Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica

Auto-Valores do operador de Dirac e do laplaciano de Dolbeault

Rafael de Freitas Leão

Campinas-2007

Auto-Valores do Operador de Dirac e do Laplaciano de Dolbeault

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Rafael de Freitas Leão e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 9 de maio de 2007

Marcos Jardim

Prof. Dr:. Marcos B. Jardim
Orientador

Banca Examinadora:

Marcos Benevenuto Jardim
Frank Michael Forger
Paolo Piccione
Ricardo Antonio Mosna
Caio José Colletti Negreiros

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Leão, Rafael de Freitas

L476a Auto-valores do operador de Dirac e do laplaciano de Dolbeault / Rafael de Freitas Leão -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Marcos Benevenuto Jardim

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria diferencial. 2. Operador de Dirac. 3. Geometria riemanniana. I. Jardim, Marcos Benevenuto. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Eigenvalues of Dirac operator and Dolbeault laplacian.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Differential geometry. 2. Dirac operator. 3. Riemannian geometry.

Área de concentração: Geometria

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Paolo Piccione (IME-USP)
Prof. Dr. Michael Franck Forger (IME-USP)
Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Caio Jose C. Negreiros (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Ricardo Antônio Mosna (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 19/04/2007

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 19 de abril de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Marcos Jardim

____

Prof. (a). Dr (a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM

Michael Forger

____

Prof. (a). Dr (a). FRANK MICHAEL FORGER

Paolo Piccione

____

Prof. (a). Dr (a). PAOLO PICCIONE

____

Prof. (a). Dr (a). RICARDO ANTONIO MOSNA

____

Prof. (a) Dr. (a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS

Conteúdo

Introdução **vi**

1 Operadores de Dirac **1**
1.1 Álgebras de Clifford e os Grupos Spin 1
1.1.1 Álgebras de Clifford e Representações 1
1.1.2 Grupos Spin 5
1.2 Operadores de Dirac e Spinores 7
1.2.1 Fórmula de Weitzenböck 14
1.2.2 Teorema do Índice 16
1.2.3 Operadores Acoplados 17
1.2.4 Operadores de Dirac em Variedades Kähler 18

2 Estimativas Clássicas **22**
2.1 Cota Superior 22
2.2 Cota Inferior: Variedades Riemannianas 24
2.3 Cota Inferior: Variedades Kähler 30

3 Operadores Acoplados **44**
3.1 Dependência Geométrica 44
3.2 Operadores Acoplados em S^2 46

4 Laplaciano de Dolbeault **51**
4.1 Generalização das Identidades de Kähler 52
4.2 A Estimativa 58

5 Conclusões e Perspectivas **60**

Introdução

Quando consideramos uma variedade riemanniana (M, g) com uma estrutura Spin podemos definir naturalmente o fibrado de spinores $\mathbb{S}$ e o operador de Dirac D sobre este fibrado. Um resultado bastante importante, originalmente obtido por Bochner, é a relação existente entre o operador de Dirac e o laplaciano, $\nabla^*\nabla$, de $\mathbb{S}$. Esta relação é conhecida como fórmula de Weitzenböck, e envolve a curvatura escalar R de (M, g),

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}R \tag{1}$$

Esta expressão nos mostra que, para variedades com curvatura escalar sempre positiva, os auto-valores do operador de Dirac não podem ser totalmente arbitrários. Se $R > 0$ para todo ponto de M, podemos usar o fato de que $\nabla^*\nabla$ é um operador positivo para concluirmos que se λ é um auto-valor do operador de Dirac, então λ deve satisfazer

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}R_0 \tag{2}$$

onde R_0 denota o minimo de R sobre M.

Porém esta cota inferior não é ótima. Friedrich [7] mostrou que é possível encontrarmos uma cota inferior melhor. A idéia para refinarmos a cota dada pela fórmula de Weitzenböck é considerar uma deformação da conexão de $\mathbb{S}$ usando a estrutura natural de módulo de $\mathbb{S}$ sobre a álgebra de Clifford de M, $\mathcal{C}\ell(M)$. A partir desta deformação consideramos os operadores associados a conexão deformada e as relações entre os mesmos, o que permite obtermos a estimativa

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\frac{n}{n-1}R_0 \tag{3}$$

onde n é a dimensão de M. Esta cota inferior é ótima no sentido de existir uma classe bastante grande de variedades para as quais a mesma é atingida.

A cota inferior acima é obtida apenas supondo que (M, g) seja uma variedade riemanniana compacta com curvatura escalar positiva. Porém quando consideramos uma classe mais restrita de variedades esta cota inferior pode deixar de ser ótima. Por exemplo, se consideramos apenas variedades de Kähler, é possível mostrar[1] como faremos na seção (2.3), que a cota inferior obtida por Friedrich não pode ser atingida.

Para obtermos uma cota inferior para variedades de Kähler, devemos modificar a deformação da conexão considerada por Friedrich de modo a levarmos em conta a estrutura complexa da variedade (M, g). Este tipo de deformação foi abordada por Kirchberg [12], que obteve a seguinte estimativa

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\frac{n+2}{n}R_0 \tag{4}$$

Para a classe das variedades Kähler quaterniônicas, Kramer et al. [18, 19], usando a caracterização do espaço de spinores para variedades de Kähler quaterniônicas de Hijazi [10], obtiveram a estimativa

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\frac{n+3}{n+2}R_0 \tag{5}$$

De modo geral, sempre que consideramos uma propriedade geométrica específica de (M, g) é possível olharmos para uma estimativa específica. Existe uma vasta literatura neste sentido. Por exemplo, quando olhamos para uma estimativa que seja conformemente invariante temos o resultado de Hijazi [11] e de Amman [2]; para o operador de Dirac de uma subvariedade lagrangiana de uma variedade de Kähler temos o resultado de Ginoux [8] etc.

Porém todas estas estimativas só levam em consideração o operador de Dirac livre. Em teoria físicas nem sempre é possível descrevermos o modelo em questão por seções de $\mathbb{S}$, aparecendo a necessidade de considerarmos fibrados da forma $\mathbb{S} \otimes E$, onde E é um fibrado vetorial munido de uma conexão ∇^A. Para este tipo de spinor, podemos definir o chamado operador de Dirac acoplado D_A.

Apesar da importância do operador de Dirac acoplado para teorias físicas, existem poucos resultados na literatura a respeito do seu espectro. Um dos poucos resultados neste sentido, originalmente encontrado por Witten [26], diz respeito a uma cota superior para o primeiro auto-valor do operador de Dirac acoplado.

O objetivo desta tese é estudar possíveis cotas inferiores para os auto-valores do operador de Dirac acoplado. Para isto, no Capítulo 1, damos uma breve introdução aos conceitos e ferramentas usadas no estudo do espectro do operador de Dirac. Já no Capítulo 2 apresentamos os principais resultados sobre o espectro do operador de Dirac. São eles: a cota superior de Vafa e Witten [26], onde seguimos a demonstração de Atiyah [3]; a cota inferior para o caso de variedades riemannianas de Friedrich, onde mostramos ser possível usar o mesmo tipo de argumento para situações um pouco mais gerais do que o fibrado de spinores associado a variedades riemannianas com estrutura Spin; e por fim a cota inferior no caso de variedades de Kähler, um resultado conhecido para o qual apresentaremos uma demonstração original em termos de álgebras de Clifford que acreditamos ser mais transparente.

No Capítulo 3 começamos a investigação propriamente dita sobre cotas inferiores para os auto-valores do operador de Dirac acoplado. Primeiramente

[1] A demonstração, originalmente, foi feita por O. Hijazi em sua tese de doutorado.

mostramos que em certos fibrados vetoriais podemos encontrar uma família de conexões ∇^{A_t} tais que o primeiro auto-valor do operador de Dirac associado é tão pequeno quanto se queira. Isto nos mostra que sem impor nenhum tipo de restrição sobre às possíveis conexões de E, pode não ser possível encontrar uma cota inferior para os auto-valores do operador de Dirac. Em seguida mostramos por meio de um exemplo, que se considerarmos uma classe restrita de conexões pode ser possível encontrar uma cota inferior para os auto-valores não nulos do operador de Dirac acoplado.

No Capítulo 4 passamos a estudar um problema um pouco diferente mas ainda relacionado com operadores de Dirac. Para um fibrado E hermitiano com estrutura holomorfa podemos considerar o chamado laplaciano de Dolbeault, que sob certas circunstâncias não possui núcleo, de modo que faz sentido procurarmos por cotas inferiores para os auto-valores do mesmo. Inicialmente uma cota inferior pode ser obtida a partir das identidades de Kähler para a conexão ∇^A de E. Entretanto esta cota inferior não é ótima. Mostraremos como as técnicas de operador de Dirac podem ser empregadas para obtermos uma estimativa mais fina para esta cota inferior. Além disso mostraremos como o resultado para o laplaciano de Dolbeault pode ser usado para encontrarmos uma cota inferior para os auto-valores não nulos do operador de Dirac acoplado complexo[2] sobre uma superfície de Riemann.

[2]Usamos a nomenclatura de operador complexo para designar o operador de Dirac associado a uma estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$.

Capítulo 1

Operadores de Dirac

A teoria dos operadores de Dirac está intimamente relacionada à teoria das álgebras de Clifford e das estruturas *Spin*. Neste capítulo faremos uma breve introdução às álgebras de Clifford e as estruturas *Spin*. Maiores detalhes podem ser encontrados em [20].

Faremos também uma discussão um pouco mais detalhada sobre operadores de Dirac, abordando também os operadores de Dirac sobre variedades Kähler, bem como a relação dos mesmos com outros operadores diferenciais naturalmente definidos sobres estas variedades.

1.1 Álgebras de Clifford e os Grupos Spin

Nesta seção iremos dar as definições e propriedades básicas das álgebras de Clifford, e iremos mostrar como as mesmas podem ser usadas para dar uma descrição natural do grupo Spin, que terá grande importância na definição dos operadores de Dirac.

1.1.1 Álgebras de Clifford e Representações

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo comutativo $\mathbb{K}$ munido de uma forma quadrática[1] q. A álgebra de Clifford, $\mathcal{C}\ell(V,q)$ é definida em termos da álgebra tensorial de V da seguinte forma: seja

$$T(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \otimes^n V, \tag{1.2}$$

[1]Dada uma forma quadrática q, satisfazendo a regra do paralelogramo, podemos definir uma forma bilinear simétrica pela relação

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) - q(u) - q(v)\right). \tag{1.1}$$

Sempre que nos referirmos a $g(u,v)$ estaremos subentendendo que g é a forma bilinear obtida da forma quadrática desta maneira.

a álgebra tensorial de V. Definamos o ideal $T_q(V)$, de $T(V)$, como sendo o ideal gerado pelos elementos da forma $v \otimes v + q(v)\mathbb{I}$. A álgebra de Clifford associada é definida como sendo o quociente

$$\mathcal{C}\ell(V,q) = T(V)/T_q(V). \tag{1.3}$$

Temos uma inclusão natural $V \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(V,q)$ dada pela projeção

$$\pi : T(V) \to \mathcal{C}\ell(V,q). \tag{1.4}$$

Não é difícil verificarmos que esta inclusão é injetiva em V, e que o quadrado de um vetor satisfaz

$$v \cdot v = -q(v)\mathbb{I}. \tag{1.5}$$

No caso de $\mathbb{K}$ não ter característica 2 a relação acima também pode ser escrita na forma

$$v \cdot u + u \cdot v = -2q(v,u)\mathbb{I}. \tag{1.6}$$

Desse modo, podemos entender a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(V,q)$ como sendo a álgebra associativa gerada por V e pela identidade $\mathbb{I}$, juntamente com a relação dada por 1.6.

A propriedade acima pode ser vista como a propriedade que de fato caracteriza as álgebras de Clifford, pois vale

Proposição 1. *Seja $f : V \to \mathcal{A}$ um mapa linear de V para uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa $\mathcal{A}$ que satisfaça a propriedade*

$$f(v)f(u) + f(u)f(v) = -2q(v,u)\mathbb{I}, \tag{1.7}$$

quaisquer que sejam $v, u \in V$. Então f se estende de modo único a um homomorfismo entre $\mathbb{K}$-álgebras $\tilde{f} : \mathcal{C}\ell(V,q) \to \mathcal{A}$. Além disso $\mathcal{C}\ell(V,q)$ é a única $\mathbb{K}$-álgebra associativa com esta propriedade[2].

Como resultado desta proposição, vemos que todo mapa linear $T : (V,q) \to (V',q')$ que preserva a forma quadrática, $q(v) = q'(Tv)$, se estende para um homomorfismo entre as respectivas álgebras de Clifford $T : \mathcal{C}\ell(V,q) \to \mathcal{C}\ell(V',q')$. Em particular, todo elemento de $O(V)$ dá origem a um automorfismo de $\mathcal{C}\ell(V,q)$.

Dentre os automorfismos de $\mathcal{C}\ell(V,q)$ provenientes de elementos de $O(V)$ existe um de particular importância, o automorfismo gerado por menos a identidade, $-\mathbb{I}$, o qual chamaremos[3] de α. Por ser uma extensão de $-\mathbb{I}$ é fácil vermos que α é uma involução, ou seja, $\alpha^2 = 1$, de modo a induzir uma decomposição na álgebra de Clifford

$$\mathcal{C}\ell(V,q) = \mathcal{C}\ell^{+}(V,q) \oplus \mathcal{C}\ell^{-}(V,q), \tag{1.8}$$

[2] Neste sentido as álgebras de Clifford são universais.
[3] Esta involução também é conhecida como operador de paridade.

onde $\mathcal{C}\ell^+$ denota o auto-espaço de α com auto-valor 1 e $\mathcal{C}\ell^-$ o de auto-valor -1. Com esta decomposição, $\mathcal{C}\ell(V,q)$ torna-se uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada.

É interessante notarmos que as álgebras de Clifford possuem uma relação bastante próxima com as álgebras exteriores. Para entendermos um pouco melhor esta relação, consideremos o mapa do r-produto cartesiano $f : V \times \cdots V \to \mathcal{C}\ell(V,q)$ definido por

$$f(v_1,\ldots,v_r) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma} sign(\sigma) v_{\sigma(1)}\cdots v_{\sigma(r)}, \tag{1.9}$$

onde σ denota uma permutação de r elementos e a soma é tomada sobre todas as permutações possíveis de r elementos. Em outras palavras, dada uma r-upla de vetores $v_1,\ldots,v_r$, tomamos o produto alternado dentro de $\mathcal{C}\ell(V,q)$ associado a esta r-upla.

Lembrando que a álgebra exterior de V pode ser identificada como a álgebra dos tensores anti-simétricos, ou seja,

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_r = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma} sign(\sigma) v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(r)}, \tag{1.10}$$

fica imediato vermos que o mapa f acima induz um mapa

$$\tilde{f} : \wedge^* V \to \mathcal{C}\ell(V,q). \tag{1.11}$$

Não é difícil mostrarmos que este mapa é um isomorfismo entre espaços lineares. Desse modo, como espaço vetorial, a álgebra de Clifford pode ser identificada com a álgebra exterior. Além disso, podemos usar a propriedade 1.7 para entendermos o produto dentro da álgebra de Clifford como sendo uma combinação entre o produto interno e o produto exterior. Para o caso mais simples de dois vetores, temos que

$$\tilde{f}(u\wedge v) = \frac{1}{2}(uv - vu), \tag{1.12}$$

usando a propriedade 1.7 podemos escrever $uv - vu = 2uv + 2g(u,v)$, de modo que podemos escrever o produto de u com v dentro de $\mathcal{C}\ell(V,q)$ como sendo[4]

$$uv = \tilde{f}(u\wedge v) - g(u,v). \tag{1.13}$$

Esta interpretação nos mostra que se a forma quadrática q for nula então $\mathcal{C}\ell(V,q)$ nada mais é do que a álgebra exterior de V, $\wedge^* V$.

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\mathbb{A}$ um corpo contendo $\mathbb{K}$.

Definição 1. *Uma $\mathbb{A}$-representação para $\mathcal{C}\ell(V,q)$ é um $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras*

$$\rho : \mathcal{C}\ell(V,q) \to Hom_{\mathbb{A}}(W,W) \tag{1.14}$$

onde W é um $\mathbb{A}$-espaço vetorial de dimensão finita. O espaço vetorial W é chamado de $\mathcal{C}\ell(V,q)$-módulo sobre $\mathbb{A}$.

[4]É comum os textos de álgebras de Clifford omitirem o mapa $\tilde{f}$ da expressão e escreverem apenas $uv = u\wedge v - g(u,v)$

Embora exista a classificação das representações tanto para as álgebras de Clifford reais como para as complexas, podemos dar uma descrição bastante elegante para as representações irredutíveis, sobre os complexos, das álgebras de Clifford complexas com dimensão par, $\mathbb{C}\ell_{2n}$, descrição que será bastante útil ao lidarmos com variedades complexas.

Primeiramente observemos que, da teoria geral de representações de álgebras de Clifford, segue que álgebras de Clifford complexas sobre espaços de dimensão par, ou seja, as álgebras da forma $\mathbb{C}\ell_{2n}$, possuem apenas uma representação irredutível, e que a dimensão do módulo, W, que carrega esta representação, deve ser 2^n, [20].

Tendo isto em mente, consideremos $\mathbb{C}^n$ com a métrica hermitiana usual e definamos a aplicação

$$\rho_v(\phi) = v \wedge \phi - v \lrcorner \phi, \ \ \forall v \in \mathbb{C}^n, \ \ \forall \phi \in \wedge^* \mathbb{C}^n \tag{1.15}$$

onde $v \lrcorner \phi$ denota a contração por v segundo a métrica hermitiana de $\mathbb{C}^n$

$$v \lrcorner (v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \langle v_i, v \rangle v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_p. \tag{1.16}$$

Como estamos usando a métrica hermitiana canônica de $\mathbb{C}^n$ para definir a contração, ρ_v pode ser vista como uma transformação linear em $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\wedge^*\mathbb{C}^n, \wedge^*\mathbb{C}^n)$, porém a aplicação $v \mapsto \rho_v$ é apenas $\mathbb{R}$-linear.

Identificando $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$ munido de uma estrutura complexa J, obtemos um mapa $\mathbb{R}$-linear

$$\rho : \mathbb{R}^{2n} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\wedge^*\mathbb{C}^n, \wedge^*\mathbb{C}^n). \tag{1.17}$$

Usando as propriedades da contração e do produto cunha, $\wedge$, é fácil verificarmos que este mapa tem a propriedade

$$\rho_v \rho_v = - \mid\mid v \mid\mid^2, \tag{1.18}$$

onde $\mid\mid \cdot \mid\mid$ denota a norma canônica do $\mathbb{R}^{2n}$.

Mas como vimos anteriormente, devido à universalidade das álgebras de Clifford, a aplicação $\rho : \mathbb{R}^{2n} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\wedge^*\mathbb{C}^n, \wedge^*\mathbb{C}^n)$ se estende para um homomorfismo de álgebras sobre $\mathbb{R}$

$$\rho : \mathcal{C}\ell_{2n} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\wedge^*\mathbb{C}^n, \wedge^*\mathbb{C}^n) \tag{1.19}$$

ou seja, uma representação de $\mathcal{C}\ell_{2n}$ em $\wedge^*\mathbb{C}^n$. Estendendo esta representação por linearidade sobre $\mathbb{C}$ obtemos uma representação de $\mathbb{C}\ell_{2n}$. Sendo $\dim \wedge^*\mathbb{C}^n = 2^n$, vemos que esta deve ser a representação irredutível de $\mathbb{C}\ell_{2n}$.

