

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

**Fluxos Estocásticos
e Teorema do Limite de Kunita**

por

David Alexander Chipana Mollinedo

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Pedro Jose Catuogno

Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Fluxos Estocásticos e Teorema do Limite de Kunita

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **David Alexander Chipana Mollinedo** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 14 de março de 2011



Prof. Dr. Pedro Jose Catuogno
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 Prof. Dr. Pedro Jose Catuogno
- 2 Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino
- 3 Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Chipana Mollinedo, David Alexander
C443f Fluxos estocásticos e teorema do limite de Kunita/David Alexander
Chipana Mollinedo-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : Pedro Jose Catuogno
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Fluxo estocástico. 2.Movimentos brownianos. 3.Semimartingala
(Matemática). I. Catuogno, Pedro Jose. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
III. Título.

Título em inglês: Stochastic flows and Kunita's limit theorem

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Stochastic flow. 2.Brownian movements.
3.Semimartingales (Mathematics).

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Pedro Jose Catuogno (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio (UEM)

Data da defesa: 14/03/2011

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 14 de março de 2011 e aprovada

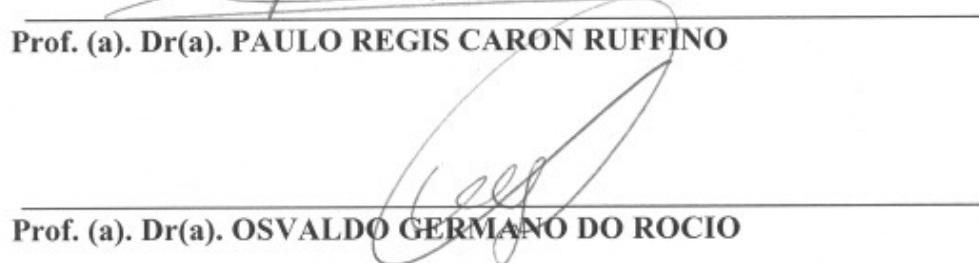
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). PEDRO JOSE CATUOGNO



Prof. (a). Dr(a). PAULO REGIS CARON RUFFINO



Prof. (a). Dr(a). OSVALDO GERMANO DO ROCIO

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me iluminado neste caminho, por ter possibilitado mais esta conquista e, principalmente por colocar em minha vida pessoas especiais que colaboraram cada qual a sua maneira na realização deste trabalho, em especial ao Prof. Dr. Pedro José Catuogno pela credibilidade depositada em mim, dedicação, paciência, e pela sugestões dadas durante o desenvolvimento deste trabalho.

À minha família, por todo apoio e carinho, pelo exemplo de amor, determinação, perseverança, por sempre acreditarem em mim, apoiarem em meus projetos.

À Capes, pelo apoio financeiro sem o qual não haveria condições de executá-lo.

Aos funcionários da Secretaria de Pós Graduação do IMECC-UNICAMP pela gentileza e atenção diariamente prestados.

À todos meus professores de Pós Graduação por suas imensas contribuições em minha formação.

A meus amigos do predinho, pela ajuda intelectual e emocional durante a realização deste trabalho.

*A meus pais Victoriano Chipana e Isabel
Mollinedo, com todo o amor e carinho.*

Resumo

Neste trabalho estamos interessados em estudar o teorema limite para fluxos estocásticos. Apresentamos a teoria de semimartingales de H. Kunita e algumas noções relativas a fluxos de aplicações mensuráveis. O Teorema do Limite de Kunita afirma que: considerando certas condições sobre as características locais (média e covariância infinitesimal) do fluxo estocástico Φ_t^ε ($\varepsilon > 0$) gerado pelo semimartingale X_t^ε no sentido que

$$d\Phi_t^\varepsilon(x) = X^\varepsilon(\Phi_t^\varepsilon(x), dt),$$

então a família de leis associada à família de processos $\{(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ visto como fluxo estocástico convergem fracamente quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Além disso, se X_t^ε converge fortemente (quando $\varepsilon \rightarrow 0$) então Φ_t^ε também converge fortemente.

Abstract

In this work we are interested in studying the limit theorem for stochastic flows. We present the theory of semimartingales given by H. Kunita and some notions related to flow of measurable applications. Kunita's limit theorem states that : considering certain conditions on the local characteristics (mean and covariance infinitesimal) of stochastic flow Φ_t^ε ($\varepsilon > 0$) generated by semimartingale X_t^ε in the sense that

$$d\Phi_t^\varepsilon(x) = x^\varepsilon(\Phi_t^\varepsilon(x), dt),$$

then the family of laws associated with the family of processes $\{(\Phi_t^\varepsilon, X_T^\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ viewed as stochastic flow converge weakly as $\varepsilon \rightarrow 0$. Also, if X_t^ε converges strongly (when $\varepsilon \rightarrow 0$) then Φ_t^ε also converges strongly.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Processos Estocásticos e Tipos de Convergência	4
1.2 Critério de Continuidade de Kolmogorov para Campos Aleatórios	6
1.3 Convergência Fraca de Campos Aleatórios Contínuos	10
1.4 Critério de Kolmogorov para Tightness	12
2 Fluxos Brownianos	14
2.1 Fluxos Estocásticos e Processo de N-pontos	14
2.2 Média e Covariância Infinitesimal. Gerador do movimento de N-pontos .	16
2.3 Fluxos Brownianos de Homeomorfismos	22
2.4 Fluxos Brownianos de Difeomorfismos	26
3 Fluxos Estocásticos e Equações Diferenciais Estocásticas	32
3.1 Fluxos Estocásticos não-Brownianos	32
3.2 Semimartingales a valores vetoriais	38
3.3 Integrais Estocásticas	40
3.4 Construção de Fluxos Estocásticos por Equações Diferenciais Estocásticas	47
3.5 Fórmula Generalizada de Itô, Integral de Stratonovich e Equações Diferen-	
ciais Estocásticas de Stratonovich	48
3.5.1 Integral de Stratonovich	52
4 Teorema Limite para Fluxos Estocásticos	56
4.1 Convergência Fraca e Forte de Fluxos Estocásticos	56
4.2 Teorema do Limite de Kunita	61
4.3 Tightness do Processo de (N+M)-pontos	63

4.4	Convergência Fraca do Processo de (N+M)-pontos	69
4.5	Tightness de processos a valores em espaços de Sobolev	79
4.6	Prova do Teorema Limite de Kunita	83
4.7	Aproximação de Equações Diferenciais Estocásticas	84

Introdução

No presente trabalho apresentaremos noções fundamentais referentes a fluxos estocásticos de aplicações mensuráveis. Para ter uma idéia disto, vamos a considerar uma equação diferencial ordinária sobre $\mathbb{R}^d$, a qual esta dada por,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t),$$

onde $f(x, t)$ é contínua em (x, t) e Lipschitz contínua em x . Agora denotemos a solução da equação de acima por $\Phi_{s,t}(x)$ com condição inicial $x(s) = x$. A Teoria clássica de equações diferenciais ordinárias (EDO) prova que

- (a) $\Phi_{s,t}(x)$ é contínua em s, t, x ,
- (b) $\Phi_{t,u}(\Phi_{s,t}(x)) = \Phi_{s,u}(x)$ para qualquer s, t, u e qualquer x ,
- (c) $\Phi_{s,s}(x) = x$ para qualquer s ,
- (d) A aplicação $\Phi_{s,t} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um homeomorfismo para qualquer s, t .

A aplicação $\Phi_{s,t}$ com as propriedades de acima é chamada de fluxo de homeomorfismos. Agora um fluxo estocástico de homeomorfismos é um campo aleatório $\Phi_{s,t}(x)$ que assume valores em $\mathbb{R}^d$, onde $0 \leq s \leq t \leq T$, $x \in \mathbb{R}^d$ e o qual está definido num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ tal que, para quase todo ω as propriedades (a) – (d) se cumprem. Em particular, se $\Phi_{t_i, t_{i+1}}, i = 0, 1, \dots, n-1$ são independentes para qualquer $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$, então $\Phi_{s,t}$ é chamado de fluxo Browniano. Observamos também que as soluções das equações diferenciais estocásticas de Itô são fluxos Brownianos. Por uma equação diferencial estocástica de Itô entendemos

$$dx(t) = \sum_{k=1}^r F_k(k, t) dB_k(t) + F_0(x, t) dt, \quad (1)$$

onde $F_0(x, t), F_1(x, t), \dots, F_r(x, t)$ são contínuas em (x, t) e Lipschitz contínuas em x , e $(B_1(t), \dots, B_r(t))$ é um movimento Browniano "standard". Se $\Phi_{s,t}(x, \omega)$ é solução da

equação com a condição inicial $x(s) = x$, considerando uma modificação conveniente sobre as condições temos um fluxo Browniano.

O trabalho está direcionado a estudar o teorema do limite de Kunita o qual afirma que de acordo com certas condições $((A2)_k$ e $(A3)_k$ das páginas 62–63) sobre as características locais (média e covariância infinitesimal) do fluxo estocástico Φ_t^ε ($\varepsilon > 0$) gerado pelo semimartingale X_t^ε no sentido que

$$d\Phi_t^\varepsilon(x) = X^\varepsilon(\Phi_t^\varepsilon(x), dt),$$

então a lei do par $(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon)$, vista como fluxo estocástico converge fracamente quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Além disso, se X_t^ε converge fortemente (quando $\varepsilon \rightarrow 0$) então Φ_t^ε também converge fortemente.

Para o desenvolvimento do resultado anterior (resultado principal) dividimos este trabalho em quatro capítulos que em seguida passaremos a explicar. No primeiro capítulo, desenvolvemos os preliminares necessários, onde discutimos sobre os critérios de Kolmogorov assim como algumas noções de convergência. No capítulo 2, caracterizamos fluxos Brownianos através de suas características locais:

$$b(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}[\Phi_{t,t+h}(x) - x],$$

$$a(x, y, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}[(\Phi_{t,t+h}(x) - x)(\Phi_{t,t+h}(y) - y)^*],$$

onde $*$ é a transposta do vetor coluna. Aqui $b(x, t), a(x, y, t)$ são chamados a média e covariância infinitesimal respectivamente. Por outra lado, também estudamos fluxos Brownianos de homeomorfismos e mostramos que se as características locais de um fluxo estocástico satisfazem certas condições de Lipschitz então esse fluxo é chamado fluxo de homeomorfismos. Por último, mostraremos que se as características locais de um fluxo cumprem certas condições de diferenciabilidade então dito fluxo é um fluxo de difeomorfismo. No capítulo 3, estudamos as semimartingales contínuas com parâmetros espaciais e desenvolvemos o cálculo estocástico referente a eles. Aqui também consideramos as equações diferenciais estocásticas baseadas sobre semimartingales contínuas $X(x, t)$ que tomam valores em $C = C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, dadas por

$$dx(t) = X(x(t), dt),$$

e mostraremos que esta equação tem solução única, sempre que suas características locais sejam Lipschitz contínuas. Além disso, provamos que dita solução define um fluxo

estocástico. Por último, no capítulo 4 desenvolvemos o resultado central deste trabalho referente ao teorema limite de H. Kunita para fluxos estocásticos. Esta convergência está no sentido de que considerando certas condições sobre as características locais do fluxo estocástico então conseguimos a convergência da lei de probabilidade associada ao fluxo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo estudaremos as noções de cálculo estocástico necessários para o desenvolvimento dos resultados principais deste trabalho. Para mais detalhes ver H. Kunita [2], P. Catuogno [11] e P. Billingsley [10].

1.1 Processos Estocásticos e Tipos de Convergência

Iniciamos esta seção lembrando as definições que consideramos ao longo do trabalho sem especificar.

Definição 1.1. *Chamaremos de espaço de probabilidade á tripla $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ onde Ω é um conjunto, $\mathfrak{F}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω e $\mathbb{P}$ é uma medida para $\mathfrak{F}$ tal que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Os elementos de $\mathfrak{F}$ são chamados de eventos.*

Definição 1.2. *Uma coleção de variáveis aleatórias X_t , $t \in \mathbb{T}$ com valores num espaço métrico S separável e completo onde $\mathbb{T}$ é o conjunto tempo é chamado de processo estocástico com espaço de estado S . Agora, se $\mathbb{T}$ é um intervalo, dizemos que X_t é processo estocástico com parâmetro contínuo.*

Lembremos também, que dentro dos processos estocásticos usuais temos os movimentos Brownianos, martingales e os processos de Markov os quais utilizaremos no desenvolvimento do trabalho.

Considere uma seqüência $X_1, X_2, \dots, X$ de variáveis aleatórias. Introduzimos três tipos de convergência.

(a) $\{X_n\}$ converge quase certamente se para quase todo ω , $\{X_n(\omega)\}$ converge a $X(\omega)$.

- (b) Seja $p \geq 1$. Denotemos por L^p o espaço de todas as variáveis aleatórias Y tais que $\mathbb{E}[|Y|^p] < \infty$, e definimos a L^p -norma por $\|Y\|_p = \mathbb{E}[|Y|^p]^{\frac{1}{p}}$. Se $X_1, X_2, \dots, X \in L^p$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\|_p = 0,$$

então dizemos que $\{X_n\}$ converge a X em L^p .

- (c) Dizemos que $\{X_n\}$ converge a X em probabilidade se para qualquer $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Consideramos $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}_n, n = 1, 2, \dots$, uma seqüência de probabilidades sobre o espaço mensurável $(S, \mathcal{B}(S))$.

Definição 1.3. A seqüência $\{\mathbb{P}_n\}$ converge fracamente a $\mathbb{P}$ se para qualquer função contínua limitada f sobre S ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mathbb{P}_n = \int f d\mathbb{P}$$

Definição 1.4. Seja $X : \Omega \rightarrow S$ uma variável aleatória. A lei de probabilidade $\mathbb{P}_X$ é definida por

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B), \quad \text{para qualquer } B \in \mathcal{B}(S).$$

Dizemos que uma seqüência $\{X_n\}$ de variáveis aleatórias que assumem valores em S converge fracamente se a correspondente seqüência de leis associadas a ditas variáveis aleatórias converge fracamente.

A seguir apresentamos algumas propriedades básicas respeito da convergência fraca. Para as provas dos teoremas que enunciaremos a seguir ver [10] (paginas 5 até 40).

Teorema 1.5. Seja $\{\mathbb{P}_n : n = 1, 2, \dots, \mathbb{P}\}$ a seqüência de probabilidades sobre $(S, \mathcal{B}(S))$. As seguintes afirmações são equivalentes.

- (i) $\{\mathbb{P}_n\}$ converge fracamente a $\mathbb{P}$.
- (ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(F) \leq \mathbb{P}(F)$ se verifica para qualquer subconjunto fechado F de S .
- (iii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(G) \geq \mathbb{P}(G)$ se verifica para qualquer subconjunto aberto G de S .

Definição 1.6. A família $\{\mathbb{P}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de probabilidades sobre $(S, \mathcal{B}(S))$ é dita relativamente compacta se qualquer subconjunto de $\{\mathbb{P}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ contém uma subsequência que converge fracamente.

Um critério útil para a compacidade relativa das medidas é a tightness.

Definição 1.7. *Uma família $\{\mathbb{P}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de probabilidades é tight se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto compacto K_ε de S tal que $\mathbb{P}_\lambda(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ se cumpre para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Teorema 1.8. *A família de probabilidades $\{\mathbb{P}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sobre $(S, \mathcal{B}(S))$ é relativamente compacta se e somente se é tight.*

1.2 Critério de Continuidade de Kolmogorov para Campos Aleatórios

Começamos esta seção definindo a noção de campo aleatório.

Definição 1.9. *Seja $\mathbb{D}$ um domínio em $\mathbb{R}^d$. Uma coleção de variáveis aleatórias $X(x)$ que tomam valores em S com $x \in \mathbb{D}$ é chamada de campo aleatório com parâmetro $\mathbb{D}$.*

Definição 1.10. *Sejam $\{X(x) : x \in \mathbb{D}\}$ e $Y = \{Y(x) : x \in \mathbb{D}\}$ campos aleatórios. Dizemos que Y é uma modificação de X se $\mathbb{P}(X(x) = Y(x)) = 1$ para todo $x \in \mathbb{D}$.*

De maneira análoga, definimos campos aleatórios mensuráveis e campos aleatórios contínuos. Agora introduzimos o critério de Kolmogorov para campos aleatórios para obter uma modificação de um campo aleatório contínuo.

Teorema 1.11. *Seja $X(x)$, $x \in \mathbb{D}$ um campo aleatório com valores num espaço de Banach B onde $\mathbb{D}$ é um domínio em $\mathbb{R}^d$. Assumimos que existem constantes positivas γ , C e $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, d$ com $\sum_{i=1}^d \alpha_i^{-1} < 1$ satisfazendo*

$$\mathbb{E}[\|X(x) - X(y)\|^\gamma] \leq C \left(\sum_{i=1}^d |x^i - y^i|^{\alpha_i} \right) \quad \text{para cada } x, y \in \mathbb{D}, \quad (1.1)$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma do espaço de Banach e $x = (x^1, \dots, x^d), y = (y^1, \dots, y^d)$. Então $X(x)$ tem modificação contínua $\tilde{X}(x)$.

Sejam $\beta_i, i \in \{1, \dots, d\}$ números positivos arbitrários menores que $\alpha_i(\alpha_0 - d)/\alpha_0\gamma, i \in \{1, \dots, d\}$ respectivamente, onde α_0 é definido por $\alpha_0^{-1}d = \sum_{i=1}^d \alpha_i^{-1}$. Então para qualquer hipercubo $\mathbb{I}$ contido em $\mathbb{D}$, existe uma variável aleatória positiva $K(\omega)$ com $\mathbb{E}[K^\gamma] < \infty$ tal que

$$\|\tilde{X}(x, \omega) - \tilde{X}(y, \omega)\| \leq K(\omega) \left(\sum_{i=1}^d |x^i - y^i|^{\beta_i} \right) \quad \text{para cada } x, y \in \mathbb{I}, \quad (1.2)$$

se cumpre para quase todo ω . Ademais se temos $\mathbb{E}[\|X(x_0)\|^\gamma] < \infty$ para algum x_0 , então

$$\mathbb{E}\left[\sup_{x \in K} \|\tilde{X}(x)\|^\gamma\right] < \infty \quad (1.3)$$

se verifica para qualquer subconjunto compacto $K \in \mathbb{D}$.

Antes de fazer a prova desse teorema precisamos de algumas desigualdades com respeito a módulos de continuidade de uma função que assume valores num espaço de Banach definido sobre o hipercubo $\mathbb{I} = [0, 1]^d$.

Consideramos a seguinte notação: seja $q \in \mathbb{N}$ com $q > 1$, então qualquer $x \in [0, 1]$ tem uma representação q -adica $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k}$ onde $0 \leq a_k < q, a_k \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \dots$. Agora, denotamos por x_N à soma parcial finita $\sum_{k=1}^N a_k q^{-k}$ da expansão q -adica. Se $x = x_N$ se verifica para algum N , x é chamado um racional q -adico. Seja $q = (q_1, \dots, q_d)$ um vetor de inteiros maiores que um. Então um ponto $x = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{I}$ é chamado racional q -adico se cada x^i é um racional q_i -adico. O conjunto de todos os racionais q -adicos x de comprimento N , isto é, $x^i = x_N^i$ para qualquer $i = 1, \dots, d$ é denotado por Δ_N . O número de elementos de Δ_N é ao mais $\prod_{i=1}^d q_i^N$. Assim pondo $\Delta = \bigcup_N \Delta_N$, vemos que ele é um subconjunto denso enumerável de $\mathbb{I}$. Daí se $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ é um vetor de números positivos tais que $\frac{\beta_i}{\beta_j} = \frac{\log q_j}{\log q_i}$ se cumpre para qualquer $i, j = 1, \dots, d$, então se verifica $q_1^{\beta_1} = \dots = q_d^{\beta_d} = \delta$.

Seja $f : \Delta \rightarrow B$. Definimos para cada inteiro positivo N o modulo de continuidade $\Delta_N(f)$ e o modulo de continuidade $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ -Hölder $\Delta_N^\beta(f)$ por

$$\Delta_N(f) = \max_{x, y \in \Delta_N, |x^i - y^i| \leq q_i^{-N}, i=1, \dots, d} \|f(x) - f(y)\|,$$

$$\Delta_N^\beta(f) = \delta^N \Delta_N(f) = \Delta_N(f) / (q_i^{-N})^{\beta_i}.$$

Lema 1.12. *A desigualdade*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq 4|q| \left(\sum_{N=1}^{\infty} \Delta_N^\beta(f) \right) \left(\max_i |x^i - y^i| \right)$$

se cumpre para qualquer aplicação $f : \Delta \rightarrow B$, onde $|q| = \sum_{i=1}^d q_i$.

Demonstração. Basta mostrar o caso quando $\sum_{N=1}^{\infty} \Delta_N^\beta(f) < \infty$. Para cada $x = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{I}$ denotemos por $x_N = (x_N^1, \dots, x_N^d)$ o racional q -adico associado de comprimento N . Agora definindo a função g_N por $g_N(x) = f(x_N)$, obtemos que

$$\|g_{N+1}(x) - g_N(x)\| \leq |q| \Delta_{N+1}(f),$$

para cada $x \in \mathbb{I}$. Assim, tem-se

$$\sum_{N=1}^{\infty} \|g_{N+1}(x) - g_N(x)\| \leq |q| \sum_{N=1}^{\infty} \Delta_{N+1}(f) \leq |q| \sum_{N=1}^{\infty} \Delta_{N+1}^{\beta}(f) < \infty.$$

Então $\{g_N\}$ converge uniformemente em $\mathbb{I}$. Denotemos por $g(x)$ a função limite. Desta maneira, temos que $f(x) = g(x)$ para qualquer $x \in \Delta$.

Agora, no que segue mostramos o lema para a função g . Sejam $x, y \in \Delta$ quaisquer. Existe $k \geq 0$ tal que $\delta^{-(k+1)} \leq \max_i |x^i - y^i|^{\beta_i} \leq \delta^{-k}$ desde que $\delta > 1$. Assim, resulta que

$$\begin{aligned} \|g(x) - g_{k+1}(x)\| &\leq |q| \sum_{N=k+1}^{\infty} \Delta_{N+1}^{\beta}(f) \leq |q| \delta^{-(k+1)} \sum_{N=k+1}^{\infty} \Delta_N^{\beta}(f) < \infty \\ &\leq |q| \left(\sum_{N=1}^{\infty} \Delta_N^{\beta}(f) < \infty \right) \left(\max_i |x^i - y^i|^{\beta_i} \right). \end{aligned}$$

Como $|x^i - y^i| \leq \delta^{-k/\beta_i} = q_i^{-k}$ para $i = 1, \dots, d$, temos

$$\begin{aligned} \|g_{k+1}(x) - g_{k+1}(y)\| &\leq 2|q| \Delta_{k+1}(f) \leq 2|q| \delta^{-(k+1)} \Delta_{k+1}^{\beta}(f) \\ &\leq 2|q| \left(\sum_{N=1}^{\infty} \Delta_N^{\beta}(f) < \infty \right) \left(\max_i |x^i - y^i|^{\beta_i} \right). \end{aligned}$$

Portanto obtemos

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\| &\leq \|g(x) - g_{k+1}(x)\| + \|g_{k+1}(x) - g_{k+1}(y)\| + \|g_{k+1}(y) - g(y)\| \\ &\leq 4|q| \left(\sum_{N=1}^{\infty} \Delta_N^{\beta}(f) < \infty \right) \left(\max_i |x^i - y^i|^{\beta_i} \right). \end{aligned}$$

Deste modo concluímos a prova. $\square$

Lema 1.13. *Suponha que $X(x)$ satisfaz (1.1). Se $\beta_1, \dots, \beta_d$ satisfazem $\beta_j < \alpha_j(\gamma + \sum_{i=1}^d \beta_i^{-1})^{-1}$, $j = 1, \dots, d$, então resulta*

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{N=1}^{\infty} \Delta_N^{\beta}(X) \right|^{\gamma} \right] < \infty.$$

Demonstração. Inicialmente consideramos o caso $\gamma < 1$. Para $a, b \in \mathbb{R}^+$ sabemos que $(a + b)^{\gamma} < a^{\gamma} + b^{\gamma}$. Assim temos

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{N=1}^{\infty} \Delta_N^{\beta}(X) \right|^{\gamma} \right] \leq \sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{E} [\Delta_N^{\beta}(X)^{\gamma}].$$

Agora, observamos que

$$\Delta_N^\beta(X)^\gamma \leq \sum \|X(x) - X(y)\|^\gamma \delta^{N\gamma},$$

onde o somatório é considerado para todo $x, y \in \Delta_N$ tal que $|x^i - y^i| \leq q_i^{-N}, i = 1, \dots, d$. Ademais, observemos que a soma é menor ou igual que $2^d(\prod_{i=1}^d q_i^N)$. Portanto

$$\mathbb{E}[\Delta_N^\beta(X)^\gamma] \leq 2^d \left(\prod_{i=1}^d q_i^N \right) \max \mathbb{E}[\|X(x) - X(y)\|^\gamma] \delta^{N\gamma}.$$

Devido a (1.1), a desigualdade anterior é limitada por

$$2^d \left(\prod_{i=1}^d q_i^N \right) C \left(\sum_{j=1}^d q_j^{-N\alpha_j} \right) \delta^{N\gamma} \leq 2^d C \left\{ \sum_{j=1}^d \delta^{N(\sum_{i=1}^d \beta_i^{-1} - \alpha_j \beta_j^{-1} + \gamma)} \right\}.$$

Desta maneira temos que

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{N=1}^{\infty} \Delta_N^\beta(X) \right|^\gamma \right] \leq C' \sum_{j=1}^d \sum_{N=1}^{\infty} \delta^{N(\sum_{i=1}^d \beta_i^{-1} - \alpha_j \beta_j^{-1} + \gamma)},$$

onde $C' = 2^d C$. Daí deduz-se que a soma é finita se e somente se $\sum_{i=1}^d \beta_i^{-1} - \alpha_j \beta_j^{-1} + \gamma < 0$.

Para o caso $\gamma > 1$, observamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{N=1}^{\infty} \Delta_N^\beta(X) \right|^\gamma \right]^{1/\gamma} &\leq \sum_N \mathbb{E}[\Delta_N^\beta(X)]^{1/\gamma} \\ &\leq (C')^{1/\gamma} \sum_{j=1}^d \sum_{N=1}^{\infty} (\delta^{1/\gamma})^{N(\sum_{i=1}^d \beta_i^{-1} - \alpha_j \beta_j^{-1} + \gamma)}. \end{aligned}$$

Portanto, a expressão anterior é finita se e somente se $\sum_{i=1}^d \beta_i^{-1} - \alpha_j \beta_j^{-1} + \gamma < 0$. Assim completamos a prova. $\square$

Podemos agora demonstrar o teorema inicial desta seção.

Demonstração. (Teorema 1.11) Sejam $\beta_i, i = 1, \dots, d$ números arbitrários menores que $\alpha_i(\alpha_0 - d)/\alpha_0\gamma$, respectivamente, e $\varepsilon > 0$ tal que $\beta_i < \alpha_i(\alpha_0 - d) \times \{\alpha_0\gamma(1 + \alpha_0^{-1}d\varepsilon)\}^{-1}$ se cumpre todo i . Assim podemos escolher $\beta'_1, \dots, \beta'_d$ de modo que $\beta'_i \geq \beta_i, \frac{\beta'_i}{\beta'_j} = \frac{\log q'_j}{\log q'_i}$ para alguns inteiros positivos $q'_1, \dots, q'_d$ maiores que 1 e com $\beta'_1, \dots, \beta'_d$ verificando

$$\frac{\alpha_i(\alpha_0 - d)}{\alpha_0\gamma(1 + \varepsilon)} < \beta'_i < \frac{\alpha_i(\alpha_0 - d)}{\alpha_0\gamma(1 + \alpha_0^{-1}d\varepsilon)}.$$

Portanto $\beta'_1, \dots, \beta'_d$ satisfaz a condição do Lema 1.13. De fato, basta observar que

$$\frac{\alpha_j}{\gamma + \sum_i \frac{1}{\beta'_i}} \geq \frac{\alpha_j}{\gamma + \sum_i \frac{\alpha_0 \gamma (1+\varepsilon)}{\alpha_i (\alpha_0 - d)}} = \frac{\alpha_j (\alpha_0 - d)}{\gamma (\alpha_0 + d\varepsilon)} > \beta'_j.$$

Conseqüentemente $\sum_{N=1}^{\infty} \Delta_N^{\beta'}(X) < \infty$ se cumpre a.s. pelo Lema 1.13. Agora se $\beta'_i \geq \beta_i$. Então

$$\|X(x) - X(y)\| \leq 4|q'| \left(\sum_{N=1}^{\infty} \Delta_N^{\beta'}(X) \right) \left(\sum_{i=1}^d |x^i - y^i|^{\beta_i} \right),$$

onde $q' = (q'_1, \dots, q'_d)$. Portanto $X(x), x \in \Delta$ tem uma extensão contínua $\tilde{X}(x), x \in \mathbb{I}$ β -Hölder. Observamos que $\tilde{X}(x)$ e $X(x)$ com $x \in \mathbb{I}$ são contínuas em probabilidade e que $\mathbb{P}(X(x) = \tilde{X}(x)) = 1$ se cumpre para qualquer $x \in \Delta$. Então resulta que a mesma propriedade se verifica para todo $x \in \mathbb{I}$. Assim $\tilde{X}(x)$ é uma modificação contínua de $X(x)$ a qual satisfaz a desigualdade (1.2).

