$Gx = 0 \quad (3.6)$$

onde $G = (A \times I - I \times B^T)$

Os autovalores da matriz G são os n^2 números $\lambda_r - u_s$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de A e $u_1, \dots, u_n$ são autovalores de B . Da teoria de sistemas de equações lineares segue que (3.6) tem solução não trivial se, e somente se, G é singular, isto é, se somente se G tem zero como autovalor.

Então chegamos ao seguinte teorema.

TEOREMA 3.1 A condição necessária e suficiente para que a equação $AX = XB$ tenha solução não trivial é que A e B tenham pelo menos um autovalor em comum.

Notamos que $X = 0$ é sempre solução de (3.5) e que todas soluções não triviais são linearmente independentes.

O teorema a seguir dá o número de soluções independentes e foi adaptado de MacDuffe⁽⁵⁾.

TEOREMA 3.2 A equação $AX = XB$ tem $\sum e_{rs}$ soluções linearmente independentes onde e_{rs} é o grau do maior divisor comum dos fatores invariantes de a_r de $\lambda I - A$, e b_s de $\lambda I - B$.

3.2.2 A construção da solução geral

A equação (3.5) foi primeiramente discutida por Cayley em 1885 e desde então vários autores a tem estudado, e obtido diferentes técnicas de solução. Entre as várias provas existentes, a técnica usada por Gantmacher⁽³⁾ mostrou-se a técnica mais usada e mais eficiente não somente para obter a solução de (3.5), mas também para outros vários casos de equações do mesmo tipo.

3.2.2.1 O método de Gantmacher para a solução de $AX = XB$

Sejam as matrizes A e B reduzidas para as suas respectivas formas canônicas de Jordan.

$$\bar{A} = U^{-1}AU \quad \text{e} \quad \bar{B} = V^{-1}BV$$

A equação (3.5) é então transformada para

$$\bar{A}\bar{X} = \bar{X}\bar{B} \tag{3.7}$$

$$\text{onde } \bar{X} = U^{-1}XV \tag{3.8}$$

A equação (3.7) é primeiramente resolvida para $\bar{X}$ e então X é obtida (3.8).

Para obter a solução (3.7), $\bar{X}$ é particionada em blocos correspondentes a forma quase diagonal de A e B.

$$\bar{X} = (X_{ik}),$$

$$i = 1 \dots u, \quad k = 1 \dots v$$

A equação matricial (3.8) é então dividida em ij equações matriciais.

$$(U_j - \lambda_i)X_{ij} = H_i X_{ij} - X_{ij} G_j \quad (3.9)$$

$$i = 1, \dots, u, \quad j = 1, \dots, v$$

as matrizes H_i e G_j aparecem nas expressões para a forma canônica de A e B.

Dois casos são agora considerados

$$\text{caso (i)} \quad \lambda_i \neq U_j$$

$$\text{caso (ii)} \quad \lambda_i = U_j$$

No primeiro caso, cada $X_{ij} = 0$ e portanto $X = 0$ é solução de (3.7) e também de (3.5). No segundo caso, a equação (3.9) se reduz

$$H_i X_{ij} = X_{ij} G_j \quad (3.10)$$

As matrizes H_i e G_j são tais que os elementos da primeira superdiagonal são iguais a 1, e os demais são zero.

$$X_{ij} = [\xi_{\alpha\beta}]$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, p_i$$

$$\beta = 1, 2, \dots, q_j$$

A ordem das matrizes X_{ij} ... é $p_i \times q_j$

O sistema (3.10) é então equivalente ao sistema de equações escalares.

$$\xi_{i+1,j} = \xi_{i,j-1} \tag{3.11}$$

$$(\xi_{i0} = \xi_{pi+1,j} = 0, \quad i = 1,2 \dots pi; J = 1 \dots q_j)$$

Pode ser facilmente notado na relação acima que, se $p_i = q_j$, cada X_{ij} é uma matriz triangular superior quadrada da forma

$$X_{ij} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{pi} \\ 0 & a_1 & \dots & a_{pi_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_1 \end{bmatrix} = T_{ij}$$

e no caso em que $p_i < q_j$ e $p_i > q_j$, as matrizes X_{ij} são respectivamente da forma

$$X_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & T_{ij} \end{bmatrix}, \quad (0 \text{ é de ordem } q_j - p_i)$$

e

$$X_{ij} = \begin{bmatrix} T_{ij} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (0 \text{ é de ordem } p_i - q_j)$$

EXEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -9 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X} = U^{-1} X V$$

$$X = V^{-1} \tilde{X} U$$

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 11 & 4 & -11 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -9 \\ 12 & 6 & -14 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = XB$$

3.2.3 Teorema de Carlson - Datta sobre a existência de $AX = XB$

Para estudarmos a solução numérica da equação $AX = XB$ temos um teorema básico de Carlson-Datta⁽⁴⁾ que mostra a existência e ao mesmo tempo dá um procedimento numérico para sua solução quando a matriz A for uma matriz de Hessenberg.

Seja A uma matriz de Hessenberg superior com codiagonal unitária. Seja $f_0(t) = 1$, e para $k = 1, \dots, n$ seja $f_k(t)$ o polinômio característico de A (1,2 ... k), a submatriz principal de A , envolvendo as k primeiras linhas e k primeiras colunas.

Então é conhecido que⁽⁹⁾; $f_1(t) = t - a_{11}$, e

$$\begin{aligned}
 f_k(t) &= f_{k-1}(t) (t - a_{kk}) - a_{k,k-1} f_{k-2}(t) \\
 &- \dots - a_{k2} f_1(t) - a_{k1} \quad k = 1, 2 \dots n
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

TEOREMA 3.3 Seja $A_{n \times n}$ de Hessenberg com codiagonal unitária e $B_{p \times p}$. Para cada vetor r com p componentes existe, no máximo uma matriz $X_{n \times p}$ com primeira linha r , satisfazendo a equação $AX = XB$. Esta solução existe, se somente se,

$$r f(B) = 0 \tag{3.13}$$

onde $f(t)$ é o polinômio característico de A . O posto de X é a dimensão do espaço $\langle r, rB, \dots, rB^{n-1} \rangle$. Se $n = p$, X é não singu^lular, se somente se, (B^T, r^T) é controlável, isto é, se posto $(r^T, B^T r^T, \dots, (B^T)^{n-1} r^T) = n$.

Existe uma solução $X \neq 0$ com primeira linha r , para pelo menos um $r \neq 0$, se somente se, o polinômio característico de B e A não são relativamente primos.

Existe uma solução X para todo r , se somente se, o poliⁿômio mínimo de B , divide o polinômio característico de A .

Demonstração:

Seja $x_1, x_2 \dots x_n$ as linhas da matriz $X_{r \times p}$

A equação $AX = XB$ é equivalente ao sistema

$$x_k B = a_{k1} x_1 + \dots + a_{kk} x_k + x_{k+1} \quad k = 1 \dots n-1 \tag{3.14}$$

$$x_n B = a_{n,1} x_1 + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1} + a_{n,n} x_n \quad (3.15)$$

Agora dado o vetor r com p componentes, a fórmula (3.14) fornece um algoritmo para determinar $x_2 \dots x_n$ indutivamente de $x_1 = r$. Então existe no máximo uma solução X da equação $AX = XB$ com $x_1 = r$. Também, dado r , existe solução X com $x_1 = r$, se somente se, a fórmula (3.15) é satisfeita para $x_1 = r$ e $x_2 \dots x_n$ determinada pela fórmula (3.14).

Nós podemos dar uma fórmula explícita para $x_2 \dots x_n$ satisfazendo (3.14) para $x_1 = r$.

Resolvendo para $x_2 \dots x_n$ em 3.15, nós obtemos

$$x_{k+1} = r f_k(B) \quad (3.16)$$

Claramente (3.15) é satisfeita para $k=1, x_2=x_1(B-a_{11}I)$, assumimos que é satisfeita para $k = 1, 2 \dots j-1$. Agora usando (3.12), (3.14) e (3.15) para $k = 1, 2 \dots j-1$

$$x_{j+1} = x_j (B - a_{jj}I) - a_{j,j-1}x_{j-1} \dots a_{j2}x_2 -$$

$$a_{j1}x_1 = r \left[f_{j-1}(B) (B-a_{jj}I) - a_{j,j-1}f_{j-2}(B) \dots a_{j2}f_1(B-a_{j1}I) \right]$$

então

$$x_{j+1} = r f_j(B) \quad (3.17)$$

Analogamente, (3.15) é satisfeita, se somente se, $r f(B) = 0$, então

$$\begin{aligned}
 r f(B) &= r f_n(B) \\
 &= r \left| f_{n-1}(B) (B - a_{nn}I) - \right. \\
 &\quad \left. - a_{nn-1} f_{n-2}(B) \dots a_{n2} f_1(B) - a_{n1}I \right| = x_n B - \\
 &\quad - a_{nn} x_n - a_{n,n1} x_{n-1} \dots - a_{n2} x_2 - a_{n1} x_1 \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

As duas últimas afirmações do teorema agora são evidentes.

Seja C_{jk} o coeficiente de t^k em $f_j(t)$, $k=0,1 \dots j-1$ e $J = 1,2 \dots n-1$. De 3.16 nós temos, para qualquer solução X de (3.5) com primeira linha r que

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{10} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ c_{n-10} & \dots & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ r B \\ \vdots \\ r B^{-1} \end{bmatrix}$$

A afirmação sobre o posto e singularidade de X são agora também satisfeitas.

Note que usando 3.16 e 3.18, para $r = e_1, e_2, \dots, e_n$ as linhas da matriz identidade, nós calculamos as linhas de $f(B)$.

3.2.4 Um algoritmo numérico para solução de $AX = XB$

A prova do teorema dado no item (3.2.3) fornece um procedimento numérico para a solução geral da equação $AX = XB$. Este procedimento pode ser formulado da seguinte maneira:

Seja $x_1, x_2 \dots x_n$ as linhas da matriz X e $e_1 \dots e_n$ as linhas da matriz identidade

i) Compute as linhas $e_i f(B)$ de $f(B)$ $i = 1, 2 \dots n$, fazendo $x_1 = e_1$ computando-se $x_2 \dots x_n$ por (3.14) e $e_i f(B)$ por (3.18)

ii) Resolva $x_1 f(B) = 0$ para x_1

iii) Calcule $x_2 \dots x_n$ sucessivamente usando

$$x_{k+1} = x_k B - \sum_{j=1}^k a_{kj} x_j \quad k = 1, 2 \dots n-1$$

OBSERVAÇÃO 1 - Para obter a solução X (não singular) quando ela existe exigimos que x_1 satisfaça $x_1 f(B) = 0$ e também que $(x_1^T, B^T x_1^T, \dots, (B^T)^{n-1} x_1^T)$ tenha posto n .

OBSERVAÇÃO 2 - Se B é também uma matriz de Hessenberg superior com codiagonal unitária então, tão logo a primeira linha de $f(B)$ seja computada em (3.18), nós recorreremos para a fórmula.

$$p_{k+1} = c_{k+1} p(A) = p_k A - \sum_{j=1}^k a_{kj} p_j \quad (3.19)$$

para computar as demais linhas de $f(B)$.

A computação de $f(B)$ neste caso é mais econômica.

EXEMPLOS:

$$1^\circ) \text{ Seja: } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 13 & 12 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Queremos obter a solução X da equação $AX = XB$ onde A é Hessenberg.

i) Calculamos as linhas de $f(B)$

a. Arbitramos x_1 igual a 1a. linha da identidade

$$x_1 = (1, 0, 0)$$

Utilizando-se da relação

$$x_{i+1} = x_i B - \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j$$

Calculamos x_2 e x_3

$$x_2 = x_1 B - a_{11} x_1 = (0, 13, 12)$$

$$x_3 = x_2 B - a_{21} x_1 = (6, 12, 0)$$

$$\begin{aligned}
 e_1 f(B) &= x_3 B - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \\
 &= (18, 90, 72) - (6, 00) - (6, 12, 0) \\
 &= (6, 78, 72)
 \end{aligned}$$

$$e_1 f(B) = (6, 78, 72)$$

b. Escolho x_1 igual a 2a. linha da identidade

$$x_1 = (0, 1, 0)$$

$$x_2 = x_1 B - a_{11}x_1 = (1, 0, 0)$$

$$x_3 = x_2 B - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 = (0, 6, 12)$$

$$\begin{aligned}
 e_2 f(B) &= x_3 B - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 = (6, 18, 12) - \\
 &\quad - (0, 6, 0) - (0, 6, 12) = (6, 6, 0)
 \end{aligned}$$

$$e_2 f(B) = (6, 6, 0)$$

c. Arbitramos x_1 igual a 3a. linha da identidade

$$x_1 = (0, 0, 1)$$

$$x_2 = x_1 B - a_{11}x_1 = (0, 1, 0)$$

$$x_3 = x_2 B - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 = (1, 0, -7)$$

$$e_3 f(B) = x_3 B - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 = (1, 6, 5) - \\ - (0, 0, 6) - (1, 0, -7) = (0, 0, 6)$$

$$e_3 f(B) = (0, 6, 6)$$

temos

$$f(B) = \begin{bmatrix} 6 & 78 & 72 \\ 6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

ii) Resolvendo $x_1 f(B) = 0$

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}) = \begin{bmatrix} 6 & 78 & 72 \\ 6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$6x_{11} + 6x_{12} = 0 \rightarrow \rightarrow \rightarrow x_{11} = -x_{12}$$

$$78x_{11} + 6x_{12} + 6x_{13} = 0$$

$$6x_{12} + 6x_{13} = 0$$

$$78x_{11} - 6x_{11} + 6x_{13} = 72x_{11} + 6x_{13} = 0$$

$$x_{11} = -\frac{1}{12} x_{13}$$

$$x_{11} = -\frac{1}{12} x_{13} \quad \text{escolho} \quad x_{13} = 12 \quad (5)$$

$$x_{11} = -1 \quad \rightarrow \quad x_{12} = 1$$

temos

$$x_1 = (-1, 1, 12)$$

iii) Recorrendo a relação

$$x_{i+1} = x_i B - \sum_{j=1}^k a_{kj} x_j$$

$$x_2 = x_1 B - a_{11} x_1 = (0, 0, 0) - (-1, 1, 12) = (1, -1, -12)$$

$$x_3 = x_2 B - a_{21} x_1 - a_{22} x_2 = (0, 0, 0) - (-7, 7, 84) - (1, -1, -12)$$

$$x_3 = (6, -6, -72)$$

temos a solução

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 12 \\ 1 & -1 & -12 \\ 6 & -1 & -72 \end{bmatrix}$$