1.1.2 Grupos Spin

Vamos considerar dentro de $\mathcal{C}\ell(V,q)$ o grupo dos elementos inversíveis

$$\mathcal{C}\ell^*(V,q) = \{\phi \in \mathcal{C}\ell(V,q) \mid \exists\ \phi^{-1} \text{ com } \phi^{-1}\phi = \phi\phi^{-1} = 1\} \tag{1.20}$$

Notemos que, como $vv = -q(v)$, todos os elementos $v \in V$ tais que $q(v) \neq 0$ pertencem a $\mathcal{C}\ell^*(V,q)$.

O grupo dos elementos inversíveis pode ser olhado como um subgrupo do grupo dos automorfismos de $\mathcal{C}\ell(V,q)$ através da representação adjunta, Ad, ou da representação adjunta contorcida[5], $\widetilde{Ad}$. A representação adjunta é definida por

$$Ad_\phi(x) = \phi x \phi^{-1}, \tag{1.21}$$

onde $\phi \in \mathcal{C}\ell^*(V,q)$, e $x \in \mathcal{C}\ell(V,q)$. A representação adjunta contorcida é definida de maneira similar à representação adjunta, mas leva em conta a involução α presente nas álgebras de Clifford

$$\widetilde{Ad}_\phi(x) = \alpha(\phi) x \phi^{-1}. \tag{1.22}$$

Notemos que vetores $v \in V$ tais que $q(v) \neq 0$ pertencem a $\mathcal{C}\ell^*(V,q)$, logo faz sentido considerarmos o caso particular em que ambos ϕ e x nas equações acima são vetores. Para dois vetores $u, v \in V$ com $q(u) \neq 0$ temos que

$$Ad_u(v) = uvu^{-1} = uv\frac{u}{-q(u)} = -\left(v - \frac{2g(u,v)}{q(u)}u\right), \tag{1.23}$$

onde usamos a propriedade $uv + vu = -2g(u,v)$, e fato de que se $q(u) \neq 0$ então $u^{-1} = \frac{-u}{q(u)}$. Com isso vemos que, para dois vetores, $Ad_u(v)$ nada mais é do que menos a reflexão pelo subespaço ortogonal a u. De modo análogo verificamos que

$$\widetilde{Ad}_u(v) = v - \frac{2g(u,v)}{q(u)}. \tag{1.24}$$

Logo $\widetilde{Ad}_u(v)$ é a reflexão pelo subespaço ortogonal a u. Com estas observações temos a proposição:

Proposição 2. *Seja $u \in V \subset \mathcal{C}\ell(V,q)$ com $q(u) \neq 0$. Então $Ad_u(V) = V$ e $\widetilde{Ad}_u(V) = V$.*

Pelo visto acima, Ad_u e $\widetilde{Ad}_u$ são reflexões ou menos reflexões para vetores $u \in V$ tais que $q(u) \neq 0$. Em ambos os casos temos transformações que preservam a forma quadrática[6] q. Com base nesta observação definimos o grupo $P(V,q)$ como sendo o subgrupo de $\mathcal{C}\ell^*(V,q)$ gerado por vetores $u \in V$ tais que $q(u) \neq 0$. Tanto a representação adjunta como a adjunta contorcida nas fornecem representações

[5] Na literatura encontramos o termo *twisted adjoint* para denominar $\widetilde{Ad}$.

[6] Consequentemente estas transformações também preservam a forma bilinear associada.

de $P(V,q)$ dentro de $O(V,q)$, o grupo ortogonal de V com relação a forma quadrática q:

$$\begin{aligned} Ad :& P(V,q) \rightarrow O(V,q) \\ \widetilde{Ad} :& P(V,q) \rightarrow O(V,q). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Pelas definições das representações vemos que se $q(u) \neq 0$ a norma de u com relação a q é totalmente irrelevante. Pois como pode ser facilmente visto temos

$$\begin{aligned} Ad_{\lambda u} &= Ad_u \\ \widetilde{Ad}_{\lambda u} &= \widetilde{Ad}_u, \end{aligned} \tag{1.26}$$

qualquer que seja $\lambda \neq 0$.

Com base nesta redundância, definimos

Definição 2. *O* **grupo Pin** *de (V,q) é definido como sendo o subgrupo $Pin(V,q)$ de $P(V,q) \subset \mathcal{C}\ell^*(V,q)$ gerado por vetores $u \in V$ com $q(u) = \pm 1$. O* **grupo Spin** *associado é definido como sendo*

$$Spin(V,q) = Pin(V,q) \cap \mathcal{C}\ell^+(V,q). \tag{1.27}$$

Em outras palavras

$$\begin{aligned} Pin(V,q) &= \{v_1 \cdots v_r \in P(V,q) \mid q(v_j) = \pm 1 \text{ para todo j}\} \\ Spin(V,q) &= \{v_1 \cdots v_r \in Pin(V,q) \mid \text{ r par}\}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Se $q(u) \neq 0$ vimos que $\widetilde{Ad}_u$ é a reflexão pelo subespaço ortogonal a u. Desse modo, como $\widetilde{Ad}$ é um homomorfismo, vemos que se $\phi \in Pin(V,q)$ então $\widetilde{Ad}_\phi$ vai ser o produto de reflexões. Este resultado implica que a representação

$$\widetilde{Ad} : Pin(V,q) \rightarrow O(V,q), \tag{1.29}$$

é sobrejetora no caso de V ter dimensão finita e q ser não degenerada. Esta conclusão decorre do fato clássico

Teorema 1. *(Cartan-Diudonné) Seja q uma forma quadrática não degenerada em um espaço V de dimensão finita. Então todo elemento $g \in O(V,q)$ pode ser escrito como um produto de reflexões*

$$g = \rho_{v_1} \circ \cdots \circ \rho_{v_r}, \tag{1.30}$$

onde $r \leq \dim V$.

Além disso sabemos que reflexões por subespaços ortogonais a um dado vetor u são transformações de determinante -1. Sabemos também que o grupo $SO(V,q)$ é definido como

$$SO(V,q) = \{g \in O(V,q) \mid \det(g) = 1\}, \tag{1.31}$$

ou seja, é o subgrupo de $O(V,q)$ cujos elementos podem ser escritos como produto de um número par de reflexões. Dessa forma a representação $\widetilde{Ad}$ restrita ao grupo Spin é de fato uma representação de $Spin(V,q) \to SO(V,q)$, claramente sobrejetiva.

Um outro resultado que deixa mais clara a natureza das representações $\widetilde{Ad} : Pin(V,q) \to O(V,q)$ e $\widetilde{Ad} : Spin(V,q) \to SO(V,q)$, cuja demonstração pode ser encontrada em [20], é

Proposição 3. *Se V for um espaço vetorial de dimensão finita e q for não degenerada então o núcleo das representações*

$$\begin{aligned} \widetilde{Ad} &: Pin(V,q) \to O(V,q) \\ \widetilde{Ad} &: Spin(V,q) \to SO(V,q) \end{aligned} \tag{1.32}$$

é exatamente $\{1,-1\}$; de modo que as aplicações acima são de fato recobrimento duplos.

Este resultado, juntamente com o resultado clássico de que $Spin(V,q)$ é simplesmente conexo no caso de $\dim V \geq 3$, nos mostra que neste caso $Spin(V,q)$ é o recobrimento universal de $SO(V,q)$.

Um grupo que aparece naturalmente no contexto de geometria complexa é o grupo $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$. Consideremos a álgebra de Clifford de $\mathbb{R}^n$, com a métrica euclidiana, $\mathcal{C}\ell_n$, e seja Spin_n o grupo spin desta álgebra.

Definição 3. *O grupo $Spin_n^{\mathbb{C}}$ é o grupo definido por*

$$Spin^{\mathbb{C}} = Spin \times U(1)/\{(-1,-1)\} \tag{1.33}$$

onde $U(1)$ denota o grupo dos complexos unitários.

Este grupo pode ser melhor entendido dentro das álgebras de Clifford complexificadas. Seja $\mathbb{C}\ell_n = \mathcal{C}\ell_n \otimes \mathbb{C} = \mathcal{C}\ell(\mathbb{C}^n)$. Tanto Spin como U^1 são subgrupos do grupo dos elementos inversíveis desta álgebra. Além disso, temos que

$$\mathrm{Spin} \cap U(1) = \{1,-1\} \tag{1.34}$$

De forma que podemos entender $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ como sendo dado pelas classes de equivalência do produto direto $\mathrm{Spin} \times U(1)$ pela relação de equivalência $(g,z) \sim (-g,-z)$, obtida a partir de -1 dentro de $\mathbb{C}\ell_n$.

1.2 Operadores de Dirac e Spinores

Dada uma variedade riemanniana (M,g) de dimensão n, sabemos que o fibrado de referenciais ortonormais forma um fibrado SO_n principal, usualmente denotado por P_{SO}. Muitos fibrados relacionados a M podem ser construídos a partir deste fibrado usando a construção clássica de fibrado associado. Em particular podemos construir o fibrado de Clifford. Considerando a ação usual $\rho : SO_n \to GL(\mathbb{R}^n)$, já vimos que esta, por preservar a forma quadrática de $\mathbb{R}^n$, se estende para uma ação sobre $\mathcal{C}\ell_n$, $\rho : SO_n \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}\ell_n, \mathcal{C}\ell_n)$. Usando esta ação podemos construir o fibrado associado com fibra $\mathcal{C}\ell_n$

Definição 4. *O fibrado de Clifford é o fibrado vetorial, com fibra $\mathcal{C}\ell_n$, associado a P_{SO} através da ação natural de $\rho : SO_n \to Hom(\mathcal{C}\ell_n, \mathcal{C}\ell_n)$*

$$\mathcal{C}\ell(M) = P_{SO} \times_\rho \mathcal{C}\ell_n \tag{1.35}$$

A maneira intuitiva de olharmos para o fibrado de Clifford é lembrando que em uma variedade Riemanniana (M, g), o espaço tangente T_pM em um ponto $p \in M$, possui uma métrica dada por g, com isso podemos olhar para a álgebra de Clifford desta fibra $\mathcal{C}\ell(T_pM, g)$. Então o fibrado de Clifford é obtido como o fibrado que sobre o ponto $p \in M$ possui a fibra $\mathcal{C}\ell(T_pM)$.

Além disso, como estamos considerando uma variedade riemanniana, podemos considerar a conexão de Levi-Civita de (M, g), que pode ser vista como uma conexão no fibrado principal P_{SO}. Uma vez que P_{SO} possui uma conexão, podemos induzir conexões nos seus fibrados associados, de modo a dotar $\mathcal{C}\ell(M)$ de uma conexão, proveniente da conexão de Levi-Civita de (M, g).

Seja M uma variedade riemanniana e seja S um fibrado de módulos sobre $\mathcal{C}\ell(M)$, ou seja, um fibrado vetorial complexo cujas as fibras S_p são módulos sobre as fibras $\mathcal{C}\ell(M)_p$, qualquer que seja o ponto $p \in M$. Assuma que S possui uma estrutura riemanniana, isto é, uma métrica positiva definida que varia suavemente com o ponto $p \in M$, e também que S possua uma conexão compatível com esta estrutura riemanniana. Com estes dados podemos definir o operador de Dirac.

Definição 5. *Com relação a um referencial ortonormal $\{e_i\}$ de T_p definimos o operador*[7]

$$\begin{aligned} D : \Gamma(S) &\to \Gamma(S) \\ D\psi &= \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i} \psi \end{aligned} \tag{1.37}$$

onde $\cdot$ denota a ação de $\mathcal{C}\ell(M)$ em S proveniente da estrutura de módulo de S.

Embora nesta definição possamos definir o operador de Dirac para qualquer fibrado de módulos S, na prática usamos uma classe mais restrita de fibrados. Como S é provido de uma estrutura riemanniana, é natural esperarmos que

[7]Como estamos considerando um referencial ortonormal o operador de Dirac pode ser definido de maneira equivalente como sendo

$$D\psi = \sum_{i=1}^{n} e^i \cdot \nabla_{e_i} \psi \tag{1.36}$$

onde $\{e^i\}$ é a base dual de $\{e_i\}$.

a ação por elementos de $\mathcal{C}\ell(M)$ tenha alguma compatibilidade. Além disso podemos esperar que a conexão ∇ de S também tenha alguma compatibilidade com as estruturas envolvidas, em particular as de M.

Definição 6. *Um fibrado riemanniano de módulos com conexão, S, é dito um* **fibrado de Dirac***, se as seguintes condições são satisfeitas*

1. *Para campos vetores unitários $u \in TM$, a ação dos mesmos, vistos como elementos de $\mathcal{C}\ell(M)$, deve ser ortogonal, i.e.*
$$(u\psi, u\phi) = (\psi, \phi) \tag{1.38}$$
2. *A conexão ∇ deve se comportar como uma derivação de módulos*
$$\nabla (s \cdot \psi) = (\nabla s) \cdot \psi + s \cdot (\nabla \psi) \tag{1.39}$$
onde ∇s denota a conexão de $\mathcal{C}\ell(M)$ sobre s.

Uma maneira natural de construirmos fibrados de Dirac ocorre quando a variedade M possui uma estrutura Spin. Seja M uma variedade diferenciável e $Q \to M$ um fibrado SO_n-principal sobre M.

Definição 7. *Uma estrutura Spin em um fibrado SO_n-principal Q consiste de um fibrado $Spin_n$-principal P e de um recobrimento duplo $\Lambda : P \to Q$ tais que o seguinte diagrama seja comutativo*

$$\begin{tikzcd}
P \times Spin_n \arrow[r] \arrow[d, "\Lambda\times\lambda"] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Lambda"] & M \arrow[d, equal] \\
Q \times SO_n \arrow[r] & Q \arrow[r, "\pi"] & M
\end{tikzcd}$$

onde a igualdade vertical denota a identidade e λ denota o recobrimento $\lambda : Spin_n \to SO_n$.

Em particular dizemos que M possui uma estrutura Spin se o fibrado de bases P_{SO} possui uma estrutura Spin, usualmente denotada por P_{Spin}. É interessante notar que se P_{SO} possui uma conexão, podemos induzir uma conexão em P_{Spin}, uma vez que as álgebras de Lie dos grupos Spin_n e SO_n são iguais. Dessa forma podemos induzir uma conexão em fibrados associados a P_{Spin}.

Não são todas as variedades M que admitem uma estrutura Spin. A existência de uma estrutura Spin está ligada a topologia de M no seguinte sentido

Proposição 4. *Uma variedade riemanniana orientável (M, g) possui uma estrutura Spin se a segunda classe de Stiefel-Witney do fibrado tangente for nula, $w_2(TM) = 0$.*

Notemos que no caso de M possuir uma estrutura Spin, ela pode não ser única, no sentido de existirem duas ou mais estruturas não equivalentes. É possível caracterizarmos o número de estruturas não equivalentes a partir da cohomologia do fibrado principal das bases P_{SO}. Porém quando falarmos de um determinado fibrado de spinores estaremos subentendendo que a estrutura é fixa, de modo que não precisaremos considerar variações da mesma. Uma forma de olharmos para estruturas Spin que deixa um pouco mais claro como as mesmas se comportam é através das funções de transição dos fibrados envolvidos. Se U_α é uma boa cobertura de M, com as funções de transição do fibrado TM dadas por

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to SO_n \tag{1.40}$$

onde $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. Uma estrutura Spin consiste consiste de um levantamento

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{Spin}_n \tag{1.41}$$

tal que $\tilde{g}_{\alpha\beta} \mapsto g_{\alpha\beta}$ através da aplicação de recobrimento $\mathrm{Spin}_n \to SO_n$. Satisfazendo a condição de cociclo

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\gamma}\tilde{g}_{\gamma\alpha} = \mathbb{I} \tag{1.42}$$

Já vimos que nem toda variedade admite uma estrutura Spin. Se notarmos que todo mapa $g_{\alpha\beta}$, individualmente, possui um levantamento $\tilde{g}_{\alpha\beta}$, a obstrução está em se podemos ou não levantar os mapas de modo que $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ satisfaçam a condição de cociclo. Definindo $\omega_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\gamma}\tilde{g}_{\gamma\alpha}$, vemos que este elemento está no núcleo da aplicação de recobrimento $\mathrm{Spin}_n \to SO_n$, pois como as funções $g_{\alpha\beta}$ são as funções de transição do fibrado tangente, elas necessariamente satisfazem a condição de cociclo. Isto nos mostra que os elementos $\omega_{\alpha\beta\gamma}$ definem um 2-cociclo no cohomologia de Cech de M, cociclo que representa exatamente a segunda classe de Stiefel-Witney de M.

Para uma variedade M com estrutura Spin podemos construir o fibrado de spinores propriamente dito

Definição 8. *O fibrado de* **spinores** *de uma variedade riemanniana com estrutura Spin é o fibrado associado*

$$S = P_{Spin} \times_\rho W \tag{1.43}$$

onde W é um $\mathcal{C}\ell(M)$ módulo irredutível, e ρ é a representação de Spin em W induzida pela ação de $\mathcal{C}\ell(M)$ e pela inclusão $Spin \subset \mathcal{C}\ell(M)$.

Esta forma de construirmos fibrados de módulos sobre $\mathcal{C}\ell(M)$ é particularmente interessante por causa da propriedade

Proposição 5. *Se considerarmos S como acima, munido com a conexão induzida pela conexão Levi-Civita em P_{SO}. Então S é um fibrado de Dirac.*

Da definição de $\mathrm{Spin}_n^{\mathbb{C}}$ vemos que podemos considerar o mapa de projeção na primeira componente $\mathrm{Spin}_n^{\mathbb{C}} \to \mathrm{Spin}$, além disso se considerarmos o recobrimento $\mathrm{Spin}_n \to SO_n$ obtemos um mapa $\lambda : \mathrm{Spin}_n^{\mathbb{C}} \to SO_n$. Usando este mapa definimos

Definição 9. *Uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ em um fibrado SO_n-principal $Q \to M$, consiste de um fibrado $Spin^{\mathbb{C}}$-principal $P \to M$ e de um mapa $\Lambda : P \to Q$ tal que o diagrama abaixo seja comutativo*

$$\begin{array}{ccccc} P \times Spin_n^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\pi} & M \\ \downarrow{\scriptstyle \Lambda\times\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \Lambda} & & \| \\ Q \times SO_n & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

Para uma estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ também existem obstruções, embora estas sejam menos restritivas. Como $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}} = \mathrm{Spin} \times S^1/\{-1,-1\}$. Um levantamento $\tilde{g}_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ é equivalente a dois levantamentos

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &: U_{\alpha\beta} \to \mathrm{Spin} \\ z_{\alpha\beta} &: U_{\alpha\beta} \to S^1 \end{aligned} \tag{1.44}$$

tal que $h_{\alpha\beta} \mapsto g_{\alpha\beta}$ pela aplicação de recobrimento $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}} \to SO$. Neste caso a condição de cociclo se escreve como

$$(h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}h_{\gamma\alpha}, z_{\alpha\beta}z_{\beta\gamma}z_{\gamma\alpha}) \in \{(-1,-1),(1,1)\} \tag{1.45}$$

Se definirmos $\lambda_{\alpha\beta} = z_{\alpha\beta}^2$, é imediato ver que se as condições acima são satisfeitas, então $\lambda_{\alpha\beta}$ satisfaz as condições de cociclo, de modo que as funções $\lambda_{\alpha\beta}$ definem um S^1-fibrado principal sobre M, ou equivalentemente, um fibrado de linha complexo $\mathcal{L}$. Usando que $\omega_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}h_{\gamma\alpha}$ é um cociclo que representa $w_2(TM)$, podemos mostrar que a condição para a existência de uma estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ é

Proposição 6. *Uma variedade M possui uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ se existe um fibrado de linha complexo $\mathcal{L}$ tal que*

$$c^1(\mathcal{L}) =_{\mod 2} w_2(TM) \tag{1.46}$$

onde $c^1(\mathcal{L})$ é a primeira classe de chern do fibrado $\mathcal{L}$.