Por último observamos que o domínio $\mathbb{D}$ é coberto por um número enumerável de hipercubos em $\mathbb{D}$. Daqui que $X(x), x \in \mathbb{D}$ tem modificação contínua. Agora a propriedade (1.3) resulta imediatamente de (1.2) pois a variável aleatória $K(\omega)$ em (1.2) cumpre que $\mathbb{E}[K^\gamma] < \infty$. $\square$

1.3 Convergência Fraca de Campos Aleatórios Contínuos

Seja $\{X_n(x) : x \in \mathbb{I}\}$ uma seqüência de campos aleatórios contínuos com valores em um espaço métrico S separável e completo, onde $\mathbb{I}$ é um hipercubo em $\mathbb{R}^d$. Definimos dois tipos de lei e discutimos suas convergências fracas. A primeira é a convergência fraca de campos aleatórios e a outra é a convergência fraca de distribuições finito dimensionais.

Seja $W = C(\mathbb{I}, S)$ o conjunto de todas as aplicações contínuas de $\mathbb{I}$ em S . Denotemos seus elementos por X e sua projeção em $x \in \mathbb{I}$ por $X(x)$. Introduzimos a métrica

$$d(X, Y) = \sup_{x \in \mathbb{I}} d(X(x), Y(x))$$

onde d é a métrica sobre S . Vemos que W é um espaço separável e completo. A lei do campo aleatório contínuo X é

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\cdot, \omega) \in A\}), \quad A \in \mathcal{B}(W),$$

onde $\mathcal{B}(W)$ é a σ -álgebra de Borel de W .

As distribuições finito dimensionais do campo aleatório X , $\{\mathbb{P}_{x_1, \dots, x_k}\}$ são definidos do seguinte modo: para $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{I}$ a lei de $(X(x_1), \dots, X(x_k))$ é dado por

$$\mathbb{P}_{x_1, \dots, x_k}(A) = \mathbb{P}(\{\omega : (X(x_1), \dots, X(x_k)) \in A\}), \quad A \in \mathfrak{F}(S^k).$$

Definição 1.14. *Seja $\{X_n\}$ uma seqüência de campos aleatórios contínuos com valores em S , e $\mathbb{P}^n$ a lei de X_n no espaço $(W, \mathcal{B}(W))$. Dizemos que a seqüência $\{X_n\}$ converge fracamente sempre que $\{\mathbb{P}^n\}$ converge fracamente. De maneira similar dizemos que $\{X_n\}$ é tight se $\{\mathbb{P}^n\}$ é tight.*

Da definição acima, observamos que se $\{X_n\}$ converge fracamente, então a distribuição finito dimensional $\{\mathbb{P}_{x_1, \dots, x_k}^n\}$ converge fracamente para quaisquer $x_1, \dots, x_k$. Em seguida enunciamos um resultado necessário para a tightness de medidas.

Teorema 1.15. *A seqüência $\{X_n\}$ converge fracamente se e somente se as seguintes duas condições são satisfeitas.*

- (a) *A seqüência é tight.*
- (b) *A seqüência de distribuições finito dimensionais $\{\mathbb{P}_{x_1, \dots, x_k}^n\}$ converge fracamente para quaisquer $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ onde $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como W é um espaço métrico completo e separável então cada medida de probabilidade é tight. Assim se cumpre (i). Agora observamos que as distribuições finito dimensionais $\{\mathbb{P}_{x_1, \dots, x_k}^n\}$ podem ser vistas como $\mathbb{P}^n \pi_{x_1, \dots, x_k}^{-1}$ onde $\pi_{x_1, \dots, x_k} : W \rightarrow S^k$ é a aplicação projeção é definida por $\pi_{x_1, \dots, x_k}(X) = (X(x_1), \dots, X(x_k))$, as quais são claramente contínuas. Assim como $\mathbb{P}^n \Rightarrow \mathbb{P}$ então para toda função f contínua e limitada temos

$$\int_S f d\mathbb{P}^n \longrightarrow \int_S f d\mathbb{P}.$$

Daí, considerando a continuidade de $\pi_{x_1, \dots, x_k}$ observamos que

$$\int_S f d\mathbb{P}^n \pi_{x_1, \dots, x_k}^{-1} = \int_W f(\pi_{x_1, \dots, x_k}) d\mathbb{P}^n \longrightarrow \int_W f(\pi_{x_1, \dots, x_k}) d\mathbb{P} = \int_S f d\mathbb{P} \pi_{x_1, \dots, x_k}^{-1}.$$

Portanto $\mathbb{P}^n \pi_{x_1, \dots, x_k}^{-1} \Rightarrow \mathbb{P} \pi_{x_1, \dots, x_k}^{-1}$, como queríamos.

($\Leftarrow$) Sejam $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ quaisquer. Dado que a seqüência $\{\mathbb{P}^n\}$ é tight resulta que ela é relativamente compacta, então cada subsequência $\mathbb{P}^{n'}$ de $\mathbb{P}^n$ contém ademais uma subsequência $\mathbb{P}^{n''}$ que converge fracamente para alguma medida de probabilidade Q . Assim $\mathbb{P}^{n''} \pi_{x_1, \dots, x_k}^{-1} \Rightarrow Q \pi_{x_1, \dots, x_k}^{-1}$ pela continuidade de $\pi_{x_1, \dots, x_k}$. Agora, como

$\{\mathbb{P}^n \pi_{x_1, \dots, x_k}^{-1}\}$ converge fracamente, existe uma medida de probabilidade $P_{x_1, \dots, x_k}$ sobre S^k tal que $\mathbb{P}^n \pi_{x_1, \dots, x_k}^{-1} \Rightarrow P_{x_1, \dots, x_k}$. Daí, deduz-se que $Q \pi_{x_1, \dots, x_k}^{-1} = P_{x_1, \dots, x_k}$ e como os cilindros formam uma classe determinante (isto é, uma família de conjuntos de W tais que quaisquer duas medidas de probabilidades sobre W coincidem sobre dita família) a medida de probabilidade Q é única. Portanto, pela arbitrariedade da subsequência $\mathbb{P}^{n'}$ resulta que $\mathbb{P}^n \Rightarrow \mathbb{P}$. $\square$

Para verificar a tightness das medidas $\{\mathbb{P}^n\}$ temos que encontrar para qualquer $\varepsilon > 0$ um subconjunto compacto K de W satisfazendo $\mathbb{P}^n(K) > 1 - \varepsilon$ para todo n . Para isso, precisamos de alguma caracterização dos subconjuntos compactos de W . O seguinte teorema é uma consequência direta do teorema de Ascoli-Arzelà.

Teorema 1.16. *Um subconjunto K de $W = C(\mathbb{I} : S)$ é relativamente compacto se e só se as seguintes propriedades são verificadas.*

- (i) *Para cada $x \in \mathbb{I}$, existe um subconjunto compacto Γ_x de S tal que $X(x) \in \Gamma_x$*
- (ii) *O conjunto K é equicontínuo, isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\sup_{|x-y| < \delta} d(X(x), X(y)) < \varepsilon$ se verifica para todo X em K .*

1.4 Critério de Kolmogorov para Tightness

Nesta seção provamos o critério de Kolmogorov para Tightness de uma sequência de campos aleatórios contínuos que assumem valores em um espaço de Banach.

Teorema 1.17. *Seja $\{X_n(x) : x \in \mathbb{I}\}$ uma sequência de campos aleatórios contínuos com valores num espaço S Banach. Assumimos que para cada N existem constantes positivas γ , C e $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ com $\sum_{i=1}^d \alpha_i^{-1} < 1$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{E}[\|X_n(x) - X_n(y)\|_N^\gamma] \leq C \left(\sum_{i=1}^d |x^i - y^i|^{\alpha_i} \right) \quad \text{para cada } x, y \in \mathbb{I},$$

$$\mathbb{E}[\|X_n(x)\|_N^\gamma] \leq C, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{I}.$$

Então $\{X_n\}$ é tight com respeito à topologia fraca de $W = C(\mathbb{I}, S)$.

Demonstração. Sejam os vetores $q = (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{N}^d$ com $q_i > 1, i = 1, \dots, d$, e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{R}^d$ com $\beta_i > 0, i = 1, \dots, d$ tais que $\frac{\beta_i}{\beta_j} = \frac{\log q_j}{\log q_i}$ e $\sum_k \beta_k^{-1} - \alpha_j \beta_j^{-1} + \gamma < 0$ se cumpre para qualquer i e j . A existência de q e β é mostrada na prova do Teorema

1.11. Sejam $M \in \mathbb{N}$ e $\Delta_M^\beta(X_n)$ o modulo de continuidade β -Hölder de $X_n(x)$. Então pelos Lemas 1.12 e 1.13 resulta que

$$\|X_n(x) - X_n(y)\| \leq 4|q| \left(\sum_{M=1}^{\infty} \Delta_M^\beta(X_n) \right) \left(\sum_{i=1}^d |x^i - y^i|^{\beta_i} \right)$$

e

$$\sup_n \mathbb{E} \left[\left| \sum_{M=1}^{\infty} \Delta_M^\beta(X_n) \right|^\gamma \right] < \infty.$$

Utilizando a desigualdade de Chebyshev, temos que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $a > 0$ tal que

$$\mathbb{P} \left(\sum_{M=1}^{\infty} \Delta_M^\beta(X_n) > a \right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mathbb{P}(\|X_n(0)\| > a) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.4)$$

Seja $\mathbb{P}_n, n = 1, 2, \dots$ as lei de X_n . Consideramos o subconjunto K de W definido por

$$K = \left\{ X : \sum_{M=1}^{\infty} \Delta_M^\beta(X_n) \leq a \quad \text{e} \quad \|X(0)\| \leq a \right\}.$$

Resulta que $\mathbb{P}_n(K) > 1 - \varepsilon$ se verifica para qualquer n devido a (1.4). Além disso, o conjunto K é relativamente compacto em W respeito da topologia fraca. Na verdade, dado que

$$\|X(x)\| \leq \|X(x)\| + \|X(x) - X(0)\| \leq a + 4a|q| \left(\sum_{i=1}^d |x^i|^{\beta_i} \right)$$

se cumpre para qualquer $X \in K$. Desta maneira a propriedade (a) do Teorema 1.16 é verificada. Agora, do fato que

$$\|X(x) - X(y)\| \leq 4a|q| \left(\sum_{i=1}^d |x^i - y^i|^{\beta_i} \right)$$

temos que K é equicontínuo. Portanto pelos Teoremas 1.16 e 1.1.4 obtemos o resultado. $\square$

Capítulo 2

Fluxos Brownianos

Este capítulo tem quatro seções nos quais desenvolveremos aspectos relacionados a fluxos estocásticos de aplicações mensuráveis. Para uma abordagem mais abrangente que desenvolve estas idéias ver H. Kunita [2], P. Baxendale [9], Le Jan [14] e T. E. Harris [13].

Na primeira seção consideramos fluxos estocásticos de aplicações mensuráveis, em particular fluxos Brownianos os quais são contínuas com respeito à variável t e além disso, têm incrementos independentes. A seguir descrevemos o movimento de N-pontos do fluxo Browniano, o qual mostraremos que é um processo de Markov. Na seção 2.2, introduzimos a noção de características locais de um fluxo Browniano, e mostraremos que ditas características locais determinam completamente o gerador infinitesimal do processo de N-pontos associado ao fluxo. Na seção 2.3, estudamos os fluxos estocásticos de homeomorfismos. Por último, na seção 2.4 realizamos o estudo dos fluxos estocásticos de difeomorfismos, os quais provém de fluxos Brownianos com algumas hipóteses de diferenciabilidade sobre suas características locais.

2.1 Fluxos Estocásticos e Processo de N-pontos

Seja $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, e $T > 0$ fixo. Para $0 \leq s \leq t \leq T$, $x \in \mathbb{R}^d$, seja $\Phi_{s,t}(x, \omega)$ um campo aleatório que toma valores em $\mathbb{R}^d$ tal que para s, t fixos, $s \leq t$, $\Phi_{s,t}(\cdot, \omega): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma aplicação mensurável.

Definição 2.1. *Um campo $\Phi = \{\Phi_{s,t} : \mathbb{R}^d \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d : 0 \leq s \leq t \leq T\}$ é chamado de fluxo estocástico de aplicações mensuráveis se existe um conjunto N de Ω de medida nula tal que para qualquer $\omega \in N^c$ verifica:*

- (i) $\Phi_{s,t}(\cdot, \omega) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é mensurável.
- (ii) $\Phi_{s,t}(x, \cdot)$ é contínua em probabilidade com respeito a (s, t, x) .
- (iii) $\Phi_{s,s}(\omega) = Id$, para todo s .
- (iv) $\Phi_{s,u}(\omega) = \Phi_{t,u}(\omega) \circ \Phi_{s,t}(\omega)$ para cada $s < t < u$.

De agora em diante consideraremos fluxo estocástico como um fluxo estocástico de aplicações mensuráveis.

Definição 2.2. *Sejam $\{0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T\}$, $x_i \in \mathbb{R}^d$, $0 \leq i \leq n-1$ arbitrários. Um processo $\Phi_{s,t}$ é chamado de fluxo estocástico com incrementos independentes se $\Phi_{t_i, t_{i+1}}(x_i)$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$ são variáveis aleatórias independentes para qualquer $\{t_i, x_i\}$. Além disso, se $\Phi_{s,t}(x, \omega)$ é contínua com respeito a t em quase todo ponto para cada s, x , então $\Phi_{s,t}$ é dito fluxo Browniano.*

A seguir apresentamos alguns exemplos de fluxos estocásticos.

Exemplo 2.3. *Sejam $\{B_t\}_t$ uma família de movimentos Brownianos em $\mathbb{R}$ e seja $\Phi_{s,t} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o campo aleatório definido por*

$$\Phi_{s,t}(x) = B_t - B_s + x.$$

Então vemos claramente que:

- $\Phi_{s,t}(x, \cdot)$ é contínua em probabilidade respeito de (s, t, x) .
- $\Phi_{s,s}(x, \omega) = x$, para todo ω e s .
- $\Phi_{s,u}(x, \omega) = B_u - B_t + B_t - B_s + x = \Phi_{t,u} \circ \Phi_{s,t}(x, \omega)$, para todo ω e $s < t < u$.

Portanto da Definição 2.1 $\Phi = \{\Phi_{s,t}\}$ é um fluxo estocástico.

Exemplo 2.4. *Consideramos a aplicação de valor inicial $\Phi_{s,t} : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\Phi_{s,t}(x, y) = e^{(t-s)A}(x, y)^t + e^{(t-s)A} \int_s^t (-e^{(u-s)A})(17, 42)^t dW_u,$$

onde A é uma matriz real de ordem 2×2 e W_u é um movimento Browniano 2-dimensional. Se verifica facilmente que $\Phi = \{\Phi_{s,t}\}$ satisfaz as propriedades da Definição 2.1. Portanto Φ é um fluxo estocástico.

Agora estudamos o movimento de N -pontos de um fluxo estocástico com incrementos independentes.

Definição 2.5. *Seja $\Phi_{s,t}$ um fluxo estocástico com incrementos independentes e seja $x^{(N)} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{Nd}$ onde $x_i \in \mathbb{R}^d$. Escrevemos $\Phi_{s,t}(x^{(N)}) = (\Phi_{s,t}(x_1), \dots, \Phi_{s,t}(x_N))$. Assim para cada s , $x^{(N)}$, fixos, $\Phi_{s,t}(x^{(N)})$ é um processo que toma valores em o espaço $\mathbb{R}^{Nd}$. Dito processo é chamado movimento de N -pontos do fluxo $\Phi_{s,t}$.*

Da definição acima observemos que $\Phi_{s,t}(x^{(N)})$ tem a propriedade de Markov com respeito a $\mathfrak{F}_{s,t} = \sigma(\Phi_{u,v}(x) : s \leq u \leq v \leq t, x \in \mathbb{R}^d)$, com probabilidade de transição

$$\mathbb{P}_{s,t}^{(N)}(x^{(N)}, E) = \mathbb{P}(\Phi_{s,t}(x^{(N)}) \in E).$$

De fato, basta ver que $\mathbb{E}[f(\Phi_{s,u}(x^{(N)})) | \mathfrak{F}_{s,t}] = T_{t,u}^{(N)}(f(\Phi_{s,t}(x^{(N)})))$, onde $f: \mathbb{R}^{Nd} \rightarrow \mathbb{R}$ é Borel limitada e

$$T_{t,u}^{(N)}(f(x^{(N)})) = \int f(y^{(N)}) \mathbb{P}_{s,t}^{(N)}(x^{(N)}, dy^{(N)}).$$

Notemos que devido à propriedade de que $\Phi_{s,u} = \Phi_{t,u} \circ \Phi_{s,t}$, junto com a propriedade de incrementos independentes de $\Phi_{s,t}$, obtemos que $\Phi_{t,u}$ é independente de $\mathfrak{F}_{s,t}$. Resulta que

$$T_{s,u}^{(N)} f = T_{t,u}^{(N)} \circ T_{s,t}^{(N)} f.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} T_{t,u}^{(N)} \circ T_{s,t}^{(N)} f(x^{(N)}) &= \mathbb{E}[T_{s,t}^{(N)} f(\Phi_{t,u}(x^{(N)}))] \\ &= \mathbb{E}[T_{s,t}^{(N)}(f \circ \Phi_{t,u})(x^{(N)})] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f \circ \Phi_{t,u}(\Phi_{s,t}(x^{(N)}))]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f \circ \Phi_{t,u}(y^{(N)})] \Big|_{y^{(N)} = \Phi_{s,t}(x^{(N)})}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(\Phi_{s,u}(x^{(N)})) | \mathfrak{F}_{s,t}]] \\ &= \mathbb{E}[f(\Phi_{s,u}(x^{(N)}))] \\ &= T_{s,u}^{(N)} f(x^{(N)}). \end{aligned}$$

2.2 Média e Covariância Infinitesimal. Gerador do movimento de N -pontos

Ao longo desta seção, com o objetivo de obter os geradores infinitesimais da família de semigrupos $T_{s,t}^{(N)}$, apresentamos as características locais de um fluxo Browniano.

Para começar, supomos as seguintes condições, as quais definem à média e covariância infinitesimal, assim como algumas propriedades referentes a estas.

Condição I. $\Phi_{s,t}(x, \cdot)$ é quadrado integrável e os seguintes limites existem:

- (i) $b(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}[\Phi_{t,t+h}(x) - x],$
- (ii) $a(x, y, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}[(\Phi_{t,t+h}(x) - x)(\Phi_{t,t+h}(y) - y)^*],$

onde x^* é a transposta do vetor $x \in \mathbb{R}^d$. O par (a, b) é chamado de características locais do fluxo $\Phi_{s,t}$. Observe claramente que a matriz $a(x, y, t) = (a_{ij}(x, y, t))$ cumpre as seguintes condições:

- Simetria: $(a_{ij}(x, y, t)) = (a_{ji}(y, x, t))$
- Definida não-negativa: $\sum_{i,j,p,q} a_{ij}(x_p, x_q, t) \xi_p^i \xi_q^j \geq 0$ para quaisquer $(x_1, \dots, x_N)$ e $\xi_p = (\xi_p^1, \dots, \xi_p^d), p = 1, 2, \dots, N$.

Condição II. Existe $K > 0$, independente de s, t, x tal que

- (i) $|\mathbb{E}[\Phi_{t,t+h}(x) - x]| \leq K(1 + |x|)(t - s)$
- (ii) $|\mathbb{E}[(\Phi_{s,t}(x) - x)(\Phi_{s,t}(y) - y)^*]| \leq K(1 + |x|)(1 + |y|)(t - s).$

Das condições dadas acima se obtém facilmente que:

$$|b(x, t)| \leq K(1 + |x|),$$

$$|a(x, y, t)| \leq K(1 + |x|)(1 + |y|).$$

Veremos mais para frente que o par (a, b) determina a lei do fluxo Browniano. É por isso que mostramos que o gerador infinitesimal do processo de difusão de N -pontos $(\Phi_{s,t}(x_1), \dots, \Phi_{s,t}(x_N)), t \in [s, T]$ é completamente caracterizado pela média e covariância infinitesimal. Para fazer isto precisamos dos seguintes lemas referentes a propriedades de semimartingales dos processos estocásticos $\Phi_{s,t}, t \in [s, T]$.

Antes de enunciar o lema, definimos $M_{s,t}(x)$ como segue:

$$M_{s,t}(x) = \Phi_{s,t}(x) - x - \int_s^t b(\Phi_{s,r}(x), r) dr.$$

Lema 2.6. Para cada s, t , $M_{s,t}(x)$ é uma L^2 -martingale contínua e

$$\langle M_{s,t}^i(x), M_{s,t}^j(y) \rangle = \int_s^t a_{ij}(\Phi_{s,r}(x), \Phi_{s,r}(y), r) dr,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa a notação para o processo de variação quadrática.

Demonstração. Para $s < t$ definimos

$$m_{s,t}(x) = \mathbb{E}[\Phi_{s,t}(x)].$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m_{s,t}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (m_{s,t+h}(x) - m_{s,t}(x)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbb{E}[\Phi_{t,t+h}(\Phi_{s,t}(x))] - \mathbb{E}[\Phi_{s,t}(x)]) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbb{E}[m_{t,t+h}(\Phi_{s,t}(x)) - \Phi_{s,t}(x)]). \end{aligned}$$

Agora devido à condição (II) temos que

$$\frac{1}{h} |m_{t,t+h}(\Phi_{s,t}(x)) - \Phi_{s,t}(x)| \leq K(1 + |\Phi_{s,t}(x)|).$$

Daí como $K(1 + |\Phi_{s,t}(x)|)$ é integrável, obtemos que,

$$\frac{\partial}{\partial t} m_{s,t}(x) = \mathbb{E}[b(\Phi_{s,t}(x), t)].$$

Portanto,

$$m_{s,t}(x) - x = \int_s^t \mathbb{E}[b(\Phi_{s,r}(x), r)] dr.$$

Assim,

$$\mathbb{E}[M_{s,t}(x)] = 0.$$

Da definição de $M_{s,t}$, temos que para $s < t < u$,

$$M_{s,u}(x) = M_{s,t}(x) + M_{t,u}(\Phi_{s,t}(x)).$$

Calculando a esperança condicional, resulta que

$$\mathbb{E}[M_{s,u}(x) | \mathfrak{F}_{s,t}] = M_{s,t}(x) + \mathbb{E}[M_{t,u}(y)]_{y=\Phi_{s,t}(x)} = M_{s,t}(x).$$

Assim, $M_{s,t}$ é martingale, e portanto se prova nossa primeira afirmação.

Para estabelecer a segunda afirmação definimos,

$$V_{s,t}(x, y) = \mathbb{E}[M_{s,t}(x)(M_{s,t}(y))^*].$$

Então

$$V_{s,t+h}(x, y) - V_{s,t}(x, y) = \mathbb{E}[(M_{s,t+h}(x) - M_{s,t}(x))(M_{s,t+h}(y) - M_{s,t}(y))^*].$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[V_{s,t+h}(x, y) - V_{s,t}(x, y)] &= \frac{1}{h}\mathbb{E}[M_{t,t+h}(\Phi_{s,t}(x))(M_{t,t+h}(\Phi_{s,t}(x)))^*] \\ &= \frac{1}{h}\mathbb{E}[V_{t,t+h}(\Phi_{s,t}(x), \Phi_{s,t}(y))]. \end{aligned}$$

Desta forma, fazendo $h \rightarrow 0$ na equação de acima obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}V_{s,t}(x, y) = \mathbb{E}[a(\Phi_{s,t}(x), \Phi_{s,t}(y), t)].$$

Assim

$$V_{s,t}(x, y) = \int_s^t \mathbb{E}[a(\Phi_{s,r}(x), \Phi_{s,r}(y), r)]dr.$$

Pondo

$$N_{s,t}(x, y) = M_{s,t}(x)M_{s,t}(y)^* - \int_s^t a(\Phi_{s,r}(x), \Phi_{s,r}(y), r)dr$$

resulta que

$$\mathbb{E}[N_{s,t}(x, y)] = 0.$$

Também, para $s < t < u$ temos

$$\begin{aligned} N_{s,u}(x, y) &= N_{s,t}(x, y) + N_{t,u}(\Phi_{s,t}(x), \Phi_{s,t}(y)) \\ &\quad + M_{s,t}(x)M_{t,u}(\Phi_{s,t}(y)) + M_{s,t}(y)M_{t,u}(\Phi_{s,t}(x)). \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathbb{E}[N_{s,u}(x, y)|\mathfrak{F}_{s,t}] = N_{s,t}(x, y).$$

Ou seja, $N_{s,t}(x, y)$ é um martingale. Assim obtemos o resultado procurado. $\square$

A seguir provaremos que o gerador infinitesimal de $T_{s,t}^{(N)}$ é dado por um operador elíptico de segundo ordem. Assim, para cada $N \in \mathbb{N}$ definimos operador diferencial linear de segundo ordem sobre $\mathbb{R}^{Nd}$ com parâmetro $t \in [0, T]$ como

$$\begin{aligned} L_t^{(N)}f(x^{(N)}) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{k,l=1}^N a_{ij}(x_k, x_l, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^i \partial x_l^j}(x^{(N)}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^N b^i(x_k, t) \frac{\partial f}{\partial x_k^i}(x^{(N)}), \end{aligned}$$

onde $x_k \in \mathbb{R}^d$, $k = 1, \dots, N$, $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^d)$ e f é uma função de classe C^2 sobre $\mathbb{R}^{Nd}$. Aqui $L_t^{(N)}$ é o gerador infinitesimal do processo de N -pontos $\Phi_{s,t}(x^{(N)})$.

Teorema 2.7. *Seja f uma função de classe C^2 sobre $\mathbb{R}^{Nd}$ tal que f e suas derivadas se desenvolvem polinomialmente. Então se cumpre para qualquer $s, t, x^{(N)}$,*

$$T_{s,t}^{(N)} f(x^{(N)}) - f(x^{(N)}) = \int_s^t T_{s,r}^{(N)} L_r^{(N)} f(x^{(N)}) dr$$

Em particular

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T_{t,t+h}^{(N)} f - f) = L_t^{(N)} f.$$

Demonstração. A prova está essencialmente baseada na fórmula de Itô. Assim, pelo lema 2.6 temos que para (s, x) fixos, $\Phi_{s,t}(x)$ é um semimartingale contínua com a seguinte decomposição,

$$\Phi_{s,t}(x) = x + M_{s,t}(x) + \int_s^t b(\Phi_{s,r}(x), r) dr.$$

Agora, aplicando a fórmula de Itô à função f temos que

$$\begin{aligned} f(\Phi_{s,t}(x^{(N)})) - f(x^{(N)}) &= f(\Phi_{s,t}(x_1), \dots, \Phi_{s,t}(x_N)) - f(x_1, \dots, x_N) \\ &= \sum_{i,k} \int_s^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^i} dM_{s,r}^i(x_k) + \sum_{i,k} \int_s^t \frac{\partial f}{\partial x_k^i} b^i(\Phi_{s,r}(x_k), r) dr \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \int_s^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^i \partial x_l^j} d\langle M_{s,r}^i(x_k), M_{s,r}^j(x_l) \rangle. \end{aligned}$$

Desta maneira reduzindo termos na expressão anterior obtemos,

$$\begin{aligned} f(\Phi_{s,t}(x^{(N)})) - f(x^{(N)}) &= \int_s^t L_r^{(N)} f(\Phi_{s,r}(x^{(N)})) dr \\ &= \sum_{k,i} \int_s^t \frac{\partial f}{\partial x_k^i}(\Phi_{s,r}(x^{(N)})) dM_{s,r}^i(x_k). \end{aligned}$$

Se $\Phi_{s,t}$ tem momentos finitos de todas as ordens (ver próximo lema) e aplicando esperança à expressão acima temos,

$$T_{s,t}^{(N)} f(x^{(N)}) - f(x^{(N)}) - \int_s^t T_{s,r}^{(N)} L_r^{(N)} f(x^{(N)}) dr = 0,$$

o que prova o teorema. □

O seguinte lema é um resultado que nos mostra L^p -estimativas do fluxo $\Phi_{s,t}$.

Lema 2.8. *O fluxo $\Phi = \{\Phi_{s,t}(x)\}$ tem momentos finitos de qualquer ordem. Além disso, para qualquer p real e $\epsilon > 0$, existe uma constante positiva $C = C(p, \epsilon)$ tal que*

$$\mathbb{E}[(\epsilon + |\Phi_{s,t}(x)|^2)^p] \leq C(\epsilon + |x|^2)^p,$$

para qualquer s, t, x .

Demonstração. Para a prova basta considerar as aplicações $g(x) = \epsilon + |x|^2$ e $f(x) = g(x)^p$, e o operador elíptico $L_r = L_r^{(1)}$. Assim, aplicando a fórmula de Itô para o processo de 1-ponto resulta

$$\begin{aligned} L_r f &= 2p g(x)^{p-1} \sum_i b^i(x, t) x_i + p g(x)^{p-1} \sum_i a_{ii}(x, x, t) \\ &\quad + 2p(p-1) g(x)^{p-2} \sum_{i,j} a_{ij}(x, x, t) x_i x_j. \end{aligned}$$

Daí usando a condição (II) obtemos que $|L_r f(x)| \leq C' f(x)$ onde a constante C' é independente de x, r . A seguir definimos o tempo de parada

$$\tau_n = \tau_n(x, s) = \begin{cases} \inf\{t > s : |\Phi_{s,t}(x)| \geq n\} \\ \infty \end{cases}, \quad \text{se o conjunto de acima é vazio}$$

Denotando o processo parado $\Phi_{s,t \wedge \tau_n}$ por $\tilde{\Phi}_{s,t}$ obtemos que

$$f(\tilde{\Phi}_{s,t}(x)) - \int_s^t L_r f(\tilde{\Phi}_{s,r}(x)) dr$$

é um martingale. Portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(\tilde{\Phi}_{s,t}(x))] &= f(x) + \int_s^t \mathbb{E}[L_r f(\tilde{\Phi}_{s,r}(x))] dr \\ &\leq f(x) + C' \int_s^t \mathbb{E}[f(\tilde{\Phi}_{s,r}(x))] dr. \end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Gronwall tem-se

$$\mathbb{E}[f(\tilde{\Phi}_{s,t}(x))] \leq f(x) e^{C'(t-s)}.$$

Daí fazemos $n \rightarrow \infty$ e então

$$\mathbb{E}[f(\Phi_{s,t}(x))] \leq f(x) e^{C'(t-s)}.$$

Portanto por definição de f temos

$$\mathbb{E}[(\epsilon + |\Phi_{s,t}(x)|^2)^p] \leq C(\epsilon + |x|^2)^p,$$

como desejamos. □

A prova do seguinte teorema sai do contexto do resultado principal e assim a omitiremos (uma prova deste teorema pode ser vista em [2], Teorema 4.2.5).

