Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Estimativas para Entropia de Operadores Multiplicadores de Séries de Walsh

Gustavo Henrique Milaré

Orientador: Sergio Antonio Tozoni

Campinas, 2011

Apoio financeiro: Fapesp

Estimativas para Entropia de Operadores Multiplicadores de Séries de Walsh

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Gustavo Henrique Milaré** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 3 de maio de 2011

Prof. Dr. Sergio Antonio Tozoni
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Sergio Antonio Tozoni
Prof. Dr. Pedro José Catuogno
Profa. Dra. Ana Paula Peron

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **Mestre em Matemática**.

Apoio Financeiro: Fapesp

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

	Milaré, Gustavo Henrique
M589e	Estimativas para entropia de operadores multiplicadores de séries de Walsh/Gustavo Henrique Milaré-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.
	Orientador : Sergio Antonio Tozoni
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1.Entropia. 2.Multiplicadores (Análise matemática). 3.Walsh, Funções de. 4.Análise harmônica. 5.Teoria da aproximação. I. Tozoni, Sergio Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Estimatives for entropy of multiplier operators of Walsh series

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Entropy. 2.Multipliers (Mathematical analysis).
3.Walsh functions. 4.Harmonic analysis. 5.Theory of approximation.

Área de concentração: Análise

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Sergio Antonio Tozoni (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC – UNICAMP)
Profa. Dra. Ana Paula Peron (ICMC - USP)

Data da defesa: 11/03/2011

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 11 de março de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). SERGIO ANTONIO TOZONI

Prof. (a). Dr (a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Prof. (a). Dr (a). ANA PAULA PERON

Resumo

As funções de Walsh formam um conjunto ortonormal completo de $L^2[0,1)$ que pode ser aplicado em diferentes situações tais como transmissão de dados, filtração, enriquecimento de imagem, análise de sinais e reconhecimento de padrão. Inicialmente estudamos alguns resultados básicos da Teoria dos Martingais, tais como a convergência de martingais, a Desigualdade de Doob e estimativas para a norma L^p da função quadrática associada a um martingal. Em seguida, estes resultados são usados no estudo da convergência das séries de Walsh em L^p e em um teorema de multiplicadores de séries de Walsh com a condição de Marcinkiewicz. Os resultados principais estudados nesta dissertação são estimativas de ordem de crescimento de entropia de operadores multiplicadores de séries de Walsh limitados de L^p em L^q.

Palavras-chave: Entropia; Multiplicadores (Análise matemática); Walsh, Funções de; Análise harmônica; Teoria da aproximação.

Abstract

The Walsh functions form a complete orthonormal set of functions of $L^2[0,1)$ which can be applied in different situations such as data transmission, filtering, image enhancement, signal analysis and patern recognition. Initially we study some basic results of the Theory of martingales, such as the convergence of martingales, Doob's inequality and estimatives for the L^p norm of the quadratic function associated to a martingale. Later, these results are used in the study of the convergence of the Walsh series in L^p and in a theorem of multipliers of Walsh series with Marcinkiewicz condition. The main results studied in this dissertation are estimatives of order of growth of entropy of limited multiplier operators of Walsh series from L^p to L^q.

Keywords: Entropy; Multipliers (Mathematical analysis); Walsh functions; Harminoc analysis; Theory of approximation.

Lista de Símbolos

q.t.p. $[\mu]$: em quase todo ponto com respeito à medida μ;

$[f = g]$: $\{\omega \in \Omega;\ f(\omega) = g(\omega)\}$, página 5;

$[f \in B]$: $\{\omega \in \Omega;\ f(\omega) \in B\}$, página 5;

$\sqcup$, $\bigsqcup_i$: união disjunta, página 6;

χ_A: função característica de A, página 6;

$\vee$, $\wedge$: máximo e mínimo entre números ou funções, página 6;

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Q}_2$: conjuntos dos inteiros positivos, inteiros não-negativos e racionais diádicos, página 6;

$\bar{\mathbb{N}}$, $\bar{\mathbb{R}}$: $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, página 6;

L^p, $\|\cdot\|_p$: ver Definição 1.1.6 na página 6;

λ, λ_n: medidas de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$, página 7;

l_p, $\|\cdot\|_{l_p}$: ver Definição 1.1.9 na página 7;

$E[f|\mathcal{F}]$: esperança condicional de f com respeito a $\mathcal{F}$, ver Definição 1.2.1 na página 8;

$B_X(x; r)$: bola aberta com centro em x e raio r no espaço X, página 14;

$B_X[x; r]$: bola fechada com centro em x e raio r no espaço X, página 14;

$\|\cdot\|_V$: funcional de Minkowski de V onde $V \subset \mathbb{R}^n$, ver Definição 1.3.4 na página 14;

V°: conjunto polar de V onde $V \subset \mathbb{R}^n$, ver Definição 1.3.5 na página 15;

L^p_E, $\|\cdot\|_{p,E}$: ver Definição 1.4.4 na página 16;

E^*: dual do espaço de Banach E, página 17;

$\langle x, y\rangle_E$: $y(x)$, onde $x \in E$ e $y \in E^*$, página 18;

$[\cdot]_p$, $[\cdot]_{p,E}$: normas L^p e L^p_E fracas, ver Definição 1.4.12 na página 21;

$\mathcal{F}_\infty$: σ-álgebra gerada por $\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$, página 28;

τ_M: tempo de parada dado por $\inf\{n\in\mathbb{N};\ f_n > M\}$, página 29;

$\mathcal{F}_\tau$, f_τ: $\mathcal{F}_\tau = \{A\in\mathcal{F}_\infty;\ A\cap[\tau=n]\in\mathcal{F}_n,\ \forall n\in\mathbb{N}\}$ e $f_\tau(\omega) = f_{\tau(\omega)}(\omega)$, página 29;

$\mu(A|\mathcal{F})$: medida condicional de A com respeito a $\mathcal{F}$, página 32;

f_n^*, f^*: funções maximais de uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, página 40;

$(d_n f)_{n\in\mathbb{N}}$: sequência de diferenças de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, página 43;

Df: função quadrática associada a $f=(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, página 43;

$I_{n,i}$, $I_n(x)$: intervalos diádicos em $[0,1)$, ver Definição 3.1.2 na página 54;

$(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$: sistema de Rademacher, página 54;

$(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$: sistema de Walsh, página 54;

$\mathbb{D}$, $|\cdot|$: o grupo diádico e sua norma, ver Definição 3.1.6 na página 56;

$\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$: $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente, página 56;

$\mathbb{D}_0$, $\mathbb{D}_0^*$, x^*: ver Definição 3.1.8 na página 56;

ϱ: função de Fine, ver Definição 3.1.10 na página 57;

$\tilde{I}_n(x)$: intervalos diádicos em $\mathbb{D}$, ver Definição 3.1.11 na página 57;

$|A|$: $\{|y|;\ y\in A\}$, página 59;

μ: medida de Haar normalizada em $\mathbb{D}$ dada por $\mu=\lambda\circ|\cdot|$, página 62;

$\oplus$: soma diádica, páginas 63 e 65;

ρ_k, ψ_n: caracteres do grupo diádico, ver Proposição 3.1.19 na página 63;

$C(\mathbb{D})$: conjunto das funções contínuas de $\mathbb{D}$ em $\mathbb{R}$, página 65;

C_W: $\{f\circ\varrho;\ f\in C(\mathbb{D})\}$, página 65;

$\hat{f}(\cdot)$: coeficientes de Walsh-Fourier de f, página 70;

Sf, S_nf: série de Walsh-Fourier de f e suas somas parciais, página 70;

D_n, $\tilde{D}_n$: núcleos de Walsh-Dirichlet em $[0,1)$ e em $\mathbb{D}$, página 70;

$*$: convolução díadica ou produto de convolução, página 71;

D_n^*: núcleos de Dirichlet modificados, $D_n^* = \omega_n D_n$, página 75;

S_n^*f: somas parciais da série de Walsh modificada, $S_nf = f * D_n^*$ página 75;

$T\alpha$: operador multiplicador associado à sequência α, página 81;

$\Delta_n\alpha$: $\alpha_{n+1} - \alpha_n$, página 90;

$\mathcal{S}f$, $\mathcal{S}^*f$: $(S_n f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(S_n^* f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, página 85;

$\log(x)$: logaritmo de x na base 2, página 95;

$N_\varepsilon(A, X)$: o menor n tal que existe uma ε-rede de A com n pontos, página 96;

$\mathcal{H}_\varepsilon(A, X)$: a ε-entropia de A, $\log N_\varepsilon(A)$, página 96;

$M_\varepsilon(A, X)$: o maior m tal que existem m pontos ε-separados em A, página 96;

$\mathcal{C}_\varepsilon(A, X)$: a ε-capacidade de A, $\log M_\varepsilon(A)$, página 96;

$e_k(A, X)$: o k-ésimo número de entropia de A, $\inf\left\{\varepsilon > 0;\ N_\varepsilon(A) \le 2^{k-1}\right\}$, página 98;

$[x_1, \ldots, x_n]$: espaço linear gerado por $x_1, \ldots, x_n$, página 101;

$\alpha_n^{(m,+)}$, $\alpha_n^{(m,-)}$: ver Definição 5.2.3 na página 101;

β_k, γ_k, $\beta_k^{(m)}$, $\gamma_k^{(m)}$: ver Definição 5.2.8 na página 105;

L^p, U^p: $L^p = L^p[0,1)$ e $U^p = B_{L^p}[0;1]$, página 106;

F_n, J_n: $F_n = [\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}]$ e $J_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1\omega_0 + \cdots + x_n\omega_{n-1}$, página 114;

$\|\cdot\|_{(p)}$: $\|x\|_{(p)} = \|J_n(x)\|_p$ para $x \in \mathbb{R}^n$, página 114;

$\mathcal{E}_V$: elipsóide de John de V, ver Definição 5.2.16 na página 115;

$\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$: $\left((k+1)^{-\gamma}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ e $\left(2^{-\gamma k^r}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, respectivamente, página 123;

$f \ll g$: existe $C > 0$ tal que $f(x) \le Cg(x)\ \forall x$, página 123;

$f \gg g$: existe $C > 0$ tal que $f(x) \ge Cg(x)\ \forall x$, página 123;

$f \asymp g$: $f \ll g$ e $f \gg g$, página 123.

Sumário

Introdução

Além de terem várias aplicações, as funções de Walsh são fáceis de serem implementadas e podem ser usadas com pouco espaço de armazenagem. Por exemplo, para economia de peso, as séries de Walsh foram usadas na nave espacial *Mariner*, que explorou a superfície de Marte. Isso se deve em parte ao fato delas assumirem apenas os valores +1 e -1, e também por estarem intimamente ligadas à expansão binária dos números reais. O sistema de Walsh também é interessante do ponto de vista teórico. Primeiro, este é o sistema mais simples não trivial em análise harmônica e compartilha muitas propriedades com o sistema trigonométrico. Segundo, tem sido usado para resolver alguns problemas fundamentais em análise como, por exemplo, o problema da base. Terceiro, este sistema tem tido um papel importante no desenvolvimento de outras áreas da matemática. Por exemplo, o teorema fundamental da teoria dos martingais (as desigualdades L^p para a função quadrática) foi demonstrado primeiramente por Paley [14] para o sistema de Walsh.

O conceito de entropia foi introduzido pelo matemático russo Andrey Nikolaevich Kolmogorov por volta de 1930. Esta definição mostrou-se muito útil na Teoria da Informação desenvolvida por Shannon por volta de 1948. Dentro desta teoria, a entropia é utilizada para medir os ruídos num canal de comunicação. Em Análise Funcional, a definição inicial de Kolmogorov originou outros conceitos como número de entropia, número de aproximação e ε-entropia. Estes três conceitos estão relacionados com aproximação de operadores em espaços de Banach.

No Capítulo 1, apresentamos diversos conceitos preliminares que serão utilizados ao longo do trabalho, incluindo o enunciado de teoremas conhecidos em Teoria da Medida. Também encontra-se neste capítulo uma apresentação do conceito e de algumas propriedades básicas da esperança condicional.

Dado um submartingal $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}$ onde $f_0 = 0$, a função quadrática Df associada a f é definida por

$$Df = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (f_n - f_{n-1})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A Desigualdade de Doob afirma que

$$\left\| \sup_{n\geq 1} |f_n| \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_p$$

onde $1 < p < \infty$. No Capítulo 2, estudamos martingais discretos, em especial o Teorema de Convergência de Martingais, a Desigualdade de Doob e as desigualdades L^p da função quadrática.

As funções de Rademacher podem ser definidas por $r_k(t) = \sigma\left(\sin\left(2^{k+1}\pi t\right)\right)$ (onde $\sigma(a) = 1$ se $a \geq 0$ ou $\sigma(a) = -1$ caso contrário) para $0 \leq t < 1$ e $k = 0, 1, 2, \ldots$. Se $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_k}$, $n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 0$, definimos a função de Walsh ω_n por

$$\omega_n(t) = r_{n_1}(t)\, r_{n_2}(t) \ldots r_{n_k}(t)\,,\ t \in [0, 1)\,,$$

e $\omega_0(t) = 1$ para $t \in [0, 1)$. Se $f \in L^1[0, 1)$, nós definimos as somas parciais $S_n(f)$ da série de Walsh-Fourier da função f por

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\, \omega_k, \qquad \hat{f}(k) = \int_0^1 f(t)\, \omega_k(t)\ dt.$$

No Capítulo 3, aplicamos os resultados obtidos no Capítulo 2 para estudar propriedades das funções de Walsh e a convergência das séries de Walsh em L^p.

Consideremos uma sequência numérica limitada $\alpha = (\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$. O operador multiplicador $T\alpha$ é definido para $f \in L^2[0, 1)$ por

$$T\alpha(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \hat{f}(k)\, \omega_k.$$

Se $\alpha_k = \alpha_j$ para quaisquer $2^i \leq k, j \leq 2^{i+1} - 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, dizemos que $T\alpha$ é um multiplicador em bloco. No Capítulo 4, utilizamos os Capítulos 2 e 3 para estudar um teorema de multiplicadores de séries de Walsh do tipo Marcinkiewicz que foi obtido por W.-S. Young [17] para séries de Vilenkin-Fourier, que gerneralizam as séries de Walsh.

Consideremos espaços de Banach X e Y e seja B_X a bola unitária fechada de X. Para um operador $T : X \to Y$, a ε-entropia de T, onde ε é um número positivo, é dada por

$$\mathcal{H}_\varepsilon(A) = \log_2 \inf \left\{ n \in \mathbb{N};\, T(B_X) \subset \bigcup_{j=1}^{n} (y_j + \varepsilon B_Y) \text{ para algum } y_1, \ldots, y_n \in Y \right\}.$$

No Capítulo 5, estudamos estimativas superiores e inferiores para a ε-entropia de multiplicadores de séries de Walsh limitados de L^p em L^q a partir de uma adaptação do artigo publicado por B. Bordin, A. K. Kushpel e S. A. Tozoni [1], onde foram estudados resultados análogos para multiplicadores de séries de Walsh sobre a esfera S^d. Ao final deste capítulo, apresentamos, como exemplo, estimativas de entropia para os multiplicadores associados às sequências $\left((k+1)^{-\gamma}\right)_{k=0}^{\infty}$ e $\left(2^{-\gamma k^r}\right)_{k=0}^{\infty}$, onde $\gamma > 0$ e $0 < r \leq 1$.

As estimativas para ε-entropia estudadas nesta dissertação foram demonstradas para operadores multiplicadores gerais enquanto que no trabalho [1], somente para multiplicadores em bloco.

Capítulo 1.

Preliminares

Estudaremos neste capítulo alguns conceitos preliminares: o conceito de esperança condicional, medidas vetoriais em espaços de Banach (em especial, em espaços de Hilbert) e o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz.

A esperança condicional é necessária à definição de martingal. Este é um conceito bastante usado em probabilidade; trata-se de uma projeção linear do espaço vetorial normado $L^1(\mathcal{A})$ sobre o subespaço $L^1(\mathcal{B})$ onde $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ são σ-álgebras e $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Medidas vetoriais são generalizações do conceito de medidas com valores reais (ou complexos). Esta generalização será necessária para obtenção de vários resultados no Capítulo 4, incluindo o uso do Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz.

Quando tivermos igualdade ou desigualdade de funções neste capítulo e no Capítulo 2, vamos omitir a notação q.t.p. $[\mu]$, mas lembramos que a definição de esperança condicional só faz sentido em q.t.p.

1.1. Conceitos Básicos

Notação 1.1.1. Consideremos funções $f : \Omega \to X$ e $g : \Omega \to X$ onde Ω e X são conjuntos não-vazios, e sejam $b \in X$ e $B \subset X$. Usamos as seguintes notações:

$$[f = b] = \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) = b\},$$
$$[f = g] = \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) = g(\omega)\},$$
$$[f \in B] = \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) \in B\}.$$

Se $X \subset \mathbb{R}$, podemos analogamente definir as notações $[f \leq b]$, $[f > g]$, dentre outras.

Notação 1.1.2. Dados dois conjuntos A e B, usamos a notação $A \sqcup B$ para denotar $A \cup B$ e enfatizar que A e B são disjuntos. Também denotamos por $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ a união de uma família $(A_i)_{i \in I}$ de conjuntos dois a dois disjuntos.

Notação 1.1.3. Dado A subconjunto de um conjunto X, denotamos por χ_A a *função característica* de A, isto é, $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ é tal que $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$.

Notação 1.1.4. Para $a, b \in \mathbb{R}$, denotamos

$$a \vee b = \max(a, b), \qquad a \wedge b = \min(a, b).$$

Notação 1.1.5. Denotamos por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ e $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ os conjuntos dos inteiros positivos e não-negativos, respectivamente, e $\mathbb{Q}_2 = \left\{\frac{p}{2^k} \in [0,1]\,;\, p, k \in \mathbb{N}_0\right\}$ como o conjunto dos *racionais diádicos* entre 0 e 1. Também denotamos $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definição 1.1.6. Considere um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, ou seja, Ω um conjunto não-vazio, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω e μ uma medida não-negativa cujo domínio é $\mathcal{A}$, e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{A}$-mensurável. Para $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

e denotamos por $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ou simplesmente por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-mensuráveis com $\|f\|_p < \infty$. Também denotamos

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R};\, \mu([|f| > C]) = 0\} = \inf\{C \in \mathbb{R};\, |f| \leq C \text{ q.t.p. } [\mu]\}$$

(onde consideramos $\inf(\emptyset) = \infty$) e $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (ou $L^\infty(\Omega)$) o conjunto das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-mensuráveis com $\|f\|_\infty < \infty$.

Observação 1.1.7. Definimos como equivalentes duas funções f e g mensuráveis tais que $f = g$ q.t.p. $[\mu]$. Considerando as classes de equivalência de funções, os espaços $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, isto é, espaços vetoriais normados completos com norma $\|\cdot\|_p$. O espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert (isto é, um espaço vetorial com produto interno e completo) onde o produto interno de $f, g \in L^2(\Omega)$ é dado por $\int_\Omega f \cdot g \, d\mu$.

Definição 1.1.8. Denotamos por λ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e por λ_n a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Esta medida é definida como a única medida completa (isto é, tal que se $\lambda(A) = 0$ e $B \subset A$ então B é λ-mensurável e $\lambda(B) = 0$, e analogamente para λ_n), definida ao menos nos conjuntos abertos, invariante por translação e tal que $\lambda(a, b) = b - a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ (respectivamente $\lambda_n\left(\prod_{j=1}^n (a_j, b_j)\right) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ onde $a_j < b_j$, $\forall j = 1, \ldots, n$).

Vamos admitir conhecimento prévio por parte do leitor dos teoremas básicos de Teoria da Medida: os teoremas de Convergência Monótona, de Convergência Dominada e as desigualdades de Hölder e de Minkowski, dentre outras.

Definição 1.1.9. Considere o espaço de medida $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \kappa)$ onde $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{P}(X)$ denota o conjunto das partes de X e κ é a medida da contagem (isto é, $\kappa(A)$ é o número de elementos de A se A é finito ou $\kappa(A) = \infty$ se A não é finito). Dado $1 \leq p \leq \infty$, denotamos $l_p = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \kappa)$. Mais especificamente, dada $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, identificando a com a sequência $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $a_n = a(n)$, para $1 \leq p < \infty$ definimos

$$\|a\|_{l_p} = \left(\int_{\mathbb{N}} |a_n|^p \, d\kappa(n)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e para $p = \infty$ definimos

$$\|a\|_{l_\infty} = \inf\{C \in \mathbb{R};\, |a_n| \leq C \, \forall n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

1.2. Esperança Condicional

Considere $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade, isto é, um espaço de medida com $\mu(\Omega) = 1$. Sejam uma função $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e $\mathcal{F}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$. Como f não é necessariamente $\mathcal{F}$-mensurável, podemos indagar se é possível encontrar uma função g $\mathcal{F}$-mensurável que satisfaz

$$\int_A g \, d\mu = \int_A f \, d\mu, \ \forall A \in \mathcal{F}.$$

Definamos $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ para cada $A \in \mathcal{F}$. Então ν e $\mu|_{\mathcal{F}}$ são medidas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ satisfazendo ν é absolutamente contínua com repeito a $\mu|_{\mathcal{F}}$, com $\mu|_{\mathcal{F}}$ positiva e finita. A existência e unicidade de $g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ em q.t.p. segue do Teorema de Radon-Nikodym.

Definição 1.2.1. Nas condições acima, definimos a função g (que é única em q.t.p.) como sendo a *esperança condicional* de f com respeito a $\mathcal{F}$ e denotamos

$$g = E[f|\mathcal{F}].$$

Uma referência para os resultados desta seção é [12].

1.2.1. Propriedades da Esperança Condicional

Nesta subseção apresentaremos algumas propriedades da esperança condicional.

Proposição 1.2.2. *Sejam $f, g \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e $a \in \mathbb{R}$. Então:*

- ***(a)*** *$E[\cdot|\mathcal{F}]$ é linear, isto é, $E[f + ag|\mathcal{F}] = E[f|\mathcal{F}] + aE[g|\mathcal{F}]$.*
- ***(b)*** *$f \geq 0 \implies E[f|\mathcal{F}] \geq 0$ ou, equivalentemente, $f \geq g \implies E[f|\mathcal{F}] \geq E[g|\mathcal{F}]$.*
- ***(c)*** *Se h é $\mathcal{F}$-mensurável e $hf \in L^1$, $E[hf|\mathcal{F}] = hE[f|\mathcal{F}]$.*

Demonstração. As partes (a) e (b) seguem diretamente das propriedades da derivada de Radon-Nikodym. Demonstraremos (c) por partes. Se $h = \chi_A$, $A \in \mathcal{F}$ então

$$\int_B \chi_A f \, d\mu = \int_{B \cap A} f \, d\mu = \int_{B \cap A} E[f|\mathcal{F}] \, d\mu = \int_B \chi_A E[f|\mathcal{F}] \, d\mu, \quad \forall B \in \mathcal{F}.$$

Isso mostra que $E[\chi_A f|\mathcal{F}] = \chi_A E[f|\mathcal{F}]$. Se h é simples, basta aplicar a parte (a). Se $h \geq 0$ e $f \geq 0$, usamos o Teorema de Convergência Monótona para $s_n \uparrow h$, onde s_n são simples e $\mathcal{F}$-mensuráveis e obtemos

$$\begin{aligned} \int_B hf \, d\mu &= \lim_{n \to \infty} \int_B s_n f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_B E[s_n f|\mathcal{F}] \, d\mu \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_B s_n E[f|\mathcal{F}] \, d\mu = \int_B hE[f|\mathcal{F}] \, d\mu. \end{aligned}$$

Por fim, para o caso geral, basta decompor $h = h^+ - h^-$, $f = f^+ + f^-$ e usar novamente a linearidade de $E[\cdot|\mathcal{F}]$. $\square$

Definição 1.2.3. Um conjunto mensurável A é dito um *átomo* quando possui medida positiva e $B \subset A \Rightarrow \mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$. Se existe uma sequência de átomos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, então a -álgebra é dita *atômica* (com respeito a μ).

Proposição 1.2.4. *Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $\mathcal{F}$ uma sub-σ-álgebra atômica de $\mathcal{A}$ e considere uma família de átomos $\{A_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{F}$ tal que $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$. Então:*

(a) *g é $\mathcal{F}$-mensurável se, e somente se, existe uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\bar{\mathbb{R}}$ tal que*

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{A_n} \;\; q.t.p. \;\; [\mu]\,;$$

(b) *se $f \in L^1(\Omega)$, então*

$$E[f|\mathcal{F}] = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\mu(A_j)} \int_{A_j} f \, d\mu \right] \chi_{A_j}.$$

Demonstração. Iniciemos com (a). Podemos assumir $g \geq 0$, pois, supondo que (a) vale para $g^+ = \max(g, 0)$ e $g^- = \max(-g, 0)$, considerando a decomposição $g = g^+ - g^-$ e usando a linearidade da integral e da esperança condicional, mostramos que (a) vale para g. Seja $s_n = \sum_{i=1}^{m_n} a_{n,i} \chi_{B_{n,i}}$ uma sequência de funções simples tal que $s_n \uparrow g$, com $B_{n,i} \cap B_{n,j} = \emptyset$ e $a_{n,i} \neq a_{n,j}$ para $\forall n, i, j \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, j \leq m_n$ e $i \neq j$. Podemos escrever

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_n} a_{n,i} \chi_{A_k \cap B_{n,i}}.$$

Como $A_k \cap B_{n,i} \subset A_k$ segue que $\mu(A_k \cap B_{n,i}) = \mu(A_k)$ ou $\mu(A_k \cap B_{n,i}) = 0$. Mas não podem existir i e j distintos tais que $\mu(A_k \cap B_{n,i}) = \mu(A_k \cap B_{n,j}) = \mu(A_k)$, pois, neste caso, teríamos

$$\mu(A_k) \geq \mu(A_k \cap (B_{n,i} \cup B_{n,j})) = \mu(A_k \cap B_{n,i}) + \mu(A_k \cap B_{n,j}) = 2\mu(A_k).$$

Ainda mais, se $\mu(A_k \cap B_{n,i}) = \mu(A_k)$ então $\mu(A_k \setminus B_{n,i}) = \mu(A_k) - \mu(A_k \cap B_{n,i}) = 0$. Assim, é possível escolher $b_{n,k} = a_{n,i}$ se $\mu(A_k \cap B_{n,i}) \neq 0$ para algum i, ou, caso contrário, $b_{n,k} = 0$, e daí escrevemos

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}\chi_{A_k} \text{ q.t.p. } [\mu]\,.$$

Como s_n é não-decrescente, temos que $b_{n,k}$ é não-decrescente para k fixo. Logo,

$$s_n \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lim_{n\to\infty} b_{n,k}\right)\chi_{A_k} \text{ q.t.p. } [\mu] \quad \therefore g = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lim_{n\to\infty} b_{n,k}\right)\chi_{A_k} \text{ q.t.p. } [\mu]\,.$$

Para a recíproca, basta considerar a sequência não-decrescente $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_{A_k}$ de funções $\mathcal{F}$-mensuráveis, pois assim $g = \lim_{n\to\infty} s_n$ é $\mathcal{F}$-mensurável.

Agora, mostremos (b). Seja $g = E\left[f|\mathcal{F}\right]$; por (a), $g = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\chi_{A_k}$. Mas , pela definição de esperança condicional

$$a_k\mu\left(A_k\right) = \int_{A_k} g\,d\mu = \int_{A_k} f\,d\mu$$

e assim

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\mu\left(A_j\right)}\int_{A_j} f\,d\mu\right]\chi_{A_j}.$$

□

1.2.2. Teoremas da Convergência Monótona, de Fatou-Lebesgue e Desigualdade de Hölder

Nesta subseção serão enunciados e demonstrados teoremas análogos (e que recebem os mesmos nomes) de teoremas bastante conhecidos em Teoria da Medida.

Consideremos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e uma sub-σ-álgebra $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$.

Teorema 1.2.5 (da Convergência Monótona para a Esperança Condicional)**.** *Se $f_n \uparrow f$ com $f_n \geq 0$ e $f_n, f \in L^1$, então $E\left[f_n|\mathcal{F}\right] \uparrow E\left[f|\mathcal{F}\right]$.*

Demonstração. Que a sequência $E\left[f_n|\mathcal{F}\right]$ é não-decrescente segue da Proposição 1.2.2 (b). Pelo Teorema da Convergência Monótona, ela converge para uma função $\mathcal{F}$-

mensurável. Mais ainda, se $A \in \mathcal{F}$,

$$\int_A f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A E\left[f_n|\mathcal{F}\right]\, d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} E\left[f_n|\mathcal{F}\right]\, d\mu$$

o que mostra que $\lim_{n\to\infty} E\left[f_n|\mathcal{F}\right] = E\left[f|\mathcal{F}\right]$. □

Teorema 1.2.6 (de Fatou-Lebesgue para a Esperança Condicional)**.** *Sejam f_n e g funções $\mathcal{A}$-mensuráveis, g integrável. Nestas condições:*

(a) *$f_n \leq g$ q.t.p. para todo n $\implies E\left[\limsup f_n|\mathcal{F}\right] \geq \limsup E\left[f_n|\mathcal{F}\right]$ q.t.p.*

(b) *$f_n \geq g$ q.t.p. para todo n $\implies E\left[\liminf f_n|\mathcal{F}\right] \leq \liminf E\left[f_n|\mathcal{F}\right]$ q.t.p.*

(c) *$f_n \xrightarrow{q.t.p.} f$ e $|f_n| \leq g$ em q.t.p. para todo n $\implies E\left[f|\mathcal{F}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} E\left[f_n|\mathcal{F}\right]$ q.t.p.*

O Item (c) é conhecido como Teorema da Convergência Dominada para a Esperança Condicional.

Demonstração. Supondo (b), trocando f_n por $-f_n$ e g por $-g$, obtemos (a). O item (c) segue de (a) e (b) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E\left[f|\mathcal{F}\right] &= E\left[\liminf f_n|\mathcal{F}\right] \leq \liminf E\left[f_n|\mathcal{F}\right] \\ &\leq \limsup E\left[f_n|\mathcal{F}\right] \leq E\left[\limsup f_n|\mathcal{F}\right] = E\left[f|\mathcal{F}\right], \end{aligned}$$

e assim

$$\lim_{n\to\infty} E\left[f_n|\mathcal{F}\right] = E\left[f|\mathcal{F}\right].$$

Vamos mostrar (b). Primeiro supomos $g = 0$. Usando 1.2.2 (b),

$$E\left[\inf_{k\leq n} f_k \middle| \mathcal{F}\right] \leq E\left[f_j|\mathcal{F}\right], \quad \forall 1 \leq j \leq n,$$

e portanto

$$E\left[\inf_{k\leq n} f_k \middle| \mathcal{F}\right] \leq \inf_{k\leq n} E\left[f_k|\mathcal{F}\right].$$

Como $\liminf f_n = \sup_n \inf_{k\leq n} f_k$, aplicando o limite em n segue, pelo Teorema da Convergência Monótona para a Esperança Condicional, que

$$E\left[\lim_{n\to\infty} \inf_{k\leq n} f_k \middle| \mathcal{F}\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[\inf_{k\leq n} f_k \middle| \mathcal{F}\right] \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\leq n} E\left[f_k|\mathcal{F}\right].$$

Para o caso $g \neq 0$, tomamos $h_n = f_n - g$. Daí $h_n \geq 0$ e, usando a linearidade da esperança condicional, segue o resultado. $\square$

Teorema 1.2.7 (Desigualdade de Hölder para a Esperança Condicional)**.** *Dadas $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $1 < p, q < \infty$ números conjugados, isto é, tais que $1/p + 1/q = 1$, temos que*

$$E\left[|fg|\right|\mathcal{F}] \leq E\left[|f|^p\right|\mathcal{F}]^{\frac{1}{p}}\, E\left[|g|^q\right|\mathcal{F}]^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Consideremos a seguinte desigualdade elementar

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

para $a, b > 0$ e $1 < p < \infty$ (ver [6, p. 79]).

Primeiramente notamos que, pela Desigualdade de Hölder usual, $|fg|$ é integrável. Pela inequação acima,

$$\frac{|f|}{E\left[|f|^p\right|\mathcal{F}]^{\frac{1}{p}}}\frac{|g|}{E\left[|g|^q\right|\mathcal{F}]^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|f|^p}{pE\left[|f|^p\right|\mathcal{F}]} + \frac{|g|^q}{qE\left[|g|^q\right|\mathcal{F}]}$$

sobre o conjunto $A = [E\left[|f|^p\right|\mathcal{F}] > 0] \cap [E\left[|g|^q\right|\mathcal{F}] > 0]$. Aplicando a esperança condicional nos termos acima, obtemos

$$\frac{E\left[|fg|\right|\mathcal{F}]}{E\left[|f|^p\right|\mathcal{F}]^{\frac{1}{p}}\, E\left[|g|^q\right|\mathcal{F}]^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

sobre A, o que demonstra a Desigualdade de Hölder em A. Por outro lado, tomando $A_f = [E\left[|f|^p\right|\mathcal{F}] = 0]$, temos que

$$\int_{A_f} |f|^p \, d\mu = \int_{A_f} E\left[|f|^p\right|\mathcal{F}] \, d\mu = 0$$

donde segue que $f = 0$ sobre A_f e a Desigualdade de Hölder é clara sobre A_f. Analogamente, o resultado é valido sobre o conjunto $A_g = [E\left[|g|^q\right|\mathcal{F}] = 0]$. Uma vez que $\Omega = A \cup A_f \cup A_g$, a demonstração está completa. $\square$

Proposição 1.2.8. *Dadas $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-álgebras e $f \in L^1$,*

$$E\left[E\left[f|\mathcal{G}\right]|\mathcal{F}\right] = E\left[f|\mathcal{G}\right] = E\left[E\left[f|\mathcal{F}\right]|\mathcal{G}\right].$$

Demonstração. A igualdade $E[E[f|\mathcal{G}]|\mathcal{F}] = E[f|\mathcal{G}]$ é clara pois $E[f|\mathcal{G}]$ é uma função $\mathcal{G}$-mensurável e portanto $\mathcal{F}$-mensurável. Vejamos a segunda igualdade.

Se $A \in \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$,

$$\int_A E[f|\mathcal{F}]\, d\mu = \int_A f\, d\mu = \int_A E[f|\mathcal{G}]\, d\mu.$$

Vemos então que $E[f|\mathcal{G}]$, sendo $\mathcal{G}$-mensurável, é igual à esperança condicional de $E[f|\mathcal{F}]$ com respeito a $\mathcal{G}$. $\square$

Consideremos o operador $E[\cdot|\mathcal{F}]$ definido sobre o espaço vetorial $L^p(\mathcal{A})$ com $1 \leq p \leq \infty$. Já vimos que $E[\cdot|\mathcal{F}]$ é uma função linear e é claro que, se $f \in L^p(\mathcal{F})$, $E[f|\mathcal{F}] = f$. Como $L^p \subset L^1$ (por consequência da Desigualdade de Hölder) segue que $E[\cdot|\mathcal{F}]$ está bem definida. Vamos mostrar em seguida que este operador é contínuo de L^p em L^p.

Proposição 1.2.9. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. O operador $E[\cdot|\mathcal{F}]$ em L^p é uma contração, isto é, $\|E[f|\mathcal{F}]\|_p \leq \|f\|_p$ para qualquer $f \in L^p$.*

Demonstração. Suponha $1 \leq p < \infty$. Usando a Desigualdade de Hölder para a Esperança Condicional para $f \in L^p$ e $1 = \chi_\Omega \in L^q$, obtemos

$$|E[f|\mathcal{F}]|^p \leq E[|f|^p|\mathcal{F}].$$

Logo, $E[f|\mathcal{F}] \in L^p$. Integrando em ambos os lados, vem

$$\int_\Omega |E[f|\mathcal{F}]|^p\, d\mu \leq \int_\Omega E[|f|^p|\mathcal{F}]\, d\mu = \int_\Omega |f|^p\, d\mu,$$

isto é,

$$\|E[f|\mathcal{F}]\|_p \leq \|f\|_p.$$

Para o caso $p = \infty$, usando a linearidade da esperança condicional,

$$\begin{aligned}
|E[f|\mathcal{F}]| &= \left|E\left[f^+|\mathcal{F}\right] - E\left[f^-|\mathcal{F}\right]\right| \\
&\leq \left|E\left[f^+|\mathcal{F}\right]\right| + \left|E\left[f^-|\mathcal{F}\right]\right| \\
&= E[|f|\,|\mathcal{F}] \leq E[\|f\|_\infty|\mathcal{F}] \\
&= \|f\|_\infty E[1|\mathcal{F}] = \|f\|_\infty,
\end{aligned}$$

onde $f^+ = f \vee 0$ e $f^- = (-f) \vee 0$ são, respectivamente, as partes positiva e negativa de f. $\square$

1.3. Resultados Diversos em Teoria da Medida

Enunciaremos aqui alguns resultados mais avançados que são conhecidos em Teoria da Medida. Estes resultados serão utilizados principalmente no Capítulo 5.

Teorema 1.3.1 (Desigualdade de Minkowski para Integrais ([8, p. 194])). *Dados dois espaços de medida* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$*, uma função* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *mensurável e* $1 \leq p < \infty$*, então*

$$\left(\int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\ d\mu(x)\right)^p d\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^p\ d\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x)$$

ou, de forma abreviada,

$$\left\|\int_X |f(x,\cdot)|\ d\mu(x)\right\|_{L^p(Y)} \leq \int_X \|f(x,\cdot)\|_{L^p(Y)}\ d\mu(x).$$

Notação 1.3.2. Seja X um espaço normado com norma $\|\cdot\|$. Dados $x \in X$ e $r > 0$, utilizamos a notação $B_X(x,r) = \{y \in X;\ \|y - x\| < \varepsilon\}$ (ou simplesmente $B(x,r)$) para a bola aberta de centro em x e raio r. A notação $B_X[x,r] = \{y \in X;\ \|y - x\| \leq \varepsilon\}$ (ou simplesmente $B[x,r]$) é usada para a bola fechada centrada em x e com raio r.

Definição 1.3.3. Seja A um subconjunto de um espaço vetorial X.

(a) A é chamado *convexo* se $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$, $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha \in [0,1]$.

(b) A é chamado *centralmente simétrico* se $x \in A \implies -x \in A$.

(c) A é chamado *absorvente* se, para cada $x \in X$, existe $t > 0$ tal que $tx \in A$.

Definição 1.3.4. Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto centralmente simétrico e absorvente. O *funcional de Minkowski* $\mu_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de V é definido por

$$\mu_V(x) = \inf\left\{t > 0;\ \frac{x}{t} \in V\right\}.$$

Se V for convexo, centralmente simétrico, limitado e absorvente, este funcional define uma norma $\|\cdot\|_V = \mu_V(\cdot)$ em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.3.5. O *conjunto polar* de um conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto

$$V^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; \sup_{y \in V} |\langle x, y \rangle| \leq 1 \right\}.$$

Observação 1.3.6. Se V for um subconjunto convexo, centralmente simétrico, limitado e absorvente de $\mathbb{R}^n$ e E for o conjunto $\mathbb{R}^n$ com a norma $\|\cdot\|_V = \mu_V(\cdot)$ definida por V, então

$$B_E(0,1) \subset V \subset B_E[0,1],$$

ou seja,

$$\|x\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_V \leq 1} |\langle x, y \rangle| = \sup_{y \in V} |\langle x, y \rangle|$$

donde $V^\circ = B_{E^*}[0,1]$ (onde E^* é o dual de E).

Definição 1.3.7. Um *grupo topológico (abeliano)* G é um espaço topológico e um grupo tal que as operações soma $(x, y) \mapsto x + y$ e inversão $x \mapsto -x$ são contínuas, onde consideramos $G \times G$ com a topologia produto.

Seja G um grupo topológico localmente compacto e seja μ uma medida sobre a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(G)$ de G. Se para todo $g \in G$ e $A \in \mathcal{B}(G)$ temos $\mu(g + A) = \mu(A)$ onde $g + A = \{g + a;\, a \in A\}$, dizemos que μ é uma medida de Haar sobre G.

Observação 1.3.8. Todo grupo topológico G possui uma medida de Haar e quaisquer duas medidas de Haar sobre G diferem somente por uma constante multiplicativa. Se G for compacto então G possui uma única medida de Haar normalizada.

1.4. Funções Vetoriais

Nesta seção estão ferramentas úteis que aplicaremos neste trabalho. Com exceção do Teorema 1.4.6, estes resultados não serão utilizados até o Capítulo 4. Mais informações sobre medidas vetoriais e assuntos relacionados podem ser encontradas em [4].

Vamos fixar E um espaço de Banach (ou seja, um espaço vetorial normado e completo) e $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida.