Usando a inclusão $\mathrm{Spin}_n^{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}\ell_n = \mathcal{C}\ell(TM) \otimes \mathbb{C}$, podemos definir

Definição 10. *O fibrado de* **spinores complexos** *de uma variedade riemanniana (M,g) é o fibrado associado*

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}} = P_{Spin^{\mathbb{C}}} \times_\rho W \tag{1.47}$$

onde W é um módulo irredutível sobre $\mathbb{C}\ell_n = \mathcal{C}\ell(TM) \otimes \mathbb{C}$, e ρ é a ação de $Spin_n^{\mathbb{C}}$ em W dada pela inclusão discutida acima.

Ao contrário de estruturas Spin, somente a conexão Levi-Civita de M não é suficiente para definirmos uma conexão em $P_{\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}}$. Alem da conexão Levi-Civita de M precisamos fixar uma conexão $U(1)$, A_0, no fibrado determinante $\mathcal{L}$ da estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$. Desse modo a conexão induzida no fibrado de spinores $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ depende de uma conexão arbitrária A_0. Embora exista esta dependência temos

Proposição 7. *$\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ com a conexão induzida a partir da conexão Levi-Civita de M e de A_0 em $\mathcal{L}$ é um fibrado de Dirac para qualquer escolha de conexão hermitiana A_0.*

Existe uma classe bastante importante de variedades que possuem naturalmente uma estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$, a classe das variedades quase-complexas. Uma variedade M é dita quase-complexa se existe um endomorfismo $J : TM \to TM$, no espaço tangente de M tal que $J^2 = -1$. Claramente toda variedade quase-complexa deve ter dimensão par[8]. Toda variedade quase-complexa possui uma estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ canônica, embora possam não possuir uma estrutura Spin. Olhando para $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}^{2n}$ é fácil ver que existe um morfismo natural $U_k \to SO_{2k}$. Além disso existe um morfismo canônico

$$\xi : U_k \to \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}_{2k} \tag{1.48}$$

No caso de uma variedade quase-complexa M , o fibrado TM pode ser definido através de funções de transição com valores em U_k

$$g_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta} \to U_k \tag{1.49}$$

Agora consideremos as funções

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} &\to \mathrm{Spin} \\ z_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} &\to S^1 \end{aligned} \tag{1.50}$$

obtidas a partir de $\xi(g_{\alpha\beta}) = (h_{\alpha\beta}, z_{\alpha\beta})$. O morfismo ξ é construído de tal forma que se as funções $g_{\alpha\beta}$ satisfazem a condição de cociclo então as funções $h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}h_{\gamma\alpha} = \pm\mathbb{I}$ satisfazem as condições de cociclo complexas (1.45). Além disso as funções $\lambda_{\alpha\beta} = z^2_{\alpha\beta}$ são explicitamente dadas por $\lambda_{\alpha\beta} = \det g_{\alpha\beta}$, de modo que o fibrado de linha associado a esta estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ é exatamente o fibrado anti-canônico[9] de M, $k_M^{-1} = \det_{\mathbb{C}} T^{1,0} = \wedge_{n,0}M \simeq \wedge^{0,n}M$.

Além de possuírem uma estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ natural, as variedades quase-complexas são interessantes pois podemos descrever explicitamente o fibrado de spinores complexos. Considerando uma variedade quase complexa M com dimensão $2n$ e lembrando que o módulo irredutível para $\mathbb{C}\ell_{2n}$ é $\wedge^*\mathbb{C}^n$, eq.(1.19), não é difícil vermos que $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ pode ser identificado com $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \wedge^* T_{\mathbb{C}}M$, onde $T_{\mathbb{C}}M$ é o fibrado tangente de M com as fibras sendo identificadas com $\mathbb{C}^n$ através da estrutura complexa J.

Considerando a complexificação do fibrado tangente de M com as fibras vistas como $\mathbb{R}^{2n}$, $T_{\mathbb{R}}M \otimes \mathbb{C}$, podemos olhar para os auto espaços da estrutura

[8] Note que nem todas as variedades de dimensão par possuem tal estrutura, um exemplo disto é S^4.

[9] No caso de variedades complexas podemos usar este fato para definir uma conexão canônica em $P_{\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}}$ a partir da conexão de M. Isto é possível pois a conexão de M se estende de maneira natural para as formas diferenciais sobre M, em particular ela define uma conexão em $\wedge^{0,n}M$, e consequentemente uma conexão em $P_{\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}}$.

quase complexa J. Denotando $T_{1,0}$ o auto-fibrado associado ao auto-valor i e por $T_{0,1}$ o auto-fibrado associado a $-i$, e sendo $T^{1,0}$ e $T^{0,1}$ os respectivos duais, podemos mostrar que $T_{\mathbb{C}}M \simeq T_{1,0} \simeq T^{0,1}$. Este isomorfismo juntamente com a caracterização acima de $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ nos permitem concluir que

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \wedge^* T^{0,1} = \wedge^{0,*} M \tag{1.51}$$

Esta caracterização para os spinores complexos é particularmente interessante pois também temos uma descrição explicita da ação de $T_{\mathbb{R}}M \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}\ell_{2n}$. Se $\{e^i, Je^i\}$ é uma base ortonormal para $T^*_{\mathbb{R}}M$, podemos considerar a base para $T_{\mathbb{R}}M \otimes \mathbb{C}$ dada por auto-estados de J

$$\begin{aligned} \xi^i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^i + iJe^i), \\ \bar{\xi}^i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^i - iJe^i) \end{aligned} \tag{1.52}$$

Em termos desta base podemos dar uma forma bastante simples para a ação de $\mathbb{C}\ell_{2n}$. Sendo $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}_{\mathbb{C}})$ temos

$$\begin{aligned} c(\xi^i)\phi &= -\sqrt{2}\xi^i \lrcorner \phi \\ c(\bar{\xi}^i)\phi &= \sqrt{2}\bar{\xi}^i \wedge \phi \end{aligned} \tag{1.53}$$

onde $c(v)$ denota a multiplicação de Clifford pelo vetor v.

Como esta ação vale qualquer que seja $\phi \in \Gamma(\mathbb{S}_{\mathbb{C}})$ é comum denotarmos a mesma simplesmente por

$$\begin{aligned} c(\xi^i) &= -\sqrt{2}i(\xi^i), \\ c(\bar{\xi}^i) &= \sqrt{2}e(\bar{\xi}^i) \end{aligned} \tag{1.54}$$

onde e denota a multiplicação exterior e i a contração a esquerda.

No caso de uma variedade riemanniana (M, g) com estrutura Spin possuir também uma estrutura quase-complexa, podemos considerar a estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ associada. Dessa forma podemos construir o fibrado de spinores $\mathbb{S}$ e o fibrado de spinores complexos $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$, sendo ambos conectados pela relação

Proposição 8. *Seja M uma variedade riemanniana com estrutura Spin e estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ proveniente de uma estrutura quase-complexa, e sejam $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ os fibrados de spinores associados a estas estruturas. Então vale a relação*

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}} = \mathbb{S} \otimes k_M^{\frac{1}{2}} \tag{1.55}$$

onde k_M denota o fibrado canônico de M.

A seguir descreveremos duas ferramentas importantes para lidarmos com operadores de Dirac. A fórmula de Weitzenböck que nos permite comparar o operador de Dirac com o Laplaciano. E o teorema do índice que muitas vezes nos fornece informações a respeito do núcleo do operador de Dirac.

1.2.1 Fórmula de Weitzenböck

Para falarmos da fórmula de Weitzenböck, precisamos definir o laplaciano em um fibrado de Dirac. Embora só precisemos desta definição para fibrados de Dirac, a mesma pode ser feita de modo geral para qualquer fibrado riemanniano E com conexão riemanniana[10].

Seja E um fibrado vetorial sobre M, com uma estrutura riemanniana e com uma conexão ∇ compatível com esta estrutura. Para campos vetoriais $u, v \in TM$ e $\phi \in \Gamma(E)$ definimos a seguinte derivada de segunda ordem

$$\nabla^2_{u,v}\phi = \nabla_u \nabla_v \phi - \nabla_{\nabla_u v}\phi \tag{1.56}$$

onde $\nabla_u v$ é calculado em termos da conexão Levi-Civita de M.

Usando esta derivada definimos o laplaciano como sendo

$$\begin{aligned} \nabla^*\nabla &: \Gamma(E) \to \Gamma(E) \\ \nabla^*\nabla\phi &= -\mathrm{tr}(\nabla^2_{\cdot,\cdot}\phi) \end{aligned} \tag{1.57}$$

Em termos de um referencial local ortonormal $\{e_i\}$ de TM podemos escrever o laplaciano como sendo

$$\begin{aligned} \nabla^*\nabla\phi &= -\sum_{i=1}^{n} \nabla^2_{e_i,e_i}\phi \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\phi - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{div}(e_i)\nabla_{e_i}\phi \end{aligned} \tag{1.58}$$

onde o divergente, $\mathrm{div}(e_i)$, é definido pela expressão

$$\mathrm{div}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} g(\nabla_{e_j} e_i, e_j) \tag{1.59}$$

O elemento que falta para podermos comparar o laplaciano com o operador de Dirac é o operador de curvatura de E. Existem duas formas equivalentes para definirmos a curvatura de um fibrado E. Podemos definir diretamente o tensor de curvatura como sendo

$$R(u,v)\phi = \nabla_u \nabla_\phi - \nabla_v \nabla_u \phi - \nabla_{[u,v]}\phi \tag{1.60}$$

Ou podemos pensar na 2-forma de curvatura. Para isto lembremos que a conexão pode ser vista como um mapa

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(E) \tag{1.61}$$

[10] Todas as afirmações feitas para fibrados com estrutura riemanniana também são válidas para fibrados com estruturas hermitianas.

onde $\Omega^p(E)$ denota as seções do fibrado $\wedge^p M \otimes E$. Usando a regra de Leibniz podemos estender este mapa para $\Omega^p(E)$. Usando esta extensão podemos falar do operador $\nabla^2 = \nabla\nabla : \Omega^0(E) \to \Omega^2(E)$. Este operador pode ser entendido como sendo um 2-forma com valores nos endomorfismos de E, esta é a 2-forma de curvatura $F = \nabla^2 \in \wedge^2 M \otimes \mathrm{End}(E)$. Para relacionarmos as duas definições notemos que se contrairmos a 2-forma de curvatura por dois vetores obtemos um endomorfismo do fibrado E, tendo isso em mente não é difícil vermos que

$$R(u, v) = v \lrcorner (u \lrcorner F) \tag{1.62}$$

No caso de E ser um fibrado de Dirac, podemos considerar a ação de elementos de $\mathcal{C}\ell(M)$ em seções de E, em particular considerar a ação de 2-formas de M em seções de E através da identificação de 2-formas com elementos na álgebra de Clifford

$$\alpha \wedge \beta \mapsto \frac{1}{2}(\alpha\beta - \beta\alpha) \tag{1.63}$$

Com isso podemos pensar que F é um operador que age nas seções de E, que pela identificação acima pode ser descrito como

$$F\phi = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} e_i \cdot e_j \cdot R_{ij}\phi \tag{1.64}$$

onde $\cdot$ denota a multiplicação de Clifford em E e R_{ij} é o endomorfismo de E dado por $R(e_i, e_j)$.

Com estas informações podemos comparar o operador de Dirac com o laplaciano

Proposição 9. *Para qualquer fibrado de Dirac E, o laplaciano $\nabla^*\nabla$ e o operador de Dirac D satisfazem a relação*

$$D^2 = \nabla^*\nabla + F_S \tag{1.65}$$

onde F_S é a curvatura de S.

Esta expressão é conhecida como a forma geral da fórmula de Weitzenböck. No caso de M possuir uma estrutura Spin e de E ser o fibrado de spinores a expressão acima se simplifica

Proposição 10. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana com estrutura Spin e $\mathbb{S}$ o fibrado de spinores associado a esta estrutura com a conexão induzida pela conexão Levi-Civita de M. então a fórmula de Weitzenböck para este caso é*

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}R \tag{1.66}$$

onde R denota a curvatura escalar de M.

Para o caso do fibrado de spinores complexos a situação é análoga

Proposição 11. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana com estrutura Spin$^{\mathbb{C}}$ com uma conexão hermitiana A fixa no fibrado de linha associado a esta estrutura $\mathcal{L}$. E seja $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ o fibrado de spinores complexos associado a esta estrutura com a conexão induzida pela conexão Levi-Civita de M e pela conexão A em $\mathcal{L}$. Nestas circunstancias a fórmula de Weitzenböck se escreve como*

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}R + \frac{i}{2}\Omega \tag{1.67}$$

onde R denota a curvatura escalar de M e Ω a 2-forma de curvatura de A vista como um operador nos spinores.

1.2.2 Teorema do Índice

O operador de Dirac é um operador diferencial que age nas seções de um fibrado de Dirac. Pode-se mostrar que o operador de Dirac é um operador diferencial do tipo elíptico. A teoria de operadores elípticos é bastante extensa, [20, 22], de onde varias propriedades satisfeitas pelos operadores são deduzidas, mas para a teoria do índice existe uma propriedade em particular que é de grande importância

Proposição 12. *Sejam E_1 e E_2 dois fibrados vetoriais com métrica sobre uma variedade compacta M, e seja $L : \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ um operador diferencial elíptico. Então o adjunto formal L^* também é um operador elíptico e tanto o núcleo de L como de L^* possuem dimensão finita.*

Neste caso o co-núcleo de L, que é dado pelo núcleo de L^*, também tem dimensão finita. Usando isto definimos o índice analítico de um operador elíptico L

$$\mathrm{ind}(L) = \dim\ker L - \dim \mathrm{coker} L \tag{1.68}$$

que pela proposição acima é um número inteiro.

O fato surpreendente que o teorema do índice nos traz é que este índice é na verdade uma grandeza topológica. Ele pode ser calculado através de classes características. No caso particular do operador de Dirac podemos dar fórmulas explicitas para o cálculo do mesmo.

No calculo do índice do operador de Dirac a primeira coisa a ser notada é que o índice é sempre nulo no caso de M ter dimensão ímpar [22]. A partir de agora iremos supor que M tem dimensão $2n$. Neste caso, usando o elemento de volume de M, podemos decompor o fibrado de spinores como

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^+ \oplus \mathbb{S}^- \tag{1.69}$$

e com relação a esta decomposição o operador de Dirac se escreve na forma

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} \tag{1.70}$$

onde temos

$$
\begin{aligned}
D^+ &: \Gamma(\mathbb{S}^+) \to \Gamma(\mathbb{S}^-) \\
D^- &: \Gamma(\mathbb{S}^-) \to \Gamma(\mathbb{S}^+)
\end{aligned}
\tag{1.71}
$$

Nesta situação obtemos uma expressão para calcular índice de D^+, que analiticamente é dado pela expressão $\mathrm{ind}(D^+) = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^-$. Lembrando que a classe característica $\hat{A}(M)$ é definida em termos das classes de Pontrjagin

$$
\hat{A}(M) = 1 - \frac{1}{24}p_1(M) + \frac{1}{5760}\left(7p_1^2(M) - p_2(M)\right) + \cdots \tag{1.72}
$$

temos a expressão para o índice

$$
\mathrm{ind}(D^+) = \begin{cases} \hat{A}(M) & \text{se } \dim M = 0 \bmod 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1.73}
$$

1.2.3 Operadores Acoplados

Seja S um fibrado de Dirac e consideremos um fibrado hermitiano arbitrário E com uma conexão ∇^A compatível com a estrutura hermitiana. Sendo S um fibrado de módulos sobre a álgebra de Clifford de M, $\mathcal{C}\ell(M)$, podemos definir uma estrutura de módulo em $S \otimes E$. Para isto basta definirmos a ação de um elemento $\alpha \in \mathcal{C}\ell(M)$ por

$$
\alpha\,(s \otimes t) = (\alpha s) \otimes t \tag{1.74}
$$

Além disso no fibrado podemos munir $S \otimes E$ com uma conexão, $\nabla^{S\otimes A}$. Esta conexão é chamada de conexão produto e é definida por

$$
\nabla^{S\otimes A} = \nabla^S \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \nabla^A \tag{1.75}
$$

Com estas definições não é difícil concluirmos que

Proposição 13. *Seja S um fibrado de Dirac e (E, ∇^A) um fibrado hermitiano com conexão compatível. Então $S \otimes E$ com a conexão produto $\nabla^{S\otimes A}$ é um fibrado de Dirac.*

Sendo $S \otimes E$ com a conexão $\nabla^{S\otimes A}$ um fibrado de Dirac podemos definir o operador de Dirac D_A pela expressão usual

$$
\begin{aligned}
D_A\psi &= \sum_i e^i \nabla^{S\otimes A}_{e_i}\psi \\
D_A &: \Gamma(S \otimes E) \to \Gamma(S \otimes E)
\end{aligned}
\tag{1.76}
$$

Usualmente o operador de Dirac D_A é chamado de operador de Dirac acoplado com a conexão ∇^A. Para este operador também existe uma fórmula do índice.

Da mesma forma que no caso usual, iremos considerar que M tem dimensão $2n$, pois no caso de dimensão ímpar o índice é nulo. Neste caso, usando a decomposição $S = S^+ \oplus S^-$, podemos escrever

$$S \otimes E = \left(S^+ \otimes E\right) \oplus \left(S^- \otimes E\right) \tag{1.77}$$

Com relação a esta decomposição o operador e Dirac acoplado se escreve como $D_A = D_A^+ + D_A^-$, de forma totalmente análoga com o que ocorre no caso sem acoplamento.

Proposição 14. *Seja D_A o operador de Dirac acoplado a conexão ∇^A no fibrado E. Sendo $ch(E)$ o caracter de Chern do fibrado E temos*

$$ind(D_A^+) = (-1)^n \int_M ch(E) \wedge \hat{A}(M) \tag{1.78}$$

É interessante notar que esta expressão para o índice permite que o operador de Dirac acoplado D_A possua índice não nulo mesmo no caso em que a dimensão de M não é múltipla de 4.

Além do teorema do índice podemos generalizar a fórmula de Weitzenböck para os operadores acoplados.

Proposição 15. *Sendo F_A a 2-forma de curvatura da conexão ∇^A em E, pensada como um endomorfismo do fibrado $\mathbb{S} \otimes E$ através da ação de Clifford, temos*

$$D_A^2 = \Delta^{S\otimes A} + \frac{1}{4}R + F_A \tag{1.79}$$

onde $\Delta^{S\otimes A}$ denota o Laplaciano em $\mathbb{S} \otimes E$ associado a conexão obtida a partir da conexão ∇^S em $\mathbb{S}$ e ∇^A em E.

1.2.4 Operadores de Dirac em Variedades Kähler

Variedades Kähler possuem naturalmente duas estruturas geométricas importantes. Elas são ao mesmo tempo variedades complexas e simpléticas.

Definição 11. *Uma variedade riemanniana (M^{2n}, g, J) com uma estrutura quase-complexa J é uma variedade Kähler se J satisfaz*

- $J^2 = -1$.

- $g(Jx, Jy) = g(x, y)$, *ou seja, J é ortogonal com respeito a g.*

- $\nabla J = 0$, *onde ∇ é conexão Levi-Civita de (M, g) (Integrabilidade).*

Usando a estrutura complexa J e a métrica g definimos o seguinte tensor

$$\omega(x, y) = g(Jx, y) \tag{1.80}$$

Usando a ortogonalidade de J podemos mostrar que $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$ de onde concluímos que ω é de fato uma 2-forma. Além disso podemos usar que que $\nabla J = 0$ juntamente com a identidade de Bianchi para mostrarmos que ω é fechada. Desse modo ω define uma estrutura simplética em M. A forma ω em geral é denominada de forma de Kähler.