Teorema 2.9. *Seja $b(x, t)$ uma função contínua limitada e $a(x, y, t)$ uma matriz $d \times d$ a qual é definida não-negativa e simétrica. Suponha que a e b sejam duas vezes diferenciáveis e que suas derivadas sejam limitadas. Então existe um fluxo Browniano com características locais (a, b) . Além disso, dita lei é única.*

2.3 Fluxos Brownianos de Homeomorfismos

Nesta seção estudaremos os fluxos Brownianos de homeomorfismos.

Definição 2.10. *Seja $\Phi = \{\Phi_{s,t} : \mathbb{R}^d \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d : 0 \leq s \leq t \leq T\}$ um fluxo Browniano de aplicações mensuráveis. Dizemos que $\Phi = \{\Phi_{s,t}\}$ é um fluxo Browniano de homeomorfismos se existe um conjunto N de Ω de medida nula tal que para qualquer $\omega \in N^c$ verifica:*

(i) $\Phi_{s,t}(x, \omega)$ é contínua em (s, t, x)

(ii) $\Phi_{s,t}(\cdot, \omega) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um homeomorfismo para qualquer $s < t$

Além disso, se

(iii) $\Phi_{s,t}(\cdot, \omega) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um C^k -difeomorfismo para qualquer $s < t$

dizemos que $\Phi = \{\Phi_{s,t}\}$ é um fluxo Browniano de C^k -difeomorfismos.

Em seguida afirmamos a condição de Lipschitz para as características locais (a, b) de um fluxo Browniano.

Condição III. Existe uma constante L tal que

$$|b(x, t) - b(y, t)| \leq L|x - y|$$

$$|a(x, x, t) - 2a(x, y, t) + a(y, y, t)| \leq L|x - y|^2$$

A condição (III) confirma que um fluxo Browniano é um fluxo Browniano de homeomorfismos.

Teorema 2.11. *Seja $\Phi_{s,t}$ um fluxo Browniano satisfazendo as condições (I), (II) da seção anterior, e a condição (III). Então $\Phi_{s,t}$ é um fluxo Browniano de homeomorfismos.*

A prova do teorema de acima é baseada em várias estimativas que iremos a obter nos lemas seguintes. Assim para simplificar nossa escrita assumimos as condições (I), (II), (III).

Lema 2.12. *Para qualquer p , existe uma constante positiva $C = C(p)$ tal que para qualquer $\epsilon > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$*

$$\mathbb{E}[(\epsilon + |\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{s,t}(y)|^2)^p] \leq C(\epsilon + |x - y|^2)^p.$$

Demonstração. Definimos $g(x, y) = \epsilon + |x - y|^2$ e $f(x, y) = g(x, y)^p$. Podemos escrever o gerador infinitesimal do processo de 2-pontos $L_t^{(2)}$, como

$$\begin{aligned} L_t^{(2)} f(x, y) &= 2pg(x, y)^{p-1} \left\{ \sum_i (b^i(x, t) - b^i(y, t))(x_i - y_i) \right\} \\ &\quad + pg(x, y)^{p-2} \left\{ \sum_{i,j} (g(x, y)\delta_{i,j} + 2(p-1)(x_i - y_i)(x_j - y_j)) \right. \\ &\quad \left. \times (a_{i,j}(x, x, t) - 2a_{i,j}(x, y, t) + a_{i,j}(y, y, t)) \right\}. \end{aligned}$$

Pela condição (III), temos as seguintes estimativas,

$$\begin{aligned} \left| \sum_i (b^i(x, t) - b^i(y, t))(x_i - y_i) \right| &= |(b(x, t) - b(y, t))(x - y)| \\ &\leq |(b(x, t) - b(y, t))||x - y| \\ &\leq L|x - y|^2 \\ &\leq L(\epsilon + |x - y|^2) \\ &= C_1 g(x, y), \end{aligned}$$

onde $C_1 = L$. Assim, também temos,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j} (g(x, y)\delta_{i,j} + 2(p-1)(x_i - y_i)(x_j - y_j))(a_{i,j}(x, x, t) - 2a_{i,j}(x, y, t) + a_{i,j}(y, y, t)) \right| \\ \leq (2(p-1) + Lg(x, y))|x - y|^2 \\ \leq C_2 g(x, y)^2, \end{aligned}$$

onde $C_2 = (2p-1)L$. Substituindo as estimativas de acima, na expressão obtida de $L_t^{(2)}$, teremos que existe uma constante $C' = 2pC_1 + pC_2$, tal que

$$L_t^{(2)} f(x, y) \leq C' f(x, y).$$

Aplicando a fórmula de Itô, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(\Phi_{s,t}(x), \Phi_{s,t}(y))] &= f(x, y) + \int_s^t \mathbb{E}[L_r^{(2)} f(\Phi_{s,r}(x), \Phi_{s,r}(y))] dr \\ &\leq f(x, y) + C' \int_s^t \mathbb{E}[f(\Phi_{s,r}(x), \Phi_{s,r}(y))] dr. \end{aligned}$$

Daí, pela desigualdade de Gronwall, temos

$$\mathbb{E}[f(\Phi_{s,t}(x), \Phi_{s,t}(y))] \leq f(x, y) e^{C'(t-s)}.$$

Deste modo, existe uma constante $C = e^{C'(t-s)}$, tal que

$$\mathbb{E}[(\epsilon + |\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{s,t}(y)|^2)^p] \leq C(\epsilon + |x - y|^2)^p,$$

como queríamos. $\square$

Outra L^p -estimativa do fluxo $\Phi_{s,t}$ que nos ajudará a mostrar o Teorema 2.11 é o seguinte.

Lema 2.13. *Para qualquer inteiro positivo p existe uma constante $C = C(p)$ tal que para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^d$, temos*

$$\mathbb{E}[|\Phi_{s,t}(x_0) - x_0|^{2p}] \leq C|t - s|^p(1 + |x_0|)^{2p}.$$

Demonstração. Fixamos $x_0 \in \mathbb{R}^d$ e definimos $g(x) = |x - x_0|^2$ e $f(x) = g(x)^p$. Então utilizando as condições (I), (II) da seção anterior, e a condição (III) achamos constantes C_1, C_2 e C_3 tais que

$$|L_t f(x)| \leq C_1 f(x) + C_2 g(x)^{p-\frac{1}{2}}(1 + |x_0|) + C_3 g(x)^{p-1}(1 + |x_0|)^2.$$

Pela fórmula de Itô, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(\Phi_{s,t}(x_0))] &\leq f(x_0) + C_1 \int_s^t \mathbb{E}[f(\Phi_{s,r}(x_0))]dr \\ &\quad + C_2(1 + |x_0|) \int_s^t \mathbb{E}[g(\Phi_{s,r}(x_0))^{p-\frac{1}{2}}]dr \\ &\quad + C_3(1 + |x_0|^2) \int_s^t \mathbb{E}[g(\Phi_{s,r}(x_0))^{p-1}]dr. \end{aligned}$$

Assim, aplicando a desigualdade de Gronwall, concluímos que existem constantes C_4, C_5 tais que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(\Phi_{s,t}(x_0))] &\leq C_4(1 + |x_0|) \int_s^t \mathbb{E}[g(\Phi_{s,r}(x_0))^{p-\frac{1}{2}}]dr \\ &\quad + C_5(1 + |x_0|^2) \int_s^t \mathbb{E}[g(\Phi_{s,r}(x_0))^{p-1}]dr. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para o caso $p = \frac{1}{2}, 1$, a estimativa desejada se cumpre como uma aplicação direta da condição (II). Usando (2.1) a estimativa se cumpre quando $p = \frac{3}{2}$. Daí considerando os casos acima e a última expressão obtida obtemos o caso $p = 2$. Desta maneira continuamos o processo por indução e assim concluímos o resultado para qualquer p . $\square$

Antes de enunciar o próximo lema, observe que por aplicação do lema acima temos: se p é um inteiro positivo então existe uma constante positiva $C = C(p)$ tal que para quaisquer $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x_0) - x_0 - (\Phi_{s,t}(y_0) - y_0)|^{2p}] \leq C|t - s|^p |x_0 - y_0|^{2p}. \quad (2.2)$$

Para a prova basta considerar $g(x, y) = |(x - x_0) - (y - y_0)|^2$, $f(x, y) = g(x, y)^p$. Daí

$$L_t^{(2)} f \leq C_1 f + C_2 g^{p-\frac{1}{2}} |x_0 - y_0| + C_3 g^{p-1} |x_0 - y_0|^2.$$

Prosseguindo como no lema anterior chegamos a (2.2).

Lema 2.14. *Seja p um inteiro positivo. Então existe uma constante $C = C(p)$ tal que*

$$\mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{s',t'}(x')|^{2p}] \leq C \{ |x - x'|^{2p} + (1 + |x| + |x'|)^{2p} (|t - t'|^p + |s - s'|^p) \}$$

se cumpre para qualquer $s \leq t$, $s' \leq t'$ e $x, x' \in \mathbb{R}^d$.

Demonstração. Aqui apenas consideramos o caso quando $s' \leq s \leq t \leq t'$ pois os demais casos são similares. Separamos o trabalho em três etapas

(a) Temos em conta que $s = s'$ e $x = x'$. Além disso faremos uso do Lema 2.13. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{s,t'}(x)|^{2p}] &= \mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{t,t'}(\Phi_{s,t}(x))|^{2p}] \\ &= \int \mathbb{E} [|y - \Phi_{t,t'}(y)|^{2p}] P(\Phi_{s,t}(x) \in dy) \\ &\leq C_1 |t - t'|^p \int (1 + |y|)^{2p} P(\Phi_{s,t}(x) \in dy) \\ &= C_1 |t - t'|^p \mathbb{E}(1 + |\Phi_{s,t}(x)|)^{2p} \\ &\leq C_2 |t - t'|^p (1 + |x|)^{2p}. \end{aligned}$$

(b) Agora, consideramos $s = s'$ e $x \neq x'$. Aplicando o Lema 2.12 teremos,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{s,t'}(x')|^{2p}] &= 2^{2p} \{ \mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{s,t'}(x')|^{2p}]^{2p} + \mathbb{E} [|\Phi_{s,t'}(x) - \Phi_{s,t'}(x')|^{2p}] \} \\ &\leq C'_3 \{ |t - t'|^p (1 + |x|)^{2p} + |x - x'|^{2p} \}. \end{aligned}$$

(c) Por último, utilizando as etapas anteriores temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{s',t'}(x')|^{2p}] &= \mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{s,t'}(\Phi_{s',s}(x'))|^{2p}] \\
&= \int \mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{s,t'}(y)|^{2p}] P(\Phi_{s',s}(x') \in dy) \\
&\leq C_3 \int \{|t - t'|^p(1 + |x|)^{2p} + |x - y|^{2p}\} P(\Phi_{s',s}(x') \in dy) \\
&= C_3 \{|t - t'|^p(1 + |x|)^{2p} + \mathbb{E}|x + |\Phi_{s',s}(x')||^{2p}\} \\
&\leq C_3 \{|t - t'|^p(1 + |x|)^{2p}\} + C_4 |x - x'|^{2p} + C_5 |s - s'|^p(1 + |x'|)^{2p} \\
&\leq C_6 \{(|t - t'|^p + |s - s'|^p)(1 + |x| + |x'|)^{2p} + |x + x'|^{2p}\}.
\end{aligned}$$

□

Com ajuda do critério de continuidade de Kolmogorov e com os lemas anteriores, podemos concluir esta seção com a demonstração do Teorema 2.11.

Demonstração. (**Teorema 2.11**) Consideremos $p > 2(d + 2)$. Então pelos Lemas 2.12, 2.13 e 2.14 temos que se cumpre

$$\mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{s,t}(y)|^{2p}] \leq C|x - y|^{2p}$$

Assim, pelo Teorema 1.11 temos que $\Phi_{s,t}$ tem modificação contínua. Portanto $\Phi_{s,t}(\cdot, \omega): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma aplicação contínua para qualquer $s < t$ q.t.p.. Agora, para o caso p -negativo, nós temos

$$\mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{s,t}(y)|^{2p}] \leq C|x - y|^{2p}$$

e

$$\mathbb{E} [1 + |\Phi_{s,t}(x)|^{2p}] \leq C(1 + |x|^{2p})$$

Mas estas duas últimas desigualdades implicam que $\Phi_{s,t}(\cdot, \omega)$ é um homeomorfismo, como queríamos. □

2.4 Fluxos Brownianos de Difeomorfismos

Nesta última seção estudamos fluxos Brownianos de difeomorfismos e veremos que se as características locais (a, b) de um fluxo Browniano são diferenciáveis e possuem derivadas limitadas, então o fluxo se transforma num fluxo de difeomorfismos. Antes

de começar, consideramos a seguinte notação, a qual será útil ao longo desta seção: denotemos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$, onde $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ e

$$D^\alpha = D_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{\alpha_d}.$$

Teorema 2.15. *Seja $\Phi_{s,t}$ um fluxo Browniano com características locais (a, b) satisfazendo as condições (I) e (II) da seção (1.2), e a condição (III) da seção (1.3). Suponha que além disso que $a(x, y, t)$ e $b(x, t)$ sejam k -vezes continuamente diferenciáveis em x e y , e que $D_x^\alpha D_y^\beta a(x, y, t)$, $D_x^\alpha b(x, t)$, $|\alpha| \leq K$, $|\beta| \leq K$ sejam limitadas. Então $\Phi_{s,t}(\cdot, w): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um difeomorfismo de classe C^{k-1} para qualquer $s < t$ a.s..*

Provaremos o teorema no caso $k = 2$, pois para o caso maior que 2 a prova é similar. A prova deste teorema está baseada em vários lemas que enunciamos e demonstramos em seguida.

Lema 2.16. *Sejam $y, y' \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $g: \mathbb{R}^{4d} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{y}(x_1 - x_2) - \frac{1}{y'}(x_3 - x_4).$$

Sejam $p \in \mathbb{N}$ e $f = |g|^{2p}$. Então existem constantes $C_i = C_i(p)$, $i = 1, 2$ tais que

$$|L_t^{(4)} f(x_1, x_2, x_3, x_4)| \leq C_1 f(x_1, x_2, x_3, x_4) + C_2 (|x_1 - x_3| + |x_2 - x_4|)^{2p} \left(1 + \left|\frac{1}{y'}(x_3 - x_4)\right|^{2p}\right).$$

Demonstração. Para simplificar nosso trabalho, consideramos o caso $d = 1$, e dado que a variável t esta fixada, então consideramos somente $a(x, y)$ e $b(x)$ em vez de $a(x, y, t)$ e $b(x, t)$. Desta maneira observamos que

$$\begin{aligned} L_t^{(4)} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 2p \left\{ \frac{1}{y} (b(x_1) - b(x_2)) - \frac{1}{y'} (b(x_3) - b(x_4)) \right\} |g(x_1, x_2, x_3, x_4)|^{2p-1} \\ &\quad \times \text{sign } g(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &\quad + p(2p-1) \left[\frac{1}{y^2} \{a(x_1, x_1) - 2a(x_1, x_2) + a(x_2, x_2)\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{yy'} \{a(x_1, x_3) - a(x_1, x_4) + a(x_2, x_3) - a(x_2, x_4)\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{y'^2} \{a(x_3, x_3) - 2a(x_3, x_4) + a(x_4, x_4)\} \right] |g(x_1, x_2, x_3, x_4)|^{2p-2} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} I_1 &= \left\{ \left(\int_0^1 b'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) d\theta \right) \frac{1}{y} (x_1 - x_2) - \left(\int_0^1 b'(x_3 + \theta(x_4 - x_3)) d\theta \right) \frac{1}{y'} (x_3 - x_4) \right\} \\ &\quad \times |g|^{2p-1} \text{sign } g \\ &= \left(\int_0^1 b'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) d\theta \right) |g|^{2p} + \int_0^1 \left\{ b'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) - b'(x_3 + \theta(x_4 - x_4)) \right\} d\theta \\ &\quad \times \frac{1}{y'} (x_3 - x_4) |g|^{2p-1} \text{sign } g. \end{aligned}$$

Novamente utilizando o teorema do valor médio, obtemos constantes positivas C_3 e C_4 que dependem de p , de modo que I_1 fica limitado por

$$|I_1| \leq C_3 |g|^{2p} + C_4 (|x_1 - x_3| + |x_2 - x_4|) \left| \frac{1}{y'} (x_3 - x_4) \right| |g|^{2p-1}.$$

Assim, considerando a desigualdade $ab \leq \frac{a^\alpha}{\alpha} + \frac{b^\beta}{\beta}$ onde $\alpha, \beta \geq 1$ e $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, conseguimos a seguinte limitação para I_1 ,

$$|I_1| \leq C_5 |g|^{2p} + C_6 (|x_1 - x_3| + |x_2 - x_4|)^{2p} \left| \frac{1}{y'} (x_3 - x_4) \right|^{2p}, \quad (2.4)$$

onde C_5, C_6 são constantes positivas encontradas no procedimento anterior. Em seguida, para limitar I_2 , observemos que,

$$\begin{aligned} &a(x_i, x_k) - a(x_i, x_m) + a(x_j, x_k) - a(x_j, x_m) \\ &= \int \int a''(x_i + \theta(x_j - x_i), x_k + \tau(x_m - x_k)) (x_i - x_j)(x_k - x_m) d\theta d\tau, \end{aligned}$$

onde $a''(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} a(x, y)$. Agora considerando

$$\xi_{ik}(\theta, \tau) = a''(x_i + \theta(x_j - x_i), x_k + \tau(x_m - x_k)),$$

$$W_1 = \frac{1}{y} (x_1 - x_2), W_3 = \frac{1}{y'} (x_3 - x_4),$$

e usando o fato que $\int \int \xi_{13}(\theta, \tau) d\theta d\tau = \int \int \xi_{31}(\theta, \tau) d\theta d\tau$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{I_2}{p(2p-1)} &= \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (\xi_{11}(\theta, \tau) W_1^2 - 2\xi_{13}(\theta, \tau) W_1 W_3 + \xi_{33}(\theta, \tau) W_3^2) d\theta d\tau \right\} |g|^{2p-2} \\ &= \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (\xi_{11}(\theta, \tau)) d\theta d\tau \right\} |g|^{2p} \\ &\quad + \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (\xi_{11}(\theta, \tau) - \xi_{13}(\theta, \tau) - \xi_{31}(\theta, \tau) + \xi_{33}(\theta, \tau)) d\theta d\tau \right\} |g|^{2p-2} |W_3|^2 \\ &\quad + \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (2\xi_{11}(\theta, \tau) - \xi_{13}(\theta, \tau) - \xi_{31}(\theta, \tau)) d\theta d\tau \right\} |g|^{2p-2} g W_3. \end{aligned}$$

Assim, vemos que o primeiro termo da igualdade é limitado por $C_7|g|^{2p}$, onde $C_7 = C_7(p)$ é alguma constante positiva. Aplicando o Teorema de Valor Médio, observamos que o segundo termo da igualdade é limitado por $C_8(|x_1 - x_3| + |x_2 - x_4|)|g|^{2p-1}|W_3|$, para algum $C_8 = C_8(p) > 0$. Portanto, a limitação de I_2 fica da seguinte maneira

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C_7 f + C_8(|x_1 - x_3| + |x_2 - x_4|)^2 |g|^{2p-2} \\ &\quad + C_9(|x_1 - x_3| + |x_2 - x_4|)|g|^{2p-1} \left| \frac{1}{y'}(x_3 - x_4) \right| \\ &\leq C_{10} f + C_{11}(|x_1 - x_3| + |x_2 - x_4|)^{2p} \\ &\quad + C_{12}(|x_1 - x_3| + |x_2 - x_4|)^{2p} \left| \frac{1}{y'}(x_3 - x_4) \right|^{2p}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $C_9 = C_9(p) > 0$, $C_{10} = C_{10}(p) > 0$, $C_{11} = C_{11}(p) > 0$ e $C_{12} = C_{12}(p) > 0$ são constantes.

Agora, substituindo as estimativas (2.4), (2.5) em (2.3) obtemos a estimativa desejada. $\square$

Lema 2.17. *Seja e um vetor unitário em $\mathbb{R}^d$, $y (\neq 0)$ um número real. Ponhamos*

$$\eta_{s,t}(x, y) = \frac{1}{y}(\Phi_{s,t}(x + ye) - \Phi_{s,t}(x)).$$

Então para qualquer inteiro positivo p , existe uma constante $C = C(p)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\eta_{s,t}(x, y) - \eta_{s',t'}(x', y')|^{2p}] &\leq C\{|x - x'|^{2p} + |y - y'|^{2p} + (1 + |x| + |x'| + |y| + |y'|)^{2p} \\ &\quad \times (|t - t'|^p + |s - s'|^p)\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Considerando a notação do Lema 2.16 observemos que

$$f(\Phi_{s,t}(x + ye), \Phi_{s,t}(x), \Phi_{s',t'}(x' + y'e), \Phi_{s',t'}(x')) = |\eta_{s,t}(x, y) - \eta_{s',t'}(x', y')|^{2p}$$

Para o que segue, dividimos a prova em duas etapas:

(1) Aqui consideramos $t = t'$, $s' < s$. Assim aplicando a fórmula de Itô para a função f acima tem-se:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[f(\Phi_{s,t}(x + ye), \Phi_{s,t}(x), \Phi_{s',t}(x' + y'e), \Phi_{s',t}(x')))] \\ &= \mathbb{E}[f(x + ye, x, \Phi_{s',s}(x' + y'e), \Phi_{s',s}(x')))] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^t L_r^{(4)} f(\Phi_{s,r}(x + ye), \Phi_{s',r}(x), \Phi_{s',r}(x' + y'e), \Phi_{s',r}(x')) dr\right]. \end{aligned}$$

Deste modo, pelo Lema 2.16, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\eta_{s,t}(x,y) - \eta_{s',t}(x',y')|^{2p}] &\leq \mathbb{E} [|e - \eta_{s',s}(x',y')|^{2p}] \\ &\quad + C_1 \int_s^t \mathbb{E} [|\eta_{s,r}(x,y) - \eta_{s',r}(x',y')|^{2p}] dr \\ &\quad + C_2 \int_s^t \mathbb{E} [|\Phi_{s,r}(x+ye) - \Phi_{s',r}(x'+y'e)| \\ &\quad + |\Phi_{s,r}(x) - \Phi_{s',r}(x')|^{2p} (1 + \eta_{s',r}(x',y'))^{2p}] dr. \end{aligned}$$

Observamos que

$$\eta_{s',s}(x',y') - e = \frac{1}{y'} \{ \Phi_{s',s}(x' + y'e) - \Phi_{s',s}(x') - y'e \},$$

e usando a equação (2.2) obtemos que o primeiro termo do lado direito da desigualdade acima cumpre

$$\mathbb{E} [|\eta_{s',s}(x',y') - e|^{2p}] \leq C |s - s'|^p.$$

Agora vemos que o terceiro termo pode ser limitado por

$$C' |x - x'|^{2p} + |y - y'|^{2p} + (1 + |x| + |x'| + |y| + |y'|)^{2p} |s - s'|^p,$$

todo isto devido ao Lema 2.14 e a desigualdade de Schwarz. Uma vez feito isso, basta aplicar a desigualdade de Gronwall para obter a estimativa desejada.

(2) Sejam $s' < s$ e $t' < t$. Para obter a estimativa fazemos uso da propriedade de fluxo.

Assim

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} [|\eta_{s,t}(x,y) - \eta_{s,t'}(x,y)|^{2p}] \\ &= \int \mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{y} (\Phi_{t',t}(z_1) - \Phi_{t',t}(z_2) - z_1 + z_2) \right|^{2p} \right] \\ &\quad \times \mathbb{P}(\Phi_{s,t'}(x+ye) \in dz_1, \Phi_{s,t'}(x) \in dz_2) \\ &\leq C |t - t'|^p \frac{1}{|y|^{2p}} \int |z_1 - z_2|^{2p} \mathbb{P}(\Phi_{s,t'}(x+ye) \in dz_1, \Phi_{s,t'}(x) \in dz_2) \\ &= C |t - t'|^p \frac{1}{|y|^{2p}} \mathbb{E} [|\Phi_{s,t'}(x+ye) - \Phi_{s,t'}(x)|^{2p}] \\ &\leq C' |t - t'|^p. \end{aligned}$$

Combinando as etapas (1) e (2) conseguimos a desigualdade requerida. $\square$

Dado que já temos as ferramentas necessárias para poder desenvolver o teorema principal desta seção, a seguir fazemos sua demonstração.

Demonstração. (**Teorema 2.15**) Pelas propriedades observadas de $\eta_{s,t}(x, y)$ no lema anterior e aplicando o Teorema 1.11, vemos que $\eta_{s,t}(x, y)$, tem uma extensão contínua em $y = 0$, isto é,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} (\Phi_{s,t}(x + ye_i) - \Phi_{s,t}(x)) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_{s,t}(x)$$

existe para todo s, t, x e para cada $i = 1, 2, \dots, d$, onde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, e é contínuo em (s, t, x) . Portanto $\Phi_{s,t}(x)$ é continuamente diferenciável. Afirmamos que $\Phi_{s,t}$ é um difeomorfismo. De fato, como $\Phi_{s,t}$ é um homeomorfismo, basta mostrar que a matriz Jacobiana $\partial \Phi_{s,t}(x)$ é não-singular. Para isso, consideramos a aplicação $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d^2} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d^2}$

$$(x, z_1, \dots, z_d) \mapsto (\Phi_{s,t}(x), \Phi_{s,t}(x)z_1, \dots, \Phi_{s,t}(x)z_d)$$

a qual se prova facilmente que é um fluxo Browniano pois para $s < t < u$

$$\partial \Phi_{s,u}(x) = \partial \Phi_{t,u}(\Phi_{s,t}(x)) \partial \Phi_{s,t}(x),$$

de onde a propriedade de fluxo segue imediatamente. Portanto a aplicação acima define um fluxo Browniano de homeomorfismo. Desta maneira $\partial \Phi_{s,t}(x)$ é 1-1 e daí é não-singular. $\square$

Capítulo 3

Fluxos Estocásticos e Equações Diferenciais Estocásticas

Este capítulo está dedicado ao estudo das relações entre fluxos estocásticos e equações diferenciais estocásticas. As principais referências para este capítulo estão em H. Kunita [2] e Le Jan [14]. Este capítulo será desenvolvido em cinco seções cujos conteúdos passaremos a explicar em forma breve. Na seção 3.1, estudamos fluxos estocásticos não-Brownianos. Ademais, considerando certas hipóteses sobre as características locais do fluxo não-Browniano (similar ao caso Browniano) estabelecemos propriedades de homeomorfismos e difeomorfismos para os fluxos. Na seção seguinte nos centramos em definições tais como: semimartingales que tomam valores em $C = C(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, assim como suas características locais. Logo na seção 3.3, definimos integrais estocásticas de processos progressivamente mensuráveis com respeito a C -semimartingales, as quais são essencialmente uma generalização das integrais estocásticas usuais. Por outro lado, dentro da seção 3.4 introduzimos o conceito de solução de uma equação diferencial estocástica, no contexto de semimartingales. Além disso, mostramos que a solução de dita equação diferencial estocástica define um fluxo estocástico. Finalmente, na seção 3.5 descrevemos a fórmula generalizada de Itô, as integrais de Stratonovich e as equações diferenciais estocásticas de Stratonovich.

3.1 Fluxos Estocásticos não-Brownianos

Iniciamos esta seção definindo os espaços que tomaremos em conta ao longo desta seção. Desta forma seja $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Considere um fluxo

estocástico de aplicações mensuráveis $\Phi_{s,t}(x, \omega)$ de modo que seja contínua em t . Daqui, denotemos por $\mathfrak{F}_t$ à filtração natural contínua pela direita, do fluxo, isto é,

$$\mathfrak{F}_t = \bigcap_{\epsilon > 0} \sigma(\Phi_{u,v}(\cdot) : 0 \leq u \leq v \leq t + \epsilon).$$

De maneira similar ao capítulo 1, consideramos três condições sobre o fluxo.

Condição I. $\Phi_{s,t}(x, \cdot)$ é quadrado integrável e os seguintes limites existem:

- (i) $b(x, t, \omega) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}[\Phi_{t,t+h}(x) - x | \mathfrak{F}_t](\omega)$, quase certamente para cada $t \in [0, \infty)$.
- (ii) $a(x, y, t, \omega) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}[(\Phi_{t,t+h}(x) - x)(\Phi_{t,t+h}(y) - y)^* | \mathfrak{F}_t](\omega)$, quase certamente para cada $t \in [0, \infty)$.

Observamos que nas expressões acima, a esperança condicional é calculada com respeito à versão da distribuição condicional regular. Também aqui assumimos que $b(x, t, \omega)$ e $a(x, y, t, \omega)$ são ambos mensuráveis e progressivamente mensuráveis para cada x (respectivamente x e y).

As características locais do fluxo $\Phi_{s,t}$ são por definição o par (a, b) .

Observação 3.1. Se $\Phi_{s,t}$ é um fluxo Browniano então $\Phi_{t,t+h}(x)$ independe de $\mathfrak{F}_t$ e portanto as características locais $b(x, t, \omega)$ e $a(x, y, t, \omega)$ são determinísticas, e desta maneira a e b coincidem com as características locais do fluxo Browniano.

Em seguida enunciamos a segunda condição do fluxo $\Phi_{s,t}$, a qual está relacionada a hipóteses de crescimento linear.