VERIFICAÇÃO: AX

$$AX = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 12 \\ 1 & -1 & -12 \\ 6 & -6 & -72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$XB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 12 \\ 1 & -1 & -12 \\ 6 & -1 & -72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 13 & 12 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2^{\circ}) \text{ Seja: } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Queremos obter a solução X da equação matricial $AX = XB$ onde A e B são matrizes de Hessenberg.

i) Calculamos somente a 1a. linha de $f(B)$

$$x_1 = (1, 0, 0)$$

$$x_2 = x_1 B - a_{11} x_1 = (1, 1, 0)$$

$$x_3 = x_2 B - a_{21} x_1 - a_{22} x_2 = (1, 1, 1)$$

$$e_1 f(B) = x_3 B - a_{31} x_1 - a_{32} x_2 - a_{33} x_3 = (0, 0, 0)$$

ii) Recorremos à fórmula

$$f_{k+1} = e_{k+1} f(B)$$

$$e_2 f(B) = f_1 B - b_{11} f_1 = (0, 0, 0)$$

$$e_3 f(B) = f_2 B - a_{11} f_1 = (0, 0, 0)$$

$$\text{portanto } f(B) = 0$$

iii) Resolvendo

$$x_1 f(B) = 0; \text{ se } f(B) = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3º) Seja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Queremos obter a solução X da equação $AX = XB$ onde A é matriz diagonal de blocos, onde cada bloco é uma matriz de Hessenberg;

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Subdividimos x em matrizes x_1 e x_2 de ordem

$$(2 \times 4) \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

Seja $f^{(1)}(t)$ e $f^{(2)}(t)$ respectivamente o polinômio característico de A_1 e A_2

Resolvemos a equação matricial

$$A_1 X_1 = X_1 B \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Calculamos as linhas de $f^{(1)}(B)$

a) escolhemos $x_1^{(1)} = (1, 0, 0, 0)$

Utilizando as relações

$$x_{i+1}^{(1)} = x_1^{(1)} B - \sum_{j=1}^k a_{kj} x_j^{(1)} \quad e$$

$$x_n^{(1)} B - a_{21} x_1 - a_{22} x_2 = 0$$

Calculamos $x_2^{(1)}$ e $e_1 f^{(1)}(B)$

$$\begin{aligned}x_2^{(1)} &= x_1^{(1)} B - a_{11}x_1^{(1)} = (3, -1, -4, 2) - (1, 0, 0, 0) = \\&= (2, -1, -4, 2)\end{aligned}$$

$$e_1 f^{(1)}(B) = x_2^{(1)} B - x_2^{(1)} = (-2, 2, 4, -6) - (2, -1, -4, 2)$$

$$e_1 f^{(1)}(B) = (-4, 3, 8, -8)$$

$$b) \text{ escolho } x_1^{(1)} = (0, 1, 0, 0)$$

$$\begin{aligned}x_2^{(1)} &= x_1^{(1)} B - a_{11}x_1^{(1)} = (2, 3, -2, -4) - (0, 1, 0, 0) = \\&= (2, 2, -2, -4)\end{aligned}$$

$$e_2 f^{(1)}(B) = x_2^{(1)} B - x_2^{(1)} = (2, -2, -2, 4) - (2, 2, -2, -4)$$

$$e_2 f^{(1)}(B) = (0, -4, 0, 8)$$

$$c) \text{ escolho } x_1^{(1)} = (0, 0, 1, 0)$$

$$\begin{aligned}x_2^{(1)} &= x_1^{(1)} B - a_{11}x_1^{(1)} = (2, -1, -3, 2) - (0, 0, 1, 0) = \\&= (2, -1, -4, 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e_3 f^{(1)}(B) &= x_2^{(1)} B - x_2^{(1)} = (-2, 2, 4, -6) - (2, -1, -4, 2) = \\&= (-4, 3, 8, -8)\end{aligned}$$

$$e_3 f^{(1)}(B) = (-4, 3, 8, -8)$$

$$d) \text{ escolho } x_1^{(1)} = (0, 0, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} x_2^{(1)} &= x_1^{(1)} B - a_{11} x_1 = (1, 2, -1, -3) - (0, 0, 0, 1) \\ &= (1, 2, -1, -4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_4 f^{(1)}(B) &= x_2^{(1)} B - x_2^{(1)} = (1, -2, -1, 4) - (1, 2, -1, -4) \\ &= (0, -4, 0, 8) \end{aligned}$$

$$f^{(1)}(B) = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 8 & -8 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \\ -4 & 3 & 8 & -8 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$ii) \text{ Vamos calcular a solução } x_1 \text{ e } x_1^{(1)} f(B) = 0$$

$$(x_{11} \ x_{12} \ x_{13} \ x_{14}) = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 8 & -8 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \\ -4 & 3 & 8 & -8 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{11} = -x_{13}$$

$$-4x_{11} - 4x_{13} = 0$$

$$3x_{11} - 4x_{12} + 3x_{13} - 4x_{14} = 0$$

$$8x_{11} + 8x_{13} = 0$$

$$-8x_{11} + 8x_{12} - 8x_{13} + 8x_{14} = 0$$

$$3x_{11} - 4x_{12} - 3x_{11} - 4x_{14} = 0 \rightarrow 4x_{12} = 4x_{14} \quad x_{12} = x_{14}$$

$$-8x_{11} - 8x_{12} + 8x_{11} + 8x_{14} = 0 \quad 8x_{12} = 8x_{14}$$

$$x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos agora a equação $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$A_2 X_2 = X_2 B$$

i) Calculamos as linhas de $f^{(2)}(B)$

a) Escolho $x_1^{(2)} = (1, 0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} x_2^{(2)} &= x_1^{(2)}(B) - a_{11}x_1^{(2)} = (3, -1, -4, 2) + (1, 0, 0, 0) \\ &= (4, -1, -4, 2) \end{aligned}$$

$$e_1 f^{(2)}(B) = x_2^{(2)}B + x_2^{(2)} = (4, 1, -4, -2) + (4, -1, -4, 2)$$

$$e_1 f^{(2)}(B) = (8, 0, -8, 0)$$

b) escolho $x_1^{(2)} = (0, 1, 0, 0)$

$$\begin{aligned} x_2^{(2)} &= x_1^{(2)} B - a_{11} x_1^{(2)} = (2, 3, -2, -4) + (0, 1, 0, 0) \\ &= (2, 4, -2, -4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 f(B) &= x_2^{(2)} f(B) + x_2^{(2)} = (6, 4, -6, -4) + (2, 4, -2, -4) \\ &= (8, 8, -8, -8) \end{aligned}$$

c) escolho $x_1^{(2)} = (0, 0, 1, 0)$

$$\begin{aligned} x_2^{(2)} &= x_1^{(2)} B - a_{11} x_1^{(2)} = (2, -1, -3, 2) + (0, 0, 1, 0) \\ &= (2, -1, -2, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_3 f(B) &= x_2^{(2)} f(B) + x_2^{(2)} = (2, 1, -2, -2) + (2, -1, -2, 2) \\ &= (4, 0, -4, 0) \end{aligned}$$

d) escolho $x_1^{(2)} = (0, 0, 0, 1)$

$$\begin{aligned} x_2^{(2)} &= x_1^{(2)} B - a_{11} x_1^{(2)} = (1, 2, -1, -3) + (0, 0, 0, 1) \\ &= (1, 2, -1, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_4 f(B) &= x_2^{(2)} f(B) + x_2^{(2)} = (3, 2, -2, -2) + (1, 2, -1, -2) \\ &= (4, 4, -4, -4) \end{aligned}$$

$$f^2(B) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 \\ 8 & 8 & -8 & -8 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

ii) Vamos calcular a solução x_2

$$(x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 \\ 8 & 8 & -8 & -8 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$8x_{21} - 8x_{23} = 0 \quad \rightarrow \quad x_{21} = x_{23}$$

$$8x_{21} + 8x_{22} - 8x_{23} - 8x_{24} = 0 \quad 8x_{21} + 8x_{22} - 8x_{21} - 8x_{24} = 0$$

$$4x_{21} - 4x_{23} = 0 \quad 4x_{21} + 4x_{22} - 4x_{23} - 4x_{24} = 0$$

$$4x_{21} + 4x_{22} - 4x_{23} - 4x_{24} = 0 \quad 8x_{22} = 8x_{24} = 0$$

$$x_{22} = x_{24}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

temos $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

A solução de $AX = XB$ é

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.5 Alguns casos especiais da equação $AX = XB$

Alguns casos especiais da equação $AX = XB$, são bem conhecidos por serem de interesse particular. E a solução dessas equações é facilmente construída, visto que é desnecessário a construção das linhas de $f(B)$, como veremos a seguir.

CASO 1

Seja a equação $AX = XB$, fazemos $B = A$ (matriz de Hessenberg), temos então a equação $AX = XA$.

Neste caso, as soluções X são matrizes que comutam com A . No ítem anterior calculávamos as linhas de $f(B)$ para resolver $x_1 f(B) = 0$, onde $f(B)$ é o polinômio característico de A . Agora não precisamos calcular as linhas de $f(B)$, pois pelo Teorema de Cayley Hamilton $f(A) = 0$. Então x_1 pode ser escolhida arbitrariamente e $x_2 \dots x_n$ computada através da fórmula de recorrência.

$$x_{k+1} = x_k B - \sum_{j=1}^k a_{kj} x_j$$

$$k = 1, 2 \dots n-1$$

Se escolhermos $x_1 = e_1 = (a, 0 \dots 0)$ então (A^T, x^T) é controlável e resultará X (diagonal não singular)

EXEMPLO:

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Escolho $x_1 = (2, 1, 0)$

ii) Calculo x_2 e x_3 recorrendo a fórmula

$$x_{k+1} = x_k B - \sum_{j=1}^k a_{kj} x_j$$

$$x_2 = x_1 B - a_{11} x_1 = (5, 3, 1) - (2, 1, 0) = (3, 2, 1)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 B - a_{21} x_1 - a_{22} x_2 = (10, 5, 3) - (6, 3, 0) - (3, 2, 1) \\ &= (1, 0, 2) \end{aligned}$$

então a solução X de $AX = XA$ é

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Note-se que não escolhemos $x_1 = (a, 0, 0 \dots 0)$

Matriz que comuta com A

Verificação:

$$AX = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$XA = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

OBSERVAÇÃO: Através deste algoritmo achamos as matrizes que comutam com uma matriz de Hessenberg.

CASO 2

Seja a equação $AX = XB$, fazemos $B = A^T$ (A matriz de Hessenberg), temos então a equação $AX = XA^T$.

Neste caso, as soluções X são matrizes simetrizadoras de A, sendo A, AX e XA matrizes simétricas. Como $f(A^T) = 0$, então não necessito calcular as linhas de $f(B)$. A primeira linha de X pode ser escolhida arbitrariamente e $x_2 \dots x_n$ computada através da fórmula de recorrência.

$$x_{k+1} = x_k B - \sum_{j=1}^k a_{kj} x_j \quad k = 1, 2 \dots n-1$$

EXEMPLO:

$$\text{Seja: } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = (2, 1, 1)$$

$$x_2 = x_1 B - a_{11} x_1 = (1, 7, 2)$$

$$x_3 = x_1 B - a_{21} x_1 - a_{22} x_2 = (1, 2, -2)$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{é simetrizadora de } A.$$

Verificação:

$$AX = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 3 \\ 8 & 12 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad XA^T = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 3 \\ 8 & 12 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

3.3 A EQUAÇÃO $AX + XB = C$

3.3.1 A existência e expressão da solução única

A equação matricial $AX + XB = C$ (3.20) onde A , B e C são matrizes conhecidas e X matriz incôgnita, é um caso especial da equação matricial linear geral estudada em (3.1). A equação (3.20) atraiu a atenção de vários autores no passado devido sua relevância nas soluções numéricas de equações diferenciais com problemas de valor inicial e sua importante aplicação em sistemas de equações diferenciais ordinárias.

A equação (3.20) tem solução única se a correspondente equação homogênea

$$AX + XB = 0 \quad (3.21)$$

tem somente solução trivial $X = 0$. Novamente, segue o teorema (3.1) que a equação (3.21) tem somente solução trivial se A e $-B$ tem um autovalor em comum. A seguir temos o seguinte resultado.

Teorema de Rutherford

A condição necessária e suficiente para que (3.20) tenha uma única solução para toda matriz C é que $\lambda_i + \nu_j \neq 0$ para i e j , onde $\{\lambda_i\}$ são os autovalores de A e $\{\nu_j\}$ são os autovalores de B .

Seja os autovalores de A e B , satisfazendo as condições do teorema acima e seja a equação diferencial matricial.

$$\frac{dz}{dt} = AZ + ZB, \quad Z(0) = C \quad (3.22)$$

Pode-se verificar facilmente que

$$Z(t) = e^{At} C e^{Bt} \text{ é solução da equação } (3.22).$$

Admitindo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} C e^{Bt} = 0$$

temos que

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{dt} dt = \int_0^{\infty} AZ dt + \int_0^{\infty} ZB dt$$

$$Z(\infty) - Z(0) = A \left(\int_0^{\infty} Z dt \right) + \left(\int_0^{\infty} Z dt \right) B$$

$$-C = A(-X) + (-X)B$$

então

$$AX + XB = C$$

onde

$$X = - \int_0^{\infty} Z(t) dt$$

$$X = - \int_0^{\infty} e^{At} C e^{Bt} dt$$

a integral $\int_0^{\infty} e^{At} C e^{Bt} dt$ existe, se a parte real dos autovalores de A e B são negativas.