Nos casos em que a condição $\nabla J = 0$ não é satisfeita, isto é, J não é integrável, dizemos que (M, g, J) é quase-Kähler.

Estendendo g e J por linearidade complexa para $TM \otimes \mathbb{C}$, e usando que $T_{1,0}$ e $T_{0,1}$ são os respectivos auto-espaços de J podemos ver facilmente que ω é uma $(1, 1)$-forma. Se $\{e_i\}$ é um referencial local ortonormal de (M, g), com base dual $\{e^i\}$, e se definimos

$$\begin{aligned} \xi^j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^j + iJe^j), \\ \bar{\xi}^j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^j - iJe^j) \end{aligned} \tag{1.81}$$

podemos escrever a forma de Kähler como sendo

$$\omega = i \sum_j \xi^j \wedge \bar{\xi}^j \tag{1.82}$$

Por se tratar de uma variedade complexa, podemos descrever o fibrado de spinores de M associado a estrutura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ canônica como sendo $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} = \wedge^{0,*} M$. Porém no caso de variedades Kähler esta descrição pode ser levada mais adiante com uma descrição do operador de Dirac em termos de operadores envolvendo a estrutura complexa.

Usando a estrutura complexa J podemos escrever as formas diferenciais de M como sendo

$$\wedge^k M \otimes \mathbb{C} = \oplus_{p+q=k} \wedge^{p,q} M \tag{1.83}$$

Dado um fibrado hermitiano $E \to M$ sobre M como uma conexão ∇^A denotamos por $\Omega^k(E)$ o espaço das seções suaves do fibrado $\left(\wedge^k M \otimes \mathbb{C}\right) \otimes E$. Usando a decomposição das formas diferenciais descrita acima podemos escrever

$$\Omega^k(E) = \oplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(E) \tag{1.84}$$

onde $\Omega^{p,q}(E)$ denota o espaço das seções suaves de $\wedge^{p,q} M \otimes E$. Dessa forma podemos pensar na conexão de E como sendo um mapa entre os espaços

$$\nabla^A : \Omega^0(E) \to \Omega^1(E) \tag{1.85}$$

Usando a decomposição das formas diferenciais podemos escrever a conexão da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
\nabla^A &= \partial_A + \bar{\partial}_A \\
\partial_A &: \Omega^{0.0}(E) \to \Omega^{1,0}(E) \\
\bar{\partial}_A &: \Omega^{0,0}(E) \to \Omega^{0,1}(E)
\end{aligned} \tag{1.86}
$$

Qualquer que seja o fibrado E sempre é possível estendermos a conexão para um mapa

$$
\nabla_A : \Omega^k(E) \to \Omega^{k+1}(E) \tag{1.87}
$$

Mas de modo geral não temos uma decomposição da forma

$$
\nabla^A : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p+1,q}(E) \oplus \Omega^{p,q+1}(E) \tag{1.88}
$$

As situações para as quais este fato é verdade é dada por

Proposição 16. *Dado um fibrado $E \to M$ sobre uma variedade complexa M munido de conexão ∇^A. A mesma se decompõe como*

$$
\nabla^A = \partial_A + \bar{\partial}_A : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p+1,q}(E) \oplus \Omega^{p,q+1}(E) \tag{1.89}
$$

se, e somente se, E tiver uma estrutura holomorfa, e ∇^A for compatível com esta estrutura. Onde entendemos compatibilidade no seguinte sentido: usando a decomposição $\nabla = \partial_A + \bar{\partial}_A$ para elementos de $\Omega^0(E)$, ∇^A é dita compatível com a estrutura holomorfa de E se uma uma seção $s \in \Omega^0(E)$ for holomorfa, se e somente se, $\bar{\partial}_A s = 0$.

Para fibrados em geral este resultado é bastante importante, mas para os nossos interesses basta sabermos que se (M, g, J) for uma variedade Kähler, então $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ possui uma estrutura holomorfa e a conexão induzida em $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ inteiramente pela conexão de Chern[11] em M é compatível com esta estrutura, de modo que em $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\nabla^S = \partial_S + \bar{\partial}_S &: \Omega^{p,q}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}) \to \Omega^{p+1,q}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}) \oplus \Omega^{p,q+1}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}) \\
\partial_S &: \Omega^{p,q}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}) \to \Omega^{p+1,q}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}) \\
\bar{\partial}_S &: \Omega^{p,q}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}) \to \Omega^{p,q+1}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}})
\end{aligned} \tag{1.90}
$$

Agora usando a métrica naturalmente presente em $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ podemos definir os adjuntos formais

$$
\begin{aligned}
\partial^* &: \Omega^{p,q}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}) \to \Omega^{p-1,q}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}) \\
\bar{\partial}^* &: \Omega^{p,q}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}) \to \Omega^{p,q-1}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}})
\end{aligned} \tag{1.91}
$$

[11] De fato se considerarmos (M, g, J) como uma variedade complexa, podemos considerar o fibrado tangente TM como sendo um fibrado holomorfo sobre M com uma estrutura hermitiana induzida a partir da estrutura riemanniana g. Dessa forma a conexão e Chern é a única conexão sem torção compatível com a estrutura holomorfa e com a estrutura hermitiana de TM, [14].

Quando identificamos $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ com as formas diferenciais $\wedge^{0,*}M$ a conexão ∇^S induzida em $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ se identifica com a própria conexão de Chern de M estendida para as formas diferenciais. Além disso podemos considerar o operador

$$\bar{\partial} + \bar{\partial}^* : \wedge^{p,q}M \to \wedge^{p,q+1}M \oplus \wedge^{p,q-1}M \tag{1.92}$$

que quando restrito a $\wedge^{0,*}M = \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ pode ser pensado como um operador de $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^+ \to \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^-$ e $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^- \to \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^+$. O fato surpreendente é que este operador se identifica com o operador de Dirac.

Teorema 2. *Seja (M, g, J) uma variedade Kähler, e seja $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ o fibrado de spinores associado a estrutura Spin$^{\mathbb{C}}$ canônica de (M, g, J) co a conexão induzida inteiramente*[12] *pela conexão de Chern de M. Com a identificação $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} = \wedge^{0,*}M$ podemos escrever o operador de Dirac como sendo*

$$D = \sqrt{2}\left(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*\right) \tag{1.93}$$

Se estivermos considerando o operador de Dirac acoplado a um fibrado hermitiano e holomorfo $E \to M$ com uma conexão ∇^A compatível com a estrutura holomorfa e com a hermitiana. A identificação de $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ com $\wedge^{0,*}M$ nos permite identificar $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \otimes E$ com

$$\Gamma(\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \otimes E) = \Omega^{0,*}(E) \tag{1.94}$$

Neste espaço podemos considerar os operadores determinados pela conexão ∇^A

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_A &: \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E) \\ \bar{\partial}_A^* &: \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q-1}(E) \end{aligned} \tag{1.95}$$

Teorema 3. *Seja (M, g, J) uma variedade Kähler, $E \to M$ um fibrado holomorfo hermitiano com uma conexão compatível ∇^A. Identificando $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \otimes E$ com $\Omega^{0,*}(E)$ o operador de Dirac pode ser identificado com*

$$D_A = \sqrt{2}\left(\bar{\partial}_A + \bar{\partial}_A^*\right) \tag{1.96}$$

[12] No caso da estrutura Spin$^{\mathbb{C}}$ canônica podemos considerar a conexão induzida no fibrado determinante pela conexão de Chern de M, desta forma a conexão de $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ é inteiramente determinada pela conexão de Chern de M.

Capítulo 2

Estimativas Clássicas

Neste capítulo faremos uma exposição das três principais estimativas para o primeiro auto-valor do operador de Dirac. Embora estes resultados sejam clássicos, algumas demonstrações feitas são originais, sendo que algumas são feitas no sentido de generalizarmos os resultados para operadores de Dirac acoplados.

2.1 Cota Superior

Uma cota superior para o primeiro auto-valor da operador de Dirac foi originalmente encontrada por Vafa e Witten, [26]. Nesta seção iremos expor a elegante demonstração dada por Atiyah [3].

Consideremos uma variedade riemanniana (M, g) compacta e um fibrado E sobre M com métrica e com uma conexão A compatível com esta métrica. Seja D_A o operador de Dirac acoplado a (E, A) e seja λ_1 o primeiro auto-valor de D_A, então temos

Teorema 4. *Existe uma constante C, dependendo de M mas não de E ou da conexão A, tal que*

$$| \lambda_1 | \leq C \tag{2.1}$$

Dem. $\dim M$ par:

Usando que

$$\mathrm{ind}(D_A^+) = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^- \tag{2.2}$$

vemos que se $\mathrm{ind}(D_A^+) \neq 0$ então D_A possui núcleo, de modo que a cota superior é trivialmente satisfeita. Dessa forma o resultado só possui algum sentido para os casos em que $\mathrm{ind}(D_A^+) = 0$.

Para os casos em que $\mathrm{ind}(D_A^+) = 0$ a idéia é procurar uma conexão A_0 em E para a qual D_{A_0} possua núcleo não trivial e tal que seja possível compararmos D_A com D_{A_0} no sentido que

$$| D_A - D_{A_0} | \leq C \tag{2.3}$$

pois neste caso teremos $\lambda_1 \leq C$.

Ocorre que em E pode não ser possível encontrarmos uma conexão com esta propriedade, porém sempre será possível encontrarmos uma conexão dessas em um fibrado da forma $E \otimes \mathbb{C}^N$, onde $\mathbb{C}^N$ denota o fibrado trivial de posto N. Considerando a conexão flat padrão em $E \otimes \mathbb{C}^N$ é imediato vermos que o espectro do operador de Dirac em $E \otimes \mathbb{C}^N$ é o mesmo que o de D_A, desse modo podemos usar $E \otimes \mathbb{C}^N$ para fazermos a comparação entre os operadores de Dirac.

Primeiramente, usando a expressão para o índice (1.78), sempre podemos encontrar um fibrado W com conexão B tal que no fibrado $S \otimes E \otimes W$ o operador $D^+_{A \otimes B}$ possui índice não nulo, e consequentemente $D_{A \otimes B}$ possui núcleo. Agora, como estamos considerando M compacta, existe um fibrado W' tal que

$$W \oplus W' = \mathbb{C}^N \tag{2.4}$$

Fixando uma conexão B' em W' podemos considerar o operador de Dirac $D_{A \oplus B \oplus B'}$ no fibrado

$$\mathbb{S} \otimes E \otimes \mathbb{C}^N \simeq (\mathbb{S} \otimes E \otimes W) \oplus (\mathbb{S} \otimes E \otimes W') \tag{2.5}$$

Como $D_A \otimes B$ possui núcleo, é claro que $D_{A \oplus B \oplus B'}$ também possui núcleo. Desse modo podemos comparar D_A, entendido como operador em $\mathbb{S} \otimes \mathbb{C}^N$. A diferença de ambos os operadores é

$$D_{A \otimes B \otimes B'} - D_A = \sum_i e^i \cdot B \otimes B'(e_i) \tag{2.6}$$

onde $B \otimes B'$ é a matriz de 1-formas da conexão em $W \otimes W'$. Com isso temos que

$$| D_{A \otimes B \otimes B'} - D_A | = | \sum_i e^i \cdot B \otimes B'(e_i) | \tag{2.7}$$

Como a norma de $\sum_i e^i \cdot B \otimes B'(e_i)$ é independente de V e de A podemos tomar $C = | \sum_i e^i \cdot B \otimes B'(e_i) |$.

$\square$

Dem. $\dim M$ ímpar:

Trocando M por $M \times S^1$ os auto-valores do operador de Dirac passam a ser dados $\pm\sqrt{\lambda_j + m}$, onde λ_j são os autovalores do operador de Dirac original sobre M, e $m \in \mathbb{Z}$, [13]. Com isto vemos que o menor auto-valor é o mesmo em ambos os casos, de modo que se M tem dimensão ímpar podemos aplicar a demonstração do caso par para $M \times S^1$ obtendo o resultado para M.

$\square$

2.2 Cota Inferior: Variedades Riemannianas

Originalmente este resultado foi obtido por Friedrich. Nesta seção iremos dar uma demonstração que deixa explicito que tais tipos de argumento podem, eventualmente, ser estendidos para o caso de operadores de Dirac acoplados.

Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta e seja (E, ∇^A) um fibrado de Dirac sobre M. Para os casos nos quais existe alguma forma de controlarmos a 2-forma de curvatura de ∇^A, vista como um operador em $\Gamma(E)$ podemos usar a fórmula de Weitzenböch para encontrarmos uma cota inferior para o módulo do menor auto-valor do operador de Dirac em E.

Para que esta cota inferior seja ótima, no sentido de existirem exemplos nos quais a cota inferior é de fato o módulo do primeiro auto-valor, devemos considerar uma conexão deformada em E ao invés de considerarmos a conexão ∇^A. Usando ∇^A juntamente com a ação de $\mathcal{C}\ell(M)$ em $\Gamma(E)$ podemos definir a seguinte conexão

$$\nabla_v^f \psi = \nabla_v^A \psi + f v \cdot \psi \tag{2.8}$$

onde $\psi \in \Gamma(E)$ $v \in TM$ age em ψ através da multiplicação de Clifford. Nesta expressão, a princípio, f pode ser uma função de M.

Usando a estrutura de módulo de E com relação a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(M)$ podemos considerar um elemento $\alpha \otimes v \in T^*M \otimes TM$ como sendo uma 1-forma com valores em $\mathrm{End}(E)$. Usando esta identificação é fácil concluirmos que

Lema 1. *Em termos de um referencial local $\{e_i\}$ de TM, com dual $\{e^i\}$, a conexão deformada descrita acima pode ser escrita da seguinte maneira*

$$\nabla^f = \nabla^A + B \tag{2.9}$$

onde B é a 1-forma com valores em End(E) dada por

$$B = f \sum_i e^i \otimes e_i \tag{2.10}$$

Sendo E é um fibrado de Dirac sabemos a ação de Clifford é unitária. Usando este fato é imediato vermos que a conexão ∇^f é uma conexão métrica, de modo que E com a conexão ∇^f continua sendo um fibrado de Dirac.

O operador de Dirac associado a conexão ∇^f é definido da forma usual. Mas em termos de um referencial local ortonormal $\{e_i\}$ podemos relaciona-lo com o operador de Dirac proveniente da conexão não deformada de E

$$
\begin{aligned}
D^f &= \sum_i e_i \nabla_i^f \\
&= \sum_i e_i \nabla_i^A + \sum_i e_i B(e_i) \\
&= D + f \sum_i e_i^2 \\
&= D - f \sum_i 1 \\
&= D - nf
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

onde n é a dimensão de M. Dessa forma que D^f e D diferem por um termo de ordem zero.

Definição 12. *O Laplaciano em E relativo a conexão ∇^A é definido por*

$$
\Delta\psi = -\sum_i \nabla_i^A \nabla_i^A \psi - \sum_i div(e_i) \nabla_i \psi \tag{2.12}
$$

onde $div(e_i)$ é dado por

$$
div(e_i) = \sum_i g(\nabla_j e_i, e_j) \tag{2.13}
$$

e ∇ denota a conexão Levi-Civita de (M, g).

No caso de estarmos lidando com uma base ortonormal $\{e_i\}$ temos a identidade

$$
\begin{aligned}
\sum_i \nabla_i e_i &= \sum_{ij} g(\nabla_i e_i, e_j) e_j \\
&= -\sum_{ij} g(\nabla_i e_j, e_i) e_j \\
&= -\sum_j div(e_j) e_j
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

onde na primeira passagem foi usada a compatibilidade de ∇ com a métrica.

O Laplaciano da conexão deformada Δ^f se relaciona com o laplaciano usual da seguinte maneira

Lema 2. *Sendo Δ^f o laplaciano da conexão ∇^f temos a relação*

$$
\Delta^f = \Delta - 2fD - grad(f) + nf^2 \tag{2.15}
$$

onde Δ e D são o laplaciano e o operador de Dirac associados a conexão usual em $\mathbb{S}$.

Dem.

Da definição de Laplaciano temos

$$\Delta^f \psi = -\sum_i \nabla_i^f \nabla_i^f \psi - \sum_i div(e_i) \nabla_i^f \psi \tag{2.16}$$

O termo $\sum_i \nabla_i^f \nabla_i^f \psi$ pode ser simplificado

$$\begin{aligned}
\sum_i \nabla_i^f \nabla_i^f \psi &= \sum_i (\nabla_i^A + f e_i)(\nabla_i^A + f e_i)\psi \\
&= \sum_i \left(\nabla_i^A \nabla_i^A \psi + \nabla_i^A (f e_i \psi) + f e_i (\nabla_i^A \psi) - f^2 \psi \right) \\
&= \sum_i \left(\nabla_i^A \nabla_i^A \psi + e_i (\nabla_i f) \psi + f (\nabla_i e_i) \psi + 2 f e_i (\nabla_i^A \psi) - n f^2 \psi \right) \\
&= \sum_i \nabla_i^A \nabla_i^A \psi + f \left(\sum_i \nabla_i e_i \right) \psi + \mathrm{grad}(f) \psi + 2 f D \psi - n f^2 \psi \\
&= \sum_i \nabla_i^A \nabla_i^A \psi - f \left(\sum_j div(e_j) e_j \right) \psi + \mathrm{grad}(f) \psi + 2 f D \psi - n f^2 \psi
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Por outro lado o termo $\sum_i div(e_i) \nabla_i^f \psi$ pode ser escrito como

$$\sum_i div(e_i) \nabla_i^f \psi = \sum_i div(e_i) \nabla_i^A \psi + f \sum_i div(e_i) e_i \psi \tag{2.18}$$

Combinando as ultimas três equações concluímos que

$$\Delta^f = \Delta - 2 f D - \mathrm{grad}(f) + n f^2 \tag{2.19}$$

$\square$

Lema 3. *Se f é uma função de M, vale a relação*

$$D(f\psi) = grad(f)\psi + f D \psi \tag{2.20}$$

Dem.

Basta usarmos a propriedade que ∇^A é uma derivação e notarmos que

$$\mathrm{grad}(f) = \sum_i e_i \nabla_i^A f = \sum_i e_i(f) e_i \tag{2.21}$$

$\square$

Com estas identidades podemos encontrar um análogo da fórmula de Weitzenböck para a conexão deformada

Lema 4. *Para a conexão deformada ∇^f vale a expressão de Weitzenböck*

$$(D-f)^2 = \Delta^f + F_A + (1-n)f^2 \tag{2.22}$$

Dem.

Usando o lema 3 é imediato vermos que

$$(D-f)^2 = D^2 - 2fD - \mathrm{grad}(f) + f^2 \tag{2.23}$$

Combinado a equação (2.19) com a equação (2.23)

$$(D-f)^2 = \Delta^f + \left(D^2 - \Delta\right) + (1-n)f^2 \tag{2.24}$$

Usando a Fórmula de Weitzenböck obtemos a relação

$$(D-f)^2 = \Delta^f + F_A + (1-n)f^2 \tag{2.25}$$

$\square$

Teorema 5. *Seja (M,g) uma variedade riemanniana compacta com estrutura Spin e dimensão n.Seja λ um auto-valor do operador de Dirac associado. Então temos que*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\frac{n}{n-1}R_0 \tag{2.26}$$

onde R_0 denota o mínimo da curvatura escalar de (M,g).