Condição II. Existe uma constante positiva K (independente de ω) tal que

$$|\mathbb{E}[\Phi_{s,t}(x) - x | \mathfrak{F}_s]| \leq K(1 + |x|)|t - s|,$$

$$\mathbb{E}[(\Phi_{s,t}(x) - x)(\Phi_{s,t}(y) - y)^* | \mathfrak{F}_s]| \leq K(1 + |x|)(1 + |y|)|t - s|.$$

Resulta das desigualdades anteriores que

$$|b(x, t, \omega)| \leq K(1 + |x|),$$

$$|a(x, y, t, \omega)| \leq K(1 + |x|)(1 + |y|).$$

A diante enunciamos um lema que exhibe um L^2 -martingale associado ao fluxo, o qual será muito útil mais para frente, na construção de uma família de semigrupos associado ao processo de N -pontos.

Lema 3.2. Para s, x fixos e $t \geq s$, o processo

$$M_{s,t}(x) = \Phi_{s,t}(x) - x - \int_s^t b(\Phi_{s,r}(x), r) dr$$

é um L^2 -martingale e

$$\langle M_{s,t}^i(x), M_{s,t}^j(y) \rangle = \int_s^t a_{ij}(\Phi_{s,r}(x), \Phi_{s,r}(y), r) dr.$$

Demonstração. Seja

$$m_{s,t}(x) = \mathbb{E}[\Phi_{s,t}(x) | \mathfrak{F}_s](\omega).$$

Para $s < t < u$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi_{s,u}(x) | \mathfrak{F}_t] &= \int \Phi_{s,u}(x, \omega') \mathbb{P}_t(\omega, d\omega') \\ &= \int \Phi_{t,u}(\Phi_{s,t}(x, \omega'), \omega') \mathbb{P}_t(\omega, d\omega'), \end{aligned}$$

onde $\mathbb{P}_t(\omega, d\omega')$ é distribuição condicional regular dada por $\mathfrak{F}_t$ (ver [6] páginas 146 – 150).

Agora, fixado s, t, ω , e considerando a continuidade de $\Phi_{s,t}(x, \cdot)$ em probabilidade com respeito a (s, t, x) temos que

$$\mathbb{P}_t(\omega, \{\omega' : \Phi_{s,t}(x, \omega') = \Phi_{s,t}(x, \omega)\}) = 1,$$

para quase todo ω . Portanto resultará

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi_{s,u}(x) | \mathfrak{F}_t] &= \int \Phi_{t,u}(\Phi_{s,t}(x, \omega'), \omega') \mathbb{P}_t(\omega, d\omega') \\ &= \int_A \Phi_{t,u}(\Phi_{s,t}(x, \omega), \omega) \mathbb{P}_t(\omega, d\omega') \\ &= \mathbb{E}[\Phi_{t,u}(\Phi_{s,t}(x, \omega), \omega) | \mathfrak{F}_t] \\ &= m_{t,u}(\Phi_{s,t}(x, \omega), \omega). \end{aligned}$$

Agora

$$m_{s,u}(x, \omega) = \mathbb{E}[m_{t,u}(\Phi_{s,t}(x)) | \mathfrak{F}_s],$$

pois

$$\begin{aligned} m_{s,u}(x, \omega) &= \mathbb{E}[\Phi_{s,u}(x) | \mathfrak{F}_s](\omega) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi_{s,u}(x) | \mathfrak{F}_t] | \mathfrak{F}_s](\omega) \\ &= \mathbb{E}[m_{t,u}(\Phi_{s,t}(x, \omega), \omega) | \mathfrak{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[m_{t,u}(\Phi_{s,t}(x)) | \mathfrak{F}_s]. \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{1}{h}[m_{s,t+h}(x, \omega) - m_{s,t}(x, \omega)] = \frac{1}{h}\mathbb{E}[m_{t,t+h}(\Phi_{s,t}(x)) - \Phi_{s,t}(x) | \mathfrak{F}_s].$$

Deste modo fazendo $h \rightarrow 0$, e aplicando o Teorema de Fubini obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} m_{s,t}(x, \omega) = \mathbb{E}[b(\Phi_{s,t}(x), t) | \mathfrak{F}_s].$$

Portanto

$$m_{s,t}(x) - x = \mathbb{E}\left[\int_s^t b(\Phi_{s,r}(x), r) dr | \mathfrak{F}_s\right].$$

Daí

$$\mathbb{E}[M_{s,t}(x) | \mathfrak{F}_s] = 0. \quad (3.1)$$

Logo observe que para $s < t < u$, tem-se

$$M_{s,u}(x) = M_{s,t}(x) + M_{s,u}(\Phi_{t,t}(x)). \quad (3.2)$$

Das equações (3.1) e (3.2) obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{s,u}(x) | \mathfrak{F}_t] &= \mathbb{E}[M_{s,t}(x) | \mathfrak{F}_t] + \mathbb{E}[M_{t,u}(\Phi_{s,t}(x)) | \mathfrak{F}_t] \\ &= M_{s,t}(x) + \mathbb{E}[M_{t,u}(y) | \mathfrak{F}_t]_{y=\Phi_{s,t}(x)} \\ &= M_{s,t}(x). \end{aligned}$$

Assim $M_{s,t}(x)$ é um martingale, como queríamos.

Para provar a segunda afirmação basta considerar

$$V_{s,t}(x, y, \omega) = \mathbb{E}\left[M_{s,t}(x) M_{s,t}(y)^* | \mathfrak{F}_s\right](\omega).$$

Agora observemos que

$$\frac{1}{h}[V_{s,t+h}(x, y, \omega) - V_{s,t}(x, y, \omega)] = \frac{1}{h}\mathbb{E}[V_{t,t+h}(\Phi_{s,t}(x), \Phi_{s,t}(y), \omega) | \mathfrak{F}_s].$$

Assim, fazendo $h \rightarrow 0$ tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} V_{s,t}(x, y, \omega) = \mathbb{E}[a(\Phi_{s,t}(x), \Phi_{s,t}(y), t) | \mathfrak{F}_s].$$

Portanto

$$V_{s,t}(x, y, \omega) = \mathbb{E}\left[\int_s^t a(\Phi_{s,r}(x), \Phi_{s,r}(y), r) dr | \mathfrak{F}_s\right](\omega).$$

Então, pondo

$$N_{s,t}(x, y, \omega) = M_{s,t}(x)M_{s,t}(y)^* - \int_s^t a(\Phi_{s,r}(x), \Phi_{s,r}(y), r) dr,$$

temos que

$$\mathbb{E}[N_{s,t}(x, y) | \mathfrak{F}_s] = 0.$$

Para $s < t < u$, obtém-se

$$\begin{aligned} N_{s,u}(x, y, \omega) &= N_{s,t}(x, y, \omega) + N_{t,u}(\Phi_{s,t}(x), \Phi_{s,t}(y), \omega) \\ &\quad + M_{s,t}(x)M_{t,u}(\Phi_{s,t}(y)) + M_{s,t}(y)M_{t,u}(\Phi_{s,t}(x)). \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathbb{E}[N_{s,u}(x, y, \omega) | \mathfrak{F}_t] = N_{s,t}(x, y, \omega).$$

Mas isto implica que

$$M_{s,t}(x)M_{s,t}(y)^* - \int_s^t a(\Phi_{s,r}(x), \Phi_{s,r}(y), r) dr,$$

é um martingale. Daí

$$\langle M_{s,t}^i(x), M_{s,t}^j(y) \rangle = \int_s^t a_{ij}(\Phi_{s,r}(x), \Phi_{s,r}(y), r) dr,$$

como queríamos. □

Agora definimos um operador diferencial aleatório de segunda ordem que esta relacionado com o processo de N -pontos associado ao fluxo estocástico. Assim seja $x^{(N)} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{Nd}$, onde $x_k \in \mathbb{R}^d$, $k = 1, \dots, N$, e cada $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^d)$. Definimos o operador aleatório $L_t^{(N)}$ por

$$\begin{aligned} (L_t^{(N)} f)(x^{(N)}, \omega) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{k,l=1}^N a_{ij}(x_k, x_l, t, \omega) \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^i \partial x_l^j}(x^{(N)}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^N b^i(x_k, t, \omega) \frac{\partial f}{\partial x_k^i}(x^{(N)}). \end{aligned}$$

Teorema 3.3. *A família de processos $\{\Phi_{s,t}(x)\}$ tem momentos finitos de qualquer ordem e se f é uma função de classe C^2 , e além disso, se suas derivadas tem desenvolvimento polinomial, então*

$$f(\Phi_{s,t}(x^{(N)})) - \int_s^t (L_r^{(N)} f)(\Phi_{s,r}(x^{(N)})) dr,$$

é um martingale.

Demonstração. Do lema anterior temos a seguinte decomposição do fluxo

$$\Phi_{s,t}(x) = x + M_{s,t}(x) + \int_s^t b(\Phi_{s,r}(x), r) dr, \quad t \geq s.$$

Daí, aplicando a fórmula de Itô para f resulta

$$\begin{aligned} f(\Phi_{s,t}(x^{(N)})) - f(x^{(N)}) - \int_s^t L_r^{(N)} f(\Phi_{s,r}(x^{(N)})) dr \\ = \sum_{k,i} \int_s^t \frac{\partial f}{\partial x_k^i}(\Phi_{s,r}(x^{(N)})) dM_{s,r}^i(x_k). \end{aligned}$$

Como $M_{s,t}(x)$ é um martingale, temos que a integral com respeito ao dito martingale é também um martingale. Portanto tem-se que

$$f(\Phi_{s,t}(x^{(N)})) - \int_s^t (L_r^{(N)}) f(\Phi_{s,r}(x^{(N)})) dr,$$

é um martingale. □

Com o objetivo de obter propriedades sobre fluxos de homeomorfismos enunciamos condições de Lipschitz sobre as características locais.

Condição III. Existe uma constante L (independente de (t, ω)) tal que

$$|b(x, t, \omega) - b(y, t, \omega)| \leq L|x - y|,$$

$$|a(x, x, t, \omega) - 2a(x, y, t, \omega) + a(y, y, t, \omega)| \leq L|x - y|^2.$$

Teorema 3.4. *Seja $\Phi_{s,t}$ um fluxo estocástico contínuo de aplicações mensuráveis satisfazendo as condições (I) até (III) deste capítulo. Então $\Phi_{s,t}$ admite uma modificação que é um fluxo estocástico de homeomorfismos.*

Demonstração. Primeiro consideramos as seguintes desigualdades as quais são consequências diretas da aplicação da fórmula de Itô e da desigualdade de Gronwall:

- (a) Para qualquer p e $\epsilon > 0$ existe uma constante $C = C(p) > 0$ tal que para qualquer t, x

$$\mathbb{E} [(\epsilon + |\Phi_{s,t}(x)|^2)^p | \mathfrak{F}_s] \leq C (\epsilon + |x|^2)^p,$$

quase certamente.

- (b) Para p real e $\epsilon > 0$ existe $C = C(p)$ tal que

$$\mathbb{E} [(\epsilon + |\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{s,t}(y)|^2)^p | \mathfrak{F}_s] \leq C (\epsilon + |x - y|^2)^p,$$

se cumpre para todo t, x quase certamente.

(c) Para qualquer inteiro positivo p existe $C = C(p)$ tal que

$$\mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x_0) - x_0|^{2p} | \mathfrak{F}_s] \leq C |t - s|^p (1 + |x_0|^2)^p,$$

se cumpre para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^d$ quase certamente.

Assim, utilizando as limitações (a), (b) e (c) demonstramos que

$$\mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{s',t'}(x')|^{2p}] \leq C \{|x - x'|^{2p} + (1 + |x| + |x'|)^{2p}(|t - t'|^p + |s - s'|^p)\}.$$

Com efeito, basta considerar o caso quando $s = s', x = x', t < t'$. Daí que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{s,t'}(x)|^{2p}] &= \mathbb{E} [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{t,t'}(\Phi_{s,t}(x))|^{2p}] \\ &= \mathbb{E} \{ [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{t,t'}(\Phi_{s,t}(x))|^{2p} | \mathfrak{F}_t] \} \\ &= \mathbb{E} \{ [|\Phi_{s,t}(x) - \Phi_{t,t'}(\Phi_{s,t}(x))|^{2p} | \mathfrak{F}_t] \}_{y=\Phi_{s,t}(x)} \\ &\leq \mathbb{E} [C_1 |t - t'|^p (1 + |\Phi_{s,t}(x)|^2)^p] \\ &= C_1 |t - t'|^p \mathbb{E} [(1 + |\Phi_{s,t}(x)|^2)^p] \\ &\leq C_1 |t - t'|^p C_2 (1 + |x|^2)^p \\ &\leq C' |t - t'|^p (1 + |x|^2)^p, \end{aligned}$$

onde $C' = C_1 C_2$. Daqui em diante, a demonstração é análoga à prova do Teorema 2.11. $\square$

Observação 3.5. *Assumindo condições adequadas de diferenciabilidade e limitação sobre as características locais (a, b) de um fluxo podemos estabelecer propriedades de difeomorfismos de dito fluxo da mesma forma como feito no Capítulo 1.*

3.2 Semimartingales a valores vetoriais

Nesta seção definimos e estudamos a noção referente de C -semimartingales onde $C = C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, assim como às características locais associadas a dito C -semimartingale. Todo este estudo se faz com o objetivo de definir a integral estocástica com respeito a C -semimartingales e portanto considerar equações diferenciais estocásticas.

Assim, para $x \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T]$ seja $X(x, t, \omega)$ um campo aleatório contínuo que toma valores no espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$ tal que para cada x, t é $\mathfrak{F}_t$ -mensurável. Assumimos que C é $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ munido da topologia compacto uniforme.

Definição 3.6. O processo $X(x, t)$ é chamado um martingale com valores em C (C -martingale) se para cada $x \in \mathbb{R}^d$ é um martingale. Agora, $X(x, t)$ é chamado um martingale com valores em C^k (C^k -martingale) se $D_x^\alpha X(x, t)$ é um C -martingale para qualquer $|\alpha| \leq k$. Se $X(x, t)$ é um campo aleatório contínuo o qual admite a seguinte decomposição

$$X(x, t) = X(x, 0) + Y(x, t) + V(x, t),$$

onde $Y(x, t)$ é um C -martingale, $V(x, t)$ um processo de variação limitada para cada x e $Y(x, 0) = 0$, $V(x, 0) = 0$, dizemos que $X(x, t)$ é um semimartingale com valores em C . Se $Y(x, t)$ é um C^k -martingale e $D_x^\alpha V(x, t)$, $|\alpha| \leq k$ é de variação limitada, dizemos que $X(x, t)$ é um C^k -semimartingale.

No que segue definimos as características locais de um semimartingale que assume valores em $\mathbb{R}^d$. Assim, seja $X(x, t)$ um semimartingale com valores em $\mathbb{R}^d$ tal que

$$X(x, t) = Y(x, t) + V(x, t),$$

onde para cada x , $Y(x, t)$ é um martingale e $V(x, t)$ um processo de variação limitada. Assumimos que existe um processo $\beta(x, t, \omega)$ que assume valores vetoriais em $\mathbb{R}^d$ e um processo $\alpha(x, y, t, \omega)$ que toma valores nas matrizes de ordem $d \times d$ tais que β e α sejam progressivamente mensuráveis respeito da filtração $\{\mathfrak{F}_t\}$ e que ademais verifiquem

$$V(x, t) = \int_0^t \beta(x, r) dr,$$

$$\langle Y(x, t), Y(y, t)^* \rangle = \int_0^t \alpha(x, y, r) dr.$$

Então o par (α, β) é chamado de características locais da semimartingale $X(x, t)$.

Observação 3.7. Note que a definição acima, sobre as características locais, não é exatamente a mesma do fluxo descrito na seção inicial deste capítulo. Na verdade, se $\Phi_{s,t}$ é o fluxo estocástico da seção anterior, então

$$\Phi_{s,t}(x) = x + M_{s,t}(x) + \int_s^t b(\Phi_{s,r}(x), r) dr.$$

Assim $\Phi_{s,t}(x)$ é um C -semimartingale, $M_{s,t}(x)$ é a parte martingale e $\int_s^t b(\Phi_{s,r}(x), r) dr$ é a parte de variação limitada. Neste caso temos que

$$\beta(x, t) = b(\Phi_{s,t}(x), t)$$

$$\alpha(x, y, t) = a(\Phi_{s,t}(x), \Phi_{s,t}(y), t).$$

Assumimos daqui para frente que as características locais α e β são integráveis, isto é,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t |\alpha(x, y, t)| dr \right] < \infty, \quad \mathbb{E} \left[\int_0^t |\beta(x, t)| dr \right] < \infty.$$

Com estas hipóteses Y é uma L^2 -martingale.

Proposição 3.8. *Seja $\{X(x, t), x \in \mathbb{R}^d\}$ uma família de semimartingales contínuos que assumem valores em $\mathbb{R}^d$ com características locais (α, β) . Suponhamos que α e β são Lipschitz contínuos e que $|\alpha(0, 0, t)|$ e $|\beta(0, t)|$ são limitadas, então $X(x, t)$ tem uma modificação contínua como um C -semimartingale contínuo. Além disso, se α e β são k -vezes diferenciáveis em cada x, y e existe K tal que*

$$|D_x^\alpha D_y^\beta \alpha(x, y, t)| \leq K, \quad |D_x^\beta \beta(x, t)| \leq K, \quad |\alpha| \leq k, \quad |\beta| \leq k.$$

Então $X(x, t)$ tem modificação contínua como C^{k-1} -semimartingales.

Demonstração. A prova deste teorema é essencialmente a aplicação da desigualdade de Burkholder, mediante o qual obtém-se facilmente que

$$\mathbb{E}[|X(x, t) - X(x', t')|^p] \leq C(|t - t'|^\frac{p}{2} + |x - x'|^p).$$

Utilizando o teorema de Kolmogorov (critério de continuidade de Kolmogorov para campos aleatórios) obtemos a modificação contínua de $X(x, t)$ a qual é um C -semimartingale (respectivamente C^{k-1} -semimartingale). $\square$

3.3 Integrais Estocásticas

Nesta seção definimos e estudamos integrais estocásticas de processos progressivamente mensuráveis com respeito a C -semimartingales.

Seja $Y(x, t)$ um C -martingale tal que sua característica local $\alpha(x, y, t, \omega)$ seja integrável e contínua em (x, y) . Além disso, consideramos a seguinte condição:

Condição IV. A característica local α verifica

$$\int_0^t \sup_{|x|, |y| \leq K} |\alpha(x, y, t, \omega)| dt < \infty,$$

para qualquer K e t .

Em seguida, seja $f_t(\omega)$ um processo progressivamente mensurável que toma valores em $\mathbb{R}^d$, tal que

$$\int_0^t |\alpha(f_s, f_s, s)| ds < \infty, \quad (3.3)$$

quase certamente para cada t .

Para definir a integral estocástica $\int_0^t Y(f_r, dr)$, consideramos três casos.

Caso a. f_t contínua em t . Assim dado $N \in \mathbb{N}$ consideramos o tempo de parada.

$$\tau_N(\omega) = \begin{cases} \inf\{t \in [0, T] : \sup_{0 \leq r \leq t} |Y(f_r, t)| > N \text{ ou} \\ \int_0^t \sup_{0 \leq r \leq s} |\alpha(f_r, f_r, s)| ds > N\} \\ \infty, & \text{se o conjunto de acima é vazio} \end{cases}$$

Observamos que $\tau_N \uparrow \infty$ quando $N \uparrow \infty$. Pondo $Y_N(x, t) = Y(x, t, t \wedge \tau_N)$ resulta que $Y_N(x, t)$ é um C -martingale com característica local $\alpha_N(x, y, t) = \alpha(x, y, t)\mathbb{I}_{\tau_N > t}$ (na verdade $\alpha_N(x, y, t, \omega) = \alpha(x, y, t, \omega)\mathbb{I}_{\tau_N > t}(\omega)$). Considerando a partição $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ do intervalo $[0, T]$, definimos para qualquer $t \in [0, T]$

$$L_t^{N\Delta}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \{Y_N(f_{t_i \wedge t}, t_{i+1} \wedge t) - Y_N(f_{t_i \wedge t}, t_i \wedge t)\}.$$

Desta maneira $L_t^{N\Delta}(f)$ é uma L^2 -martingale que assume valores em $\mathbb{R}^d$. Com efeito, fazendo $t = t_k, s = t, k > i$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_t^{N\Delta}(f) - L_s^{N\Delta}(f) | \mathfrak{F}_s] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \{Y_N(f_{t_i}, t_{i+1}) - Y_N(f_{t_i}, t_i)\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{l=0}^{i-1} \{Y_N(f_{t_l}, t_{l+1}) - Y_N(f_{t_l}, t_l)\} | \mathfrak{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=i}^{n-1} \{Y_N(f_{t_j}, t_{j+1}) - Y_N(f_{t_j}, t_j)\} | \mathfrak{F}_s\right] \\ &= \sum_{j=i}^{n-1} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\{Y_N(f_{t_j}, t_{j+1}) - Y_N(f_{t_j}, t_j)\} | \mathfrak{F}_{t_j}] | \mathfrak{F}_s] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Também observemos que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[(L_t^{N\Delta}(f) - L_s^{N\Delta}(f))(L_t^{N\Delta}(f) - L_s^{N\Delta}(f))^* | \mathfrak{F}_s] \\ &= \sum_{j=i}^{n-1} \mathbb{E}[\mathbb{E}[(Y_N(f_{t_j}, t_{j+1}) - Y_N(f_{t_j}, t_j))(Y_N(f_{t_j}, t_{j+1}) - Y_N(f_{t_j}, t_j))^* | \mathfrak{F}_{t_j}] | \mathfrak{F}_s] \\ &= \sum_{j=i}^{n-1} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha_N(f_{t_j}, f_{t_j}, r) dr | \mathfrak{F}_{t_j}\right] | \mathfrak{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_s^t \alpha_N(f_r^\Delta, f_r^\Delta, r) dr | \mathfrak{F}_s\right], \end{aligned}$$

onde $f_r^\Delta = f_{t_k}$ se $t_k \leq r \leq t_{k+1}$. Mas isto implica que

$$(L_t^{N\Delta}(f))^2 - \int_0^t \alpha_N(f_r^\Delta, f_r^\Delta, r) dr,$$

é um martingale. Portanto

$$\langle L_t^{N\Delta}(f), L_t^{N\Delta}(f)^* \rangle = \int_0^t \alpha_N(f_r^\Delta, f_r^\Delta, r) dr.$$

Em seguida, consideramos $\{\Delta_n : n = 1, 2, \dots\}$ uma sequência de partições do intervalo $[0, T]$ tal que $|\Delta_n| \rightarrow 0$. Assim temos a sequência de L^2 -martingales $\{L_t^{N\Delta_n}(f), n = 1, 2, \dots\}$ tais que

$$\langle L_t^{N\Delta_n}(f), L_t^{N\Delta_m}(f)^* \rangle = \int_0^t \alpha_N(f_r^{\Delta_n}, f_r^{\Delta_m}, r) dr.$$

Então

$$\begin{aligned} & \langle (L_t^{N\Delta_n}(f) - L_t^{N\Delta_m}(f))(L_t^{N\Delta_n}(f) - L_t^{N\Delta_m}(f))^* \rangle \\ &= \int_0^t [\alpha_N(f_r^{\Delta_n}, f_r^{\Delta_n}, r) - \alpha_N(f_r^{\Delta_n}, f_r^{\Delta_m}, r) \\ & \quad - \alpha_N(f_r^{\Delta_m}, f_r^{\Delta_n}, r) + \alpha_N(f_r^{\Delta_m}, f_r^{\Delta_m}, r)] dr \\ & \rightarrow 0 \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

quase certamente. Agora, de acordo com a condição **(IV)** vemos que a equação acima também converge em L^1 . Isto nos permite definir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_t^{N\Delta_n}(f) = L_t^N(f) = \int_0^t Y_N(f_r, dr).$$

Então $L_t^N(f)$ é um L^2 -martingale. Logo se $t < \tau_M (\leq \tau_N)$ e $N > M$ obtemos que

$$\begin{aligned} L_t^N(f) &= \int_0^t Y_N(f_r, dr) = \int_0^t Y(f_r, dr \wedge \tau_N) = \int_0^t Y(f_r, dr \wedge \tau_M) \\ &= \int_0^t Y_M(f_r, dr) \\ &= L_t^M(f). \end{aligned}$$

Portanto definimos

$$L_t(f) = L_t^N(f) \quad \text{se } t < \tau_N.$$

Claramente $L_t(f)$ é um martingale local contínuo. Assim, fica definida a integral estocástica quando f_t é contínua em t , e escrevemos

$$L_t(f) = \int_0^t Y(f_s, ds).$$

Caso b. f_t é uma função progressivamente mensurável e limitada. Iniciamos pondo $f_t^N = N \int_{t-\frac{1}{N}}^t f_s ds$. Deste modo afirmamos que a seqüência $\{f_t^N\}$ é um seqüência de processos contínuos e uniformemente limitados que convergem para f_t quase certamente com respeito da medida produto $dt \otimes d\mathbb{P}$. De fato, basta considerar $|f_t| \leq A$, para algum $A > 0$ e observar que,

$$\begin{aligned} |f_t^N| &\leq |N \int_{t-\frac{1}{N}}^t f_s ds| \leq N \int_{t-\frac{1}{N}}^t |f_s| ds \leq A, \\ |f_t^N(x) - f_t^N(y)| &\leq N \int_{t-\frac{1}{N}}^t |f_s(x) - f_s(y)| ds \leq 2A. \end{aligned}$$

Agora a convergência é consequência direta da propriedade que

$$\frac{1}{m(B)} \int_{m(B)} f_s ds \longrightarrow f_t,$$

onde $m(B)$ representa a medida de Lebesgue do conjunto de Borel B . Pelo caso (a) temos que $L_t(f^N) = \int_0^t Y(f_s^N, ds)$. Desta maneira,

$$\begin{aligned} &\langle (L_t(f^N) - L_t(f^M))(L_t(f^N) - L_t(f^M))^* \rangle \\ &= \int_0^t [\alpha(f_\nu^N, f_\nu^N, \nu) - \alpha(f_\nu^N, f_\nu^M, \nu) \\ &\quad - \alpha(f_\nu^M, f_\nu^N, \nu) + \alpha(f_\nu^M, f_\nu^M, \nu)] d\nu \\ &\rightarrow 0 \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

quase certamente. Então a seqüência $\{L_t(f^N); N = 1, 2, \dots\}$ converge uniformemente em probabilidade para cada t . Assim definimos

$$L_t(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} L_t(f^N) = \int_0^t Y(f_r, dr),$$

como queríamos.

Caso c. Como caso geral consideremos f_t uma função só progressivamente mensurável. Assim ponhamos $f_t^N = (f_t \wedge N) \vee (-N)$. Daqui, observemos que a seqüência $\{f_t^N\}$ é contínua e uniformemente limitada. Além disso, dita seqüência converge para f_t . Desse modo, como no caso (b) achamos uma seqüência $\{L_t(f^N); N = 1, 2, \dots\}$ que converge uniformemente em probabilidade em t . Portanto, definimos

$$L_t(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} L_t(f^N) = \int_0^t Y(f_r, dr),$$

como desejamos.

Observação 3.9. A definição de integral estocástica $\int_0^t Y(f_r, dr)$ é uma generalização da integral estocástica usual no seguinte sentido: se $Y(x, t) = xY_t$, onde Y_t é uma L^2 -martingale então temos $\int_0^t Y(f_r, dr) = \int_0^t f_r dY_r$.