Segue agora o seguinte teorema

Teorema 3.4 - Se os autovalores $\{\lambda_i\}$ de A e $\{\nu_j\}$ de B tem todas as partes reais negativos e se $\lambda_i + \nu_j \neq 0$ para al gum valor i e j, então:

$$X = - \int_0^{\infty} e^{At} C e^{Bt} dt$$

é única solução da equação matricial $AX + XB = C$

3.3.2 A equação matricial de Lyapunov

Um importante caso especial da equação (3.20) é

$$XA + A^T X = C \tag{3.23}$$

onde C é matriz simétrica positiva definida. A equação acima é conhecida como equação matricial de Lyapunov.

3.3.2.1 Condição necessária e suficiente para a solução da equação de Lyapunov.

A condição necessária e suficiente para que a equação (3.23) admita uma solução X (simétrica positiva definida) é que a matriz A seja estável.

Prova: Seja A matriz estável, pelo teorema (3.4), onde a solução X é solução única de (3.20) então a forma explícita de X para a equação (3.23) é

$$X = \int_0^{\infty} e^{At} C e^{At} dt$$

portanto

$$\langle Y^* XY \rangle = \int_0^{\infty} \langle e^{At} Y, C e^{At} Y \rangle dt$$

Desde que e^{At} é sempre não singular e $\langle y, Cy \rangle$ é positiva, a integral é sempre positiva para todo t . Então X é positiva. Inversamente, seja $\lambda = a + b_i$ um autovalor de A , então:

$$AZ = \lambda Z \quad Z \neq 0$$

também

$$Z^* A t = \bar{\lambda} Z^*$$

multiplicando-se a equação (3.23) por Z^* a esquerda e a direita por Z , temos:

$$Z^* (XA + A^T X) Z = -Z^* CZ$$

$$\lambda Z^* XZ + \bar{\lambda} Z^* XZ = -Z^* CZ$$

temos

$$\text{onde } \lambda = a + b_i$$

$$2a (Z^* XZ) = - (Z^* CZ) \quad (3.24)$$

Por hipótese $Z^* XZ$ e Z^* são positivas, concluimos então que a é negativo, portanto A é estável.

3.3.3 Alguns métodos para a solução da equação de Lyapunov

A equação matricial de Lyapunov tem uma importante função na teoria da estabilidade. Esta equação foi estudada por vários autores no passado, não somente por matemáticos, mas por cientistas de muitos outros ramos da ciência aplicada. Muitos artigos foram publicados para a solução dessa equação. A seguir daremos alguns desses métodos.

3.3.3.1 O método de Barnett Storey

Suponha que a equação de Lyapunov

$$XA + A^T X = -C$$

admita a solução X , positiva definida. Desde que X e C são simétricas e positivas definidas, a equação (3.23) pode ser escrita como

$$(XA + 1/2 C)^T + (XA + 1/2 C) = 0$$

onde

$$XA + 1/2 C = S \tag{3.25}$$

onde S é anti-simétrica. Quando A é não singular, X pode ser obtida de (3.25) assim

$$X = (S - \frac{1}{2} C)A^{-1} \tag{3.26}$$

A condição para X ser simétrica é dada por

$$SA^{-1} - 1/2 CA^{-1} = (A^T)^{-1} S - 1/2 (A^T)^{-1} C$$

a qual quando simplificada, reduz-se para a forma

$$A^T S + SA = 1/2 (A^T C - CA)$$

onde S pode ser obtida desta equação encontrando-se somente $\frac{1}{2} |n(n-1)|$ elementos de S.

3.3.3.2 Método de Howland-Senez

O método consiste em construir os conjuntos de matrizes $(S_1 S_2 \dots S_n)$; $(T_1 T_2 \dots T_n)$ e $(D_1 D_2 \dots D_n)$ satisfazendo a equação:

$$SM + M^T S = 2 D$$

e

$$S_j M = T_j + D$$

onde

$S_1 \dots S_n$ são simétricas e as primeiras linhas (colunas) dessas matrizes são linhas (colunas) da identidade, as matrizes T_j são anti-simétricas e $D_1 \dots D_n$ são matrizes diagonais.

Os elementos de S_j e T_j são determinados pela resolução do sistema

$$S_{k1} M_{11} + S_{k2} M_{22} = - S_1 M_k \quad 2 < k < n$$

$$\begin{array}{rcl} S_{k1} M_{12} + S_{k2} M_{22} + S_{k3} M_{32} & = & - S_2 M_k \quad 3 < k < n \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ S_{k1} M_{1n} + S_{k2} M_{2n} + \dots S_{kn} a_{nn} & = & - S_{n-1} M_k \quad k = n \end{array}$$

então a solução (1) é dada por:

$$S = \sum_{J=1}^n P_J S_J \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n p_i D_i = - \frac{1}{2} I$$

EXEMPLO

Seja

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolver a equação

$$SM + M^T S = 2 D$$

$$S = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & a & c \\ z & c & d \end{bmatrix}$$

$$SM = T + D = \begin{bmatrix} y & z & x & 2y + 3z \\ a & c & y + & 2a + 3c \\ c & d & z + & 2c + 3d \end{bmatrix}$$

$$D = dg (y, c, z + 2c + 3d)$$

T é anti-simétrica então:

$$- a = z$$

$$- c = x + 2y + 3z$$

$$- d = y + 2a + 3b$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \text{dg } (0, -1, -11)$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \text{dg } (1, 2, -25)$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \text{dg } (0, 3, -26)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -25 & -26 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = 4$$

e

$$p_3 = -3$$

$$p_2 = -1$$

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 12 \\ 4 & -12 & 28 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 13 \\ 4 & -13 & -32 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO IV

A EQUAÇÃO $XA = SX$ ONDE S É A FORMA CANÔNICA DE SCHWARZ

4.1 O TEOREMA DE SCHWARZ

Seja A uma matriz qualquer e seja S a sua forma similar de Schwarz, com $s_j \neq 0$ $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Então:

a) A matriz A não possui nenhum autovalor com parte real nula.

b) Os números de autovalores de A com partes reais positivas e partes reais negativas são respectivamente iguais aos números negativos e positivos da sequência

$$s_1, s_1 s_2, s_1 s_2 s_3, \dots, s_1 s_2 s_3 \dots s_n$$

Demonstração

Definimos

$$D' = \text{diag} (-s_1 s_2 \dots s_n, -s_1 s_2 \dots s_{n-1}, \dots, -s_1 s_2 \dots s_1)$$

É fácil verificar que

$$\begin{aligned} D'S + S^t D &= 2 \text{diag} (0, 0, \dots, s_1^2) \\ &= 2 (d^{(n)})^t (d^{(n)}) \end{aligned}$$

onde $D^{(n)} = \text{diag } (0, 0 \dots S_1)$

Verificamos que o posto da matriz

$$\left[(d^{(n)})^T S^T d^{(n)} \right]^T, \dots (S^T)^{n-1} (d^{(n)})^T \Big] \text{ é } n$$

Então pelo teorema de Inércia de Chen-Wimmer⁽⁷⁾ temos
que

$$\text{In } (D') = \text{In } (S)$$

4.2 O MÉTODO DE DATTA PARA TRANSFORMAR UMA MATRIZ DE HESSENBERG NUMA MATRIZ DE SCHWARZ

Seja A uma matriz de Hessenberg inferior com codiagonal diferente de zero e $x_1, x_2 \dots x_n$ as sucessivas linhas de X. Então a equação matricial $XA = SX$ é equivalente aos sistemas de equações:

$$a) x_1 A = x_2$$

$$b) x_i A = -S_{n-(i-2)} x_{i-1} + x_{i+1}$$

$$c) x_n A = -S_2 x_{n-1} - S_1 x_n$$

Eliminando-se $x_1, x_2, \dots, x_n$ em (c) temos:

$$x_1 \varnothing(A) = 0$$

$\varnothing(x)$ é o polinômio característico da matriz de Schwarz.

Como as matrizes A e S são similares então $\delta(A) = 0$, portanto podemos escolher x_1 arbitrariamente e a seguir achamos $x_2, x_3 \dots x_n$ recorrendo à (a) e (b).

Se escolhermos $x_1 = (\alpha, 0 \dots 0)$; $\alpha \neq 0$ teremos X uma matriz triangular inferior onde

$$\det X = \alpha^n (a_{12})^{n-1} (a_{23})^{n-2} \dots a_{n-1}^n, \quad \text{desde que}$$

$$a_{i,i+1} \neq 0, \text{ a matriz } X \text{ não será triangular}$$

Observação:

Os elementos da matriz X são obtidos em função dos elementos da matriz S . Efetuando o produto XAX^{-1} teremos uma matriz especial onde as $(n-1)$ primeiras linhas são exatamente as $(n-1)$ primeiras linhas da matriz de Schwarz, a n -ésima linha dessa matriz terá como elementos polinômios em S .

Igualando-se a n -ésima linha da matriz XAX^{-1} com n -ésima linha da matriz de Schwarz, teremos um sistema de n equações com n incógnitas, resolvendo o sistema teremos os elementos da matriz de Schwarz.

4.3 MÉTODOS PARA TRANSFORMAR UMA MATRIZ COMPANHEIRA NUMA MATRIZ DE SCHWARZ POR SIMILARIDADE

4.3.1 Método de Loo

Seja C matriz companheira e T uma matriz triangular inferior. Os elementos da matriz T são obtidos diretamente pelo equacionamento apropriado dos elementos na equação $ST = TC$ e são dados pela seguinte regra.

a) $t_{11} = t_{22} = \dots t_{nn} = 1$

b) Todas as subdiagonais ímpares de T até a q-ésima tem todos os elementos nulos onde

$$q = \frac{n}{2} - 1, \quad n \text{ par}$$

$$q = \frac{n-1}{2}, \quad n \text{ ímpar}$$

c) Os outros elementos de T, diferentes de zero são obtidos de

$$t_{s+2\ell, s} = d'_{n-s-2\ell+2, \ell+1}$$

para $\ell = 1, 2 \dots q$ e $s = 1, 2 \dots n - 2\ell$,

onde d_{ij} , representa a razão entre o ij-ésimo e il-ésimo elemento do esquema de Routh para o polinômio característico de C.

Exemplo para $C_{4 \times 4}$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$p_C(\lambda) = \lambda^4 - C_4 \lambda^3 - C_3 \lambda^2 - C_2 \lambda + C_1$$

$$1) \quad t_{11} = t_{22} = t_{33} = t_{44} = 1$$

$$2) \quad t_{21} = t_{32} = t_{43} = t_{41} = 0$$

$$3) \quad t_{31} = d'_{32} = \frac{d_{32}}{d_{31}}$$

$$t_{42} = d'_{22} = \frac{d_{22}}{d_{21}}$$

Esquema de Routh para $p_C(\lambda)$

1	$-C_3$	$-C_1$
$-C_4$	$-C_2$	0
$-C_3 - \frac{C_2}{C_4}$	$-C_1$	0

então

$$t_{31} = \frac{C_1}{C_3 + \frac{C_2}{C_4}} \quad t_{42} = \frac{C_2}{C_4}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{C_1}{C_3 + \frac{C_2}{C_4}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{C_2}{C_4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

forma canônica
de Schwarz

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{C_1}{C_3 + \frac{C_2}{C_4}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{C_1}{C_3 + \frac{C_2}{C_4}} - \frac{C_2}{C_4} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{C_2}{C_4} + C_3 & C_4 \end{bmatrix}$$

4.3.2 Um Novo Método

Desenvolveremos aqui um novo método para transformar uma matriz companheira em uma matriz de Schwarz por similaridade.

Seja C uma matriz companheira, S uma matriz de Scharwz e X uma matriz tal que:

$$XC = SX \quad (4.1)$$

Utilizando o método de Datta, descrito no item 4.2, no caso particular em que a matriz de Hessenberg é a matriz companheira, concluímos que a equação matricial (4.1) é equivalente ao sistema de equações matriciais:

$$x_1 C = x_2 \quad (4.2)$$

$$x_i X = -s_{n-(i-2)} x_{i-1} + x_{i+1} \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (4.3)$$

$$x_n C = -s_2 x_{n-1} - s_1 x_n \quad (4.4)$$

Eliminando $x_1, x_2, \dots, x_n$ em (4.4) obtemos:

$$x_1 \phi(c) = 0$$

onde ϕ é o polinômio característico de S . Como C e S são si milares então $\phi(c) = 0$, portanto podemos escolher x_1 arbitrariamente e a seguir achamos $x_1, \dots, x_n$ recorrendo a (4.2) e (4.3).