Definição 1.4.1. Uma função $s : \Omega \to E$ é dita uma *função simples* (ou, respectivamente, *função simples enumerável*) se s é da forma

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k} \qquad \left(\text{respectivamente, } s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{A_k}\right)$$

com $a_k \in E$ e $A_k \in \mathcal{A}$.

Definição 1.4.2. Uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ converge a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *μ-quase uniformemente* se para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \varepsilon$ e f_n converge a f uniformemente em A^c.

Definição 1.4.3. Uma função $f : \Omega \to E$ é dita *fortemente mensurável* se existe uma sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples tal que $\|s_n - f\|_E$ converge a 0 μ-quase uniformemente.

Definição 1.4.4. Denotamos por $L^p_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (ou simplesmente L^p_E), $1 \leq p < \infty$, o conjunto das funções $f : \Omega \to E$ fortemente mensuráveis tais que $\int_\Omega \|f\|_E^p \, d\mu < \infty$ e definimos a norma de f neste espaço por

$$\|f\|_{p,E} = \|\|f\|_E\|_p = \left(\int_\Omega \|f\|_E^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Analogamente, denotamos por $L^\infty_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (ou simplesmente L^∞_E), o conjunto das funções $f : \Omega \to E$ fortemente mensuráveis tais que $\|f\|_{\infty,E} < \infty$ onde

$$\|f\|_{\infty,E} = \|\|f\|_E\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R};\, \mu([\|f\|_E > C]) = 0\}.$$

Observação 1.4.5. Dada uma função $f \in L^p_E$, existe uma sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples enumeráveis uniformemente convergente a f com

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_{p,E} = 0.$$

1.4.1. Espaços Duais de L^p e L^p_E

Os resultados desta subseção podem ser consultados em [4].

Começaremos com um teorema bastante conhecido para os espaços L^p que encontra-se em [8]. Em seguida vamos demonstrar uma generalização deste resultado para L^p_E.

Teorema 1.4.6. *Se p e q são números conjugados com $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p$, então*

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int_\Omega fg \, d\mu; \; \|g\|_q = 1 \right\}.$$

Se $\mu(\Omega) < \infty$ então o teorema vale para $p = \infty$ e $q = 1$.

Demonstração. A desigualdade $\|f\|_p \geq \sup \left\{ \int_\Omega fg \, d\mu; \; \|g\|_q = 1 \right\}$ vem da Desigualdade de Hölder. Sejam $\sigma(f) = 1\chi_{[f>0]} - 1\chi_{[f<0]}$ (isto é, o sinal de f) e $g = \sigma(f) |f|^{p-1} / \|f\|_p^{p-1}$. Temos que $f\sigma(f) = |f|$ e portanto

$$\int_\Omega fg \, d\mu = \int_\Omega \frac{f\sigma(f) |f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}} \, d\mu = \int_\Omega \frac{|f|^p}{\|f\|_p^{p-1}} \, d\mu = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p-1}} = \|f\|_p .$$

Se $p = 1$ é claro que $\|g\|_\infty = \|\sigma(f)\|_\infty = 1$. Por outro lado, se $p > 1$,

$$\|g\|_q^q = \int_\Omega |g|^q \, d\mu = \int_\Omega \left| \frac{\sigma(f) |f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}} \right|^{\frac{p}{p-1}} d\mu = \frac{\int_\Omega |f|^p \, d\mu}{\|f\|_p^p} = 1$$

e assim $\|g\|_q = 1$. Para o caso $p = \infty$, sejam $\varepsilon > 0$, $A = [|f| > \|f\|_\infty - \varepsilon]$ e $g = \mu(A)^{-1} \chi_A \sigma(f)$. Então é claro que $\|g\|_1 = 1$ e

$$\int_\Omega fg \, d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f| \, d\mu \geq \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Assim, em qualquer caso, $\sup \left\{ \int fg \, d\mu; \; \|g\|_q = 1 \right\} \geq \|f\|_p$. □

Notação 1.4.7. Denotamos por E^* o dual do espaço de Banach E, isto é, E^* é o espaço dos funcionais lineares contínuos de E com a norma

$$\|y\|_{E^*} = \sup \left\{ |y(x)| \, ; \; x \in E \text{ e } \|x\|_E = 1 \right\}.$$

Observação 1.4.8. Seja H um espaço de Hilbert, isto é, um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ com a norma $\|x\|_H = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$, $x \in H$, e completo com respeito a esta norma. Então essencialmente $H^* = H$, onde a identificação é dada por

$$y \in H \longleftrightarrow y^* \in H^* \text{ onde } y^*(x) = \langle x, y \rangle .$$

Esta identificação é uma isometria. De fato, pela Desigualdade de Schwarz, segue que $\|y^*\|_{H^*} \leq \|y\|_H$ e, tomando $x = y/\|y\|_H$, temos $\|x\|_H = 1$ e $y^*(x) = \|y\|_H$, donde $\|y^*\|_{H^*} \geq \|y\|_H$.

Isto justifica a notação seguinte.

Notação 1.4.9. Dados $x \in E$ e $y \in E^*$, denotamos $\langle x, y\rangle_E = y(x)$. Se p e q são conjugados, dadas $f \in L^p_E$ e $g \in L^q_{E^*}$, denotamos $\langle f, g\rangle_E(x) = g(x)(f(x))$ para $x \in \Omega$.

Teorema 1.4.10 (Desigualdade de Hölder)**.** *Para $f \in L^p_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e $g \in L^q_{E^*}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, temos*

$$\left|\int_\Omega \langle f, g\rangle\, d\mu\right| \leq \|f\|_{p,E}\, \|g\|_{q,E^*}.$$

Demonstração. Seja $x \in \Omega$. Pela definição da norma $\|\cdot\|_{E^*}$,

$$\langle f, g\rangle(x) = |g(x)(f(x))| = \|f(x)\|_E \left|g(x)\left(\frac{f(x)}{\|f(x)\|_E}\right)\right| \leq \|f(x)\|_E\, \|g(x)\|_{E^*}$$

uma vez que $f(x)/\|f(x)\|_E$ tem norma 1 em E. Pela Desigualdade de Hölder para funções reais,

$$\left|\int_\Omega \langle f, g\rangle\, d\mu\right| \leq \left|\int_\Omega \|f\|_E\, \|g\|_{E^*}\, d\mu\right| \leq \|\|f\|_E\|_p\, \|\|g\|_{E^*}\|_q = \|f\|_{p,E}\, \|g\|_{q,E^*}. \qquad \square$$

Agora, a versão vetorial do Teorema 1.4.6.

Teorema 1.4.11. *Sejam p e q números conjugados, $1 < p, q < \infty$, $g \in L^q_{E^*}$ e $\mu(\Omega) < \infty$. Então*

$$\|g\|_{q,E^*} = \sup\left\{\left|\int_\Omega \langle f, g\rangle_E\, d\mu\right|;\ f \in L^p_E,\ \|f\|_{p,E} = 1\right\}.$$

Demonstração. Pela Desigualdade de Hölder, se $\|f\|_{p,E} = 1$ então $\left|\int \langle f, g\rangle_E\, d\mu\right| \leq \|g\|_{q,E^*}$, donde

$$\|g\|_{q,E^*} \geq \sup\left\{\left|\int_\Omega \langle f, g\rangle_E\, d\mu\right|;\ f \in L^p_E,\ \|f\|_{p,E} = 1\right\}.$$

Resta então demonstrar a desigualdade inversa.

Suponha inicialmente que g é uma função simples enumerável, isto é, $g = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \chi_{A_i}$ onde $y_i \in E^*$ e os conjuntos A_i são mensuráveis e formam uma partição de Ω (isto é, $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$). Sejam $\varepsilon > 0$ arbitrário e $h \in L^p$ com $\|h\|_p = 1$ tal que $\int \|g\|_{E^*} h \, d\mu = \|g\|_{q,E^*}$, como no Teorema 1.4.6. Temos também que $h \geq 0$ e $h \in L^1$ (basta notar que $\mu(\Omega) < \infty \implies \chi_\Omega \in L^q$ e aplicar a Desigualdade de Hölder às funções $h \in L^p$ e $\chi_\Omega \in L^q$).

Segue da definição de $\|y_i\|_{E^*}$ que existe $x_i \in E$ com $\|x_i\|_E = 1$ e tal que

$$y_i(x_i) > \|y_i\|_{E^*} - \varepsilon. \tag{1.1}$$

Defina $f = \sum_{i=1}^{\infty} x_i h \chi_{A_i}$. Então, como $\|x_i\|_E = \|h\|_p = 1$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,E}^p &= \int_\Omega \|f\|_E^p \, d\mu = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_E^p |h|^p \chi_{A_i} \right) d\mu \\
&= \int_\Omega |h|^p \left(\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i} \right) d\mu = \int_\Omega |h|^p \, d\mu = 1,
\end{aligned}$$

ou seja, $\|f\|_{p,E} = 1$. Logo, por (1.1), pela definição de h e pelo fato de $h \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle f, g \rangle_E \, d\mu &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{\infty} h y_i(x_i) \chi_{A_i} \right) d\mu \\
&\geq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{\infty} h \left(\|y_i\|_{E^*} - \varepsilon \right) \chi_{A_i} \right) d\mu \\
&= \int_\Omega h \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|_{E^*} \chi_{A_i} \right) d\mu - \varepsilon \int_\Omega h \left(\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i} \right) d\mu \\
&= \int_\Omega h \|g\|_{E^*} \, d\mu - \varepsilon \int_\Omega h \, d\mu = \|g\|_{q,E^*} - \varepsilon \|h\|_1 .
\end{aligned}$$

Como $h \in L^1$ podemos fazer $\varepsilon \to 0$ (h não depende de ε) para concluir que

$$\sup \left\{ \left| \int \langle f, g \rangle_E \, d\mu \right| ; \, f \in L_E^p, \, \|f\|_{p,E} = 1 \right\} \geq \|g\|_{q,E^*} .$$

Para demonstrar para $g \in L_{E^*}^q$ qualquer, tomamos uma sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a g nas condições da Observação 1.4.5. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, temos $\|g - s_n\|_E \leq \varepsilon$ e $\|g - s_n\|_{q,E} < \varepsilon$. Tomando $n \geq n_0$, podemos encontrar $h_n \in L_E^p$ com $\|h_n\|_{p,E} = 1$ tal que

$$\left| \int_\Omega \langle h_n, s_n \rangle_E \, d\mu \right| \geq \|s_n\|_{q,E} - \varepsilon.$$

Então, para esta escolha de h_n,

$$\begin{aligned}
\|s_n\|_{q,E} - \varepsilon &\leq \left| \int_\Omega \langle h_n, s_n \rangle_E \, d\mu \right| \\
&\leq \left| \int_\Omega \langle h_n, g \rangle_E \, d\mu \right| + \left| \int_\Omega \langle h_n, g - s_n \rangle_E \right| \\
&\leq \left| \int_\Omega \langle h_n, g \rangle_E \, d\mu \right| + \int_\Omega \|h_n\|_E \, \|g - s_n\|_E \, d\mu \\
&\leq \left| \int_\Omega \langle h_n, g \rangle_E \, d\mu \right| + \varepsilon \, \|h_n\|_{1,E} \, . \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder às funções $\|h_n\|_E \in L^P$ e $\chi_\Omega \in L^q$, temos que

$$\|h_n\|_{1,E} = \int_\Omega h_n \chi_\Omega \, d\mu \leq \|h_n\|_{p,E} \, \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} = \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} \, .$$

Agora, usando (1.2) e lembrando também que $\|g - s_n\|_{q,E} < \varepsilon$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \langle h_n, g \rangle_E \, d\mu \right| &\geq \|s_n\|_{q,E} - \varepsilon - \varepsilon \, \|h_n\|_{1,E} \\
&\geq \|s_n\|_{q,E} - \varepsilon - \varepsilon \left(\mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&\geq \|g\|_{q,E} - \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} \, .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sup \left\{ \left| \int_\Omega \langle f, g \rangle_E \, d\mu \right| ; \, f \in L_E^p, \, \|f\|_{p,E} = 1 \right\} &\geq \left| \int_\Omega \langle h_n, g \rangle_E \, d\mu \right| \\
&\geq \|g\|_{q,E} - \varepsilon \left(2 + \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} \right) .
\end{aligned}$$

Para concluir, basta fazer $\varepsilon \to 0$. □

1.4.2. Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz

O Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz é um resultado importante e bem conhecido em Análise de Fourier que permite limitar a norma de um operador $T : L^p \to L^p$ (ou $T : L^p \to L^q$ com p e q obedecendo certas relações). A demonstração do Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz para funções com valores num espaço de Banach pode ser obtida através de uma adaptação da demonstração deste teorema para funções reais. Apresentaremos nesta subseção o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz para funções em espaços de Banach e a sua demonstração, adaptada de [10, p. 435-448].

Uma versão mais geral para o caso de funções reais deste teorema encontra-se em [8]. A demonstração desta versão pode também ser adaptada para o caso vetorial, mas, por simplicidade, não a colocaremos neste trabalho.

Definição 1.4.12. Seja $1 \leq p < \infty$. A *norma L^p fraca* de uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável num espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é dada por

$$[f]_p = \left(\sup_{z \geq 0} z^p \mu\left[|f| > z\right]\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Também definimos, por conveniência, $[f]_\infty = \|f\|_\infty$.

Se E é um espaço de Banach, a *norma L^p_E fraca* de uma função $f : \Omega \to E$ mensurável é dada por

$$[f]_{p,E} = [\|f\|_E]_p = \left(\sup_{z \geq 0} z^p \mu\left[\|f\|_E > z\right]\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observação 1.4.13. A norma fraca, apesar do nome, não é uma norma, pois não vale necessariamente a desigualdade triangular. Porém,

$$\begin{aligned}
&\left[|f| \leq \frac{z}{2}\right] \cap \left[|g| \leq \frac{z}{2}\right] \subset \left[|f+g| \leq z\right] \\
\Longrightarrow &\left[|f| > \frac{z}{2}\right] \cup \left[|g| > \frac{z}{2}\right] \supset \left[|f+g| > z\right] \\
\Longrightarrow &\,\mu\left[|f+g| > z\right] \leq \mu\left[|f| > \frac{z}{2}\right] + \mu\left[|g| > \frac{z}{2}\right].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} z^p \mu\left[|f+g|>z\right] &\leq 2^p\left(\left(\frac{z}{2}\right)^p \mu\left[|f|>\frac{z}{2}\right]+\left(\frac{z}{2}\right)^p \mu\left[|g|>\frac{z}{2}\right]\right) \\ &\leq 2^p\left([f]_p^p+[g]_p^p\right). \end{aligned}$$

Da desigualdade $(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}} \leq a+b$ válida para $a,b>0$ e $p\geq 1$ obtemos

$$[f+g]_p \leq 2\left([f]_p^p+[g]_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\left([f]_p+[g]_p\right).$$

Observação 1.4.14. Se $f:\Omega\to\mathbb{R}$ é mensurável vale, para $1\leq p<\infty$ e $z>0$,

$$\|f\|_p^p=\int |f|^p\, d\mu=\int_{[|f|<z]} |f|^p\, d\mu+\int_{[|f|\geq z]} |f|^p\, d\mu \geq 0+z^p\mu\left[|f|\geq z\right]$$

e assim

$$[f]_p \leq \|f\|_p .$$

Definição 1.4.15. Seja $(Y,\mathcal{B},\nu)$ um outro espaço de medida. Dados $1\leq p,q\leq\infty$, um operador $T: L^p\to\{f:Y\to\mathbb{R};\ f \text{ mensurável}\}$ é dito ser do *tipo forte* (p,q) (respectivamente, do *tipo fraco* (p,q)) se existe $C>0$ tal que, dada $f\in L^p$,

$$\|T(f)\|_q \leq C\|f\|_p \qquad (\text{respectivamente, } [T(f)]_q \leq C\|f\|_p).$$

Analogamente, dados E, D dois espaços de Banach, $1\leq p,q\leq\infty$, um operador $T: L_E^p\to\{f:Y\to D;\ f \text{ fortemente mensurável}\}$, T é dito do *tipo forte* (p,q) (respectivamente, do *tipo fraco* (p,q)) se existe $C>0$ tal que, para $f\in L_E^p$,

$$\|T(f)\|_{q,D} \leq C\|f\|_{p,E} \qquad (\text{respectivamente, } [T(f)]_{q,D} \leq C\|f\|_{p,E}).$$

Lema 1.4.16. *Sejam $M>0$, $1\leq s<p<r\leq\infty$ e $f\in L_E^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Sejam*

$$f_{r,M}=f\chi_{[\|f\|_E\leq M]}, \qquad f_{s,M}=f\chi_{[\|f\|_E>M]}.$$

Então $f=f_{r,M}+f_{s,M}$, $f_{r,M}\in L_E^r$ e $f_{s,M}\in L_E^s$. Em particular, $L_E^p\subset L_E^r+L_E^s$.

Demonstração. Temos que $\|f_{r,M}\|_E \leq M$ e, em particular, $f_{\infty,M} \in L_E^\infty$. Suponhamos então $r < \infty$. Para todo $x \in [\|f\|_E \leq M]$,

$$\|f(x)\|_E^r = \|f(x)\|_E^{r-p} \|f(x)\|_E^p \leq M^{r-p} \|f(x)\|_E^p .$$

Integrando os dois lados desta inequação, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|f_{r,M}(x)\|_E^r \, d\mu(x) &= \int_{[\|f\|_E \leq M]} \|f(x)\|_E^r \, d\mu(x) \\ &\leq M^{r-p} \int_{[\|f\|_E \leq M]} \|f(x)\|_E^p \, d\mu(x) \\ &\leq M^{r-p} \|f(x)\|_{p,E}^p ,\end{aligned}$$

donde $f_{r,M} \in L_E^r$.

Agora, se $x \in [\|f\|_E > M]$,

$$\|f(x)\|_E^p = \|f(x)\|_E^{p-s} \|f(x)\|_E^s \geq M^{p-s} \|f(x)\|_E^s .$$

Dividindo os dois lados desta inequação por M^{p-s} e integrando, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|f_{s,M}(x)\|_E^s \, d\mu(x) &= \int_{[\|f\|_E > M]} \|f(x)\|_E^s \, d\mu(x) \\ &\leq M^{s-p} \int_{[\|f\|_E > M]} \|f(x)\|_E^p \, d\mu(x) \\ &\leq M^{s-p} \|f(x)\|_{p,E}^p\end{aligned}$$

e, assim, $f_{s,M} \in L_E^s$. □

Lema 1.4.17. *Sejam $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função crescente, de classe C^1, tal que $\phi(0) = 0$ e $f : \Omega \to [0,\infty)$ mensurável. Então,*

$$\int_\Omega \phi(f(x)) \, d\mu(x) = \int_0^\infty \phi'(z) \, \mu[f > z] \, dz.$$

A demonstração deste lema é feita considerando inicialmente f uma função simples e generalizando para funções mensuráveis. Omitiremos esta demonstração que pode ser encontrada em [10].

Corolário 1.4.18. *Sejam ϕ como no lema anterior e $f : \Omega \to E$ fortemente mensurável. Então,*

$$\int_{\Omega} \phi\left(\|f(x)\|_E\right) d\mu(x) = \int_0^{\infty} \phi'(z)\, \mu\left[\|f\|_E > z\right] dz.$$

Demonstração. Basta aplicar o lema anterior para $\|f\|_E$. □

Teorema 1.4.19 (de Interpolação de Marcinkiewicz)**.** *Sejam E e D dois espaços de Banach, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dois espaços de medida, $1 \leq s < r < \infty$. Suponha que*

$$T : L_E^s(X, \mathcal{A}, \mu) + L_E^r(X, \mathcal{A}, \mu) \to \{f : Y \to D;\ f \text{ é fortemente mensurável}\}$$

é um operador sublinear, ou seja,

$$\|T(f+g)\|_D \leq \|T(f)\|_D + \|T(g)\|_D$$

e suponha que T é dos tipos fracos (s,s) e (r,r). Então T é do tipo forte (p,p) para $s < p < r$.

Demonstração. Seja $f \in L_E^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Para cada $z > 0$, sejam $f_{r,z} = f\chi_{[\|f\|_E \leq z]}$ e $f_{s,z} = f\chi_{[\|f\|_E > z]}$ como no Lema 1.4.16. Como T é sublinear,

$$\|T(f)\|_D = \|T(f_{r,z} + f_{s,z})\|_D \leq \|T(f_{r,z})\|_D + \|T(f_{s,z})\|_D,$$

donde

$$\nu\left[\|Tf\|_D > z\right] \leq \nu\left[\|Tf_{r,z}\|_D > \frac{z}{2}\right] + \nu\left[\|Tf_{s,z}\|_D > \frac{z}{2}\right].$$

Pela hipótese e pela definição de norma fraca existem constantes A_s e A_r tais que, para todo $z > 0$,

$$\nu\left[\|Tf_{r,z}\|_D > \frac{z}{2}\right] \leq \left(\frac{z}{2}\right)^{-r} (A_r)^r \|f_{r,z}\|_{r,E}^r < \infty,$$
$$\nu\left[\|Tf_{s,z}\|_D > \frac{z}{2}\right] \leq \left(\frac{z}{2}\right)^{-s} (A_s)^s \|f_{s,z}\|_{s,E}^s < \infty.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\nu\left[\|Tf\|_D > z\right] &\leq \left(\frac{z}{2}\right)^{-r}(A_r)^r\|f_{r,z}\|_{r,E}^r + \left(\frac{z}{2}\right)^{-s}(A_s)^s\|f_{s,z}\|_{s,E}^s \\
&= \int_X \left(\frac{z}{2}\right)^{-r}(A_r)^r\|f(x)\|_E^r\chi_{\left[\|f\|_E\leq z\right]}(x)\,d\mu(x) \\
&\quad + \int_X \left(\frac{z}{2}\right)^{-s}(A_s)^s\|f(x)\|_E^s\chi_{\left[\|f\|_E> z\right]}(x)\,d\mu(x) \\
&= B_r\int_X z^{-r}\|f(x)\|_E^r\chi_{\left[\|f\|_E\leq z\right]}(x)\,d\mu(x) \\
&\quad + B_s\int_X z^{-s}\|f(x)\|_E^s\chi_{\left[\|f\|_E> z\right]}(x)\,d\mu(x),
\end{aligned}$$

onde $B_r = 2^r(A_r)^r$ e $B_s = 2^s(A_s)^s$.

Pela inequação acima e pelo Corolário 1.4.18 aplicado para $\phi(t) = t^p$ e Tf,

$$\begin{aligned}
\int_Y \|Tf\|_D^p\,d\nu &= \int_Y \phi(\|Tf\|_D)\,d\nu = \int_0^\infty \phi'(z)\,\nu\left[\|Tf\|_D > z\right]dz \\
&\leq B_r\int_0^\infty\int_X \phi'(z)\,z^{-r}\|f(x)\|_E^r\chi_{\left[\|f\|_E\leq z\right]}(x)\,d\mu(x)\,dz \\
&\quad + B_s\int_0^\infty\int_X \phi'(z)\,z^{-s}\|f(x)\|_E^s\chi_{\left[\|f\|_E> z\right]}(x)\,d\mu(x)\,dz \\
&= C_r\int_0^\infty\int_X z^{p-1-r}\|f(x)\|_E^r\chi_{\left[\|f\|_E\leq z\right]}(x)\,d\mu(x)\,dz \\
&\quad + C_s\int_0^\infty\int_X z^{p-1-s}\|f(x)\|_E^s\chi_{\left[\|f\|_E> z\right]}(x)\,d\mu(x)\,dz \\
&= C_r\int_0^\infty\int_X z^{p-r-1}\|f(x)\|_E^r\chi_{\left[\|f(x)\|_E,\infty\right)}(z)\,d\mu(x)\,dz \\
&\quad + C_s\int_0^\infty\int_X z^{p-s-1}\|f(x)\|_E^s\chi_{\left(0,\|f(x)\|_E\right)}(z)\,d\mu(x)\,dz,
\end{aligned}$$

onde $C_r = pB_r$ e $C_s = pB_s$. Aplicando o Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_Y \|Tf\|_D^p \, d\nu &\leq C_r \int_X \int_{\|f(x)\|_E}^{\infty} z^{p-r-1} \|f(x)\|_E^r \, dz \, d\mu(x) \\
&\quad + C_s \int_X \int_0^{\|f(x)\|_E} z^{p-s-1} \|f(x)\|_E^s \, dz \, d\mu(x) \\
&= C_r \int_X \|f(x)\|_E^r \int_{\|f(x)\|_E}^{\infty} z^{p-r-1} \, dz \, d\mu(x) \\
&\quad + C_s \int_X \|f(x)\|_E^s \int_0^{\|f(x)\|_E} z^{p-s-1} \, dz \, d\mu(x) \\
&= C_r \int_X \|f(x)\|_E^r \left(\left. \frac{z^{p-r}}{p-r} \right|_{z=\|f(x)\|_E}^{\infty} \right) d\mu(x) \\
&\quad + C_s \int_X \|f(x)\|_E^s \left(\left. \frac{z^{p-s}}{p-s} \right|_{z=0}^{\|f(x)\|_E} \right) d\mu(x) \\
&= \frac{C_r}{r-p} \int_X \|f(x)\|_E^r \|f(x)\|_E^{p-r} \, d\mu(x) \\
&\quad + \frac{C_s}{p-s} \int_X \|f(x)\|_E^s \|f(x)\|_E^{p-s} \, d\mu(x) \\
&= \left(\frac{C_r}{r-p} + \frac{C_s}{p-s} \right) \int_X \|f(x)\|_E^p \, d\mu(x) \\
&= \left(\frac{C_r}{r-p} + \frac{C_s}{p-s} \right) \|f(x)\|_{p,E}^p
\end{aligned}$$

Elevando os dois lados à potência $\frac{1}{p}$, obtemos

$$\|Tf\|_{p,D} \leq \left(\frac{2^r p (A_r)^r}{r-p} + \frac{2^s p (A_s)^s}{p-s} \right)^{\frac{1}{p}} \|f(x)\|_{p,E} \,. \qquad \square$$

Capítulo 2.

Martingais

Neste capítulo estudaremos alguns resultados da teoria dos martingias. Assim como a esperança condicional, os martingais também foram conceituados principalmente para estudo de probabilidade e são baseados na evolução de um experimento em função do tempo. Neste trabalho estamos interessados no Teorema de Convergência de Martingais e na Desigualdade da Função Quadrática. Para uma referência sobre os resultados desta seção, ver [12, 3].

Como foi mencionado no capítulo anterior, omitiremos a notação q.t.p.

2.1. Martingais e Supermartingais

Estudaremos a convergência de supermartingais e utilizaremos o resultado obtido para demonstrar a convergência de martingais. Faremos isto utilizando ferramentas relacionadas com tempos de parada e uma caracterização de convergência de sequências bastante convencional no estudo de martingais, mas que foge do enfoque dado em cursos introdutórios em Análise.

Nesta seção, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ denotará um espaço de probabilidade e $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência não-decrescente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{A}$.

Definição 2.1.1. Consideremos uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Se f_n é $\mathcal{F}_n$-mensurável, a sequência de funções é dita *adaptada* à sequência $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptada. Nessas condições,

- se $f_n = E[f_{n+1}|\mathcal{F}_n]$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita um *martingal*,

- se $f_n \leq E\left[f_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita um *submartingal*,
- se $f_n \geq E\left[f_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita um *supermartingal*

com respeito a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Seja $p \geq 0$ um inteiro. Como $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+p}$ podemos deduzir que, para um martingal $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$E\left[f_{n+p+1}|\mathcal{F}_n\right] = E\left[E\left[f_{n+p+1}|\mathcal{F}_{n+p}\right]|\mathcal{F}_n\right] = E\left[f_{n+p}|\mathcal{F}_n\right].$$

Usando a hipótese de indução sobre p concluímos que $f_n = E\left[f_{n+p}|\mathcal{F}_n\right]$ para qualquer $p \geq 0$. Da mesma forma se prova que um supermartingal satisfaz $f_n \geq E\left[f_{n+p}|\mathcal{F}_n\right]$ e que um submartingal satisfaz $f_n \leq E\left[f_{n+p}|\mathcal{F}_n\right]$.

Definição 2.1.2. Definimos $\mathcal{F}_\infty$ como a σ-álgebra gerada pelo conjunto $\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$.

Podemos estender o conceito de $(f_n)_{n\in\bar{\mathbb{N}}}$ ($\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}\cup\{\infty\}$) ser adaptada a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\bar{\mathbb{N}}}$ se f_n é $\mathcal{F}_n$-mensurável mesmo para $n = \infty$. Nessas condições, se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um martingal e $f_n = E\left[f_\infty|\mathcal{F}_n\right]$, dizemos que $(f_n)_{n\in\bar{\mathbb{N}}}$ é um martingal. Analogamente, se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um submartingal (ou supermartingal) e $f_n \leq E\left[f_\infty|\mathcal{F}_n\right]$ (respectivamente, $f_n \geq E\left[f_\infty|\mathcal{F}_n\right]$) para todo n, dizemos que $(f_n)_{n\in\bar{\mathbb{N}}}$ é um submartingal (respectivamente, supermartingal).

Observação 2.1.3. Se $f \in L^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(f_n)_{n\in\bar{\mathbb{N}}}$) definida por $f_n = E\left[f|\mathcal{F}_n\right]$ é um martingal. Dado um martingal, se existe uma função f que satisfaz a igualdade acima para todo n, dizemos que o martingal é *fechado* por f.

2.1.1. Tempos de Parada

Apresentaremos nesta subseção uma ferramenta muito útil para o desenvolvimento da teoria dos martingais.

Definição 2.1.4. Um *tempo de parada* é uma função $\tau : \Omega \to \bar{\mathbb{N}}$ tal que

$$[\tau = n] \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observação 2.1.5. Dizer que τ é um tempo de parada equivale a afirmar que

$$[\tau \leq n] \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato, suponha que $[\tau = k] \in \mathcal{F}_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Para $k \leq n$, $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ implica em

$$[\tau \leq n] = \bigcup_{k \leq n} [\tau = k] \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}..$$

Reciprocamente, se $[\tau \leq k] \in \mathcal{F}_k$ para todo k,

$$[\tau = n] = [\tau \leq n] \cap [\tau \leq n-1]^c \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}..$$

Isso conclui a equivalência.

Também temos $[\tau > n] = [\tau \leq n]^c \in \mathcal{F}_n$. Ainda mais, como $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_\infty$, observamos que $[\tau = \infty] = \bigcap_n [\tau > n] \in \mathcal{F}_\infty$. Assim, poderíamos definir um tempo de parada τ pela propriedade

$$[\tau = n] \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \bar{\mathbb{N}}.$$

Observação 2.1.6. Dada uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ adaptada e com valores reais e dado $B \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável, a função

$$\tau_B(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N};\ f_n(\omega) \in B\},$$

onde consideramos $\inf(\emptyset) = +\infty$, é um tempo de parada. De fato, $\tau_B(\omega) = n$ se, e somente se, $f_n(\omega) \in B$ e, para $1 \leq k < n$, $f_k(\omega) \notin B$. Assim,

$$[\tau_B = n] = [f_n \in B] \cap \left(\bigcap_{k<n} [f_k \notin B] \right).$$

Isso conclui que $[\tau_B = n] \in \mathcal{F}_n$ e que τ_B é tempo de parada. Em particular, tomando $B = (M, \infty]$, temos que $\tau_M = \inf\{n \in \mathbb{N};\ f_n > M\}$ é um tempo de parada.

Observação 2.1.7. Sejam τ um tempo de parada e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência adaptada. Definimos a família $\mathcal{F}_\tau$ pela expressão

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty;\ A \cap [\tau = n] \in \mathcal{F}_n,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

e a função f_τ por $f_\tau(\omega) = f_{\tau(\omega)}(\omega)$.

Vamos mostrar que $\mathcal{F}_\tau$ é uma σ-álgebra. Primeiramente, $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$ pois

$$\Omega \cap [\tau = n] = [\tau = n] \in \mathcal{F}_n.$$

Em segundo lugar, $A \in \mathcal{F}_\tau \implies A^c \in \mathcal{F}_\tau$, uma vez que

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{F}_\tau &\implies A \cap [\tau = n] \in \mathcal{F}_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\implies [\tau = n] \setminus (A \cap [\tau = n]) \in \mathcal{F}_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\implies A^c \cap [\tau = n] \in \mathcal{F}_n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Já que $\mathcal{F}_n$ é uma σ-álgebra, segue que

$$\begin{aligned} A_k \in \mathcal{F}_\tau \ \forall k \in \mathbb{N} &\implies A_k \cap [\tau = n] \in \mathcal{F}_n, \ \forall n, k \in \mathbb{N} \\ &\implies \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap [\tau = n]) \in \mathcal{F}_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\implies \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \cap [\tau = n] \in \mathcal{F}_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}_\tau. \end{aligned}$$

A função constante $\tau \equiv n$ também é um tempo de parada. Neste caso, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_\tau$, o que torna a notação consistente. De fato, se $n < \infty$,

$$\mathcal{F}_\tau = \{X \in \mathcal{F}_\infty ; \, X \cap [\tau = k] \in \mathcal{F}_k, \ \forall k \in \mathbb{N}\} = \{X \in \mathcal{F}_\infty ; \, X = X \cap \Omega \in \mathcal{F}_n\},$$

pois $[\tau = k] = \emptyset \in \mathcal{F}_k$ para todo $k \neq n$ e $[\tau = n] = \Omega$. Para $n = \infty$ a igualdade é verdadeira pois $[\tau = k] = \emptyset \in \mathcal{F}_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1.8. Dada uma sequência de tempos de parada τ_k, então ambos $\inf_k \tau_k$ e $\sup_k f_k$ são tempos de parada, pois

$$\left[\inf_k \tau_k \le n\right] = \bigcup_k [\tau_k \le n] \qquad \left[\sup_k \tau_k \le n\right] = \bigcap_k [\tau_k \le n]$$

e portanto ambos pertencem a $\mathcal{F}_n$ para cada n.

2.1.2. Desigualdade de Dubin

A Desigualdade de Dubin será utilizada para demonstrar a convergência de supermartingais.

Lema 2.1.9. *Dados os supermartingais* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e um tempo de parada* τ *tal que* $f_\tau \geq g_\tau$ *em* $[\tau < \infty]$*, a fórmula*

$$h_n = f_n\chi_{[n<\tau]} + g_n\chi_{[n\geq\tau]},$$

onde χ_A *denota a função característica do conjunto* A*, define um supermartingal* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Demonstração. Pela fórmula, h_n é combinação de funções $\mathcal{F}_n$-mensuráveis e portanto é $\mathcal{F}_n$-mensurável. Como f e g são supermartingais,

$$\begin{aligned} h_n &= f_n\chi_{[n<\tau]} + g_n\chi_{[n\geq\tau]} \\ &\geq E\left[f_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]\chi_{[n<\tau]} + E\left[g_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]\chi_{[n\geq\tau]} \\ &= E\left[f_{n+1}\chi_{[n<\tau]} + g_{n+1}\chi_{[n\geq\tau]}|\mathcal{F}_n\right]. \end{aligned}$$

Da hipótese segue que $f_{n+1} \geq g_{n+1}$ em $[\tau = n+1]$, ou seja, $(f_{n+1} - g_{n+1})\,\chi_{[\tau=n+1]} \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} f_{n+1}\chi_{[n<\tau]} + g_{n+1}\chi_{[n\geq\tau]} &= f_{n+1}\chi_{[n+1<\tau]} + g_{n+1}\chi_{[n+1\geq\tau]} \\ &\quad + f_{n+1}\chi_{[\tau=n+1]} - g_{n+1}\chi_{[\tau=n+1]} \\ &= h_{n+1} + (f_{n+1} - g_{n+1})\,\chi_{[\tau=n+1]} \geq h_{n+1}. \end{aligned}$$

Pela monotonicidade de $E\left[\cdot|\mathcal{F}_n\right]$, temos que $h_n \geq E\left[h_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]$. □

No lema acima, (h_n) é a sequência formada por (f_n) "até o tempo de parada τ" e por (g_n) "a partir do tempo de parada".

Corolário 2.1.10. *Dados os martingais* $(f_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq k+1$ *e os tempos de parada* $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots \leq \tau_k$*, se* $f_{i,\tau_i} \geq f_{i+1,\tau_i}$ *em* $[\tau_i < \infty]$*, então*

$$\sum_{i=1}^{k} f_{i,n}\chi_{[\tau_{i-1}\leq n<\tau_i]} + f_{k+1,n}\chi_{[\tau_k\leq n]}$$

(onde, por conveniência, $\tau_0 \equiv 1$*) é um supermartingal.*

Demonstração. O caso $k = 1$ é o lema anterior, basta mostrar o passo indutivo sobre k. Sejam

$$g_n = \sum_{i=1}^{k-1} f_{i,n}\chi_{[\tau_{i-1}\leq n<\tau_i]} + f_{k,n}\chi_{[\tau_{k-1}\leq n]}, \qquad h_n = f_{k+1,n}.$$

Por indução estamos supondo que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um supermartingal. Para aplicar o lema anterior, temos que mostrar que $g_{\tau_k} \geq h_{\tau_k}$ em $[\tau_k < \infty]$. Seja $\omega \in [\tau_k = n]$ para $n < \infty$ fixo. Como $\tau_1 \leq \cdots \leq \tau_{k-1} \leq \tau_k = n$, temos $\chi_{[\tau_{i-1}\leq n<\tau_i]} = 0$ para $i < k$ e $\chi_{[\tau_{k-1}\leq n]} = 1$, ou seja, $g_n(\omega) = f_{k,n}(\omega)$. Por hipótese, temos $f_{k,n}(\omega) \geq f_{k+1,n}(\omega)$, já que $\tau_k(\omega) = n < \infty$. Logo,

$$g_{\tau_k}(\omega) = g_n(\omega) = f_{k,n}(\omega) \geq f_{k+1,n}(\omega) = h_{\tau_k}(\omega).$$

Agora podemos aplicar o lema anterior. Observe que $\chi_{[\tau_{i-1}\leq n<\tau_i]}\chi_{[n<\tau_k]} = \chi_{[\tau_{i-1}\leq n<\tau_i]}$ para $i < k$, já que $\tau_k \geq \tau_i$. Portanto, aplicando o lema, a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
g_n\chi_{[n<\tau_k]} + h_n\chi_{[\tau_k\leq n]} &= \sum_{i=1}^{k-1} f_{i,n}\chi_{[\tau_{i-1}\leq n<\tau_i]}\chi_{[n<\tau_k]} \\
&\quad + f_{k,n}\chi_{[\tau_{k-1}\leq n]}\chi_{[n<\tau_k]} + f_{k+1,n}\chi_{[\tau_k\leq n]} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} f_{i,n}\chi_{[\tau_{i-1}\leq n<\tau_i]} + f_{k,n}\chi_{[\tau_{k-1}\leq n<\tau_k]} + f_{k+1,n}\chi_{[\tau_k\leq n]} \\
&= \sum_{i=1}^{k} f_{i,n}\chi_{[\tau_{i-1}\leq n<\tau_i]} + f_{k+1,n}\chi_{[\tau_k\leq n]}
\end{aligned}$$

define um supermartingal. □

Definição 2.1.11. Seja $A \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{F}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$. Definimos a *medida condicional* $\mu(A|\mathcal{F})$ de A com respeito a $\mathcal{F}$ por $\mu(A|\mathcal{F}) = E[\chi_A|\mathcal{F}]$.

Note que $\mu(A|\mathcal{F})$ é uma função.

Proposição 2.1.12. *Para todo supermartingal $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não-negativo, vale*

$$\mu\left(\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq M\right]\middle| \mathcal{F}_1\right) \leq \frac{f_1}{M} \wedge 1$$

para todo $M > 0$ e portanto $\sup_n f_n < \infty$ *em* $[f_1 < \infty]$.

Demonstração. Considere o tempo de parada $\tau_M = \inf\{n \in \mathbb{N};\, f_n > M\}$ dado pela Observação 2.1.6. Como $f_{\tau_M} > M$ em $[\tau_M < \infty]$, pelo Lema 2.1.9, $g_n = M\chi_{[\tau_M \leq n]} + f_n\chi_{[\tau_M > n]}$ é um supermartingal. Em particular, $g_1 \geq E\left[g_n|\mathcal{F}_1\right]$.