Proposição 3.10. Sejam f_t e g_t dois processos progressivamente mensuráveis satisfazendo (3.3). Então

$$\left\langle \int_0^t Y(f_r, dr), \int_0^t Y(g_r, dr) \right\rangle = \int_0^t \alpha(f_s, g_s, s) ds.$$

Demonstração. Com efeito, temos que mostrar

$$\langle L_t(f), L_t(g) \rangle = \int_0^t \alpha(f_s, g_s, s) ds.$$

Agora denotando por $h = f^N$ e $H = g^N$ podemos considerar sem perda de generalidade que f e g possuam saltos em comum, isto é, que existe uma partição $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ de $[0, T]$ tal que $f_t = f_{t_k}, g_t = g_{t_k}$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$. Agora, lembremos que

$$L_t(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} L_t(f^N) = \int_0^t Y(f_r, dr).$$

Mas se consideramos $h = f^N$ em vez de f teremos

$$L_t(h) = L_t^M(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_t^{M\Delta_n}(h), \quad \text{se } t < \tau_M,$$

onde M faz a função do N no caso (a). Assim, basta mostrar o resultado para uma certa partição como acima e daí aplicar resultados de convergência. Desta maneira, dada a partição Δ e assumindo que $s = t_i, t = t_k$ com $k > i$ temos

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(L_t^{M\Delta}(h) - L_s^{M\Delta}(h))(L_t^{M\Delta}(H) - L_s^{M\Delta}(H))^* | \mathfrak{F}_s] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=i}^{k-1} (Y_M(h_{t_j}, t_{j+1}) - Y_M(h_{t_j}, t_j))\right)\left(\sum_{j=i}^{k-1} (Y_M(H_{t_j}, t_{j+1}) - Y_M(H_{t_j}, t_j))\right)^* \middle| \mathfrak{F}_s\right] \\ &= \sum_{i \leq d < l < k} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_M(h_{t_l}, t_{l+1}) - Y_M(h_{t_l}, t_l) | \mathfrak{F}_{t_l}](Y_M(H_{t_d}, t_{d+1}) - Y_M(H_{t_d}, t_d))^* | \mathfrak{F}_s] \\ &\quad + \sum_{i \leq d < l < k} \mathbb{E}[(Y_M(h_{t_d}, t_{d+1}) - Y_M(h_{t_d}, t_d))\mathbb{E}[(Y_M(H_{t_l}, t_{l+1}) - Y_M(H_{t_l}, t_l))^* | \mathfrak{F}_{t_l}] | \mathfrak{F}_s] \\ &\quad + \sum_{j=i}^{k-1} \mathbb{E}[\mathbb{E}[(Y_M(h_{t_j}, t_{j+1}) - Y_M(h_{t_j}, t_j))(Y_M(H_{t_j}, t_{j+1}) - Y_M(H_{t_j}, t_j))^* | \mathfrak{F}_{t_j}] | \mathfrak{F}_s] \\ &= \sum_{j=i}^{n-1} \mathbb{E}[\mathbb{E}[(Y_M(h_{t_j}, t_{j+1}) - Y_M(h_{t_j}, t_j))(Y_M(H_{t_j}, t_{j+1}) - Y_M(H_{t_j}, t_j))^* | \mathfrak{F}_{t_j}] | \mathfrak{F}_s] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=i}^{n-1} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha_M(h_{t_j}, H_{t_j}, r) dr \middle| \mathfrak{F}_{t_j} \right] \middle| \mathfrak{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\int_s^t \alpha_M(h_r^\Delta, H_r^\Delta, r) dr \middle| \mathfrak{F}_s \right],
\end{aligned}$$

onde $h_r^\Delta = h_{t_k}$ e $H_r^\Delta = H_{t_k}$, se $t_k \leq r < t_{k+1}$. Daí resulta que

$$L_t^{M\Delta}(h) L_t^{M\Delta}(H) - \int_0^t \alpha_M(h_r^\Delta, H_r^\Delta, r) dr$$

é um martingale. Assim,

$$\langle L_t^{M\Delta}(h), L_t^{M\Delta}(H)^* \rangle = \int_0^t \alpha_M(h_r^\Delta, H_r^\Delta, r) dr.$$

Ou melhor,

$$\langle L_t^{M\Delta}(f^N), L_t^{M\Delta}(g^N)^* \rangle = \int_0^t \alpha_M((f_r^N)^\Delta, (H_r^N)^\Delta, r) dr.$$

Portanto

$$\langle L_t(f), L_t(g) \rangle = \int_0^t \alpha(f_s, g_s, s) ds.$$

□

Notemos que se $Y(x, t)$ e $Z(x, t)$ são C -martingales contínuos com características locais α^Y e α^Z respectivamente satisfazendo a condição (IV) e se f_t e g_t são processos progressivamente mensuráveis tais que $\int_0^t |\alpha^Y(f_s, f_s, s)| ds < \infty$, $\int_0^t |\alpha^Z(g_s, g_s, s)| ds < \infty$ para todo t quase certamente, então as integrais $\int_0^t Y(f_r, dr)$ e $\int_0^t Z(g_r, dr)$ fazem sentido. O interesse agora é calcular $\langle \int_s^t Y(f_r, dr), (\int_s^t Z(g_r, dr))^* \rangle$.

Lema 3.11. *Existe um campo aleatório contínuo $\alpha^{YZ}(y, z, t, \omega)$ o qual é mensurável e contínuo respeito de y, z tal que*

$$\langle Y(y, t), (Z(z, t))^* \rangle = \int_0^t \alpha^{YZ}(y, z, r, \omega) dr.$$

Além disso,

$$|\alpha_{ij}^{YZ}(y, z)| \leq \alpha_{ii}^Y(y)^{\frac{1}{2}} \alpha_{jj}^Z(z)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_{ii}^Y(y) = \alpha_{ii}^Y(y, y),$$

e

$$\begin{aligned}
|\alpha_{ij}^{YZ}(y, z) - \alpha_{ij}^{YZ}(y', z')| &\leq \alpha_{ii}^Y(y)^{\frac{1}{2}} \{ \alpha_{jj}^Z(z) - 2\alpha_{jj}^Z(z, z') + \alpha_{jj}^Z(z') \}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \alpha_{jj}^Z(z')^{\frac{1}{2}} \{ \alpha_{ii}^Y(y) - 2\alpha_{ii}^Y(y, y') + \alpha_{ii}^Y(y') \}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Primeiro observemos que se y e z são fixos, então $\langle Y(y, t), (Z(z, t))^* \rangle$ tem função de densidade $\alpha^{YZ}(y, z, t, \omega)$ com respeito de t . Agora, pela propriedade de Schwartz para variação quadrática conjunta temos

$$\begin{aligned} & |\langle Y^i(y, t), Z^j(z, t) \rangle - \langle Y^i(y, s), Z^j(z, s) \rangle| \\ & \leq (\langle Y^i(y, t) \rangle - \langle Y^i(y, s) \rangle)^{\frac{1}{2}} (\langle Z^j(z, t) \rangle - \langle Z^j(z, s) \rangle)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto obtemos

$$\left| \frac{1}{t-s} \int_s^t \alpha_{ij}^{YZ}(y, z, r) dr \right| \leq \frac{1}{t-s} \left(\int_s^t \alpha_{ii}^Y(y, y, r) dr \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t \alpha_{jj}^Z(z, z, r) dr \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim fazendo $t \downarrow s$ resulta

$$|\alpha_{ij}^{YZ}(y, z, s)| \leq \alpha_{ii}^Y(y, y, s)^{\frac{1}{2}} \alpha_{jj}^Z(z, z, s)^{\frac{1}{2}},$$

para todo y, z quase certamente. Mas como $\alpha_{ii}^Y(y) = \alpha_{ii}^Y(y, y)$ então obtemos a primeira desigualdade. Para mostrar a segunda desigualdade ponhamos

$$A_{ij}^{YZ}(y, z, (s, t]) = \langle Y^i(y, t), Z^j(z, t) \rangle - \langle Y^i(y, s), Z^j(z, s) \rangle, t > s.$$

Agora, por propriedade de variação quadrática conjunta tem-se

$$\begin{aligned} & |A_{ij}^{YZ}(y, z, (s, t]) - A_{ij}^{YZ}(y', z', (s, t])| \\ & \leq A_{ii}^Y(y, y, (s, t])^{\frac{1}{2}} (A_{jj}^Z(z, z, (s, t]) - 2A_{jj}^Z(z, z', (s, t]) + A_{jj}^Z(z', z', (s, t]))^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + A_{jj}^Z(z', z', (s, t])^{\frac{1}{2}} (A_{ii}^Y(y, y, (s, t]) - 2A_{ii}^Y(y, y', (s, t]) + A_{ii}^Y(y', y', (s, t]))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo procedimento como na primeira desigualdade, obtemos o desejado. $\square$

No lema acima $\alpha^{YZ}(y, z, t)$ é chamado a característica local conjunta de Y e Z .

Teorema 3.12. *Sejam $Y(x, t)$ e $Z(x, t)$ dois C -martingales contínuos com características locais α^Y e α^Z respectivamente satisfazendo a condição (IV). Sejam também f_t e g_t processos progressivamente mensuráveis tais que $\int_0^t |\alpha^Y(f_s, f_s, s)| ds < \infty$, $\int_0^t |\alpha^Z(g_s, g_s, s)| ds < \infty$ para todo t quase certamente. Então*

$$\left\langle \int_s^t Y(f_r, dr), \left(\int_s^t Z(g_r, dr) \right)^* \right\rangle = \int_s^t \alpha^{YZ}(f_r, g_r, r) dr.$$

Demonstração. A prova deste teorema é análoga à prova da Proposição 3.10. Basta considerar o lema anterior (que nos indica simplesmente a variação quadrática conjunta entre Y e $Z \approx$ variação quadrática conjunta entre Y e Y) e "mudar uma variável Y " por Z na demonstração de dita proposição. $\square$

3.4 Construção de Fluxos Estocásticos por Equações Diferenciais Estocásticas

Nesta seção introduzimos a noção de solução de uma equação diferencial estocástica e mostramos que essa solução define um fluxo estocástico.

Seja

$$X(x, t) = Y(x, t) + \int_0^t \beta(x, r) dr,$$

um C -semimartingale contínuo com características locais α, β contínuas com respeito a x, y e que satisfazem a seguinte condição.

Condição V. Suponhamos que as características locais verificam

$$\begin{aligned} \int_0^t \sup_{|x|, |y| \leq K} |\alpha(x, y, r, \omega)| dr &< \infty, \\ \int_0^t \sup_{|x| \leq K} |\beta(x, r)| dr &< \infty, \end{aligned}$$

para qualquer $K > 0$ e qualquer t .

Em seguida, dado f_t um processo progressivamente mensurável satisfazendo (3.3) e $\int_0^t |\beta(f_r, r)| dr < \infty$, definimos

$$\int_0^t X(f_r, dr) = \int_0^t \beta(f_r, r) dr + \int_0^t Y(f_r, dr).$$

Uma vez definida a integral estocástica podemos associar a ela uma equação diferencial estocástica e desta maneira discutir sua solução.

Definição 3.13. Um processo Φ_t contínuo $\mathfrak{F}_t$ -adaptado e que toma valores em $\mathbb{R}^d$ é dito solução da equação diferencial estocástica

$$d\Phi_t = X(\Phi_t, dt). \tag{3.4}$$

com condição inicial x no tempo s ($t \geq s$) se

$$\Phi_t = x + \int_s^t X(\Phi_r, dr),$$

para todo $t \geq s$.

Para entender melhor a definição acima consideramos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.14. Consideremos $(B_t^1, \dots, B_t^r)$ um movimento Browniano "Standard". Sejam $F_0(x, t), F_1(x, t), \dots, F_r(x, t)$ funções Lipschitz contínuas em x , que assumem valores em $\mathbb{R}^d$. Definimos

$$X(x, t) = \int_0^t F_0(x, s) ds + \sum_{k=1}^r \int_0^t F_k(x, s) dB_s^k.$$

Claramente vemos que $X(x, t)$ é um C -semimartingale. Além disso, observamos que a equação diferencial estocástica associada ao C -semimartingale $X(x, t)$ reduz-se a

$$\begin{aligned} d\Phi_t &= X(\Phi_t, dt) = d\left(\int_0^t X(\Phi_s, ds)\right) \\ &= d\left(\int_0^t F_0(\Phi_s, s) ds + \sum_{k=1}^r \int_0^t F_k(\Phi_s, s) dB_s^k\right) \\ &= F_0(\Phi_t, t) dt + \sum_{k=1}^r F_k(\Phi_t, t) dB_t^k. \end{aligned}$$

Donde

$$V(x, t) = \int_0^t F_0(x, s) ds, \quad Y(x, t) = \sum_{k=1}^r \int_0^t F_k(x, s) dB_s^k.$$

Abreviadamente, escrevemos EDE em vez de "equação diferencial estocástica".

Teorema 3.15. Suponhamos que as características locais α, β do semimartingale $X(x, t)$ sejam Lipschitz e contínuas e que possuam crescimento linear, então a EDE (3.4) tem uma única solução para quaisquer x, s . Além disso, se $\Phi_{s,t}$ é a solução começando de x no tempo s , então ela tem uma modificação o qual é um fluxo estocástico de homeomorfismos.

A prova do teorema anterior esta baseado no método clássico de aproximações sucessivas (ver [3], Teorema 2.4.3).

3.5 Fórmula Generalizada de Itô, Integral de Stratonovich e Equações Diferenciais Estocásticas de Stratonovich

Esta última seção, descrevemos a fórmula generalizada de Itô, definimos a integral de Stratonovich e associadas a estas consideramos as equações diferenciais estocásticas segundo H. Kunita. Assim, seja $X(x, t)$ um campo aleatório 1-dimensional. Então ele é chamado um C^k -processo contínuo se é k -vezes continuamente diferenciável em x a.s. e

$D^\alpha X(x, t)$ é contínuo em (x, t) a.s. para $|\alpha| \leq k$. Do mesmo modo, $X(x, t)$ é chamado um C^k -martingale contínuo se $D^\alpha X(x, t)$ é um martingale para cada x , $|\alpha| \leq k$ e é um C^k -processo de variação limitada se $D^\alpha X(x, t)$ é um processo de variação limitada para cada x e $|\alpha| \leq k$. Por último, $X(x, t)$ é dito um C^k -semimartingale contínuo se $X(x, t) = Y(x, t) + V(x, t)$ onde $Y(x, t)$ é um C^k -martingale contínuo e $V(x, t)$ é um C^k -processo contínuo de variação limitada.

Condição VII. As características locais $a(x, y, t)$ e $b(x, t)$ são k -vezes continuamente diferenciáveis em x e y (respectivamente x) e para $|\alpha|, |\beta| \leq k$ e para qualquer $K > 0$ temos

$$\int_0^t \sup_{|x|, |y| \leq K} |D_x^\alpha D_y^\alpha a(x, y, r)| dr < \infty \quad \text{a.s.}$$

$$\int_0^t \sup_{|x| \leq K} |D_x^\alpha b(x, r)| dr < \infty \quad \text{a.s.}$$

Vamos agora a apresentar uma regra de diferencial para a composição de dois processos.

Teorema 3.16. (*Fórmula Generalizada de Itô I*) Seja $F(x, t)$ um C^2 -processo 1-dimensional e um C^1 -semimartingale com características locais satisfazendo a condição (VII) e X_t um semimartingale contínuo que toma valores em $\mathbb{R}^d$. Então

$$\begin{aligned} F(X_t, t) &= F(X_0, 0) + \int_0^t F(X_r, dr) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_r, r) dX_r^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \left\langle \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_r, dr), X_t^i \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_r, r) d\langle X_r^i, X_r^j \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Demonstração. Dada a partição $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$, temos

$$\begin{aligned} F(X_t, t) - F(X_0, 0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \{F(X_{t_k}, t_{k+1}) - F(X_{t_k}, t_k)\} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \{F(X_{t_{k+1}}, t_{k+1}) - F(X_{t_k}, t_{k+1})\} \\ &= I_1^\Delta + I_2^\Delta. \end{aligned}$$

Por definição de integral estocástica resulta que

$$I_1^\Delta \longrightarrow \int_0^t F(X_r, dr) \quad \text{quando} \quad |\Delta| \rightarrow 0.$$

Pelo desenvolvimento de Taylor I_2^Δ pode-se escrever como

$$\begin{aligned} I_2^\Delta &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^d \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_{t_k}, t_{k+1}) - \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_{t_k}, t_k) \right\} (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_{t_k}, t_k) (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(\xi_k, t_{k+1}) (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i) (X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \\ &= J_1^\Delta + J_2^\Delta + J_3^\Delta, \end{aligned}$$

onde $|\xi_k - X_{t_k}| \leq |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}|$. Agora, consideremos

$$L_s^\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_{t_k \wedge s}, t_{k+1} \wedge s) - \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_{t_k \wedge s}, t_k \wedge s) \right\},$$

e

$$L_s = \int_0^s \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_r, dr).$$

Então se observa que L_s^Δ converge L_s uniformemente em s em probabilidade quando $|\Delta| \rightarrow 0$. Além disso, veja que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (L_{t_{k+1}}^\Delta - L_{t_k}^\Delta) (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i) \longrightarrow \langle L, X^i \rangle_t,$$

em probabilidade se $|\Delta| \rightarrow 0$. De fato, sabemos que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (L_{t_{k+1}}^\Delta - L_{t_k}^\Delta) (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i) = \langle L_t^\Delta, X_t^i \rangle^\Delta.$$

Como $L_t^\Delta \longrightarrow L_t$ uniformemente em t em probabilidade quando $|\Delta| \rightarrow 0$, temos

$$\langle L_t^\Delta, X_t^i \rangle^\Delta \longrightarrow \langle L_t, X_t^i \rangle = \langle L, X^i \rangle_t,$$

se $|\Delta| \rightarrow 0$, como queríamos. Assim, tem-se

$$J_1^\Delta \longrightarrow \sum_{i=1}^d \left\langle \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_r, dr), X_t^i \right\rangle \quad \text{quando} \quad |\Delta| \rightarrow 0.$$

Logo, por definição de integral

$$J_2^\Delta \longrightarrow \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_r, r) dX_r^i \quad \text{quando} \quad |\Delta| \rightarrow 0.$$

Agora observe que se

$$\tilde{J}_3^\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_{t_k}, t_k) (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i) (X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j), \quad (3.6)$$

e pondo

$$A_s^\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_{t_k \wedge s}, t_k \wedge s) (X_{t_{k+1} \wedge s}^i - X_{t_k \wedge s}^i),$$

e

$$A_s = \int_0^s \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_r, r) dX_r^i,$$

temos $A_t^\Delta \rightarrow A_t$ quando $|\Delta| \rightarrow 0$ em probabilidade. Deste modo afirmamos que: se $|\Delta| \rightarrow 0$ resulta $\langle A_t^\Delta, X_t^j \rangle^\Delta \rightarrow \langle A_t, X_t^j \rangle$ em probabilidade. Com efeito, note que

$$\langle A_t^\Delta, X_t^j \rangle^\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} (A_{t_{k+1}}^\Delta - A_{t_k}^\Delta) (X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j), \quad (3.7)$$

onde

$$A_{t_{k+1}}^\Delta - A_{t_k}^\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_{t_k}, t_k) (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i). \quad (3.8)$$

Assim, substituindo (3.8) em (3.7) obtemos o somatório de (3.6) correspondente à soma respeito de k . Desta maneira obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{J}_3^\Delta &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \langle A_t^\Delta, X_t^j \rangle^\Delta \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \left\langle \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_r, r) dX_r^i, X_t^j \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_r, r) d\langle X_r^i, X_r^j \rangle. \end{aligned}$$

Agora, considerando

$$\xi_{ijk}^\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(\xi_k, t_{k+1}) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_{t_k}, t_k),$$

resulta

$$\sup_{i,j,k} |\xi_{ijk}^\Delta| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |\Delta| \rightarrow 0,$$

pois $|\xi_k - X_{t_k}| \leq |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}|$. Além disso, note que

$$\begin{aligned} |J_3^\Delta - \tilde{J}_3^\Delta| &= \left| \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(\xi_k, t_{k+1}) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_{t_k}, t_k) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i) (X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \right\} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \left\{ \left(\sup_{i,j,k} |\xi_{ijk}^\Delta| \right) \left| \sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \right| \right\} \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \left\{ \sup_{i,j,k} |\xi_{ijk}^\Delta| \left(\sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Então, como $\sum_k (X_{t_{k+1}}^l - X_{t_k}^l)^2$ converge para $\langle X_{t_k}^l \rangle$ em probabilidade quando $|\Delta| \rightarrow 0$ (com $\langle X_{t_k}^l \rangle < \infty$) resulta que (3.9) converge a zero em probabilidade. Por outro lado, veja que J_3^Δ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
J_3^\Delta &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left\{ \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_{t_k}, t_k) (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left\{ \sum_k \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(\xi_k, t_{k+1}) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_{t_k}, t_k) \right) (X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k+1}}^j - X_{t_k}^j) \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto temos que

$$J_3^\Delta \longrightarrow \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_r, r) d\langle X^i, X^j \rangle_r.$$

Assim fica mostrado o teorema. $\square$

Observação 3.17. Se $F(x, t)$ é uma função determinística duas vezes continuamente diferenciável em x e continuamente diferenciável em t , então

$$\left\langle \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_r, dr), X_t^i \right\rangle = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, d.$$

Portanto (3.5) se converte na fórmula de Itô usual.

3.5.1 Integral de Stratonovich

Consideremos $X(x, t)$ como sendo um C^2 -processo contínuo e um C^1 -semimartingale contínuo. Assim também, seja f_t um semimartingale contínuo que toma valores em $\mathbb{R}^d$. A partir de aqui vamos a definir a integral de Stratonovich de f_t respeito a $X(x, t)$. Para esse consideramos a partição $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$, e definimos

$$K_t^\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \{ (X(f_{t_{k+1}}, t_{k+1}) - X(f_{t_{k+1}}, t_k)) + (X(f_{t_k}, t_{k+1}) - X(f_{t_k}, t_k)) \}.$$

Lema 3.18. *Suponhamos que as características locais de X e $\frac{\partial}{\partial x_i} X$ satisfaçam a condição (VII). Então $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} K_t^\Delta$ existe e*

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} K_t^\Delta = \int_0^t X(f_r, dr) + \frac{1}{2} \sum_j \left\langle \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} X(f_r, dr), f_t^j \right\rangle.$$

Demonstração. Escrevemos K_t^Δ como segue

$$\begin{aligned} K_t^\Delta &= \sum_{k=0}^{n-1} \{X(f_{t_k}, t_{k+1}) - X(f_{t_k}, t_k)\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \{(X(f_{t_{k+1}}, t_{k+1}) - X(f_{t_k}, t_{k+1})) - (X(f_{t_{k+1}}, t_k) - X(f_{t_k}, t_k))\} \\ &= L_t^\Delta + M_t^\Delta. \end{aligned}$$

Então observemos que

$$L_t^\Delta \longrightarrow \int_0^t X(f_r, dr) \quad \text{quando} \quad |\Delta| \rightarrow 0.$$

Agora, pelo desenvolvimento de Taylor

$$\begin{aligned} M_t^\Delta &= \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} X(f_{t_k}, t_{k+1}) - \frac{\partial}{\partial x_j} X(f_{t_k}, t_k) \right\} (f_{t_{k+1}}^j - f_{t_k}^j) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k} \xi_{ijk}^\Delta (f_{t_{k+1}}^i - f_{t_k}^i) (f_{t_{k+1}}^j - f_{t_k}^j), \end{aligned}$$

onde

$$\xi_{ijk}^\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} X(\eta_k, t_{k+1}) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} X(\zeta_k, t_k),$$

com $|\eta_k - f_{t_k}| \leq |f_{t_{k+1}} - f_{t_k}|$, $|\zeta_k - f_{t_k}| \leq |f_{t_{k+1}} - f_{t_k}|$. Assim observamos que

$$\sup_k |\xi_{ijk}^\Delta| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |\Delta| \rightarrow 0.$$

Portanto, vemos que o segundo termo da expressão de M_t^Δ (como no caso da fórmula generalizada de Itô I) converge para zero se $|\Delta| \rightarrow 0$. Deste modo resulta

$$M_t^\Delta \longrightarrow \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \left\langle \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} X(f_r, dr), f_t^j \right\rangle.$$

Assim o lema é mostrado. □

O limite de K_t^Δ quando $|\Delta| \rightarrow 0$ é chamado a integral de Stratonovich de f_t respeito de $X(x, t)$, e é denotado por $\int_0^t X(f_r, \circ dr)$.

Proposição 3.19. *Seja $X(x, t)$ um C^2 -processo contínuo e um C^1 -semimartingale, e assumamos que as características locais de X e $\frac{\partial}{\partial x_i} X$ satisfaçam a condição (VII). Se f_t é um semimartingale contínuo que assume valores em $\mathbb{R}^d$, então a integral de Stratonovich está bem definida e está relacionada à integral de Itô por*

$$\int_0^t X(f_r, \circ dr) = \int_0^t X(f_r, dr) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \left\langle \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} X(f_r, dr), f_t^j \right\rangle.$$

Demonstração. Basta aplicar lema de acima. $\square$

Para a integral de Stratonovich temos a seguinte fórmula de Itô.

Teorema 3.20. *(Fórmula generalizada de Itô II) Seja $F(x, t)$ um C^3 -processo contínuo e C^2 -semimartingale com características locais (α, β) . Suponhamos que estas características locais sejam duas vezes continuamente diferenciáveis e que suas derivadas satisfaçam a condição (VII). Assim se X_t é um semimartingale contínuo, então temos*

$$F(X_t, t) - F(X_0, 0) = \int_0^t F(X_r, \circ dr) + \sum_j \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} F(X_r, r) \circ dX_r^j.$$

Seja $X(x, t)$ um C^2 -processo contínuo e um C^1 -semimartingale com características locais (a, b) satisfazendo a condição (VII). Dizemos que um semimartingale contínuo Φ_t que toma valores em $\mathbb{R}^d$ é chamado solução da equação diferencial estocástica de Stratonovich

$$d\Phi_t = X(\Phi_t, \circ dt), \quad (3.10)$$

partindo de x no tempo s se satisfaz

$$\begin{aligned} \Phi_t &= x + \int_s^t X(\Phi_r, \circ dr) \\ &= x + \int_s^t X(\Phi_r, dr) + \frac{1}{2} \sum_j \left\langle \int_s^t \frac{\partial}{\partial x_j} X(\Phi_r, dr), \Phi_t^j \right\rangle. \end{aligned}$$

Para as EDE de Stratonovich temos o seguinte teorema de existência e unicidade.

Teorema 3.21. *Seja $X(x, t)$ um C^2 -processo contínuo e um C^1 -semimartingale com características locais (a, b) os quais são continuamente diferenciáveis em x, y e suas derivadas são limitadas. Suponha ademais que $d(x, t)$ definido como*

$$d^i(x, t) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(x, y, t)|_{y=x},$$

é Lipschitz contínua. Então a equação diferencial estocástica de Stratonovich tem solução única a qual define um fluxo de homeomorfismos. Além disso se a, b, d são k -vezes continuamente diferenciáveis e suas derivadas são limitadas então a solução define um fluxo estocástico de C^{k-1} -difeomorfismos.

Capítulo 4

Teorema Limite para Fluxos Estocásticos

As referências para este capítulo final estão em H. Kunita [2], Ikeda-Watanabe [7] e Kestern-Papanicolau [4]. Este capítulo final, está dedicado ao estudo do Teorema Limite de H. Kunita. Ele é dividido em sete seções as quais passamos a explicar brevemente. Na seção 4.1, introduzimos a convergência fraca e forte de fluxos estocásticos. Em seguida na seção 4.2 formulamos o Teorema Limite de Kunita o qual desenvolvemos nas seções seguintes. Agora dentro da seção 4.3 estudamos a tightness dos processos de $(N + M)$ -pontos e na seção seguinte discutimos a convergência fraca dos processos de $(N + M)$ -pontos. Depois na seção 4.5 descrevemos a tightness de processos que assumem valores em espaços de Sobolev. Logo dentro da seção 4.6 concluímos a demonstração do Teorema Limite de Kunita. Por último, na seção 4.7 discutimos sobre um teorema de aproximação para a solução de equações diferenciais estocásticas.

4.1 Convergência Fraca e Forte de Fluxos Estocásticos

Sejam $\{\mathfrak{F}_t^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ uma família de filtrações e $X_t^\varepsilon = X^\varepsilon(x, t)$ uma família de C -semimartingales contínuos adaptados a $\mathfrak{F}_t^\varepsilon$ com características locais tendo propriedades "boas". Agora considere $\Phi_{s,t}^\varepsilon$ o fluxo estocástico gerado por X_t^ε , isto é,

$$\begin{aligned} d\Phi_{s,t}^\varepsilon(x) &= X^\varepsilon(\Phi_{s,t}^\varepsilon(x), dt), & s \leq t \\ \Phi_{s,s}^\varepsilon(x) &= x. \end{aligned}$$

Escrevemos $\Phi_t^\varepsilon = \Phi_{0,t}^\varepsilon(x)$ e dado que o objetivo desta seção é estudar a convergência de $(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon)$ como fluxos estocásticos introduzimos três noções de convergência, especificamente nos referimos à convergência fraca, convergência forte e a convergência de processos de difusão. Desses tipos de convergência a convergência fraca possui o papel mais importante, por isso que estudamos esta convergência ao detalhe.

Antes de dar a definição das várias convergências, introduzimos alguns espaços de funções sobre os quais trabalharemos.

Sejam $C^m = C^m(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, $f \in C^m$ e N um inteiro positivo. Então

$$\|f\|_{m,N} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{|x| \leq N} |D^\alpha f(x)|, \quad N = 1, 2, \dots$$

define uma família de seminormas, e com esta família de seminormas C^m é um espaço separável e completo. Agora denotemos por $W_m = C([0, T], C^m)$ o conjunto de todas as aplicações contínuas de $[0, T]$ em C^m . Assim, para $\Phi, X \in W_m$ considere Φ_t, X_t seus valores para $t \in [0, T]$. Deste modo, definimos

$$|||\Phi|||_{m,N} = \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi_t\|_{m,N}, \quad N = 1, 2, \dots$$

uma família de seminormas que faz de W_m um espaço separável e completo. Consideramos $W_m^2 = W_m \times W_m$ e denotamos por $\mathcal{B}(W_m^2)$ seu campo Borel topológico.

Assumindo que as características locais $a^\varepsilon, b^\varepsilon$ do fluxo são $(m+1)$ -vezes continuamente diferenciáveis (respeito das variáveis espaciais) e suas derivadas sejam limitadas, obtemos em vista da observação 3.5 que $(\Phi^\varepsilon(\cdot, \omega), X^\varepsilon(\cdot, \omega)) \in W_m^2$ quase certamente. Noutras palavras $(\Phi^\varepsilon(\cdot), X^\varepsilon(\cdot))$ é uma variável aleatória que assume valores em W_m^2 . Assim, definimos

$$\mathbb{P}^{(\varepsilon)}(A) = \mathbb{P}(\{\omega : (\Phi^\varepsilon(\omega), X^\varepsilon(\omega)) \in A\}), \quad A \in \mathcal{B}(W_m^2).$$

Definição 4.1. *Seja $\mathbb{P}^{(0)}$ a medida de probabilidade sobre W_m^2 associada a (Φ_t, X_t) . A família $(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ diz-se que converge fracamente para (Φ_t, X_t) como fluxo estocástico se a família $\{\mathbb{P}^{(\varepsilon)}, \varepsilon > 0\}$ converge para $\mathbb{P}^{(0)}$ fracamente.*

Denotamos por (ψ_t, Y_t) o par formado pelo fluxo estocástico ψ_t gerado por Y_t no sentido que

$$d\psi_t = Y_t(\psi_t, dt).$$

Definição 4.2. *Dizemos que $(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ converge fortemente para (Φ_t, X_t) como fluxo estocástico se $|||\Phi^\varepsilon - \Phi|||_{m,N}$ e $|||X^\varepsilon - X|||_{m,N}$ convergem para zero em probabilidade para qualquer $N = 1, 2, \dots$.*

Observação 4.3. *Demonstraremos adiante que se $(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon)$ converge fracamente para (Φ_t, X_t) , isto é, $\mathbb{P}^{(\varepsilon)}$ converge fracamente para a lei conjunta de (Φ_t, X_t) , $\|X^\varepsilon - X\|_{m,N} \rightarrow 0$ e algumas outras condições são satisfeitas então $\|\Phi^\varepsilon - \Phi\|_{m,N} \rightarrow 0$ e portanto $(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon)$ converge para (Φ_t, X_t) fortemente.*

A seguir definimos a convergência do processo de $(N + M)$ -pontos. Para cada $r \in \mathbb{N}$ seja $V_r = C([0, T]; \mathbb{R}^{rd})$.