A matriz X obtida por esse método é uma matriz triangu lar inferior cujos elementos são funções de s . Efetuando o pro duto $X A X^{-1}$ e igualando-o à matriz de Schwarz podemos obter um sistema de equações algébricas, o qual foi por nós obtida por indução vulgar, conforme seqüência a seguir.

$$- C_n = s_1$$

$$- C_{n-1} = s_1 + s_2 + \dots s_n$$

$$- C_{n-2} = s_1 (s_3 + s_4 + \dots s_n)$$

$$- C_{n-3} = s_2 (s_4 + s_5 + \dots s_n) + s_3 (s_5 + s_6 + \dots s_n) + \\ \dots s_{n-3} (s_{n-1} + s_n) + s_{n-2} (s_n)$$

$$- C_{n-4} = s_1 s_3 (s_5 + s_6 + \dots s_n) + s_1 s_4 (s_6 + s_7 + \dots s_n) + \\ \dots s_1 s_{n-3} (s_{n-1} + s_n) + s_1 s_{n-2} (s_n)$$

$$- C_{n-5} = s_2 s_4 (s_6 + s_7 + \dots s_n) + s_2 s_5 (s_7 + s_8 + \dots s_n) + \\ \dots s_2 s_{n-3} (s_{n-1} + s_n) + s_2 s_{n-2} (s_n) + \\ s_3 s_5 (s_7 + s_8 + \dots s_n) + s_3 s_6 (s_8 + s_9 + \dots s_n) + \\ \dots s_3 s_{n-3} (s_{n-1} + s_n) + s_3 s_{n-2} (s_n) + \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ s_{n-5} s_{n-3} (s_{n-1} + s_n) + s_{n-5} s_{n-2} (s_n) + \\ s_{n-4} s_{n-2} (s_n)$$

$$\vdots$$

O termo geral será:

Para i par, $i > 0$

$$\text{nº de termos } \frac{i}{2}$$

$C_{n-i} = s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-5}	s_{i-3}	s_{i-1}	$(s_{i+1} + \dots s_n) +$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-5}	s_{i-3}	s_i	$(s_{i+2} + \dots s_n) +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$(s_{n-1} + s_n) +$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-5}	s_{i-3}	s_{n-3}	$s_n +$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-5}	s_{i-3}	s_{n-2}	$(s_{i+2} + \dots s_n) +$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-5}	s_{i-2}	s_i	$(s_{i+3} + \dots s_n) +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-5}	s_{i-2}	s_{i+1}	$(s_{n-1} + s_n) +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$s_n +$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-5}	s_{i-2}	s_{n-3}	$(s_{i+3} + \dots s_n) +$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-5}	s_{i-2}	s_{n-2}	$(s_{i+4} + \dots s_n) +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-5}	s_{i-1}	s_{i+1}	$(s_{n-1} + s_n) +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$s_n +$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-5}	s_{i-1}	s_{n-2}	$s_n +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$s_n +$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-5}	s_{n-4}	s_{n-2}	$(s_{i+2} + \dots s_n) +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$(s_{i+3} + \dots s_n) +$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-4}	s_{i-2}	s_i	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$(s_{n-1} + s_n) +$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-4}	s_{i-2}	s_{i+1}	$s_n +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$(s_{i+3} + \dots s_n) +$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-4}	s_{i-2}	s_{n-3}	$(s_{i+4} + \dots s_n) +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-4}	s_{i-1}	s_{i+2}	$(s_{n-1} + s_n) +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$s_n +$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{i-4}	s_{i-1}	s_{n-2}	$s_n +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$s_n +$
$s_1 s_3 s_5 \dots$	s_{i-7}	s_{n-6}	s_{n-4}	s_{n-2}	$s_n +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s_1 s_{n-(i-2)} s_{n-(i-4)}$	s_{n-8}	s_{n-6}	s_{n-4}	s_{n-2}	s_n

Para i para, $i > 1$

$$\begin{array}{c}
 \text{nº de termos } \frac{i-1}{2} \\
 \hline
 C_{n-i} = s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-5} & s_{i-3} & s_{i-1} \\ \hline \end{array} (s_{i+1} + \dots s_n) + \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-5} & s_{i-3} & s_i \\ \hline \end{array} (s_{i+2} + \dots s_n) + \\
 \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-5} & s_{i-3} & s_{n-3} \\ \hline \end{array} (s_{n-1} + s_n) + \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-5} & s_{i-3} & s_{n-2} \\ \hline \end{array} s_n + \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-5} & s_{i-2} & s_i \\ \hline \end{array} (s_{i+2} + \dots s_n) + \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-5} & s_{i-2} & s_{i+1} \\ \hline \end{array} (s_{i+3} + \dots s_n) + \\
 \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-5} & s_{i-2} & s_{n-3} \\ \hline \end{array} (s_{n-1} + s_n) + \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-5} & s_{i-2} & s_{n-2} \\ \hline \end{array} s_n + \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-5} & s_{i-1} & s_{i+1} \\ \hline \end{array} (s_{i+3} + \dots s_n) + \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-5} & s_{i-1} & s_{i+2} \\ \hline \end{array} (s_{i+4} + \dots s_n) + \\
 \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-5} & s_{i-1} & s_{n-3} \\ \hline \end{array} (s_{n-1} + s_n) + \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-5} & s_{i-1} & s_{n-2} \\ \hline \end{array} s_n + \\
 \hline
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-5} & s_{n-4} & s_{n-2} \\ \hline \end{array} s_n \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-4} & s_{i-2} & s_i \\ \hline \end{array} (s_{i+2} + \dots s_n) + \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-4} & s_{i-2} & s_{i+1} \\ \hline \end{array} (s_{i+3} + \dots s_n) + \\
 \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-4} & s_{i-2} & s_{n-3} \\ \hline \end{array} (s_{n-1} + s_n) + \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-4} & s_{i-2} & s_{n-2} \\ \hline \end{array} s_n \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-4} & s_{i-1} & s_{n-2} \\ \hline \end{array} (s_{i+3} + \dots s_n) + \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-4} & s_{i-1} & s_{i+2} \\ \hline \end{array} (s_{i+4} + \dots s_n) + \\
 \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-4} & s_{i-1} & s_{n-3} \\ \hline \end{array} (s_{n-1} + s_n) + \\
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{i-4} & s_{i-1} & s_{n-2} \\ \hline \end{array} s_n + \\
 \hline
 s_2 s_4 s_6 \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{i-7} & s_{n-6} & s_{n-4} & s_{n-2} \\ \hline \end{array} s_n + \\
 \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\
 s_{n-(i-1)} \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{n-8} & s_{n-6} & s_{n-4} & s_{n-2} \\ \hline \end{array} s_n
 \end{array}$$

$$- C_n = s_1$$

$$- C_{n-1} = \sum_{\ell=2}^n s_\ell$$

$$- C_{n-2} = s_1 \sum_{\ell=3}^n s_\ell$$

$$- C_{n-3} = \sum_{k=2}^{n-2} s_k \left(\sum_{\ell=k+2}^n s_\ell \right)$$

$$- C_{n-5} = \sum_{m=2}^{n-4} s_m \left\{ \sum_{k=m+2}^{n-2} s_k \left(\sum_{\ell=k+2}^n s_\ell \right) \right\}$$

$$\vdots$$

$$- C_{n-i} = \sum_{j_1=2}^{n-(i-1)} s_{j_1} \sum_{j_2=j_1+2}^{n-(i-3)} s_{j_2} \sum_{j_3=j_2+2}^{n-(i-5)}$$

$$\dots \sum_{j_{m-1}=j_{m-2}+2}^{n-2} s_{j_{m-1}} \sum_{j_m=j_{m-1}+2}^n s_{j_m} \quad \begin{array}{l} \text{para} \\ \text{i "impar"} \end{array}$$

$$- C_{n-i} = s_1 \left\{ \sum_{j_1=3}^{n-(i-2)} s_{j_1} \sum_{j_2=j_1+2}^{n-(i-4)} s_{j_2} \sum_{j_3=j_2+2}^{n-(i-6)} s_{j_3} \dots \right.$$

$$\left. \dots \sum_{j_{m-1}=j_{m-2}+2}^{n-2} s_{j_{m-1}} \sum_{j_m=j_{m-1}+2}^n s_{j_m} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{para} \\ \text{i "par"} \end{array}$$

$$\vdots$$

$$- C_1 = \det S.$$

Analisando estas equações, podemos concluir que a matriz companheira C , somente será estável, se todos os C_i forem negativos. Esta importante conclusão permite obter de imediato uma condição necessária para a estabilidade da matriz companheira C .

Resolvendo sucessivamente as equações dos elementos da matriz de Schwarz S , em termos dos elementos da matriz companheira C , inicialmente para baixos valores de n , generalizando posteriormente para n qualquer, chegamos as seguintes relações, que são válidas tanto para n par, como para n ímpar.

$$s_1 = -C_n$$

$$s_2 = -C_{n-1} - \frac{C_{n-2}}{C_n}$$

$$s_3 = \frac{C_{n-2}}{C_n} - \frac{C_{n-3} + \frac{C_{n-4}}{C_n}}{C_{n-1} + \frac{C_{n-2}}{C_n}}$$

$$s_4 = \frac{C_{n-3} + \frac{C_{n-4}}{C_n}}{C_{n-1} + \frac{C_{n-2}}{C_n}} - \frac{\frac{C_{n-4}}{C_n} - \frac{C_{n-5} + \frac{C_{n-6}}{C_n}}{C_{n-1} + \frac{C_{n-2}}{C_n}}}{\frac{C_{n-2}}{C_n} - \frac{C_{n-3} + \frac{C_{n-4}}{C_n}}{C_{n-1} + \frac{C_{n-2}}{C_n}}}$$

$$s_5 = \frac{\frac{C_{n-5}}{C_n} - \frac{C_{n-5} + \frac{C_{n-6}}{C_n}}{C_{n-1} + \frac{C_{n-4}}{C_n}}}{\frac{C_{n-2}}{C_n} - \frac{C_{n-3} + \frac{C_{n-4}}{C_n}}{C_{n-1} + \frac{C_{n-2}}{C_n}}} -$$

$$\frac{\frac{C_{n-5} + \frac{C_{n-6}}{C_n}}{C_{n-1} + \frac{C_{n-2}}{C_n}} - \frac{\frac{C_{n-6}}{C_n} - \frac{C_{n-7} + \frac{C_{n-8}}{C_n}}{C_{n-3} + \frac{C_{n-4}}{C_n}}}{\frac{C_{n-2}}{C_n} - \frac{C_{n-3} + \frac{C_{n-4}}{C_n}}{C_{n-1} + \frac{C_{n-3}}{C_n}}}}{\frac{C_{n-3} + \frac{C_{n-4}}{C_n}}{C_{n-1} + \frac{C_{n-2}}{C_n}} - \frac{\frac{C_{n-4}}{C_n} - \frac{C_{n-5} + \frac{C_{n-6}}{C_n}}{C_{n-1} + \frac{C_{n-2}}{C_n}}}{\frac{C_{n-2}}{C_n} - \frac{C_{n-3} + \frac{C_{n-4}}{C_n}}{C_{n-1} + \frac{C_{n-2}}{C_n}}}}$$

⋮

Após uma cuidadosa análise podemos notar que estas equações podem ser colocadas numa forma recursiva, de modo que cada s_i dependa exclusivamente dos s_i anteriores, o que facilitará extremamente tanto a compactação das equações quanto a solução computacional do problema.

$$s_1 = - C_n$$

$$s_2 = - C_{n-1} + \frac{C_{n-2}}{s_1}$$

$$s_3 = - \frac{C_{n-2}}{s_1} + \frac{C_{n-3}}{s_2} - \frac{C_{n-4}}{s_1 s_2}$$

$$s_4 = \frac{1}{s_2} (- C_{n-3} + \frac{C_{n-4}}{s_1}) + \frac{1}{s_3} (\frac{C_{n-4}}{s_1} - \frac{C_{n-5}}{s_2} + \frac{C_{n-6}}{s_1 s_2})$$

(A)

$$s_5 = - \frac{1}{s_3} (\frac{C_{n-4}}{s_1} - \frac{C_{n-5}}{s_2} + \frac{C_{n-6}}{s_1 s_2}) - \frac{1}{s_2 s_4} (- C_{n-5} + \frac{C_{n-6}}{s_1})$$

$$- \frac{1}{s_3 s_4} (\frac{C_{n-6}}{s_1} - \frac{C_{n-7}}{s_2} - \frac{C_{n-8}}{s_1 s_2})$$

$$s_6 = - \frac{1}{s_2 s_4} (- C_{n-5} + \frac{C_{n-6}}{s_1}) + \frac{1}{s_3 s_4} (\frac{C_{n-6}}{s_1} - \frac{C_{n-7}}{s_2} - \frac{C_{n-8}}{s_1 s_2})$$

$$+ \frac{1}{s_3 s_5} (\frac{C_{n-6}}{s_1} - \frac{C_{n-7}}{s_2} + \frac{C_{n-8}}{s_1 s_2}) + \frac{1}{s_2 s_4 s_5} (- C_{n-7} + \frac{C_{n-8}}{s_1})$$

$$+ \frac{1}{s_3 s_4 s_5} (\frac{C_{n-8}}{s_1} - \frac{C_{n-9}}{s_2} + \frac{C_{n-10}}{s_1 s_2})$$

⋮

Podemos compactar ainda mais essas equações, deixando-as na forma seguinte, de maneira a facilitar sua computação.

i) Caso a matriz companheira C, seja de ordem par.

$$s_1(n) = -C_n \quad n = 2k; k = 1 \dots \frac{N}{2}$$

$$s_2(n) = -C_{n-1} - \frac{s_1(n-2)}{s_1(N)} \quad n = 2k; k = 1 \dots \frac{N}{2}$$

$$s_3(n) = \frac{s_1(n-2)}{s_1(N)} - \frac{s_2(n-2)}{s_2(N)} \quad n = 2k; k = 2 \dots \frac{N}{2}$$

$$s_4(n) = \frac{s_2(n-2)}{s_2(N)} - \frac{s_3(n-2)}{s_3(N)} \quad n = 2k; k = 2 \dots \frac{N}{2}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$s_{N-1}(n) = \frac{s_{N-3}(n-2)}{s_{N-3}(N)} - \frac{s_{N-2}(n-2)}{s_{N-2}(N)} \quad n = N - 2$$

$$s_N(N) = \frac{s_{N-2}(n-2)}{s_{N-2}(N)} \quad n = N$$

Onde N é a ordem da matriz

Para calcular os elementos da matriz de Schwarz de ordem par, necessitamos calcular somente os $s_i(n)$ com n par.

Por exemplo:

Se quisermos calcular os elementos $s_1 \dots s_6$ sendo a ordem da matriz igual a 6, necessitamos calcular:

$$s_1(6)$$

$$s_2(6) + s_1(4)$$

$$s_3(6) + s_2(4) + s_1(2)$$

$$s_4(6) + s_3(4) + s_2(2)$$

$$s_5(6) + s_4(4)$$

$$s_6(6)$$

ii) Caso a matriz companheira C , seja de ordem ímpar

$$n = 2k-1$$

$$s_1(n) = -C_n \quad k = 1 \dots \frac{N+1}{2}$$

$$s_2(n) = -C_{n-1} - \frac{s_1(n-2)}{s_1(N)} \quad k = 1 \dots \frac{N+1}{2}$$

$$s_3(n) = -\frac{s_1(n-2)}{s_1(N)} - \frac{s_2(n-2)}{s_2(N)} \quad k = 2 \dots \frac{N+1}{2}$$

$$s_4(n) = \frac{s_2(n-2)}{s_2(N)} - \frac{s_3(n-2)}{s_3(N)} \quad k = 2 \dots \frac{N+1}{2}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$s_{N-1}(n) = \frac{s_{N-3}(n-2)}{s_{N-3}(N)} - \frac{s_{N-2}(n-2)}{s_{N-2}(N)} \quad n = N-2$$

$$s_N(N) = \frac{s_{N-2}(n-2)}{s_{N-2}(N)} \quad n = N$$

De modo análogo, para calcular os elementos da matriz de Schwarz de ordem ímpar, necessitamos calcular somente os $s_i(n)$ com n ímpar.