Se $\tau_M(\omega) = 1$ então $g_1 = M$ e $f_1 > M$. Senão, temos que $g_1 = f_1$ e $f_1 \leq M$. Assim, $g_1 = f_1 \wedge M$. Além disso, $g_n \geq M\chi_{[\tau_M \leq n]}$ uma vez que $f_n \geq 0$, o que implica que

$$f_1 \wedge M = g_1 \geq E\left[g_n|\mathcal{F}_1\right] \geq E\left[\chi_{[\tau_M \leq n]}M \middle| \mathcal{F}_1\right] = M\mu\left(\left[\tau_M \leq n\right]|\mathcal{F}_1\right).$$

Logo, fazendo $n \to +\infty$, obtemos, pela definição de τ_M,

$$\mu\left(\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > M\right] \middle| \mathcal{F}_1\right) = \mu\left(\left[\tau_M < \infty\right]|\mathcal{F}_1\right) \leq \frac{f_1}{M} \wedge 1.$$

Para obter a desigualdade dada no enunciado (com $\geq$ ao invés de $>$), trocamos M por $M - \frac{1}{k}$ na desigualdade acima. Daí obtemos

$$\mu\left(\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > M - \frac{1}{k}\right] \middle| \mathcal{F}_1\right) \leq \frac{f_1}{M - \frac{1}{k}} \wedge 1.$$

Fazendo $k \to \infty$, o lado direito converge claramente a $\frac{f_1}{M} \wedge 1$. Do lado esquerdo, temos que $\left[\sup_n f_n > M - \frac{1}{k}\right]$ é uma sequência não-decrescente de conjuntos cuja união é $[\sup_n f_n \geq M]$. Aplicando o Teorema da Convergência Monótona para a Esperança Condicional, temos que

$$\begin{aligned}\mu\left[\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq M\right] \middle| \mathcal{F}_1\right] &= \lim_{k\to\infty} \mu\left(\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > M - \frac{1}{k}\right] \middle| \mathcal{F}_1\right)\\ &\leq \lim_{k\to\infty} \frac{f_1}{M - \frac{1}{k}} \wedge 1 = \frac{f_1}{M} \wedge 1.\end{aligned}$$

Agora, integramos ambos os lados sobre $[f_1 < \infty] \in \mathcal{F}_1$ e obtemos

$$\begin{aligned}\mu\left(\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq M,\ f_1 < \infty\right]\right) &= \int_{[f_1<\infty]} E\left[\chi_{\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq M\right]} \middle| \mathcal{F}_1\right] d\mu\\ &\leq \int_{[f_1<\infty]} \frac{f_1}{M} \wedge 1\, d\mu.\end{aligned}$$

Fazendo $M \to \infty$, $M \in \mathbb{N}$, o Teorema da Convergência Monótona garante que o lado direito tende a 0, o que demonstra a segunda parte. $\square$

Observação 2.1.13. Vamos apresentar um critério de convergência para sequências de números reais. Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\bar{\mathbb{R}}$ e um par de números $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, definimos indutivamente as sequências

$$s_1 = \inf\{n \in \mathbb{N};\, n \geq 1 \text{ e } x_n \leq a\}, \quad t_1 = \inf\{n \in \mathbb{N};\, n \geq s_1 \text{ e } x_n \geq b\},$$
$$s_{k+1} = \inf\{n \in \mathbb{N};\, n \geq t_k \text{ e } x_n \leq a\}, \quad t_{k+1} = \inf\{n \in \mathbb{N};\, n \geq s_{k+1} \text{ e } x_n \geq b\}.$$

Consideramos, como sempre, $\inf(\emptyset) = +\infty$. Observe que $s_k \leq t_k \leq s_{k+1} \leq t_{k+1}$ para todo k. Desta forma, definimos $\beta_{a,b} = \sup\{k \in \mathbb{N} :\, t_k < \infty\}$, onde $\sup(\mathbb{N}) = +\infty$. O número $\beta_{a,b}$ representa o número de vezes que a sequência atravessa o intervalo (a, b) "de baixo para cima".

Lema 2.1.14. *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\bar{\mathbb{R}}$ converge se, e somente se, os números $\beta_{a,b}$ correspondentes a esta sequência são finitos para todo a, b em $\mathbb{Q}$ (ou em $\mathbb{R}$) com $a < b$.*

Demonstração. Faremos a equivalência entre as negações das hipóteses. Suponha que a sequência não converge. Então existem a, b em $\mathbb{Q}$ com $a < b$ tais que

$$\liminf_n x_n < a < b < \limsup_n x_n.$$

Portanto, existem subsequências x_{n_j} e x_{m_k} tais que, $\forall j, k \in \mathbb{N}$, $x_{n_j} \leq a < b \leq x_{m_k}$. Assim, $s_1 \leq n_1$ (já que $n_1 \in \{n \in \mathbb{N};\, n \geq 1 \text{ e } x_n \leq a\}$). Seja k_1 tal que $m_{k_1} \geq s_1$; neste caso, $t_1 \leq m_{k_1}$ (já que $m_{k_1} \in \{n \in \mathbb{N};\, n \geq s_1 \text{ e } x_n \geq b\}$). Tomando j_2 tal que $n_{j_2} \geq t_1$, temos analogamente $s_2 \leq n_{j_2}$. Prosseguindo por indução, obtemos $t_i \leq m_{k_i} < \infty$ para todo i e portanto $\beta_{a,b} = +\infty$.

Reciprocamente, se $\beta_{a,b} = +\infty$, então, de $x_{s_k} \leq a$ e $x_{t_k} \geq b$ para todo k, segue que

$$\liminf_n x_n \leq \liminf_k x_{s_k} \leq a < b \leq \limsup_k x_{t_k} \leq \limsup_n x_n$$

e portanto a sequência não converge. $\square$

Observação 2.1.15. Consideremos um supermartingal $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e um par $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Para cada $\omega \in \Omega$, podemos tomar as sequências $s_n(\omega)$ e $t_n(\omega)$ associadas à sequência $(f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ definidas como na Observação 2.1.13. Obtemos, assim, duas sequências de tempos de parada, s_n e t_n; isso pode ser facilmente demonstrado por indução a partir das equações

$$
\begin{aligned}
[s_1 = n] &= \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} [f_i > a]\right) \cap [f_n \leq a], \\
[t_k = n] &= \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} [i < s_k] \cup [f_i < b]\right) \cap [n \geq s_k] \cap [f_n \geq b], \\
[s_{k+1} = n] &= \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} [i < t_k] \cup [f_i > a]\right) \cap [n \geq t_k] \cap [f_n \leq a],
\end{aligned}
$$

que são obtidas das definições de s_k e t_k.

Também obtemos uma função $\beta_{a,b}$ $\mathcal{F}_\infty$-mensurável, já que $[\beta_{a,b} < n] = [t_n = \infty] \in \mathcal{F}_\infty$. Tendo isso em mente, prosseguimos com um teorema que será utilizado, juntamente com o lema anterior, para demonstrar a convergência de supermartingais.

Teorema 2.1.16 (Desigualdade de Dubin)**.** *Para cada supermartingal não-negativo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $k \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade*

$$\mu\left([\beta_{a,b} \geq k] \,|\mathcal{F}_\infty\right) \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k \left(\frac{f_1}{a} \wedge 1\right)$$

e portanto $\beta_{a,b} < \infty$ q.t.p.$[\mu]$.

Demonstração. Considere os $2k+1$ supermartingais não-negativos

$$1,\ \frac{f_n}{a},\ \frac{b}{a},\ \frac{b}{a}\frac{f_n}{a},\ \ldots,\ \left(\frac{b}{a}\right)^{k-1},\ \left(\frac{b}{a}\right)^{k-1}\frac{f_n}{a},\ \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

e os tempos de parada $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \cdots \leq s_k \leq t_k$ associados ao supermartingal $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como na Observação 2.1.15. Iremos aplicar o Corolário 2.1.10 a esses dados e mostrar que

$$g_n = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{b}{a}\right)^{i-1} \chi_{[t_{i-1} \leq n < s_i]} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{b}{a}\right)^{i-1} \frac{f_n}{a} \chi_{[s_i \leq n < t_i]} + \left(\frac{b}{a}\right)^k \chi_{[t_k \leq n]}$$

(onde, por conveniência, $t_0 \equiv 1$) é um supermartingal.

Observando a definição, $s_i(\omega)$ (se finito) é tal que $f_{s_i(\omega)}(\omega) \leq a$; isso nos dá que $f_{s_i} \leq a$ em $[s_i < \infty]$. Da mesma forma, $t_i(\omega)$ (se finito) é tal que $f_{t_i(\omega)}(\omega) \geq b$; ou seja, $f_{t_i} \geq b$ em $[t_i < \infty]$. Multiplicando essas duas equações por $\left(\frac{b}{a}\right)^{i-1}\frac{1}{a}$, obtemos que

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{i-1} \geq \left(\frac{b}{a}\right)^{i-1}\frac{f_{s_i}}{a} \text{ em } [s_i < \infty] \qquad \left(\frac{b}{a}\right)^{i-1}\frac{f_{t_i}}{a} \geq \left(\frac{b}{a}\right)^{i} \text{ em } [t_i < \infty].$$

Ou, escrevendo de outra forma,

$$\begin{array}{cccccc} 1 \geq \frac{f_{s_1}}{a}, & \frac{f_{t_1}}{a} \geq \frac{b}{a}, & \frac{b}{a} \geq \frac{b}{a}\frac{f_{s_2}}{a}, & \ldots & \left(\frac{b}{a}\right)^{k-1} \geq \left(\frac{b}{a}\right)^{k-1}\frac{f_{s_k}}{a}, & \left(\frac{b}{a}\right)^{k-1}\frac{f_{t_k}}{a} \geq \left(\frac{b}{a}\right)^{k}. \\ s_1 < \infty & t_1 < \infty & s_2 < \infty & \ldots & s_k < \infty & t_k < \infty \end{array}$$

Aplicando o Corolário 2.1.10, obtemos que g_n (que é a fórmula dada pelo corolário mas permutada) é um supermartingal. Pela definição dada acima, se $f_1 \leq a$ (ou seja, $s_1 = 1$), temos que $g_1 = \frac{f_1}{a}$. Agora, se $f_1 > a$ (ou seja, $s_1 > 1$), temos que $g_1 = 1$. Assim, $g_1 = 1 \wedge \frac{f_1}{a}$. Por outro lado, como os supermartingais dados são não-negativos, $g_n \geq \left(\frac{b}{a}\right)^k \chi_{[t_k \leq n]}$. A propriedade $g_1 \geq E[g_n|\mathcal{F}_1]$ válida para todo supermartingal nos faz concluir que

$$\left(\frac{b}{a}\right)^k \mu\left([t_k \leq n] | \mathcal{F}_1\right) = E\left[\left(\frac{b}{a}\right)^k \chi_{[t_k \leq n]} \middle| \mathcal{F}_1\right] \leq E\left[g_n | \mathcal{F}_1\right] \leq g_1 = 1 \wedge \frac{f_1}{a}.$$

Temos que $\chi_{[t_k \leq n]} \uparrow \chi_{[t_k < \infty]}$. Pelo Teorema da Convergência Monótona para a Esperança Condicional, fazendo $n \to \infty$ dos dois lados desta inequação e notando que $[\beta_{a,b} \geq k] = [t_k < \infty]$, obtemos que

$$\mu\left([\beta_{a,b} \geq k] | \mathcal{F}_1\right) \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k \left(1 \wedge \frac{f_1}{a}\right).$$

Para mostrar que $\beta_{a,b} < \infty$, temos $\chi_{\left[\beta_{a,b} \geq k\right]} \downarrow \chi_{\left[\beta_{a,b} = \infty\right]}$ quando $k \to \infty$ e $0 \leq \chi_{\left[\beta_{a,b} \geq k\right]} \leq 1 = \chi_\Omega$ (χ_Ω é integrável pois $\mu(\Omega) = 1$). Pelo Teorema da Convergência Dominada para a Esperança Condicional, tem-se $\mu\left([\beta_{a,b} \geq k] | \mathcal{F}_1\right) \downarrow \mu\left([\beta_{a,b} = \infty] | \mathcal{F}_1\right)$. Pela desigualdade acima, $\mu\left([\beta_{a,b} \geq k] | \mathcal{F}_1\right) \downarrow 0$ (já que $a < b$) e portanto

$$E\left[\chi_{\left[\beta_{a,b} = \infty\right]} | \mathcal{F}_1\right] = \mu\left([\beta_{a,b} = \infty] | \mathcal{F}_1\right) = 0,$$

ou seja, $\chi_{\left[\beta_{a,b} = \infty\right]} = 0$, o que resulta $\beta_{a,b}$ ser finito em q.t.p. $\square$

2.1.3. Convergência de Supermartingais Não-Negativos e de Martingais

Toda sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não-crescente de funções é um supermartingal com respeito a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $\mathcal{F}_n = \sigma\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ é a σ-álgebra gerada pelas funções $f_1, \dots, f_n$. Isto é claro, pois, como $f_n \geq f_{n+1}$, dado $A \in \mathcal{F}_n$,

$$\int_A f_n \, d\mu \geq \int_A f_{n+1} \, d\mu.$$

A definição de esperança condicional implica que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um supermartingal. Não é necessário que uma sequência seja não-crescente para que ela seja um supermartingal, mas ao menos os valores das integrais sobre os conjuntos de $\mathcal{F}_m$ devem ser não-crescentes para $n \geq m$. Qualquer sequência não-crescente de funções não-negativas é convergente ponto a ponto e em L^p, para $1 \leq p \leq \infty$, pelo Teorema da Convergência Monótona (isto é, se as funções estiverem em L^p). Então é razoável questionar se o mesmo ocorre com todos os supermartingais. A resposta é afirmativa para convergência q.t.p., mas não para convergência em L^p. Isto é o que veremos em seguida.

Teorema 2.1.17 (de Convergência de Supermartingais)**.** *Todo supermartingal não-negativo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em q.t.p. Ainda mais, o limite f_∞ satisfaz*

$$E[f_\infty | \mathcal{F}_n] \leq f_n.$$

Demonstração. Seja $A = \{\omega \in \Omega;\ (f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$. Pelo Lema 2.1.14,

$$A = \bigcap_{a,b\in\mathbb{Q},\, a<b} [\beta_{a,b} < \infty].$$

Pela Desigualdade de Dubin, $\beta_{a,b} < \infty$ q.t.p., ou seja, a sequência converge em q.t.p. Seja f_∞ o limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Segue de $\inf_{m\geq n} f_m \leq f_n$ que,

$$E\left[\inf_{m\geq n} f_m | \mathcal{F}_k\right] \leq E[f_n|\mathcal{F}_k] \leq f_k$$

para todo $n > k$. Também temos que $\lim_{n\to\infty}(\inf_{m\geq n} f_m) = \liminf_m f_m = f_\infty$ e que $\inf_{m\geq n} f_m$ é não-decrescente e não-negativa. Pelo Teorema da Convergência Dominada para a Esperança Condicional, concluímos que

$$E\left[f_\infty|\mathcal{F}_k\right] \leq f_k. \qquad \square$$

Exemplo 2.1.18. A desigualdade $E\left[f_\infty|\mathcal{F}_n\right] \leq f_n$ nos faz concluir que $f_n \in L^1 \implies f_\infty \in L^1$. Por outro lado, considere a sequência $f_n = n\chi_{\left[0,\frac{1}{n}\right)}$ e

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left\{\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right), \ldots, \left[\frac{1}{2}, 1\right)\right\}.$$

Então

$$\int_0^{\frac{1}{n}} f_{n+1}\, d\mu = 1 = \int_0^{\frac{1}{n}} f_n\, d\mu,$$
$$\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f_{n+1}\, d\mu = 0 = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f_n\, d\mu,\ 1 \leq k < n,$$

donde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um martingal não-negativo com respeito a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por outro lado, f_n converge a 0 em q.t.p., mas $\int_\mathbb{R} f_n\, d\mu = 1$ não converge a 0. Logo esta sequência não é convergente em L^1 e também não vale $E\left[f_\infty|\mathcal{F}_n\right] = f_n$.

Apesar deste exemplo, conseguiremos concluir a convergência de um martingal em L^p se este martingal for fechado. É o que veremos no teorema a seguir.

Teorema 2.1.19 (de Convergência de Martingais)**.** *Sejam $p \in [1, +\infty)$ e $f \in L^p$. O martingal $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fechado por f, isto é, $f_n = E\left[f|\mathcal{F}_n\right]$, converge em q.t.p. e em L^p para $f_\infty = E\left[f|\mathcal{F}_\infty\right]$.*

Demonstração. Considerando a composição $f = f^+ - f^-$, temos $f_n = E\left[f|\mathcal{F}_n\right] = E\left[f^+|\mathcal{F}_n\right] - E\left[f^-|\mathcal{F}_n\right]$. Assim, se o teorema vale para f^+ e f^-, também valerá para f. Portanto basta demonstrar o teorema para f não-negativa.

O teorema anterior nos dá a convergência em q.t.p. para uma função que denotamos f_∞. A função f_∞ é $\mathcal{F}_\infty$-mensurável por ser limite de funções $\mathcal{F}_\infty$-mensuráveis.

Suponhamos f limitada. Seja M tal que $0 \leq f \leq M$. Então $0 \leq f_n = E\left[f|\mathcal{F}_n\right] \leq M$ pela monotonicidade da esperança condicional. Pelo Teorema da Convergência Dominada, para todo $A \in \mathcal{F}$, $\int_A f_n\, d\mu \to \int_A f_\infty\, d\mu$ quando $n \to \infty$. Em particular, se

$A \in \mathcal{F}_m$ para algum m e $n \geq m$, temos $\int_A f_n \, d\mu = \int_A E[f|\mathcal{F}_n] \, d\mu = \int_A f \, d\mu$, donde, fazendo $n \to \infty$,

$$\int_A f_\infty \, d\mu = \int_A f \, d\mu, \quad \forall A \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_m.$$

Acabamos de mostrar que as duas medidas ν_1 e ν_2 dadas por $\nu_1(A) = \int_A f_\infty \, d\mu$ e $\nu_2(A) = \int_A f \, d\mu$ são finitas e coincidem na álgebra $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_m$. Pelo Teorema de Extensão de Medidas (ver [6], p. 29-30), essas medidas devem coincidir na σ-álgebra gerada por $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_m$, isto é, $\mathcal{F}_\infty$. Portanto, $\nu_1 = \nu_2$ em $\mathcal{F}_\infty$. Pela definição de esperança condicional, $f_\infty = E[f|\mathcal{F}_\infty]$ q.t.p. Aplicando novamente o Teorema da Convergência Dominada, temos também que $f_n \to f_\infty$ em L^p.

Para o caso geral, considerando a decomposição $f = f \wedge M + (f - M)^+$ (onde $(f-M)^+$ denota a parte positiva da função $f - M$), temos

$$\begin{aligned} \|E[f|\mathcal{F}_n] - E[f|\mathcal{F}_\infty]\|_p &\leq \|E[f \wedge M|\mathcal{F}_n] - E[f \wedge M|\mathcal{F}_\infty]\|_p \\ &\quad + \left\|E\left[(f-M)^+|\mathcal{F}_n\right]\right\|_p + \left\|E\left[(f-M)^+|\mathcal{F}_\infty\right]\right\|_p \\ &\leq \|E[f \wedge M|\mathcal{F}_n] - E[f \wedge M|\mathcal{F}_\infty]\|_p + 2\left\|(f-M)^+\right\|_p. \end{aligned}$$

pois a esperança condicional é uma contração (Proposição 1.2.9). Pela parte anterior, para um $M \in \mathbb{N}$ fixo, $\|E[f \wedge M|\mathcal{F}_n] - E[f \wedge M|\mathcal{F}_\infty]\|_p$ converge a 0. Logo,

$$\limsup_{n\to\infty} \|E[f|\mathcal{F}_n] - E[f|\mathcal{F}_\infty]\|_p \leq 2\left\|(f-M)^+\right\|_p.$$

Agora, como $f \in L^p$ temos que $f < \infty$ q.t.p. Fazendo $M \to \infty$, $(f-M)^+$ decresce a 0 com $0 \leq (f-M)^+ \leq f$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, $\left\|(f-M)^+\right\|_p$ converge a 0. Portanto, $\limsup_{n\to\infty} \|E[f|\mathcal{F}_n] - E[f|\mathcal{F}_\infty]\|_p = 0$, donde $\|E[f|\mathcal{F}_n] - E[f|\mathcal{F}_\infty]\|_p$ converge a 0 quando $n \to \infty$. Logo a sequência $f_n = E[f|\mathcal{F}_n]$ converge a $E[f|\mathcal{F}_\infty]$ em L^p. Segue da convergência em L^p que existe uma subsequência de f_{n_k} que converge a $E[f|\mathcal{F}_\infty]$ em q.t.p. Mas f_n converge a f_∞ em q.t.p., donde f_{n_k} também deve convergir a f_∞. Assim, $f_\infty = E[f|\mathcal{F}_\infty]$. □

2.2. A Função Quadrática

Vamos apresentar nesta seção a Desigualdade de Doob, que depois será usada para demonstrar a Desigualdade da Função Quadrática.

2.2.1. Desigualdade de Doob

A Desigualdade de Doob, dentre outras desigualdades nesta seção, são úteis quando se necessita limitar a função maximal associada a um submartingal tanto em medida (ou, mais especificamente, na norma fraca L^1) quanto em L^p. Esta seção foi feita com a ajuda de notas sobre martingais do professor Sergio Antonio Tozoni.

Observação 2.2.1. A Desigualdade de Doob vale, em princípio, para submartingais não-negativos. Mas, dado um martingal $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a sequência $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é um submartingal não-negativo. De fato, como $[f_n \geq 0]$ e $[f_n < 0]$ são conjuntos de $\mathcal{F}_n$, temos, para todo $A \in \mathcal{F}_n$, que

$$\begin{aligned}
\int_A |f_n| \, d\mu &= \int_{[f_n\geq 0]\cap A} f_n \, d\mu \; - \int_{[f_n<0]\cap A} f_n \, d\mu \\
&= \left| \int_{[f_n\geq 0]\cap A} f_{n+1} \, d\mu \right| + \left| \int_{[f_n<0]\cap A} f_{n+1} \, d\mu \right| \\
&\leq \int_{[f_n\geq 0]\cap A} |f_{n+1}| \, d\mu + \int_{[f_n<0]\cap A} |f_{n+1}| \, d\mu \\
&= \int_A |f_{n+1}| \, d\mu.
\end{aligned}$$

Assim, a desigualdade de Doob e as desigualdades para a função quadrática, entre outras desigualdades envolvendo a norma das funções dos submartingais, também são verdadeiras para martingais.

Definição 2.2.2. Definimos as *funções maximais* f_n^*, f^* associadas a uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$f_n^* = \sup_{1\leq k\leq n} |f_k| \, , \qquad f^* = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n| \, .$$

Proposição 2.2.3. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um submartingal não-negativo. Para todo $z > 0$,*

$$z\mu\left[f_n^* > z\right] \leq \int_{[f_n^*>z]} f_n \, d\mu \leq \|f_n\|_1 .$$

Demonstração. A desigualdade da direita é imediata. Fixemos $z > 0$. Seja $\tau_z(\omega) = \inf\{k;\ f_k(\omega) > z\}$ o tempo de parada dado na Observação 2.1.6.

$$[\tau_z \leq n] = \bigcup_{k=1}^{n} [f_k > z] = [f_n^* > z] \in \mathcal{F}_n.$$

Multiplicando por z,

$$z\mu\left[f_n^* > z\right] = z\mu\left[\tau_z \leq n\right] = \int_{[\tau_z\leq n]} z \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{[\tau_z=k]} z \, d\mu.$$

Mas, pela definição de τ_z, $z < f_k$ no conjunto $[\tau_z = k]$. Pela definição de submartingal,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{[\tau_z=k]} z \, d\mu \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{[\tau_z=k]} f_k \, d\mu \leq \int_{[\tau_z\leq n]} f_n \, d\mu = \int_{[f_n^*>z]} f_n \, d\mu. \qquad \square$$

Corolário 2.2.4. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um submartingal não-negativo. Para todo $z > 0$,*

$$z\mu\left[f^* > z\right] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 .$$

Em particular, se f_n for limitada em L^1 então $f^* < \infty$ q.t.p.

Demonstração. A sequência de conjuntos $[f_n^* > z]$ é não-decrescente em n e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [f_n^* > z] = [f^* > z]$. Portanto, $\mu[f_n^* > z] \uparrow \mu[f^* > z]$. Claramente, $\|f_n\|_1 \leq \sup_k \|f_k\|_1$. O resultado segue aplicando o limite em n na proposição anterior. $\square$

Este lema é a base da demonstração da desigualdade de Doob, aqui demonstrado para um caso mais geral para poder ser usado mais adiante.

Lema 2.2.5. *Sejam $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis não-negativas. Sejam $\beta \geq 1$ e $\alpha > 0$ números reais fixos. Se para todo $z > 0$ tivermos*

$$z\mu\left[Y > \beta z\right] \leq \alpha \int_{[Y>z]} X \, d\mu,$$

então, para todo $1 < p < \infty$*,*

$$\|Y\|_p \leq \alpha\beta^p q \|X\|_p$$

onde $q = \frac{p}{p-1}$ *é o conjugado de* p*.*

Demonstração. Multiplicando a desigualdade dada por pz^{p-2} e integrando sobre $[0,\infty)$ na variável z, obtemos

$$\int_0^\infty pz^{p-1}\mu\left[Y > \beta z\right]\, dz \leq \alpha \int_0^\infty \int_{[Y>z]} pz^{p-2} X \, d\mu \, dz.$$

Utilizando o Teorema de Fubini no termo da esquerda, obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty pz^{p-1}\mu\left[Y > \beta z\right]\, dz &= \int_0^\infty \left(\int_\Omega pz^{p-1}\chi_{[Y>\beta z]}(\omega)\, d\mu(\omega)\right) dz \\
&= \int_\Omega \int_0^\infty pz^{p-1}\chi_{[0,Y(\omega))}(\beta z)\, dz\, d\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega \int_0^\infty pz^{p-1}\chi_{\left[0,\frac{Y(\omega)}{\beta}\right)}(z)\, dz\, d\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega \left[\left(z^p\right)\Big|_{z=0}^{\frac{Y(\omega)}{\beta}}\right] d\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega \frac{Y^p}{\beta^p}\, d\mu = \frac{\|Y\|_p^p}{\beta^p}.
\end{aligned}$$

De forma análoga para o termo da direita, segue que

$$\begin{aligned}
\alpha\int_0^\infty \int_{[Y>z]} pz^{p-2}X\, d\mu\, dz &= \alpha \int_0^\infty \int_\Omega pz^{p-2}X(\omega)\,\chi_{[Y>z]}(\omega)\, d\mu(\omega)\, dz \\
&= \alpha \int_\Omega \int_0^\infty pz^{p-2}X(\omega)\,\chi_{[0,Y(\omega))}(z)\, dz\, d\mu(\omega) \\
&= \alpha \int_\Omega X(\omega)\left[\left(\frac{p}{p-1}z^{p-1}\right)\Big|_{z=0}^{Y(\omega)}\right] d\mu(\omega) \\
&= \alpha q \int_\Omega XY^{p-1}\, d\mu.
\end{aligned}$$

Mas, pela Desigualdade de Hölder

$$\int_\Omega XY^{p-1}\,d\mu \leq \|X\|_p \left\|Y^{p-1}\right\|_q = \|X\|_p \left(\int_\Omega \left(Y^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\,d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \|X\|_p \left(\int_\Omega Y^p\,d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|X\|_p \|Y\|_p^{p-1}.$$

Então, juntando os dois lados, temos

$$\|Y\|_p^p \leq \alpha\beta^p q \|X\|_p \|Y\|_p^{p-1}$$

e assim obtemos o resultado desejado. □

Teorema 2.2.6 (*Desigualdade de Doob*)**.** *Para um submartingal $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não-negativo e $1 < p < \infty$, temos*

$$\|f_n^*\|_p \leq q \sup_{1\leq k\leq n} \|f_k\|_p, \qquad \|f^*\|_p \leq q \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p.$$

Demonstração. A primeira desigualdade segue imediatamente do Lema 2.2.5 para $\alpha = \beta = 1$ e da Proposição 2.2.3. A segunda desigualdade segue da primeira usando o Teorema da Convergência Monótona. □

2.2.2. Desigualdade da Função Quadrática

As desigualdades L^p para a função quadrática associada a um martingal são necessárias para demonstrar a convergência das séries de Walsh em $L^p[0,1)$ e o teorema de multiplicadores do tipo Marcinkiewicz. Uma referência para os resultados desta subseção é [3]. Outra referência, mas somente para martingais diáticos, é [14].

Definição 2.2.7. Dada uma sequência de funções $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denominamos *sequência de diferenças* a sequência $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (também denotada $(d_n f)_{n\in\mathbb{N}}$) onde

$$d_n = f_n - f_{n-1},$$

isto é, $f_n = \sum_{k=1}^n d_k$. Aqui tomamos $f_0 = 0$ por convenção.

Denominamos *função quadrática* associada a f a função

$$Df = \left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e denotamos suas somas parciais por $D_n f = \left(\sum_{k=1}^{n} d_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Proposição 2.2.8. *Considere $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um submartingal não-negativo e ξ um tempo de parada. Então*

$$f_{\xi\wedge n} \leq E\left[f_n | \mathcal{F}_{\xi\wedge n}\right].$$

Demonstração. Dado $A \in \mathcal{F}_{\xi\wedge n}$, tomando $A_j = A \cap [\xi \wedge n = j]$, temos, pela definição de $\mathcal{F}_{\xi\wedge n}$, que $A_j \in \mathcal{F}_j$. Como $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é um submartingal, $\int_{A_j} f_{\xi\wedge n}\, d\mu = \int_{A_j} f_j\, d\mu \leq \int_{A_j} f_n\, d\mu$. Assim,

$$\int_A f_{\xi\wedge n}\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} f_{\xi\wedge n}\, d\mu \leq \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} f_n\, d\mu = \int_A f_n\, d\mu \leq \int_\Omega f_n\, d\mu. \qquad \square$$

Lema 2.2.9. *Sejam $f = (f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ um submartingal não-negativo limitado em L^1, $M > 0$ e $\tau_M(\omega) = \inf\{k;\, f_k(\omega) > M\}$ (dado na Observação 2.1.6). Fixe $n \in \mathbb{N}$ e tome $\tau = \tau_M \wedge n$. Então*

$$\|D_{\tau-1} f\|_2^2 + \|f_{\tau-1}\|_2^2 \leq 2\int_\Omega f_\tau f_{\tau-1}\, d\mu \leq 2M\, \|f_n\|_1,$$

onde $f_0 = 0$ e $D_0 f = 0$.

Demonstração. Segue pela definição de τ_M que $f_{\tau-1} = f_{(\tau_M\wedge n)-1} \leq M$. Obtemos a desigualdade da direita pela Proposição 2.2.8.

Agora, como $f_m = \sum_{k=1}^{m} d_k$,

$$\begin{aligned} f_m f_{m-1} &= \sum_{k=1}^{m} d_k \sum_{j=1}^{m-1} d_j \\ &= \sum_{k=1}^{m} d_k \sum_{j=1}^{k-1} d_j + \sum_{k=1}^{m-1} d_k^2 + \sum_{k=1}^{m} d_k \sum_{j=k+1}^{m-1} d_j \\ &= \sum_{k=1}^{m} d_k f_{k-1} + \sum_{k=1}^{m-1} d_k^2 + \sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{j=k+1}^{m-1} d_j, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\sum_{j=l}^{s} a_j = 0$ se $s, l \in \mathbb{N}$, $s < l$. Por outro lado, pondo $I_{jk} = 1$ para $j < k$ e $I_{jk} = 0$ caso contrário, temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{j=1}^{k-1} d_j &= \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{k-1} d_k d_j = \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1} I_{jk} d_k d_j \\ &= \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{m-1} I_{jk} d_k d_j = \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m-1} d_k d_j \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} d_j \sum_{k=j+1}^{m-1} d_k.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}f_{m-1}^2 &= \sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{j=1}^{m-1} d_j \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{j=1}^{k-1} d_j + \sum_{k=1}^{m-1} d_k^2 + \sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{j=k+1}^{m-1} d_j \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} d_k^2 + 2\sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{j=k+1}^{m-1} d_j. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Das equações (2.1) e (2.2), obtemos

$$2 f_m f_{m-1} - 2\sum_{k=1}^{m} d_k f_{k-1} = 2\sum_{k=1}^{m-1} d_k^2 + 2\sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{j=k+1}^{m-1} d_j = D_{m-1}^2 f + f_{m-1}^2. \tag{2.3}$$

Seja $g = (g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ onde $g_m = \sum_{k=1}^{m} d_k f_{k-1}$. Então,

$$g_\tau(\omega) = \sum_{k=1}^{\tau(\omega)} d_k(\omega)\, f_{k-1}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} d_k(\omega)\, f_{k-1}(\omega)\, \chi_{[\tau\geq k]}(\omega).$$

Para $k \geq 1$, $E[d_k|\mathcal{F}_{k-1}] = E[f_k - f_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}] \geq f_{k-1} - f_{k-1} = 0$. Daí

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g_\tau \, d\mu &= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_\Omega d_k f_{k-1} \chi_{[\tau \geq k]} \, d\mu \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_\Omega E\left[d_k f_{k-1} \chi_{[\tau > k-1]} \middle| \mathcal{F}_{k-1} \right] \, d\mu \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_\Omega E\left[d_k \middle| \mathcal{F}_{k-1} \right] f_{k-1} \chi_{[\tau > k-1]} \, d\mu \right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Tomemos, então, a equação (2.3), substituindo m por $\tau(\omega)$ e integremos sobre Ω na variável ω. Pela desigualdade acima,

$$\begin{aligned}
\|D_{\tau-1} f\|_2^2 + \|f_{\tau-1}\|_2^2 &= \int_\Omega \left(D_{\tau-1}^2 f + f_{\tau-1}^2 \right) \, d\mu \\
&= \int_\Omega \left(2 f_\tau f_{\tau-1} - 2 g_\tau \right) \, d\mu \\
&\leq 2 \int_\Omega f_\tau f_{\tau-1} \, d\mu. \qquad \square
\end{aligned}$$

Lema 2.2.10. *Se $f = (f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é um submartingal não-negativo, $M > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$M \mu \left[f_n^* \leq M, \, D_n f > M \right] \leq 2 \|f_n\|_1 .$$

Demonstração. Seja $\tau = \tau_M \wedge (n+1)$ onde $\tau_M = \inf\{k \in \mathbb{N}; \, f_k > M\}$. Definindo $g_m = f_{m \wedge n}$, temos que $g = (g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ também é um submartingal. Segue de $D_n f = D_n g$ e $[\tau = n+1] = [\tau_M > n] = [f_n^* \leq M]$ que

$$\begin{aligned}
\left[f_n^* \leq M, \, D_n f > M \right] &= \left[\tau = n+1, \, D_n g > M \right] \\
&= \left[\tau = n+1, \, D_{\tau-1} g > M \right] \subset \left[D_{\tau-1} g > M \right]
\end{aligned}$$

e, assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
M \mu \left[f_n^* \leq M, \, D_n f > M \right] &\leq M \mu \left[D_{\tau-1} g > M \right] \\
&= \frac{1}{M} \int_{[D_{\tau-1} g > M]} M^2 \, d\mu \\
&\leq \frac{1}{M} \int_{[D_{\tau-1} g > M]} D_{\tau-1}^2 g \, d\mu \leq \frac{1}{M} \|D_{\tau-1} g\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Segue do lema anterior que

$$\|D_{\tau-1}g\|_2^2 \leq \|D_{\tau-1}g\|_2^2 + \|g_{\tau-1}\|_2^2 \leq 2M \|g_{n+1}\|_1 = 2M \|f_n\|_1 .$$

□

Lema 2.2.11. *Se $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um submartingal não-negativo, então, para $1 < p < \infty$, temos*

$$\|D_n f\|_p \leq 3ep^{\frac{1}{2}}q \|f_n\|_p .$$

Demonstração. Sejam $0 < \theta \leq 1$, $\beta = (1+2\theta^2)^{\frac{1}{2}}$, $M > 0$ e $Y_n = D_n(\theta f) \vee f_n^*$. Mostraremos mais adiante que, para todo $M > 0$,

$$M\mu[Y_n > \beta M] \leq 3 \int_{[Y_n > M]} f_n \, d\mu. \tag{2.4}$$

Supondo 2.4 verdadeira, obtemos, pelo Lema 2.2.5, que

$$\theta \|D_n f\|_p = \|D_n(\theta f)\|_p \leq \|Y_n\|_p \leq 3\beta^p q \|f_n\|_p .$$

Tomando $\theta = p^{-\frac{1}{2}}$, temos $\beta^p = (1+2\theta^2)^{\frac{p}{2}} = \left(1+\frac{2}{p}\right)^{\frac{p}{2}} < e$, donde obtemos o resultado.

Provemos então (2.4). Pela definição de Y_n,

$$\begin{aligned}
[Y_n > \beta M] &= [f_n^* > \beta M] \cup [D_n(\theta f) > \beta M] \\
&= ([Y_n > \beta M] \cap [f_n^* > M]) \cup ([Y_n > \beta M] \cap [f_n^* \leq M]) \\
&\subset [f_n^* > M] \cup (([f_n^* > \beta M] \cup [D_n(\theta f) > \beta M]) \cap [f_n^* \leq M]) \\
&= [f_n^* > M] \cup [f_n^* \leq M, \, D_n(\theta f) > \beta M] .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu[Y_n > \beta M] \leq \mu[f_n^* > M] + \mu[f_n^* \leq M, \, D_n(\theta f) > \beta M] . \tag{2.5}$$

Vamos limitar cada um dos termos do lado direito. Pela Proposição 2.2.3 e por $Y_n \geq f_n^*$,

$$M\mu[f_n^* > M] \leq \int_{[f_n^* > M]} f_n \, d\mu \leq \int_{[Y_n > M]} f_n \, d\mu. \tag{2.6}$$

Agora fixemos M e sejam $I_k = \chi_{[D_k(\theta f)>M]}$ e $g_k = I_k f_k$. Observe inicialmente que $D_{k+1}(\theta f) \geq D_k(\theta f)$ implica em $I_k \leq I_{k+1}$; portanto,

$$E[g_{k+1}|\mathcal{F}_k] = E[I_{k+1}f_{k+1}|\mathcal{F}_k] \geq E[I_k f_{k+1}|\mathcal{F}_k] = I_k E[f_{k+1}|\mathcal{F}_k] \geq g_k.$$

Ou seja, $g = (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é um submartingal.

Seja $\tau = \tau_M = \inf\{k \in \mathbb{N};\, D_k(\theta f) > M\}$ como na Observação 2.1.6. Se x é tal que $\tau(x) < \infty$ e $k \geq \tau(x)$, temos que $D_k(\theta f)(x) \geq D_{\tau(x)}(\theta f)(x) > M$, ou seja, $I_k(x) = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} D_n^2 g &= \sum_{k=1}^{n} (I_k f_k - I_{k-1} f_{k-1})^2 \\ &\geq \sum_{k=\tau+1}^{n} (I_k f_k - I_{k-1} f_{k-1})^2 = \sum_{k=\tau+1}^{n} (f_k - f_{k-1})^2 . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Seja $x \in [f_n^* \leq M,\, D_n(\theta f) > \beta M]$. Observe que $n \in \{k \in \mathbb{N};\, D_k(\theta f)(x) > M\}$ e logo $\tau(x) \leq n$. Assim,

$$0 \leq f_\tau(x), f_{\tau-1}(x) \leq f_n^*(x) \leq M$$

donde $d_\tau^2 = (f_\tau - f_{\tau-1})^2 \leq M^2$. Segue da definição de τ que $D_{\tau-1}(\theta f)(x) \leq M$. Portanto, unindo todas essas informações com (2.7), obtemos que

$$\begin{aligned} \beta^2 M^2 < D_n^2(\theta f)(x) &= D_{\tau-1}^2(\theta f)(x) + \theta^2 d_\tau^2 + \theta^2 \sum_{k=\tau+1}^{n} d_k^2 \\ &\leq M^2 + \theta^2 M^2 + \theta^2 D_n^2 g \end{aligned}$$

e, logo,

$$D_n^2 g \geq \left(1 + 2\theta^2 - 1 - \theta^2\right) \frac{1}{\theta^2} M^2 = M^2.$$

Também temos que $g_n^*(x) \leq f_n^*(x) \leq M$ e assim $x \in [g_n^* \leq M,\, D_n g > M]$. Em outras palavras, mostramos que

$$[f_n^* \leq M,\, D_n(\theta f) > \beta M] \subset [g_n^* \leq M,\, D_n g > M],$$

donde

$$M\mu\left[f_n^* \le M,\, D_n(\theta f) > \beta M\right] \le M\mu\left[g_n^* \le M, D_n g > M\right]. \tag{2.8}$$

Pelo Lema 2.2.10, temos que

$$\begin{aligned} M\mu\left[f_n^* \le M,\, D_n(\theta f) > \beta M\right] &\le M\mu\left[g_n^* \le M, D_n g > M\right] \\ &\le 2\left\|g_n\right\|_1 = 2\int_\Omega \chi_{[D_n(\theta f)>M]} f_n \, d\mu \\ &= 2\int_{[D_n(\theta f)>M]} f_n \, d\mu \le 2\int_{[Y_n>M]} f_n \, d\mu. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por fim, substituindo as desigualdades (2.6) e (2.9) em (2.5), obtemos (2.4). $\square$

Teorema 2.2.12 (*Desigualdade da Função Quadrática*)**.** *Para cada* $1 < p < \infty$*, existem constantes* $c_p > 0$ *e* $C_p < \infty$ *tais que, se* $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é um martingal,*

$$c_p \left\|D_n f\right\|_p \le \left\|f_n\right\|_p \le C_p \left\|D_n f\right\|_p, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e definamos os martingais não-negativos $g = (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $h = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ por $g_k = E\left[f_n^+|\mathcal{F}_k\right]$ e $h_k = E\left[f_n^-|\mathcal{F}_k\right]$, $k \ge 1$. Para $1 \le k \le n$, temos que, pela linearidade da esperança condicional,

$$d_k f = E\left[f_n^+ - f_n^-|\mathcal{F}_k\right] - E\left[f_n^+ - f_n^-|\mathcal{F}_{k-1}\right] = (g_k - h_k) - (g_{k-1} - h_{k-1}) = d_k g - d_k h.$$

Segue daí e da desigualdade triangular para a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ que

$$\begin{aligned} D_n f = \left(\sum_{k=1}^n (d_k f)^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{k=1}^n (d_k g - d_k h)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(\sum_{k=1}^n (d_k g)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n (d_k h)^2\right)^{\frac{1}{2}} = D_n(g) + D_n(h). \end{aligned}$$

Do Lema 2.2.11, obtemos

$$\left\|D_n(g)\right\|_p \le 3ep^{\frac{1}{2}} q \left\|f_n^+\right\|_p, \qquad \left\|D_n(h)\right\|_p \le 3ep^{\frac{1}{2}} q \left\|f_n^-\right\|_p,$$

pois $g_n = f_n^+$ e $h_n = f_n^-$. Assim,

$$\left\|D_n f\right\|_p \le \left\|D_n(g)\right\|_p + \left\|D_n(h)\right\|_p \le 3ep^{\frac{1}{2}} q \left(\left\|f_n^+\right\|_p + \left\|f_n^-\right\|_p\right) \le 6ep^{\frac{1}{2}} q \left\|f_n\right\|_p,$$

donde obtemos a desigualdade do lado esquerdo.