Definição 4.4. *Sejam $x^{(N)} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{Nd}$ e $y^{(M)} = (y_1, \dots, y_M) \in \mathbb{R}^{Md}$. A lei do processo de $(N + M)$ -pontos*

$$(\Phi_t^\varepsilon(x^{(N)}), X_t^\varepsilon(y^{(M)})) = (\Phi_t^\varepsilon(x_1), \dots, \Phi_t^\varepsilon(x_N), X_t^\varepsilon(y_1), \dots, X_t^\varepsilon(y_M)),$$

é a medida de probabilidade $Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)}$ em $(V_N \times V_M, \mathcal{B}(V_N \times V_M))$, definida por

$$Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)}(A) = \mathbb{P}(\{\omega : (\Phi_t^\varepsilon(x^{(N)}), X_t^\varepsilon(y^{(M)}))(\omega) \in A\}), \quad A \in \mathcal{B}(V_N \times V_M).$$

Além disso, se a lei de cada processo de $(N + M)$ -pontos converge fracamente dizemos que o fluxo converge como processo difusão.

Notemos que se $(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon)$ converge fracamente como fluxo estocástico, então a lei do processo de $(N + M)$ -pontos converge fracamente. Com efeito, seja f uma função real contínua e limitada sobre $V_N \times V_M$. Definimos uma função real g contínua e limitada em W_m^2 por

$$g(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon) = f(\Phi_t^\varepsilon(x^{(N)}), X_t^\varepsilon(y^{(M)})),$$

onde $x^{(N)} \in \mathbb{R}^{Nd}$ e $y^{(M)} \in \mathbb{R}^{Md}$ são fixos. Assim, por hipótese temos

$$\int_{W_m^2} g d\mathbb{P}^{(\varepsilon)} \longrightarrow \int_{W_m^2} g d\mathbb{P}^{(0)}.$$

Mas isto é equivalente a dizer

$$\int_{\Omega} g(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon) d\mathbb{P} \longrightarrow \int_{\Omega} g(\Phi_t, X_t) d\mathbb{P}.$$

Por definição de g temos

$$\int_{\Omega} f(\Phi_t^\varepsilon(x^{(N)}), X_t^\varepsilon(y^{(M)})) d\mathbb{P} \longrightarrow \int_{\Omega} f(\Phi_t(x^{(N)}), X_t(y^{(M)})) d\mathbb{P}.$$

Então

$$\int_{V_N \times V_M} f dQ_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)} \longrightarrow \int_{V_N \times V_M} f dQ_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(0)},$$

como desejamos.

A seguir apresentamos uma proposição que nos mostra a convergência fraca da família $\{\mathbb{P}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon > 0}$.

Proposição 4.5. *A família de leis $\{\mathbb{P}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ sobre $(W_m^2, \mathcal{B}(W_m^2))$ converge fracamente se as seguintes duas condições são satisfeitas:*

- (i) $\{\mathbb{P}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ é tight, isto é, para qualquer $\delta > 0$ existe um subconjunto compacto K_δ de W_m^2 tal que $\mathbb{P}^{(\varepsilon)}(K_\delta) > 1 - \delta$ para qualquer $\varepsilon > 0$.
- (ii) $\{Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ converge fracamente para quaisquer $x^{(N)}, y^{(M)}, M, N = 1, 2, \dots$

Demonstração. Seja $\{Y^\varepsilon = (\Phi^\varepsilon, X^\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ uma seqüência de variáveis aleatórias definidas em W_m^2 . Então dita seqüência é tight, pois por (i) sua lei associada é tight. Por outra parte, observemos que as distribuições finito dimensionais da seqüência dada, é a lei do processo de $(N + M)$ -pontos de Y^ε . Com efeito, dado $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{(N+M)d}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{(N)d}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^{(M)d})$ e $x_i, y_j \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ quaisquer, com $N, M \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M}^{(\varepsilon)}(A) &= \mathbb{P}(\{\omega : (\Phi^\varepsilon(x_1), \dots, \Phi^\varepsilon(x_N), X^\varepsilon(y_1), \dots, X^\varepsilon(y_M)) \in A\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega : (\Phi(x^{(N)}), X^\varepsilon(y^{(M)}))(\omega) \in A\}) \\ &= Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)}(A). \end{aligned}$$

Assim, por (ii) a seqüência de distribuições finito dimensionais $\{\mathbb{P}_{x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ converge fracamente para quaisquer $x_i, y_j \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$. Portanto pelo Teorema 1.15 obtemos que a família de leis $\{\mathbb{P}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ converge fracamente. $\square$

Algumas vezes é conveniente considerar $(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon)$ como sendo processos assumindo valores em espaços de Sobolev. Para $N \in \mathbb{N}$, B_N é a bola de $\mathbb{R}^d$ com centro na origem e raio N . Daí, para $p \in \mathbb{N}$ seja a função $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que $D^\alpha f \in L^p(B_N)$ para todo α tal que $|\alpha| \leq m$. Assim introduzimos

$$\|f\|_{m,p,N} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{B_N} |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde as derivadas são no sentido de distribuições. Deste modo definimos

$$H_{m,p}^{\text{loc}} = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d : \|f\|_{m,p,N} < \infty \text{ para qualquer } N\}.$$

Assim a família de seminormas $\{\|\cdot\|_{m,p,N}, N = 1, 2, \dots\}$ faz de $H_{m,p}^{\text{loc}}$ um espaço separável e completo. Pondo $W_{m,p} = C([0, T]; H_{m,p}^{\text{loc}})$ definimos, para $\Phi \in W_{m,p}$, uma família de seminormas dadas por

$$\|\Phi\|_{m,p,N} = \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi_t\|_{m,p,N}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

o qual faz de $W_{m,p}$ um espaço separável e completo. Para o caso $p = \infty$ escrevemos W_m em vez de $W_{m,\infty}$.

Observamos que se $W_{m,p}^2 = W_{m,p} \times W_{m,p}$ e supondo que $p > d$ obtemos

$$W_{m+1,p}^2 \subset W_m^2 \subset W_{m,p}^2 \subset W_{m-1}^2,$$

que é uma consequência direta do teorema da imersão de Sobolev (ver [12]). Na verdade temos que

$$H_{m+1,p}^{\text{loc}} \subset C^m \subset H_{m,p}^{\text{loc}}.$$

Definição 4.6. *Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ a forma bilinear canônica sobre $H_{m,p}^{\text{loc}}$ restrito a B_N . Dizemos que $\{\Phi^n, n = 1, 2, \dots\} \subset W_{m,p}$ converge fracamente a $\Phi \in W_{m,p}$ se $\langle \Phi_t^n, f \rangle_N$ converge a $\langle \Phi_t, f \rangle_N$ uniformemente em t para qualquer $f \in (H_{m,p}^{\text{loc}})^*$. O espaço $W_{m,p}$ munido com a topologia fraca é um espaço separável e completo.*

Observação 4.7. *Seja A um subconjunto limitado de $H_{m,p}^{\text{loc}}$, isto é, para qualquer inteiro positivo N existe uma constante K_N tal que $\sup_{f \in A} \|f\|_{m,p,N} \leq K_N$. Então A é relativamente compacto em $H_{m,p}^{\text{loc}}$ com respeito à topologia fraca.*

Agora descrevemos um critério de acordo com o qual a família de medidas $\{\mathbb{P}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ é tight.

Proposição 4.8. *Seja $\{\mathbb{P}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ uma família de medidas de probabilidade sobre $W_{m,p}^2$, com $1 \leq p < \infty$. Suponha que para qualquer inteiro positivo N existem números positivos α, β e K tais que*

$$(i) \quad \mathbb{E}^{(\varepsilon)}[\|\Phi_t\|_{m,p,N}^\alpha + \|X_t\|_{m,p,N}^\alpha] \leq K,$$

$$(ii) \quad \mathbb{E}^{(\varepsilon)}[\|\Phi_t - \Phi_s\|_{m,p,N}^\alpha + \|X_t - X_s\|_{m,p,N}^\alpha] \leq K|t - s|^{1+\beta},$$

se cumpre para quaisquer $t, s \in [0, T]$ e para qualquer $\varepsilon > 0$. Então $\{\mathbb{P}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ é tight em $W_{m,p}^2$ com respeito à topologia fraca.

Note que, se $\{\mathbb{P}_m^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ é definido como uma família de medidas de probabilidade sobre W_m^2 , então ele pode ser estendido a $W_{m,p}^2$ da seguinte maneira: consideremos a classe de conjuntos dados por

$$\{A \cap W_m^2 : A \in \mathcal{B}(W_{m,p}^2)\} = \mathcal{B}(W_{m,p}^2)|_{W_m^2} \subset \mathcal{B}(W_m^2).$$

Daí definimos

$$\mathbb{P}_{m,p}^{(\varepsilon)}(A) = \mathbb{P}_m^{(\varepsilon)}(A \cap W_m^2), \quad A \in \mathcal{B}(W_{m,p}^2).$$

De maneira análoga podemos estender $\mathbb{P}_m^{(\varepsilon)}$ a $\mathbb{P}_{m-1}^{(\varepsilon)}$ sobre W_{m-1}^2 . Consequentemente, podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 4.9. *Suponhamos que $m > 1$ e $p > d$. Então $\{\mathbb{P}_{m-1}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ é tight sobre W_{m-1}^2 se $\{\mathbb{P}_{m,p}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ é tight em $W_{m,p}^2$ com respeito á topologia fraca.*

Demonstração. Pelo teorema de Kondraseev (ver [12], página 74) temos que qualquer conjunto relativamente compacto em $H_{m,p}^{\text{loc}}$ com respeito á topologia fraca é imerso em C^{m-1} como um conjunto relativamente compacto. Assim, como $\{\mathbb{P}_{m,p}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ é tight resulta que para todo $\eta > 0$ existe um compacto $A_\eta \in \mathcal{B}(W_{m,p}^2)$ tal que $\mathbb{P}(A_\eta) > 1 - \eta$. Agora observamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{m,p}^{(\varepsilon)}(\bar{A}) &= \mathbb{P}_m^{(\varepsilon)}(\bar{A}_\eta \cap W_m^2) \\ &= \mathbb{P}_{m-1}^{(\varepsilon)}((\bar{A}_\eta \cap W_m^2) \cap W_{m-1}^2) \\ &= \mathbb{P}_{m-1}^{(\varepsilon)}(\bar{A}_\eta \cap W_{m-1}^2) \\ &> 1 - \eta. \end{aligned}$$

Como $\bar{A}_\eta$ é relativamente compacto em $W_{m,p}^2$, resulta que $\bar{A}_\eta \cap W_{m-1}^2$ é também relativamente compacto em W_{m-1}^2 . Portanto $\{\mathbb{P}_{m-1}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ é tight. $\square$

4.2 Teorema do Limite de Kunita

Na presente seção estabelecemos o Teorema do Limite para fluxos estocásticos. Assim para cada $\varepsilon > 0$ seja $X^\varepsilon(x, t)$ um C^{k-1} -semimartingale contínuo adaptado a $\mathfrak{F}_t^\varepsilon$ tal que $X^\varepsilon(x, 0) = 0$. Sejam $(a^\varepsilon(x, y, t), b^\varepsilon(x, t))$ as caraterísticas locais de $X^\varepsilon(x, t)$, e suponhamos que a^ε e b^ε são Lipschitz contínuos, e a^ε é k -vezes continuamente diferenciável em x, y , e b^ε é $(k + 2)$ -vezes continuamente diferenciável em x . Também assumimos que $b^\varepsilon(x, t)$ é $\mathfrak{F}_0^\varepsilon$ -mensurável. Deste modo podemos escrever $X^\varepsilon(x, t)$ como

$$X^\varepsilon(x, t) = Y^\varepsilon(x, t) + \int_0^t b^\varepsilon(x, r) dr,$$

onde $Y^\varepsilon(x, t)$ é um C^{k-1} -martingale contínuo. Em seguida considerando

$$\mathfrak{G}_t^\varepsilon = \sigma(Y^\varepsilon(x, u), b^\varepsilon(x, u) : 0 \leq u \leq t, x \in \mathbb{R}^d),$$

temos que $X^\varepsilon(x, t)$ é um C^{k-1} -semimartingale contínuo e $\mathfrak{G}_t^\varepsilon$ -adaptado.

Agora introduzimos as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned}\bar{b}^\varepsilon(x, t) &= \mathbb{E}[b^\varepsilon(x, t)], \quad \tilde{b}^\varepsilon(x, t) = b^\varepsilon(x, t) - \bar{b}^\varepsilon(x, t), \\ A_{ij}^\varepsilon(x, y, t, s) &= \mathbb{E}\left[\int_s^t \tilde{b}_i^\varepsilon(x, r) dr \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon\right] b_j^\varepsilon(y, t), \\ c_i^\varepsilon(x, t, s) &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij}^\varepsilon(x, y, t, s) \Big|_{y=x}, \\ d_{ijk}^\varepsilon(x, y, t, s) &= \mathbb{E}\left[\int_s^t \tilde{b}_i^\varepsilon(x, r) dr \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon\right] a_{jk}^\varepsilon(y, y, s).\end{aligned}$$

No que segue introduzimos duas condições. A primeira condição está relacionada com a convergência e a segunda com momentos essencialmente necessários para tightness.

Condição (A2)_k. Existem funções contínuas $a = (a_{ij}(x, y, t))$, $\bar{b} = (\bar{b}^i(x, t))$, $c = (c^i(x, t))$, $A = (A_{ij}(x, y, t))$, os quais são k -vezes continuamente diferenciáveis em x, y ou x , segundo como seja o caso, e além disso, satisfazem as seguintes propriedades:

- (1) $\mathbb{E}\left[\sup_{|x| \leq K} \left|\mathbb{E}\left[\int_s^t a_{ij}^\varepsilon(x, y, r) dr \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon\right] - \int_s^t a_{ij}(x, y, r) dr\right|\right] \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$,
- (2) $\sup_{|x| \leq K} \left|\int_s^t \bar{b}^\varepsilon(x, r) dr - \int_s^t \bar{b}(x, r) dr\right| \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$,
- (3) $\mathbb{E}\left[\sup_{|x| \leq K} \left|\mathbb{E}\left[\int_s^t D_x^\alpha \tilde{b}^\varepsilon(x, r) dr \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon\right]\right|\right] \rightarrow 0$ para $|\alpha| \leq k$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$,
- (4) $\mathbb{E}\left[\sup_{|x| \leq K} \left|\mathbb{E}\left[\int_s^t A_{ij}^\varepsilon(x, y, t, r) dr \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon\right] - \int_s^t A_{ij}(x, y, r) dr\right|\right] \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$,
- (5) $\mathbb{E}\left[\sup_{|x| \leq K} \left|\mathbb{E}\left[\int_s^t c^\varepsilon(x, t, r) dr \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon\right] - \int_s^t c(x, r) dr\right|\right] \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Todas as convergências mencionadas são uniformes em t, s para qualquer $K > 0$.

Condição (A3)_k. Para qualquer $K > 0$ existe constantes $\gamma > 1$ e $L > 0$ tal que para quaisquer x, y, t, s

- (6) $\mathbb{E}\left[\sup_{|x| \leq K, |y| \leq K} |D_x^\alpha D_y^\beta a_{ij}^\varepsilon(x, y, t)|^\gamma\right] \leq L \quad \forall \varepsilon > 0, |\alpha| \leq k, |\beta| \leq k,$
- (7) $\sup_{|x| \leq K} |D_x^\alpha \bar{b}^\varepsilon(x, t)| \leq L \quad \text{para todo } \varepsilon > 0, |\alpha| \leq k,$
- (8) $\mathbb{E}\left[\sup_{|x| \leq K, |y| \leq K} |D_x^\alpha D_y^\beta A_{ij}^\varepsilon(x, y, t, s)|^\gamma\right] \leq L \quad \forall \varepsilon > 0, |\alpha| \leq k+1, |\beta| \leq k+1,$

$$(9) \quad \mathbb{E} \left[\sup_{|x| \leq K, |y| \leq K} |D_x^\alpha D_y^\beta d_{ijk}^\varepsilon(x, y, t, s)|^\gamma \right] \leq L \quad \forall \varepsilon > 0, |\alpha| \leq k+2, |\beta| \leq k.$$

Definição 4.10. Um processo $X(x, t)$ contínuo em t que assume valores em C , é dito um C -movimento Browniano se para $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ tem-se que $X_0, X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ são independentes.

Seja $\Phi_t^\varepsilon(x) = \Phi_{0,t}^\varepsilon(x)$ o fluxo estocástico gerado por $X^\varepsilon(x, t)$ e considere $\mathbb{P}_m^{(\varepsilon)}$, $m \leq k-1$, a lei de $(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon)$ definido sobre W_m^2 .

Teorema 4.11. Assumimos as condições $(\mathbf{A2})_k$ e $(\mathbf{A3})_k$ para algum $k \geq 2$. Então $\{\mathbb{P}_{k-2}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ converge fracamente a $\mathbb{P}^{(0)}$ como fluxo estocástico. A medida limite $\mathbb{P}^{(0)}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $X(x, t)$ é um C^{k-1} -movimento Browniano com características locais $(a + \bar{a}, \bar{b})$ onde $\bar{a}_{ij}(x, y, t) = A_{ij}(x, y, t) + A_{ji}(y, x, t)$.

(b) Φ_t é um fluxo de C^{k-1} -difeomorfismos gerado por $X(x, t) + \int_0^t c(x, r) dr$.

Mais ainda, se X_t^ε converge fortemente então Φ_t^ε também converge fortemente.

A prova do teorema anterior será feita nas seções seguintes. Na próxima seção mostramos a tightness do processo de $(N+M)$ -pontos através de uma condição adicional $(\mathbf{A4})$. Logo na seção 4.4, primeiro mostramos a convergência fraca do processo de $(N+M)$ -pontos assumindo a condição $(\mathbf{A4})$, e em seguida sem considerar a condição $(\mathbf{A4})$ provamos o mesmo, mas no caso geral. Agora dentro da seção 4.5 demonstramos a tightness de processos que assumem valores em espaços Sobolev. Por último na seção 4.6 concluímos com a prova do Teorema Limite.

4.3 Tightness do Processo de $(N+M)$ -pontos

Sejam $x^{(N)} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{Nd}$ e $y^{(M)} = (y_1, \dots, y_M) \in \mathbb{R}^{Md}$. Considere o processo de $(N+M)$ -pontos $(\Phi_t^\varepsilon(x^{(N)}), X_t^\varepsilon(y^{(M)}))$, e como antes denotemos a lei do dito processo por $Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)}$ o qual é definido no espaço $V_N \times V_M$. Fixados $x^{(N)}$ e $y^{(M)}$ escrevemos $Q^{(\varepsilon)}$ em vez de $Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)}$.

Mostraremos a tightness das leis $\{Q^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ considerando a seguinte condição.

Condição $(\mathbf{A4})$. Existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(x, y, t, \omega) &= 0 & \text{se } |x| \geq K, |y| \geq K, \\ b^\varepsilon(x, y, t, \omega) &= 0 & \text{se } |x| \geq K. \end{aligned}$$

Claramente vemos que $X^\varepsilon(x, t, \omega) = 0$ se $|x| \geq K$; e o fluxo associado $\Phi_t^\varepsilon(x)$ satisfaz $|\Phi_t^\varepsilon(x)| \leq C(K)$ se $|x| \leq K$ (onde $C(K)$ é uma constante que depende de K) devido á continuidade do fluxo, e $\Phi_t^\varepsilon(x) = x$ se $|x| > K$. Agora, seja $\gamma = \gamma(K)$ uma constante positiva como em $(A3)_k$.

Com a finalidade de mostrar a tightness do processo de $(N + M)$ -pontos enunciamos o seguinte lema.

Lema 4.12. *Para qualquer $p \in [2, 2\gamma]$ existe uma constante positiva $C = C(p)$ tal que*

$$\mathbb{E}[|X_t^\varepsilon(x) - X_s^\varepsilon(x)|^p] \leq C|t - s|^{2-\frac{2}{p}} \quad \text{para todo } \varepsilon > 0 \quad \text{e todo } x.$$

Demonstração. Para simplificar o trabalho consideramos o caso quando $d = 1$. Também consideramos $X_t^\varepsilon, a^\varepsilon(t)$, etc. em vez de $X_t^\varepsilon(x), a^\varepsilon(x, x, t)$, etc. para x fixo. Assim, aplicando a fórmula de Itô, para a função $F(x, t) = |x - Y_s^\varepsilon|^p$, temos que

$$\begin{aligned} |Y_t^\varepsilon - Y_s^\varepsilon|^p &= p \int_s^t |Y_r^\varepsilon - Y_s^\varepsilon|^{p-1} \operatorname{sgn}(Y_r^\varepsilon - Y_s^\varepsilon) dY_r^\varepsilon \\ &\quad + \frac{1}{2} p(p-1) \int_s^t |Y_r^\varepsilon - Y_s^\varepsilon|^{p-2} a^\varepsilon(r) dr. \end{aligned}$$

Como o primeiro termo do lado direito é um martingale de média zero, segue que

$$\mathbb{E}[|Y_t^\varepsilon - Y_s^\varepsilon|^p] = \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E} \left[\int_s^t |Y_r^\varepsilon - Y_s^\varepsilon|^{p-2} a^\varepsilon(r) dr \right]$$

Assim, aplicando a desigualdade de Hölder, e a condição **(A3)(6)** resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Y_t^\varepsilon - Y_s^\varepsilon|^p] &\leq \frac{p(p-1)}{2} L^{\frac{1}{\gamma}} \int_s^t \mathbb{E}[|Y_r^\varepsilon - Y_s^\varepsilon|^{(p-2)(\frac{\gamma}{\gamma-1})}]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} dr \\ &\leq \frac{p(p-1)}{2} L^{\frac{1}{\gamma}} \int_s^t \mathbb{E}[|Y_r^\varepsilon - Y_s^\varepsilon|^p]^{\frac{p-2}{p}} dr, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde a última desigualdade provém do fato de que $(p-2)\frac{\gamma}{\gamma-1} < p$. Agora para qualquer $a > 0$ temos que $a^{\frac{p-2}{p}} < 1 + a$. Portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Y_t^\varepsilon - Y_s^\varepsilon|^p] &\leq \frac{p(p-1)}{2} L^{\frac{1}{\gamma}} \left\{ \int_s^t (1 + \mathbb{E}[|Y_r^\varepsilon - Y_s^\varepsilon|^p]) dr \right\} \\ &= \frac{p(p-1)}{2} L^{\frac{1}{\gamma}} \left\{ (t-s) + \int_s^t \mathbb{E}[|Y_r^\varepsilon - Y_s^\varepsilon|^p] dr \right\}. \end{aligned}$$

Daí, aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\mathbb{E}[|Y_t^\varepsilon - Y_s^\varepsilon|^p] \leq c|t - s|,$$

onde $c = \frac{1}{2}p(p-1)L^{\frac{1}{\gamma}} \exp\{\frac{1}{2}p(p-1)L^{\frac{1}{\gamma}}(t-s)\} = C_1(p) \exp\{C_1(p)(t-s)\}$. Substituindo o anterior em (4.1) temos

$$\mathbb{E}[|Y_t^\varepsilon - Y_s^\varepsilon|^p] \leq c'|t-s|^{2-\frac{2}{p}}. \quad (4.2)$$

Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t b^\varepsilon(r) dr \right|^p &= p \int_s^t \bar{b}^\varepsilon(\tau) \left| \int_s^\tau b^\varepsilon(r) dr \right|^{p-1} \text{sign}(\tau) d\tau \\ &\quad + p(p-1) \int_s^t \tilde{b}^\varepsilon(\tau) \int_s^\tau b^\varepsilon(\sigma) \left| \int_s^\sigma b^\varepsilon(r) dr \right|^{p-2} d\sigma \\ &= I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon, \end{aligned}$$

onde $\text{sign}(\tau) = \text{sign}(\int_s^\tau b^\varepsilon(r) dr)$. Desta maneira, pela desigualdade de Hölder e pela condição **(A3)(7)** tem-se

$$\mathbb{E}[|I_1^\varepsilon|] \leq pL \int_s^t \mathbb{E} \left[\left| \int_s^\tau b^\varepsilon(r) dr \right|^{p-1} \right] d\tau.$$

Novamente pela desigualdade de Hölder e por **(A3)(8)** resulta

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[I_2^\varepsilon]| &\leq p(p-1) \left| \int_s^t \mathbb{E} \left[A^\varepsilon(t, \sigma) \left| \int_s^\sigma b^\varepsilon(r) dr \right|^{p-2} \right] d\sigma \right| \\ &\leq p(p-1)L^{\frac{1}{\gamma}} \int_s^t \mathbb{E} \left[\left| \int_s^\tau b^\varepsilon(r) dr \right|^{(p-1)\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} d\sigma. \end{aligned}$$

Deste modo, obtemos que

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_s^t b^\varepsilon(r) dr \right|^p \right] \leq c \left\{ \int_s^t \left(\mathbb{E} \left[\left| \int_s^\sigma b^\varepsilon(r) dr \right|^{p-1} \right] + \mathbb{E} \left[\left| \int_s^\sigma b^\varepsilon(r) dr \right|^p \right]^{\frac{p-2}{p}} \right) d\sigma \right\}.$$

Então

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_s^t b^\varepsilon(r) dr \right|^p \right] \leq c'|t-s|^{2-\frac{2}{p}}. \quad (4.3)$$

Portanto juntando (4.2) e (4.3) obtemos a desigualdade procurada. $\square$

Novamente, considerando a condição **(A4)** enunciamos e demonstramos o seguinte lema.

Lema 4.13. *Para qualquer $p > 3(2 - \frac{1}{\gamma})$ existe uma constante positiva $C = C(p)$ tal que*

$$\mathbb{E}[|\Phi_t^\varepsilon(x) - \Phi_s^\varepsilon(x)|^p] \leq C|t-s|^{2-\frac{1}{\gamma}} \quad (4.4)$$

para todo $\varepsilon > 0$ e todo x .