Por exemplo, caso quisermos calcular os elementos $s_1, \dots, s_7$ sendo a ordem da matriz igual a 7, necessitamos calcular:

$$s_1(7)$$

$$s_2(7) + s_1(5)$$

$$s_3(7) + s_2(5) + s_1(3)$$

$$s_4(7) + s_3(5) + s_2(3) + s_1(1)$$

$$s_5(7) + s_4(5) + s_3(3)$$

$$s_6(7) + s_5(5)$$

$$s_7(7)$$

Finalmente, numa forma computacional temos:

i) Para matrizes de ordem PAR

$$\left. \begin{aligned} s_1(n) &= -C_n \\ s_2(n) &= -C_{n-1} - \frac{s_1(n-2)}{s_1(N)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &= 2k \\ k &= 1 \dots \frac{N}{2} \end{aligned}$$

$$s_i(n) = \frac{s_{i-2}(n-2)}{s_{i-2}(N)} - \frac{s_{i-1}(n-2)}{s_{i-1}(N)}$$

$$i = 3 \dots N$$

$$n = 2k$$

$$k = 2 \dots \frac{N}{2}$$

ii) Para matrizes de ordem ÍMPAR

$$\left. \begin{aligned} s_1(n) &= -C_n \\ s_2(n) &= -C_n - \frac{s_1(n-2)}{s_n(N)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &= 2k-1 \\ k &= 1 \dots \frac{N+1}{2} \end{aligned}$$

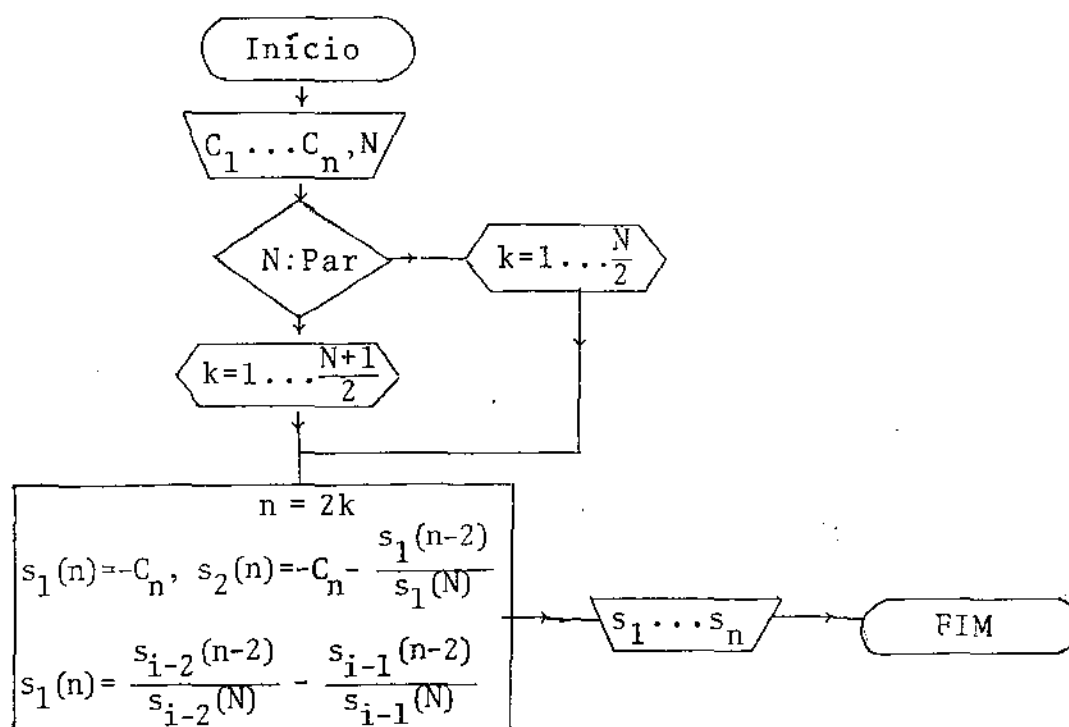
$$s_i(n) = \frac{s_{i-2}(n-2)}{s_{i-2}(N)} - \frac{s_{i-1}(n-2)}{s_{i-1}(N)}$$

$$i = 3 \dots N$$

$$n = 2k-1$$

$$k = 2 \dots \frac{N+1}{2}$$

A listagem do programa de computador que calcula esses valores de s_i , está no apêndice, e o diagrama de blocos no qual o programa se baseia esta descrito abaixo.



Exemplo:

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz companheira}$$

Calculando os s da matriz Schwarz

$$s_1(4) = -5$$

$$s_2(4) = -4 - \frac{3}{5} = -\frac{23}{5}$$

$$s_3(4) = \frac{3}{5} - \frac{2}{\frac{23}{5}} = \frac{19}{115}$$

$$s_4(4) = \frac{10}{23}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{10}{23} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{19}{115} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{23}{5} & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Matriz de} \\ \text{Schwarz} \end{array}$$

4.3.2.1 Aplicação

Com este novo método para transformar uma matriz companheira em sua forma similar de Schwarz, podemos resolver o problema de estabilidade de qualquer equação diferencial linear completa de ordem n , visto que essas equações podem ser transformadas para um sistema de primeira ordem, como veremos a seguir:

Consideremos a equação diferencial linear da seguinte forma:

$$x^{(n)} - c_1 x^{(n-1)} - \dots - c_{n-1} x' - c_n = 0$$

definimos novas variáveis de acordo com o sistema;

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x' \\ &\vdots \\ x_n &= x^{(n-1)} \end{aligned}$$

Então a equação diferencial acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= c_1 x_n + \dots + c_{n-1} x_1 + c_n \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

4.4 UMA NOVA DEDUÇÃO DO TEOREMA DE ROUTH-HURWITZ

A matriz de Hurwitz associada ao polinômio característico.

$$p_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - C_n \lambda^{n-1} - C_{n-1} \lambda^{n-2} \dots - C_2 \lambda - C_1)$$

é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} -C_n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -C_{n-2} & -C_{n-1} & -C_n & 1 & \dots & 0 \\ -C_{n-4} & -C_{n-3} & -C_{n-2} & -C_{n-1} & \dots & 0 \\ -C_{n-6} & -C_{n-5} & -C_{n-4} & -C_{n-3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

temos que:

$$\Delta_1 = C_n$$

$$\Delta_2 = C_n C_{n-1} + C_{n-2}$$

$$\Delta_3 = C_{n-2} (C_n C_{n-1} + C_{n-2}) + C_n (C_n C_{n-3} + C_{n-4})$$

$$\Delta_4 = C_{n-4} |C_{n-1} (C_n C_{n-1} + C_{n-2}) + C_n C_{n-3} + C_{n-4}| +$$

$$C_{n-3} |C_{n-2} (C_n C_{n-1} + C_{n-2}) + C_n (C_{n-3} + C_{n-4})| +$$

$$C_{n-2} |C_n C_{n-3} + C_{n-4}| + C_{n-1} |C_n (C_n C_{n-5} + C_{n-6})|$$

⋮

O teorema de Routh-Hurwitz afirma que a matriz H , será estável, se e somente se todos os Δ_i forem positivos.

Comparando as relações anteriormente citadas com as relações (A) obtidas no novo método, concluímos que:

$$\begin{aligned} s_1 &= \Delta_1 \\ s_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \\ s_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta_1 \Delta_2} \\ s_4 &= \frac{\Delta_4 \Delta_1}{\Delta_3 \Delta_2} \\ &\vdots \\ s_r &= \frac{\Delta_r \Delta_{r-3}}{\Delta_{r-1} \Delta_{r-2}} \quad r = 2, 4 \dots n \end{aligned}$$

Do teorema de Schwarz temos que uma matriz H é estável se somente se os elementos s_i , $i = 1 \dots n$ da respectiva matriz de Schwarz forem todos positivos.

Então das relações acima temos que: "Se os Δ_i forem todos positivos a matriz será estável". Isto vem a ser uma nova confirmação do teorema de Routh Hurwitz, a partir do teorema de Schwarz e das nossas relações.

Exemplo

$$\text{Seja } f_7(\lambda) = \lambda^7 - \lambda^6 - 2\lambda^5 - \lambda^4 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1$$

A matriz companheira para $f_7(\lambda)$ será:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando o novo método temos os valores de (s) da matriz de Schwarz.

$$s_1 = -1$$

$$s_2 = -3$$

$$s_3 = \frac{4}{3}$$

$$s_4 = \frac{5}{3}$$

$$s_5 = -\frac{39}{20}$$

·
·
·

Portanto a matriz C não é estável.

A matriz de Hurwitz correspondente a esse polinômio é.

$$H = \begin{bmatrix} -C_7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_5 & -C_6 & -C_7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_3 & -C_4 & -C_5 & -C_6 & -C_7 & 1 & 0 \\ -C_1 & -C_2 & -C_3 & -C_4 & -C_5 & -C_6 & -C_7 \\ 0 & 0 & -C_1 & -C_2 & -C_3 & -C_4 & -C_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_1 & -C_2 & -C_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = -2 \\ C_4 = 1 \\ C_5 = 1 \\ C_6 = 2 \\ C_7 = 1 \end{array}$$

Os determinantes de Hurwitz serão:

$$\Delta_1 = -1$$

$$\Delta_2 = 3$$

$$\Delta_3 = -4$$

$$\Delta_4 = 20$$

$$\Delta_5 = 52$$

$$\vdots$$

Os valores de (s) são:

$$s_1 = \Delta_1 = -1$$

$$s_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = -3$$

$$s_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_1 \Delta_2} = \frac{4}{3}$$

$$s_4 = \frac{\Delta_4 \Delta_1}{\Delta_3 \Delta_2} = \frac{5}{3}$$

$$s_5 = \frac{\Delta_5 \Delta_2}{\Delta_4 \Delta_3} = -\frac{39}{20}$$

·
·
·

O que também confirma que a matriz C não é estável.

4.5 UMA RELAÇÃO ENTRE OS ELEMENTOS DUMA MATRIZ DE HESSENBERG E OS ELEMENTOS DE UMA MATRIZ DE SCHWARZ

Anteriormente já estabelecemos um interessante resultado entre os elementos da matriz companheira e os elementos da matriz de Schwarz. Mostraremos a seguir que esse resultado pode ser generalizado da seguinte maneira:

Seja A uma matriz de Hessenberg inferior com a codiagonal superior unitária e X uma matriz triangular inferior com diagonal unitária.

Então, da relação

$$A X = X S$$

e usando o teorema de Cauchy-Binet⁽²⁾, podemos obter:

$$s_1 = - \sum_{J_1=1}^n A \begin{pmatrix} J_1 \\ J_1 \end{pmatrix}$$

$$s_2 + s_3 + \dots + s_n = \sum_{J_1=1}^{n-1} \sum_{J_2=2}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_1 & J_2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 (s_3 + \dots + s_n) = - \sum_{J_1=1}^{n-2} \sum_{J_2=2}^{n-1} \sum_{J_3=3}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix}$$

$$s_2 (s_4 + \dots + s_n) + s_3 (s_5 + \dots + s_n) + \dots + s_{n-3} (s_{n-1} + s_n) + s_{n-2} s_n =$$

$$\sum_{J_1=1}^{n-3} \sum_{J_2=2}^{n-2} \sum_{J_3=3}^{n-1} \sum_{J_4=4}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\ J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

⋮

$$s_1 s_3 s_5 \dots s_n = - \det A \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

$$s_2 s_4 s_6 \dots s_n = \det A \quad \text{para } n \text{ par}$$

Colocando o sistema na forma de somatório, temos:

$$s_1 = - \sum_{J_1=1}^n A \begin{pmatrix} J_1 \\ J_1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{J_1=2}^n s_{J_1} = \sum_{J_1=1}^{n-1} \sum_{J_2=2}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_1 & J_2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 \sum_{J_1=3}^n s_{J_1} = - \sum_{J_1=1}^{n-2} \sum_{J_1=2}^{n-1} \sum_{J_3=3}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{J_1=2}^{n-2} s_{J_1} \sum_{J_2=J_1+2}^n s_{J_2} = \sum_{J_1=1}^{n-3} \sum_{J_2=2}^{n-2} \sum_{J_3=3}^{n-1} \sum_{J_4=4}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\ J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

$$s_1 \sum_{J_1=2}^{n-2} s_{J_1} \sum_{J_2=3}^n s_{J_2} = \sum_{J_1=1}^{n-4} \sum_{J_2=2}^{n-3} \sum_{J_3=3}^{n-2} \sum_{J_4=4}^{n-1} \sum_{J_5=5}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 \\ J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{J_1=1}^{n-(i-2)} s_{J_1} \sum_{J_2=J_1+2}^{n-(i-3)} s_{J_2} \dots \sum_{J_m=J_{m-1}+2}^n s_{J_m} = A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & \dots & J_n \\ J_1 & J_2 & & J_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{para} \\ n \\ \text{par} \end{matrix}$$

$$s_1 \sum_{J_1=3}^{n-(i-2)} s_{J_1} \sum_{J_2=J_1+2}^{n-(i-4)} s_{J_2} \dots \sum_{J_m=J_{m-1}+2}^n s_{J_m} = - A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & \dots & J_n \\ J_1 & J_2 & & J_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{para} \\ n \\ \text{ímpar} \end{matrix}$$