Além disso, se existe uma auto-seção $\psi \in \mathbb{S}$, $D\psi = \lambda\psi$, tal que $\lambda = \frac{1}{4}\frac{n}{n-1}R_0$, então a curvatura escalar R é constante e ψ satisfaz a equação

$$\nabla_x \psi = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_0}{n(n-1)}}\,x\psi \tag{2.27}$$

para qualquer que seja $x \in TM$.

Dem.

Sendo (M,g) uma variedade riemanniana com estrutura Spin e $\mathbb{S}$ o fibrado e spinores associado, munido com a conexão induzida pela conexão Levi-Civita de (M,g), a expressão do lema 4 pode ser escrita como

$$(D-f)^2 = \Delta^f + \frac{1}{4}R + (1-n)f^2 \tag{2.28}$$

Seja ψ tal que $D\psi = \lambda\psi$. Tomando o parâmetro da deformação, f, com sendo constante e igual a $\frac{\lambda}{n}$ a equação (2.28) pode ser escrita como

$$\lambda^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\psi = \Delta^{\frac{\lambda}{n}}\psi + \frac{1}{4}R\psi \tag{2.29}$$

Tomando o produto interno desta equação com ψ e integrando em M obtemos que

$$\lambda^2\left(\frac{n-1}{n}\right) \mid\mid \psi \mid\mid_{L_2}^2 = \mid\mid \nabla^{\frac{\lambda}{n}}\psi \mid\mid_{L_2}^2 + \frac{1}{4}\int_M R \mid \psi \mid^2 \tag{2.30}$$

Usando que $\mid\mid \nabla^{\frac{\lambda}{n}}\psi \mid\mid_{L_2}^2 \geq 0$ e majorando $R \geq R_0$ concluímos que

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\frac{n}{n-1}R_0 \tag{2.31}$$

No caso da igualdade ser satisfeita, ou seja, $\lambda = \frac{1}{4}\frac{n}{n-1}R_0$ devemos ter

$$\begin{aligned} R &= R_0 \\ \nabla^{\frac{\lambda}{n}}\psi &= 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

De onde concluímos o restante das afirmações.

□

A equação (2.27), satisfeita no caso da cota ser atingida, pode ser vista de uma forma mais geral.

Definição 13. *Um spinor é dito spinor de Killing se satisfaz a equação*

$$\nabla_x\psi = \mu x \cdot \psi \tag{2.33}$$

qualquer que seja $x \in TM$.

A presença de um spinor de Killing não identicamente nulo em uma variedade (M, g) implica em algumas propriedades geométricas para M.

Proposição 17. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana com estrutura spin e seja ψ um spinor satisfazendo a equação (2.33). Então (M, g) é uma variedade Einstein*[1] *e vale a relação*

$$\mu^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{n(n-1)}R \tag{2.34}$$

[1] Uma variedade é dita Einstein se o tensor de Ricci for multiplo da métrica.

Dem.

Primeiramente notemos que se considerarmos a restrição de um spinor de Killing, ψ, a uma curva γ, com $|\dot{\gamma}| = 1$, ψ deve satisfazer a equação

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \mu\dot{\gamma}(t) \cdot \psi(t) \tag{2.35}$$

De forma que se $\psi(0) = 0$ implica em $\psi \equiv 0$. Logo se ψ não é identicamente nulo então ψ não se anula em nenhum ponto.

Usando que a conexão em $\mathbb{S}$ se comporta como uma derivação, a propriedade $\nabla_x\psi = \mu x \cdot \psi$ implica que

$$\nabla_x\nabla_y\psi = \mu\left(\nabla_x y\right) \cdot \psi + \mu^2 y \cdot x \cdot \psi \tag{2.36}$$

Como estamos usando a conexão Levi-Civita em M sabemos que $[x, y] = \nabla_x y - \nabla_y x$, o que implica que

$$\left(\nabla_x\nabla_y - \nabla_y\nabla_x - \nabla_{[x,y]}\right)\psi = \mu^2(y \cdot x - x \cdot y)\psi \tag{2.37}$$

Usando esta relação podemos calcular

$$\sum_j e_j R(x, e_j)\psi = \mu^2 \sum_j e_j(e_j x - x e_j)\psi = 2(1 - n)\mu^2 x \cdot \psi \tag{2.38}$$

Mas é possível mostrarmos, [7, 20], que

$$\sum_j e_j R(x, e_j)\psi = -\frac{1}{2}\mathrm{Ric}(x) \cdot \psi \tag{2.39}$$

de onde concluímos que

$$Ric(x) \cdot \psi = 4(n - 1)\mu^2 x \cdot \psi \tag{2.40}$$

Como ψ não se anula em nenhum ponto podemos concluir que vale a identidade

$$Ric(x) = 4(n - 1)\mu^2 x \tag{2.41}$$

Dessa forma, se considerarmos o tensor de ricci propriamente dito, $\mathrm{Ricc}(x, y) = g(\mathrm{Ric}(x), y)$, vemos imediatamente que

$$\mathrm{Ricc}(x, y) = 4(n - 1)\mu^2 g(x, y) \tag{2.42}$$

o que caracteriza (M, g) como uma variedade Einstein de curvatura escalar $R = 4n(n - 1)\mu^2$.

$\square$

2.3 Cota Inferior: Variedades Kähler

A busca de uma estimativa melhor para o caso de variedades Kähler vem do fato de que a estimativa obtida na seção anterior para variedades riemannianas não pode ter a igualdade satisfeita no caso de variedades Kähler. Para vermos isto consideremos uma variedade Kähler (M^{2n}, g, J) com estrutura Spin. Seja $\mathbb{S}$ o respectivo fibrado de spinores e D o operador de Dirac neste fibrado. Se ψ é um spinor que satisfaz a equação de Killing, $\nabla_x \psi = \mu x \cdot \psi$, é imediato vermos que ψ é uma auto-seção de D com auto-valor $-2n\mu$. Nesta situação podemos usar a forma de Kähler de M para construirmos outra auto-seção, que em alguns casos mostra que a igualdade na estimativa riemanniana não pode ser satisfeita. Para isto lembremos que em termos de um referencial unitário local, $\{\xi^i, \bar{\xi}^i\}$, a forma de Kähler pode ser escrita como

$$\omega = i \sum_{i=1}^{n} \xi^i \wedge \bar{\xi}^i \tag{2.43}$$

Consideremos a seguinte seção de $\mathbb{S}$

$$\sigma = \omega \cdot \psi \tag{2.44}$$

Proposição 18. *A seção σ é uma auto-seção do operador de Dirac com auto-valor $\frac{2n-4}{2n}\lambda$*

Dem

Usando que em termos da base $\{\xi^i, \bar{\xi}^i\}$ o operador de Dirac pode ser escrito como

$$D = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \nabla_{\xi_i} + \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}^i \nabla_{\bar{\xi}_i} \tag{2.45}$$

temos que, para um spinor ψ que satisfaz a equação de Killing, $\nabla_x \psi = \mu x \cdot \psi$, vale a identidade

$$\begin{aligned} D(\omega\psi) &= \sum_{i=1}^{n} \xi^i \nabla_{\xi_i}(\omega\psi) + \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}^i \nabla_{\bar{\xi}_i}(\omega\psi) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \xi^i (\nabla_{\xi_i}\omega)\psi + \sum_{i=1}^{n} \xi^i \omega \nabla_{\xi_i}\psi + \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}^i (\nabla_{\bar{\xi}_i}\omega)\psi + \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}^i \omega \nabla_{\bar{\xi}_i}\psi \\ &= \sum_{i=1}^{n} \xi^i \omega \nabla_{\xi_i}\psi + \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}^i \omega \nabla_{\bar{\xi}_i}\psi \\ &= \mu \left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i \omega \xi^i \right) \cdot \psi + \mu \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}^i \omega \bar{\xi}^i \right) \cdot \psi \end{aligned} \tag{2.46}$$

Mas temos a seguinte relação

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} \xi^l \omega \xi^l &= i \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi^l \left(\xi^j \wedge \bar{\xi}^j \right) \bar{\xi}^l \\
&= \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \xi^l \left(\xi^j \bar{\xi}^j - \bar{\xi}^j \xi^j \right) \bar{\xi}^l \\
&= \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} (2-n)(\xi^j \bar{\xi}^j - \bar{\xi}^j \xi^j) \\
&= (2-n)\omega
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Dessa forma temos que

$$D\left(\omega\psi\right) = (4-2n)\mu\omega\psi \tag{2.48}$$

Usando que o auto-valor associado a ψ é $-2n\mu$ temos o resultado.

□

Dessa forma se M tem dimensão diferente de 2, a estimativa para variedades riemannianas não pode ser atingida. Pois se isto ocorresse ψ seria um Killing spinor, e pelo argumento acima $\omega\psi$ seria outro auto-estado com auto-valor menor do que o permitido pela estimativa.

Para podermos usar a estrutura Kähler de modo a obtermos uma estimativa mais fina para o primeiro auto-valor do operador de Dirac, precisamos entender como relacionar esta estrutura com os spinores. Seja (M, g, J) uma variedade Kähler, sabemos que o fibrado de spinores pode ser descrito por

$$\mathbb{S} = \wedge^{0,*} M \otimes k^{-\frac{1}{2}} \tag{2.49}$$

sendo a ação de Clifford dada pela multiplicação exterior e pela contração nos elementos de $\wedge^{0,*}M$. Usando esta descrição podemos encontrar os auto-espaços da forma de Kähler, vista como operador em $\mathbb{S}$.

Proposição 19. *Seja ω a forma de Kähler de M vista como operador em $\mathbb{S}$. Para um spinor $\psi_p \in \wedge^{0,p} M \otimes k^{-\frac{1}{2}}$ temos que*

$$\omega\psi_p = i(2p-n)\psi_p \tag{2.50}$$

Dessa forma o fibrado de spinores pode ser decomposto em auto-fibrados de ω

$$\mathbb{S} = \oplus_p \mathbb{S}_p \tag{2.51}$$

onde $\mathbb{S}_p = \wedge^{0,p} M \otimes k^{-\frac{1}{2}}$

Dem*.

Localmente, um spinor homogêneo de grau p, em $\mathbb{S}$, pode ser descrito por

$$\psi_p = \left(\bar{\xi}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\xi}^{i_p}\right) \otimes k_M^{-\frac{1}{2}} \tag{2.52}$$

Dessa forma para sabermos como a ação de ω se comporta em spinor deste tipo temos que saber como $\xi^k \wedge \bar{\xi}^k$ age em elementos da forma $\bar{\xi}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\xi}^{i_p}$.

Temos que analisar dois casos. Primeiramente se $\bar{\xi}^k \in \bar{\xi}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\xi}^{i_p}$. Neste caso temos que

$$\begin{aligned}
\xi^k \wedge \bar{\xi}^k \cdot \bar{\xi}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\xi}^{i_p} &= \frac{1}{2}(\xi\bar{\xi}^k - \bar{\xi}^k\xi^k) \cdot \bar{\xi}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\xi}^{i_p} \\
&= \left(-i(\xi^k)e(\bar{\xi}^k) + e(\bar{\xi}^k)i(\xi^k)\right) \bar{\xi}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\xi}^{i_p} \\
&= e(\bar{\xi}^k)i(\xi^k)\bar{\xi}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\xi}^{i_p} \\
&= \bar{\xi}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\xi}^{i_p}
\end{aligned} \tag{2.53}$$

De forma análoga podemos concluir que se $\bar{\xi}^k \notin \bar{\xi}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\xi}^{i_p}$ temos que

$$\xi^k \wedge \bar{\xi}^k \cdot \bar{\xi}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\xi}^{i_p} = -\bar{\xi}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\xi}^{i_p} \tag{2.54}$$

Usando estas relações temos que

$$\begin{aligned}
\omega \cdot \psi_p &= i\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i \wedge \bar{\xi}^i\right) \cdot \psi_p \\
&= i\sum_{i=1}^{n} \left(\xi^i \wedge \bar{\xi}^i \cdot \psi_p\right) \\
&= i\left(p\psi_p - (n-p)\psi_p\right) \\
&= i(2p-n)\psi_p
\end{aligned} \tag{2.55}$$

A decomposição $\mathbb{S} = \oplus_k \mathbb{S}_k$ é imediata.

□

Na decomposição $\mathbb{S} = \oplus_k \mathbb{S}_k$ podemos considerar os operadores de projeção p_k de $\mathbb{S}$ em $\mathbb{S}_k$. Usando os operadores de projeção podemos construir o seguinte operador

$$\mathcal{I} = \sum_{k=0}^{n} (i)^k p_k \tag{2.56}$$

Proposição 20. *O quadrado de $\mathcal{I}$ é relacionado com o operador de paridade*

$$\mathcal{I}^2 = \alpha \tag{2.57}$$

Além disso temos que o adjunto, $\mathcal{I}^*$, também satisfaz esta relação, isto é,

$$(\mathcal{I}^*)^2 = \alpha \tag{2.58}$$

Com isto vemos que $\mathcal{I}^2 = (\mathcal{I}^*)^2$

Dem.

Basta notarmos que os espaços $\mathbb{S}_k$ são ortogonais, de modo que

$$\mathcal{I}^2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k p_k = \alpha \tag{2.59}$$

Para a segunda afirmação basta notarmos que o adjunto, $\mathcal{I}^*$, é dado por

$$\mathcal{I}^* = \sum_{k} (-i)^k p_k \tag{2.60}$$

□

Corolário 1. *O operador $\mathcal{I}^2$ anti comuta com o operador de Dirac.*

$$D\mathcal{I}^2 = -\mathcal{I}^2 D \tag{2.61}$$

Corolário 2. *O operador de Dirac ao quadrado comuta com $\mathcal{I}$.*

$$D^2\mathcal{I} = \mathcal{I}D^2 \tag{2.62}$$

Observação 1. *Os resultados acima continuam válidos se ao invés de considerarmos $\mathcal{I}$ considerarmos o seu adjunto formal $\mathcal{I}^*$*

Usando este operador podemos considerar a seguinte deformação da conexão

$$\nabla_x^{a,b}\psi = \nabla_x\psi + ax \cdot \psi + ibJ(x) \cdot \alpha(\psi) \tag{2.63}$$

O primeiro termo da deformação é exatamente a deformação proposta por Friedrich, a mesma que foi usada na seção anterior. Já o segundo termo envolve a estrutura complexa da variedade (M, g, J). Como feito no caso riemanniano, a estratégia para encontrarmos uma cota inferior para D consiste em encontrar o laplaciano associado a conexão deformada. Para tal precisamos definir o operador de Dirac modificado. Usando um referencial ortonormal $\{e^i\}$ definimos

$$\tilde{D} = \sum_{i=1}^{2n} J(e^i)\nabla_i \tag{2.64}$$

Teorema 6. *O laplaciano associado a conexão $\nabla^{a,b}$ se escreve como*

$$\Delta^{a,b}\psi = \Delta\psi + n(a^2+b^2)\psi - 2aD\psi - 2ib\tilde{D}\alpha(\psi) + 4iab\omega\alpha(\psi) \tag{2.65}$$

Antes de mostrarmos o teorema precisamos de dois lemas preliminares

Lema 5. *Se α for uma 1-forma temos a relação*

$$\alpha\omega - \omega\alpha = 2J(\alpha) \tag{2.66}$$

Dem.
Como α é uma 1-forma temos a identidade

$$\alpha\omega - \omega\alpha = -2\alpha\lrcorner\omega \tag{2.67}$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} \alpha\lrcorner\omega(y) &= \omega(\alpha^\flat, y) = g(\alpha^\flat, J(y)) \\ &= -g(J(\alpha^\flat), y) = -J(\alpha)(y) \end{aligned} \tag{2.68}$$

□

Lema 6. *A forma de Kähler pode ser escrita dentro da álgebra de Clifford como sendo*

$$\sum_{i=1}^{n} J(e^i)e^i = 2\omega \tag{2.69}$$

Dem.
Usando o lema anterior obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} j(e^i)e^i &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(e^i\omega - \omega e^i)e^i \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} e^i\omega e^i + n\omega\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(4-n)\omega + n\omega\right] = 2\omega \end{aligned} \tag{2.70}$$

□

Dem. Teorema

Usando a definição (12) para o laplaciano e desenvolvendo os termos chegamos na seguinte expressão

$$\begin{aligned}\Delta^{a,b}\psi = \Delta^a\psi - \sum_j ib\nabla_j^a\big(J(e^j)\alpha(\psi)\big) - \sum_j ibJ(e^j)\alpha(\nabla_j^a\psi)\\ + \sum_j b^2J(e^j)\alpha\big(J(e^j)\alpha(\psi)\big) - \sum_j div(e^j)ibJ(e^j)\alpha(\psi)\end{aligned} \tag{2.71}$$

Agora basta simplificarmos os termos do laplaciano acima. Isto será feito separadamente.

Lema 7. *Temos a simplificação*

$$\sum_j b^2J(e^j)\alpha\big(J(e^j)\alpha(\psi)\big) = nb^2\psi \tag{2.72}$$

Dem.
Como a ação de um vetor troca a paridade de um spinor, vemos facilmente que α anti comuta com a multiplicação de Clifford de um vetor. Por isso temos

$$b^2J(e^j)\alpha\big(J(e^j)\alpha(\psi)\big) = -b^2J(e^j)J(e^j)\psi = b^2\psi \tag{2.73}$$

Com isso temos que

$$\sum_j b^2J(e^j)\alpha\big(J(e^j)\alpha(\psi)\big) = \sum_j b^2\psi = nb^2\psi \tag{2.74}$$

□

Lema 8. *Temos a simplificação*

$$ib\sum_j \nabla_j^a\big(J(e^j)\alpha(\psi)\big) = ib\tilde{D}\alpha(\psi) - \sum_j div(e^j)J(e^j)\alpha(\psi) - 2ib\omega\cdot\alpha(\psi) \tag{2.75}$$

Dem.

Precisamos lembrar da propriedade de que a conexão em um fibrado de Dirac é uma derivação com relação as seções de $\mathcal{C}\ell(M)$. Usando esta propriedade mais o lema (6) temos

$$
\begin{aligned}
\sum_j ib\nabla_j^a \left(J(e^j)\alpha(\psi)\right) &= \sum_j \nabla_j \left(J(e^j)\alpha(\psi)\right) + a\sum_j e^j J(e^j)\alpha(\psi) \\
&= \sum_j \left(\nabla_j J(e^j)\right)\alpha(\psi) + \sum_j J(e^j)\nabla_j\alpha(\psi) + a\omega\alpha(\psi) \\
&= \sum_j \left(\nabla_j J(e^j)\right)\alpha(\psi) + \tilde{D}\alpha(\psi) - 2a\omega\cdot\alpha(\psi)
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

Por outro lado temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_i \nabla_i J(e^i) &= \sum_{i,j} g\left(\nabla_i J(e^i), J(e^j)\right) J(e^j) \\
&= -\sum_{i,j} g\left(\nabla_i J(e^j), J(e^i)\right) J(e^j) \\
&= -\sum_{i,j} g\left(e^i, \nabla_i e^j\right) j(e^j) \\
&= -\sum_j div(e^j) j(e^j)
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

Juntando as duas ultimas equações concluímos o desejado.

□

Lema 9. *Temos a simplificação*

$$
ib\sum_j J(e^j)\alpha(\nabla_i^a\psi) = ib\tilde{D}\alpha(\psi) - 2iab\omega\cdot\alpha(\psi) \tag{2.78}
$$

Dem.