Demonstração. Simplificamos o trabalho fazendo o caso $d = 1$. Segundo a condição (A4) a desigualdade (4.4) é obvio se $|x| > K$, pois $\Phi_t^\varepsilon(x) = x$. Assim basta mostrar (4.4) para o caso quando $|x| \leq K$. Então suprimindo a variável x de $\Phi_t^\varepsilon(x)$, temos

$$\begin{aligned}\Phi_t^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon &= \int_s^t b^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, r) dr + \int_s^t Y^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, dr) \\ &= \int_s^t \bar{b}^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, r) dr + \int_s^t \tilde{b}^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, r) dr + \int_s^t Y^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, dr).\end{aligned}$$

Usando a fórmula de Itô para a função $F(x) = |x|^p$ e escrevendo $\text{sign}(r) = \text{sign}(\Phi_t^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon)$, obtemos

$$\begin{aligned}|\Phi_t^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^p &= p \int_s^t \bar{b}^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, r) |\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{p-1} \text{sign}(r) dr \\ &\quad + p \int_s^t \tilde{b}^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, r) |\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{p-1} \text{sign}(r) dr \\ &\quad + p \int_s^t |\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{p-1} \text{sign}(r) Y^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, dr) \\ &\quad + \frac{1}{2} p(p-1) \int_s^t a^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, \Phi_r^\varepsilon, r) |\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{p-2} dr \\ &= I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon + I_3^\varepsilon + I_4^\varepsilon.\end{aligned}$$

Dado que $|x| \leq K$ resulta que $|\Phi_r^\varepsilon| \leq C$ (onde $C = C(K)$ é uma constante que depende de K), e por (A3)(7) obtemos

$$|\mathbb{E}[I_1^\varepsilon]| \leq pL \int_s^t \mathbb{E}[|\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{p-1}] dr. \quad (4.5)$$

Como I_3^ε é um martingale temos que

$$\mathbb{E}[I_3^\varepsilon] = 0. \quad (4.6)$$

Além disso, considerando (A3)(6) e a desigualdade de Hölder temos

$$\mathbb{E}[I_4^\varepsilon] \leq C \int_s^t \mathbb{E}[|\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{(p-2)\frac{\gamma-1}{\gamma}}] dr. \quad (4.7)$$

Para a limitação de I_2^ε , aplicamos a fórmula de Itô obtendo

$$\begin{aligned}
& \tilde{b}^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, r) |\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{p-1} \text{sign}(r) \\
&= \int_s^r \left\{ \frac{\partial}{\partial x} b^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, r) b^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, \sigma) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{b}^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, r) a^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, \Phi_\sigma^\varepsilon, \sigma) \right\} \times \\
&\quad |\Phi_\sigma^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{p-1} \text{sign}(\sigma) d\sigma \\
&+ (p-1) \int_s^r \left[\tilde{b}^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, r) b^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, \sigma) + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{b}^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, r) a^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, \Phi_\sigma^\varepsilon, \sigma) \right] \times \\
&\quad |\Phi_\sigma^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{p-2} d\sigma \\
&+ \frac{1}{2} (p-1)(p-2) \int_s^t \tilde{b}^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, r) a^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, \Phi_\sigma^\varepsilon, \sigma) |\Phi_\sigma^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{p-3} \text{sign}(\sigma) d\sigma \\
&+ \text{uma martingale com média zero.}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[I_2^\varepsilon] &= p \int_s^t \mathbb{E} \left[(c^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, t, \sigma) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} d^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, \Phi_\sigma^\varepsilon, t, \sigma)) |\Phi_\sigma^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{p-1} \text{sign}(\sigma) d\sigma \right] \\
&+ p(p-1) \int_s^t \mathbb{E} \left[\{A^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, \Phi_\sigma^\varepsilon, t, \sigma) + \frac{\partial}{\partial x} d^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, \Phi_\sigma^\varepsilon, t, \sigma)\} |\Phi_\sigma^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{p-2} \right] d\sigma \\
&+ \frac{1}{2} p(p-1)(p-2) \int_s^t \mathbb{E} \left[d^\varepsilon(\Phi_\sigma^\varepsilon, \Phi_\sigma^\varepsilon, t, \sigma) |\Phi_\sigma^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{p-3} \text{sign}(\sigma) \right] d\sigma.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder e usando as condições **(A3)(8)** e **(A3)(9)** resulta

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[I_2^\varepsilon]| &\leq 2pL^{\frac{1}{\gamma}} \int_s^t \mathbb{E}[|\Phi_\sigma^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{(p-1)\frac{\gamma}{\gamma-1}}]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} d\sigma \\
&+ 2p(p-1)L^{\frac{1}{\gamma}} \int_s^t \mathbb{E}[|\Phi_\sigma^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{(p-2)\frac{\gamma}{\gamma-1}}]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} d\sigma \\
&+ p(p-1)(p-2)L^{\frac{1}{\gamma}} \int_s^t \mathbb{E}[|\Phi_\sigma^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{(p-3)\frac{\gamma}{\gamma-1}}]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} d\sigma. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Assim, somando as estimativas (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\Phi_t^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^p] &\leq pL \int_s^t \mathbb{E}[|\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{p-1}] dr \\
&+ 2pL^{\frac{1}{\gamma}} \int_s^t \mathbb{E}[|\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{(p-1)\frac{\gamma}{\gamma-1}}]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} dr \\
&+ (C + 2p(p-1)L^{\frac{1}{\gamma}}) \int_s^t \mathbb{E}[|\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{(p-2)\frac{\gamma}{\gamma-1}}]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} dr \\
&+ p(p-1)(p-2)L^{\frac{1}{\gamma}} \int_s^t \mathbb{E}[|\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{(p-3)\frac{\gamma}{\gamma-1}}]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} dr.
\end{aligned}$$

Tomando $C' = \max\{pL, C + 2p(p-1)L^{\frac{1}{\gamma}}, p(p-1)(p-2)L^{\frac{1}{\gamma}}\}$ resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\Phi_t^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^p] &\leq C' \int_s^t \left\{ \mathbb{E}[|\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{p-1}] + \mathbb{E}[|\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{(p-1)\frac{\gamma}{\gamma-1}}]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}[|\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{(p-2)\frac{\gamma}{\gamma-1}}]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \mathbb{E}[|\Phi_r^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^{(p-3)\frac{\gamma}{\gamma-1}}]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\} dr. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Como $|\Phi_t^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon| \leq 2C(K)$, vemos de (4.9) que

$$\mathbb{E}[|\Phi_t^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^p] \leq C_1 |t - s|, \quad \forall p > 3(2 - \frac{1}{\gamma}).$$

Portanto substituindo a desigualdade anterior em (4.9) tem-se

$$\mathbb{E}[|\Phi_t^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon|^p] \leq C' \int_s^t \left\{ C_1 |r - s| + C_2 |r - s|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + C_3 |r - s|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + C_4 |r - s|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\} dr$$

(e tomando $\overline{C} = \max\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$)

$$\begin{aligned} &\leq C' \overline{C} \int_s^t (|r - s| + |r - s|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}) dr \\ &\leq C |t - s|^{2 - \frac{1}{\gamma}}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

A seguir, desenvolvemos o resultado principal desta seção.

Proposição 4.14. *A família de medidas $\{Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon > 0}$ é tight para quaisquer $x^{(N)}$ e $y^{(M)}$.*

Demonstração. Sabemos que a sequência de variáveis aleatórias cuja lei é $Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)}$ é dada por

$$(\Phi_\cdot^\varepsilon(x^{(N)}), X_\cdot^\varepsilon(y^{(M)}))(\omega) \in V_N \times V_M.$$

Observamos que dita família verifica as hipóteses do critério de Kolmogorov para tightness. Com efeito, basta ver que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\|(\Phi_t^\varepsilon(x^{(N)}), X_t^\varepsilon(y^{(M)})) - (\Phi_s^\varepsilon(x^{(N)}), X_s^\varepsilon(y^{(M)}))\|^p] \\ &\leq C_1 (\mathbb{E}[\|\Phi_t^\varepsilon(x^{(N)}) - \Phi_s^\varepsilon(x^{(N)})\|^p] + \mathbb{E}[\|X_t^\varepsilon(y^{(M)}) - X_s^\varepsilon(y^{(M)})\|^p]). \end{aligned}$$

Daí utilizamos a norma da soma para obter as expressões dos Lemas 4.12 e 4.13, e desta maneira obter as hipóteses do critério de Kolmogorov. Portanto a família $\{Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon > 0}$ é tight para quaisquer $x^{(N)}$ e $y^{(M)}$. □

4.4 Convergência Fraca do Processo de (N+M)-pontos

Sejam $x^{(N)} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{Nd}$ e $y^{(M)} = (y_1, \dots, y_M) \in \mathbb{R}^{Md}$ e $Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)}$ a lei de $(\Phi_t^\varepsilon(x^{(N)}), X_t^\varepsilon(y^{(M)}))$ definido sobre $V_N \times V_M$. Assim, nesta seção estudamos a convergência fraca da família de probabilidades $\{Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$.

Teorema 4.15. *Assumamos as condições (A2)_k, (A3)_k para algum $k \geq 2$, e (A4). Então para cada $x^{(N)}$ e $y^{(M)}$ a família $\{Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ converge fracamente à medida de probabilidade $Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(0)}$. Ademais seja $\mathbb{P}^{(0)} = \mathbb{P}_{k-1}^{(0)}$ a medida de probabilidade sobre W_{k-1}^2 satisfazendo (a) e (b) do Teorema 4.11. Então a lei de $(\Phi_t^\varepsilon(x^{(N)}), X_t^\varepsilon(y^{(M)}))$ com respeito de $\mathbb{P}^{(0)}$ coincide com $Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(0)}$ para quaisquer $x^{(N)}, y^{(M)}$.*

A prova do teorema anterior será desenvolvida através de diferentes lemas os quais enunciaremos e mostraremos adiante. Sabemos, pela Proposição 4.14, que a família $\{Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ é tight, assim ela é relativamente compacta. Portanto temos que se $Q^{(0)}$ é ponto de acumulação de $\{Q^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, então $\{Q^{(\varepsilon)}\}$ converge através de uma subsequência $\varepsilon_n \downarrow 0$.

Com o objetivo de mostrar resultados que nos permitam obter a convergência fraca do processo de $(N + M)$ -pontos consideramos o seguinte: seja h uma função contínua limitada sobre $\mathbb{R}^{(N+M)ld}$ onde l é um inteiro positivo, e para $(\Phi, X) \in V_N \times V_M$ e para $0 \leq s_1 < \dots < s_l \leq s$, definimos

$$\Psi(\Phi, X) = h(\Phi_{s_1}, \dots, \Phi_{s_l}, X_{s_1}, \dots, X_{s_l}).$$

Então claramente vemos que Ψ é uma função contínua limitada sobre $(\Phi, X) \in V_N \times V_M$. Também definimos uma variável aleatória Ψ^ε como

$$\Psi^\varepsilon(\omega) = h(\Phi_{s_1}^\varepsilon(x^{(N)}, \omega), \dots, \Phi_{s_l}^\varepsilon(x^{(N)}, \omega), X_{s_1}^\varepsilon(y^{(M)}, \omega), \dots, X_{s_l}^\varepsilon(y^{(M)}, \omega)).$$

Deste modo Ψ^ε é uma função mensurável, pois h é contínua, definido sobre o espaço de probabilidade básico $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Assim temos que

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_s^t f(\Phi_r^\varepsilon, r) dr \right) \Psi^\varepsilon \right] = \mathbb{E}_{Q^{(\varepsilon)}} \left[\left(\int_s^t f(\Phi_r, r) dr \right) \Psi \right]$$

para qualquer função f na qual a expressão acima faz sentido (novamente suprimimos $(x^{(N)}, y^{(M)})$ de $Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon)}$).

Para mostrar o Teorema 4.15 precisamos do seguinte lema sobre convergência.

Lema 4.16. *Seja $\{g^\varepsilon(x, t, \omega)\}_{\varepsilon>0}$ a família de processos que assumem valores no espaço C^1 satisfazendo:*

(a) Para qualquer $K > 0$ existe $\gamma > 1$ e $L > 0$ tal que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{|x| \leq K} |D^\alpha g^\varepsilon(x, t)|^\gamma \right] \leq L, \quad |\alpha| \leq 1.$$

(b) Existe uma função determinística $g(x, t)$ tal que para qualquer $K > 0$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{|x| \leq K} \left| \mathbb{E} \left[\int_s^t g^\varepsilon(x, r) dr \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon \right] - \int_s^t g(x, r) dr \right| \right] \longrightarrow 0 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Seja $\varepsilon_n \downarrow 0$ uma seqüência tal que $\{Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(\varepsilon_n)}\}_{\varepsilon > 0}$ converge fracamente para $Q_{(x^{(N)}, y^{(M)})}^{(0)}$. Então

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_s^t g^{\varepsilon_n}(\Phi_r^{\varepsilon_n}, r) dr \right) \Psi^{\varepsilon_n} \right] \longrightarrow \mathbb{E}_{Q^{(0)}} \left[\left(\int_s^t g(\Phi_r, r) dr \right) \Psi \right] \quad \text{quando } \varepsilon_n \rightarrow 0,$$

onde $\Phi_r^{\varepsilon_n} = \Phi_r^{\varepsilon_n}(x^{(N)})$.

Demonstração. Pelo Lema 4.13 e aplicando o critério de Kolmogorov para tightness resulta que $\{\Phi_t^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ é tight. Agora pelo teorema de Arzela-Ascoli temos que para qualquer $\theta, \eta > 0$ existe $\zeta > 0$ tal que o conjunto

$$A^\varepsilon(\zeta, \eta) = \{\omega : \sup_{|t-s| \leq \zeta} |\Phi_t^\varepsilon - \Phi_s^\varepsilon| < \eta\},$$

satisfaz

$$\mathbb{P}(A^\varepsilon(\zeta, \eta)) > 1 - \theta.$$

Considerando (a) e utilizando o Teorema de Valor Médio obtemos que para qualquer $\delta > 0$ existe $\eta > 0$ tal que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{\substack{|x-y| < \eta \\ |x| \leq K, |y| \leq K}} |g^\varepsilon(x, t) - g^\varepsilon(y, t)| \right] < \delta.$$

Fixado η seja Δ uma partição de $[s, t]$ dado por $\Delta = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$, com $|\Delta| < \zeta$. Desta maneira aplicando as desigualdades anteriores, a desigualdade de Jensen, desigualdade de Hölder e o teorema de Fubini obtemos

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left[\left(g^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, r) dr - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g^\varepsilon(\Phi_{t_k}^\varepsilon, r) dr \right) \Psi^\varepsilon \right] \right| \\ & \leq \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} |g^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, r) - g^\varepsilon(\Phi_{t_k}^\varepsilon, r)| dr \right) |\Psi^\varepsilon| : A^\varepsilon(\zeta, \eta) \right] \\ & \quad + \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} |g^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, r) - g^\varepsilon(\Phi_{t_k}^\varepsilon, r)| dr \right) |\Psi^\varepsilon| : (A^\varepsilon(\zeta, \eta))^c \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (\sup |g^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, r) - g^\varepsilon(\Phi_{t_k}^\varepsilon, r)| dr) \|\Psi\| : A^\varepsilon(\zeta, \eta) \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(|g^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon, r) - g^\varepsilon(\Phi_{t_k}^\varepsilon, r)|^\gamma dr \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\Psi\|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} dr \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) : (A^\varepsilon(\zeta, \eta))^c \right] \\
&\leq \delta(t-s) \|\Psi\| + 2L^{\frac{1}{\gamma}}(t-s) \|\Psi\| \theta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Também observamos que

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g^\varepsilon(\Phi_{t_k}^\varepsilon, r) dr \right) \Psi^\varepsilon \right] - \mathbb{E}_{Q^{(0)}} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(\Phi_{t_k}, r) dr \right) \Psi \right] \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} g^\varepsilon(y, r) dr \mid \mathfrak{F}_{t_k}^\varepsilon \right) \right] \Psi^\varepsilon \right\} - \mathbb{E} \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(\Phi_{t_k}^\varepsilon, r) dr \right) \Psi^\varepsilon \right] \right\} \right| \\
&\quad + \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} g^\varepsilon(\Phi_{t_k}^\varepsilon, r) dr \right) \Psi^\varepsilon \right] - \mathbb{E}_{Q^{(0)}} \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(\Phi_{t_k}, r) dr \right) \Psi \right] \right\} \right| \\
&= I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Por (b) resulta que $I_1^\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e $I_2^\varepsilon \rightarrow 0$ através de uma subsequência pela convergência fraca de $Q^{(\varepsilon)}$ ao longo de dita subsequência. Portanto vemos que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \left| \mathbb{E} \left[\left(\int_s^t g^{\varepsilon_n}(\Phi_{t_k}^{\varepsilon_n}, r) dr \right) \Psi^{\varepsilon_n} \right] - \mathbb{E}_{Q^{(0)}} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(\Phi_{t_k}, r) dr \right) \Psi \right] \right| \\
&\leq \limsup_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \left(\left| \mathbb{E} \left[\left(g^{\varepsilon_n}(\Phi_{t_k}^{\varepsilon_n}, r) dr - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g^\varepsilon(\Phi_{t_k}^\varepsilon, r) dr \right) \Psi^\varepsilon \right] \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g^\varepsilon(\Phi_{t_k}^\varepsilon, r) dr \right) \Psi^\varepsilon \right] - \mathbb{E}_{Q^{(0)}} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(\Phi_{t_k}, r) dr \right) \Psi \right] \right| \right) \\
&\leq \delta(t-s) \|\Psi\| + 2L^{\frac{1}{\gamma}}(t-s) \|\Psi\| \theta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},
\end{aligned}$$

donde pela arbitrariedade de δ e θ , fazendo $\delta \rightarrow 0$ e $\theta \rightarrow 0$, obtemos a afirmação do lema. $\square$

Definição 4.17. se $\mathbb{E}[f^{\varepsilon_n} \Psi^{\varepsilon_n}] \rightarrow \mathbb{E}_{Q^{(0)}}[f \Psi]$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ então dizemos que $f^{\varepsilon_n} \rightarrow f$ fracamente.

Lema 4.18. Sejam

$$M_t(x) = \Phi_t(x) - \int_0^t (\bar{b}(\Phi_r(x), r) + c(\Phi_r(x), r)) dr$$

se $x \in \{x_1, \dots, x_N\}$, e

$$Y_t(y) = X_t(x) - \int_0^t \bar{b}(y, r) dr$$

se $y \in \{y_1, \dots, y_M\}$. Então $M_t(x)$ e $Y_t(y)$ são L^2 -martingales com respeito a $Q^{(0)}$.

Demonstração. Para facilitar o trabalho aqui consideramos unicamente o caso $d = 1$. Pela tightness de $\{Q^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon > 0}$ existe uma subsequência $\varepsilon_n \downarrow 0$ tal que $Q^{(\varepsilon_n)} \rightarrow Q^{(0)}$ fracamente. Assim temos

$$\mathbb{E} \left[\left(\Phi_t^{\varepsilon_n} - \Phi_s^{\varepsilon_n} - \int_s^t \bar{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_r^{\varepsilon_n}(x), r) dr - \int_s^t \tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_r^{\varepsilon_n}(x), r) dr - \int_s^t Y^{\varepsilon_n}(\Phi_r^{\varepsilon_n}(x), dr) \right) \Psi^{\varepsilon_n} \right] = 0.$$

Então

$$\mathbb{E} \left[\left(\Phi_t^{\varepsilon_n} - \Phi_s^{\varepsilon_n} - \int_s^t \bar{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_r^{\varepsilon_n}(x), r) dr - \int_s^t \tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_r^{\varepsilon_n}(x), r) dr \right) \Psi^{\varepsilon_n} \right] = 0,$$

pois como Ψ^{ε_n} e $\mathfrak{F}_s^{\varepsilon_n}$ -mensurável resulta

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_s^t Y^{\varepsilon_n}(\Phi_r^{\varepsilon_n}(x), dr) \right) \Psi^{\varepsilon_n} \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_s^t Y^{\varepsilon_n}(\Phi_r^{\varepsilon_n}(x), dr) \middle| \mathfrak{F}_s^{\varepsilon_n} \right] \Psi^{\varepsilon_n} \right] = 0.$$

Pelo Lema 4.13 se tera que $\Phi_t^{\varepsilon_n} - \Phi_s^{\varepsilon_n} \rightarrow \Phi_t - \Phi_s$ fracamente. Logo, pela condição **(A2)(2)** e o lema anterior obtemos que

$$\int_s^t \bar{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_r^{\varepsilon_n}(x), r) dr \longrightarrow \int_s^t \bar{b}(\Phi_r(x), r) dr \quad \text{fracamente.}$$

Por outro lado, usando a fórmula de Itô para a função $f(x) = \int_s^t \tilde{b}^{\varepsilon_n}(x, r) dr$ tem-se

$$\begin{aligned} \int_s^t \tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_r^{\varepsilon_n}(x), r) dr &= \int_s^t \tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_s^{\varepsilon_n}(x), r) dr + \int_s^t dr \left(\int_s^r \frac{\partial}{\partial x} \tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}, r) \tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}, \sigma) d\sigma \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_s^t dr \left(\int_s^r \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}, r) a^{\varepsilon_n}(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}, \Phi_\sigma^{\varepsilon_n}, \sigma) d\sigma \right) \\ &\quad + \text{um martingale.} \\ &= I_1^{\varepsilon_n} + I_2^{\varepsilon_n} + I_3^{\varepsilon_n} + I_4^{\varepsilon_n}. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{E}[\int_s^t \tilde{b}^{\varepsilon_n}(z, r) dr | \mathfrak{G}_s^{\varepsilon}]_{z=\Phi_s^{\varepsilon_n}} \rightarrow 0$ temos que $I_1^{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ fracamente pelo Lema 4.16. Também, usando **(A2)(5)**, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_2^{\varepsilon_n} | \mathfrak{G}_s^{\varepsilon}] &= \mathbb{E} \left[\int_s^t c^{\varepsilon_n}(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(x), t, \sigma) d\sigma \middle| \mathfrak{G}_s^{\varepsilon} \right] \\ &\longrightarrow \int_s^t c(\Phi_r, r) dr, \end{aligned}$$

fracamente. Além disso, dado que $\frac{\partial^2}{\partial x^2} d^{\varepsilon_n} \rightarrow 0$, resulta que

$$\mathbb{E}[I_3^{\varepsilon_n} | \mathfrak{F}_s^{\varepsilon}] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} d^{\varepsilon_n}(\Phi_{\sigma}^{\varepsilon_n}, \Phi_{\sigma}^{\varepsilon_n}, t, \sigma) d\sigma | \mathfrak{F}_s^{\varepsilon}\right] \rightarrow 0$$

fracamente. Agora $I_4^{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ fracamente devido a que ele é um martingale. Deste jeito

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_r^{\varepsilon_n}, r) dr\right) \Psi^{\varepsilon_n}\right] \rightarrow \mathbb{E}_{Q^{(0)}}\left[\left(\int_s^t c(\Phi_r, r) dr\right) \Psi\right].$$

Portanto combinando os resultados obtidos, temos que

$$\mathbb{E}_{Q^{(0)}}\left[\left(\Phi_t - \Phi_s - \int_s^t \bar{b}(\Phi_r, r) dr - \int_s^t c(\Phi_r, r) dr\right) \Psi\right] = 0.$$

Mas isto é equivalente a dizer

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Q^{(0)}}\left[\left(\Phi_t - \int_0^t (\bar{b}(\Phi_r, r) + c(\Phi_r, r)) dr\right) \Psi | \mathfrak{F}_s\right] \\ = \mathbb{E}_{Q^{(0)}}\left[\left(\Phi_s - \int_0^s (\bar{b}(\Phi_r, r) + c(\Phi_r, r)) dr\right) \Psi\right], \end{aligned}$$

o qual indica que $M_t(x)$ é um martingale respeito a $Q^{(0)}$.

Em seguida mostramos que $Y_t(y)$ é um martingale. Com efeito, sabemos que

$$X_t^{\varepsilon_n} - \int_0^t \bar{b}^{\varepsilon_n}(y, r) dr - \int_0^t \tilde{b}^{\varepsilon_n}(y, r) dr = Y_t^{\varepsilon_n}(y, r),$$

onde $Y_t^{\varepsilon_n}$ é um martingale. Assim como Ψ^{ε_n} é $\mathfrak{F}_s^{\varepsilon_n}$ -mensurável resulta

$$\mathbb{E}\left[\left(X_t^{\varepsilon_n} - X_s^{\varepsilon_n} - \int_s^t \bar{b}^{\varepsilon_n}(y, r) dr - \int_s^t \tilde{b}^{\varepsilon_n}(y, r) dr\right) \Psi^{\varepsilon_n}\right] = 0.$$

Pelo Lema 4.12 temos que $X_t^{\varepsilon_n} \rightarrow X_t$ fracamente. De acordo com a condição **(A2)(2)** e o Lema 4.16 obtemos

$$\int_s^t \bar{b}^{\varepsilon_n}(y, r) dr \longrightarrow \int_s^t \bar{b}(y, r) dr \quad \text{fracamente.}$$

Também pela condição **(A2)(3)** resulta que

$$\int_s^t \tilde{b}^{\varepsilon_n}(y, r) dr \longrightarrow 0 \quad \text{fracamente.}$$

Portanto

$$\mathbb{E}_{Q^{(0)}}\left[\left(X_t - X_s - \int_s^t \bar{b}(y, r) dr\right) \Psi\right] = 0.$$

Mas isto nos diz que $Y_t(y)$ é um martingale. □

No lema seguinte calculamos as variações quadráticas dos martingales encontrados.

Lema 4.19. *Com respeito a $Q^{(0)}$ temos*

- (i) $\langle M_t(x), M_t(y)^* \rangle = \int_0^t (a + \bar{a})(\Phi_r(x), \Phi_r(y), r) dr,$
- (ii) $\langle M_t(x), Y_t(y)^* \rangle = \int_0^t (a + \bar{a})(\Phi_r(x), y, r) dr,$
- (iii) $\langle Y_t(x), Y_t(y)^* \rangle = \int_0^t (a + \bar{a})(x, y, r) dr.$

Demonstração. Consideramos somente o caso quando $d = 1$ e mostramos unicamente (i) pois as provas de (ii), (iii) são análogas. Pela fórmula de Itô para a função $f(x, y) = xy$ temos

$$\begin{aligned} \Phi_t^\varepsilon(x) \Phi_t^\varepsilon(y) - \Phi_s^\varepsilon(x) \Phi_s^\varepsilon(y) &= \int_s^t \Phi_r^\varepsilon(x) d\Phi_r^\varepsilon(y) + \int_s^t \Phi_r^\varepsilon(y) d\Phi_r^\varepsilon(x) \\ &\quad + \langle \Phi_t^\varepsilon(x), \Phi_t^\varepsilon(y) \rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

Agora substituindo

$$\Phi_t^\varepsilon(x) = \int_0^t \tilde{b}^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon(x), r) dr + \int_0^t \bar{b}^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon(x), r) dr + \int_0^t Y^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon(x), r) dr,$$

na equação inicial, resultará aplicando a proposição 3.10 que

$$\begin{aligned} \Phi_t^\varepsilon(x) \Phi_t^\varepsilon(y) - \Phi_s^\varepsilon(x) \Phi_s^\varepsilon(y) &= \int_s^t \Phi_r^\varepsilon(x) \bar{b}^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon(y), r) dr + \int_s^t \Phi_r^\varepsilon(y) \bar{b}^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon(x), r) dr \\ &\quad + \int_s^t \Phi_r^\varepsilon(x) \tilde{b}^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon(y), r) dr + \int_s^t \Phi_r^\varepsilon(y) \tilde{b}^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon(x), r) dr \\ &\quad + \int_s^t a^\varepsilon(\Phi_r^\varepsilon(x), \Phi_r^\varepsilon(x), r) dr + \text{um martingale.} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Seja $\varepsilon_n \downarrow 0$ a mesma seqüência como no Lema 4.18. Então aplicando as condições **(A2)(1)** e **(A3)(6)**, e usando o Lema 4.16 tem-se

$$\int_s^t a_{\varepsilon_n}^\varepsilon(\Phi_r^{\varepsilon_n}(x), \Phi_r^{\varepsilon_n}(y), r) dr \longrightarrow \int_s^t a^\varepsilon(\Phi_r(x), \Phi_r(y), r) dr \quad \text{fracamente.}$$

Também pelo Lema 4.13 obtemos

$$\Phi_t^{\varepsilon_n}(x) \Phi_t^{\varepsilon_n}(y) - \Phi_s^{\varepsilon_n}(x) \Phi_s^{\varepsilon_n}(y) \longrightarrow \Phi_t(x) \Phi_t(y) - \Phi_s(x) \Phi_s(y) \quad \text{fracamente.}$$

Analogamente vemos que

$$\int_s^t \Phi_r^{\varepsilon_n}(x) \bar{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_r^{\varepsilon_n}(y), r) dr \longrightarrow \bar{b}(\Phi_r(y), r) dr \quad \text{fracamente.}$$

Logo consideramos o terceiro termo do lado direito de (4.11). Por aplicação da fórmula de Itô para a função $f(x, y) = x\tilde{b}^{\varepsilon_n}(y)$ e pelo Teorema 3.12 obtemos

$$\begin{aligned}\Phi_t^{\varepsilon_n}(x)\tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_r^{\varepsilon_n}(y), r) &= \Phi_s^{\varepsilon_n}(x)\tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_s^{\varepsilon_n}(y), r) + \int_s^r \Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(x) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(y), r) b^{\varepsilon_n}(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(y), \sigma) d\sigma \\ &\quad + \int_s^r b^{\varepsilon_n}(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(x), \sigma) \tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(y), r) d\sigma \\ &\quad + \int_s^r \frac{\partial}{\partial x} \tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(y), r) a^{\varepsilon_n}(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(x), \Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(y), \sigma) d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_s^r \Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(y), r) a^{\varepsilon_n}(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(y), \Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(y), \sigma) d\sigma \\ &\quad + \text{um martingale} \\ &= I_1^{\varepsilon_n}(r) + I_2^{\varepsilon_n}(r) + I_3^{\varepsilon_n}(r) + I_4^{\varepsilon_n}(r) + I_5^{\varepsilon_n}(r) + I_6^{\varepsilon_n}(r).\end{aligned}$$

Agora observamos que

$$\int_s^t I_1^{\varepsilon_n}(r) dr = \Phi_s^{\varepsilon_n}(x) \int_s^t \tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_s^{\varepsilon_n}(y), r) dr.$$

Então dado que $\Phi_s^{\varepsilon_n}$ e $\mathfrak{G}_s^{\varepsilon_n}$ -mensurável temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Phi_s^{\varepsilon_n}(x) \int_s^t \tilde{b}^{\varepsilon_n}(\Phi_s^{\varepsilon_n}(y), r) dr \mid \mathfrak{G}_s^{\varepsilon_n}\right] \\ = \Phi_s^{\varepsilon_n}(x) \mathbb{E}\left[\int_s^t \tilde{b}(z, r) dr \mid \mathfrak{G}_s^{\varepsilon_n}\right] \Big|_{z=\Phi_s^{\varepsilon_n}(y)} \\ \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Portanto pelo Lema 4.16 resulta que $I_1^{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ fracamente. Também, devido a

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t I_2^{\varepsilon_n}(r) dr \mid \mathfrak{G}_s^{\varepsilon_n}\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(x) c_\sigma^{\varepsilon_n}(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(y), t, \sigma) d\sigma \mid \mathfrak{G}_s^{\varepsilon_n}\right]$$

temos

$$\int_s^t I_2^{\varepsilon_n}(r) dr \longrightarrow \int_s^t \Phi_r(x) c(\Phi_r(y), r) dr \quad \text{fracamente.}$$

De maneira similar, vemos que

$$\int_s^t I_3^{\varepsilon_n}(r) dr \longrightarrow \int_s^t A(\Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(x), \Phi_\sigma^{\varepsilon_n}(y), \sigma) d\sigma \quad \text{fracamente,}$$

e por sua vez

$$\int_s^t I_k^{\varepsilon_n}(r) dr \longrightarrow 0 \quad \text{fracamente para } k = 4, 5, 6.$$

Portanto somando as convergências anteriores e considerando (4.11) temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_t(x)\Phi_t(y) - \Phi_s(x)\Phi_t(y) &- \int_s^t \Phi_r(x)\bar{b}(\Phi_r(y), r)dr \\
&- \int_s^t \Phi_r(y)\bar{b}(\Phi_r(x), r)dr - \int_s^t a(\Phi_r(x), \Phi_r(y), r)dr \\
&- \int_s^t \Phi_r(x)c(\Phi_r(y), r)dr - \int_s^t \Phi_r(y)c(\Phi_r(x), r)dr \\
&- \int_s^t \bar{a}(\Phi_r(x), \Phi_r(y), r)dr
\end{aligned} \tag{4.12}$$

é um martingale respeito de $Q^{(0)}$, isto é,

$$\begin{aligned}
\Phi_t(x)\Phi_t(y) - \Phi_s(x)\Phi_t(y) &- \int_s^t \Phi_r(x)(\bar{b}(\Phi_r(y), r) + c(\Phi_r(y), r))dr \\
&- \int_s^t \Phi_r(y)(\bar{b}(\Phi_r(x), r) + c(\Phi_r(x), r))dr \\
&- \int_s^t (a + \bar{a})(\Phi_r(x), \Phi_r(y), r)dr
\end{aligned}$$

é um $Q^{(0)}$ -martingale. De outro lado, considerando (4.10) vemos claramente que

$$\langle \Phi_t(x), \Phi_t(y) \rangle = \langle M_t(x), M_t(y) \rangle.$$

Substituindo (4.10) em (4.12) obtemos que

$$\int_s^t \Phi_r(x)dM_r(y) + \int_s^t \Phi_r(y)dM_r(x) - \int_s^t (a + \bar{a})(\Phi_r(x), \Phi_r(y), r)dr + \langle M_t(x), M_t(y) \rangle$$

é um $Q^{(0)}$ -martingale. Daí

$$\langle M_t(x), M_t(y)^* \rangle = \int_s^t (a + \bar{a})(\Phi_r(x), \Phi_r(y), r)dr,$$

como queríamos. □

Em seguida, fazemos a prova do Teorema 4.15 tendo por hipótese a condição **(A4)**.