Resolvendo sucessivamente as equações dos elementos da matriz de Schwarz em termos dos elementos da matriz de Hessen berg, chegamos as seguintes relações:

$$s_1 = - \sum_{J_1=1}^n A \begin{pmatrix} J_1 \\ J_1 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = - \sum_{J_1=1}^{n-1} \sum_{J_2=2}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_1 & J_2 \end{pmatrix} + \frac{\sum_{J_1=1}^{n-2} \sum_{J_2=2}^{n-1} \sum_{J_3=3}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix}}{\sum_{J_1=1}^n A \begin{pmatrix} J_1 \\ J_1 \end{pmatrix}}$$

$$s_3 = \frac{- \sum_{J_1=1}^{n-2} \sum_{J_2=2}^{n-1} \sum_{J_3=3}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix}}{\sum_{J_1=1}^n A \begin{pmatrix} J_1 \\ J_1 \end{pmatrix}} +$$

$$+ \frac{\sum_{J_1=1}^{n-3} \sum_{J_2=2}^{n-2} \sum_{J_3=3}^{n-1} \sum_{J_4=4}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\ J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \end{pmatrix}}{\sum_{J_1=1}^{n-1} \sum_{J_2=2}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_1 & J_2 \end{pmatrix}} - \frac{\sum_{J_1=1}^{n-2} \sum_{J_2=2}^{n-1} \sum_{J_3=3}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix}}{\sum_{J_1=1}^{n-1} \sum_{J_2=2}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_1 & J_2 \end{pmatrix}}$$

$$- \frac{\sum_{J_1=1}^{n-4} \sum_{J_2=2}^{n-3} \sum_{J_3=3}^{n-2} \sum_{J_4=4}^{n-1} \sum_{J_5=5}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 \\ J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 \end{pmatrix}}{\sum_{J_1=1}^n A \begin{pmatrix} J_1 \\ J_1 \end{pmatrix}} \Big| \sum_{J_1=1}^{n-1} \sum_{J_2=2}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_1 & J_2 \end{pmatrix} - \frac{\sum_{J_1=1}^{n-2} \sum_{J_2=2}^{n-1} \sum_{J_3=3}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix}}{\sum_{J_1=1}^{n-1} \sum_{J_2=2}^n A \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_1 & J_2 \end{pmatrix}} \Big|$$

⋮ ⋮

Uma análise nas equações anteriores, permite-nos colocá-las numa forma recursiva de modo que cada s_i dependa dos s_{is} anteriores, conforme segue.

$$s_1 = - \sum_{J_1=1}^n A \left(\begin{matrix} J_1 \\ J_1 \end{matrix} \right)$$

$$s_2 = - \sum_{J_1=1}^{n-2} \sum_{J_2=2}^n A \left(\begin{matrix} J_1 & J_2 \\ J_1 & J_2 \end{matrix} \right) + \frac{\sum_{J_1=1}^{n-2} \sum_{J_2=2}^{n-1} \sum_{J_3=3}^n A \left(\begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{matrix} \right)}{s_1}$$

$$s_3 = - \frac{\sum_{J_1=1}^{n-2} \sum_{J_2=2}^{n-1} \sum_{J_3=3}^n A \left(\begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{matrix} \right)}{s_1} + \frac{\sum_{J_1=1}^{n-3} \sum_{J_2=2}^{n-2} \sum_{J_3=3}^{n-1} \sum_{J_4=4}^n A \left(\begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\ J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \end{matrix} \right)}{s_2}$$

$$- \frac{\sum_{J_1=1}^{n-4} \sum_{J_2=2}^{n-3} \sum_{J_3=3}^{n-2} \sum_{J_4=4}^{n-1} \sum_{J_5=5}^n A \left(\begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 \\ J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 \end{matrix} \right)}{s_1 s_2}$$

$$s_4 = - \frac{\sum_{J_1=1}^{n-3} \sum_{J_2=2}^{n-2} \sum_{J_3=3}^{n-1} \sum_{J_4=4}^n A \left(\begin{matrix} J_1 & \dots & J_4 \\ J_1 & \dots & J_4 \end{matrix} \right)}{s_2} +$$

$$+ \frac{\sum_{J_1=1}^{n-4} \sum_{J_2=2}^{n-3} \sum_{J_3=3}^{n-2} \sum_{J_4=4}^{n-1} \sum_{J_5=5}^n A \left(\begin{matrix} J_1 & \dots & J_5 \\ J_1 & \dots & J_5 \end{matrix} \right)}{s_1 s_2}$$

$$+ \frac{\sum_{J_1=1}^{n-4} \sum_{J_2=2}^{n-3} \sum_{J_3=3}^{n-2} \sum_{J_4=4}^{n-1} \sum_{J_5=5}^n A \left(\begin{matrix} J_1 & \dots & J_5 \\ J_1 & \dots & J_5 \end{matrix} \right)}{s_1 s_3}$$

$$- \frac{\sum_{J_1=1}^{n-5} \sum_{J_2=2}^{n-4} \sum_{J_3=3}^{n-3} \sum_{J_4=4}^{n-2} \sum_{J_5=5}^{n-1} \sum_{J_6=6}^n A \left(\begin{matrix} J_1 & \dots & J_6 \\ J_1 & \dots & J_6 \end{matrix} \right)}{s_2 s_3}$$

$$+ \frac{\sum_{J_1=1}^{n-6} \sum_{J_2=2}^{n-5} \sum_{J_3=3}^{n-4} \sum_{J_4=4}^{n-3} \sum_{J_5=5}^{n-2} \sum_{J_6=6}^{n-1} \sum_{J_7=7}^n A \left(\begin{matrix} J_1 & \dots & J_7 \\ J_1 & \dots & J_7 \end{matrix} \right)}{s_1 s_2 s_3}$$

⋮

É fato conhecido⁽¹⁾ que se $p(\lambda) = \lambda^n - p_n \lambda^{n-1} - p_{n-1} \lambda^{n-2} \dots p_2 \lambda - p_1$ é o polinômio característico de uma matriz A, então:

$$p_n = - \operatorname{tr} A$$

$$p_1 = (-1)^n \det A$$

$$p_k = (-1)^k \cdot (\text{soma de todos os menores principais de ordem } k.)$$

Utilizando esse resultado podemos simplificar mais uma vez o sistema de equações e teremos:

$$s_1 = - p_n$$

$$s_2 = - p_{n-1} + \frac{p_{n-2}}{s_1}$$

$$s_3 = - \frac{p_{n-2}}{s_1} + \frac{p_{n-3}}{s_2} - \frac{p_{n-4}}{s_1 s_2}$$

$$s_4 = - \frac{p_{n-3}}{s_2} + \frac{p_{n-4}}{s_1 s_2} + \frac{p_{n-4}}{s_1 s_3} - \frac{p_{n-5}}{s_2 s_3} + \frac{p_{n-6}}{s_1 s_2 s_3}$$

$$s_5 = - \frac{p_{n-4}}{s_1 s_3} + \frac{p_{n-5}}{s_2 s_3} - \frac{p_{n-6}}{s_1 s_2 s_3} + \frac{p_{n-5}}{s_2 s_4} - \frac{p_{n-6}}{s_1 s_2 s_4} - \frac{p_{n-6}}{s_1 s_3 s_4} - \frac{p_{n-7}}{s_2 s_3 s_4} - \frac{p_{n-8}}{s_1 s_2 s_3 s_4}$$

⋮
⋮
⋮

Comparando esse sistema, com o sistema obtido no item 4.3.2, notamos que fazendo a analogia:

$$\operatorname{tr} A = c_n$$

$$p_{n-1} = c_{n-1}$$

obtemos um sistema idêntico ao anterior, podendo obviamente utilizar todo cálculo computacional desenvolvido para ele. Note que a determinação do polinômio característico, que será por nós utilizado, pode ser feita por vários métodos, inclusive o descrito no capítulo II.

Exemplo:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

matriz da Hessenberg

$$s_1 = -6$$

$$s_2 = 7 + \frac{5}{6} = \frac{47}{6}$$

$$s_3 = -\frac{5}{6} - \frac{\frac{4}{47}}{\frac{6}{6}} = -\frac{5}{6} - \frac{24}{47} = -\frac{379}{282}$$

$$s_4 = \frac{24}{47}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{24}{47} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{379}{282} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{47}{6} & 6 \end{bmatrix}$$

matriz de Schwarz

$$I_n(A) = (2, 0, 2)$$

4.6 COMPARAÇÕES, CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

4.6.1 *Comparação entre o novo método e método de Loo, para o cálculo dos elementos da matriz de Schwarz.*

4.6.1.1 *Comparação computacional*

Elaboramos um programa para executar o novo método e montamos um programa para executar o método de Loo, baseado nas subrotinas tradicionais. Em todos os cálculos efetuados, mais de duzentas matrizes, os resultados foram numericamente coincidentes, dentro da precisão computacional utilizada. O novo método, por ser expresso em termos de relações algébricas simples, (enquanto o método de Loo depende de relações matriciais) gastou menos tempo de computador.

Conforme podemos notar na Fig. 4.1, a seguir, quando a ordem das matrizes é pequena, os tempos praticamente coincidem. A medida que a ordem cresce o cálculo pelo método de Loo passa a necessitar de tempo computacional maior do que o novo método.

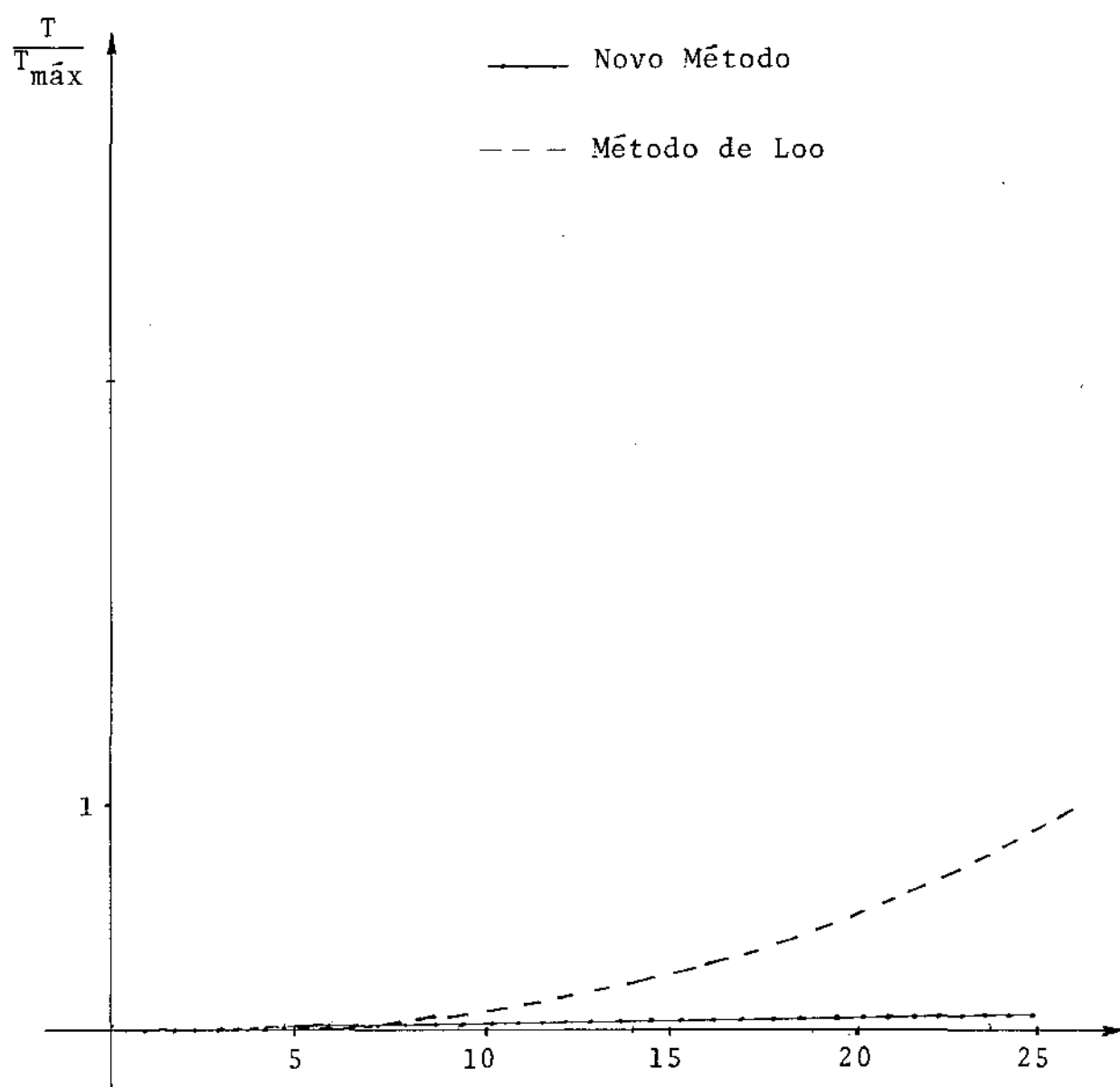
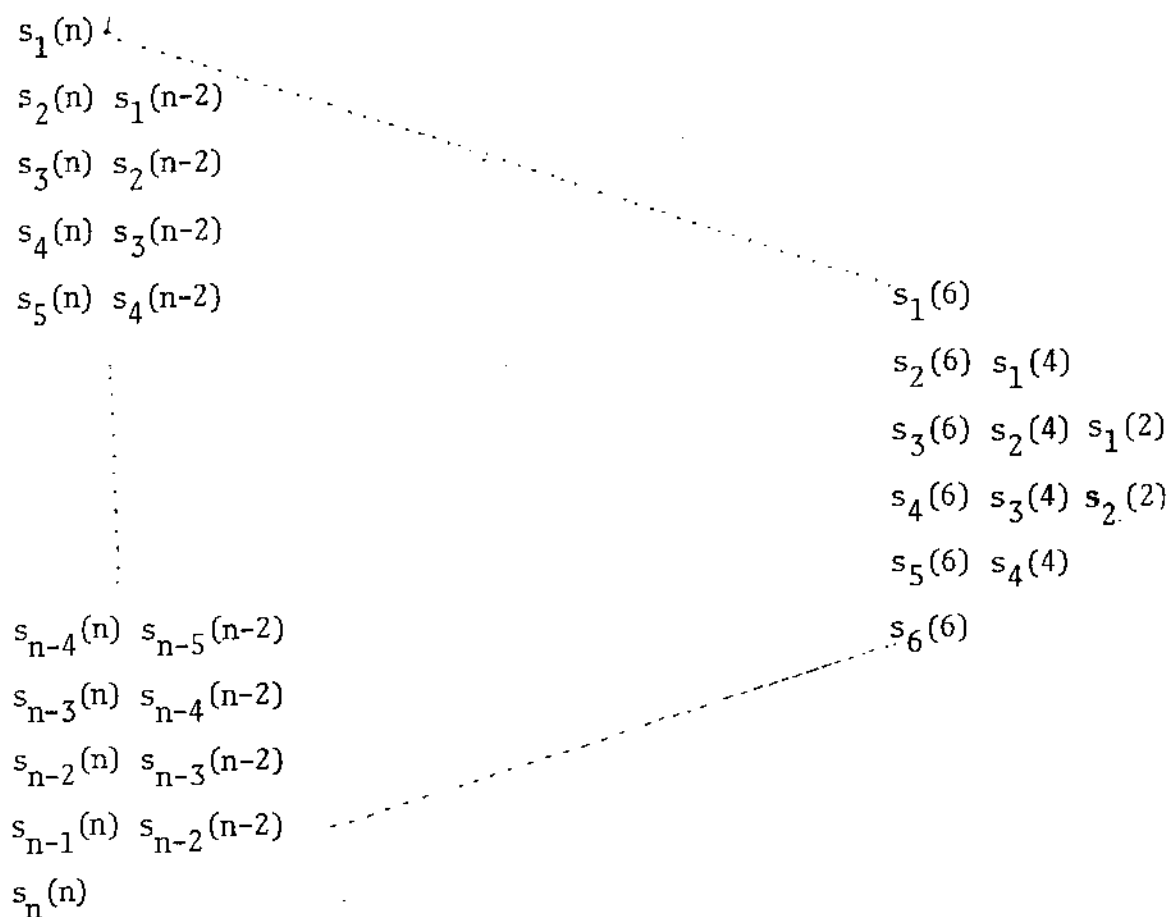


Fig. 4.1 Comparação numérica entre o novo método e o método de Loo

4.6.1.2 Análise do número de operações envolvidas

a) Novo Método

Para uma matriz de ordem par teremos o seguinte esquema.



onde os $s_i(j)$ são os elementos necessários para a solução desejada.