Para demonstrar a desigualdade do lado direito, usaremos a do lado esquerdo. A desigualdade é óbvia se $\|D_n f\|_p = \infty$. Suponhamos então que $\|D_n f\|_p < \infty$.

Primeiramente, para um $x \in \Omega$ fixo, temos que $d_n^* (x) = d_{k_0} (x)$ para algum $1 \leq k_0 \leq n$ e $d_{k_0} = \sqrt{d_{k_0}^2 (x)} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n d_k^2 (x)} = D_n f$. Logo,

$$f_n = \sum_{k=1}^n d_k \leq \sum_{k=1}^n d_n^* = n d_n^* \leq n \left(D_n f \right)$$

e assim $f_n \in L^p$.

Seja agora $g_n = \sigma (f_n) |f_n|^{p-1} / \|f_n\|_p^{p-1}$ como no Teorema 1.4.6. Nestas condições, g_n é $\mathcal{F}_n$-mensurável e, pela demonstração daquele teorema, $\int f_n g_n \, d\mu = \|f\|_p$ e $\|g_n\|_q = 1$. Pela desigualdade do lado esquerdo,

$$\|D_n g\|_q \leq 6 e q^{\frac{1}{2}} p \, \|g_n\|_q = 6 e q^{\frac{1}{2}} p. \tag{2.10}$$

Definamos $g_k = E [g_n | \mathcal{F}_k]$, $k \in \mathbb{N}$. Observe que isto mantém a definição de g_n e que $g = (g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é martingal. Denotemos por $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ as sequências de diferenças de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e de $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$, respectivamente. Para $j < k \in \mathbb{N}$,

$$E [d_k e_j | \mathcal{F}_j] = e_j E [d_k | \mathcal{F}_j] = e_j E [f_k - f_{k-1} | \mathcal{F}_j] = e_j (f_j - f_j) = 0.$$

Analogamente, temos que $E [d_k e_j | \mathcal{F}_{k-1}] = 0$ para $j > k$. Demonstramos, então, que $\int d_k e_j \, d\mu = 0$ para $k \neq j$. Logo,

$$\begin{aligned} \|f_n\|_p &= \int_\Omega f_n g_n \, d\mu = \int_\Omega \left(\sum_{1 \leq k \leq n} d_k \right) \left(\sum_{1 \leq j \leq n} e_j \right) d\mu \\ &= \int_\Omega \left(\sum_{1 \leq j, k \leq n} d_k e_j \right) d\mu = \int_\Omega \left(\sum_{1 \leq k \leq n} d_k e_k \right) d\mu. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{1 \leq k \leq n} d_k e_k \leq \left(\sum_{1 \leq k \leq n} d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} e_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = D_n (f) \, D_n (g) \, .$$

Substituindo a equação acima em (2.11), usando a Desigualdade de Hölder e a desigualdade (2.10), vem, finalmente,

$$\|f_n\|_p \leq \int_\Omega D_n(f)\, D_n(g)\; d\mu \leq \|D_n g\|_q \|D_n f\|_p \leq 6eq^{\frac{1}{2}} p \|D_n f\|_p . \qquad \square$$

Observação 2.2.13. No caso em que o martingal é fechado por f, podemos usar o Teorema de Convergência de Martingais para fazer $n \to \infty$ no teorema anterior e concluir que

$$c_p \|Df\|_p \leq \|f\|_p \leq C_p \|Df\|_p .$$

Capítulo 3.

Séries de Walsh

As funções de Walsh podem ser vistas como caracteres de um grupo topológico $\mathbb{D}$. Daremos ao intervalo $[0, 1)$ uma estrutura de grupo conveniente e focaremos nosso estudo apenas nas séries de Walsh neste intervalo.

Quando nos referimos ao sistema de Walsh, podemos nos referir a um dos sistemas: o sistema original de Walsh, o sistema de Walsh-Kaczmarz ou o sistema de Walsh-Paley. O primeiro é bastante usado em aplicações práticas e os dois últimos têm maior valor teórico. Na verdade os três são a mesma sequência de funções exceto por reordenação dos elementos e seu estudo, em termos de convergência, é equivalente.

Neste trabalho nos referiremos ao sistema de Walsh-Paley, que é definido de forma mais simples, além de ter uma analogia forte com o sistema trigonométrico. Este sistema foi introduzido por Paley em 1932, que então também demonstrou sua convergência em L^p.

Para o estudo deste capítulo é necessário conhecimento prévio em Topologia. As referências para este capítulo são [15, 14].

3.1. O Grupo Diádico

Nesta seção definiremos as funções de Walsh, o grupo diádico $\mathbb{D}$ e introduziremos seus caracteres, uma medida de Haar e uma topologia neste grupo. A seguir criaremos uma correspondência entre $[0, 1)$ e $\mathbb{D}$ e, a partir desta correspondência, mostraremos a relação direta entre as funções de Walsh e os caracteres do grupo diádico. Esta relação implicará que o estudo das propriedades e da convergência das séries de Walsh em $\mathbb{D}$ e em $[0, 1)$ são equivalentes.

Definição 3.1.1. Dado $n \in \mathbb{N}_0$ (ver Notação 1.1.5), existe uma única sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, onde $n_k \in \{0,1\}$ para $k \in \mathbb{N}_0$, que satisfaz

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k n_k.$$

Chamamos seus elementos de *coeficientes binários* de n. Observamos que $n_k = 0$ exceto para um número finito de índices.

Definição 3.1.2. Denominamos por *intervalos diádicos* os conjuntos da forma

$$I_{n,i} = \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right), \ n \in \mathbb{N}_0, \ 0 \le i < 2^n.$$

Dado $x \in [0,1)$, denotamos por $I_n(x)$ o único intervalo diádico $I_{n,i}$ que contém x.

Os conjuntos $I_n(x)$ formam uma base de vizinhanças de x.

Definição 3.1.3. O *sistema de Rademacher* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $r_n : [0,1) \to \mathbb{R}$, é dado por

$$r_n(x) = (-1)^i \text{ para cada } x \in I_{n+1,i}, \ 0 \le i < 2^{n+1}.$$

Definimos o *sistema de Walsh* (ou *Walsh-Paley*) $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ por

$$\omega_n = \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}$$

onde n_k são os coeficientes binários de n. Observamos que o produto é finito pois $n_k = 0$ para k suficientemente grande.

Notamos que o produto de funções de Walsh é uma função de Walsh. Cada uma delas é uma função simples mensurável e toma apenas os valores 1 e -1.

3.1.1. A Topologia Diádica em $[0,1)$

Nesta subseção daremos várias propriedades da topologia diádica que serão úteis mais adiante.

Definição 3.1.4. A *topologia diádica* é a topologia em $[0,1)$ gerada pelos intervalos diádicos.

Proposição 3.1.5. *Algumas propriedades a respeito da topologia diádica e dos intervalos diádicos:*

- ***(a)*** *Se $m \leq n$ então $I_n(x) \subset I_m(x)$ para todo $x \in [0,1)$.*
- ***(b)*** *A topologia diádica é mais fina que a topologia usual.*
- ***(c)*** *Cada aberto da topologia diádica ou da topologia usual é união enumerável disjunta de intervalos diádicos.*
- ***(d)*** *A σ-álgebra de Borel gerada pela topologia diádica coincide com a σ-álgebra de Borel usual.*

Demonstração. Sejam $n, m \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$. Dado $x \in [0,1)$, sejam $i, j \in \mathbb{N}_0$ tais que $I_n(x) = I_{n,i}$ e $I_m(x) = I_{m,j}$. Então $i/2^n \leq x < (i+1)/2^n$ e $j/2^m \leq x < (j+1)/2^m$. Multiplicando as equações por 2^n, temos

$$i \leq 2^n x < i+1, \qquad j2^{n-m} \leq 2^n x < (j+1)\,2^{n-m}.$$

Então i é o maior inteiro menor ou igual a $2^n x$, enquanto que $j2^{n-m} \leq 2^n x$. Portanto, $j2^{n-m} \leq i$. Da mesma forma, $i+1$ é o menor inteiro maior que $2^n x$ enquanto que $(j+1)\,2^{n-m} > 2^n x$ donde $(j+1)\,2^{n-m} \geq i+1$. Assim, $I_n(x) = \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right) \subset \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right) = I_m(x)$ e (a) está demonstrado.

Seja U um aberto da topologia usual e tome $x \in U$. Como U é aberto existe $\delta > 0$ tal que $(x-\delta, x+\delta) \subset U$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n} \leq \delta$. Para todo $y \in I_n(x)$ temos $|x-y| < 2^{-n} \leq \delta$ (pois $I_n(x)$ é um intervalo semiaberto de comprimento 2^{-n}), ou seja, $I_n(x) \subset (x-\delta, x+\delta) \subset U$. Logo, U é aberto na topologia diádica e (b) está demonstrado.

Por (b), basta mostrar (c) para abertos da topologia diádica. Seja U um aberto nesta topologia. Para cada $x \in U$ seja $n_x = \min\{n \in \mathbb{N}_0;\, I_n(x) \subset U\}$ e seja $J_U = \{I_{n_x}(x);\, x \in U\}$. O conjunto dos intervalos diádicos é enumerável, logo J_U também o é. Por outro lado, $U = \bigcup_{x \in U} I_{n_x}(x) = \bigcup_{I \in J_U} I$. Resta mostrar que os intervalos diádicos de J_U são dois a dois disjuntos.

Para isso, sejam $y, x \in U$ tais que $I_{n_x}(x) \cap I_{n_y}(y) \neq \emptyset$ e tome $z \in I_{n_x}(x) \cap I_{n_y}(y)$. Então $z \in I_{n_x}(x)$, donde $I_{n_x}(x) = I_{n_x}(z)$ (segue diretamente da definição dos intervalos diádicos). Pela escolha de n_z e por $I_{n_x}(z) = I_{n_x}(x) \subset U$, segue que $n_z \leq n_x$. Em particular, $I_{n_x}(z) \subset I_{n_z}(z)$, e, assim, $x \in I_{n_z}(z)$. Pela escolha de n_x, também temos

$n_x \leq n_z$. Assim, $n_x = n_z$ e $I_{n_x}(x) = I_{n_z}(z)$. Da mesma forma, também temos $I_{n_z}(z) = I_{n_y}(y)$ e portanto $I_{n_y}(y) = I_{n_x}(x)$. Resumindo, dois conjuntos de J_U cuja intersecção é não vazia são iguais. Ou seja, dois conjuntos distintos de J_U são disjuntos. Isto demonstra (c).

Verifiquemos (d). De (b), a σ-álgebra de Borel da topologia diádica contêm a σ-álgebra de Borel usual. Para a inclusão inversa, basta notar que os intervalos diádicos são intervalos e portanto pertencem à σ-álgebra de Borel usual. $\square$

3.1.2. Propriedades do Grupo Diádico

Definição 3.1.6. Consideramos o grupo $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ com a topologia discreta. Definimos o *grupo diádico* por $\mathbb{D} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$, ou seja, o grupo das sequências de elementos de $\mathbb{Z}_2$, munido da soma termo a termo e com a topologia produto. Definimos a norma $|\cdot| : \mathbb{D} \to [0,1]$ em $\mathbb{D}$ pondo

$$\left|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$$

Observação 3.1.7. Denotamos os elementos $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{D}$ por $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ respectivamente. A função $|\cdot|$ é de fato uma norma no grupo $\mathbb{D}$, pois $x = \mathbf{0} \iff |x| = 0$ e

$$\begin{aligned} ||x| - |y|| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_k - y_k)}{2^k}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k} \\ &= |x+y| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_k + y_k)}{2^k} = |x| + |y|, \end{aligned}$$

pois a soma em $\mathbb{D}$ pode ser obtida pela expressão $x + y = (|x_k - y_k|)_{k\in\mathbb{N}}$. Logo a correspondência $(x,y) \mapsto |x-y| = |x+y|$ é uma métrica.

Definição 3.1.8. Seja $\mathbb{D}_0 = \{x \in \mathbb{D};\ \exists n_0 \text{ tal que } x_n = 0,\ \forall n \geq n_0\}$ (i.e. o conjunto das sequências que têm apenas um número finito de elementos diferentes de 0). Dado $x \in \mathbb{D}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$, seja $m = \max\{n \in \mathbb{N};\ x_n = 1\}$ e considere

$$x = (x_1, \ldots, x_{m-1}, 1, 0, 0, 0, \ldots) \quad x^* = (x_1, \ldots, x_{m-1}, 0, 1, 1, 1, \ldots).$$

Definimos também $\mathbb{D}_0^* = \{x \in \mathbb{D};\ \exists n_0 \text{ tal que } x_n = 1,\ \forall n \geq n_0\}$. Se $x \in \mathbb{D}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $y = x^*$ definimos $y^* = x$.

Observação 3.1.9. $\mathbb{D}_0^* \backslash \{\mathbf{1}\} = \{x^*;\, x \in \mathbb{D}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}\}$. Para cada $x \in \mathbb{D}_0 \cup \mathbb{D}_0^* \backslash \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, $|x| = |x^*|$. Reciprocamente, se $x, y \in \mathbb{D}$, $x \neq y$ e $|x| = |y|$ então $y = x^*$ e $x \in \mathbb{D}_0 \cup \mathbb{D}_0^* \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Sendo assim, a função $|\cdot|$ restrita a $\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0^*$ é uma bijeção sobre $[0, 1)$ e possui inversa ϱ. Mais especificamente, dado $x \in [0, 1)$, podemos escrever $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k}$ onde $x_k \in \{0, 1\}$. Se $x \in \mathbb{Q}_2$ (ver Notação 1.1.5), escolhemos a sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que termina em zeros, isto é, que pertence a $\mathbb{D}_0$. Desta forma, definimos $\varrho(x) = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Observe que $\mathbb{Q}_2 \setminus \{1\}$ é a imagem de $\mathbb{D}_0$ pela função $|\cdot|$, enquanto que a imagem de $\mathbb{D}_0^*$ por esta função é $\mathbb{Q}_2 \setminus \{0\}$.

Definição 3.1.10. A sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ da observação acima é chamada de *expansão diádica* de x. A função ϱ dada acima é chamada de *função de Fine.* Também denotamos por ϱ^* a inversa da função $|\cdot|$ em $\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0$, isto é,

$$\varrho^*(x) = \begin{cases} \varrho(x) & \text{se } x \in (0, 1] \setminus \mathbb{Q}_2, \\ \varrho(x)^* & \text{se } x \in \mathbb{Q}_2 \setminus \{0, 1\}, \\ \mathbf{1} & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Definição 3.1.11. Dado $x \in \mathbb{D}$, definimos os conjuntos $\tilde{I}_n(x) = \{y \in \mathbb{D};\, y_k = x_k,\ 1 \leq k \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, e $\tilde{I}_0(x) = \mathbb{D}$, os quais denominamos *"intervalos diádicos" de* $\mathbb{D}$.

Esta definição tem uma forte ligação com a definição de intervalos diádicos de $[0, 1)$.

Lema 3.1.12. *Temos as seguintes propriedades:*

(a) *Dados $x \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0^*$ e $j \in \mathbb{N}$, existe $m > j \in \mathbb{N}$ tal que, se $y \in \mathbb{D}$ é tal que $|x| < |y| < |x| + 2^{-m}$, então $y \in \tilde{I}_{m-1}(x) \subset \tilde{I}_j(x)$.*

(b) *Sejam $x \in \mathbb{D}_0$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = 0\ \forall k \geq m$. Se $y \in \mathbb{D}$ é tal que $|x| < |y| < |x| + 2^{-m}$ então $y \in \tilde{I}_m(x)$.*

(c) *Dados $x \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0$ e $j \in \mathbb{N}$, existe $m > j \in \mathbb{N}$ tal que, se $y \in \mathbb{D}$ é tal que $|x| - 2^{-m} < |y| < |x|$ então $y \in \tilde{I}_{m-1}(x) \subset \tilde{I}_j(x)$.*

(d) *Sejam $x \in \mathbb{D}_0^*$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = 1\ \forall k \geq m$. Se $y \in \mathbb{D}$ é tal que $|x| - 2^{-m} < |y| < |x|$ então $y \in \tilde{I}_m(x)$.*

Demonstração. Tome $x \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0^*$ e $j \in \mathbb{N}$. Escolha $m > j$ tal que $x_m = 0$ (isto é possível pois $x \notin \mathbb{D}_0^*$) e suponha que $y \in \mathbb{D}$ é tal que $|x| < |y| < |x| + 2^{-m}$. Defina

$n = \min\{k \in \mathbb{N};\, x_k \neq y_k\}$ (n é bem definido pois $y \neq x$ por escolha). Basta mostrar que $n \geq m$, pois, neste caso, temos que $x_k = y_k$ para todo $1 \leq k \leq m-1$ e assim $y \in \tilde{I}_{m-1}(x)$.

Primeiramente, temos que $y_n > x_n$. De fato, supondo que $y_n < x_n$, ou seja, $y_n = 0$ e $x_n = 1$, temos

$$0 < |y| - |x| = \frac{y_n - x_n}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{2^k} \leq -\frac{1}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 0,$$

o que é um absurdo. Então temos $y_n = 1$ e $x_n = 0$. Supondo que $n < m$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^m} > |y| - |x| &= \frac{y_n - x_n}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{y_k - x_k}{2^k} + \frac{y_m - x_m}{2^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{2^k} \\
&\geq \frac{1}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{-1}{2^k} + 0 + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{-1}{2^k} \\
&= \frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{m-1}}\right) + \left(-\frac{1}{2^m}\right) \\
&= \frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^m},
\end{aligned}$$

o que também é um absurdo. Logo devemos ter $n \geq m$, donde segue (a).

Nas hipóteses de (b), escolhendo $y \in \mathbb{D}$ tal que $|x| < |y| < |x| + 2^{-m}$ e $n = \min\{k \in \mathbb{N};\, x_k \neq y_k\}$, temos, pelas contas na parte anterior, que $y_n = 1$ e $x_n = 0$ e que $n \geq m$. Supondo por contradição que $m = n$, (lembrando que $x_k = 0$ para $k \geq m$)

$$\frac{1}{2^m} > |y| - |x| = \frac{y_m - x_m}{2^m} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{2^k} \geq \frac{1}{2^m},$$

e isto não é possível. Assim, devemos ter $n > m$, o que conclui (b).

Para a terceira parte, sejam $x \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0$ e $m > j$ tal que $x_m = 1$ (observe que $x \notin \mathbb{D}_0$). Tome $y \in \mathbb{D}$ tal que $|x| - 2^{-m} < |y| < |x|$. Considere $n = \min\{k \in \mathbb{N};\, x_k \neq y_k\}$. Como antes, basta mostrar que $n \geq m$.

Primeiramente temos que $y_n < x_n$. De fato, se fosse $y_n > x_n$ (e, neste caso, $y_n = 1$ e $x_n = 0$), teríamos

$$0 < |x| - |y| = \frac{x_n - y_n}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k - y_k}{2^k} \leq \frac{-1}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 0,$$

o que não pode ser. Então temos $y_n = 0$ e $x_n = 1$. Agora, se $n < m$, como $x_m = 1$ por escolha, temos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2^m} < |y| - |x| &= \frac{y_n - x_n}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{y_k - x_k}{2^k} + \frac{y_m - x_m}{2^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{2^k} \\ &\leq \frac{-1}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{1}{2^k} + 0 + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= -\frac{1}{2^n} + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{m-1}} \right) + \frac{1}{2^m} = -\frac{1}{2^m}, \end{aligned}$$

uma contradição. Logo devemos ter $n \geq m$ e (c) fica demonstrado.

Finalmente, para demonstrar (d), tomamos $y \in \mathbb{D}$ tal que $|x| < |y| < |x| + 2^{-m}$ e $n = \min\{k \in \mathbb{N};\ x_k \neq y_k\}$. Então, pelas contas na parte anterior, $y_n = 0$, $x_n = 1$ e $n \geq m$. Agora, se tivéssemos que $m = n$, (lembrando que $x_k = 1$ para $k \geq m$)

$$-\frac{1}{2^m} < |y| - |x| = \frac{y_n - x_n}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{2^k} \leq -\frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^m}.$$

Assim, por absurdo, $n > m$ e estabelecemos (d). $\square$

Notação 3.1.13. Se $A \subset \mathbb{D}$, $A \neq \emptyset$, denotamos por $|A|$ o subconjunto $\{|y|\,;\ y \in A\}$ de $[0, 1]$.

Proposição 3.1.14. *Propriedades gerais do grupo diádico:*

(a) *Se $x \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0^*$, então*

$$I_n\left(|x|\right) = \left| \tilde{I}_n\left(x\right) \setminus \mathbb{D}_0^* \right|.$$

Em particular, $\chi_{I_n(|x|)} = \chi_{\left|\tilde{I}_n(x)\right|}$ q.t.p. para $x \notin \mathbb{D}_0^*$.

(b) *Cada aberto em $\mathbb{D}$ é união disjunta e enumerável de intervalos diádicos.*

(c) *Dado U aberto em $\mathbb{D}$, escrevendo $U = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{I}_{n_k}\left(x_k\right)$, então $\chi_{|U|} = \chi_V$ onde $V = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} I_{n_k}\left(|x_k|\right)$ (observe que V é aberto da topologia diádica em $[0, 1)$).*

(d) *O conjunto formado pelos intervalos diádicos em $\mathbb{D}$ e pelo conjunto vazio é uma semiálgebra ([6, p. 12]).*

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0^*$ e $n \in \mathbb{N}$ fixo e defina $i_x = \sum_{k=1}^{n} x_k 2^{n-k}$. Observe que $0 \leq i_x \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} < 2^n$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{i_x}{2^n} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k 2^{n-k}}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} = |x| = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} \\
&< \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k} + \frac{1}{2^n} = \frac{i_x + 1}{2^n},
\end{aligned}$$

onde $\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x_j}{2^j} < \frac{1}{2^n}$ pois x_j não pode ser 1 para todo $j > n$ ou teríamos $x \in \mathbb{D}_0^*$. Ou seja, $|x| \in I_{n,i_x}$ e assim $I_n(|x|) = I_{n,i_x}$. Agora, dado $y \in \tilde{I}_n(x) \setminus \mathbb{D}_0^*$, temos que $y_k = x_k$ para $k \leq n$ donde $i_x = i_y$. Em particular, pelo que acabamos de mostrar, $|y| \in I_{n,i_y} = I_{n,i_x} = I_n(|x|)$. Portanto, $\left|\tilde{I}_n(x) \setminus \mathbb{D}_0^*\right| \subset I_n(|x|)$.

Por outro lado, dado $d \in I_n(|x|)$, definindo $y = \varrho(d)$, temos $d = |y|$ e $y \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0^*$. Queremos mostrar que $d \in \left|\tilde{I}_n(x)\right|$. Como $|y| = d \in I_n(|x|)$, temos $i_x 2^{-n} \leq |y| < i_x 2^{-n} + 2^{-n}$. Mas, tomando $z_k = x_k$ se $k \leq n$ e $z_k = 0$ caso contrário, temos que $i_x 2^{-n} = |z|$, $|z| \leq |y| < |z| + 2^{-n}$ e $z_k = 0$ para $k > n$. Se $|y| = |z|$, então, como $y, z \notin \mathbb{D}_0^*$, devemos ter $y = \varrho(|y|) = \varrho(|z|) = z$ donde $y \in \tilde{I}_n(z) = \tilde{I}_n(x)$. Se $|y| > |z|$, podemos usar 3.1.12 (b) para concluir que $y \in \tilde{I}_n(z) = \tilde{I}_n(x)$. Assim (a) está estabelecido.

Seja $\pi_k(x) = x_k$, $x \in \mathbb{D}$, a projeção canônica e seja U um aberto básico da topologia produto de $\mathbb{D}$. Então U é intersecção finita de conjuntos da forma $\pi_k^{-1}(U_k)$ onde $U_k \subset \mathbb{Z}_2$ (pois $\mathbb{Z}_2$ está equipado com a topologia discreta). Portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ e $U_k \subset \mathbb{Z}_2$ para $1 \leq k \leq n$ tal que $U = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_k^{-1}(U_k)$. Dado $x \in U$, temos $\tilde{I}_n(x) \subset U$ (de fato, dado $y \in \tilde{I}_n(x)$ temos $y_k = x_k \in U_k$ para $1 \leq k \leq n$, donde $y \in \bigcap_{k=1}^{n} \pi_k^{-1}(U_k) = U$). Portanto, $U = \bigcup_{x \in U} \tilde{I}_n(x)$. Assim, mostramos que todo aberto básico de $\mathbb{D}$, e portanto todo aberto de $\mathbb{D}$, é união de intervalos diádicos.

Seja então $U \subset \mathbb{D}$ aberto. Dado $x \in U$, seja $n_x = \min\left\{n \in \mathbb{N}_0;\, \tilde{I}_n(x) \subset U\right\}$. Então claramente $U = \bigcup_{x \in U} \tilde{I}_{n_x}(x) = \bigcup_{x \in U \setminus \mathbb{D}_0^*} \tilde{I}_{n_x}(x)$. Agora, por (a), existe uma bijeção entre os conjuntos $\tilde{I}_n(x)$ e $I_n(|x|)$ e existe uma quantidade enumerável de conjuntos da forma $I_n(d)$ com $d \in [0,1)$ e $n \in \mathbb{N}_0$. Assim, o conjunto $J_U = \left\{\tilde{I}_{n_x}(x)\,;\, x \in U\right\}$ é enumerável e $U = \bigcup_{I \in J_U} I$. A demonstração de que os conjuntos de J_U são disjuntos é análoga à demonstração de 3.1.5 (c). Então obtemos (b).

(c) segue diretamente de (a) e (b).

Seja $\mathbb{S} = \left\{\tilde{I}_n(x)\,;\, x \in \mathbb{D} \text{ e } n \in \mathbb{N}_0\right\} \cup \{\emptyset\}$. Para mostrar (d), devemos provar que $\mathbb{D} \in \mathbb{S}$, que $\tilde{I}_n(x) \cap \tilde{I}_m(y) \in \mathbb{S}$ e que $\tilde{I}_n(x)^c$ é união finita disjunta de elementos de $\mathbb{S}$. Claramente, $\mathbb{D} = \tilde{I}_0(0) \in \mathbb{S}$, resta-nos então mostrar as outras duas propriedades.

Suponhamos que $\tilde{I}_n(x) \cap \tilde{I}_m(y) \neq \emptyset$, sejam $z \in \tilde{I}_n(x) \cap \tilde{I}_m(y)$ e $k = n \vee m$. Como $z \in \tilde{I}_n(x)$ temos $\tilde{I}_n(z) = \tilde{I}_n(x)$. Mas $k \geq n$ implica que $\tilde{I}_k(z) \subset \tilde{I}_n(z) = \tilde{I}_n(x)$. Da mesma forma $\tilde{I}_k(z) \subset \tilde{I}_m(y)$. Assim, $\tilde{I}_k(z) \subset \tilde{I}_n(x) \cap \tilde{I}_m(y)$. Para a inclusão oposta, seja $t \in \tilde{I}_n(x) \cap \tilde{I}_m(y)$. Para $j \leq n$, como $t \in \tilde{I}_n(x)$ temos $t_j = x_j = z_j$. Para $j \leq m$, temos $t_j = y_j = z_j$. Em qualquer caso, para $j \leq n \vee m = k$, temos $t_j = z_j$. Então $t \in \tilde{I}_k(z)$. Assim, $\tilde{I}_n(x) \cap \tilde{I}_m(y) = \tilde{I}_k(z) \in \mathbb{S}$.

Para a terceira propriedade, seja

$$A = \{z \in \mathbb{D};\, z_k = 0,\, \forall k > n \text{ e } \exists 1 \leq k \leq n \text{ tal que } z_k \neq x_k\}\,.$$

Existe uma bijeção entre A e $B = \{d \in \{0,1\}^n\,;\, \exists 1 \leq k \leq n \;\text{ tal que } d_k \neq x_k\}$, onde $z \mapsto d = (z_1, \ldots, z_n)$. B é um subconjunto de $\{0,1\}^n$, que é finito e logo A também é finito. Além disso, para $z \in A$ temos que $\tilde{I}_n(z) \subset \tilde{I}_n(x)^c$. Por outro lado, dado $t \in \tilde{I}_n(x)^c$, seja $z \in \mathbb{D}$ definido por $z_k = t_k$ se $1 \leq k \leq n$ e $z_k = 0$ para $k > n$. Então $t \in \tilde{I}_n(z)$ e $z \in A$, e portanto $\tilde{I}_n(x)^c = \bigcup_{z \in A} \tilde{I}_n(z)$. $\square$

Proposição 3.1.15. *Existe uma única medida μ completa definida ao menos em $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ que satisfaz $\mu\left(\tilde{I}_n(x)\right) = 2^{-n}$, onde $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ é a família dos conjuntos borelianos de $\mathbb{D}$. Esta medida é dada por $\mu(A) = \lambda(|A|)$. Ainda mais, μ é invariante por translações (ou seja, μ é uma medida de Haar).*

Demonstração. A função $|\cdot|$ restrita a $\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0^*$ é uma bijeção sobre $[0,1)$ (Observação 3.1.9). Logo podemos definir uma função de conjunto $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, onde

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{D};\, |A \setminus \mathbb{D}_0^*| \text{ é Lebesgue-mensurável}\}\,,$$

pondo $\mu(A) = \lambda(|A \setminus \mathbb{D}_0^*|)$. Temos que, se $A, B \in \mathcal{A}$, então $|A \cap B \setminus \mathbb{D}_0^*| = |A \setminus \mathbb{D}_0^*| \cap |B \setminus \mathbb{D}_0^*|$ é mensurável e assim $A \cap B \in \mathcal{A}$. Se $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de

$\mathcal{A}$, então

$$\left|\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right)\setminus\mathbb{D}_0^*\right| = \left|\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\left(A_j\setminus\mathbb{D}_0^*\right)\right| = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}\left|A_j\setminus\mathbb{D}_0^*\right|$$

é mensurável e assim $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$. Segue então que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra. É fácil verificar que μ é uma medida sobre $\mathcal{A}$. Por outro lado, $|\mathbb{D}_0^*| = \mathbb{Q}_2\setminus\{0\}$, e este tem medida nula com respeito a λ. Portanto

$$\lambda\left(|A|\right) \geq \lambda\left(|A\setminus\mathbb{D}_0^*|\right) \geq \lambda\left(|A|\setminus|\mathbb{D}_0^*|\right) = \lambda\left(|A|\right) - \lambda\left(|A|\cap|\mathbb{D}_0^*|\right) = \lambda\left(|A|\right).$$

Assim, $\mu(A) = \lambda(|A|)$ sempre que $A\in\mathcal{A}$.

Segue de 3.1.14 (a) que $\tilde{I}_n(x)\in\mathcal{A}$ e $\mu\left(\tilde{I}_n(x)\right) = 2^{-n}$. Por 3.1.14 (b), $\mathcal{A}$ deve conter os abertos de $\mathbb{D}$, donde também deve conter $\mathcal{B}(\mathbb{D})$. Ainda mais, μ é completa, pois, se $\mu(A) = \lambda(|A|) = 0$ e $B\subset A$ temos $|B|\subset|A|$ donde $|B|$ é λ-mensurável e $\mu(B) = \lambda(|B|) = 0$. Assim, a existência de μ fica garantida.

A unicidade segue do Teorema de Extensão de Medidas (ver [6], p. 29-30). As hipóteses necessárias para este teorema vêm de 3.1.14 (d) e de $\mu(\mathbb{D}) = \mu\left(\tilde{I}_0(0)\right) = 1 < \infty$.

Fixemos $y\in\mathbb{D}$ e seja $\mu_y : \mathcal{B}(\mathbb{D})\to\mathbb{R}$ definida por $\mu_y(A) = \mu(y+A)$, $A\in\mathcal{B}(\mathbb{D})$. Como $\tilde{I}_n(x)+y = \tilde{I}_n(x+y)$, temos

$$\mu\left(\tilde{I}_n(x)+y\right) = \mu\left(\tilde{I}_n(x+y)\right) = 2^{-n} = \mu\left(\tilde{I}_n(x)\right).$$

Assim, μ_y e μ coincidem nos intervalos diádicos. Ainda mais, μ_y é uma medida. De fato, se $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos de $\mathcal{B}(\mathbb{D})$, temos que

$$\mu_y\left(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \mu\left(y + \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \mu\left(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}}(y+A_j)\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}}\mu_y(A_j).$$

Novamente por 3.1.14 (d) e pelo Teorema de Extensão de Medidas, μ_y e μ coincidem em $\mathcal{B}(\mathbb{D})$. □

Notação 3.1.16. Denotamos por μ a única medida dada pela proposição anterior.

3.1.3. Os Caracteres do Grupo Diádico

Os caracteres do grupo diádico têm expressões análogas às funções de Walsh. A ligação entre esses dois grupos de funções será feita mais adiante.

Definição 3.1.17. Dado um grupo topológico G, os homomorfismos de grupo contínuos de G a $\mathbb{T}$, onde $\mathbb{T}$ é o grupo $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ munido da operação de multiplicação de números complexos, são chamados *caracteres* de G.

Definição 3.1.18. Dados $n, m \in \mathbb{N}_0$ e $(n_k), (m_k)$ os coeficientes binários de n e m, respectivamente, definimos a *soma diádica* de n e m por

$$n \oplus m = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k |n_k - m_k| .$$

Proposição 3.1.19. *O conjunto de todos os caracteres de $\mathbb{D}$ é dado por*

$$\hat{\mathbb{D}} = \left\{ \psi_n = \prod_{k=0}^{\infty} \rho_k^{n_k};\ n \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

onde $(n_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ são os coeficientes binários de n e $\rho_k(x) = (-1)^{x_{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Cada ρ_k é contínuo pois $\rho_k^{-1}(-1) = \pi_{k+1}^{-1}(1)$ e $\rho_k^{-1}(1) = \pi_{k+1}^{-1}(0)$ são abertos básicos da topologia produto em $\mathbb{D}$ (onde π_k é a projeção canônica como na demonstração da Proposição 3.1.14). Além disso, cada ρ_k é homomorfismo uma vez que $\rho_k(x + y) = (-1)^{x_{k+1} \oplus y_{k+1}} = (-1)^{x_{k+1}} (-1)^{y_{k+1}} = \rho_k(x) \rho_k(y)$ (observe que $x + y = (|x_k - y_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ e $x_{k+1} \oplus y_{k+1} = |x_{k+1} - y_{k+1}|$). Como ψ_n é um produto finito de homomorfismos contínuos temos que ψ_n é homomorfismo contínuo.

Reciprocamente, seja f um caractere de $\mathbb{D}$ e para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $e^{(k)} \in \mathbb{D}$ dada por

$$e_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k, \\ 0 & \text{se } n \neq k. \end{cases}$$

Pela continuidade de f e do fato que $e^{(k)} \to 0$ quando $k \to \infty$ ($\left|e^{(k)}\right| = 2^{-k}$), temos que $f\left(e^{(k)}\right) \to f(0) = 1$. Mas, como f é homomorfismo, $f(x)^2 = f(x + x) = f(0) = 1 \implies f(x) = \pm 1$. Daí existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $f\left(e^{(k)}\right) = 1$ para $k > k_0$. Para cada

$k \in \mathbb{N}$ seja $n_k \in \{0,1\}$ tal que $f\left(e^{(k+1)}\right) = (-1)^{n_k}$ (note que $n_k = 0$ para $k \geq k_0$) e seja

$$n = \sum_{k=0}^{k_0-1} 2^k n_k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k n_k,$$

Claramente, $f\left(e^{(k+1)}\right) = (-1)^{n_k} = \rho_k^{n_k}\left(e^{(k+1)}\right) = \psi_n\left(e^{(k+1)}\right)$.

Seja $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}$ e para cada $m \in \mathbb{N}$ seja $x^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} x_k e^{(k)}$. Temos que $\left|x - x^{(m)}\right| \leq 2^{-m}$ e assim $x^{(m)} \to x$. Como f e ψ_n são homomorfismos,

$$\begin{aligned} f\left(x^{(m)}\right) &= f\left(\sum_{k=1}^{m} x_k e^{(k)}\right) = \prod_{k=1}^{m} f\left(e^{(k)}\right)^{x_k} \\ &= \prod_{k=1}^{m} \psi_n\left(e^{(k)}\right)^{x_k} = \psi_n\left(x^{(m)}\right) \end{aligned}$$

e assim, como f e ψ_n são contínuos,

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f\left(x^{(m)}\right) = \lim_{m\to\infty} \psi_n\left(x^{(m)}\right) = \psi_n(x).$$

□

Observação 3.1.20. Note que $\rho_k^{n_k+m_k} = \rho_k^{|n_k-m_k|} = \rho_k^{n_k}\rho_k^{m_k}$ e, logo, $\psi_n\psi_m = \psi_{n\oplus m}$ para $n, m \in \mathbb{N}_0$. Ou seja, $(\mathbb{N}_0, \oplus)$ e $\hat{\mathbb{D}}$ são grupos isomorfos.

Proposição 3.1.21. *O grupo dos caracteres diádicos de $\mathbb{D}$ é um conjunto ortonormal em $L^2(\mathbb{D})$.*

Demonstração. Sejam $n, m \in \mathbb{N}_0$. Temos que $\psi_n\psi_m = \psi_{n\oplus m}$. Se $n = m$, então $n \oplus m = 0$ e $\int_{\mathbb{D}} \psi_n\psi_m \, d\mu = \int_{\mathbb{D}} \psi_0 \, d\mu = \mu(\mathbb{D}) = 1$. Se $n \neq m$ então $k = n \oplus m \neq 0$ e assim resta mostrar que $\int_{\mathbb{D}} \psi_k \, d\mu = 0$. Como $k \neq 0$, seja $y \in \mathbb{D}$ tal que $\psi_k(y) = -1$. Como μ é invariante por translação,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \psi_k(x)\, d\mu(x) &= \int_{\mathbb{D}} \psi_k(x+y)\, d\mu(x) \\ &= \psi_k(y) \int_{\mathbb{D}} \psi_k(x)\, d\mu(x) = -\int_{\mathbb{D}} \psi_k(x)\, d\mu(x). \end{aligned}$$

Ou seja, $\int_{\mathbb{D}} \psi_k \, d\mu = 0$. □

3.1.4. Relações entre $[0,1)$ e o Grupo Diádico

Em seguida apresentaremos uma relação entre o intervalo $[0,1)$ e o grupo diádico que fornecerá uma analogia entre os caracteres do grupo diádico e as funções de Walsh, fornecendo ferramentas que facilitarão o estudo das séries de Walsh.