Notemos que, como ∇_j preserva a paridade de ψ, ∇_j comuta com o operador de paridade α. sando este fato, mais a definição de ∇^a, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
& ib\sum_j J(e^j)\alpha\left(\nabla_j\psi + ae^j\psi\right) \\
&= ib\sum_j J(e^j)\alpha(\nabla_j\psi) + iab\sum_j J(e^j)\alpha(e^j\psi) \\
&= ib\sum_j J(e^j)\nabla_j\alpha(\psi) - iab\sum_j J(e^j)e^j\alpha(\psi) \\
&= ib\tilde{D}\alpha(\psi) - 2iab\omega\cdot\alpha(\psi)
\end{aligned}
\tag{2.79}
$$

$\square$

Usando estes resultados podemos escrever para o laplaciano

$$\Delta^{a,b}\psi = \Delta^{a}\psi + nb^2\psi - 2ib\tilde{D}\alpha(\psi) + 4iab\omega \cdot \alpha(\psi) \tag{2.80}$$

Usando a equação (2.19) concluímos o desejado.

$\square$

Para que seja possível controlarmos os termos envolvendo $\tilde{D}$ e ω no laplaciano acima, precisamos entender um pouco mais a relação entre os operadores D e $\tilde{D}$. Para isso usaremos um artifício para decompor os auto-espaços de D, $E_\lambda(D)$, de uma forma que seja possível analisarmos a ação dos termos desejados.

Lema 10. *O operador $\mathcal{I}$ tem as seguintes propriedades*

$$\begin{aligned} \nabla\mathcal{I} &= 0 \\ J(x)\mathcal{I} &= -\mathcal{I}x \end{aligned} \tag{2.81}$$

Dem.

A primeira propriedade segue naturalmente do fato de que $\nabla\omega = 0$, que nos diz que em um fibrado de Dirac ∇ respeita a decomposição $\mathcal{S} = \oplus_k \mathcal{S}_k$.

A segunda identidade segue da identificação

$$\begin{aligned} \xi_v &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v + iJv) \\ \bar{\xi}_v &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v - iJv) \end{aligned} \tag{2.82}$$

juntamente com a ação descrita na equação 1.54.

$\square$

Usando este lema podemos relacionar o operador D com o operador $\tilde{D}$

Proposição 21. *Os operadores D e $\tilde{D}$ se relacionam através de $\mathcal{I}$ da seguinte forma*

$$\tilde{D} = -\mathcal{I}D\mathcal{I}^* = \mathcal{I}^*D\mathcal{I} \tag{2.83}$$

Dem.

Como $\nabla\mathcal{I} = 0$, usando o lema anterior temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}D\mathcal{I}^*\psi &= \sum_i \mathcal{I}e^i\nabla_i\left(\mathcal{I}^*\psi\right) \\
&= \sum_i \mathcal{I}e^i\mathcal{I}^*\nabla_i\psi \\
&= -\sum_i J(e^i)\mathcal{I}\mathcal{I}^*\nabla_i\psi \\
&= -\sum_i J(e^i)\nabla_i\psi = \tilde{D}\psi
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Neste desenvolvimento usamos o fato imediato de que $\mathcal{I}\mathcal{I}^* = 1$. Mas podemos fazer a seguinte manipulação

$$\begin{aligned}
-\mathcal{I}D\mathcal{I}^* &= -\mathcal{I}D\mathcal{I}^3 \\
&= \mathcal{I}^3D\mathcal{I} \\
&= \mathcal{I}^*D\mathcal{I}
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Estabelecendo a segunda igualdade.

□

Proposição 22. *Temos as relações*

$$\begin{aligned}
D\mathcal{I}D\mathcal{I} = \mathcal{I}D\mathcal{I}D \\
\mathcal{I}D\mathcal{I} = -\mathcal{I}^*D\mathcal{I}^*
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Dem.

Usando a proposição anterior temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}D\mathcal{I}D &= -\tilde{D}\mathcal{I}^2D \\
&= \tilde{D}D\mathcal{I}^2 \\
&= -D\tilde{D}\mathcal{I}^2 \\
&= D\mathcal{I}D\mathcal{I}
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Neste desenvolvimento usamos o fato de que $\tilde{D}D = -D\tilde{D}$. A demonstração deste fato é bastante técnica e não nos traz nenhum benefício de entendimento.

Por isso omitiremos a demonstração da mesma, que pode ser encontrada em [12].

Da mesma forma temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}D\mathcal{I} &= \left(-\tilde{D}\mathcal{I}\right)\mathcal{I} \\
&= -\tilde{D}\mathcal{I}^2 \\
&= \mathcal{I}^2\tilde{D} \\
&= -\mathcal{I}^2\left(\mathcal{I}D\mathcal{I}^*\right) \\
&= -\mathcal{I}^3 D\mathcal{I}^*
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Mas da definição de $\mathcal{I}$ vemos que $\mathcal{I}^3 = \mathcal{I}^*$.

□

Proposição 23. *Se $\psi \in E_\lambda(D)$ a expressão*

$$e_\lambda\psi = (D+\lambda)\mathcal{I}^*\psi \tag{2.89}$$

define um endomorfismo $e_\lambda : E_\lambda(D) \to E_\lambda(D)$ tal queine um endomorfismo $e_\lambda : E_\lambda(D) \to E_\lambda(D)$ tal que

$$e_\lambda^4 + 4\lambda^4 = 0 \tag{2.90}$$

Dem.

Tomando $\psi \in E_\lambda(D)$ e usando que D^2 comuta com $\mathcal{I}^*$ temos

$$\begin{aligned}
D(e_\lambda\psi) &= D^2\mathcal{I}^*\psi + \lambda D\mathcal{I}^*\psi \\
&= \lambda^2\mathcal{I}^*\psi + \lambda D\mathcal{I}^{\psi} \\
&= \lambda\left(\lambda + D\right)\mathcal{I}^*\psi
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Com isso vemos que e_λ é de fato um endomorfismo de $E_\lambda(D)$. Por outro lado, usando a proposição (22) e supondo que $\psi \in E_\lambda(D)$, podemos calcular

$$\begin{aligned}
e_\lambda^2\psi &= (D\mathcal{I}^* + \lambda\mathcal{I}^*)(D\mathcal{I}^* + \lambda\mathcal{I}^*)\psi \\
&= D\mathcal{I}^*D\mathcal{I}^*\psi + \lambda D(\mathcal{I}^*)^2\psi + \lambda\mathcal{I}^*D\mathcal{I}^*\psi + \lambda^2(\mathcal{I}^*)^2\psi \\
&= -D\mathcal{I}D\mathcal{I}\psi - \lambda(\mathcal{I}^*)^2D\psi - \lambda\mathcal{I}D\mathcal{I}\psi + \lambda(\mathcal{I}^*)^2\psi \\
&= -D\mathcal{I}D\mathcal{I}\psi - \lambda\mathcal{I}D\mathcal{I}\psi \\
&= -\mathcal{I}D\mathcal{I}D\psi - \lambda\mathcal{I}D\mathcal{I}\psi \\
&= -2\lambda\mathcal{I}D\mathcal{I}\psi
\end{aligned} \tag{2.92}$$

De modo análogo podemos desenvolver os termos $e_\lambda^3\psi$ e $e_\lambda^4\psi$ obtendo

$$\begin{aligned} e_\lambda^3\psi &= -2\lambda^2(D+\lambda)\mathcal{I}\psi \\ e_\lambda^4\psi &= -4\lambda^4\psi \end{aligned} \tag{2.93}$$

□

Em particular a expressão $e_\lambda^4 = -4\lambda^4$ nos diz que os possíveis auto-valores de e_λ em $E_\lambda(D)$ só podem ser um dos números complexos $\pm(1\pm i)\lambda$. Baseado nisto definimos

$$E_\lambda^k(D) = \{\psi \in E_\lambda(D) \mid e_\lambda\psi = i^k(1+i)\lambda\psi\} \tag{2.94}$$

Corolário 3. *Seja λ um auto-valor de D. Então existe $k \in \{0,1,2,3\}$ e $\psi \in E_\lambda^k(D)$, com $\psi \neq 0$. Além disso ψ satisfaz*

$$\tilde{D}\psi = -\lambda\left(i^k(1+i)\mathcal{I} - 1\right)\psi \tag{2.95}$$

Dem.

A existência de ψ é um fato imediato. Supondo que $\psi \in E_\lambda^k(D)$ e usando a proposição (21) concluímos que

$$\begin{aligned} \tilde{D}\psi &= -\mathcal{I}D\mathcal{I}^*\psi \\ &= -\mathcal{I}\left(e_\lambda\psi - \lambda\mathcal{I}^*\psi\right) \\ &= -i^k(1+i)\lambda\mathcal{I}\psi + \lambda\psi \\ &= -\lambda\left(i^k(1+i)\mathcal{I} - 1\right)\psi \end{aligned} \tag{2.96}$$

□

Proposição 24. *Seja $\lambda \neq 0$ um auto-valor de D, e seja $\psi \in E_\lambda^k(D)$. Então os operadores de projeção p_j referentes a decomposição $\mathbb{S} = \oplus_j \mathbb{S}_j$ satisfazem as relações*

$$\begin{aligned} || \, p_{4l-k-1}\psi \, || &= || \, p_{4l-k}\psi \, || \\ p_{4l-k+1}\psi &= p_{4l-k+2}\psi = 0 \end{aligned} \tag{2.97}$$

Dem.

Usando a ação explicita em termos da base $\{\xi^i, \bar{\xi}^i\}$ é possível mostrarmos que os operadores p_j satisfazem a relação

$$p_j J(x) - J(x)p_{j-1} = i(p_j x - x p_{j-1}) \tag{2.98}$$

Esta relação implica que os operadores D e $\tilde{D}$ satisfazem

$$p_j \tilde{D} - \tilde{D} p_{j-1} = i(p_j D - D p_{j-1}) \tag{2.99}$$

Podemos mostrar que $\tilde{D}$ é auto-adjunto da mesma forma que mostramos que D é auto-adjunto. Usando isto mais a relação acima podemos concluir, para $\psi \in E^k_\lambda(D)$, que

$$\begin{aligned} \langle p_j \tilde{D}\psi \mid \psi\rangle - \langle \psi \mid p_{j-1}\tilde{D}\psi\rangle = \\ i\langle (p_j D - D p_{j-1})\psi \mid \psi\rangle = \\ i\langle p_j D\psi \mid \psi\rangle + i\langle p_{j-1}\psi \mid D\psi\rangle = \\ i\lambda\langle p_j\psi \mid \psi\rangle + i\lambda\langle p_{j-1}\psi \mid \psi\rangle = \\ i\lambda\left(\| p_j\psi \|^2 - \| p_{j-1}\psi \|^2\right) \end{aligned} \tag{2.100}$$

Com esta relação e o corolário (3) concluímos que

$$(i + i^{k+j}) \| p_j\psi \|^2 = \left(i + (-i)^{k+j}\right) \| p_{j-1}\psi \|^2 \tag{2.101}$$

Substituindo o valores apropriados para j obtemos a relação desejada.

$\square$

Proposição 25. *Se $\lambda \neq 0$ é um auto-valor de D, e se $\psi \in E^k_\lambda(D)$. Temos que*

$$\begin{aligned} \langle -i\tilde{D}\psi \mid \mathcal{I}^2\psi\rangle = (-1)^{k+1}\lambda \| \psi \|^2 \\ \langle -i\omega\psi \mid \mathcal{I}^2\psi\rangle = (-1)^k \| \psi \|^2 \end{aligned} \tag{2.102}$$

Dem.

Como $\mathcal{I}^2 = \alpha$ anti-comuta com D vemos imediatamente que se $\lambda \neq 0$ então $\langle \psi \mid \mathcal{I}^2\psi\rangle = 0$. Dessa forma temos que

$$\langle -i\tilde{D}\psi \mid \mathcal{I}^2\psi\rangle = -i^k(1-i)\lambda\langle \psi \mid \mathcal{I}\psi\rangle \tag{2.103}$$

Usando a definição de $\mathcal{I}$ mais as relações da proposição (24) temos

$$\begin{aligned} \langle \psi \mid \mathcal{I}\psi\rangle &= \sum_j (-i)^j \| p_j\psi \|^2 \\ &= \sum_j (-i)^{4j-k-1} \| p_{4j-k-1}\psi \|^2 + \sum_j (-i)^{4j-k} \| p_{4j-k}\psi \|^2 \\ &= i^k(1+i)\sum_j \| p_{4j-k}\psi \|^2 = \frac{1}{2} i^k (1+i) \| \psi \|^2 \end{aligned} \tag{2.104}$$

Combinando estas duas equações obtemos

$$\langle -i\tilde{D}\psi \mid \mathcal{I}^2\psi\rangle = (-1)^{k+1}\lambda \mid\mid \psi \mid\mid^2 \tag{2.105}$$

Escrevendo

$$\omega = i\sum_j (2j-n)p_j \tag{2.106}$$

temos que

$$\begin{aligned}
\langle -i\omega\psi \mid \mathcal{I}^2\psi\rangle &= \langle \sum_j (2j-n)p_j\psi \mid \sum_k (-1)^k p_k\psi\rangle \\
&= \sum_j (-1)^j(2j-n) \mid\mid p_j\psi \mid\mid^2 \\
&= \sum_p (-1)^{4p-k}(8p-2k-n) \mid\mid p_{4p-k}\psi \mid\mid^2 \\
&+ \sum_p (-1)^{4p-k-1}(8p-2k-2-n) \mid\mid p_{4p-k-1}\psi \mid\mid^2 \\
&= 2(-1)^k \sum_p \mid\mid p_{4p-k}\psi \mid\mid^2 = (-1)^k \mid\mid \psi \mid\mid^2
\end{aligned} \tag{2.107}$$

□

Com estas relações podemos usar o laplaciano deformado para encontrar uma cota inferior para o operador de Dirac em variedades Kähler.

Teorema 7. *Seja M uma variedade Kähler com estrutura Spin e seja D o operador de Dirac associado. Então se λ for um auto-valor de D, temos que*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\frac{n+2}{n}R_0 \tag{2.108}$$

onde R_0 denota o mínimo da curvatura escalar e M.

Dem.

Usando o teorema (6) juntamente com a fórmula de Weitzenböck podemos escrever

$$\Delta^{a,b} + \frac{1}{4}R = D^2 + n(a^2+b^2) - 2aD + 2ib\alpha\tilde{D} + 4iab\omega\alpha \tag{2.109}$$

Sendo λ um auto-valor de D podemos escolher $\psi \in E^k_\lambda(D)$. Aplicando esta equação a ψ e tomando o produto interno com ψ obtemos que

$$
\begin{aligned}
\| \nabla^{a,b}\psi \|^2 + \frac{1}{4}\int_M R \mid \psi \mid^2 = \big(\lambda^2 + n(a^2+b^2) - 2a\lambda\big) \| \psi \|^2 \\
- 2b\langle -i\tilde{D}\psi \mid \mathcal{I}^2\psi\rangle - 4ab\langle -i\omega\psi \mid \mathcal{I}^2\psi\rangle
\end{aligned}
\tag{2.110}
$$

Usando que $\| \nabla^{a,b}\psi \| \geq 0$ e os resultados da proposição (25) temos que

$$
\frac{1}{4}R_0 \| \psi \|^2 \leq \big(\lambda^2 + n(a^2+b^2) - 2a\lambda + 2b(-1)^{k+1}(-\lambda + 2a)\big) \| \psi \|^2 \tag{2.111}
$$

Escolhendo

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\lambda}{n+2} \\
b &= (-1)^{k+1}\frac{\lambda}{n+2}
\end{aligned}
\tag{2.112}
$$

obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}R_0 \leq \left(\lambda^2 + 2\frac{n}{(n+2)^2}\lambda^2 - 2\frac{1}{n+2}\lambda^2 + 2\lambda^2\frac{1}{n+2}(-1 + 2\frac{1}{n+2})\right) \\
&\frac{1}{4}R_0 \leq \lambda^2\frac{n}{n+2}
\end{aligned}
\tag{2.113}
$$

□

Capítulo 3

Operadores Acoplados

Tendo em mente as estimativas existentes para o primeiro auto-valor do operador de Dirac sobre variedades com curvatura escalar positiva, e tendo visto que a presença de uma estrutura geométrica como a estrutura Kähler afeta estas estimativas, uma pergunta natural que podemos fazer é de como o primeiro auto-valor do operador de Dirac se comporta com o acoplamento de uma conexão externa ∇^A em um fibrado E.

Esta pergunta é particularmente relevante pois em Física o operador de Dirac no fibrado de spinores $\mathbb{S}$ aparece na equação que descreve uma partícula livre. Se desejarmos considerar uma partícula que interage com uma força externa devemos considerar $\mathbb{S} \otimes E$, onde E é um fibrado que modela as simetrias da partícula, e a conexão ∇^A em E representa a força externa.

Desse modo é bastante natural considerarmos o problema de como o primeiro auto-valor do operador de Dirac acoplado se comporta. Em um primeiro momento podemos pensar que a generalização da fórmula de Weitzenböck para o caso acoplado nos de alguma informação. Mas como veremos adiante, o primeiro auto-valor do operador de Dirac acoplado depende de uma forma sutil do acoplamento, de modo que só podemos esperar obter informações em casos específicos.

3.1 Dependência Geométrica

O resultado a seguir nos mostra que o primeiro auto-valor do operador de Dirac sente até mesmo perturbações na conexão do fibrado E.

Teorema 8. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta com estrutura Spin e com curvatura escalar $R > 0$. Então podemos encontrar um fibrado trivial $\underline{\mathbb{C}}^N$, para N suficientemente grande e uma família de conexões ∇^{A_t} em $\underline{\mathbb{C}}^N$, tais que o primeiro auto-valor do operador de Dirac acoplado D_{A_t} seja não nulo e tão pequeno quanto se queira.*

Dem.: $\dim M$ par

Primeiramente consideraremos o caso em que a dimensão de M é $2n$. Como (M, g) tem curvatura escalar maior do que zero, concluímos que o operador de Dirac em $\mathbb{S}$, D_S, não possui núcleo. Porém, se considerarmos o operador acoplado a um fibrado E o índice do operador acoplado é dado por

$$\operatorname{ind}(D_B^+) = (-1)^n \int_M ch(E) \wedge \hat{A}(M) \tag{3.1}$$

Escolhendo E como sendo o pullback de um fibrado gerador de S^{2n} através de uma mapa de grau 1 $M \to S^{2n}$ vemos que a única classe de Chern de E que não é nula é precisamente $c_n(E)$. Além disso $c_n(E)$ é um gerador para a cohomologia $H^n(M, \mathbb{Z})$. Dessa forma, usando que o operador não acoplado possui índice nulo podemos concluir que o índice de D_B^+ é $\pm$ o posto de E. Tendo índice não nulo D_B^+, e consequentemente D_B, possuem núcleo.

Com isso encontramos um fibrado E tal que D_A possui núcleo. Como M é uma variedade compacta, podemos encontrar um segundo fibrado E' tal que

$$E \oplus E' = \underline{\mathbb{C}}^N \tag{3.2}$$

Tomando qualquer conexão $\nabla^{B'}$ em E' podemos definir o operador de Dirac $D_{A=B\oplus B'}$ em $\mathbb{S} \otimes \underline{\mathbb{C}}^N$. Como D_B possui núcleo é imediato vermos que D_A também possui núcleo.

Por outro lado podemos considerar a conexão trivial, $\underline{d}$, em $\underline{\mathbb{C}}^N$. Considerando esta conexão definimos em $\mathbb{S} \otimes \underline{\mathbb{C}}^N$ o operador de Dirac D_0. Neste caso se escrevermos uma seção de $\mathbb{S} \otimes \underline{\mathbb{C}}^N$ como sendo

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

o operador D_0 se escreve como

$$D_0 = \begin{pmatrix} D_S \\ D_S \\ \vdots \\ D_S \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Com isso vemos que a menos de multiplicidade o espectro de D_0 coincide com o espectro do operador não acoplado D_S.