- Número de vezes que cada s_i necessita ser calculado.

s_1	$\frac{n}{2}$
s_2	$\frac{n}{2}$
s_3	$\frac{n-2}{2}$
s_4	$\frac{n-2}{2}$
s_5	$\frac{n-4}{2}$
s_6	$\frac{n-4}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
s_{n-3}	$\frac{n-(n-4)}{2}$
s_{n-2}	$\frac{n-(n-4)}{2}$
s_{n-1}	$\frac{n-(n-2)}{2}$
s_n	$\frac{n-(n-2)}{2}$

- Número de operações necessárias para calcular cada s_i .

s_1	0
s_2	2
s_3	2
s_4	2
s_5	2
s_6	2
$\vdots$	$\vdots$
s_{n-3}	2
s_{n-2}	2
s_{n-1}	2
s_n	0

Sendo que os $s_{n-i}(n-i)$, $i = 2, 4, \dots, n-2$ não necessitam de nenhuma operação para ser calculada.

- Número total de operações necessárias para calcular de s_3 a s_{n-3}

$$K = \left[2 \left(\frac{n-2}{2} + \frac{n-2}{2} \right) + 2 \left(\frac{n-4}{2} + \frac{n-4}{2} \right) + \dots + 2 \left(\frac{n-(n-4)}{2} + \frac{n-(n-4)}{2} \right) \right]$$

$$K = [2(n-2) + 2(n-4) + 2(n-6) + \dots + 2(6) + 2(4)]$$

esta sequência é uma progressão aritmética onde:

$$a_1 = 2(n-2)$$

$$a_n^* = 8$$

$$r = -4$$

Calculando n^* = número de termos da P.A., temos:

$$a_n^* = a_1 + (n^*-1) r$$

$$a_n^* = 2(n-2) + (n^*-1) (-4)$$

$$4n^* = 2n-8$$

$$\boxed{n^* = \frac{n-4}{2}}$$

Calculando S_n = soma da progressão aritmética, temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n^*)}{2} n^*$$

$$S_n = \left[\frac{2(n-2)+8}{2} \right] \left(\frac{n-4}{2} \right)$$

$$S_n = \frac{n^2 - 2n - 8}{2}$$

Para calcular:

- Os elementos s_1 foram necessárias $0 \times \frac{n}{2}$ operações.
- Os elementos s_2 foram necessárias $2 \times \frac{n}{2}$ operações.

Os elementos s_3 até s_{n-3} foram necessárias $\frac{n^2 - 2n - 8}{2} - (n-2)$ operações,

onde: $n-2$ é número de operações que foram calculadas a mais para $s_{n-i}(n-i)$, $i = 2, 4 \dots n-2$.

Os elementos s_{n-1} foram necessárias 2×1 operações.

Os elementos s_n foram necessárias 0×1 operações.

Finalmente calculamos, L_n = número total de operações para o cálculo de s_1 até s_n .

$$L_n = n + \frac{n^2 - 2n - 8}{2} - (n-2) + 2(1)$$

$$L_n = \frac{n^2 - 2n}{2}$$

- Verificação da expressão $L_n = \frac{n^2 - 2n}{2}$ que calcula o nº de operações.

INDUÇÃO

Podemos facilmente verificar que a expressão é válida para $n = 4$.

Supomos que é válida para n , isto é;

$$L_n = \frac{n^2 - 2n}{2}$$

Queremos obter o número de operações para

$$L_{n+2}$$

$$L_{n+2} = L_n + 2n$$

$$L_{n+2} = \frac{n^2 - 2n}{2} + 2n$$

$$L_{n+2} = \frac{n^2 + 2n}{2} = \frac{n^2 + 4n + 4 + 2n - 4n - 4}{2}$$

$$L_{n+2} = \frac{(n+2)^2 - 2(n+2)}{2}$$

Exemplo:

Para $n = 4$

$$s_1(4) = -C_4 \quad ; \quad s_1(2) = -C_2$$

$$s_2(4) = -C_3 - \frac{s_1(2)}{s_1(4)} \quad ; \quad s_2(2) = -C_1$$

$$s_3(4) = \frac{s_1(2)}{s_1(4)} - \frac{s_2(2)}{s_2(4)}$$

$$s_4(4) = \frac{s_2(2)}{s_2(4)}$$

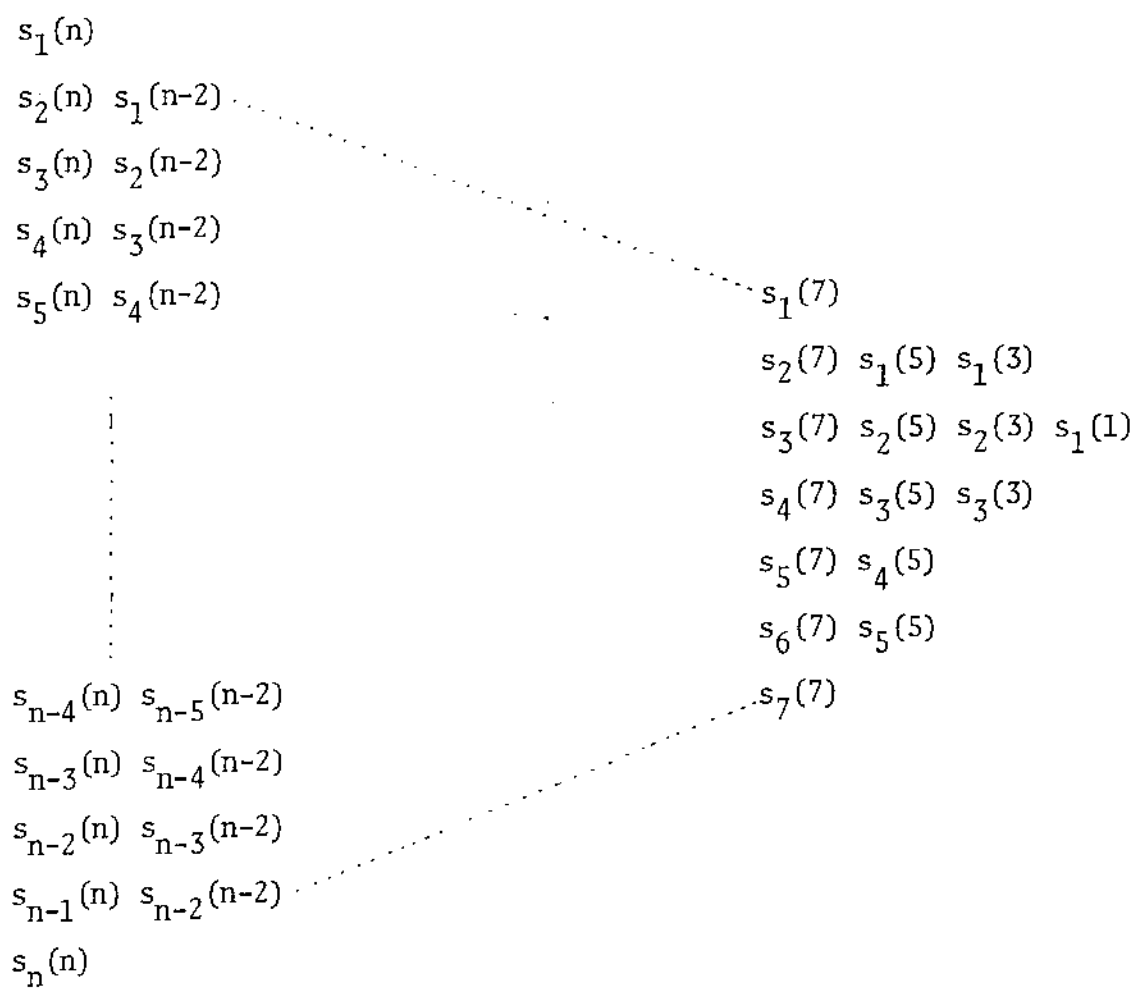
s_i	Nº de s_i	Nº de operações para cada s_i	total de cada s_i
s_1	2	0	0
s_2	2	2	4-2
s_3	1	2	2
s_4	1	0	0

$$L_n = 0 + 2 + 2 + 0 = 4$$

pela expressão

$$L_n = \frac{n^2 - 2n}{2} = \frac{4^2 - 2(4)}{2} = 4$$

Para uma matriz de ordem ímpar teremos o seguinte esquema:



- Número de cada si que necessita ser calculado.

s_1	$\frac{n+1}{2}$
s_2	$\frac{n-1}{2}$
s_3	$\frac{n-1}{2}$
s_4	$\frac{n-3}{2}$
s_5	$\frac{n-3}{2}$
s_6	$\frac{n-5}{2}$
s_7	$\frac{n-5}{2}$
s_8	$\frac{n-6}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
s_{n-3}	$\frac{n-(n-4)}{2}$
s_{n-2}	$\frac{n-(n-4)}{2}$
s_{n-1}	$\frac{n-(n-2)}{2}$
s_n	$\frac{n-(n-2)}{2}$

- Número de operações necessárias para calcular cada s_i .

s_i	nº de operações
s_1	0
s_2	2
s_3	2
$\vdots$	$\vdots$
s_{n-2}	2
s_{n-1}	2
s_n	0

Sendo que os s_{n-i} ($n-i$), $i=3,5, \dots, n-2$ não necessitam de nenhuma operação para serem calculados.

- Número total de operações necessárias para calcular de s_2 até s_{n-2}

$$K = \left[2\left(\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2}\right) + 2\left(\frac{n-3}{2} + \frac{n-3}{2}\right) + 2\left(\frac{n-5}{2} + \frac{n-5}{2}\right) + \dots + 2\left(\frac{n-(n-4)}{2}\right) \right]$$

$$K = [2(n-1) + 2(n-3) + 2(n-5) + \dots + 2(4)]$$

esta sequência é uma progressão aritmética onde

$$a_1 = 2(n-1).$$

$$a_n^* = 8$$

$$r = -4$$

Calculando n^* = número de termos da P.A., temos:

$$a_n^* = a_1 + (n^* - 1)r$$

$$a_n^* = 2(n-1) + (n^* - 1)(-4)$$

$$4n^* = 2n - 6$$

$$\boxed{n^* = \frac{n-3}{2}}$$

Calculando S_n = soma da progressão aritmética temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n^*) n^*}{2}$$

$$S_n = \left(\frac{2(n-1) + 8}{2} \right) \left(\frac{n-3}{2} \right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{n^2-9}{2}}$$

Para calcular

Os elementos s_1 foram necessárias $0 \times \frac{n+1}{2}$ operações.

Os elementos s_2 até s_{n-2} foram necessárias $\frac{n^2-9}{2} - (n-3)$ operações.

O elemento s_{n-1} foi necessária 2×1 operações.

O elemento s_n foi necessária 0×1 operações.

L_n = número total de operações

$$L_n = \frac{n^2-9}{2} - (n-3) + 2$$

$$L_n = \frac{n^2 - 2n + 1}{2}$$

- Verificação da expressão $L_n = \frac{n^2 - 2n + 1}{2}$.

INDUÇÃO

Podemos facilmente verificar que a expressão é válida para $n = 5$.

Supomos que é válida para n , isto é:

$$L_n = \frac{n^2 - 2n + 1}{2}$$

Queremos obter o número de operações para L_{n+2} .

$$L_{n+2}$$

$$L_{n+2} = L_n + 2n$$

$$L_{n+2} = \frac{n^2 - 2n + 1}{2} + 2n$$

$$L_{n+2} = \frac{n^2 + 4n + 4 - 2n - 4 + 1}{2}$$

$$L_{n+2} = \frac{(n+2)^2 - 2(n+2) + 1}{2}$$

Exemplo:

$$s_1(5) = -C_5, \quad s_1(3) = -C_3, \quad s_1(1) = -C_1$$

$$s_2(5) = -C_4 - \frac{s_1(3)}{s_1(5)}, \quad s_2(3) = -C_3 - \frac{s_1(1)}{s_1(3)}$$

$$s_3(5) = \frac{s_1(3)}{s_1(5)} - \frac{s_2(3)}{s_2(5)}, \quad s_3(3) = -C_3$$

$$s_4(5) = \frac{s_1(3)}{s_2(5)} - \frac{s_3(3)}{s_3(5)}$$

$$s_5(5) = \frac{s_3(3)}{s_3(5)}$$

s_i	Nº de s_i	Nº de operações para cada s_i	total de cada s_i
s_1	3	0	0
s_2	2	2	4
s_3	2	2	4-2
s_4	1	2	2
s_5	1	1	0

$$L_n = 0 + 4 + 2 + 2 + 0 = 8$$

pela expressão

$$L_n = \frac{n^2 - 2n + 1}{2} = \frac{5^2 - 10 + 1}{2} = 8$$

b) Método de Loo

O método de Loo envolve as seguintes operações:

- Cálculo da matriz T

A matriz T possui $\frac{n^2-n}{4}$ elementos, sendo que para calcularmos cada elemento de T, necessitamos calcular dois elementos do esquema de Routh e o quociente entre eles. Como cada elemento do esquema de Routh gasta uma operação, temos:

Número total de operações para calcularmos a matriz

$$T = 3 \left(\frac{n^2-n}{4} \right)$$

- Cálculo do produto T.C

Um produto de matrizes completas exige n^3 operações, porém, como as matrizes T e C são esparsas o número de operações diminui consideravelmente e é da ordem de n^2 .