Definição 3.1.22. A *soma diádica* de dois números $x, y \in [0,1)$ é definida por

$$x \oplus y = \left|\varrho(x) + \varrho(y)\right| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left|x_k - y_k\right|.$$

A *distância diádica* $d(x,y) = x \oplus y$, $x, y \in [0,1)$, é uma métrica em $[0,1)$. Esta métrica gera a topologia diádica. Omitiremos a demonstração deste fato.

Observação 3.1.23. $([0,1), \oplus)$ não é um grupo. De fato, não há associatividade:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{12} \oplus \frac{1}{6}\right) \oplus \frac{1}{4} &= \left|(0,0,0,1,0,1,0,1,\ldots) + (0,0,1,0,1,0,1,0,\ldots)\right| \oplus \frac{1}{4} \\
&= \left|(0,0,1,1,1,1,1,1,\ldots)\right| \oplus \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \oplus \frac{1}{4} = 0, \\
\frac{1}{12} \oplus \left(\frac{1}{6} \oplus \frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{12} \oplus \left|(0,0,1,0,1,0,1,0,\ldots) + (0,1,0,0,0,0,0,0,\ldots)\right| \\
&= \left|(0,0,0,1,0,1,0,1,\ldots) + (0,1,1,0,1,0,1,0,\ldots)\right| = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Lema 3.1.24. *Para $x \in [0,1)$, temos que $\varrho(x+) = \varrho(x)$ e $\varrho(x-) = \varrho^*(x)$.*

Demonstração. Devemos mostrar que, dado um aberto $U \subset \mathbb{D}$ com $\varrho(x) \in U$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x < y < x + \delta$, então $\varrho(y) \in U$. Mas, por 3.1.14 (b), existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{I}_j(\varrho(x)) \subset U$, então basta mostrar que existe δ tal que, se $x < y < x + \delta$, então $\varrho(y) \in \tilde{I}_j(\varrho(x))$. Mas isto segue diretamente de 3.1.12 (a) com $\delta = 2^{-m}$, (lembre-se que $\varrho(x) \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0^*$).

Para a segunda parte, como antes, dado $j \in \mathbb{N}$, precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que, se $x - \delta < y < x$, então $\varrho(y) \in \tilde{I}(\varrho^*(x))$. Para isto basta usar 3.1.12 (c). $\square$

Notação 3.1.25. *D*enotamos por $C(\mathbb{D})$ o conjunto das funções contínuas de $\mathbb{D}$ em $\mathbb{R}$ e por C_W o conjunto das funções de $[0,1)$ em $\mathbb{R}$ que são contínuas em $[0,1) \setminus \mathbb{Q}_2$, contínuas à direita e com limite finito à esquerda em cada ponto de $\mathbb{Q}_2$.

Proposição 3.1.26. *Dada $f \in C(\mathbb{D})$, $f \circ \varrho \in C_W$. Reciprocamente, dada $g \in C_W$, existe $f \in C(\mathbb{D})$ tal que $g = f \circ \varrho$. Também temos $\psi_n \circ \varrho = \omega_n$.*

Demonstração. Sejam $f \in C(\mathbb{D})$ e $g = f \circ \varrho$. Como f é contínua, segue do Lema 3.1.24 que

$$\begin{aligned} g(x+) = f(\varrho(x+)) = f(\varrho(x)) = g(x), \\ g(x-) = f(\varrho(x-)) = f(\varrho^*(x)). \end{aligned}$$

Como $\varrho^* = \varrho$ em $[0,1) \setminus \mathbb{Q}_2$ segue que g é contínua neste conjunto. Também segue que g é contínua à direita e com limite finito à esquerda (igual a $f(\varrho^*(x))$) para cada $x \in \mathbb{Q}_2$. Portanto $g \in C_W$.

Reciprocamente, dada $g \in C_W$, seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(|x|) & x \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0^*, \\ g(|x|-) & x \in \mathbb{D}_0^*. \end{cases}$$

Vamos mostrar que f é contínua. Primeiramente, tome $x \in \mathbb{D} \setminus (\mathbb{D}_0 \cup \mathbb{D}_0^*)$ e um $\varepsilon > 0$. Como $|x| \notin \mathbb{Q}_2$, existe $\delta > 0$ tal que, se $||y| - |x|| < \delta$, então $|g(|y|) - g(|x|)| < \varepsilon$. Sejam $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-m} < \delta$ e $y \in \tilde{I}_m(x)$. Então

$$\begin{aligned} ||y| - |x|| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{2^k} \right| &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|y_k - x_k|}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^m} < \delta \end{aligned}$$

e portanto $|f(y) - f(x)| = |g(|y|) - g(|x|)| < \varepsilon$.

Em outras palavras, $y \in \tilde{I}_m(x) \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon$, donde segue a continuidade de f em x.

Por outro lado, seja $x \in \mathbb{D}_0$. Pela continuidade à direita de g em $|x|$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $|x| \leq |y| < |x| + \delta$ então $|g(|y|) - g(|x|)| < \varepsilon$. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-m} < \delta$ e $x_k = 0$ para $k > m$. Tomando $y \in \tilde{I}_m(x)$, temos

$$\begin{aligned} |x| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{y_k}{2^k} \\ &\leq |y| = \sum_{k=1}^{m} \frac{y_k}{2^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{y_k}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k}{2^k} + \frac{1}{2^m} \\ &< |x| + \delta, \end{aligned}$$

donde $|f(y) - f(x)| = |g(|y|) - g(|x|)| < \varepsilon$.

Finalmente, dados $x \in \mathbb{D}_0^*$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $|x| - \delta < |y| \leq |x|$ implica em $|g(|y|) - g(|x|-)| < \varepsilon$. Escolha $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-m} < \delta$ e $x_k = 1$ para $k > m$. Para $y \in \tilde{I}_m(x)$,

$$\begin{aligned} |x| - \delta < |x| - \frac{1}{2^m} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{y_k}{2^k} \\ &\leq |y| = \sum_{k=1}^{m} \frac{y_k}{2^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{y_k}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k}{2^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = |x| \end{aligned}$$

e assim também temos $|f(y) - f(x)| = |g(|y|) - g(|x|-)| < \varepsilon$.

Resta mostrar a identidade $\psi_n \circ \varrho = \omega_n$. Fixe $k \in \mathbb{N}$. Tome $x \in [0,1)$ e seja $x \in I_{k+1,i}$ para algum $0 \leq i < 2^{k+1}$. Escrevendo $\varrho(x) = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{i}{2^{k+1}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{2^j} < \frac{i+1}{2^{k+1}} &\implies i \leq \sum_{j=1}^{k+1} x_j 2^{k+1-j} + \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{x_j}{2^{j-k-1}} < i+1 \\ &\implies i \leq \sum_{m=0}^{k} x_{k+1-m} 2^m + \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{x_j}{2^{j-k-1}} < i+1. \end{aligned}$$

Observe que $\sum_{m=0}^{k} x_{k+1-m}2^m$ e i são inteiros e que $0 \leq \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{x_j}{2^{j-k-1}} < \sum_{l=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^l} = 1$ (a desigualdade à direita é estrita pois $\varrho(x) \notin \mathbb{D}_0^*$ donde $x_{l+k+1} = 0$ para algum $l \geq 1$). Então, a única possibilidade é $i = \sum_{m=0}^{k} x_{k+1-m}2^m$. Pela definição de r_k, temos

$$r_k(x) = (-1)^i = (-1)^{x_{k+1}} = \rho_k\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) = \rho_k(\varrho(x)).$$

Portanto, $r_k = \rho_k \circ \varrho$, donde

$$\omega_n = \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k} = \prod_{k=0}^{\infty} \rho_k^{n_k} \circ \varrho = \psi_n \circ \varrho. \qquad \square$$

Proposição 3.1.27. *Dados $x, y \in [0,1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, se $x \oplus y \notin \mathbb{Q}_2$ então*

$$\omega_n(x \oplus y) = \omega_n(x)\,\omega_n(y).$$

Como $\mathbb{Q}_2$ é enumerável, a relação vale em q.t.p.$[\lambda]$.

Demonstração. Temos que $x \oplus y = |\varrho(x) + \varrho(y)|$. Como $x \oplus y \notin \mathbb{Q}_2$, temos que $\varrho(x) + \varrho(y) \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_0^*$ e portanto

$$\varrho(x \oplus y) = \varrho(|\varrho(x) + \varrho(y)|) = \varrho(x) + \varrho(y).$$

Pela Proposição 3.1.26,

$$\omega_n(x \oplus y) = \psi_n \circ \varrho(x \oplus y) = \psi_n(\varrho(x) + \varrho(y)) = \psi_n \circ \varrho(x)\,\psi_n \circ \varrho(y) = \omega_n(x)\,\omega_n(y). \quad \square$$

Proposição 3.1.28. *Sejam $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ mensurável e $g = f \circ \varrho$. Nessas condições, $f \in L^p(\mathbb{D})$ se, e somente se, $g \in L^p[0,1)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ e, em caso afirmativo,*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{D})} = \|g\|_{L^p[0,1)}.$$

Demonstração. Primeiro o caso $p < \infty$. Suponha que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$. Então $g = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{|A_i|}$ q.t.p. De fato, se $x \in |A_i| \setminus \mathbb{Q}_2$, existe $y \in A_i$ tal que $|y| = x$; mas, neste caso, $y \notin (\mathbb{D}_0 \cup \mathbb{D}_0^*)$ (ou teríamos $x \in \mathbb{Q}_2$). Então $\varrho(x) = y \in A_i$, ou seja, $g(x) = f(\varrho(x)) = a_i$. Reciprocamente, tome $x \in [0,1) \setminus \mathbb{Q}_2$ tal que $x \notin |A_i|$ para nenhum i. Como $x \notin \mathbb{Q}_2$, $|\varrho(x)| = x$; então $\varrho(x) \notin A_i$, donde $g(x) = f(\varrho(x)) = 0$. O resultado segue do fato que $\mathbb{Q}_2$ tem medida nula.

Pela Proposição 3.1.15,

$$\|f\|_p = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu (A_i)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda (|A_i|)^{\frac{1}{p}} = \|g\|_p .$$

O caso para $f \in L^p (\mathbb{D})$ qualquer segue pelo Teorema da Convergência Monótona.

Agora o caso $p = \infty$. Temos, de forma análoga ao caso anterior, que $\chi_{|[f>a]|} = \chi_{[g>a]}$ q.t.p. para cada $a \in \mathbb{R}$. Portanto, aplicando novamente a Proposição 3.1.15,

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \sup \{a \in \mathbb{R};\ \mu ([f > a]) \neq 0\} \\ &= \sup \{a \in \mathbb{R};\ \lambda (|[f > a]|) \neq 0\} \\ &= \sup \{a \in \mathbb{R};\ \lambda ([g > a]) \neq 0\} = \|g\|_\infty . \end{aligned}$$

□

Definição 3.1.29. A aplicação $f \to f \circ \varrho$ de $L^p (\mathbb{D})$ em $L^p [0, 1)$ é chamada de *isomorfismo canônico.*

Observação 3.1.30. É fácil verificar que o isomorfismo canônico é um homomorfismo de espaços vetoriais. Dada $g \in L^p [0, 1)$, tomando $f = g \circ |\cdot|$ (na verdade f pode ser definido de forma arbitrária em $\mathbb{D}_0^*$), temos que $g = f \circ \varrho$ q.t.p., donde este homomorfismo é de fato um isomorfismo.

A Proposição 3.1.26 afirma que o isomorfismo canônico é um isomorfismo entre $C (\mathbb{D})$ e C_W que leva os caracteres do grupo diádico nas funções de Walsh, enquanto a Proposição 3.1.28 mostra que o isomorfismo canônico é uma isometria entre $L^p (\mathbb{D})$ e $L^p [0, 1)$. Isto nos mostra que o estudo das Séries de Walsh nos dois espaços é equivalente.

3.2. Séries de Walsh-Fourier

Faremos nesta seção as definições de série de Walsh e núcleo de Dirichlet e depois vamos falar sobre a convergência das séries de Walsh. A equação (3.1) mostra que podemos obter propriedades das séries de Walsh a partir das propriedades do núcleo de Dirichlet. Esta equação será usada para demonstrar que, para $f \in L^1 [0, 1)$, a subsequência $(S_{2^n} f)_{n\in\mathbb{N}}$ (ver Definição 3.2.2) é um submartingal fechado por f, e isto nos permitirá usar o Teorema de Convergência de Martingais a esta subsequência. Em seguida, utilizando a Desigualdade da Função Quadrática, demonstraremos que os operadores S_n são uniformemente limitados, o que finalmente implicará na convergência das séries de Walsh em L^p quando $1 < p < \infty$.

Definição 3.2.1. Os *coeficientes de Walsh-Fourier* de uma função $f \in L^1[0,1)$ (ou $f \in L^1(\mathbb{D})$) são dados por

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f \cdot \omega_n \, d\lambda \qquad \left(\text{respectivamente, } \hat{f}(n) = \int_{\mathbb{D}} f \cdot \psi_n \, d\mu\right)$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Observe que os coeficientes acima estão bem definidos (são finitos) devido à Desigualdade de Hölder, pois ω_n e ψ_n são funções limitadas.

Definição 3.2.2. Nas mesmas hipóteses da definição anterior, a *série de Walsh* associada a f é definida como

$$Sf = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\,\omega_n \qquad \left(\text{ou, respectivamente, } Sf = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\,\psi_n\right).$$

As somas parciais desta série serão denotadas por $S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\,\omega_k$ $\left(\text{ou } S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\,\psi_k\right)$ para $n \in \mathbb{N}$.

3.2.1. Núcleo de Dirichlet

Apresentaremos agora algumas propriedades do núcleo de Dirichlet.

Definição 3.2.3. Definimos o *núcleo de Walsh-Dirichlet* de ordem n para $n \in \mathbb{N}$ por

$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k, \qquad \tilde{D}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k.$$

Lema 3.2.4 (de Paley)**.** *Para cada $n \in \mathbb{N}_0$,*

$$D_{2^n}(x) = 2^n \chi_{I_n(0)}, \qquad \tilde{D}_{2^n}(x) = 2^n \chi_{\tilde{I}_n(\mathbf{0})}.$$

Demonstração. Suponha que $x \in I_n(0) = I_{n,0}$. Então $0 \leq x < 2^{-n}$ donde $0 \leq x < 2^{-(j+1)}$ qualquer que seja $1 \leq j < n$; isto é, $x \in I_{j+1,0}$ $\forall 1 \leq j < n$. Daí, $r_j(x) = 1$ para cada $0 \leq j < n$ e portanto $\omega_k(x) = 1$ em $I_n(0)$ para cada $0 \leq k < 2^n$. Isso mostra que $D_{2^n}(x) = 2^n$ sempre que $x \in I_n(0)$. Assim,

$$\int_{I_n(0)} D_{2^n}^2 \, d\lambda = (2^n)^2 \lambda(I_n(0)) = (2^n)^2 2^{-n} = 2^n.$$

Por outro lado, pela ortonormalidade das funções de Walsh,

$$\begin{aligned}\int_0^1 D_{2^n}^2 \, d\lambda &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \omega_k\right)^2 d\lambda = \sum_{j=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^n-1} \int_0^1 \omega_j \omega_k \, d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_0^1 \omega_k^2 \, d\lambda = \sum_{k=0}^{2^n-1} 1 = 2^n.\end{aligned}$$

Como $D_{2^n}^2 \geq 0$ e $\int_{[0,1)\setminus I_n(0)} D_{2^n}^2 \, d\lambda = 2^n - 2^n = 0$, concluímos que $D_{2^n} = 0$ em $[0,1) \setminus I_n(0)$.

Para a segunda igualdade, observamos que, para $x \in \tilde{I}_n(\mathbf{0})$, $x_{j+1} = 0$ para cada $0 \leq j < n$, donde $\rho_j(x) = 1$. O restante da demonstração segue de forma análoga ao caso anterior. $\square$

Definição 3.2.5. Seja q o conjugado de p, $f \in L^p[0,1)$ e $g \in L^q[0,1)$ (ou $f \in L^p(\mathbb{D})$ e $g \in L^q(\mathbb{D})$) A *convolução diádica* (respectivamente, *produto de convolução)* entre as funções f e g é dada por

$$f * g(x) = \int_0^1 f(t) g(x \oplus t) \, d\lambda(t)$$

$$\left(\text{respectivamente, } f * g(x) = \int_{\mathbb{D}} f(t) g(x + t) \, d\mu(t)\right).$$

Teorema 3.2.6. *Dada $f \in L^p[0,1)$ ou $f \in L^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$, a sequência $(S_{2^n} f)_{n\in\mathbb{N}}$ é um martingal fechado por f e portanto convergente a f em q.t.p. e em L^p.*

Demonstração. Usando a linearidade da integral e de 3.1.27, vemos que, se $f \in L^p[0,1)$,

$$\begin{aligned}S_n f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^1 f(t) \omega_k(t) \, d\lambda(t)\right) \omega_k(x) \\ &= \int_0^1 f(t) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(t \oplus x)\right) d\lambda(t) = f * D_n(x). \qquad (3.1)\end{aligned}$$

Este resultado é análogo para $f \in L^p(\mathbb{D})$. Usando o Lema de Paley, segue que

$$\begin{aligned} S_{2^n} f(x) &= f * D_{2^n}(x) = 2^n \left(f * \chi_{I_n(0)}\right)(x) \\ &= \frac{1}{\lambda(I_n(x))} \int_0^1 f(t)\, \chi_{I_n(0)}(t \oplus x)\, d\lambda(t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Vamos mostrar que $t \oplus x \in I_n(0) \iff t \in I_n(x)$. Sejam $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ os coeficientes binários de t e x, respectivamente, e, para cada $y \in [0,1)$, escreva $I_n(y) = [i_y/2^n, (i_y+1)/2^n)$. Sabemos (ver demonstração de 3.1.14) que $i_y = \sum_{k=1}^n y_k 2^{n-k}$, onde $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ são os coeficientes binários de y. Então

$$\begin{aligned} t \in I_n(x) &\iff i_x = i_t \iff \sum_{k=1}^n x_k 2^{n-k} = \sum_{k=1}^n t_k 2^{n-k} \\ &\iff t_k = x_k,\ \forall 1 \le k \le n \\ &\iff t_k \oplus x_k = 0,\ \forall 1 \le k \le n \\ &\iff i_{t\oplus x} = 0 = i_0 \iff t \oplus x \in I_n(0). \end{aligned}$$

Por (3.2), temos que $S_{2^n} f(x) = \frac{1}{\lambda(I_n(x))} \int_{I_n(x)} f\, d\lambda$. Logo, pela Proposição 1.2.4, $S_{2^n} f = E[f|\mathcal{Q}_n]$ q.t.p. onde $\mathcal{Q}_n$ é a σ-álgebra gerada pela família $\{I_{n,i};\ 0 \le i < 2^n\}$. Agora, por 3.1.5 (d), a σ-álgebra gerada por $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{Q}_n$ é a σ-álgebra de Borel em $[0,1)$. O resultado segue do Teorema de Convergência de Martingais e da Proposição 3.1.28. □

Corolário 3.2.7. *As funções de Walsh $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (respectivamente, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$) formam um conjunto ortonormal completo em $L^2[0,1)$ (reciprocamente, em $L^2(\mathbb{D})$).*

Demonstração. Já foi visto que o conjunto é ortonormal. Para mostrar que é completo, seja $f \in L^2[0,1)$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $\int_0^1 f \cdot \omega_k\, d\lambda = 0$. Neste caso, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ temos que

$$\int_0^1 f \cdot S_{2^n} f\, d\lambda = \int_0^1 f \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{f}(k)\, \omega_k\, d\lambda = \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{f}(k) \int_0^1 f \cdot \omega_k\, d\lambda = 0.$$

Fazendo $n \to \infty$ na igualdade acima (já temos convergência em L^2 pelo teorema anterior) obtemos

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 f \cdot f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f \cdot S_{2^n} f\, d\mu = 0.$$

e portanto $f = 0$ q.t.p. $\square$

Lema 3.2.8. *Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ defina*

$$A_k = \left[2^k, 2^{k+1}\right) \cap \mathbb{N}_0$$

e, sendo $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ os coeficientes binários de n, defina

$$B_{n,k} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n_k = 0, \\ n \oplus A_k & \text{se } n_k = 1. \end{cases}$$

Neste caso,

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{n,k} = [0, n) \cap \mathbb{N}_0.$$

Demonstração. Mostremos que $B_n \subset \{0, \ldots, n-1\}$. Se $j \in B_n$, então temos $j \in n \oplus A_k$ para algum k tal que $n_k = 1$. Então $j = n \oplus m$ onde $2^k \le m < 2^{k+1}$. Assim, m é da forma

$$m = 2^k + \sum_{i=0}^{k-1} m_i 2^i.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} j = n \oplus m &= \sum_{i=0}^{k-1} |n_i - m_i|\, 2^i + |n_k - 1|\, 2^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} n_i 2^i \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} |n_i - m_i|\, 2^i + \sum_{i=k+1}^{\infty} n_i 2^i < 2^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} n_i 2^i \le n. \end{aligned}$$

Isso mostra que $B_n \subset \{0, \ldots, n-1\}$.

Agora, dados $m_1 \ne m_2 \in A_k$ com k tal que $n_k = 1$, então $n \oplus m_1 \ne n \oplus m_2$. Como cada A_k tem $2^{k+1} - 2^k = 2^k$ elementos, cada $B_{n,k}$ tem exatamente $n_k 2^k$ elementos. Por outro lado, os conjuntos $B_{n,k}$ (com n fixo) são disjuntos. De fato, os conjuntos $n \oplus A_k$ são disjuntos pois $n \oplus m_1 = n \oplus m_2 \implies m_1 = m_2$.

Então, $B_n = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} B_{n,k}$ tem $\sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k = n$ elementos. Como $B_n \subset \{0, \ldots, n-1\}$ e B_n tem n elementos, não há outra possibilidade senão $B_n = \{0, \ldots, n-1\}$. $\square$

Definição 3.2.9. Denotamos por τ_x a translação por x, isto é, para $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ definimos $\tau_x f(y) = f(y + x)$ e para $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ definimos $\tau_x f(y) = f(x \oplus y)$.

Teorema 3.2.10. *Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, $(n_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ os coeficientes binários de n e $k \in \mathbb{N}$.*

$$D_{2^k} = \prod_{j=0}^{k-1} (1 + r_j)\,; \tag{3.3}$$

$$D_n = \omega_n \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left(D_{2^{k+1}} - D_{2^k}\right); \tag{3.4}$$

$$D_n = \omega_n \sum_{k=0}^{\infty} n_k r_k D_{2^k}. \tag{3.5}$$

Ainda mais, se $n > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ é tal que $n < 2^m$, então

$$D_n = \frac{1}{2}\left(D_{2^m} - \omega_n\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tau_{2^{-(k+1)}}\omega_n\right) r_k D_{2^k} \;\; q.t.p. \tag{3.6}$$

O resultado é análogo em $\mathbb{D}$ para o sistema $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Demonstração. Temos $D_2 = \omega_0 + \omega_1 = 1 + r_0$ e, como $\omega_{2^k+l} = r_k\omega_l$ para $0 \leq l < 2^k$, temos

$$D_{2^{k+1}} = \sum_{l=0}^{2^k-1} \omega_l + \sum_{l=0}^{2^k-1} \omega_{2^k+l} = D_{2^k} + r_k D_{2^k} = (1 + r_k) D_{2^k}$$

e daí segue (3.3) por indução sobre k. Também segue que

$$r_k D_{2^k} = D_{2^{k+1}} - D_{2^k}. \tag{3.7}$$

Pelo Lema 3.2.8,

$$D_n = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i\in B_{n,k}} \omega_i \right) = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \sum_{i\in n\oplus A_k} \omega_i$$

e, como $\omega_{n\oplus m} = \omega_n\omega_m$,

$$\sum_{i\in n\oplus A_k} \omega_i = \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \omega_{n\oplus i} = \omega_n \left(\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} \omega_i - \sum_{i=0}^{2^k-1} \omega_i \right) = \omega_n \left(D_{2^{k+1}} - D_{2^k}\right).$$

Ou seja, a equação (3.4) é verdadeira.

Substituindo (3.7) em (3.4) segue (3.5).

Falta demonstrar (3.6). Primeiramente, observamos que

$$\begin{aligned}\tau_{2^{-(k+1)}}\omega_n(x) &= \omega_n\left(x \oplus \frac{1}{2^{k+1}}\right) = \omega_n(x)\,\omega_n\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)\\ &= r_k^{n_k}\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)\omega_n(x) = (-1)^{n_k}\,\omega_n(x) \text{ q.t.p.}\end{aligned}$$

Suponha então que $0 < n < 2^m$. Como $z = \frac{(1-(-1)^z)}{2}$ para $z = 0$ ou $z = 1$, temos, pela igualdade acima,

$$n_k\omega_n = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{n_k}\right)\omega_n = \frac{1}{2}\left(\omega_n - \tau_{2^{-(k+1)}}\omega_n\right) \text{ q.t.p.}$$

Daí, segue de (3.5) que

$$\begin{aligned}D_n &= \sum_{k=0}^{\infty} n_k\omega_n r_k D_{2^k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\omega_n - \tau_{2^{-(k+1)}}\omega_n\right) r_k D_{2^k}\\ &= \frac{1}{2}\omega_n\sum_{k=0}^{m-1} r_k D_{2^k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\tau_{2^{-(k+1)}}\omega_n\right) r_k D_{2^k} \text{ q.t.p.}\end{aligned}$$

Mas, por (3.7), $\sum_{k=0}^{m-1} r_k D_{2^k} = \sum_{k=0}^{m-1}\left(D_{2^{k+1}} - D_{2^k}\right) = D_{2^m} - D_1 = D_{2^m} - 1$. Como $\omega_n = 1$ em $I_m(0)$, temos, pelo Lema de Paley, que $\omega_n D_{2^m} = D_{2^m}$. Então, obtemos (3.6). □

3.2.2. Convergência das Séries de Walsh

Agora discutiremos a convergência das séries de Walsh em L^p. Restringiremo-nos por simplicidade ao sistema $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ no intervalo $[0, 1)$.

Os resultados desta seção foram estudados a partir do artigo original de Paley [14].

Definição 3.2.11. Para $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in L^p[0,1)$, definimos os *núcleos de Dirichlet modificados* por

$$D_n^* = \omega_n D_n$$

e as somas parciais da *série de Walsh modificada* associada a f por

$$S_n^* f(x) = f * D_n^* = \int_0^1 f(t)\, D_n^*(t \oplus x)\, dt.$$

Observação 3.2.12. Temos por 3.1.26 que

$$\begin{aligned}
S_n^* f(x) &= \int_0^1 f(t)\, D_n^*(t \oplus x)\, dt \\
&= \int_0^1 f(t)\, \omega_n(t \oplus x)\, D_n(t \oplus x)\, dt \\
&= \int_0^1 f(t)\, \omega_n(t)\, \omega_n(x)\, D_n(t \oplus x)\, dt \\
&= \omega_n(x) \int_0^1 (f \cdot \omega_n)(t)\, D_n(t \oplus x)\, dt = \omega_n(x) \cdot S_n(f \cdot \omega_n)(x),
\end{aligned}$$

isto é, $S_n^*(f) = \omega_n \cdot S_n(f \cdot \omega_n)$.

Corolário 3.2.13. *Sejam $n \in \mathbb{N}_0$ e $(n_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ seus coeficientes binários. Então*

$$D_n^* = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left(D_{2^{k+1}} - D_{2^k}\right), \tag{3.8}$$

$$D_n^* = \sum_{k=0}^{\infty} n_k r_k D_{2^k}. \tag{3.9}$$

Demonstração. Segue imediatamente das equações 3.4 e 3.5. □

Este corolário fornece uma ferramenta muito útil para escrever $S_n^* f$ em termos de somas de $S_{2^k} f$. Isto é bastante conveniente pois $(S_{2^k} f)_{k \in \mathbb{N}}$ é um martingal e, assim, podemos aplicar a Desigualdade da Função Quadrática a esta sequência. Isto é o que será feito para demonstrar a desigualdade a seguir.

Teorema 3.2.14. *Dado $1 < p < \infty$, existe uma constante $C_p > 0$ tal que, para toda $f \in L^p[0,1)$ e todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|S_n f\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

Demonstração. Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Seja g a função dada por

$$g(t) = \omega_n(t) f(t)$$

e definamos $(d_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ pondo $d_0 = S_1 g$ e

$$d_k = S_{2^k} g - S_{2^{k-1}} g.$$

$(d_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ é a sequência de diferenças do martingal $S_{2^k} g$ como na Definição 2.2.7. Como $\omega_n^2 = 1$, temos que $f = \omega_n g$. Pela Observação 3.2.12, $S_n f = S_n(\omega_n g) = \omega_n S_n^* g$. Sendo $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ os coeficientes binários de n, escolha $j \in \mathbb{N}$ tal que $n_k = 0$ para $k > j$. Pela equação (3.8),

$$\begin{aligned}
\omega_n(x) S_n f(x) = S_n^* g(x) &= \int_0^1 g(t) D_n^*(t \oplus x)\, dt \\
&= \int_0^1 g(t) \sum_{k=0}^{j} n_k \left(D_{2^{k+1}}(t \oplus x) - D_{2^k}(t \oplus x)\right) dt \\
&= \sum_{k=0}^{j} n_k \int_0^1 g(t) \left(D_{2^{k+1}}(t \oplus x) - D_{2^k}(t \oplus x)\right) dt \\
&= \sum_{k=0}^{j} n_k \left(S_{2^k} g(x) - S_{2^{k-1}} g(x)\right) = \sum_{k=0}^{j} n_k d_k(x). \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Observamos que $\left(\sum_{k=0}^{m-1} n_k d_k\right)_{m\in\mathbb{N}}$ é um martingal e que $(n_k d_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ é a respectiva sequência de diferenças. Pela Desigualdade da Função Quadrática, existe uma constante C_p tal que

$$\left\| \sum_{k=0}^{j} n_k d_k \right\|_p \leq C_p \left\| \left(\sum_{k=0}^{j} n_k d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_p \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p. \qquad (3.11)$$

Aplicando o mesmo teorema ao martingal $(S_{2^k} g)_{k\in\mathbb{N}_0}$ (que é fechado por g), obtemos

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq c_p^{-1} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} d_k \right\|_p = c_p^{-1} \|g\|_p = c_p^{-1} \|\omega_n f\|_p = c_p^{-1} \|f\|_p. \qquad (3.12)$$

Usando a cadeia de desigualdades (3.10), (3.11) e (3.12), temos

$$\|S_n f(\theta)\|_p = \|\omega_n(\theta) S_n f(\theta)\|_p \leq c_p^{-1} C_p \|f\|_p . \qquad \square$$

Teorema 3.2.15. *Para cada $1 < p < \infty$ e $f \in L^p[0,1)$, a série de Walsh $Sf = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\,\omega_n$ de f converge em L^p para f.*

Demonstração. Já foi demonstrado que $S_{2^k} f$ converge a f em L^p. Sendo assim, temos

$$\lim_{k\to\infty} \|S_{2^k} f - f\|_p = 0.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Fixemos $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|S_{2^k} f - f\|_p < \frac{\varepsilon}{C_p + 1}$$

onde C_p é a constante do Teorema 3.2.14 e $n \geq 2^k \in \mathbb{N}$. Como $S_{2^k} f(x) = \sum_{j=0}^{2^k-1} \hat{f}(j)\,\omega_j(x)$, temos que

$$\begin{aligned}
S_n(S_{2^k} f)(x) &= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \hat{f}(j)\,\omega_j(t) \right) \omega_m(t)\, dt \right) \omega_m(x) \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \hat{f}(j) \int_0^1 \omega_j(t)\,\omega_m(t)\, dt \right) \omega_m(x) \\
&= \sum_{m=0}^{2^k-1} \hat{f}(m)\,\omega_m(x) = S_{2^k} f(x)
\end{aligned}$$

pois as funções de Walsh são ortonormais. A partir disso, usando o Teorema 3.2.14, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|S_n f - f\|_p &= \|S_n f - S_n(S_{2^k} f) + S_{2^k} f - f\|_p \\
&\leq \|S_n f - S_n(S_{2^k} f)\|_p + \|S_{2^k} f - f\|_p \\
&= \|S_n(f - S_{2^k} f)\|_p + \|S_{2^k} f - f\|_p \\
&\leq (C_p + 1)\|S_{2^k} f - f\|_p \\
&< (C_p + 1)\frac{\varepsilon}{C_p + 1} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

A igualdade $S_n f - S_n(S_{2^k} f) = S_n(f - S_{2^k} f)$ usada acima segue da equação $S_n g = g * D_n$ que é linear na função g. $\square$

Observação 3.2.16. Dadas $f = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)\,\omega_k \in L^p[0,1)$, $g = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}(k)\,\omega_k \in L^q[0,1)$ com $1 < p, q < \infty$ conjugados, temos que, pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f \cdot g\, d\lambda - \int_0^1 S_m f \cdot S_n g\, d\lambda &= \int_0^1 f \cdot g\, d\lambda - \int_0^1 f \cdot S_n g\, d\lambda \\
&\quad + \int_0^1 f \cdot S_n g\, d\lambda - \int_0^1 S_m f \cdot S_n g\, d\lambda \\
&= \int_0^1 f \cdot (g - S_n g)\, d\lambda + \int_0^1 (f - S_m f)\, S_n g\, d\lambda \\
&\leq \|f\|_p \|g - S_n g\|_q + \|f - S_m f\|_p \|S_n g\|_q .
\end{aligned}$$

Fazendo $m, n \to \infty$, o lado direito tende a 0 devido ao teorema anterior (observe que a sequência $\|S_n g\|_q$ é limitada pois é convergente).

Então, pela ortonormalidade das funções de Walsh, obtemos uma forma simples de calcular a integral $\int_0^1 fg\, d\lambda$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 fg\, d\lambda &= \lim_{m,n\to\infty} \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(j)\, \hat{g}(k)\, \omega_j \omega_k \right) d\lambda \\
&= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(j)\, \hat{g}(k) \left(\int_0^1 \omega_j \omega_k\, d\lambda \right) \\
&= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=0}^{m\wedge n} \hat{f}(k)\, \hat{g}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)\, \hat{g}(k) .
\end{aligned}$$

O caso $f = g$, isto é,

$$\int_0^1 f^2\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)^2 ,$$

é conhecido como *Fórmula de Plancherel*.

Capítulo 4.

Multiplicadores para Séries de Walsh

Consideremos o seguinte problema. Seja $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência de números indexada pelos inteiros não-negativos. Queremos definir um operador linear $T\alpha : L^p[0,1) \to L^p[0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$, pondo, para cada função $f \in L^p[0,1)$ (ver Capítulo 3),

$$T\alpha(f) = T\alpha\left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\,\omega_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \hat{f}(n)\,\omega_n.$$

Este operador é denominado *operador multiplicador* ou simplesmente *multiplicador*. Deparamo-nos com os seguintes problemas: a existência de tal operador, se realmente seu contradomínio é $L^p[0,1)$ e se ele é contínuo. O Teorema de Multiplicadores que encontra-se na Seção 4.3 nos ajudará com esses problemas.

As notações utilzadas neste capítulo encontram-se no Capítulo 3.

4.1. Decomposição de Calderón-Zygmund

O Lema de Decomposição de Calderón-Zygmund é fundamental em Análise de Fourier e Análise Harmônica. Nesta seção, apresentaremos o lema de Calderón-Zygmund associado aos intervalos diádicos $I_{n,i}$ (ver Definição 3.1.2). Os resultados apresentados aqui foram adaptados de [18, 19], onde se encontra uma decomposição do tipo Calderón-Zygmund para séries de Walsh generalizadas.

Lema 4.1.1. *Sejam $z > 0$ e $f \in L^1[0,1)$ com $\|f\|_1 \leq z$, $f \geq 0$. Nessas condições, existem duas sequências de famílias de intervalos diádicos $(\mathcal{B}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ e $(\mathcal{C}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ que sa-*

tisfazem as seguintes propriedades:

$$\lambda(I) = 2^{-k}, \quad \forall I \in \mathcal{B}_k \cup \mathcal{C}_k; \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{\lambda(I)} \int_I f\, d\lambda \leq z, \quad \forall I \in \mathcal{B}_k; \tag{4.2}$$

$$z < \frac{1}{\lambda(I)} \int_I f\, d\lambda \leq 2z, \quad \forall I \in \mathcal{C}_k. \tag{4.3}$$

Se I é intervalo diádico de comprimento 2^{-k}, então

$$I \in \mathcal{B}_k \text{ ou existem } 1 \leq j \leq k \text{ e } J \in \mathcal{C}_j \text{ tais que } I \subset J. \tag{4.4}$$

Além disso, a família $\mathcal{C} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k$ é formada por intervalos disjuntos e, sendo $U = \bigsqcup_{I \in \mathcal{C}} I$, temos

$$f \leq z \text{ q.t.p. em } U^c. \tag{4.5}$$

Demonstração. Procederemos por indução sobre k. Tomamos $\mathcal{B}_0 = \{[0,1)\}$ e $\mathcal{C}_0 = \emptyset$. A propriedade (4.1) é clara, (4.2) segue da hipótese $\|f\|_1 \leq z$ e (4.3) é verdadeira por vacuidade. Como $[0,1) \in \mathcal{B}_0$ é o único intervalo diádico de comprimento $2^{-0} = 1$, (4.4) também é verdadeira.

Suponhamos, agora, que já existem famílias $\mathcal{B}_j$ e $\mathcal{C}_j$, $1 \leq j \leq k$, de intervalos diádicos satisfazendo as propriedades (4.1) - (4.4) e tais que $\bigcup_{j=0}^{k} \mathcal{C}_j$ é formada por intervalos disjuntos. Vamos construir $\mathcal{C}_{k+1}$, $\mathcal{B}_{k+1}$ de forma a preservar estas propriedades. Tome $I = I_{k,i} = \left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right) \in \mathcal{B}_k$ e considere as duas metades de I que são $I_0 = I_{k+1,2i}$ e $I_1 = I_{k+1,2i+1}$.

Se $\frac{1}{\lambda(I_0)} \int_{I_0} f\, d\lambda > z$ então colocamos I_0 em $\mathcal{C}_{k+1}$. Observe que neste caso devemos ter $\frac{1}{\lambda(I_0)} \int_{I_0} f\, d\lambda \leq 2z$ pois, caso contrário, como $f \geq 0$,

$$\frac{1}{\lambda(I)} \int_I f\, d\lambda = \frac{1}{2\lambda(I_0)} \left(\int_{I_0} f\, d\lambda + \int_{I_1} f\, d\lambda \right) \geq \frac{1}{2\lambda(I_0)} \int_{I_0} f\, d\lambda > \frac{2z}{2} = z,$$

o que contradiz o fato de I pertencer a $\mathcal{B}_k$ e satisfazer (4.2). Portanto, I_0 satisfaz a propriedade (4.3). Como $I \in \mathcal{B}_k$, segue por (4.4) que $I \cap J = \emptyset$, $\forall J \in \mathcal{C}_j$, $1 \leq j \leq k$ e assim $I_0 \cap J = \emptyset$, $\forall J \in \mathcal{C}_j$, $1 \leq j \leq k$. Isto mostra que $\bigcup_{j=0}^{k+1} \mathcal{C}_j$ é uma família disjunta. Se, ao contrário, $\frac{1}{\lambda(I_0)} \int_{I_0} f\, d\lambda \leq z$, colocamos I_0 em $\mathcal{B}_{k+1}$, já que I_o satisfaz (4.2).

Fazemos o mesmo para I_1. Observe que $\lambda(I_0) = \lambda(I_1) = 2^{-(k+1)}$, então (4.1) é preservada. Repetimos este procedimento para cada $I \in \mathcal{B}_k$.

Para completar a indução falta apenas demonstrar (4.4). Seja I um intervalo diádico de comprimento $2^{-(k+1)}$ e seja K o único intervalo diádico de comprimento 2^{-k} com $I \subset K$. Pela hipótese de indução, ou $K \in \mathcal{B}_k$ ou existem $1 \leq j \leq k$ e $J \in \mathcal{C}_j$ tais que $K \subset J$. Se existir tal J, então $I \subset K \subset J$ donde I satisfaz (4.4). Se, por outro lado, $K \in \mathcal{B}_k$, então, por construção, $I \in \mathcal{B}_{k+1}$ ou $I \in \mathcal{C}_{k+1}$, donde, em qualquer caso, I satisfará (4.4) (no segundo caso basta tomar $J = I$ e temos que $I \subset J \in \mathcal{C}_{k+1}$).