Consideremos a diferença entre as conexões

$$\alpha = \nabla^A - \underline{d} \tag{3.5}$$

e a família contínua de conexões definida por

$$\nabla^{A_t} = \underline{d} + t\alpha \tag{3.6}$$

Com esta família de conexões podemos definir uma família contínua de operadores de Dirac associados as conexões ∇^{A_t}

$$D_{A_t} = \sum_i e^i \nabla_i^{A_t} \tag{3.7}$$

Seja $\lambda(t)$ o primeiro auto-valor do operador de Dirac D_{A_t}. Como a família D_{A_t} é contínua temos que $\lambda(t)$ é uma função contínua de t. Mas o operador $D_{A_0} = D_0$ não possui núcleo, enquanto que $D_{A_1} = D_A$ possui núcleo. Com isso vemos que no intervalo $[0,1]$ $\lambda(t)$ varia continuamente de $\lambda(0) \neq 0$ até $\lambda(1) = 0$, sendo tão pequeno quanto se queira.

$\square$

Dem.: $\dim M$ ímpar

Da mesma forma que foi feito no caso da dimensão de M ser par, precisamos encontrar um fibrado E tal que o operador acoplado D_A possua núcleo. Se isto for possível todos os demais passos da demonstração são os mesmos.

No caso da dimensão de M ser ímpar o teorema do índice não nos fornece nenhuma informação, pois o mesmo sempre é nulo. Desse modo consideremos o produto cartesiano $M \times S^1$. Como $M \times S^1$ tem dimensão par podemos encontrar E como feito anteriormente de modo que D_A possua núcleo. Sendo λ_j os auto-valores do operador de Dirac da restrição $\mathbb{S} \otimes E\mid_M$ sabemos que, [13], o espectro de D_A é dado por $\pm\sqrt{\lambda_j^2 + m^2}$ com $m \in \mathbb{Z}$. Dessa forma para que D_A tenha núcleo, a sua restrição a $\mathbb{S} \otimes E\mid_M$ também precisa ter núcleo. Com isto encontramos um fibrado $E\mid_M$ tal que o operador de Dirac em $\mathbb{S} \otimes E\mid_M \to M$ possui núcleo.

$\square$

3.2 Operadores Acoplados em S^2

Como vimos na seção anterior, para situações muito gerais, pode não ser possível encontrarmos uma cota inferior para o primeiro auto-valor do operador de Dirac acoplada. Porém se tomarmos uma variedade em particular e se restringirmos a classe das conexões ∇^A em E pode ser possível encontrarmos tais cotas inferiores. Este fato ocorre se $M = S^2$ e se pedirmos que a conexão ∇^A no fibrado E satisfaça a condição Hermitian-Einstein.

Definição 14. *Uma conexão ∇^A em um fibrado E sobre uma variedade Kähler M é Hermitian-Einstein se satisfaz a condição*

$$\Lambda F_A = \omega \lrcorner F_A = c\mathbb{I} \tag{3.8}$$

onde F_A é a 2-forma de curvatura da conexão ∇^A, ω é a forma de Kähler de M e $\mathbb{I}$ o endomorfismo identidade de E.

Superfícies de Riemann, em particular S^2, são naturalmente variedades Kähler, com forma de Kähler dada por

$$\omega = i\xi \wedge \bar{\xi} \tag{3.9}$$

Dessa forma a condição Hermitian-Einstein é bem definida para fibrados sobre as mesmas. A condição da conexão de E ser Hermitian-Einstein pode ser entendida como uma condição de compatibilidade da conexão ∇^A com a estrutura geométrica de M.

Para superfícies de Riemann, em virtude da caracterização explicada na seção (1.2.4), o fibrado de spinores associado a estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ canônica é bastante simples

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}} = \wedge^{0,0} M \oplus \wedge^{0,1} M \tag{3.10}$$

de forma que o fibrado de spinores propriamente dito é dado por

$$\mathbb{S} = \left(\wedge^{0,0} M \oplus \wedge^{0,1} M\right) \otimes k_M^{-\frac{1}{2}} \tag{3.11}$$

Neste caso a ação da álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(M)$ em $\mathbb{S}$ se simplifica. A ação de Clifford em termos da base $\{\xi^i, \bar{\xi}^i\}$ é dada por

$$\begin{aligned} c(\xi^j) &= -\sqrt{2}i(\xi^j), \\ c(\bar{\xi}^j) &= \sqrt{2}e(\bar{\xi}^j) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Proposição 26. *A ação de uma (1,1)-forma γ em um spinor ψ pode ser expressa como*

$$\gamma \cdot \psi = i(\Lambda\gamma)\alpha(\psi) \tag{3.13}$$

onde $\Lambda\gamma = \omega \lrcorner \gamma$ é a contração pela forma de Kähler e $\alpha(\psi)$ é o operador de paridade.

Dem.

Em uma superfície de Riemann toda (1,1)-forma pode ser escrita como

$$\gamma = h\xi \wedge \bar{\xi} \tag{3.14}$$

e como vimos acima o spinor ψ pode ser escrito na forma

$$\psi = f + g\bar{\xi} \tag{3.15}$$

A ação de $\xi \wedge \bar{\xi}$ em uma função é dada por

$$
\begin{aligned}
(\xi \wedge \bar{\xi}) \cdot f &= \frac{1}{2}(\xi\bar{\xi} - \bar{\xi}\xi) \cdot f \\
&= \left(-i(\xi)e(\bar{\xi}) + e(\bar{\xi})i(\xi)\right) f \\
&= -i(\xi)e(\bar{\xi})f \\
&= -i(\xi)\left(f\bar{\xi}\right) \\
&= -f
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

por outro lado a ação em $\bar{\xi}$ é dada por

$$
\begin{aligned}
(\xi \wedge \bar{\xi}) \cdot \bar{\xi} &= \frac{1}{2}(\xi\bar{\xi} - \bar{\xi}\xi) \cdot \bar{\xi} \\
&= \left(-i(\xi)e(\bar{\xi}) + e(\bar{\xi})i(\xi)\right) \bar{\xi} \\
&= e(\bar{\xi})i(\xi)\bar{\xi} \\
&= e(\bar{\xi})1 \\
&= \bar{\xi}
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Desse modo temos que

$$\gamma \cdot \psi = h(-f + g\bar{\xi}) \tag{3.18}$$

Notando que

$$
\begin{aligned}
\alpha(\psi) &= f - g\bar{\xi} \\
h &= -i\Lambda\gamma
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

temos o resultado.

$\square$

Corolário 4. *Seja $E \to M$ um fibrado hermitiano sobre uma superfície de Riemann M. Então a ação da 2-forma de curvatura F_A em spinores de $\mathbb{S} \otimes E$ é dada por*

$$F_A\psi = i(\Lambda F_A)\alpha(\psi) \tag{3.20}$$

Teorema 9. *Seja $E \to S^2$ um fibrado munido de uma conexão ∇^A que satisfaça a condição Hermitian-Einstein. Seja D_A o operador de Dirac acoplado em $\mathbb{S} \otimes E$. Então, para auto-valores não nulos, temos a estimativa*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{2}R_0 \tag{3.21}$$

Dem.

O passo fundamental é entendermos como o termo $\int_M \langle F_A\psi \mid \psi\rangle$, da fórmula de weitzenböck para o operador acoplado, se comporta. Pelos resultados acima sabemos que $F_A\psi = i(\Lambda F_A)\alpha(\psi)$, e como estamos supondo que ∇^A é Hermitian-Einstein temos que $\Lambda F_A = c\mathbb{I}$, de forma que

$$F_A\psi = c\ i\ \alpha(\psi) \tag{3.22}$$

Por outro lado é fácil de vermos que o operador de paridade e o operador de Dirac anti-comutam

$$D\alpha(\psi) = -\alpha\,(D\psi) \tag{3.23}$$

Desse modo se

$$D\psi = \lambda\psi \tag{3.24}$$

com $\lambda \neq 0$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} D\alpha(\psi) &= -\alpha\,(D\psi) \\ &= -\alpha(\lambda\psi) \\ &= -\lambda\alpha(\psi) \end{aligned} \tag{3.25}$$

ou seja, $\alpha(\psi)$ também é auto-estado do operador de Dirac só que com auto-valor $-\lambda$. Sendo $\lambda \neq 0$ e usando que o operador de Dirac é auto-adjunto concluímos que

$$\langle F_A\psi \mid \psi\rangle = 0 \tag{3.26}$$

Dessa forma o termo envolvendo F_A na fórmula de weitzenböck é nulo. Agora um argumento to tipo Friedrich, análogo ao usado na estimativa para variedades riemannianas, pode ser usado para encontrarmos o fator de $\frac{1}{2}$ presente na estimativa.

$\square$

Observação 2. *Usando a fórmula do índice para o caso acoplado podemos ver que em muitas situações o acoplamento faz com que o operador de Dirac tenha núcleo. Dessa forma, para fazermos a estimativa acima é essencial supormos que* $\lambda \neq 0$.

Observação 3. *É interessante notarmos que os resultados da primeira e da segunda seção não são contraditórios entre si. Usando que a primeira classe de chern* c_1 *é aditiva com relação a soma de Witney, e usando que no caso de uma conexão ser Hermitian-Einstein a constante* c *depende essencialmente de*

c_1 do fibrado, é fácil mostrarmos que a conexão $B \oplus B'$ não pode ser Hermitian-Einstein. Logo a família de conexões ∇^{A_t} não satisfaz as hipóteses do teorema (9).

Observação 4. *Outro caso em que temos controle sobre o termo de curvatura F_A é o caso em que tomamos E como sendo o fibrado trivial $\underline{\mathbb{C}}^n$ e consideramos a conexão flat em E. Para este caso $F_A = 0$ e a estimativa obtida é exatamente a estimativa clássica de Friedrich. Este resultado é bastante razoável, uma vez que, se considerarmos a conexão trivial $\underline{d}$ em E, já sabemos que o espectro do operador de Dirac não é alterado.*

Capítulo 4

Laplaciano de Dolbeault

Seja M uma variedade Kähler, e seja E um fibrado holomorfo hermitiano. Consideremos a conexão de Chern[1] ∇^A em E, que pode ser escrita na forma $\nabla^A = \partial_A + \bar{\partial}_A$. Usando esta expressão para escrevermos a conexão podemos considerar o laplaciano de Dolbeault definido por

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}^* \bar{\partial} + \bar{\partial} \bar{\partial}^* \tag{4.1}$$

De modo geral podemos ver este laplaciano como um mapa entre os espaços $\Delta_{\bar{\partial}}^{p,q} : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q}(E)$. Quando nos restringimos a seções de E, isto é, $\Delta_{\bar{\partial}}^0 : \Omega^0(E) \to \Omega^0(E)$, podemos garantir, para certos fibrados E, que $\Delta_{\bar{\partial}}^0$ não possui núcleo. Uma classe de fibrados para a qual podemos garantir isto é a dos fibrados com grau[2] negativo que possuem uma conexão Hermitian-Einstein. Para vermos isto, notemos que se $\psi \in \Omega^0(E)$ está no núcleo de $\Delta_{\bar{\partial}}^0$ então ψ é uma seção holomorfa de E.

Por outro lado sabemos que, [14], um fibrado estável[3] com grau negativo não possui seções holomorfas não identicamente nulas. Dessa forma se E for um fibrado estável, com grau negativo, então $\Delta_{\bar{\partial}}^0$ não possui núcleo. Entretanto, pela correspondência Hitchin-Kobayashi, sabemos que fibrados estáveis correspondem a fibrados que admitem uma conexão de tipo Hermitian-Einstein. Logo se E admite uma conexão Hermitian-Einstein, e possui grau negativo, $\Delta_{\bar{\partial}}^0$, não possui núcleo, [14], fazendo sentido nos perguntarmos qual seria o seu menor auto-valor.

---

[1] A conexão de Chern é a única conexão compatível simultaneamente com a estrutura hermitiana e com a estrutura holomorfa de E.

[2] Para um fibrado E sobre uma variedade Kähler M, de dimensão complexa n, definimos o grau como sendo

$$\deg(E) = \frac{i}{2\pi} \int_M c_1(E) \wedge \omega^{n-1} \tag{4.2}$$

onde ω é a forma de Kähler de M.

[3] De maneira simplificada, dizemos que um fibrado E é estável se não possui sub fibrado com inclinação menor do que a de E, onde definimos a inclinação de um fibrado como sendo o grau do fibrado dividido por seu posto.

Para fibrados (E, ∇^A) com conexão Hermitian-Einstein podemos usar as identidades de Kähler para obtermos uma cota inferior para os auto-valores de $\Delta^0_{\bar\partial}$. As identidades de Kähler para (E, ∇^A) podem ser escritas como

$$\Delta^0_{\bar\partial} = \bar\partial^*_A \bar\partial_A = \frac{1}{2}\Delta_A - \frac{i}{2}\Lambda F_A \tag{4.3}$$

Como estamos assumindo que (E, ∇^A) é Hermitian-Einstein, já vimos que ΛF_A é um múltiplo da identidade e vale

$$i\Lambda F_A = \frac{2\pi \deg(E)}{(n-1)!\mathrm{rk}(E)\mathrm{vol}(M)}\mathbb{I}_E \tag{4.4}$$

Esta expressão juntamente com a anterior nos permite obter a seguinte estimativa: se λ é um auto-valor de Δ_{∂} restrito a seções de E, então λ satisfaz a desigualdade[4]

$$\lambda \geq \frac{-\pi \deg(E)}{(n-1)!\mathrm{rk}(E)\mathrm{vol}(M)} \tag{4.5}$$

Porém, o fato de existir uma auto-seção ψ tal que λ satisfaça a igualdade $\lambda = \frac{-\pi \deg(E)}{(n-1)!\mathrm{rk}(E)\mathrm{vol}(M)}$ nos leva a uma contradição: neste caso devemos ter $\Delta\psi = 0$ o que implica que $\bar\partial_A \psi = 0$ de modo que deveríamos ter $\lambda = 0$, uma contradição. Isto nos mostra que esta estimativa não é ótima, no sentido de que não existem fibrados para os quais a igualdade é satisfeita. Para obtermos uma estimativa mais fina precisamos considerar o fibrado de spinores $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ associado com a estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ canônica da variedade complexa M, juntamente com o fato de que o laplaciano de Dolbeault pode ser escrito em termos do operador de Dirac acoplado D_A em $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \otimes E$.

4.1 Generalização das Identidades de Kähler

Seja M uma variedade Kähler de dimensão real $m = 2n$ e seja E um fibrado holomorfo hermitiano munido com a conexão ∇^A compatível com estas estruturas. Sabemos que o fibrado de spinores de M associado a estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ canônica é identificado com $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} = \wedge^{0,*}M$, de modo que $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \otimes E = \Omega^{0,*}(E)$. Além disso se $\{\xi^i, \bar\xi^i\}$ for uma base unitária, temos que a ação de $\mathcal{C}\ell(M) \otimes \mathbb{C}$ em $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \otimes E$ é dada por

$$\begin{aligned} c(\xi^i)s \otimes t &= \left(\sqrt{2}\xi^i \lrcorner s\right) \otimes t \\ c(\bar\xi^i)s \otimes t &= \left(-\sqrt{2}\bar\xi^i \wedge s\right) \otimes t \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde $s \in \Gamma(\mathbb{S}_{\mathbb{C}})$ e $t \in \Gamma(E)$.

[4] Na estimativa abaixo vemos a necessidade de considerarmos fibrados com grau negativo.

Já vimos que com estas identificações o operador de Dirac acoplado D_A pode ser escrito como

$$D_A = \bar{\partial}_A + \bar{\partial}_A^* \tag{4.7}$$

e que a fórmula de Weitzenböck para este caso se escreve como

$$D_A^2 = \Delta^{S\otimes A} + \frac{1}{4}R + \frac{1}{2}F_S + F_A \tag{4.8}$$

onde $\Delta^{S\otimes A}$ denota o laplaciano de $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \otimes E$ associado a conexão produto $\nabla^{S\otimes A} = \nabla^S \otimes \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_S \otimes \nabla^A$, F_S denota a 2-forma de curvatura de uma conexão[5] no fibrado de linha associado a estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ de M e F_A a 2-forma de curvatura da conexão ∇^A.

Para que possamos entender esta fórmula de Weitzenböck como uma generalização das identidades de Kähler precisamos saber explicitamente como as 2-formas de curvatura, F_S e F_A, agem em seções de E, ou seja, em $\Omega^{0,0}(E)$.

Proposição 27. *A ação de uma $(1,1)$-forma α em uma seção ψ_0 de E é dada explicitamente por*

$$\alpha \cdot \psi_0 = -i(\Lambda\alpha)\psi_0 \tag{4.9}$$

onde $\Lambda\alpha = \omega \lrcorner \alpha$ é a contração de α pela forma de Kähler ω.

Dem.

Para entendermos a ação de uma 2-forma $\alpha \wedge \beta$ precisamos identificá-la com o seguinte elemento na álgebra de Clifford

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{2}\left(\alpha\beta - \beta\alpha\right) \tag{4.10}$$

Toda forma do tipo $(1,1)$ pode ser escrita como $\alpha = \alpha_{pq}\xi^p \wedge \bar{\xi}^q$. Com isto, para sabermos como α age, basta sabermos como os termos $\xi^p \wedge \bar{\xi}^q$ agem. Usando a identificação acima juntamente com a ação explicita para os elementos $\{\xi^j, \bar{\xi}^j\}$ temos que, para um elemento geral $\psi \in \Omega^{0,*}(E)$,

$$\begin{aligned}\xi^k \wedge \bar{\xi}^l \cdot \psi &= \frac{1}{2}\left(\xi^k\bar{\xi}^l - \bar{\xi}^l\xi^k\right) \cdot \psi \\ &= \left(-i(\xi^k)e(\bar{\xi}^l) + e(\bar{\xi}^l)i(\xi^k)\right)\psi\end{aligned} \tag{4.11}$$

Para elementos gerais de $\Omega^{0,*}(E)$ esta ação pode não se simplificar muito mais. Porém quando nos restringimos a elementos de $\Omega^{0,0}(E)$, ou seja, a seções de E, a mesma se simplifica. Se $\psi_0 \in \Omega^{0,0}(E)$ é imediato vermos que $i(\xi^i)\psi_0 = 0$, dessa forma temos que

[5] Mais adiante mostraremos que para a estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ canônica existe uma escolha privilegiada de conexão tal que F_S fica dada em termos de grandezas de M.

$$
\begin{aligned}
\xi^p \wedge \bar{\xi}^q \cdot \psi_0 &= \left(-i(\xi^p)e(\bar{\xi}^q) + e(\bar{\xi}^q)i(\xi^p)\right)\psi_0 \\
&= -i(\xi^p)\left(e(\bar{\xi}^q)\psi_0\right) \\
&= \left(-i(\xi^p)\bar{\xi}^q\right)\psi_0 \\
&= -\delta_{pq}\psi_0
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Com isso se $\psi_0 \in \Omega^{0,0}(E)$ vale que

$$
\alpha \cdot \psi_0 = \left(\sum_k \alpha_{kk}\right)\psi_0 \tag{4.13}
$$

Agora notemos que

$$
\begin{aligned}
\Lambda\alpha &= \left(i\sum_k \xi^k \wedge \bar{\xi}^k\right) \lrcorner \left(\sum_{ij} \alpha_{ij}\xi^i \wedge \bar{\xi}^j\right) \\
&= i\sum_k \xi^k \lrcorner \left(\bar{\xi}^k \lrcorner \sum_{ij} \alpha_{ij}\xi^i \wedge \bar{\xi}^j\right) \\
&= i\sum_k \xi^k \lrcorner \left(\sum_j \alpha_{kj}\bar{\xi}^j\right) \\
&= i\sum_k \alpha_{kk}
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

De onde concluímos que

$$
\sum_k \alpha_{kk} = -i\Lambda\alpha \tag{4.15}
$$

e finalmente que

$$
\alpha \cdot \psi_0 = -i(\Lambda\alpha)\psi_0 \tag{4.16}
$$

□

Usando esta caracterização, podemos escrever a restrição da fórmula de Weitzenböck a seções de E como sendo

$$
D_A^2 = \bar{\partial}_A^* \bar{\partial}_A = \Delta^{S\otimes A} + \frac{1}{4}R - \frac{i}{2}\Lambda F_S - i\Lambda F_A \tag{4.17}
$$

Em princípio a conexão no fibrado determinante da estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ é arbitrária. Mas no caso de estarmos considerando a estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ canônica de uma variedade complexa, vimos que o fibrado determinante da estrutura se identifica com o fibrado anti-canônico da variedade. Desta forma podemos escolher uma conexão privilegiada no fibrado determinante da estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ canônica. Considerando a conexão de Chern da variedade M, é um fato usual que esta conexão se estende para uma conexão nas potências exteriores do fibrado cotangente, $\wedge^{p,q}T^*M$. Em particular a conexão de Chern induz uma conexão no fibrado anti-canônico $k_M^{-1} = \wedge^{0,n}M$.