- Solução do sistema $ST = TC$

Para resolvermos este sistema, podemos considerar

$$TC = F$$

$$\text{logo } ST = F$$

Transpondo o produto acima temos:

$$T^t S^t = F^t, \text{ onde } T^t \text{ é triangular superior}$$

Podemos subdividir S^t e F^t em colunas obtendo n sistemas simplificados.

$$T^t s_i = f_i$$

Um sistema triangular para ser resolvido necessita $n(n+1)$ operações⁽¹³⁾, porém cada s_i possui apenas 2 elementos, o número de operações será da ordem de:

$$(2n-1)$$

Como temos n sistemas teremos

$$n(2n-1) \text{ operações}$$

Portanto o número total de operações para o método de Loo, será da ordem de:

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{n^2-n}{4}\right) + n^2 + n(2n-1) &= \frac{3n^2}{4} + n^2 + 2n^2 - \frac{3}{4}n - n = \\ &= \frac{15n^2}{4} - \frac{7n}{4} \text{ operações} \end{aligned}$$

Vemos por essa análise que para resolvermos o problema da obtenção da matriz de Schwarz pelo método de Loo, necessitamos um nº maior de operações do que o novo método.

4.6.2 Comentários e Conclusões

Ao analisarmos o novo método, podemos notar que ele foi obtido por um processo de indução vulgar, que não possui prova elementar, porém a seqüência induzida foi verificada da seguinte maneira:

- PASSOS
- Induzida a seqüência utilizando n elementos
 - Prever o $n+1$ elemento com a seqüência induzida
 - Calcular o $n+1$ elemento tradicionalmente
 - Comparar os resultados

Esse procedimento foi executado inúmeras vezes com resultados perfeitamente coincidentes.

A seguir foi elaborado um programa computacional para o

51971B.C

novo método, e outro para o método tradicional de Loo. Esses programas foram executados para mais de duzentas matrizes com resultados perfeitamente coincidentes. Portanto acreditamos numa grande confiabilidade no método.

Outro detalhe interessante é que o novo método embora tenha sido deduzido, utilizando-se na fase inicial do método de Datta como base, é independente deste, e suas equações iniciais poderiam ter sido geradas a partir de qualquer método, inclusive do método de Loo, ou a partir do próprio equacionamento matricial.

Pelo comentário acima, podemos notar que não tem muito sentido, compararmos o novo método com outros métodos, tais como o método de Loo, método de Datta, ou equacionamento matricial, pois estes métodos fornecem um equacionamento matricial do problema enquanto o novo método fornece um equacionamento algébrico explícito final do problema, estando um passo à frente destes métodos.

Um detalhe importante a ser observado é que o novo método que inicialmente pretendia a transformação da matriz companheira para a matriz de Schwarz, conseguiu englobar a transformação de uma matriz qualquer, numa matriz de Schwarz, possibilitando a análise de estabilidade de uma matriz qualquer.

Gostaríamos de colocar, que o novo método não tem a pretensão de ser algo revolucionário, que substitua os métodos existentes, mas sim a pretensão de colaborar no sentido de termos uma opção numa forma algebricamente simples, e compacta que permita uma execução computacional de grandes sistemas num tempo relativamente pequeno.

APÊNDICE

A.1 PROGRAMA PARA O NOVO MÉTODO

B1800/31700 FORTRAN COMPILER • MARK 7.0 RD 06/15/78 13:51 ,
/MURCIA /SON

```

: E NO MAF
:   DIMENSION SF(20),S(20,20),C(20)
:   N=6
:   READ(5,*)(C(I),I=1,N)
:   T1=TIME(1)
:   DO 10 I=1,N
:10  S(1,I)=-C(I)
:   SF(1)=S(1,N)
:   DO 20 I=3,N
:20  S(2,I)=-C(I-1)-S(1,I-2)/SF(1)
:   S(2,1)=0.0
:   S(2,2)=-C(1)
:   SF(2)=S(2,N)
:   JC=J-1
:   DO 200 J=3,N
:   DO 150 I=J,N
:150  S(J,I)=S(J-2,I-2)/SF(J-2)-S(J-1,I-2)/SF(J-1)
:   SF(J)=S(J,N)
:200  CONTINUE
:   WRITE(6,160)(TIME(1) - T1)/360
: 160  FORMAT(3X,'TEMPO GASTO = ',E14.7/)
:   WRITE(6,280)
:280  FORMAT(3X,'VALORES DE C')
:   WRITE(6,285)(C(I),I=1,N)
:285  FORMAT(3X,F10.4)
:   WRITE(6,290)
:290  FORMAT(//3X,'VALORES DE S'//)
:   WRITE(6,300)((I,S(I,N)),I=1,N)
:300  FORMAT(2X,'S(',I2,')=',E12.4)
:   STOP
:   END

```

A.2 PROGRAMA PARA O MÉTODO DE LOO

B1800/B1700 FORTRAN COMPILER , MARK 7.0 RD 06/15/78 13:51 ,
/MURCIA /LCO

THURSDAY

```

: E NO MAF
: FILE 6=IMPRESSORA,UNIT=PRINTER,UNLABELED
:   DIMENSION T(25,25),C(25,25),A(25,25),D(25,25),TC(25,25)
:   DIMENSION CC(25)
:   DIMENSION TI(25,25),TIC(25,25),S(25,25)
:   N=15
:   READ(5,1)(CC(I),I=1,15)
:   DO 2 I=1,N
: 2   C(N,I)=CC(I)
:   TI=TIME(1)
:   DO 3 J=1,N-1
: 3   C(I,I+1)=1.C
:   L=0
:   LA=0
:   A(1,1)=1.
: C   TESTE PARA VERIFICAR SE N E PAR
:   M1=N-2
: 6   IF(M1-L)20,10,8
: 8   M1=M1-2
:   GO TO 6
: C   N E PAR
: 10  NLM=N/2-1
:   K1=(N+2)/2
:   DO 300 I=2,K1
: 300 A(1,I)=-C(N,N+1-2*I+2)
:   K2=N/2
:   DO 310 I=1,K2
: 310 A(2,I)=-C(N,N+1-2*I+1)
:   DO 500 J=1,N-2
:   JF=J-2
: 460 IF(JP-L)490,480,470
: 470 JF=JP-2
:   GO TO 460
: 480 LA=LA+1
: 490 DO 500 I=1,K2-LA
:   A(J+2,I)=A(J,I+1)-A(J,1)*A(J+1,I+1)/A(J+1,1)
: 500 CONTINUE
:   DO 700 J=1,N
:   DO 700 I=1,N
: 700 D(I,J)=A(I,J)/A(I,1)
:   DO 750 L=1,NUM
:   DO 750 LS=1,N-2*L
: 750 T(LS+2*L,LS)=D(N-LS-2*L+2,L+1)
:   GO TO 25
: C   N E IMPAR
: 20  NLM=(N-1)/2
:   K3=(N+1)/2
:   DO 400 I=2,K3
: 400 A(1,I)=-C(N,N+1-2*I+2)
:   K4=K3
:   DO 410 I=1,K4
: 410 A(2,I)=-C(N,N+1-2*I+1)
:   DO 600 J=1,N-2
:   JF=J-2
: 560 IF(JP-L)580,590,570
: 570 JF=JP-2

```

```

:      GC 10 560
:580   LA=LA+1
:590   DC 600 I=1,N-K+1-LA
:      A(J+2,I)=A(J,I+1)-A(J,1)*A(J+1,I+1)/A(J+1,1)
:600   CONTINUE
:      DC 800 J=1,N
:      DC 800 I=1,N
:800   D(I,J)=A(I,J)/A(I,1)
:      DC 850 L=1,NUM
:      DC 850 LS=1,N-2*L
:850   T(LS+2*L,LS)=D(N-LS-2*L+2,L+1)
:25    DC 30 I=1,N
:30    T(I,1)=1.0
:      LE=N
:      M2=L0-2
:39    IF(M2-L)50,60,40
:40    M2=M2-2
:      GC 10 55
:50    L1=L0-1
:56    DC 55 J=1,L1,2
:      DC 55 I=1,N-J
:55    T(J+1,I)=0.0
:      GC 10 70
:60    L1=L0
:      GC 10 56
:70    CONTINUE
:      DC 220 K=1,N
:      DC 220 L=1,N
:      DC 220 J=1,N
:220   TIC(K,L)=T(K,J)*C(J,L)+TC(K,L)
:      DC 230 K=1,N
:      DC 230 L=1,N
:      T(K,L)=T(L,K)
: 230   TIC(K,L)=TC(L,K)
:      DC 235 K=1,N
:      CALL SIST(TI,N,K,ITC,S)
: 235   CONTINUE
:      WRITE(6,1000)(TIME(1)-T1)/360
1000   FORMAT(//5X,E14.7,/)
:      WRITE(6,4)
: 4      FORMAT(20X,' MATRIZ C '//)
:      DC 820 I=1,N
:      WRITE(6,810)(C(I,J),J=1,N)
810    FORMAT(2X,2CF6.2)
820    CONTINUE
90     FORMAT(//10X,'N=',I3,'   G=',I2//)
:      WRITE(6,900)
900    FORMAT(//20X,' MATRIZ DE SCHWARTZ '//)
:      DC 920 I=1,N
:      WRITE(6,910)(S(I,J),J=1,N)
910    FORMAT(2X,2CF6.2)
920    CONTINUE
:      DC 950 I=1,N
:      DC 950 J=1,N
950    C(I,J)=0.0
:      STOP
:      END

```

A.5 SUBROTINA SIST

```

91900/91700 FORTRAN COMPILER , MARK 7.0 RD 06/15/78 13:51 , THURSDAY
/PURCIA /LCO
:
: E SAVE ICM
: SUBROUTINE SIST(T,N,K,F,S)
: DIMENSION T(25,25),F(25,25),S(25,25)
: C SUBROUTINA PARA CALCULO DE SISTEMA CON N MATRIZES TRIANGULARIZADAS:
: DO 10 I=1,N
: 10 S(N,K)=F(N,K)/T(N,N)
: DO 20 I=1,N-1
: SUM=0.0
: DO 15 J=1,I
: 15 SUM=SUM+T(N-I,N-J+1)*S(N-J+1,K)
: 20 S(N-I,K)=(F(N-I,K)-SUM)/T(N-I,N-I)
: END

```

AND NO WARNINGS IN 10 STATEMENTS, CODE EMITTED = 2226 BITS (279 BYTES) SIST
 ME IS 47.0 SECONDS FOR 12 CARDS AT 15 CARDS/MINUTE.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Barnett, S., Storey, C., *Matrix Methods in Stability Theory*, Thomas Nelson and Sons Ltd London 1970.
- [2] Gantmacher, F. R., *Théorie des Matrices*, tome I and II, Dunod, Paris 1966.
- [3] Ayres, F. J., *Matrices theory and Problems*, Schawm's outline series, Mac. Graw-Hill Book Company 1962.
- [4] Carlson, D., Datta, B.N., "On the Effective Computation of the Inertia of a Non-Hermitian Matrix", Numerische Mathematik 1979, pg 1-8.
- [5] Carlson, D., Schneider, H., "Inertia Theorem for Matrices the Semi-definite Case", *J. Math Anal. Appl.* 6, 1963, pag 430-446.
- [6] Howland, J. L., "Matrix Equations and the Separation of Matrix Eigenvalues", J. Math. Anal. Appl 33, 1971 pag 685-691.
- [7] Datta, B. N., "Curso de Análise Numérica", UNICAMP- 1978
- [8] Givens, W., "Numerical computation of the characteristic Values of a Real Symmetric Matrix", Oak Ridge National Laboratory ORNI 1574, 1954.
- [9] Householder, A., *The theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell, New York 1964.
- [10] Ostrowski, A., Schneider, H., "Some theorems on the Inertia of General Matrices", J. Math. Anal. Appl. 4, 1962 pag 72-84.
- [11] Wilkinson, J., *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon, Oxford 1965.
- [12] Varah, J. M., "On the Separation of Two Matrices" *SIAM J. Numer. Anal.* Vol 12 nº 2, April 1979.
- [13] Isaacson, E., Keller, B. H., *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley & Sons, New York 1966.

- [14] Golub, G. H., Van Loan, C., "A Hessenberg-Schur Method for the Problem $AX + XB = C$ ", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol AC-24, n° 6, Dec 1979 pag 909-912.
- [15] Datta, B. N., "A constructive method for finding the Schwarz form of a Hessenberg matrix", IEEE Trans. Automatic Control, v. AC-19, 1974 pag 616-617.
- [16] Datta, B. N., "On the Routh-Hurwitz-Fujiwara and the Schur-Cohn-Fujiwara theorems for the root - separation problem", Lin Alg. Appl 22, 1979 pag 235-246.
- [17] Ostrowski, A., Schneider, H., "Some theorems on the inertia of General Matrices", J. Math. Anal. Appl. 4, 1962 pag 72-84.
- [18] Carnahan, B., Luther, H.A., Wilkes, J.O., Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons, New York 1969.
- [19] Datta, B. N., "Apostila de Equações Matriciais", UNICAMP 1978.
- [20] Blum, E. K., Numerical Analysis and Computation - theory and Practice, Addison - Wesley, 1972.