Agora, concluída a definição por indução, vamos demonstrar (4.5). Seja $A \subset U^c$ um conjunto λ-mensurável. Nosso objetivo é provar que

$$\int_A f\,d\lambda \leq z\lambda(A) = \int_A z\,d\lambda. \tag{4.6}$$

Supondo esta equação verdadeira e tomando $A_k = \left[f > z + \frac{1}{k}\right] \cap U^c$, temos

$$\frac{1}{k}\lambda(A_k) = \int_{A_k} \frac{1}{k}\,d\lambda \leq \int_{A_k} (f - z)\,d\lambda \leq 0$$

(pois $f(x) - z > \frac{1}{k}$ para $x \in A_k = \left[f > z + \frac{1}{k}\right] \cap U^c$). Ou seja, A_k tem medida nula; então $[f > z] \cap U^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ também tem medida nula, e isso conclui a demonstração.

Vamos demonstrar (4.6). Suponha inicialmente que $A \subset U^c$ seja um conjunto mensurável qualquer. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Então existe V aberto em $[0,1)$ para a topologia usual ou diádica tal que $A \subset V$ e $\lambda(V) < \lambda(A) + \varepsilon$. Por 3.1.5 (c), podemos escrever $V = \bigsqcup_{I \in \mathcal{A}} I$ para alguma família $\mathcal{A}$ enumerável e disjunta de intervalos diádicos.

Podemos supor que $I \cap A \neq \emptyset$ para cada $I \in \mathcal{A}$ (se não for assim, definindo $\mathcal{A}' = \{I \in \mathcal{A};\ I \cap A \neq \emptyset\}$ e $V' = \bigsqcup_{I \in \mathcal{A}'} I$, ainda temos $V' \supset A$ e $\lambda(V') \leq \lambda(V) < \lambda(A) + \varepsilon$). Seja $I \in \mathcal{A}$ e seja $2^{-k} = \lambda(I)$. Temos então que $I \cap U^c \supset I \cap A \neq \emptyset$; em particular, $I \not\subset J$ para qualquer $J \in \mathcal{C}_j$ com $1 \leq j \leq k$, pois, caso contrário, teríamos $I \subset U$. Por (4.4), concluímos que $I \in \mathcal{B}_k$. Logo, por $f \geq 0$ e por (4.2),

$$\int_A f\,d\lambda \leq \sum_{I \in \mathcal{A}} \int_{I \cap U^c} f\,d\lambda \leq \sum_{I \in \mathcal{A}} \int_I f\,d\lambda \leq \sum_{I \in \mathcal{A}} z\lambda(I) = z\lambda(V) < z(\lambda(A) + \varepsilon).$$

Como ε é arbitrário, devemos ter $\int_A f\,d\lambda \leq z\lambda(A)$. Isso estabelece (4.6). $\square$

Lema 4.1.2 (de Decomposição de Calderón-Zygmund)**.** *Sejam* $z > 0$ *e* $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1_{l_2}[0,1)$ *(ver Definição 1.4.4) com* $\|f\|_{1,l_2} \leq z$. *Então existem* $g, b \in L^1_{l_2}[0,1)$ *onde* $f = g + b$ *e uma coleção* $\mathcal{C}$ *de intervalos diádicos disjuntos que, denotando* $U = \bigsqcup_{I \in \mathcal{C}} I$, *satisfazem as seguintes propriedades:*

$$\|g(x)\|_{l_2} \leq 2z \ \textit{q.t.p. em} \ [0,1); \tag{4.7}$$

$$\|g\|_{1,l_2} \leq \|f\|_{1,l_2}; \tag{4.8}$$

$$b(x) = 0, \quad \forall x \in U^c; \tag{4.9}$$

$$\int_I b \, d\lambda = 0, \quad \forall I \in \mathcal{C}; \tag{4.10}$$

$$z < \frac{1}{\lambda(I)} \int_I \|f\|_{l_2} \, d\lambda \leq 2z, \quad \forall I \in \mathcal{C}; \tag{4.11}$$

$$\|f\|_{l_2} \leq z \ \textit{q.t.p. em} \ U^c. \tag{4.12}$$

Demonstração. Aplicando o Lema 4.1.1 à função $\|f\|_{l_2}$, obtemos a coleção $\mathcal{C} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k$ e as propriedades (4.11) e (4.12). Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$g_n = f_n \chi_{U^c} + \sum_{I \in \mathcal{C}} \left(\frac{1}{\lambda(I)} \int_I f_n \, d\lambda \right) \chi_I$$

e $b_n = f_n - g_n$ e sejam $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $g = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Neste caso, para cada $I \in \mathcal{C}$, $\int_I g_n \, d\lambda = \left(\frac{1}{\lambda(I)} \int_I f_n \, d\lambda \right) \lambda(I) = \int_I f_n \, d\lambda$, e $g_n|_{U^c} = f_n|_{U^c}$, donde seguem (4.9), (4.10) e que, para $x \in I \in \mathcal{C}$, $|g_n(x)| = \frac{1}{\lambda(I)} \left| \int_I f_n \, d\lambda \right| \leq \frac{1}{\lambda(I)} \int_I |f_n| \, d\lambda$. Portanto, pela Desigualdade de Minkowski para Integrais (aplicada ao espaço $l_2 = L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \kappa)$ onde κ é a medida da contagem em $\mathbb{N}$), se $x \in I \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \|g(x)\|_{l_2} = \left\| \frac{1}{\lambda(I)} \int_I f \, d\lambda \right\|_{l_2} &= \frac{1}{\lambda(I)} \left(\int_{\mathbb{N}} \left(\int_I f_n(x) \, d\lambda(x) \right)^2 d\kappa(n) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\lambda(I)} \int_I \left(\int_{\mathbb{N}} f_n(x)^2 \, d\kappa(n) \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{\lambda(I)} \int_I \|f\|_{l_2} \, d\lambda \leq 2z. \end{aligned} \tag{4.13}$$

A última desigualdade segue de (4.11). Por outro lado, para $x \in U^c$, de (4.12) concluímos que $\|g(x)\|_{l_2} = \|f(x)\|_{l_2} \leq z$ e portanto, juntamente com a desigualdade acima, demonstramos (4.7).

Agora, usando a definição de g_n e (4.13), obtemos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|g\|_{l_2}\, d\lambda &= \int_{U^c} \|g\|_{l_2}\, d\lambda + \sum_{I\in\mathcal{C}} \int_I \|g\|_{l_2}\, d\lambda \\ &\leq \int_{U^c} \|f\|_{l_2}\, d\lambda + \sum_{I\in\mathcal{C}} \int_I \|f\|_{l_2}\, d\lambda = \int_0^1 \|f\|_{l_2}\, d\lambda,\end{aligned}$$

e, assim, demonstramos (4.8). □

4.2. Limitação do Operador $\mathcal{S}f = (S_n f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Definiremos um operador $\mathcal{S}$ sobre as funções de $L^p_{l_2}$ e nosso objetivo então será mostrar que este operador tem norma finita em $L^p_{l_2}$ para $1 < p < \infty$ (em particular, que $\mathcal{S}$ leva funções de $L^p_{l_2}$ em $L^p_{l_2}$). Isto será usado para demonstrar o teorema de multiplicadores do tipo Marcinkiewicz da próxima seção.

As referências para os resultados desta seção são [18, 19].

Definição 4.2.1. Seja $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1_{l_2}[0,1)$. Definimos os operadores $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^*$ pondo

$$\mathcal{S}f = (S_n f_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad \mathcal{S}^* f = (S_n^* f_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

(ver Definições 3.2.2 e 3.2.11).

Lema 4.2.2. *O operador $\mathcal{S}$ é do tipo fraco* $(1,1)$.

Demonstração. Devemos mostrar que existe $C > 0$ tal que, para toda $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1_{l_2}[0,1)$,

$$[\mathcal{S}f]_{1,l_2} \leq C\,\|f\|_{1,l_2}\,.$$

Considere $f^* = (\omega_n f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pela Observação 3.2.12, $\mathcal{S}^* f^* = (S_n^*(\omega_n f_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\omega_n S_n(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ donde $[\mathcal{S}^* f^*]_{1,l_2} = [\mathcal{S}f]_{1,l_2}$. Também é claro que $\|f^*\|_{1,l_2} = \|f\|_{1,l_2}$; portanto, basta mostrar que

$$[\mathcal{S}^* f^*]_{1,l_2} = \sup_{z>0} \left(z\lambda\left[\|\mathcal{S}^* f^*\|_{l_2} > z \right] \right) \leq C\,\|f^*\|_{1,l_2}\,.$$

Para tanto, vamos mostrar que

$$z\lambda\left[\|\mathcal{S}^* f^*\|_{l_2} > z\right] \leq C\,\|f^*\|_{1,l_2}\,,$$

donde seguirá o resultado tomando o supremo em $z > 0$ do lado esquerdo.

Fixemos $z > 0$. Se $\|f^*\|_{1,l_2} > z$, então, como $\lambda\left[\|\mathcal{S}^* f^*\|_{l_2} > z\right] \leq \lambda\,[0,1) = 1$, segue que

$$z\lambda\left[\|\mathcal{S}^* f^*\|_{l_2} > z\right] \leq z < \|f^*\|_{1,l_2}\,,$$

e não nos resta nada a demonstrar.

Supondo então que $\|f^*\|_{1,l_2} \leq z$, decomponha $f^* = g + b$ como no Lema 4.1.2. Pela Desigualdade de Minkowski em l_2 e pela linearidade de $\mathcal{S}^*$, $\|\mathcal{S}^* f^*\|_{l_2} \leq \|\mathcal{S}^* g\|_{l_2} + \|\mathcal{S}^* b\|_{l_2}$. Pela desigualdade que se encontra na Observação 1.4.13 (para $p = 1$),

$$z\lambda\left[\|\mathcal{S}^* f^*\|_{l_2} > z\right] \leq 2\left(\frac{z}{2}\right)\lambda\left[\|\mathcal{S}^* g\|_{l_2} > \frac{z}{2}\right] + 2\left(\frac{z}{2}\right)\lambda\left[\|\mathcal{S}^* b\|_{l_2} > \frac{z}{2}\right]. \tag{4.14}$$

Então basta limitar os dois termos do lado direito por $\|f^*\|_{1,l_2}$.

Primeiro o termo da esquerda. Seja $g_n^* = \omega_n g_n$. Escrevamos $g_n^* = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{g_n^*}(k)\,\omega_k$ e $g_n = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{g_n}(k)\,\omega_k$. Pela Observação 1.4.14 e pela Fórmula de Plancherel,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z}{2}\right)^2 \lambda\left[\|\mathcal{S}^* g\|_{l_2} > \frac{z}{2}\right] &\leq [\mathcal{S}^* g]_{2,l_2}^2 \leq \|\mathcal{S}^* g\|_{2,l_2}^2 = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(S_n^* g_n\right)^2\,d\lambda \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(S_n g_n^*\right)^2\,d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \widehat{g_n^*}(k)\,\omega_k\right)^2 d\lambda \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\widehat{g_n^*}(k)\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\widehat{g_n^*}(k)\right)^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{g_n^*}(k)\,\omega_k\right)^2 d\lambda = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n^*\right)^2\,d\lambda \\
&= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2\,d\lambda = \int_0^1 \|g\|_{l_2}\,\|g\|_{l_2}\,d\lambda.
\end{aligned}$$

Daí e das desigualdades (4.7) e (4.8) (Lema 4.1.2),

$$\begin{aligned}\left(\frac{z}{2}\right)^2 \lambda\left[\|\mathcal{S}^* g\|_{l_2} > \frac{z}{2}\right] &\leq \int_0^1 \|g\|_{l_2} \|g\|_{l_2}\, d\lambda \leq 2z \int_0^1 \|g\|_{l_2}\, d\lambda \\ &= 2z \|g\|_{1,l_2} \leq 2z \|f\|_{1,l_2},\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{z}{2}\lambda\left[\|\mathcal{S}^* g\|_{l_2} > \frac{z}{2}\right] \leq 4 \|f\|_{1,l_2}. \tag{4.15}$$

Agora, limitemos o termo da direita em (4.14). Sejam U e $\mathcal{C}$ como no Lema 4.1.2. Como $U = \bigsqcup_{I\in\mathcal{C}} I$, pela desigualdade (4.11),

$$z\lambda(U) = \sum_{I\in\mathcal{C}} z\lambda(I) \leq \sum_{I\in\mathcal{C}} \int_I \|f\|_{l_2}\, d\lambda = \int_U \|f\|_{l_2}\, d\lambda \leq \|f\|_{1,l_2}.$$

Supondo que $\left[\|\mathcal{S}^* b\|_{l_2} > \frac{z}{2}\right] \subset U$, temos que

$$\frac{z}{2}\lambda\left[\|\mathcal{S}^* b\|_{l_2} > \frac{z}{2}\right] \leq \frac{z\lambda(U)}{2} \leq \frac{1}{2}\|f\|_{1,l_2}. \tag{4.16}$$

Vamos demonstrar que $\left[\|\mathcal{S}^* b\|_{l_2} > \frac{z}{2}\right] \subset U$ para obter a desigualdade acima. Para isto, mostraremos que, dados $x \in U^c$ e $n \in \mathbb{N}$, $S_n^* b_n(x) = 0$. Neste caso, como $z > 0$ por escolha, $x \in U^c \implies x \notin \left[\|\mathcal{S}^* b\|_{l_2} > \frac{z}{2}\right]$, donde segue que $\left[\|\mathcal{S}^* b\|_{l_2} > \frac{z}{2}\right] \subset U$.

Pela equação (3.9), pelo Lema de Paley e como $t \oplus x \in I_n(0)$ se e somente se $t \in I_n(x)$ (ver demonstração do Teorema 3.2.6),

$$\begin{aligned}S_n^* b_n(x) &= \int_0^1 b_n(t)\, D_n^*(t\oplus x)\, d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 b_n(t)\left(\sum_{k=0}^{\infty} n_k r_k(t\oplus x)\, D_{2^k}(t\oplus x)\right) d\lambda(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} n_k r_k(x) \int_0^1 b_n(t)\, r_k(t)\, 2^k \chi_{I_k(x)}(t)\, d\lambda(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k n_k r_k(x) \int_{I_k(x)} b_n(t)\, r_k(t)\, d\lambda(t).\end{aligned} \tag{4.17}$$

Fixemos $k \in \mathbb{N}$. Seja $I \in \mathcal{C}$ tal que $I \cap I_k(x) \neq \emptyset$. Como I e $I_k(x)$ são intervalos diádicos, ou $I \subset I_k(x)$ ou $I_k(x) \subset I$ (ver Definição 3.1.2). Mas, se $I_k(x) \subset I$, temos

$x \in I_k(x) \subset I \subset U$, o que não pode ser pela escolha de x. Logo, $I \cap I_k(x) \neq \emptyset \implies I \subsetneq I_k(x)$. Portanto,

$$I_k(x) = (I_k(x) \cap U^c) \cup \bigcup_{I \in \mathcal{C};\, I \cap I_k(x) \neq \emptyset} (I \cap I_k(x)) = (I_k(x) \cap U^c) \cup \bigcup_{I \in \mathcal{C};\, I \subsetneq I_k(x)} I$$

e estas uniões são disjuntas. Para $I \subsetneq I_k(x)$, o comprimento de I é no máximo $2^{-(k+1)}$. Pela Definição 3.1.3 (das funções de Rademacher), segue que r_k é constante em I. Denotando o valor de r_k em I por $r_k(I)$ e observando as equações (4.9) e (4.10) do Lema 4.1.2,

$$\begin{aligned}\int_{I_k(x)} b_n(t)\, r_k(t)\, d\lambda(t) &= \int_{I_n(x) \cap U^c} b_n(t)\, r_k(t)\, d\lambda(t) \\ &\quad + \sum_{I \in \mathcal{C};\, I \subsetneq I_k(x)} \int_I b_n(t)\, r_k(t)\, d\lambda(t) \\ &= \sum_{I \in \mathcal{C};\, I \subsetneq I_k(x)} r_k(I) \int_I b_n(t)\, d\lambda(t) = 0.\end{aligned}$$

Substituindo em (4.17), temos $S_n^* b_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e assim $S^* b = 0$.

O resultado desejado segue com $C = 9$ substituindo as desigualdades (4.15) e (4.16) em (4.14). $\square$

Teorema 4.2.3. *Para cada $1 < p < \infty$, $\mathcal{S}$ é do tipo forte (p, p).*

Demonstração. Seja $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p_{l_2}[0, 1)$. Primeiramente, o caso $p = 2$. Cada f_n pertence a $L^2[0, 1)$, logo $f_n = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f_n}(k)\, \omega_k$. Pela Fórmula de Plancherel (Observação 3.2.16),

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}f\|_{2,l_2}^2 &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (S_n f_n)^2\, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f_n}(k)^2 \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f_n}(k)^2 = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2\, d\lambda = \|f\|_{2,l_2}^2,\end{aligned}$$

donde segue o caso $p = 2$.

Como a norma L^p fraca não ultrapassa a norma L^p (ver Observação 1.4.14), $\mathcal{S}$ é do tipo fraco $(2, 2)$. Pelo Lema 4.2.2, $\mathcal{S}$ também é do tipo fraco $(1, 1)$. Então podemos aplicar o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz e concluir que $\mathcal{S}$ é do tipo forte (p,p) qualquer que seja $1 < p < 2$.

Para o caso final $2 < p < \infty$, vamos usar um argumento de dualidade. Sejam q o conjugado de p e $g \in L^q_{l_2}[0,1)$ tal que $\|g\|_{q,l_2} = 1$. Como $2 < p < \infty$, temos que $1 < q < 2$ donde $\mathcal{S}$ é do tipo fraco (q,q). Logo existe $C_q > 0$ tal que

$$\|\mathcal{S}g\|_{q,l_2} \leq C_q \|g\|_{q,l_2} = C_q. \tag{4.18}$$

Escrevamos $g_n = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{g_n}(k)\,\omega_k$. Pela Observação 3.2.16,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \langle \mathcal{S}f, g\rangle_{l_2}\, d\lambda &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (S_n f_n)\, g_n\right) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f_n}(k)\,\widehat{g_n}(k)\\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(S_n g_n)\right) d\lambda = \int_0^1 \langle f, \mathcal{S}g\rangle_{l_2}\, d\lambda.\end{aligned}$$

Daí, pela Desigualdade de Hölder (Teorema 1.4.10) e por (4.18),

$$\left|\int_0^1 \langle \mathcal{S}f, g\rangle_{l_2}\, d\lambda\right| = \left|\int_0^1 \langle f, \mathcal{S}g\rangle_{l_2}\, d\lambda\right| \leq \|f\|_{p,l_2}\,\|\mathcal{S}g\|_{q,l_2} \leq C_q \|f\|_{p,l_2}.$$

Finalmente, pelo Teorema 1.4.11 (l_2 é espaço de Hilbert),

$$\|\mathcal{S}f\|_{p,l_2} = \sup\left\{\left|\int_0^1 \langle \mathcal{S}f, g\rangle_{l_2}\, d\lambda\right|;\ g \in L^q_{l_2}[0,1)\,,\ \|g\|_{q,l_2} = 1\right\} \leq C_q \|f\|_{p,l_2}. \qquad \square$$

Observação 4.2.4. Vamos calcular as constantes A_p que podem ser obtidas para o teorema anterior. Seguindo a demonstração deste teorema, a do Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz e usando a constante $C = 9$ obtida no Lema 4.2.2, obtemos que $\|\mathcal{S}f\|_{p,l_2} \leq A_p \|f\|_{p,l_2}$ onde

$$A_p = \begin{cases} \left(\frac{4p}{2-p} + \frac{18p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1 < p < 2,\\ 1 & \text{se } p = 2,\\ A_{\frac{p}{p-1}} & \text{se } 2 < p < \infty.\end{cases}$$

O problema é que A_p não é limitada para $p \to 2$. Isto é facilmente remediável, uma vez que já temos este resultado. Como $\mathcal{S}$ é do tipo forte (p,p), $\mathcal{S}$ também é do tipo fraco (p,p). Podemos escolher um $r>2$ (por exemplo, $r=3$) e usar o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz (com $s=1$ e $r=3$) e obter que $\|\mathcal{S}f\|_{p,l_2} \le B_p \|f\|_{p,l_2}$ onde

$$B_p = \begin{cases} \left(\frac{8pA_3^3}{3-p} + \frac{18p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1<p<\frac{5}{2} \\ A_p & \text{se } \frac{5}{2} \le p < \infty. \end{cases}$$

Pode ser possível obter melhores constantes escolhendo-se r e s mais adequadamente (na tentativa de minimizar $\frac{2^r p A_r^r}{r-p}$ e $\frac{2^s p A_s^s}{p-s}$) ou utilizando outras versões da demonstração do Teorema de Interpolação ou até mesmo do Teorema de Riesz–Thorin.

4.3. Teorema de Multiplicadores

Nesta seção, apresentaremos o Teorema 4.3.3, que irá responder as questões apresentadas no início do capítulo. Mais especificamente, se a sequência $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dada satisfaz a condição de Marcinkiewicz, dada por (4.19), então $T\alpha$ é um operador linear bem definido e limitado (e portanto contínuo) de L^p em L^p.

O teorema de multiplicadores do tipo Marcinkiewicz foi demonstrado por W.-S. Young em [17] para séries de Vilenkin-Fourier. A demonstração é baseada no Teorema de Multiplicadores de Marcinkiewicz para séries de Fourier, que encontra-se em [5].

Notação 4.3.1. Para $f \in L^1[0,1)$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ com $n_1 < n_2$ e $k \in \mathbb{N}_0$, denotamos

$$S_{n_1,n_2} f = \sum_{k=n_1}^{n_2-1} \hat{f}(k)\,\omega_k = S_{n_2} f - S_{n_1} f,$$

$$d_k f = \begin{cases} \hat{f}(0)\,\omega_0 & \text{se } k=0, \\ S_{2^{k-1},2^k} & \text{se } k \ge 1. \end{cases}$$

Observe que $d_k f$ é a sequência de diferenças do martingal $(S_{2^k} f)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Denotamos por df a sequência $(d_k f)_{k\in\mathbb{N}_0}$ e $Df = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (d_k f)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|df\|_{l_2}$ a função quadrática associada a este martingal.

Notação 4.3.2. Considere uma sequência $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Denotamos

$$\Delta_n \alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n.$$

Teorema 4.3.3. *Dado $1 < p < \infty$, para qualquer sequência $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ que satisfaça*

$$|\alpha_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}_0, \qquad \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} |\Delta_n \alpha| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}, \tag{4.19}$$

onde $M > 0$, existe um operador $T\alpha : L^p \to L^p$ do tipo forte (p,p) definido por $T\alpha(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \hat{f}(n)\, \omega_n$ para toda $f \in L^p$. Mais precisamente, existe uma constante $D_p > 0$ independente de α tal que, para qualquer $f \in L^p$,

$$\|T\alpha(f)\|_p \leq M D_p \|f\|_p .$$

Demonstração. Como $L^2 \cap L^p$ é denso em L^p, basta mostrar a desigualdade para $f \in L^2 \cap L^p$. Seja então $f \in L^2 \cap L^p$. Temos que $T\alpha f \in L^2$ pois

$$\|T\alpha(f)\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 \left(\hat{f}(n)\right)^2 \leq M^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\hat{f}(n)\right)^2 = M^2 \|f\|_2^2 .$$

Pela Desigualdade da Função Quadrática aplicada aos martingais $(S_{2^k}(T\alpha f))_{k\in\mathbb{N}_0}$ e $(S_{2^k}(f))_{k\in\mathbb{N}_0}$, existem constantes C_p e c_p que satisfazem

$$\|T\alpha(f)\|_p \leq C_p \|D(T\alpha(f))\|_p , \qquad \|D(f)\|_p \leq c_p^{-1} \|f\|_p .$$

Portanto, basta mostrar que existe constante B_p tal que

$$\|D(T\alpha(f))\|_p \leq M B_p \|Df\|_p . \tag{4.20}$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ (note que $k \geq 1$). Temos que

$$
\begin{aligned}
d_k\left(T\alpha\left(f\right)\right) &= \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \alpha_n \hat{f}\left(n\right)\omega_n = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \alpha_n\left(S_{2^{k-1},n+1}f - S_{2^{k-1},n}f\right) \\
&= \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \alpha_n S_{2^{k-1},n+1}f \, - \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \alpha_n S_{2^{k-1},n}f \\
&\overset{m=n-1}{=} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \alpha_n S_{2^{k-1},n+1}f \, - \sum_{m=2^{k-1}-1}^{2^k-2} \alpha_{m+1} S_{2^{k-1},m+1}f \\
&= \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \alpha_n S_{2^{k-1},n+1}f \\
&\quad - \left(\alpha_{2^{k-1}} \underbrace{S_{2^{k-1},2^{k-1}}f}_{0} + \sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1} \alpha_{m+1} S_{2^{k-1},m+1}f \, - \, \alpha_{2^k} S_{2^{k-1},2^k}f\right) \\
&= \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \left(\alpha_n - \alpha_{n+1}\right) S_{2^{k-1},n+1}f + \alpha_{2^k} d_k f \\
&= \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \sigma_n \left|\Delta_n\alpha\right| S_{2^{k-1},n+1}f + \alpha_{2^k} d_k f \\
&= \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \left(\sigma_n \left|\Delta_n\alpha\right|^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left|\Delta_n\alpha\right|^{\frac{1}{2}} S_{2^{k-1},n+1}f\right) + \alpha_{2^k} d_k f
\end{aligned}
$$

onde $\sigma_n = \begin{cases} +1 & \text{se } \Delta_n\alpha < 0, \\ -1 & \text{se } \Delta_n\alpha \geq 0. \end{cases}$

Aplicando a Desigualdade de Schwarz, temos

$$
\begin{aligned}
\left|d_k\left(T\alpha\left(f\right)\right)\right| &\leq \left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \left|\Delta_n\alpha\right|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \left|\Delta_n\alpha\right| \left(S_{2^{k-1},n+1}f\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left|\alpha_{2^k}\right| \, \left|d_k f\right|, \\
&\leq M^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \left|\Delta_n\alpha\right| \left(S_{2^{k-1},n+1}f\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + M \, \left|d_k f\right|.
\end{aligned}
$$

Também temos

$$\left|d_0\left(T\alpha\left(f\right)\right)\right| = \left|a_0\hat{f}\left(0\right)\omega_0\right| \leq M\left|\hat{f}\left(0\right)\omega_0\right| = M\left|d_0 f\right|.$$

Usando as duas desigualdades acima e a Desigualdade de Minkowski em $L^p_{l_2}$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\left\|D\left(T\alpha\left(f\right)\right)\right\|_p &= \left\|\left(d_k T\alpha\left(f\right)\right)_{k\in\mathbb{N}_0}\right\|_{p,l_2} \\
&\leq M^{\frac{1}{2}}\left\|\left(\left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\left|\Delta_n\alpha\right|\left(S_{2^{k-1},n+1}f\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{p,l_2} + M\left\|df\right\|_{p,l_2} \\
&= M^{\frac{1}{2}}\left\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\left|\Delta_n\alpha\right|\left(S_{2^{k-1},n+1}f\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p + M\left\|Df\right\|_p.
\end{aligned}$$

Então

$$\left\|D\left(T\alpha\left(f\right)\right)\right\|_p \leq M^{\frac{1}{2}}\left\|I\right\|_p + M\left\|Df\right\|_p \tag{4.21}$$

onde

$$I = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\left|\Delta_n\alpha\right|\left(S_{2^{k-1},n+1}f\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$, seja $k_n\in\mathbb{N}$ tal que $2^{k_n-1}\leq n<2^{k_n}$. Definamos $g_{n+1} = \left|\Delta_n\alpha\right|^{\frac{1}{2}} d_{k_n}f$ e também $g_1 = 0$. Então

$$S_{n+1}\left(g_{n+1}\right) = \left|\Delta_n\alpha\right|^{\frac{1}{2}} S_{n+1}\left(d_{k_n}f\right) = \left|\Delta_n\alpha\right|^{\frac{1}{2}}\sum_{j=2^{k_n-1}}^{n+1}\hat{f}\left(j\right)\omega_j = \left|\Delta_n\alpha\right|^{\frac{1}{2}} S_{2^{k_n-1},n+1}f.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\left|\Delta_n\alpha\right|\left(S_{2^{k-1},n+1}f\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta_n\alpha\right|\left(S_{2^{k_n-1},n+1}f\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(S_{n+1}\left(g_{n+1}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(S_n g_n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|\mathcal{S}g\right\|_{l_2}.
\end{aligned}$$

onde $g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pelo Teorema 4.2.3, existe $A_p > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|I\|_p = \|\mathcal{S}g\|_{p,l_2} \leq A_p \|g\|_{p,l_2} &= A_p \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n \alpha| \left(d_{k_n} f\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
&= A_p \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} |\Delta_n \alpha| \right) \left(d_k f\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
&\leq M^{\frac{1}{2}} A_p \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(d_k f\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p = M^{\frac{1}{2}} A_p \|Df\|_p ,
\end{aligned}$$

donde, substituindo em (4.21), obtemos

$$\|D(T\alpha(f))\|_p \leq (MA_p + M) \|Df\|_p$$

e assim (4.20) fica demonstrado com $B_p = A_p + 1$. $\square$

Capítulo 5.

Entropia de Multiplicadores

Desde a introdução do conceito de entropia por Kolmogorov em 1930, foram feitos vários estudos para obter estimativas sobre as entropias de conjuntos e funções. Este termo está relacionado com quantidade de informação. Aqui vamos estudar as entropias associadas aos operadores multiplicadores cuja existência é garantida pelo Teorema de Multiplicadores na Seção 4.3.

5.1. Entropia

Introduziremos nesta seção as definições de ε-entropia e número de entropia, entre outras, incluindo vários resultados que as relacionam entre si. Uma referência para os resultados desta seção é [13]. Algumas das demonstrações serão omitidas, elas encontram-se nesta referência.

5.1.1. ε-Entropia

Nesta subseção, consideraremos um espaço de Banach X com a norma denotada por $\|\cdot\|$, $A \subset X$ e ε denotará um número positivo.

Notação 5.1.1. Dado $x > 0$, denotamos, por simplicidade, $\log x = \log_2 x$ (isto é, o logaritmo de x na base 2).

Definição 5.1.2. Seja $P = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) P é dito ser uma *ε-rede* de A (em X) se, para cada $y \in A$ existir $1 \leq i \leq n$ tal que $\|y - x_i\| \leq \varepsilon$ (equivalentemente, se $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B[x_i, \varepsilon]$).

(b) Os pontos de P são denominados *ε-separados* e P é dito um conjunto ε-separado se, para $1 \leq i < j \leq n$, $\|x_i - x_j\| > \varepsilon$.

Observação 5.1.3. Algumas observações que seguem diretamente da definição:

(a) Uma ε-rede de A não é necessariamente formada por pontos de A.

(b) Quando A é compacto, sempre existe uma ε-rede de A para qualquer valor de ε.

(c) Uma ε-rede também é uma δ-rede para qualquer $\delta \geq \varepsilon$.

(d) Um conjunto ε-separado também é δ-separado para qualquer $0 < \delta \leq \varepsilon$.

Definição 5.1.4. Denotamos por $N_\varepsilon(A, X) = N_\varepsilon(A)$ o menor valor para $n \in \mathbb{N}$ tal que existe uma ε-rede de A contendo n pontos. A *ε-entropia de A* é definida por

$$\mathcal{H}_\varepsilon(A, X) = \mathcal{H}_\varepsilon(A) = \log N_\varepsilon(A).$$

Definição 5.1.5. Denotamos por $M_\varepsilon(A, X) = M_\varepsilon(A)$ o maior valor para $m \in \mathbb{N}$ tal que existem m pontos ε-separados pertencentes a A. A *ε-capacidade de A* é definida por

$$\mathcal{C}_\varepsilon(A, X) = \mathcal{C}_\varepsilon(A) = \log M_\varepsilon(A).$$

Definição 5.1.6. Uma ε-rede de A com $N_\varepsilon(A)$ elementos é dita ser uma *ε-rede minimal*. Um conjunto formado por $M_\varepsilon(A)$ pontos de A ε-separados é dito um *conjunto ε-separado maximal*.

A proposição a seguir relaciona a ε-entropia com a ε-capacidade, tornando equivalente o estudo para obter estimativas de cada uma delas.

Proposição 5.1.7. *Dados $A \subset X$ compacto e $\varepsilon > 0$,*

$$M_{2\varepsilon}(A) \leq N_\varepsilon(A) \leq M_\varepsilon(A).$$

Demonstração. Para a desigualdade da direita, considere um conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ε-separado maximal em A (isto é, $n = M_\varepsilon(A)$) e $y \in A$ qualquer. Então, por definição, $\{x_1, \ldots, x_n, y\}$ não pode ser um conjunto ε-separado, donde deve existir $1 \leq i \leq n$ tal que $\|y - x_i\| \leq \varepsilon$. Assim, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma ε-rede de A, donde $N_\varepsilon(A) \leq n$.

Agora, para mostrar que $M_{2\varepsilon}(A) \leq N_\varepsilon(A)$, sejam $\{y_1, \ldots, y_m\}$ um conjunto 2ε-separado maximal e $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma ε-rede minimal. Usando a definição de ε-rede, considere a função $\varphi : \{y_1, \ldots, y_m\} \to \{x_1, \ldots, x_n\}$ que, para cada y_j, toma (arbitrariamente) um x_i tal que $y_j \in B[x_i, \varepsilon]$.

A função φ é injetora. Se não fosse assim, tomando $y_j \neq y_k$ tal que $\varphi(y_j) = \varphi(y_k) = x_i$, teríamos, pela desigualdade triangular,

$$\|y_j - y_k\| \leq \|y_j - x_i\| + \|x_i - y_k\| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

o que contradiz a hipótese de que $\{y_1, \ldots, y_m\}$ é um conjunto 2ε-separado. Como φ é injetora, $M_{2\varepsilon}(A) = m \leq n = N_\varepsilon(A)$. $\square$

Proposição 5.1.8. *Seja X um espaço vetorial tal que X é completo com respeito a duas normas, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, onde, para todo $x \in X$, $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$. Denotemos por $X_i = (X, \|\cdot\|_i)$, $i = 1, 2$. Sejam $A \subset B \subset X$ e $\varepsilon > 0$. Então*

$$\mathcal{H}_\varepsilon(A, X_1) \leq \mathcal{H}_\varepsilon(B, X_1), \qquad \mathcal{H}_\varepsilon(A, X_1) \leq \mathcal{H}_\varepsilon(A, X_2).$$

Demonstração. A primeira desigualdade é verdadeira pois qualquer ϵ-rede de B também é uma ε-rede de A. Agora, tomemos P uma ε-rede de A em X_2. Então, dado $x \in X$, existe $a \in P$ tal que $\|x - a\|_2 \leq \varepsilon$. Em particular, $\|x - a\|_1 \leq \|x - a\|_2 \leq \varepsilon$, ou seja, P também é uma ε-rede de A em X_1. Como isso é verdade para qualquer rede, temos a segunda desigualdade. $\square$

5.1.2. Números de Aproximação

Nesta subseção, considere dois espaços de Banach X e Y.

Definição 5.1.9. Denotamos por $L(X, Y)$ o espaço vetorial das funções lineares limitadas (que são contínuas) de X em Y. Dada $u \in L(X, Y)$, definimos

$$\|u\|_{L(X,Y)} = \sup\{\|u(x)\|_Y ; \|x\|_X = 1\}.$$

Notação 5.1.10. Usamos a seguinte notação para o posto de u, onde $u \in L(X, Y)$:

$$\text{posto}(u) = \dim(u(X)).$$

Definição 5.1.11. Seja $u \in L(X, Y)$. Para um $k \in \mathbb{N}$ dado, definimos o *k-ésimo número de aproximação* de u por

$$a_k(u) = \inf\{\|v - u\| ; v \in L(X, Y), \text{posto}(v) < k\}.$$

Proposição 5.1.12. *Sejam X, Y e Z espaços de Banach, $u, v \in L(X, Y)$ e $w \in L(Y, Z)$. Então*

(a) $\|u\| = a_1(u) \geq a_2(u) \geq \cdots \geq 0$.

(b) $a_{k+l-1}(w \circ u) \leq a_k(w)\, a_l(u)$, $\forall k, l \in \mathbb{N}$.

(c) $a_{k+l-1}(u + v) \leq a_k(u) + a_l(v)$, $\forall k, l \in \mathbb{N}$.

5.1.3. Números de Entropia

Consideremos um espaço de Banach X com norma $\|\cdot\|$.

Definição 5.1.13. Dado $A \subset X$, o *k-ésimo número de entropia* de A é definido por

$$e_k(A) = e_k(A, X) = \inf\left\{\varepsilon > 0;\ N_\varepsilon(A) \leq 2^{k-1}\right\}.$$

Para $u \in L(X, Y)$, definimos o k-ésimo número de entropia de u pondo

$$e_k(u) = e_k(u(B_X[0,1]), X).$$

Observação 5.1.14. O conjunto $\left\{\varepsilon > 0;\ N_\varepsilon(A) \leq 2^{k-1}\right\}$ é sempre um intervalo da forma $(e_k(A), \infty)$ ou $[e_k(A), \infty)$ por consequência de 5.1.3(c).

Proposição 5.1.15. *Suponha que X é um subespaço de Y, $A \subset B \subset X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

(a) $e_{n+1}(A, X) \leq e_n(A, X)$.

(b) $e_n(\alpha A, X) = |\alpha|\, e_n(A, X)$.

(c) $e_n(A, X) \leq e_n(B, X)$.

(d) $e_n(A, Y) \leq e_n(A, X)$.

Demonstração. (a) segue de $N_\varepsilon(A) \leq 2^{n-1} \implies N_\varepsilon(A) \leq 2^n$. Agora

$$\begin{aligned}
e_n(\alpha A, X) &= \inf\left\{\varepsilon > 0;\ N_\varepsilon(\alpha A) \leq 2^{n-1}\right\} \\
&= \inf\left\{\varepsilon > 0;\ \alpha A \subset \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} B_X[x_i, \varepsilon];\ x_1, \ldots, x_{2^{n-1}} \in X\right\} \\
&= \inf\left\{\varepsilon > 0;\ A \subset \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} B_X\left[\frac{x_i}{\alpha}, \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right];\ x_1, \ldots, x_{2^{n-1}} \in X\right\} \\
&= \inf\left\{\delta|\alpha| > 0;\ A \subset \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} B_X[y_i, \delta];\ y_1, \ldots, y_{2^{n-1}} \in X\right\} \\
&= |\alpha|\, e_n(A, X),
\end{aligned}$$

donde segue (b). (c) vem de $N_\varepsilon(A) \leq N_\varepsilon(B)$. Finalmente, $B_X[x,\varepsilon] \subset B_Y[x,\varepsilon]$ implica (d). □

Proposição 5.1.16. *Dados X, Y e Z espaços de Banach, $u, v \in L(X,Y)$ e $w \in L(Y,Z)$, temos*

- ***(a)*** $\|u\| = e_1(u) \geq e_2(u) \geq \cdots \geq 0$.
- ***(b)*** $e_{k+l-1}(w \circ u) \leq e_k(w)\, e_l(u)$, $\forall k, l \in \mathbb{N}$.
- ***(c)*** $e_{k+l-1}(u+v) \leq e_k(u) + e_l(v)$, $\forall k, l \in \mathbb{N}$.

Definição 5.1.17. Seja $u \in L(X,Y)$. Dizemos que u é uma função linear compacta se $\overline{u(B_X[0,1])}$ é compacto.

Devido à similaridade entre as características dos números de entropia e dos números de aproximação (comparar proposições 5.1.12 e 5.1.16), podemos indagar se existe uma relação entre eles. A resposta parcialmente afirmativa é dada em seguida.

Teorema 5.1.18. *Considere uma função linear compacta $u \in L(X,Y)$ onde X e Y são espaços de Banach.*

- ***(a)*** *Se, para algum $c > 0$,*

$$a_{2^j}(u) \leq c a_{2^{j+1}}(u), \forall j \in \mathbb{N}$$

então existe $C > 0$ tal que

$$e_j(u) \leq C a_j(u), \forall j \in \mathbb{N}.$$

(b) *Considere uma sequência decrescente* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números positivos e* $c > 0$ *tal que*

$$\alpha_{2^{j+1}} \leq c\alpha_{2^j}, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Nessas condições, existe $C > 0$ *tal que*

$$\sup_{1\leq j\leq n} \alpha_j e_j(u) \leq C \sup_{1\leq j\leq n} \alpha_j a_j(u).$$

Finalmente, temos um resultado que relaciona ε-entropia com números de entropia. Uma comparação entre as duas definições nos leva a pensar que elas são aproximadamente uma inversa da outra, de forma que $H_\varepsilon(A)$ é aproximadamente $n-1$ sempre que $e_n(A)$ é aproximadamente ε, e vice-versa. O teorema a seguir coloca esta relação em termos mais precisos.