No caso de uma variedade complexa esta construção nos dá uma forma canônica de escolhermos a conexão em k_M^{-1} a partir da conexão da própria variedade M. Com esta escolha de conexão para k_M^{-1} podemos determinar o termo ΛF_S em termos da geometria de M.

Proposição 28. *Seja M uma variedade Kähler. Consideremos a conexão induzida pela conexão de Chern de M no fibrado anti-canônico k_M^{-1} e a respectiva 2-forma de curvatura F_S. Nestas condições temos que*

$$\Lambda F_S = \frac{i}{2}R \tag{4.18}$$

onde R é a curvatura escalar de M vista como variedade riemanniana.

Dem.

Podemos olhar para a variedade Kähler M como sendo uma variedade Riemanniana com estrutura complexa (M, g, J), tal que

$$\begin{aligned} g(Ju, Jv) &= g(u, v) \\ \nabla J &= 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde ∇ é a conexão Levi-Civita de (M, g).

Usando a estrutura riemanniana de (M, g) definimos o tensor de Ricci da maneira usual, porém as condições de compatibilidade acima para J implicam que o tensor de curvatura possui propriedades extras. Se denotarmos $\mathcal{R}(u, v, z, w) = g(\mathcal{R}(u, v)z, w)$ temos as identidades

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(u, v, Jz, Jw) &= \mathcal{R}(u, v, z, w) \\ \mathcal{R}(Ju, Jv, z, w) &= \mathcal{R}(u, v, z, w) \\ \mathcal{R}(Ju, v, z, w) &= -\mathcal{R}(u, v, z, w) \\ \mathcal{R}(u, v, Jz, w) &= -\mathcal{R}(u, v, z, w), \end{aligned} \tag{4.20}$$

A princípio, quando definimos o tensor de curvatura usando a estrutura riemanniana de M, o mesmo está definido em $T_{\mathbb{R}}M$, mas podemos estendê-lo para a complexificação $T_{\mathbb{R}}M \otimes \mathbb{C}$ por $\mathbb{C}$-linearidade. Uma vez que a conexão de Chern de M é a extensão da conexão de Levi-Civita de M para $T_{\mathbb{R}}M \otimes \mathbb{C}$ por

$\mathbb{C}$-linearidade vemos imediatamente que a extensão de $\mathcal{R}$ por $\mathbb{C}$-linearidade é de fato o tensor de curvatura da conexão de Chern de M.

Para olharmos o comportamento de $\mathcal{R}$ em $T_{\mathbb{R}}M\otimes\mathbb{C}$ podemos escrever $T_{\mathbb{R}}M\otimes\mathbb{C} = T_{1,0}\oplus T_{0,1}$, e usar que $T_{\mathbb{R}}M$ e $T_{1,0}$ são isomorfos através da aplicação

$$\tilde{u} \mapsto u = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{u} - iJ\tilde{u}) \tag{4.21}$$

com $\tilde{u} \in T_{\mathbb{R}}M$. Como estendemos $\mathcal{R}$ por $\mathbb{C}$-linearidade para $T_{\mathbb{R}}M\otimes\mathbb{C}$, e usando as propriedades (4.20), vemos que em $T_{\mathbb{R}}M\otimes\mathbb{C}$, os únicos termos não nulos de $\mathcal{R}$ são da forma

$$\mathcal{R}(x, \bar{y}, z, \bar{w}), \tag{4.22}$$

para campos de vetores $x, y, z, w \in T_{1,0}$.

Tendo isso em mente definimos o tensor de Ricci para uma variedade Kähler de uma das seguintes formas equivalentes

$$\begin{aligned}
r(x,\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}(x,\bar{y},\xi_i,\bar{\xi}_i)\\
r(x,\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}(\xi_i,\bar{\xi}_i,x,\bar{y})\\
r(x,\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}(x,\bar{\xi}_i,\xi_i,\bar{y})
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Embora esta definição envolva explicitamente a estrutura complexa, a definição Riemanniana de tensor de Ricci para (M, g) pode ser recuperada. Para isto, dados dois vetores $u, v \in T_{1,0}M$ escrevamos os mesmos na forma

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{u} - iJ\tilde{u})\\
v &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{v} - iJ\tilde{v})
\end{aligned} \tag{4.24}$$

para vetores $\tilde{u}, \tilde{v} \in T_{\mathbb{R}}M$. Usando estes vetores e lembrando que $\mathcal{R}$ é a extensão $\mathbb{C}$-linear do tensor de curvatura riemanniano obtemos que

$$r(u, \bar{v}) = Ricc(\tilde{u}, \tilde{v}) + iRicc(\tilde{u}, J\tilde{v}) \tag{4.25}$$

onde $Ricc$ é o tensor de Ricci riemanniano de (M, g).

Com esta relação é imediato vermos que se definirmos a curvatura escalar para o caso Kähler como sendo

$$R = 2\sum_{i=1}^{n} r(\xi_i, \bar{\xi}_i). \tag{4.26}$$

a mesma coincide com a curvatura escalar Riemanniana de (M, g).

A 2-forma de curvatura da conexão de Chern de M pode ser escrita como

$$F = \Omega_q^p \xi_p \otimes \bar{\xi}^q. \tag{4.27}$$

onde Ω_j^i são 2-formas em M.

Pensando em $\mathcal{R}(u, v)$ como um operador em $T_{1,0}$ a relação entre $\mathcal{R}$ e F pode ser escrita como

$$\mathcal{R}(u, v) = v \lrcorner (u \lrcorner F) \tag{4.28}$$

Usando a base unitária $\{\xi_i, \bar{\xi}_i\}$ podemos concluir que

$$\Omega_k^h = \sum_{pq} \mathcal{R}(\xi_p, \bar{\xi}_q, \xi_k, \bar{\xi}_h) \xi^p \wedge \bar{\xi}^q = R_{p\bar{q}k\bar{h}} \xi^p \wedge \bar{\xi}^q \tag{4.29}$$

Lema 11. *A 2-forma de curvatura F_S é dada pelo traço da 2-forma de curvatura F de M.*

Mas o traço de F é dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} F &= \sum_i \Omega_i^i \\ &= \sum_i \left(\sum_{pq} R_{p\bar{q}i\bar{i}} \xi^p \wedge \bar{\xi}^q \right) \\ &= \sum_{ipq} R_{p\bar{q}i\bar{i}} \xi^p \wedge \bar{\xi}^q \end{aligned} \tag{4.30}$$

Dessa forma temos que

$$\begin{aligned} \Lambda (\mathrm{tr} F) &= \omega \lrcorner (\mathrm{tr} F) \\ &= i \left(\sum_k \xi^k \wedge \bar{\xi}^k \right) \lrcorner \left(\sum_{ipq} R_{p\bar{q}i\bar{i}} \xi^p \wedge \bar{\xi}^q \right) \\ &= i \sum_{kipq} R_{p\bar{q}i\bar{i}} \delta^{kp} \delta^{kq} \\ &= i \sum_{ki} R_{k\bar{k}i\bar{i}} = i \sum_k \left(\sum_i R_{k\bar{k}i\bar{i}} \right) \\ &= i \sum_k r(\xi_k, \bar{\xi}_k) = \frac{i}{2} s \end{aligned} \tag{4.31}$$

□

Usando a fórmula de Weitzenböck e as proposições (27) e (28) obtemos a generalização

Proposição 29. *Seja E um fibrado holomorfo hermitiano sobre uma variedade Kähler. Então para seções de E vale a expressão*

$$\bar{\partial}_A^* \bar{\partial}_A = \frac{1}{2}\Delta^{S\otimes A} + \frac{1}{4}R - \frac{i}{2}\Lambda F_A \tag{4.32}$$

que generaliza a expressão obtida a partir das identidades de Kähler para E.

Observação 5. *As expressões*

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_A^* \bar{\partial}_A &= \frac{1}{2}\Delta^{A} - \frac{i}{2}\Lambda F_A \\ \bar{\partial}_A^* \bar{\partial}_A &= \frac{1}{2}\Delta^{S\otimes A} + \frac{1}{4}R - \frac{i}{2}\Lambda F_A \end{aligned} \tag{4.33}$$

não são contraditórias entre si, pois os laplacianos que aparecem nos segundos membros são associados a conexões distintas.

4.2 A Estimativa

Nesta seção usaremos as generalizações obtidas na seção anterior para encontrarmos uma cota inferior para os auto-valores do laplaciano de Dolbeault.

Teorema 10. *Seja E um fibrado holomorfo hermitiano sobre uma variedade Kähler M. Suponhamos que a conexão ∇^A de E seja Hermitian-Einstein e que λ seja um auto-valor de $\bar{\partial}_A^* \bar{\partial}_A$ restrito a seções de E. Então λ satisfaz*

$$\lambda \geq \frac{1}{4}R_0 - \frac{\pi \deg(E)}{(n-1)! rk(E) vol(M)} \tag{4.34}$$

Dem.

Basta notarmos que no caso Hermitian-Einstein $i\Lambda F_A$ é constante e vale

$$i\Lambda F_A = \frac{2\pi \deg(E)}{(n-1)!\mathrm{rk}(E)\mathrm{vol}(M)} \tag{4.35}$$

substituindo este valor na identidade da proposição (4.32) obtemos o resultado.

□

No caso de superfícies de Riemann, Σ, este resultado pode ser usado para encontrar uma estimativa para o primeiro auto-valor não-nulo do operador de Dirac acoplado relativo a estrutura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ de Σ.

Lema 12. *Seja ψ um auto-estado de D_A associado a um auto-valor não-nulo λ sobre uma superfície de riemann Σ. Identificando $\Gamma(\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \otimes E) \simeq \Omega^{0,*}(E)$ podemos considerar o operador de projeção $p_0 : \Omega^{0,*}(E) \to \Omega^{0,0}(E)$. Então temos que*

$$p_0 \psi = \psi_0 \neq 0 \tag{4.36}$$

Dem.

Em uma superfície de Riemann, devido a dimensão real da mesma ser 2, temos que

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \otimes E = \Omega^{0,0}(E) \oplus \Omega^{0,1}(E) \tag{4.37}$$

Mas agora como ψ é auto-estado de D_A com auto-valor não-nulo é imediato vermos que ψ não pode ter paridade definida. Mas com a identificação acima a única forma disto ocorrer é se $\psi_0 \neq 0$.

□

Teorema 11. *Sobre uma superfície de Riemann Σ, os auto-valores não-nulos do operador de Dirac complexo acoplado D_A satisfazem*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{2} R_0 - \frac{2\pi \deg(E)}{rk(E) vol(M)} \tag{4.38}$$

Dem.

Pela proposição anterior temos que $\psi_0 \neq 0$, o que nos leva a concluir que

$$D_A^2 \psi_0 = \lambda^2 \psi_0 \tag{4.39}$$

Dessa forma ψ_0 é um auto-estado para $\bar{\partial}_A^* \bar{\partial}_A$ restrito a seções de E com auto-valor $\frac{1}{2}\lambda^2$. Agora o resultado segue do Teorema 10.

□

Observação 6. *Este resultado se assemelha ao resultado obtido por Prieto & Almorox em [1]para o operador de Dirac associado a uma estrutura Spin, real, sobre superfícies de Riemann.*

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese estudamos basicamente como o acoplamento por uma conexão arbitrária influencia o comportamento do espectro do operador de Dirac, real e complexo. Através dos resultados clássicos da literatura, e destes resultados vemos que, de modo geral, estruturas geométricas influenciam o espectro do operador de Dirac, acoplado ou não. Embora exista uma grande literatura a respeito de estruturas geométricas e o operador de Dirac, sobretudo para o operador não acoplado, existem alguns casos, possivelmente bastante interessantes, que não foram considerados.

Com o recente desenvolvimento de geometria complexa generalizada, podemos nos perguntar sobre a possibilidade de definirmos operadores de Dirac neste contexto e se isto traz resultados novos ou entendimento sobre resultados já conhecidos.

Por se tratar de uma área recente existem vários problemas envolvidos na tentativa de estudarmos operadores de Dirac sobre variedades com estruturas complexas generalizadas. O próprio conceito de conexão para este tipo de geometria ainda não é muito claro, uma vez que não assumimos a priori uma métrica na variedade base não podemos considerar a conexão Levi-Civita, ficando a pergunta que se neste contexto existe alguma conexão natural análoga a conexão de Levi-Civita.

Outra questão importante é com relação ao fibrado de spinores. No caso de variedades riemannianas a maneira mais usual de construirmos fibrados de Dirac é através de uma estrutura Spin na variedade base. Porém este tipo de estrutura também é definida em termos de uma métrica ficando a pergunta de como poderíamos construir fibrados de Dirac de maneira natural sobre uma variedade complexa generalizada.

Caso seja possível respondermos estas questões podemos falar em operadores de Dirac sobre variedades complexas generalizadas. Podendo, a partir dai, investigar fórmulas do tipo Weitzenböck e o comportamento do espectro do operador de Dirac. Além disso podemos nos perguntar se este tipo de operador é de fato um objeto totalmente novo ou se o mesmo se relaciona com operadores conhecidos da variedade base.

Outro situação pouco explorada na literatura é a de operadores de Dirac sobre variedades algébricas imersas em $\mathbb{C}P^n$. Na literatura existem artigos, [5, 16], que exploram sobretudo estruturas Spin e spinores. Mas não existe tentativas de usar explicitamente que certas variedades podem ser consideradas como variedades algébricas imersas em $\mathbb{C}P^n$ para tentar obter estimativas mais finas para o espectro do operador de Dirac, como por exemplo é feito para subvariedades Lagrangianas em [8].

Para considerarmos este problema devemos entender como considerar explicitamente que estamos lidando com variedades algébricas imersas em $\mathbb{C}P^n$. É possível que existam duas formas de fazermos isto. A primeira e aparentemente mais direta é considerar a imersão em si, na linha do que foi feito com subvariedades Lagrangianas em [8], e estudar propriedades da mesma. Para fazermos isto é possível que tenhamos que restringir a classe de variedades em questão. A segunda forma, que parece ser um pouco mais delicada, é tentar escrever o operador de Dirac de forma a levar em consideração a estrutura algébrica da variedade. Pode ser possível que escrevendo o operador de Dirac na linguagem algébrica obtenhamos informações que nos permitirão encontrar estimativas para o espectro do mesmo.

Bibliografia

[1] A. L. Almorox & C. T. Prieto *Holomorfic spectrum of twisted Dirac operators on compact Riemann surfaces*, J. Geom. Phys. 56(2006) 2069-2091.

[2] B. Amman *A spin-conformal lower bound of the first positive Dirac eigenvalue*, Diff. Geom. Appl. 18(2003) 21-32.

[3] M. Atiyah *Eigenvalues of the Dirac Operator*, Lecture Notes in Math. 1111(, 251–260, Springer Berlin(1985).

[4] S. Chern *Complex manifolds whitout Potential Theory*, Springer-Verlag 1995.

[5] W. J. Cormack & G. S. Hall *Spinors, Algebraic Geometry, and the Classification os Second-Order Symmetric Tensors in General Relativity*, I. J. Theo. Phys. 20(1981) no.2 105-119.

[6] S. K. Donaldson & P. B. Kronheimer *The Geometry of Four-Manifolds*, Clarendon Press 1990.

[7] T. Friedrich *Dirac Operator in Riemannian Geometry*, AMS 2000.

[8] N. Ginoux *Dirac operators on Lagragian submanifolds*, J. Geom. Phys. 52(2004) 480-498.

[9] P. Griffiths & J. Harris *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley 1994.

[10] O. Hijazi & J. L. Milhorat *Décomposition du fibré des spineurs d'une variété spin Kähler-quaternionienne sous l'action de la 4-forme fondamentale*, J. Geom. Phys. 15(1995) 320-332.

[11] O. Hijazi *A conformal Lower Bound for the Smallest Eigenvalue of the Dirac Operator and Killing Spinors*, Comm. Math. Phys. 104(1986) 151-162.

[12] K. D. Kirchberg *An Estimation for the First Eigenvalue of the Dirac Operator on Closed Kähler Manifolds of Positive Scalar Curvature*, Ann. Glob. Analysis and Geometry vol.4 No.3(1986) 291-325.

[13] E. C. Kim *Lower Bounds of the Dirac Eigenvalues on Compact Rimannian Spin Manifolds with Locally Product Structure*, math.DG/0402427.

[14] S. Kobayashi *Diferential Geometry of Complex Vector Bundles*, PrincetonUniversity Press 1987.

[15] S. Kobayashi & K. Nomizu *Foundations of Differential Geometry, vol. 1 & 2*, Interscience Publishers, 1963.

[16] D. Kotschick *Non-Trivial Harmonic Spinors on Generic Algebraic Surfaces*, Proc. A. Math Soc. 124 n.8(1996) 2315-2318.

[17] V. Kraines *Topology of Quaternionic Manifolds*, Trans. American Mathematical Society 122(1966) 357-367.

[18] W. Krammer, U. Semmelmann & G. Weingart it The First Eigenvalue of the Dirac Operator on Quaternionic Kähler Manifold, Comm. Math. Phys. 199(1998) 327-349.

[19] W. Krammer, U. Semmelmann & G. Weingart *Eigenvalues estimates for the Dirac operator on quaternionic Kähler manifolds*, Math. Z. 230(1999) 727-751.

[20] H. B.Lawson & M. L. Michelson *Spin Geometry*, Princeton University Press 1989.

[21] R. J. Miatello & R. A. Podestá *The Spectrum os Twisted Dirac Operators on Compact Flat Manifolds*, Transactions AMS vol.358 n.10(2006) 4569-4603.

[22] C. Nash *Differential Topology and Quantum Field Theory*, Academic Press 1991.

[23] L. I. Nicolaescu *Notes on Seiberg-Witten Theory*, American Mathematical Society 2000.

[24] C. T. Prieto *Holomorfic spectral geometry of magnetic Schrödinger operators on Riemann surfaces*, Diff. Geom. Apllications 24(2006) 288-310.

[25] N. Steenrod *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press 1951.

[26] C. Vafa & E. Witten *Eigenvalues Inequalities for Fermions in Gauge Theories*, Commun. in Math. Physics, 95, No. 3(1984), 257-276.

[27] F. Zheng *Complex Differential Geometry*, American Mathematical Society 2000.