Teorema 5.1.19. *Para* $A \subset X$ *valem as implicações*

$$n-1 < \mathcal{H}_\varepsilon(A) \leq n \implies e_{n+1}(A) \leq \varepsilon \leq e_n(A), \tag{5.1}$$

$$e_{n+1}(A) < \varepsilon < e_n(A) \implies n-1 < \mathcal{H}_\varepsilon(A) \leq n. \tag{5.2}$$

Demonstração. Vamos mostrar (5.1). Por hipótese, temos que $n-1 < \mathcal{H}_\varepsilon(A) \leq n$, o que significa que $2^{n-1} < N_\varepsilon(A) \leq 2^n$. Por um lado, $N_\varepsilon(A) \leq 2^n$ implica que

$$e_{n+1}(A) = \inf\{\delta > 0;\, N_\delta(A) \leq 2^n\} \leq \varepsilon.$$

Por outro lado, $2^{n-1} < N_\varepsilon(A)$ implica que ε não pertence ao conjunto $\{\delta > 0;\, N_\delta(A) \leq 2^{n-1}\}$, ou seja, $\varepsilon \leq e_n(A)$.

Agora verifiquemos (5.2). Como $e_n(A) > \varepsilon$ segue que $\varepsilon \notin \{\delta > 0;\, N_\delta(A) \leq 2^{n-1}\}$ (por ser menor que o ínfimo deste conjunto) donde $N_\varepsilon(A) > 2^{n-1}$ e portanto $\mathcal{H}_\varepsilon(A) > n-1$. Por outro lado, $e_{n+1}(A) < \varepsilon$ implica que $\varepsilon \in \{\delta > 0;\, N_\delta(A) \leq 2^n\}$, logo $\mathcal{H}_\varepsilon(A) \leq n$. □

5.2. Estimativas para ε-Entropias

Nesta seção apresentaremos vários resultados com respeito às entropias de multiplicadores. Primeiramente estudaremos estimativas de multiplicadores em espaços de Banach quaisquer e então aplicaremos estes resultados para estimar entropias de multiplicadores de séries de Walsh.

5.2.1. Multiplicadores em Espaços de Banach

Fixemos para esta subseção uma sequência $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de números reais não nulos. Definimos o multiplicador $T\alpha : X \to X$ associado a esta sequência por

$$T\alpha\,(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k e_k.$$

Além disso, vamos supor que $T\alpha$ está bem definido, isto é, a série acima converge em X para cada $x \in X$ e, ainda mais, vamos supor que $T\alpha \in L\,(X, X)$. Vamos considerar o problema de estimar a ε-entropia de $T\alpha$.

Uma referência para os resultados desta subseção é [16].

Notação 5.2.1. Suponha que X possua uma base (base de Schauder) enumerável $(e_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ fixa e, para cada $x \in X$, escolhamos $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de forma que $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k$. Fixemos $m \in \mathbb{N}$. Denotemos por $X_m = [e_0, \ldots, e_{m-1}]$ o subespaço linear gerado por $e_0, \ldots, e_{m-1}$, $p_m : X \to X_m$ a projeção canônica $p_m\,(x) = \sum_{k=0}^{m-1} x_k e_k$ e, por simplicidade, $B_m\,[x, r] = B_{X_m}\,[x, r]$. Identificamos X_m com o espaço $\mathbb{R}^m$ através da aplicação $\psi_m : \mathbb{R}^m \to X_m$ definida por

$$\psi_m\,(x_o, x_1, \ldots, x_{m-1}) = \sum_{k=0}^{m-1} x_k e_k.$$

Em X_m consideramos a medida $\bar{\lambda}_m$ (medida imagem) induzida pela medida λ_m de Lebesgue em $\mathbb{R}^m$. Para um conjunto A boreliano em X_m, definimos $\bar{\lambda}_m\,(A) = \lambda_m\,(\psi_m^{-1}\,(A))$. No que segue, denotamos $\bar{\lambda}_m$ por λ_m.

Notação 5.2.2. Fixado $m \in \mathbb{N}$, denotamos por $T^m\alpha$ (ou simplesmente $T\alpha$) o operador de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^m$ definido em $x \in \mathbb{R}^m$ por

$$T^m\alpha\,(x) = \psi_m^{-1}\,(T\alpha\,(\psi_m\,(x))) = (\alpha_0 x_0, \ldots, \alpha_{m-1} x_{m-1})\,.$$

Definição 5.2.3. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos as sequências

$$\alpha_n^{(m,+)} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq n < m, \\ \alpha_n & \text{se } m \leq n. \end{cases} \qquad \alpha_n^{(m,-)} = \begin{cases} \alpha_n^{-1} & \text{se } 0 \leq n < m, \\ 0 & \text{se } m \leq n. \end{cases}$$

Lema 5.2.4. *Dado um conjunto $B \subset \mathbb{R}^m$ λ_m-mensurável (onde λ_m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^m$),*

$$\lambda_m \left(T\alpha \left(B\right)\right) = \lambda_m \left(B\right) \prod_{k=0}^{m-1} \left|\alpha_k\right|.$$

Demonstração. Pela fórmula de mudança de variável em $\mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} \lambda_m \left(T\alpha \left(B\right)\right) &= \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{T\alpha(B)} \left(x\right) \, d\lambda_m \left(x\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{T\alpha(B)} \left(T\alpha \left(y\right)\right) \left|\det \left(J \left(T\alpha\right)\right)\right| \, d\lambda_m \left(y\right). \end{aligned}$$

Como $T\alpha$ é função linear, $J\left(T\alpha\right)$ é a própria matriz associada a $T\alpha$, isto é,

$$J\left(T\alpha\right) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{m-1} \end{bmatrix},$$

ou seja, $\det\left(J\left(T\alpha\right)\right) = \prod_{k=0}^{m-1} \alpha_k$. Substituindo na equação acima, temos

$$\begin{aligned} \lambda_m \left(T\alpha \left(B\right)\right) &= \left(\prod_{k=0}^{m-1} \left|\alpha_k\right|\right) \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{T\alpha(B)} \left(T\alpha \left(y\right)\right) \, d\lambda_m \left(y\right) \\ &= \left(\prod_{k=0}^{m-1} \left|\alpha_k\right|\right) \int_{\mathbb{R}^m} \chi_B \left(y\right) \, d\lambda_m \left(y\right) \\ &= \lambda_m \left(B\right) \prod_{k=0}^{m-1} \left|\alpha_k\right|. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.2.5. *Dado $\varepsilon > 0$,*

$$\mathcal{H}_\varepsilon \left(T\alpha\right) \geq \sup_{m \in \mathbb{N}} \left(-m \log \varepsilon + \sum_{k=0}^{m-1} \log \left|\alpha_k\right|\right).$$

Demonstração. Se $A \subset B$, então $\mathcal{H}_\varepsilon(A) \leq \mathcal{H}_\varepsilon(B)$. Logo

$$\mathcal{H}_\varepsilon(T\alpha) = \mathcal{H}_\varepsilon(T\alpha(B_X[0,1])) \geq \mathcal{H}_\varepsilon(T\alpha(B_m[0,1]))$$

e assim basta mostrar que $\mathcal{H}_\varepsilon(T\alpha(B_m[0,1])) \geq -m\log\varepsilon + \sum_{k=0}^{m-1}\log|\alpha_k|$.

Considere uma ε-rede minimal $\left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}\right\}$ de $T\alpha(B_m[0,1])$ (isto é, com $p = N_\varepsilon(T\alpha(B_m[0,1]))$). Neste caso, $T\alpha(B_m[0,1]) \subset \bigcup_{k=1}^{p} B_m\left[y^{(k)}, \varepsilon\right]$. Pelo Lema 5.2.4,

$$\begin{aligned}\lambda_m(B_m[0,1])\prod_{k=0}^{m-1}|\alpha_k| &= \lambda_m(T\alpha(B_m[0,1])) \\ &\leq \sum_{k=1}^{p}\lambda_m\left(B_m\left[y^{(k)},\varepsilon\right]\right) = p\varepsilon^m\lambda_m(B_m[0,1])\end{aligned}$$

e portanto

$$N_\varepsilon(T\alpha(B_m[0,1])) = p \geq \varepsilon^{-m}\prod_{k=0}^{m-1}|\alpha_k|.$$

Extraindo o logaritmo dos dois lados da equação, obtemos

$$\mathcal{H}_\varepsilon(T\alpha(B_m[0,1])) \geq -m\log\varepsilon + \sum_{k=0}^{m-1}\log|\alpha_k|. \qquad \square$$

Teorema 5.2.6. *Supondo que $\alpha_k \neq 0$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$, temos que, para cada $m \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{H}_{\eta_m(T\alpha)+\zeta_m(T\alpha)}(T\alpha) \leq m\,\log\frac{4\|p_m\|}{\eta_m(T\alpha)} + \sum_{k=0}^{m-1}\log|\alpha_k|$$

onde

$$\zeta_m(T\alpha) = \left\|T\alpha^{(m,+)}\right\|, \qquad \eta_m(T\alpha) = \left\|T\alpha^{(m,-)}\big|_{X_m}\right\|^{-1}.$$

Demonstração. Usemos a notação $A_m = T\alpha \circ p_m(B_X[0,1])$. Vamos mostrar que $B_m[0,\eta_m] \subset A_m$. Primeiramente observamos que, para $x \in B_m[0,\eta_m]$, temos que

$$\left\|T\alpha^{(m,-)}(x)\right\| \leq \left\|T\alpha^{(m,-)}\right\|\|x\| = \eta_m^{-1}\|x\| \leq 1,$$

e assim $T\alpha^{(m,-)}(x) \in B_X[0,1]$. Como $T\alpha^{(m,-)}(x) \in X_m$, então $p_m\left(T\alpha^{(m,-)}(x)\right) = T\alpha^{(m,-)}(x)$. De $x \in X_m$ segue que $T\alpha^{(m,-)}(x) = T\alpha^{-1}(x)$. Portanto,

$$x = T\alpha\left(T\alpha^{-1}(x)\right) = T\alpha\left(p_m\left(T\alpha^{(m,-)}(x)\right)\right) \in T\alpha \circ p_m\left(B_X[0,1]\right)$$

e a relação $B_m[0,\eta_m] \subset A_m$ fica estabelecida.

Consideremos agora a η_m-casca de A_m em X_m, isto é, o conjunto

$$[A_m]_{\eta_m} = \bigcup_{y \in A_m} B_m[y,\eta_m]$$

e tome $z \in [A_m]_{\eta_m}$. Então existe $y \in A_m$ tal que $z \in B_m[y,\eta_m]$, isto é, $\|z-y\| \leq \eta_m$. Tome $x = z - y$. Então $\|x\| \leq \eta_m$, ou seja, $x \in B_m[0,\eta_m] \subset A_m$. Por outro lado, A_m é convexo, donde segue que

$$\frac{z}{2} = \frac{x+y}{2} \in A_m,$$

e portanto $z \in 2A_m$. Em outras palavras, acabamos de mostrar que $[A_m]_{\eta_m} \subset 2A_m$.

Finalmente, tomemos um conjunto η_m-separado $P = \left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(q)}\right\}$ maximal em A_m. Em particular, este conjunto é uma η_m-rede de A_m. Pelo que acabamos de mostrar, temos que

$$\bigcup_{j=1}^{q} B_m\left[y^{(j)}, \frac{\eta_m}{2}\right] \subset [A_m]_{\eta_m} \subset 2A_m.$$

Agora, as bolas $B_m\left[y^{(j)}, \frac{\eta_m}{2}\right]$ são duas a duas disjuntas; de fato, se existisse $w \in B_m\left[y^{(i)}, \frac{\eta_m}{2}\right] \cap B_m\left[y^{(j)}, \frac{\eta_m}{2}\right]$ para $i \neq j$, teríamos

$$\left\|y^{(i)} - y^{(j)}\right\| \leq \left\|y^{(i)} - w\right\| + \left\|w - y^{(j)}\right\| \leq 2\frac{\eta_m}{2} = \eta_m,$$

o que contradiz P ser um conjunto η_m-separado. Então, pelo Lema 5.2.4, temos que

$$\begin{aligned} q\frac{\eta_m^m}{2^m}\lambda_m\left(B_m[0,1]\right) &= \sum_{j=1}^{q} \lambda_m\left(B_m\left[y^{(j)}, \frac{\eta_m}{2}\right]\right) = \lambda_m\left(\bigcup_{j=1}^{q} B_m\left[y^{(j)}, \frac{\eta_m}{2}\right]\right) \\ &\leq \lambda_m\left(2T\alpha \circ p_m\left(B_X[0,1]\right)\right) = 2^m \lambda_m\left(p_m\left(B_X[0,1]\right)\right) \prod_{k=0}^{m-1} |\alpha_k| \\ &\leq 2^m \|p_m\|^m \lambda_m\left(B_m[0,1]\right) \prod_{k=0}^{m-1} |\alpha_k|. \end{aligned}$$

A última desigualdade segue da relação $p_m(B_X[0,1]) \subset B_m[0, \|p_m\|]$. Logo,

$$q \leq \frac{(4\|p_m\|)^m}{\eta_m^m} \prod_{k=0}^{m-1} |\alpha_k|$$

e assim

$$M_{\eta_m}(A_m) = \log q \leq m\left(\log \frac{4\|p_m\|}{\eta_m(T\alpha)}\right) + \sum_{k=0}^{m-1} \log|\alpha_k|.$$

Escolha um $t \in T\alpha(B_X[0,1])$, $t = T\alpha(u)$. Então

$$t - p_m(t) = (T\alpha - T\alpha \circ p_m)(u) = T\alpha^{(m,+)}(u)$$

donde segue que $\|t - p_m(t)\| \leq \left\|T\alpha^{(m,+)}\right\| \|u\| = \zeta_m \|u\| \leq \zeta_m$. Como $p_m(t) \in A_m$ e P é uma η_m-rede de A_m, tomando $y^{(j)}$ tal que $\left\|p_m(t) - y^{(j)}\right\| \leq \eta_m$, temos

$$\left\|t - y^{(j)}\right\| \leq \|t - p_m(t)\| + \left\|p_m(t) - y^{(j)}\right\| \leq \zeta_m + \eta_m,$$

ou seja, P é uma $(\zeta_m + \eta_m)$-rede de $T\alpha(B_X[0,1])$, donde segue que

$$\mathcal{H}_{\eta_m(T\alpha)+\zeta_m(T\alpha)}(T\alpha) \leq \log q \leq m \log \frac{4\|p_m\|}{\eta_m(T\alpha)} + \sum_{k=0}^{m-1} \log|\alpha_k|. \qquad \square$$

Observação 5.2.7. O cálculo da ε-entropia de um multiplicador somente é relevante quando pudermos fazê-lo para ε arbitrariamente pequeno. Então, para o teorema acima, devemos supor que $\eta_m(T\alpha) + \zeta_m(T\alpha) \to 0$ quando $m \to \infty$. Isto implica em particular que $\alpha_m \to 0$ quando $m \to \infty$, pois

$$\zeta_m(T\alpha) = \left\|T\alpha^{(m,+)}\right\| \geq \left|T\alpha^{(m,+)}(x_m)\right| = |\alpha_m|.$$

5.2.2. Multiplicadores de Séries de Walsh

Nesta subseção, estudaremos o problema de estimar a entropia dos multiplicadores estudados no Capítulo 4.

Os resultados desta seção foram obtidos de uma adaptação de [1].

Definição 5.2.8. Considere uma sequência $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\alpha_n \neq 0$ e $m \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\beta_k = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} |\Delta_n \alpha|, \qquad \gamma_k = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \left|\Delta_n \alpha^{-1}\right|,$$

$$\beta_k^{(m)} = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,+)}\right|, \qquad \gamma_k^{(m)} = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,-)}\right|$$

onde $\Delta_n\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n$, $\Delta_n\alpha^{-1} = \alpha_{n+1}^{-1} - \alpha_n^{-1}$ e as sequências $\alpha^{(m,+)}$ e $\alpha^{(m,-)}$ são como na Definição 5.2.3.

Notação 5.2.9. Por simplicidade, usamos as notações $L^p = L^p[0,1)$ e $U^p = \left\{f \in L^p;\ \|f\|_p \leq 1\right\} = B_{L^p}[0;1]$.

No que segue, $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ será uma sequência satisfazendo as hipóteses do Teorema 4.3.3 tal que $\alpha_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ e também tal que $\alpha_n \to 0$ quando $n \to \infty$ (ver Observação 5.2.7).

Teorema 5.2.10. *Seja $1 < p < \infty$. Então, para quaisquer $m \in \mathbb{N}$ e $C, \xi_m > 0$,*

$$\mathcal{H}_{C^{-1}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^p\right), L^p\right) \geq m\, \log C + \sum_{n=0}^{m-1} \log \frac{|\alpha_n|}{\xi_m}.$$

Além disso, supondo que existe $N \geq 1$ tal que

$$\sup_{i\in\mathbb{N}_0} \beta_i^{(m)} \leq N \sup_{n\geq m} |\alpha_n|, \qquad \sup_{i\in\mathbb{N}_0} \gamma_i^{(m)} \leq N \sup_{0\leq n\leq m-1} \left|\alpha_n^{-1}\right|, \tag{5.3}$$

então existem constantes $A_p > 0$ e $B_p > 0$ tais que, para $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{H}_{A_p \sup_{n\geq m-1}|\alpha_n|}\left(T\alpha\left(U^p\right), L^p\right) \leq m\, B_p + \sum_{n=0}^{m-1} \log \frac{|\alpha_n|}{\inf_{0\leq n\leq m-1} |\alpha_n|}.$$

Demonstração. A partir do Teorema 5.2.5 com $\varepsilon = C^{-1}\xi_m$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{C^{-1}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^p\right), L^p\right) &\geq -m\,\log\left(C^{-1}\xi_m\right) + \sum_{k=0}^{m-1}\log|\alpha_k| \\ &= m\,\log C - m\,\log\left(\xi_m\right) + \sum_{k=0}^{m-1}\log|\alpha_k| \\ &= m\,\log C + \sum_{n=0}^{m-1}\log\frac{|\alpha_n|}{\xi_m}.\end{aligned}$$

Para a estimativa superior, considere, como no Teorema 5.2.6,

$$\zeta_m\left(T\alpha\right) = \left\|T\alpha^{(m,+)}\right\|, \qquad \eta_m\left(T\alpha\right) = \left\|T\alpha^{(m,-)}\big|_{X_m}\right\|^{-1}$$

onde X_m é o espaço linear gerado por $\{\omega_0, \ldots, \omega_{m-1}\}$ e $\|T\|$ denota a norma de T como operador de L^p em L^p.

Por hipótese, valem as desigualdades

$$\begin{aligned}\left|\alpha_n^{(m,+)}\right| &\leq \sup_{n\geq m}|\alpha_n| \leq N\sup_{n\geq m}|\alpha_n|, \\ \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\left|\Delta_n\alpha^{(m,+)}\right| &\leq \sup_{i\in\mathbb{N}_0}\beta_i^{(m)} \leq N\sup_{n\geq m}|\alpha_n|,\ \forall k\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Assim, podemos aplicar o Teorema 4.3.3 à sequência $\alpha^{(m,+)}$ com $M = N\sup_{n\geq m}|\alpha_n|$ para concluir que

$$\zeta_m\left(T\alpha\right) = \left\|T\alpha^{(m,+)}\right\| \leq ND_p\sup_{n\geq m}|\alpha_n|. \tag{5.4}$$

Observamos também que

$$\begin{aligned}\left|\alpha_n^{(m,-)}\right| &\leq \sup_{0\leq n\leq m-1}\left|\alpha_n^{-1}\right| \leq N\sup_{0\leq n\leq m-1}\left|\alpha_n^{-1}\right|, \\ \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\left|\Delta_n\alpha^{(m,-)}\right| &\leq \sup_{i\in\mathbb{N}_0}\gamma_i^{(m)} \leq N\sup_{0\leq n\leq m-1}\left|\alpha_n^{-1}\right|,\ \forall k\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

e aplicando novamente o Teorema de Multiplicadores à sequência $\alpha^{(m,-)}$ com $M = N\sup_{0\leq n\leq m-1}|\alpha_n^{-1}|$, concluímos que

$$\eta_m^{-1}(T\alpha) = \left\| T\alpha^{(m,-)}\big|_{X_m} \right\| \leq \left\| T\alpha^{(m,-)} \right\| \leq ND_p \sup_{0\leq n\leq m-1} \left|\alpha_n^{-1}\right|.$$

Mas, para cada $0 \leq n \leq m-1$, temos que $\omega_n \in X_m$ e $\left\|T\alpha^{(m,-)}(\omega_n)\right\|_p = \left\|\alpha_n^{-1}\omega_n\right\|_p = |\alpha_n^{-1}|$. Logo $\sup_{0\leq n\leq m-1}|\alpha_n^{-1}| \leq \left\|T\alpha^{(m,-)}\big|_{X_m}\right\|$. Portanto,

$$\frac{1}{ND_p}\inf_{0\leq n\leq m-1}|\alpha_n| \leq \eta_m(T\alpha) \leq \inf_{0\leq n\leq m-1}|\alpha_n|. \tag{5.5}$$

Segue de (5.4) e (5.5) que

$$\begin{aligned}\eta_m(T\alpha)+\zeta_m(T\alpha) &\leq ND_p\sup_{n\geq m}|\alpha_n| + \inf_{0\leq n\leq m-1}|\alpha_n| \\ &\leq ND_p\sup_{n\geq m}|\alpha_n| + |\alpha_{m-1}| \\ &\leq A_p\sup_{n\geq m-1}|\alpha_n|\end{aligned}$$

onde $A_p = ND_p + 1$. Portanto, pelo Teorema 5.2.6 e por (5.5),

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{A_p\sup_{n\geq m-1}|\alpha_n|}(T\alpha(U^p), L^p) &\leq \mathcal{H}_{\eta_m(T\alpha)+\zeta_m(T\alpha)}(T\alpha) \\ &\leq m\log\left(\frac{4\|S_m\|}{\eta_m(T\alpha)}\right) + \sum_{k=0}^{m-1}\log|\alpha_k| \\ &\leq m\log(4ND_p\|S_m\|) - m\log\left(\inf_{0\leq n\leq m-1}|\alpha_n|\right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-1}\log|\alpha_k| \\ &\leq m\,B_p + \sum_{n=0}^{m-1}\log\frac{|\alpha_n|}{\inf_{0\leq n\leq m-1}|\alpha_n|}\end{aligned}$$

onde $B_p = \log(4ND_p\sup_{m\in\mathbb{N}}\|S_m\|)$ e $\|S_m\|$ é a norma do operador $S_m : L^p[0,1) \to L^p[0,1)$ que é uniformemente limitada pelo Teorema 3.2.14. □

Corolário 5.2.11. *Sejam dados $1 \leq p \leq q \leq \infty$ tais que $1 < p < \infty$ ou $1 < q < \infty$ ou $p = 1$ e $q = \infty$. Considere também $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ com $\alpha_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Então,* *para quaisquer $m \in \mathbb{N}$, C e $\xi_m > 0$,*

$$\mathcal{H}_{C^{-1}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^p\right), L^q\right) \geq m \log C + \sum_{n=0}^{m-1} \log \frac{|\alpha_n|}{\xi_m}.$$

Além disso, se valem as inequações em (5.3)*, existem constantes $A_{p,q} > 0$ e $B_{p,q} > 0$ tais que, para todo $m \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{H}_{A_{p,q} \sup_{n \geq m-1} |\alpha_n|}\left(T\alpha\left(U^q\right), L^p\right) \leq m\, B_{p,q} + \sum_{n=0}^{m-1} \log \frac{|\alpha_n|}{\inf_{0 \leq n \leq m-1} |\alpha_n|}.$$

Demonstração. Primeiro verificamos que, como $p \leq q$, temos que $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$ e portanto $U^q \subset U^p$. De fato, sejam $f \in L^q$ e r o conjugado de q/p. Pela desigualdade de Hölder,

$$\int |f|^p \, d\lambda \leq \left\|\chi_{[0,1)}\right\|_r \cdot \||f|^p\|_{\frac{q}{p}} = 1 \cdot \left(\int |f|^{p \cdot \frac{q}{p}} \, d\lambda\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\int |f|^q \, d\lambda\right)^{\frac{p}{q}}$$

donde obtemos o resultado elevando os dois membros à potência $\frac{1}{p}$.

Consideremos o caso em que $1 < p < \infty$. De $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$ e da Proposição 5.1.8 segue que

$$\mathcal{H}_{C^{-1}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^p\right), L^q\right) \geq \mathcal{H}_{C^{-1}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^p\right), L^p\right).$$

Por outro lado, $U^q \subset U^p$ e a mesma proposição implica que

$$\mathcal{H}_{A_p \sup_{n \geq m-1} |\alpha_n|}\left(T\alpha\left(U^q\right), L^p\right) \leq \mathcal{H}_{A_p \sup_{n \geq m-1} |\alpha_n|}\left(T\alpha\left(U^p\right), L^p\right).$$

Agora, no caso em que $1 < q < \infty$ e $1 \leq p \leq q$, usando que $U^q \subset U^p$ temos que

$$\mathcal{H}_{C^{-1}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^p\right), L^q\right) \geq \mathcal{H}_{C^{-1}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^q\right), L^q\right)$$

e por $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$ temos também que

$$\mathcal{H}_{A_q \sup_{n \geq m-1} |\alpha_n|}\left(T\alpha\left(U^q\right), L^p\right) \leq \mathcal{H}_{A_q \sup_{n \geq m-1} |\alpha_n|}\left(T\alpha\left(U^q\right), L^q\right).$$

Finalmente, para $p = 1$ e $q = \infty$, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{C^{-1}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^1\right), L^\infty\right) &\geq \mathcal{H}_{C^{-1}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^1\right), L^2\right) \\ &\geq \mathcal{H}_{C^{-1}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^2\right), L^2\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{A_2 \sup_{n\geq m-1}|\alpha_n|}\left(T\alpha\left(U^\infty\right), L^1\right) &\leq \mathcal{H}_{A_2 \sup_{n\geq m-1}|\alpha_n|}\left(T\alpha\left(U^2\right), L^1\right) \\ &\leq \mathcal{H}_{A_2 \sup_{n\geq m-1}|\alpha_n|}\left(T\alpha\left(U^2\right), L^2\right).\end{aligned}$$

Para concluir, basta aplicar o teorema anterior. □

O resultado a seguir é útil para limitar as sequências $\beta_k^{(m)}$ e $\gamma_k^{(m)}$ como é necessário para aplicar o corolário anterior.

Proposição 5.2.12. *Fixe $m \in \mathbb{N}$ e escreva $m = 2^j + r$, $0 \leq r < 2^j$. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$,*

$$\beta_k^{(m)} \leq |\alpha_m| + \sup_{i\geq j+1} \beta_i, \tag{5.6}$$

$$\gamma_k^{(m)} \leq \left|\alpha_{m-1}^{-1}\right| + \sup_{1\leq i\leq j+1} \gamma_i. \tag{5.7}$$

Se a sequência $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ for positiva e não-crescente, então, para cada $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\beta_k^{(m)} \leq 2\alpha_m, \tag{5.8}$$

$$\gamma_k^{(m)} \leq 2\alpha_{m-1}^{-1}. \tag{5.9}$$

Demonstração. Se $k < j$, para $n \leq 2^k - 1$ temos $n + 1 \leq 2^k < 2^j \leq m$, donde $\Delta_n\alpha^{(m,+)} = \alpha_{n+1}^{(m,+)} - \alpha_n^{(m,+)} = 0 - 0 = 0$. Por outro lado, se $k > j+1$ e $n \geq 2^{k-1}$, temos $n \geq 2^{k-1} \geq 2^{j+1} \geq 2^j + r = m$, ou seja, $\Delta_n\alpha^{(m,+)} = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \Delta_n\alpha$. Portanto

$$\beta_k^{(m)} = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \left|\Delta_n\alpha^{(m,+)}\right| = \begin{cases} 0 & \text{se } k < j, \\ \beta_k & \text{se } k > j+1. \end{cases} \tag{5.10}$$

Suponha que $r = 0$. Observamos que $n \geq 2^j = m$ implica que $\Delta_n\alpha^{(m,+)} = \Delta_n\alpha$, donde segue que

$$\beta_{j+1}^{(m)} = \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} |\Delta_n\alpha| = \beta_{j+1}. \tag{5.11}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\beta_j^{(m)} &= \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,+)}\right| \\
&= \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} \left|\Delta_n \alpha^{(m,+)}\right| + \left|\Delta_{2^j-1} \alpha^{(m,+)}\right| \\
&= 0 + \left|\alpha_m^{(m,+)} - \alpha_{m-1}^{(m,+)}\right| = \left|\alpha_m\right|. \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

Agora o caso $r > 0$. Para $n \leq 2^j - 1$, temos $n + 1 \leq 2^j < m$, ou seja,

$$\beta_j^{(m)} = \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,+)}\right| = 0. \qquad (5.13)$$

Também temos que

$$\begin{aligned}
\beta_{j+1}^{(m)} &= \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,+)}\right| \\
&= \sum_{n=2^j}^{m-2} \left|\Delta_n \alpha^{(m,+)}\right| + \left|\Delta_{m-1} \alpha^{(m,+)}\right| + \sum_{n=m}^{2^{j+1}-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,+)}\right| \\
&= 0 + |\alpha_m| + \sum_{n=m}^{2^{j+1}-1} |\Delta_n \alpha| \leq |\alpha_m| + \beta_{j+1}. \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Observe que, em qualquer caso, a desigualdade (5.6) segue de (5.10) a (5.14).

No caso particular em que α for positiva e não-crescente, temos que

$$\begin{aligned}
\beta_{j+1}^{(m)} &= \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,+)}\right| \\
&= \sum_{n=2^j}^{m-2} \left|\Delta_n \alpha^{(m,+)}\right| + \left|\Delta_{m-1} \alpha^{(m,+)}\right| + \sum_{n=m}^{2^{j+1}-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,+)}\right| \\
&= 0 + \alpha_m + \sum_{n=m}^{2^{j+1}-1} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 2\alpha_m - \alpha_{2^{j+1}} \leq 2\alpha_m \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

e

$$\beta_k = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} |\Delta_n \alpha| = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = \alpha_{2^{k-1}} - \alpha_{2^k-1} \leq \alpha_{2^{k-1}}.$$

Aplicando esta desigualdade nas inequações (5.10) a (5.13) e (5.15), obtemos (5.8).

Se $k < j$, para $n \leq 2^k - 1$ temos $n + 1 \leq 2^k < 2^j \leq m$, donde $\Delta_n \alpha^{(m,-)} = \alpha_{n+1}^{(m,-)} - \alpha_n^{(m,-)} = \alpha_{n+1}^{-1} - \alpha_n^{-1} = \Delta_n \alpha^{-1}$. Por outro lado, se $k > j+1$ e $n \geq 2^{k-1}$, temos $n \geq 2^{k-1} \geq 2^{j+1} \geq 2^j + r = m$, ou seja, $\Delta_n \alpha^{(m,-)} = \alpha_{n+1}^{(m,-)} - \alpha_n^{(m,-)} = 0$. Portanto

$$\gamma_k^{(m)} = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,-)}\right| = \begin{cases} \gamma_k & \text{se } k < j, \\ 0 & \text{se } k > j+1. \end{cases} \tag{5.16}$$

No caso $r = 0$, para $n \geq 2^j = m$, temos que $\Delta_n \alpha^{(m,-)} = 0$, ou seja

$$\gamma_{j+1}^{(m)} = \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,-)}\right| = 0. \tag{5.17}$$

Também temos que

$$\begin{aligned} \gamma_j^{(m)} &= \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,-)}\right| \\ &= \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} \left|\Delta_n \alpha^{(m,-)}\right| + \left|\Delta_{2^j-1} \alpha^{(m,-)}\right| \\ &= \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} \left|\Delta_n \alpha^{-1}\right| + \left|0 - \alpha_{m-1}^{-1}\right| \leq \gamma_j + \left|\alpha_{m-1}^{-1}\right|. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Se, por outro lado, $r > 0$, quando $n \leq 2^j - 1$, temos que $n+1 \leq 2^j < m$, o que implica que

$$\gamma_j^{(m)} = \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,-)}\right| = \gamma_j. \tag{5.19}$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\gamma_{j+1}^{(m)} &= \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,-)}\right| \\
&= \sum_{n=2^j}^{m-2} \left|\Delta_n \alpha^{(m,-)}\right| + \left|\Delta_{m-1} \alpha^{(m,-)}\right| + \sum_{n=m}^{2^{j+1}-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,-)}\right| \\
&= \sum_{n=2^j}^{m-2} \left|\Delta_n \alpha^{-1}\right| + \left|\alpha_{m-1}^{-1}\right| + 0 \leq \gamma_{j+1} + \left|\alpha_{m-1}^{-1}\right|. \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

A desigualdade (5.7) segue das inequações (5.16) a (5.20).

Agora, para o caso em que α é positiva não-crescente, temos que

$$
\begin{aligned}
\gamma_{j+1}^{(m)} &= \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,-)}\right| \\
&= \sum_{n=2^j}^{m-2} \left|\Delta_n \alpha^{(m,-)}\right| + \left|\Delta_{m-1} \alpha^{(m,-)}\right| + \sum_{n=m}^{2^{j+1}-1} \left|\Delta_n \alpha^{(m,-)}\right| \\
&= \sum_{n=2^j}^{m-2} \left(\alpha_{n+1}^{-1} - \alpha_n^{-1}\right) + \alpha_{m-1}^{-1} + 0 = \alpha_{m-1}^{-1} - \alpha_{2^j}^{-1} + \alpha_{m-1}^{-1} \leq 2\alpha_{m-1}^{-1} \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

e também que

$$
\gamma_k = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \left(\alpha_{n+1}^{-1} - \alpha_n^{-1}\right) = \alpha_{2^k}^{-1} - \alpha_{2^{k-1}}^{-1} \leq \alpha_{2^k}^{-1}.
$$

Finalmente, a inequação (5.9) segue desta última desigualdade, das desigualdades (5.16) a (5.19) e de (5.21). □

Observação 5.2.13. A proposição anterior sugere que, no Corolário 5.2.11, as condições

$$
\sup_{i\in\mathbb{N}_0} \beta_i^{(m)} \leq N \sup_{n\geq m} |\alpha_n|, \qquad \sup_{i\in\mathbb{N}_0} \gamma_i^{(m)} \leq N \sup_{0\leq n\leq m-1} \left|\alpha_n^{-1}\right|
$$

podem ser substituídas por

$$
\sup_{i\geq j+1} \beta_i \leq N \sup_{n\geq m} |\alpha_n|, \qquad \sup_{1\leq i\leq j+1} \gamma_i \leq N \sup_{0\leq n\leq m-1} \left|\alpha_n^{-1}\right|
$$

ou ainda por

$$
\beta_k \leq N \left|\alpha_{2^k}\right|, \qquad \gamma_k \leq N \left|\alpha_{2^k}^{-1}\right|.
$$

Suponha que α seja positiva e não-crescente. Neste caso, as condições do Corolário 5.2.11 são satisfeitas por consequência das desigualdades (5.8) e (5.9). Ainda mais, tomando $\xi_m = |\alpha_{m-1}| (= \sup_{n \geq m-1} |\alpha_n|)$, obtemos o resultado a seguir.

Corolário 5.2.14. *Sejam dados $1 \leq p \leq q \leq \infty$ tais que $1 < p < \infty$ ou $1 < q < \infty$ ou $p = 1$ e $q = \infty$. Se α_n for positiva e não-crescente em n, então, para quaisquer $m \in \mathbb{N}$ e $C > 0$,*

$$\mathcal{H}_{C^{-1}\alpha_{m-1}} \left(T\alpha \left(U^p \right), L^q \right) \geq m \log C + \sum_{n=0}^{m-1} \log \frac{\alpha_n}{\alpha_{m-1}} \tag{5.22}$$

e existem constantes $A_{p,q} > 0$ e $B_{p,q} > 0$ tais que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{H}_{A_{p,q}\alpha_{m-1}} \left(T\alpha \left(U^q \right), L^p \right) \leq m B_{p,q} + \sum_{n=0}^{m-1} \log \frac{\alpha_n}{\alpha_{m-1}}. \tag{5.23}$$

5.2.3. Estimativas Inferiores para Entropia de Multiplicadores

Já estudamos estimativas inferiores para a entropia de um multiplicador $T\alpha$ de L^p em L^q quando $1 \leq p \leq q \leq \infty$ (exceto $p = q = 1$ e $p = q = \infty$) na subseção precedente. Nesta subseção, iremos estudar, a partir do raciocínio usado em [1], estimativas inferiores para o caso geral, isto é, para quaisquer $1 \leq p, q \leq \infty$. Para isso, bastará obter estimativas inferiores para $p = \infty$ e $q = 1$ e aplicar a Proposição 5.1.8 para obter os outros casos.

Observação 5.2.15. Identificaremos o seguinte espaço linear

$$F_n = [\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}] = \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} x_{j+1}\omega_j ; \, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

com o $\mathbb{R}^n$ a partir da função $J_n : \mathbb{R}^n \to F_n$ onde $J_n (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{n-1} x_{j+1}\omega_j$. Para cada $1 \leq p \leq \infty$ e $x \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\|x\|_{(p)} = \|J_n (x)\|_p .$$

Observe que $\|\cdot\|_{(2)} = \|\cdot\|_{l_2}$ (ou seja, $\|\cdot\|_{(2)}$ é a norma euclidiana). Denotamos por simplicidade $B^n_{(p)} (a, r) = B_{\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(p)}\right)} (a, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; \, \|x - a\|_{(p)} < r \right\}$ e analogamente $B^n_{(p)} [a, r] = B_{\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(p)}\right)} [a, r]$. $B^n_{l_p} (a, r)$ denotam as bolas em $\mathbb{R}^n$ com respeito à norma l_p.

Definição 5.2.16. Sendo E um espaço vetorial de dimensão n e $u : \mathbb{R}^n \to E$ um isomorfismo linear, o subconjunto $u\left(B_{l_2}^n[0,1]\right)$ de E é dito um *elipsóide.* Dado $V \subset \mathbb{R}^n$ convexo, denominamos por *elipsóide de John* o elipsóide $\mathcal{E}_V$ de volume máximo contido em V.

Lema 5.2.17. *Para $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq 2$,*

$$\mathcal{E}_{B_{(p)}^n[0,1]} = B_{(2)}^n[0,1]. \tag{5.24}$$

Demonstração. Seja $x = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ e fixe $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Então

$$\begin{aligned} \|x\|_{(1)} &= \int_0^1 \left|\sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega_j\right| d\lambda = \int_0^1 \left|\sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega_j \omega_k\right| d\lambda \\ &\geq \left|\int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega_j \omega_k \, d\lambda\right| = |x_k| \end{aligned}$$

pois as funções de Walsh são ortonormais e portanto $\|x\|_{(1)} \geq \max_{0 \leq k < n} |x_k|$, o que implica que

$$B_{(1)}^n[0,1] \subset [-1,1]^n.$$

Sabe-se, entretanto, que $\mathcal{E}_{[-1,1]^n} = B_{l_2}^n[0,1] = B_{(2)}^n[0,1]$ (ver [7, p. 75]) e assim

$$\mathcal{E}_{B_{(1)}^n[0,1]} \subset \mathcal{E}_{[-1,1]^n} = B_{(2)}^n[0,1]. \tag{5.25}$$

Por outro lado, para $1 \leq p \leq 2$, temos que $\|\cdot\|_{(2)} \geq \|\cdot\|_{(p)} \geq \|\cdot\|_{(1)}$, ou seja,

$$B_{(2)}^n[0,1] \subset B_{(p)}^n[0,1] \subset B_{(1)}^n[0,1].$$

Logo, como $B_{(2)}^n[0,1]$ é um elipsóide,

$$B_{(2)}^n[0,1] \subset \mathcal{E}_{B_{(2)}^n[0,1]} \subset \mathcal{E}_{B_{(p)}^n[0,1]} \subset \mathcal{E}_{B_{(1)}^n[0,1]}. \tag{5.26}$$

O resultado segue por (5.25) e (5.26). $\square$

Definição 5.2.18. Seja X um espaço de Banach e seja $p \geq 2$. Se existe uma constante $C_p(X) > 0$ tal que, para quaisquer $m \in \mathbb{N}$ e $(x_j)_{0 \leq j < m} \in X^m$, temos que

$$\left(\sum_{j=0}^{m-1} \|x_j\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p(X) \int_0^1 \left\|\sum_{j=0}^{m-1} r_j(t)\, x_j\right\|_X d\lambda(t)$$

onde r_k são as funções de Rademacher, dizemos que X tem *cotipo* p com constante $C_p(X)$.

Observação 5.2.19. Se $1 \leq q \leq 2$ então $L^q[0,1)$ tem cotipo 2 com constante $C_2(L^q[0,1)) \leq 2^{\frac{1}{2}}$ (ver [11, p. 73]).

Lema 5.2.20 (Teorema 2 em [2, p. 321])**.** *Seja K um conjunto convexo, centralmente simétrico, limitado e absorvente em $\mathbb{R}^n$. Seja $\|\cdot\|_K$ a norma definida pelo funcional de Minkowski de K (ver Definição 1.3.4). Se $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ tem cotipo 2 e $C = C_2(X)$, então existe uma constante B absoluta tal que*

$$\frac{\lambda_n(K)}{\lambda_n(\mathcal{E}_K)} \leq \left(BC(\log C)^4\right)^n. \tag{5.27}$$

Lema 5.2.21 (Teorema 1 em [2, p. 320])**.** *Seja K um conjunto convexo, centralmente simétrico, limitado e absorvente em $\mathbb{R}^n$. Nessas condições, existe uma constante absoluta d tal que*

$$\lambda_n(K) \cdot \lambda_n(K^\circ) \geq d^n \lambda_n^2\left(B_{(2)}^n[0,1]\right). \tag{5.28}$$

Lema 5.2.22. *Existe uma constante $c > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{\lambda_n\left(\left(B_{(1)}^n[0,1]\right)^\circ\right)}{\lambda_n\left(B_{(2)}^n[0,1]\right)} \geq c^n.$$

Demonstração. Pela Observação 5.2.19, $L^1[0,1)$ tem cotipo 2 e assim pela definição de cotipo segue que $(F_n, \|\cdot\|_1)$ e também $\left(J_n^{-1}(F_n), \|\cdot\|_{(1)}\right)$ têm cotipo 2. Tomamos

$K = B^n_{(1)}[0,1]$ e temos que $\|\cdot\|_K = \|\cdot\|_{(1)}$. Por (5.28), (5.24) e (5.27), obtemos

$$\frac{\lambda_n\left(\left(B^n_{(1)}[0,1]\right)^\circ\right)}{\lambda_n\left(B^n_{(2)}[0,1]\right)} \geq d^n \frac{\lambda_n\left(B^n_{(2)}[0,1]\right)}{\lambda_n\left(B^n_{(1)}[0,1]\right)} = $$
$$= d^n \frac{\lambda_n(\mathcal{E}_K)}{\lambda_n(K)} \geq \left(\frac{d}{BC(\log C)^4}\right)^n. \qquad \square$$

Lema 5.2.23 ([9, p. 14])**.** *Seja X um espaço vetorial normado e A um subespaço de X. Então, para cada $x \in X$, temos que*

$$\inf_{u\in A} \|x-u\|_X = \sup\left\{f(x);\ f \in A^\perp,\ \|f\|_{X^*} \leq 1\right\}$$

onde X^* é o dual de X, isto é, o espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos com a norma usual e $A^\perp = \{f \in X^*;\ f(x) = 0,\ \forall x \in A\}$.

Lema 5.2.24. *Para $n \in \mathbb{N}$ e $t \in F_n$,*

$$\inf_{\phi\in F_n^\perp} \|t-\phi\|_\infty = \|t\|_{J\left(\left(B^n_{(1)}[0,1]\right)^\circ\right)}$$

onde $F_n^\perp = \left\{\phi \in L^1[0,1);\ \int_0^1 \phi t\, d\lambda = 0,\ \forall t \in F_n\right\}$.

Demonstração. Sejam $k \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq 2^k$ e $\mathcal{Q}_k$ a σ-álgebra gerada pela família $\left\{I_{k,i};\ 0 \leq i < 2^k\right\}$. Dada $f \in F_{2^k}$, temos que $E[f|\mathcal{Q}_k] = S_{2^k} f = f$ q.t.p. (ver demonstração do Teorema 3.2.6), e assim F_{2^k} é o conjunto das funções $\mathcal{Q}_k$-mensuráveis. Seja X o expaço vetorial F_{2^k} com a norma $\|\cdot\|_\infty$, isto é, $X = L^\infty([0,1), \mathcal{Q}_k, \lambda)$. O espaço dual X^* de X é um espaço vetorial com a mesma dimensão que X, isto é, 2^k. Pelo Teorema 1.4.6, a operação de $L^1([0,1), \mathcal{Q}_k, \lambda)$ em X^* dada por $g \mapsto \xi_g \in X^*$ onde

$$\xi_g(f) = \int_0^1 fg\, d\lambda$$

é um monomorfismo (isto é, um homomorfismo injetivo) isométrico. Como $L^1([0,1), \mathcal{Q}_k, \lambda)$ e X^* têm ambos dimensão 2^k, este monomorfismo é um isomorfismo. Então podemos identificar $L^1([0,1), \mathcal{Q}_k, \lambda)$ com X^*.

Seja $A = X \cap F_n^{\perp} = [\omega_n, \ldots, \omega_{2^k-1}]$. Temos que A é subespaço vetorial de X e

$$A^{\perp} = \{\xi \in X^*;\ \xi(f) = 0,\ \forall f \in A\} = \left\{g \in F_{2^k};\ \int_0^1 gf\, d\lambda = 0,\ \forall f \in A\right\} = F_n.$$

Pelo lema anterior, temos que

$$\inf_{\phi \in A} \|t - \phi\|_{\infty} = \sup_{z \in F_n \cap U^1} \left| \int_0^1 tz\, d\lambda \right|. \tag{5.29}$$

Por outro lado, dada $\phi \in F_n^{\perp}$, pela Desigualdade de Hölder,

$$\left| \int_0^1 tz\, d\lambda \right| = \left| \int_0^1 (t - \phi)\, z\, d\lambda \right| \leq \|t - \phi\|_{\infty} \tag{5.30}$$

para toda $z \in F_n \cap U^1$. Por (5.29) e (5.30), segue que

$$\inf_{\phi \in F_n^{\perp}} \|t - \phi\|_{\infty} \leq \inf_{\phi \in A} \|t - \phi\|_{\infty} = \sup_{z \in F_n \cap U^1} \left| \int_0^1 tz\, d\lambda \right| \leq \inf_{\phi \in F_n^{\perp}} \|t - \phi\|_{\infty}.$$

Pela Fórmula de Plancherel, para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$, $\int \frac{t}{r} \cdot J_n(y)\, d\lambda = \left\langle J_n^{-1}\left(\frac{t}{r}\right), y \right\rangle$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\inf_{\phi \in F_n^{\perp}} \|t - \phi\|_{\infty} &= \sup_{z \in F_n \cap U^1} \left| \int_0^1 tz\, d\lambda \right| \\
&= \inf \left\{ r > 0;\ \sup_{z \in F_n \cap U^1} \left| \int_0^1 t \cdot z\, d\lambda \right| \leq r \right\} \\
&= \inf \left\{ r > 0;\ \sup_{y \in B^n_{(1)}[0,1]} \left| \int_0^1 \frac{t}{r} \cdot J_n(y)\, d\lambda \right| \leq 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ r > 0;\ \sup_{y \in B^n_{(1)}[0,1]} \left| \left\langle J_n^{-1}\left(\frac{t}{r}\right), y \right\rangle \right| \leq 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ r > 0;\ J_n^{-1}\left(\frac{t}{r}\right) \in \left(B^n_{(1)}[0,1]\right)^{\circ} \right\} \\
&= \|t\|_{J_n\left(\left(B^n_{(1)}[0,1]\right)^{\circ}\right)}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.2.25. *Suponha que $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ com $\alpha_n \neq 0$ $\forall n$ e que existam $u \in \{-1, 1\}$ e $s \in [0, 1)$ tais que $\sigma(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{|\alpha_n|} = u \cdot \omega_n(s)$ para cada n. Então existe* *uma constante $A > 0$ (independente de α) tal que, para $m \in \mathbb{N}$ e quaisquer $C, \xi_m > 0$,*

$$\mathcal{H}_{AC^{-2}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^{\infty}\right), L^1\right) \geq m \log C + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m-1} \log \frac{|\alpha_n|}{\xi_m}.$$

Demonstração. Considere um $\varepsilon > 0$ a ser escolhido posteriormente. Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto qualquer e $\left\{x_1, \ldots, x_{N_\varepsilon(K)}\right\} \subset \mathbb{R}^m$ uma ε-rede minimal de K quando consideramos $\mathbb{R}^m$ com a norma euclidiana $\|\cdot\|_{(2)}$. Então $K \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon(K)} B_{(2)}^m[x_i, \varepsilon]$, ou seja,

$$\lambda_m(K) \leq N_\varepsilon(K)\, \varepsilon^m \lambda_m\left(B_{(2)}^m[0,1]\right)$$

e portanto

$$N_\varepsilon(K) \geq \frac{1}{\varepsilon^m} \frac{\lambda_m(K)}{\lambda_m\left(B_{(2)}^m[0,1]\right)}. \tag{5.31}$$

Tomemos $K = T^m |\alpha|^{\frac{1}{2}}\left(\left(B_{(1)}^m[0,1]\right)^{\circ}\right)$ onde

$$T^m |\alpha|^{\frac{1}{2}}(x_1, \ldots, x_m) = \left(|\alpha_0|^{\frac{1}{2}} x_1, |\alpha_1|^{\frac{1}{2}} x_2, \ldots, |\alpha_{m-1}|^{\frac{1}{2}} x_m\right),$$

isto é, $J_m\left(T^m |\alpha|^{\frac{1}{2}}(x)\right) = T|\alpha|^{\frac{1}{2}}(J_m(x))$ onde $T|\alpha|^{\frac{1}{2}}$ é o multiplicador associado à sequência $|\alpha|^{\frac{1}{2}} = \left(|\alpha_n|^{\frac{1}{2}}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Pelo Lema 5.2.4,

$$\lambda_m\left(T^m |\alpha|^{\frac{1}{2}}\left(\left(B_{(1)}^m[0,1]\right)^{\circ}\right)\right) = \prod_{i=0}^{m-1} |\alpha_i|^{\frac{1}{2}} \lambda_m\left(\left(B_{(1)}^m[0,1]\right)^{\circ}\right).$$

Usando essa relação na desigualdade (5.31) e aplicando o Lema 5.2.22,

$$\begin{aligned}
N_\varepsilon\left(T^m |\alpha|^{\frac{1}{2}}\left(\left(B_{(1)}^m[0,1]\right)^{\circ}\right)\right) &\geq \frac{1}{\varepsilon^m} \frac{\lambda_m\left(T^m|\alpha|^{\frac{1}{2}}\left(\left(B_{(1)}^m[0,1]\right)^{\circ}\right)\right)}{\lambda_m\left(B_{(2)}^m[0,1]\right)} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^m} \prod_{i=0}^{m-1} |\alpha_i|^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_m\left(\left(B_{(1)}^m[0,1]\right)^{\circ}\right)}{\lambda_m\left(B_{(2)}^m[0,1]\right)} \\
&\geq \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^m \prod_{i=0}^{m-1} |\alpha_i|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Tomando $N = M_\varepsilon(K)$, temos que, pela Proposição 5.1.7,

$$N = M_\varepsilon(K) \geq N_\varepsilon(K) \geq \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^m \prod_{i=0}^{m-1} |\alpha_i|^{\frac{1}{2}}.$$

Pela definição de N, existe um conjunto $\left\{T^m|\alpha|^{\frac{1}{2}}(y_1), \ldots, T^m|\alpha|^{\frac{1}{2}}(y_N)\right\}$ ε-separado maximal em K onde $y_i \in \left(B^m_{(1)}[0,1]\right)^\circ$ para $i = 1, \ldots, N$. Tomemos $V = J_m\left(\left(B^m_{(1)}[0,1]\right)^\circ\right) \subset F_m$, $0 < \theta < 1$ e $t_i = \theta J_m(y_i)$ para $i = 1, \ldots, N$. Para cada $i = 1, \ldots, N$, temos que $t_i/\theta \in V$, ou seja,

$$\|t_i\|_V = \mu_V(t_i) \leq \theta < 1.$$

Além disso, para $i \neq j$, temos que

$$\left\|T|\alpha|^{\frac{1}{2}}(t_i - t_j)\right\|_2 = \theta\left\|T^m|\alpha|^{\frac{1}{2}}(y_i - y_j)\right\|_{(2)} > \theta\varepsilon. \tag{5.32}$$

Como $\|t_i\|_V < 1$, pelo Lema 5.2.24 existe $\phi_i \in F_n^\perp$ tal que $\|t_i - \phi_i\|_\infty < 1$ e assim $t_i - \phi_i \in U^\infty$. Definindo $f_i = T\alpha(t_i - \phi_i)$ e $\varphi_{i,j} = \frac{1}{2}(t_i - \phi_i) - \frac{1}{2}(t_j - \phi_j)$, temos $f_i \in T\alpha(U^\infty)$ e $\|\varphi_{i,j}\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|t_i - \phi_i\|_\infty + \frac{1}{2}\|t_j - \phi_j\|_\infty < 1$.

Agora, considerando $\sigma\alpha = (\sigma\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, para q.t.p. $x \in [0,1)$ temos que

$$\begin{aligned}
|T\sigma\alpha(\varphi_{i,j})(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} \sigma(\alpha_k)\widehat{\varphi_{i,j}}(k)\,\omega_k(x)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{\infty} u\widehat{\varphi_{i,j}}(k)\,\omega_k(s)\,\omega_k(x)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi_{i,j}}(k)\,\omega_k(s+x)\right| \\
&= |\varphi_{i,j}(s+x)| \leq \|\varphi_{i,j}\|_\infty < 1,
\end{aligned}$$

ou seja, $T\sigma\alpha\left(\varphi_{i,j}\right) \in U^{\infty}$. Pela Desigualdade de Hölder e pela Observação 3.2.16,

$$\begin{aligned}
\left\|f_i - f_j\right\|_1 &\geq \left\|f_i - f_j\right\|_1 \left\|T\sigma\left(\alpha\right)\left(\varphi_{i,j}\right)\right\|_{\infty} \\
&\geq \int_0^1 \left(f_i - f_j\right) \cdot T\sigma\left(\alpha\right)\left(\varphi_{i,j}\right)\, d\lambda \\
&= \int_0^1 T\alpha\left(2\varphi_{i,j}\right) \cdot T\sigma\left(\alpha\right)\left(\varphi_{i,j}\right)\, d\lambda \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_j \widehat{\varphi_{i,j}}\left(k\right) \cdot \sigma\left(\alpha_j\right)\widehat{\varphi_{i,j}}\left(k\right) \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty} \left(\left|\alpha_j\right|^{\frac{1}{2}} \widehat{\varphi_{i,j}}\left(k\right)\right)^2 \\
&= 2\int_0^1 \left(T\left|\alpha\right|^{\frac{1}{2}}\left(\varphi_{i,j}\right)\right)^2 d\lambda \\
&= 2\int_0^1 \left(\frac{1}{2}T\left|\alpha\right|^{\frac{1}{2}}\left(t_i - t_j\right) - \frac{1}{2}T\left|\alpha\right|^{\frac{1}{2}}\left(\phi_i - \phi_j\right)\right)^2 d\lambda.
\end{aligned}$$

Temos que $t_i, t_j \in F_m$ e $\phi_i, \phi_j \in F_m^{\perp}$ donde $t_i - t_j \in F_m$ e $\phi_i - \phi_j \in F_m^{\perp}$. Logo, $T\left|\alpha\right|^{\frac{1}{2}}\left(t_i - t_j\right) \in F_m$ e $T\left|\alpha\right|^{\frac{1}{2}}\left(\phi_i - \phi_j\right) \in F_m^{\perp}$ e consequentemente $T\left|\alpha\right|^{\frac{1}{2}}\left(t_i - t_j\right)$ e $T\left|\alpha\right|^{\frac{1}{2}}\left(\phi_i - \phi_j\right)$ são ortogonais. Portanto, usando a inequação (5.32),

$$\begin{aligned}
\left\|f_i - f_j\right\|_1 &\geq \frac{1}{2}\int_0^1 \left(T\left|\alpha\right|^{\frac{1}{2}}\left(t_i - t_j\right)\right)^2 d\lambda + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(T\left|\alpha\right|^{\frac{1}{2}}\left(\phi_i - \phi_j\right)\right)^2 d\lambda \\
&\geq \frac{1}{2}\left\|T\left|\alpha\right|^{\frac{1}{2}}\left(t_i - t_j\right)\right\|_2^2 > \frac{1}{2}\theta^2\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Definindo $\beta = \frac{1}{4}\theta^2\varepsilon^2$, as funções $f_1, \ldots, f_N \in T\alpha\left(U^{\infty}\right)$ são 2β-separadas na norma de $L^1\left[0,1\right)$. Isto, juntamente com a Proposição 5.1.7, implica que

$$N_{\beta}\left(T\alpha\left(U^{\infty}\right), L^1\left[0,1\right)\right) \geq M_{2\beta}\left(T\alpha\left(U^{\infty}\right), L^1\left[0,1\right)\right) \geq N \geq \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^m \prod_{i=0}^{m-1} \left|\alpha_i\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Escolhendo $\varepsilon = \frac{c}{C}\xi_m^{\frac{1}{2}}$ e $A = \frac{1}{4}\theta^2 c^2$, obtemos $\beta = \frac{1}{4}\theta^2 c^2 C^{-2}\xi_m = AC^{-2}\xi_m$ e daí

$$N_{\beta}\left(T\alpha\left(U^{\infty}\right), L^1\left[0,1\right)\right) \geq C^m \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\left|\alpha_i\right|^{\frac{1}{2}}}{\xi_m^{\frac{1}{2}}} = C^m \left(\prod_{i=0}^{m-1} \frac{\left|\alpha_i\right|}{\xi_m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto,

$$\mathcal{H}_{AC^{-2}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^{\infty}\right), L^1\right) \geq m\log C + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m-1}\log\frac{|\alpha_n|}{\xi_m}.$$

□

Corolário 5.2.26. *Para quaisquer* $1 \leq p, q \leq \infty$, *nas condições do teorema anterior,*

$$\mathcal{H}_{AC^{-2}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^{p}\right), L^q\right) \geq m\log C + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m-1}\log\frac{|\alpha_n|}{\xi_m}. \tag{5.33}$$

Demonstração. De $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_q$, $U^{\infty} \subset U^p$ e da Proposição 5.1.8 segue que

$$\mathcal{H}_{AC^{-2}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^{p}\right), L^q\right) \geq \mathcal{H}_{AC^{-2}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^{p}\right), L^1\right) \geq \mathcal{H}_{AC^{-2}\xi_m}\left(T\alpha\left(U^{\infty}\right), L^1\right).$$

Para completar, basta aplicar o teorema precedente. □

5.3. Aplicações

Daremos em seguida uma motivação para os exemplos que serão apresentados nesta seção. A derivada usual de uma uma função pode ser dada em termos de sua série de Fourier. Mais especificamente, se $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikx}$ é de classe $C^{n+1}[0, 2\pi)$, onde $n \in \mathbb{N}$, então

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^n a_k e^{ikx}.$$

Fixado um $1 < p < \infty$, definimos a n-ésima *derivada diádica* (ver [15, p. 39]) de uma função $f \in L^p[0,1)$ de forma análoga, pondo

$$\mathbf{d}^n f = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \hat{f}(k)\,\omega_k$$

quando a série acima convergir ao menos em q.t.p. Supondo que $\hat{f}(0) = 0$ e $\mathbf{d}^n f \in L^p[0,1)$, tomando $g = \mathbf{d}^n f$ temos que

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n} k^n \hat{f}(k)\,\omega_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n}\hat{g}(k)\,\omega_k = T\nu^{-n} g$$

onde definimos $\nu^{-\gamma} = (k^{-\gamma})_{k\in\mathbb{N}_0}$ para qualquer $\gamma \in \mathbb{R}$. Assim, o conjunto $T\nu^{-n}(U^p)$ é formado pelas funções $f \in L^p[0,1)$ que são n-diferenciáveis com $\|\mathbf{d}^n f\|_p \leq 1$. Ao estimar a entropia do operador $T\nu^{-n}$, estaremos estimando a entropia do conjunto $T\nu^{-n}(U^p)$.

Fixemos $\gamma > 0$ e $0 < r \leq 1$. Como o primeiro termo da sequência $\nu^{-\gamma}$ é nulo, para o resto desta seção consideramos $\mu^{(1)} = \left((k+1)^{-\gamma}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ e também $\mu^{(2)} = \left(2^{-\gamma k^r}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Vamos aplicar as estimativas para ε-entropia obtidas nas subseções anteriores para estas sequências.

Notação 5.3.1. Dadas $f, g : X \to [0,\infty)$ onde X é um conjunto qualquer, denotamos $f(x) \ll g(x)$ (respectivamente, $f(x) \gg g(x)$) quando existir uma constante $C > 0$ tal que $f(x) \ll Cg(x)$ (respectivamente, $f(x) \geq Cg(x)$) para todo $x \in X$. Também denotamos $f(x) \asymp g(x)$ quando $f(x) \ll g(x)$ e $f(x) \gg g(x)$.

5.3.1. Estimativas para o Multiplicador $T\mu^{(1)}$

Lema 5.3.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja*

$$\zeta_n = An + B\sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k^{-\gamma}}{n^{-\gamma}}\right),$$

onde A e B são constantes positivas. Então

$$\zeta_n \asymp n.$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\zeta_n &= An + B\sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k^{-\gamma}}{n^{-\gamma}}\right) \\
&= An + B\gamma\sum_{k=1}^{n} (\log n - \log k) \\
&= An + B\gamma\left(n\log n - \sum_{k=1}^{n} \log k\right).
\end{aligned}$$

As somas de Riemann inferior s_n e superior S_n da função log relativamente à partição $\{1, 2, \ldots, n\}$ são dadas por

$$s_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\log k)(k+1-k) = \sum_{k=1}^{n-1} \log k = \sum_{k=1}^{n} \log k - \log n$$

e

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\log(k+1))(k+1-k) = \sum_{k=2}^{n} \log k = \sum_{k=1}^{n} \log k,$$

respectivamente. Assim, como

$$\int_1^x \log t \, dt = \frac{1}{\ln 2} \int_1^x \ln t \, dt = x \left(\frac{\ln x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \right) = x \left(\log x - \frac{1}{\ln 2} \right),$$

temos que

$$\begin{aligned} n \left(\log n - \frac{1}{\ln 2} \right) &= \int_1^n \log t \, dt \leq \sum_{k=1}^{n} \log k \\ &\leq \int_1^n \log t \, dt + \log n = n \left(\log n - \frac{1}{\ln 2} \right) + \log n. \end{aligned}$$

Logo, multiplicando a desigualdade acima por -1 e somando $n \log n$,

$$\frac{n}{\ln 2} - \log n \leq n \log n - \sum_{k=1}^{n} \log k \leq \frac{n}{\ln 2}$$

e assim, como $\log n \leq n/2 \ln 2$ para todo $n \geq 1$, temos que

$$\frac{n}{2 \ln 2} \leq n \log n - \sum_{k=1}^{n} \log k \leq \frac{n}{\ln 2}.$$

Portanto, $\left(n \log n - \sum_{k=1}^{n} \log k\right) \asymp n$ o que demonstra o resultado. $\square$

Teorema 5.3.3. *Se $1 \leq p \leq q \leq \infty$ são tais que $1 < p < \infty$ ou $1 < q < \infty$ ou $p = 1$ e $q = \infty$, temos que*

$$\mathcal{H}_\varepsilon \left(T\mu^{(1)}(U^q), L^p \right) \ll \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{5.34}$$

e

$$e_k \left(T\mu^{(1)}(U^q), L^p \right) \ll k^{-\gamma}. \tag{5.35}$$

Ainda mais, para quaisquer $1 \leq p, q \leq \infty$

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}\left(T\mu^{(1)}\left(U^{p}\right), L^{q}\right) \gg \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{5.36}$$

e

$$e_{k}\left(T\mu^{(1)}\left(U^{p}\right), L^{q}\right) \gg k^{-\gamma}. \tag{5.37}$$

Em particular, se $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *satisfazem* $1 < p < \infty$ *ou* $1 < q < \infty$ *ou* $p = 1$ *e* $q = \infty$*, temos que*

$$e_{k}\left(T\mu^{(1)}\left(U^{q}\right), L^{p}\right) \asymp k^{-\gamma}.$$

Demonstração. Suponha que p e q satisfazem as condições da primeira parte do teorema. Aplicando o Corolário 5.2.14 à sequência $\mu^{(1)}$, obtemos, por (5.23), que

$$\mathcal{H}_{A_{p,q}m^{-\gamma}}\left(T\mu^{(1)}\left(U^{q}\right), L^{p}\right) \leq mB_{p,q} + \sum_{n=1}^{m} \log \frac{n^{-\gamma}}{m^{-\gamma}}.$$

Pelo Lema 5.3.2 segue que

$$\mathcal{H}_{A_{p,q}m^{-\gamma}}\left(T\mu^{(1)}\left(U^{q}\right), L^{p}\right) \leq C_{1}m$$

e, tomando $\varepsilon = A_{p,q}m^{-\gamma}$, obtemos

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}\left(T\mu^{(1)}\left(U^{q}\right), L^{p}\right) \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}}$$

para todo $0 < \varepsilon \leq A_{p,q}$ (o maior valor possível para ε é dado quando $m = 1$), e (5.34) fica demonstrado. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ e seja $\varepsilon = C^{\gamma}(k-1)^{-\gamma}$. Temos que $\mathcal{H}_{\varepsilon}\left(T\mu^{(1)}\left(U^{q}\right), L^{p}\right) \leq k-1$. Portanto, por (5.1) temos que

$$e_{k}\left(T\mu^{(1)}\left(U^{q}\right), L^{p}\right) \leq e_{n+1}\left(T\mu^{(1)}\left(U^{q}\right), L^{p}\right) \leq \varepsilon,$$

onde n é tal que $n-1 < \mathcal{H}_{\varepsilon}\left(T\mu^{(1)}\left(U^{q}\right), L^{p}\right) \leq n$, e assim obtemos (5.35).

Suponha, agora, que $1 \leq p, q \leq \infty$. Tomando $\xi_{m} = m^{-\gamma}$ no Corolário 5.2.26, temos que

$$\mathcal{H}_{AC^{-2}m^{-\gamma}}\left(T\mu^{(1)}\left(U^{p}\right), L^{q}\right) \geq m \log C + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} \log \frac{n^{-\gamma}}{m^{-\gamma}}$$

e assim, pelo Lema 5.3.2, segue que existe $c > 0$ tal que

$$\mathcal{H}_\varepsilon \left(T\mu^{(1)}\left(U^p\right), L^q\right) > c\varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}}$$

para todo $0 < \varepsilon \leq AC^{-2}$. Fixemos um $k \in \mathbb{N}$ e seja $\varepsilon = c^\gamma (k-1)^{-\gamma}$. Por (5.1), como $\mathcal{H}_\varepsilon \left(T\mu^{(1)}\left(U^p\right), L^q\right) > k-1$, obtemos

$$e_k \left(T\mu^{(1)}\left(U^p\right), L^q\right) \geq \varepsilon$$

donde segue (5.37). □

5.3.2. Estimativas para o Multiplicador $T\mu^{(2)}$

Lema 5.3.4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja*

$$\xi_n = An + B\sum_{k=0}^{n} \log\left(\frac{2^{-\gamma k^r}}{2^{-\gamma n^r}}\right),$$

onde $A \geq 0$ e $B > 0$ são constantes. Tomando $\varepsilon = C2^{-\gamma n^r}$ com $C > 0$ constante, temos que existem uma constante $d \geq 0$ (que depende somente de A, B, C, γ e r) e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $n \geq n_0$,

$$\xi_n \leq B\gamma^{-\frac{1}{r}}\left(\frac{r}{r+1}\right)\left(\log\varepsilon^{-1} + d\right)^{1+\frac{1}{r}} \tag{5.38}$$

e

$$\xi_n \geq B\gamma^{-\frac{1}{r}}\left(\frac{r}{r+1}\right)\left(\log\varepsilon^{-1} + \log C\right)^{1+\frac{1}{r}}. \tag{5.39}$$

Demonstração. Vamos mostrar que para constantes $a > 0$, $b \geq 0$ e $c \geq 0$ temos que

$$ax^{1+\frac{1}{r}} + bx^{\frac{1}{r}} + cx \leq a\left(x + \frac{b+c}{a}\right)^{1+\frac{1}{r}} \tag{5.40}$$

para qualquer $x \geq 1$. É claro que podemos considerar $a = 1$. Como $0 < r \leq 1$ e $1 + (b+c)\,x^{-1} \geq 1$,

$$\left(1 + (b+c)\,x^{-1}\right)^{1+\frac{1}{r}} \geq 1 + bx^{-1} + cx^{-1} \geq 1 + bx^{-1} + cx^{-\frac{1}{r}},$$

donde, multiplicando por $x^{1+1/r}$, segue a desigualdade desejada.

Temos que

$$\begin{aligned} \xi_n &= An + B\sum_{k=0}^{n} \log\left(\frac{2^{-\gamma k^r}}{2^{-\gamma n^r}}\right) \\ &= An + B\gamma\sum_{k=0}^{n}(n^r - k^r) \\ &= An + B\gamma\left(n^{r+1} + n^r - \sum_{k=0}^{n} k^r\right). \end{aligned} \tag{5.41}$$

Considere as somas inferior s_n e superior S_n da função $g(t) = t^r$ relativamente à partição $\{0, 1, \ldots, n\}$. Como $g(t)$ é crescente, temos que

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} k^r (k+1-k) = \sum_{k=0}^{n} k^r - n^r$$

e

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^r (k+1-k) = \sum_{k=1}^{n} k^r = \sum_{k=0}^{n} k^r.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{n^{r+1}}{r+1} &= \int_0^n t^r\,dt \le S_n = \sum_{k=0}^{n} k^r \\ &= s_n + n^r \le \int_0^n t^r\,dt + n^r = \frac{n^{r+1}}{r+1} + n^r. \end{aligned}$$

Multiplicando a desigualdade acima por -1 e somando n^r, obtemos

$$-\frac{n^{r+1}}{r+1} + n^r \ge n^r - \sum_{k=0}^{n} k^r \ge -\frac{n^{r+1}}{r+1}.$$

Substituindo em (5.41), obtemos

$$An + B\gamma\left(\left(\frac{r}{r+1}\right)n^{r+1}\right) \le \xi_n \le An + B\gamma\left(\left(\frac{r}{r+1}\right)n^{r+1} + n^r\right).$$

Seja $\eta = \log(C/\varepsilon)$, ou seja, $n = \gamma^{-1/r}\eta^{1/r}$. Então

$$B\gamma^{-\frac{1}{r}}\left(\frac{r}{r+1}\right)\eta^{1+\frac{1}{r}} + A\gamma^{-\frac{1}{r}}\eta^{\frac{1}{r}} \leq \xi_n \tag{5.42}$$

e

$$\xi_n \leq B\gamma^{-\frac{1}{r}}\left(\frac{r}{r+1}\right)\eta^{1+\frac{1}{r}} + A\gamma^{-\frac{1}{r}}\eta^{\frac{1}{r}} + B\eta. \tag{5.43}$$

Por (5.42) e por $A > 0$, temos que

$$B\gamma^{-\frac{1}{r}}\left(\frac{r}{r+1}\right)\left(\log\frac{C}{\varepsilon}\right)^{1+\frac{1}{r}} \leq \xi_n.$$

Escolhendo $a = B\gamma^{-1/r}\left(\frac{r}{r+1}\right)$, $b = A\gamma^{-1/r}$ e $c = B$ em (5.40) e substituindo em (5.43), obtemos

$$\xi_n \leq B\gamma^{-\frac{1}{r}}\left(\frac{r}{r+1}\right)\left(\log\frac{C}{\varepsilon} + \frac{b+c}{a}\right)^{1+\frac{1}{r}}$$

e a desigualdade 5.38 segue com $d = \log C + (b+c)/a$. $\square$

Teorema 5.3.5. *Sejam $1 \leq p \leq q \leq \infty$ tais que $1 < p < \infty$ ou $1 < q < \infty$ ou $p = 1$ e $q = \infty$. Então*

$$\mathcal{H}_\varepsilon\left(T\mu^{(2)}(U^p), L^q\right) \geq \gamma^{-\frac{1}{r}}\left(\frac{r}{r+1}\right)\left(\log\varepsilon^{-1}\right)^{1+\frac{1}{r}} \tag{5.44}$$

e

$$e_k\left(T\mu^{(2)}(U^p), L^q\right) \gg 2^{-F_{\gamma,r}k^{\frac{r}{r+1}}}, \tag{5.45}$$

onde $F_{\gamma,r} = \gamma^{\frac{1}{r+1}}\left(1+\frac{1}{r}\right)^{\frac{r}{r+1}}$. Além disso, existe $D_{p,q} > 0$ (dependendo somente de p, q, γ e r) tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{H}_\varepsilon\left(T\mu^{(2)}(U^q), L^p\right) \leq \gamma^{-\frac{1}{r}}\left(\frac{r}{r+1}\right)\left(\log\varepsilon^{-1} + D_{p,q}\right)^{1+\frac{1}{r}} \tag{5.46}$$

e

$$e_k\left(T\mu^{(2)}(U^q), L^p\right) \ll 2^{-F_{\gamma,r}k^{\frac{r}{r+1}}}. \tag{5.47}$$

Em particular, temos estimativa exata para a ordem dos números de entropia quando $1 < p = q < \infty$, isto é,

$$e_k\left(T\mu^{(2)}(U^p), L^p\right) \asymp 2^{-F_{\gamma,r}k^{\frac{r}{r+1}}}.$$

Ainda mais, existe constante $D \geq 0$ absoluta tal que, para quaisquer $1 \leq p, q \leq \infty$,

$$\mathcal{H}_\varepsilon \left(T\mu^{(2)}\left(U^p\right), L^q\right) \geq \frac{1}{2}\gamma^{-\frac{1}{r}}\left(\frac{r}{r+1}\right)\left(\log \varepsilon^{-1} - D\right)^{1+\frac{1}{r}} \tag{5.48}$$

e

$$e_k\left(T\mu^{(2)}\left(U^p\right), L^q\right) \gg 2^{-2^{\frac{r}{r+1}} F_{\gamma,r}\, k^{\frac{r}{r+1}}}. \tag{5.49}$$

Demonstração. As estimativas para ε-entropia dadas por (5.22) (com $C = 1$), (5.23) e (5.33) (com $C = 1$) são da forma

$$A_1 n + B_1 \sum_{k=0}^{n} \log\left(\frac{2^{-\gamma k^r}}{2^{-\gamma n^r}}\right)$$

para $\varepsilon = C_1 2^{-\gamma n^r}$, onde A_1, B_1 e C_1 são constantes positivas. Aplicando o Lema 5.3.4, obtemos (5.44), (5.46) e (5.48) (tomando $D = \log A$ onde A é a constante de (5.33)), respectivamente. Sejam $f_Z : (0,\infty) \to (0,\infty)$ e $g_Z : (0,\infty) \to (0,\infty)$ dadas por

$$f_Z(\varepsilon) = B\gamma^{-\frac{1}{r}}\left(\frac{r}{r+1}\right)\left(\log \varepsilon^{-1} + Z\right)^{1+\frac{1}{r}}$$

e

$$g_Z(\kappa) = 2^{-Z} 2^{-\gamma^{\frac{1}{r+1}}\left[B^{-1}\left(1+\frac{1}{r}\right)\kappa\right]^{\frac{r}{r+1}}},$$

com $Z \in \mathbb{R}$ fixo. Fazendo $\kappa = f_Z(\varepsilon)$, vemos que

$$\left(\log \varepsilon^{-1} - Z\right)^{1+\frac{1}{r}} = B^{-1}\gamma^{\frac{1}{r}}\left(1 + \frac{1}{r}\right)\kappa,$$

ou seja,

$$\log \varepsilon^{-1} = \gamma^{\frac{1}{r+1}}\left(B^{-1}\left(1+\frac{1}{r}\right)\kappa\right)^{\frac{r}{r+1}} + Z$$

e assim

$$\varepsilon = 2^{-Z} 2^{-\gamma^{\frac{1}{r+1}}\left(B^{-1}\left(1+\frac{1}{r}\right)\kappa\right)^{\frac{r}{r+1}}} = g_Z(\kappa).$$

Portanto, $g_Z \circ f_Z(\varepsilon) = \varepsilon$. Analogamente, vemos que $f_Z \circ g_Z(\kappa) = \kappa$, donde $g_Z = f_Z^{-1}$.

Tomemos $B = 1$ e $Z = 0$. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon = g_0(k)$. Pela desigualdade (5.44) para $B = 1$,

$$\mathcal{H}_\varepsilon\left(T\mu^{(2)}\left(U^p\right), L^q\right) \geq f_0(\varepsilon) = k > k - 1.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 < \mathcal{H}_\varepsilon\left(T\mu^{(2)}(U^p), L^q\right) \le n$. Então $k - 1 \le n - 1$. Por (5.1), temos que

$$e_k\left(T\mu^{(2)}(U^p), L^q\right) \ge e_n\left(T\mu^{(2)}(U^p), L^q\right) \ge \varepsilon = g_0(k),$$

donde obtemos (5.45). Analogamente, tomando $B = 1$, $Z = D_{p,q}$, $A = A_{p,q}$ e $\varepsilon = g_{D_{p,q}}(k-1)$, pela desigualdade (5.46) temos que

$$\mathcal{H}_\varepsilon\left(T\mu^{(2)}(U^q), L^p\right) \le f_{D_{p,q}}(\varepsilon) \le k - 1.$$

Assim,

$$e_k\left(T\mu^{(2)}(U^q), L^p\right) \le \varepsilon = g_{D_{p,q}}(k)$$

e portanto obtemos (5.47). Finalmente, para $B = 1/2$ e $Z = -D$, segue da desigualdade (5.48) com $\varepsilon = g_{-D}(k)$ e de (5.1) que

$$e_k\left(T\mu^{(2)}(U^p), L^q\right) \le \varepsilon = g_{-D}(k)$$

e assim obtemos (5.49). $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BORDIN, B., KUSHPEL, A. K., TOZONI, S. A., *Approximate Characteristics of Multiplier Operators on the Sphere*, Trends in Aproximation Theory, Innov. Appl. Math., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, 2001, p 39-48.

[2] BOURGAIN, J., MILMAN, V. D., *New Volume Ratio Proprierties for Convex Symmetric Bodies in* $\mathbb{R}^n$, Invet. Math. **88** (1987), p. 319-340.

[3] BURKHOLDER, D. L., *Distribution Function Inequalities for Martingales*, Ann. Probability **1**(1) (1973), p. 19-42.

[4] DIESTEL, J., UHL, J. J., Jr., *Vector Measures*, American Mathematical Society, Providence, 1977.

[5] EDWARDS, R. E., GAUDRY, G. I., *Littlewood-Paley and Multiplier Theory*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[6] FERNANDEZ, P. J., *Medida e Integração, Segunda Edição*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[7] FIGIEL, T., LINDENSTRAUSS, J., MILMAN, V. D., *The Dimensions of Almost Spherical Sections of Convex Bodies*, Acta Math. **139**(1) (1977), p. 53-94.

[8] FOLLAND, G. B., *Real Analysis - Modern Techniques and their Applications, Second Edition*, John Wiley & Sons, New York, 1999.

[9] KORNEICHUK, N., *Exact Constants in Approximation Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[10] KUTTLER, K. L., *Modern Analysis*, CRC Press, Boca Raton, 1998.

[11] LINDENSTRAUSS, J., TZAFRIRI, L., *Classical Banach spaces II*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[12] NEVEU, J., *Discrete-Parameter Martingales*, North-Holland, Amsterdam-Oxford, 1975.

[13] OLIVEIRA, J. G., *Números de Entropia de Conjuntos de Funções Suaves sobre a Esfera S^d*, Dissertação de Mestrado, IMECC, Unicamp, Campinas, 2009.

[14] PALEY, R. E. A. C., *A Remarkable Series of Orthogonal Functions*, Proc. London Math. Soc. **34**(2) (1932), p. 241-264.

[15] SCHIPP, F., WADE, W. R., SIMON, P., *Walsh Series - An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990.

[16] TIKHOMIROV, V. M., *Some Problems in Approximation Theory*, Izdat. Moskov. Univ., Moscow (em Russo), 1976.

[17] YOUNG, W.-S., *Littlewood-Paley and Multiplier Theorems for Vilenkin-Fourier Series*, Canad. J. Math. **46**(3) (1994), p. 662-672.

[18] YOUNG, W.-S., *Almost Everywhere Convergence of Vilenkin-Fourier Series of H^1 Functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **108**(2) (1990), p. 433-441.

[19] YOUNG, W.-S., *Mean Convergence of Generalized Walsh-Fourier Series*, Trans. Amer. Math. Soc. **218** (1976), p. 311-320.

Índice Remissivo