Demonstração. (**Teorema 4.15 com a condição (A4)**). Com efeito, sejam $x_0^{(N)} = (x_{1^0}, \dots, x_{N^0}) \in \mathbb{R}^{N^d}$, $y_0^{(M)} = (y_{1^0}, \dots, y_{M^0}) \in \mathbb{R}^{M^d}$ dois pontos fixos, e para $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N) \in$

$\mathbb{R}^{Nd}$ e $\bar{y} = (y_1, \dots, y_M) \in \mathbb{R}^{Md}$ definimos o seguinte operador diferencial

$$\begin{aligned} L_{s, y_0}^{(N, M)} f(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{1}{2} \sum_{p, q=1}^N \sum_{i, j=1}^d (a + \bar{a})_{ij}(x_p, x_q, s) \frac{\partial^2}{\partial x_p^i \partial x_q^j} f(\bar{x}, \bar{y}) \\ &+ \sum_{i, p} \{ \bar{b}^i(x_p, s) + c^i(x_p, s) \} \frac{\partial}{\partial x_p^i} f(\bar{x}, \bar{y}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p, q} \sum_{i, j} (a + \bar{a})_{ij}(y_{p^0}, y_{q^0}, s) \frac{\partial^2}{\partial y_p^i \partial y_q^j} f(\bar{x}, \bar{y}) \\ &+ \sum_{i, p} \bar{b}^i(y_{p^0}, s) \frac{\partial}{\partial y_p^i} f(\bar{x}, \bar{y}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p, q} \sum_{i, j} (a + \bar{a})_{ij}(x_p, y_{q^0}, s) \frac{\partial^2}{\partial x_p^i \partial y_q^j} f(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

onde f é uma função real de classe C^2 . Aplicando a fórmula de Itô para f que tem derivadas limitadas, resultará usando os Lemas 4.18 e 4.19 que

$$f(\Phi_t, X_t) - \int_0^t L_{s, y_0}^{(N, M)} f(\Phi_s, X_s) ds$$

é um martingale respeito de $Q^{(0)}$. Pela arbitrariedade da função f temos que $Q^{(0)}$ é a solução do problema martingale para $L_{s, y_0}^{(N, M)}$ e portanto ela é única. Agora se mostra que $\{Q_{(x_0^{(N)}, y_0^{(M)})}^{(0)}\}_{(x_0^{(N)}, y_0^{(M)})}$ é uma família de medidas consistente. Portanto existe uma única medida de probabilidade $\mathbb{P}^{(0)}$ sobre W_{k-1}^2 tal que a lei de $(\Phi_t(x_0^{(N)}), X_t(y_0^{(M)}))$ com respeito a $\mathbb{P}^{(0)}$ é $Q_{(x_0^{(N)}, y_0^{(M)})}^{(0)}$. Também observamos que o Lema 4.19 é satisfeito respeito a $\mathbb{P}^{(0)}$. Portanto do Lema 4.18 temos que

$$X_t(x) = Y_t(x) + \int_0^t \bar{b}(y, r) dr$$

é um movimento Browniano que toma valores em C^{k-1} com características locais $(a + \bar{a}, \bar{b})$ (Lema 4.19).

Em seguida afirmamos que Φ_t é gerado por $X_t(x) + \int_0^t c(x, r) dr$. Com efeito, definimos

$$\widetilde{M}_t(x) = \int_0^t Y(\Phi_s, ds).$$

Pelo Teorema 3.12 e o Lema 4.19 resulta

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{M}_t(x), \widetilde{M}_t(y)^* \rangle &= \int_0^t (a + \bar{a})(\Phi_r(x), \Phi_r(y), r) dr \\ \langle M_t(x), \widetilde{M}_t(y)^* \rangle &= \int_0^t (a + \bar{a})(\Phi_r(x), \Phi_r(y), r) dr. \end{aligned}$$

Deste modo

$$\langle M_t(x) - \widetilde{M}_t(x), (M_t(y) - \widetilde{M}_t(y))^* \rangle = 0.$$

Mas isto implica que $M_t(x) = \widetilde{M}_t(x)$. Ou seja ,

$$\Phi_t(x) - \int_0^t (\bar{b}(\Phi_r(x), r) + c(\Phi_r(x), r)) dr = \int_0^t Y(\Phi_r(x), dr).$$

Assim

$$\Phi_t(x) = \int_0^t X(\Phi_r(x), dr) + \int_0^t c(\Phi_r(x), r) dr.$$

Portanto $\Phi_t(x)$ é gerado por $X_t(x) + \int_0^t c(x, r) dr$. $\square$

Prosseguimos mostrando o caso geral do Teorema 4.15.

Demonstração. (**Teorema 4.15 sem a condição (A4)**). Seja $\mathbb{P}^{(0)}$ a medida de probabilidade sobre W_{k-1}^2 satisfazendo (a) e (b) do Teorema 4.11. Então a lei de $(\Phi_t(x_0^{(N)}), X_t(y_0^{(M)}))$ respeito de $\mathbb{P}^{(0)}$ é $Q_{(x_0^{(N)}, y_0^{(M)})}^{(0)}$. Afirmamos que $Q^{(\varepsilon)} \rightarrow Q^{(0)}$ fracamente quando $\varepsilon \rightarrow 0$. De fato, isto se realizará em duas etapas:

Etapa 1. Aqui consideramos o processo truncado $\Psi_K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ para $K > 0$ definido por

$$\Psi_K(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } |x| \leq \frac{K}{2} \\ 0 & , \text{ se } |x| > K \end{cases}$$

e $0 \leq \Psi_K \leq 1$, a qual consideramos como uma função diferenciável. Ponhamos $X^{\varepsilon, K}(x, t) = X^\varepsilon(x, t)\Psi_K(x)$. Assim,

$$X^{\varepsilon, K}(x, t) = Y^\varepsilon(x, t)\Psi_K(x) + \int_0^t b^\varepsilon(x, r)\Psi_K(x) dr.$$

Como

$$\langle Y^\varepsilon(x, t)\Psi_K(x), (Y^\varepsilon(y, t)\Psi_K(y))^* \rangle = \int_0^t a^\varepsilon(x, y, r)\Psi_K(x)\Psi_K(y) dr$$

resulta as características locais de $X^{\varepsilon, K}$ são $a^\varepsilon(x, y, t)\Psi_K(x)\Psi_K(y)$ e $b^\varepsilon(x, t)\Psi_K(x)$ os quais claramente satisfazem a condição (A4). Daí, seja $\Phi_t^{\varepsilon, K}$ o fluxo gerado por $X^{\varepsilon, K}$ no sentido da integral de Itô, e denotemos por $Q^{(\varepsilon, K)}$ a lei do processo de $(N + M)$ -pontos $(\Phi_t^{\varepsilon, K}(x_0^{(N)}), X_t^{\varepsilon, K}(y_0^{(M)}))$. Então pelo Teorema 4.15 com a condição (A4) temos que $Q^{(\varepsilon, K)} \rightarrow Q^{(0, K)}$ fracamente. Agora comparamos as medidas $Q^{(0, K)}$ e $Q^{(0)}$. Observamos que se $|x_0^{(N)}| \leq \frac{K}{2}$ e $|y_0^{(M)}| \leq \frac{K}{2}$ e $A \in \mathcal{B}(V_N \times V_M)$ então

$$Q^{(0)}\left(A \cap \left\{\Phi : \|\Phi\| \leq \frac{K}{2}\right\}\right) = Q^{(0, K)}\left(A \cap \left\{\Phi : \|\Phi\| < \frac{K}{2}\right\}\right), \quad (4.13)$$

onde $\|\Phi\| = \sup_t \|\Phi_t\|$.

Etapa 2. Para mostrar a convergência fraca de $\{Q^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ basta provar que para qualquer subconjunto fechado S de $V_N \times V_M$ se verifica

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} Q^{(\varepsilon)}(S) \leq Q^{(0)}(S).$$

De fato, pela tightness de $\{Q^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ temos que $Q^{(\varepsilon_n)} \rightarrow Q^{(0)}$ fracamente ao longo de uma subsequência $\varepsilon_n \downarrow 0$. Assim para qualquer $\delta > 0$, existe um $K > 0$ tal que $Q^{(0)}(G_K) > 1 - \delta$, onde $G_K = \{\Phi : \|\Phi\| < \frac{K}{2}\}$. Então por (4.13)

$$Q^{(0,K)}(G_K) = Q^{(0)}(G_K) > 1 - \delta.$$

Dado que $Q^{(\varepsilon,K)} \rightarrow Q^{(0,K)}$ fracamente, temos que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} Q^{(\varepsilon,K)}(G_K) \geq Q^{(0)}(G_K).$$

Utilizando a definição de $\liminf$ resulta que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $\varepsilon < \varepsilon_0$, temos $Q^{(\varepsilon,K)}(G_K) > 1 - 2\delta$. Portanto

$$\begin{aligned} Q^{(\varepsilon)}(S) &= Q^{(\varepsilon)}(S \cap G_K) + Q^{(\varepsilon)}(S \cap G_K^c) \\ &\leq Q^{(\varepsilon,K)}(S \cap G_K) + Q^{(\varepsilon,K)}(G_K^c) \\ &\leq Q^{(\varepsilon,K)}(S \cap \overline{G}_K) + 2\delta. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} Q^{(\varepsilon)}(S) &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} Q^{(\varepsilon,K)}(S \cap \overline{G}_K) + 2\delta \\ &\leq Q^{(0,K)}(S \cap \overline{G}_K) + 2\delta \\ &\leq Q^{(0)}(S) + 2\delta. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de δ obtemos

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} Q^{(\varepsilon)}(S) \leq Q^{(0)}(S),$$

como queríamos. □

4.5 Tightness de processos a valores em espaços de Sobolev

Denotemos por $\mathbb{P}_{m,p}^{(\varepsilon)}$ a lei de $(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon)$ sobre $W_{m,p}^2 = (C([0, T]; H_{m,p}^{\text{loc}}))^2$ para $m \leq k-1$. Nesta seção estudaremos a tightness de $\{\mathbb{P}_{m,p}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$. Para o caso $m = 0$ consideramos o

processo truncado $(\Phi_t^{\varepsilon,K}, X_t^{\varepsilon,K})$ para algum $K > 0$, e denotamos a lei de dito processo por $\mathbb{P}_{m,p}^{(\varepsilon,K)}$. Agora, definimos uma função diferenciável $\tilde{\Psi}_K : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ por

$$\tilde{\Psi}_K(x) = \begin{cases} x & , \text{ se } |x| < \frac{K}{2} \\ 0 & , \text{ se } |x| > K \end{cases}$$

Logo ponhamos $\tilde{X}_t^{\varepsilon,K} = \tilde{\Psi}_K(X_t^{\varepsilon,K})$ e denotemos por $\tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(\varepsilon,K)}$ a lei de $(\Phi_t^{\varepsilon,K}, \tilde{X}_t^{\varepsilon,K})$. Deste modo, temos o seguinte resultado referente à tightness de $\{\tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(\varepsilon,K)}\}$.

Lema 4.20. $\{\tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(\varepsilon,K)}\}_{\varepsilon>0}$ é tight com respeito à topologia fraca de $W_{0,p}^2$ para qualquer $K > 0$ e $p > d$ ou $p > 3(2 - \frac{1}{\gamma})$.

Demonstração. Inicialmente vemos que pelo Lema 4.13 temos

$$\mathbb{E}[|\Phi_t^{\varepsilon,K}(x) - \Phi_s^{\varepsilon,K}(x)|^p] \leq L|t - s|^{2-\frac{1}{\gamma}} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d,$$

e

$$\mathbb{E}[|\Phi_t^{\varepsilon,K}(x)|^p] \leq L \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Assim, integrando as desigualdades de acima com respeito à medida de Lebesgue (λ) sobre a bola $B_n = \{x : |x| \leq n\}$ obtemos:

$$\int_{B_n} \mathbb{E}[|\Phi_t^{\varepsilon,K}(x) - \Phi_s^{\varepsilon,K}(x)|^p] d\lambda \leq \int_{B_n} L|t - s|^{2-\frac{1}{\gamma}} d\lambda$$

e

$$\int_{B_n} \mathbb{E}[|\Phi_t^{\varepsilon,K}(x)|^p] d\lambda \leq \int_{B_n} L d\lambda.$$

Pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_{B_n} |\Phi_t^{\varepsilon,K}(x)|^p d\lambda\right] &\leq L \text{vol}(B_n) |t - s|^{2-\frac{1}{\gamma}} \\ \mathbb{E}\left[\int_{B_n} |\Phi_t^{\varepsilon,K}(x)|^p d\lambda\right] &\leq L \text{vol}(B_n). \end{aligned}$$

Mas por definição de seminormas em $H_{m,p}^{\text{loc}}$ resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\Phi_t^{\varepsilon,K} - \Phi_s^{\varepsilon,K}\|_{0,p,n}^p] &\leq L \text{vol}(B_n) |t - s|^{2-\frac{1}{\gamma}}, \\ \mathbb{E}[\|\Phi_t^{\varepsilon,K}\|_{0,p,n}^p] &\leq L \text{vol}(B_n). \end{aligned}$$

De maneira similar, usando o Lema 4.12, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\tilde{X}_t^{\varepsilon,K} - \tilde{X}_s^{\varepsilon,K}\|_{0,p,n}^p] &\leq L \text{vol}(B_n) |t - s|^{2-\frac{2}{\gamma}}, \\ \mathbb{E}[\|\tilde{X}_t^{\varepsilon,K}\|_{0,p,n}^p] &\leq L \text{vol}(B_n). \end{aligned}$$

Portanto, pela proposição 4.8 tem-se que $\{\tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(\varepsilon,K)}\}_{\varepsilon>0}$ é tight respeito da topologia fraca.

□

Consideremos a medida de probabilidade $\mathbb{P}_{k-1}^{(0,K)}$ sobre o espaço W_{k-1}^2 com características locais $a(x, y, t)\Psi_K(x)\Psi_K(y)$ e $b(x, t)\Psi_K(x)$, onde $\Psi_K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável definida por

$$\Psi_K(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } |x| \leq \frac{K}{2} \\ 0 & , \text{ se } |x| > K \end{cases}$$

e $0 \leq \Psi_K \leq 1$. Para $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N$ definimos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_{k-1}^{(0,K)}(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_N} \in A_N, \Phi_{t_1} \in B_1, \dots, \Phi_{t_N} \in B_N) \\ = \mathbb{P}_{k-1}^{(0,K)}(\tilde{\Psi}_K(X_{t_1}) \in A_1, \dots, \tilde{\Psi}_K(X_{t_N}) \in A_N, \Phi_{t_1} \in B_1, \dots, \Phi_{t_N} \in B_N). \end{aligned}$$

Como vimos na primeira seção deste capítulo, a medida $\tilde{\mathbb{P}}_{k-1}^{(0,K)}$ sobre W_{k-1}^2 pode ser estendida a uma medida $\tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(0,K)}$ sobre $W_{0,p}^2$. O seguinte lema nos mostra a convergência fraca de $\{\tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(\varepsilon,K)}\}_{\varepsilon>0}$.

Lema 4.21. *A família de medidas de probabilidades $\{\tilde{\mathbb{P}}_{k-1}^{(\varepsilon,K)}\}_{\varepsilon>0}$ converge fracamente a $\{\tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(0,K)}\}_{\varepsilon>0}$ com respeito da topologia fraca de $W_{0,p}^2$.*

Demonstração. Fixamos N e tomamos $t_1 < t_2 < \dots < t_N$. Da convergência fraca do processo de $(N + M)$ -pontos temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}_{k-1}^{(\varepsilon,K)}[\Phi_{t_1}(x_1) \dots \Phi_{t_N}(x_N)] = \mathbb{E}_{k-1}^{(0,K)}[\Phi_{t_1}(x_1) \dots \Phi_{t_N}(x_N)], \quad (4.14)$$

onde, $\Phi_{t_i}(x_i) = \prod_{k=1}^d \Phi_{t_i}^k(x_i)$, $i = 1, \dots, N$. Sejam $\eta_1(x), \dots, \eta_N(x) \in L^q(B_n)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Assim multiplicando ambos lados de (4.14) e integrando sobre a bola B_n , obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}_{k-1}^{(\varepsilon,K)}[(\Phi_{t_1}, \eta_1)(\Phi_{t_2}, \eta_2) \dots (\Phi_{t_N}, \eta_N)] \\ = \mathbb{E}_{k-1}^{(0,K)}[(\Phi_{t_1}, \eta_1)(\Phi_{t_2}, \eta_2) \dots (\Phi_{t_N}, \eta_N)]. \end{aligned}$$

De maneira análoga se mostra que para $\alpha_1, \dots, \alpha_N > 0$, $\beta_1, \dots, \beta_M > 0$, $\zeta_1, \dots, \zeta_M \in L^q(B_n)$ que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}_{k-1}^{(\varepsilon,K)}[(\Phi_{t_1}, \eta_1)^{\alpha_1} \dots (\Phi_{t_N}, \eta_N)^{\alpha_N} (\tilde{\Psi}_K(X_{t_1}), \zeta_1)^{\beta_1}, \dots, (\tilde{\Psi}_K(X_{t_M}), \zeta_M)^{\beta_M}] \\ = \mathbb{E}_{k-1}^{(0,K)}[(\Phi_{t_1}, \eta_1)^{\alpha_1} \dots (\Phi_{t_N}, \eta_N)^{\alpha_N} (\tilde{\Psi}_K(X_{t_1}), \zeta_1)^{\beta_1}, \dots, (\tilde{\Psi}_K(X_{t_M}), \zeta_M)^{\beta_M}] \\ = \mathbb{E}_{k-1}^{(0,K)}[(\Phi_{t_1}, \eta_1)^{\alpha_1} \dots (\Phi_{t_N}, \eta_N)^{\alpha_N} (X_{t_1}, \zeta_1)^{\beta_1} \dots (X_{t_M}, \zeta_M)^{\beta_M}]. \end{aligned}$$

Pela extensão vista antes deste lema, observe que $\tilde{\mathbb{P}}_{k-1}^{(\varepsilon,K)}$ pode ser substituído por $\tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(\varepsilon,K)}$, etc. e portanto obtemos que $\tilde{\mathbb{P}}_{k-1}^{(\varepsilon,K)} \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(0,K)}$ com respeito a topologia fraca, como queríamos. $\square$

Proposição 4.22. $\{\mathbb{P}_{0,p}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ converge fracamente.

Demonstração. Inicialmente comparamos $\mathbb{P}_{0,p}^{(0)}$ com $\tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(0,K)}$. Sejam $A \in \mathcal{B}(W_{0,p}^2)$ e $|x| < \frac{K}{2}$. Então

$$\tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(0,K)}(A \cap \{\Phi : |||\Phi|||_{0,p,N} < \frac{K}{2}\}) = \mathbb{P}_{0,p}^{(0)}(A \cap \{\Phi : |||\Phi|||_{0,p,N} < \frac{K}{2}\}). \quad (4.15)$$

Para mostrar a convergência fraca de $\{\mathbb{P}_{0,p}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ basta mostrar que para qualquer fechado S de $W_{0,p}^2$ temos que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_{0,p}^{(\varepsilon)}(S) \leq \mathbb{P}_{0,p}^{(0)}(S).$$

De fato se $G_K = \{\Phi : |||\Phi|||_{0,p,N} < \frac{K}{2}\}$, então para qualquer $\delta > 0$ existe um $K > 0$ tal que $\mathbb{P}_{0,p}^{(0)}(S) > 1 - \delta$. Agora, devido a (4.15)

$$\tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(0,K)}(G_K) = \mathbb{P}_{0,p}^{(0)}(G_K) > 1 - \delta.$$

Pelo Lema 4.21 $\tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(\varepsilon,K)} \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(0,K)}$ fracamente. Assim $\liminf \tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(0,K)}(G_K) \leq \tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(0,K)}(G_K) = \mathbb{P}_{0,p}^{(0)}(G_K)$. Por definição de $\liminf$ existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $\varepsilon < \varepsilon_0$ temos $\tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(\varepsilon,K)}(G_K) > 1 - 2\delta$. Portanto temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{0,p}^{(\varepsilon)}(S) &= \mathbb{P}_{0,p}^{(\varepsilon)}(S \cap G_K) + \mathbb{P}_{0,p}^{(\varepsilon)}(S \cap G_K^c) \\ &\leq \tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(\varepsilon,K)}(S \cap G_K) + \tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(\varepsilon,K)}(G_K^c) \\ &\leq \tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(\varepsilon,K)}(S \cap \overline{G_K}) + 2\delta. \end{aligned}$$

Desta forma obtemos que

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_{0,p}^{(\varepsilon)}(S) &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(\varepsilon,K)}(S \cap \overline{G_K}) + 2\delta \\ &\leq \tilde{\mathbb{P}}_{0,p}^{(0,K)}(S \cap \overline{G_K}) + 2\delta \\ &\leq \mathbb{P}_{0,p}^{(0)}(S) + 2\delta. \end{aligned}$$

Daqui, se fazemos δ convergir para 0 (pois δ é arbitrário) temos

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_{0,p}^{(\varepsilon)}(S) \leq \mathbb{P}_{0,p}^{(0)}(S).$$

Portanto $\{\mathbb{P}_{0,p}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ converge fracamente. □

Com a finalidade de mostrar o Teorema Limite de Kunita enunciamos e mostramos o seguinte teorema.

Teorema 4.23. *Assumamos as condições $(A2)_k$, $(A3)_k$, $k \geq 2$. Então $\{\mathbb{P}_{k-2,p}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ é tight com respeito a topologia fraca de $W_{k-2,p}^2$.*

Demonstração. Consideremos o sistema de equações para $D^\alpha \Phi_t^\varepsilon$, $|\alpha| \leq k-2$, e denotemos $D^\alpha \Phi_t^\varepsilon = {}^\alpha \Phi_t^\varepsilon$, e por sua vez consideremos $\Phi_t^\varepsilon = ({}^\alpha \Phi_t^\varepsilon, |\alpha| \leq k-2)$,

$$\begin{aligned} d\Phi_t^\varepsilon &= X^\varepsilon(\Phi_t^\varepsilon, dt) \\ d^\alpha \Phi_t^\varepsilon &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} X^\varepsilon(\Phi_t^\varepsilon, dt) ({}^\alpha \Phi_t^\varepsilon)^i, \quad |\alpha| = 1, \end{aligned}$$

etc. Com notação de um vetor temos que

$$d\Phi_t^\varepsilon = \underline{X}^\varepsilon(\Phi_t^\varepsilon, dt)$$

onde

$$\underline{X}^\varepsilon(x, t) = \left(X^\varepsilon(x, t), \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} X^\varepsilon(x, t) x_\beta^i, \dots \right), \quad \underline{x} = (x, x_\beta, \dots).$$

Agora, observamos (por hipótese) que as coordenadas de $(\Phi_t^\varepsilon, \underline{X}_t^\varepsilon)$ verificam as condições $(A2)_2$ e $(A3)_2$. Portanto a lei de $(\Phi_t^\varepsilon, \underline{X}_t^\varepsilon)$, ou seja, $\mathbb{P}_{0,p}^{(\varepsilon)}$ sobre $\underline{W}_{0,p}^{(\varepsilon)}$ também verificam $(A2)_2$ e $(A3)_2$. Desta maneira a família de probabilidades $\{\mathbb{P}_{0,p}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ é tight em $\underline{W}_{0,p}^{(\varepsilon)}$ respeito à topologia fraca, mas isto é equivalente à tightness de $\{\mathbb{P}_{k-2,p}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$, como queríamos. $\square$

Observação 4.24. *De acordo com a Proposição 4.9 a família de medidas de probabilidades $\{\mathbb{P}_{k-3}^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ é tight em W_{k-3}^2 .*

4.6 Prova do Teorema Limite de Kunita

A convergência fraca de $\{\mathbb{P}_m^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ para $(m \leq k-3)$ já esta mostrada, como consequência direta da Proposição 4.5. Assim, só falta mostrar a convergência forte de Φ_t^ε tendo como hipótese que X_t^ε converge fortemente para X_t^0 . De fato, consideramos a equação diferencial estocástica dado por

$$d\Phi_t^0 = X^0(\Phi_t^0, dt) + c(\Phi_t^0, t)dt, \quad \Phi_0^0 = x. \quad (4.16)$$

Agora denotemos por $\Phi_t^0(x)$ a solução de (4.16). Também, para $m \leq k-3$ denotemos por $\tilde{\mathbb{P}}_m^{(\varepsilon)}$ a lei de $(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon, \Phi_t^0, X_t^0)$ definido sobre $W_m^2 \times \widetilde{W}_m^2$ (onde $\widetilde{W}_m^2$ é o mesmo que W_m^2). Um elemento de $\widetilde{W}_m^2$ será denotado como $(\tilde{\Phi}, \tilde{X})$. Mostraremos que $\{\tilde{\mathbb{P}}_m^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$

converge fracamente para algum $\tilde{\mathbb{P}}_m^{(0)}$. Com efeito, dado que $\{\tilde{\mathbb{P}}_m^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ é tight, seja $\tilde{\mathbb{P}}_m^{(0)}$ um ponto limite qualquer de $\{\tilde{\mathbb{P}}_m^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$. Daqui resulta que $\tilde{\mathbb{P}}_m^{(0)}|_{W_m^2} = \mathbb{P}_m^{(0)}$. Agora, pela primeira afirmação do teorema temos que Φ_t é gerado por $X_t + \int_0^t c(x, r)dr$. Também que $X_t = \tilde{X}_t$ a.s. pois $X_t^\varepsilon \rightarrow X_t^0$ fortemente respeito a $\tilde{\mathbb{P}}_m^{(0)}$. Então $\Phi_t = \tilde{\Phi}_t$ a.s. com respeito a $\tilde{\mathbb{P}}_m^{(0)}$ pela unicidade da solução, isto é, que $\tilde{\mathbb{P}}_m^{(0)}$ tem suporte no conjunto diagonal $\{(\Phi, X, \tilde{\Phi}, \tilde{X}) : \Phi = \tilde{\Phi}, X = \tilde{X}\}$. Em seguida, seja ρ_m a métrica sobre W_m^2 , isto é, para $(\Phi, \Psi) \in C([0, T]; C^m) \times C([0, T]; C^m)$

$$\rho_m(\Phi, \Psi) = \sum_N \frac{1}{2^N} \frac{|||\Phi - \Psi|||_{m,N}}{1 + |||\Phi - \Psi|||_{m,N}}$$

a qual é uma função contínua limitada sobre $W_m^2 \times \widetilde{W}_m^2$. Portanto resulta que

$$\mathbb{E}[\rho_m(\Phi^\varepsilon, \Phi^0)] = \tilde{\mathbb{E}}_m^{(\varepsilon)}[\rho_m(\Phi, \tilde{\Phi})] \longrightarrow \mathbb{E}_m^{(0)}[\rho_m(\Phi, \tilde{\Phi})] = 0,$$

devido a que $\rho_m(\Phi, \tilde{\Phi}) = 0$ a.s.. Assim $\Phi^\varepsilon \rightarrow \Phi^0$ fortemente, como queríamos.

4.7 Aproximação de Equações Diferenciais Estocásticas

Seja $v^\varepsilon(t, \omega) = (v_1^\varepsilon(t, \omega), \dots, v_r^\varepsilon(t, \omega))$ um processo estocástico contínuo e diferenciável por partes, r -dimensional tal que $\mathbb{E}[v_i^\varepsilon(t)] = 0$ para $i = 1, \dots, r$. Agora sejam $F_k(x, t), k = 0, 1, \dots, r$ funções contínuas, C^∞ com respeito a x e com derivadas limitadas. Consideremos a equação diferencial ordinária estocástica

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^r F_i(x, t)v_i^\varepsilon(t) + F_0(x, t).$$

Denotemos por $\Phi_{s,t}^\varepsilon(x)$ sua solução começando em x no tempo s .

Problema 4.25. Se $\{v_i^\varepsilon(t)\}_{\varepsilon>0}$ converge para um "ruído branco", ou mais precisamente se $B^\varepsilon(t) = \int_0^t v^\varepsilon(s)ds$ converge para um movimento Browniano $B_t = (B_1(t), \dots, B_r(t))$ fracamente ou fortemente, então $\Phi_t^\varepsilon (= \Phi_{0,t}^\varepsilon)$ converge para um fluxo Browniano Φ_t fracamente ou fortemente, e o fluxo limite satisfaz a equação diferencial estocástica dada por

$$d\Phi_t = \sum_{l=1}^r F_l(\Phi_t, t) \circ dB_l(t) + F_0(\Phi_t, t)dt. \quad (4.17)$$

Observe que a solução do problema anterior não é sempre afirmativa, pois em alguns casos se apresenta um termo adicional no lado direito de (4.17) (um tal exemplo pode ser achado em [8]). Assim, para dar uma solução ao problema consideramos a seguinte condição.

Condição A1. Seja $\mathfrak{G}_t^\varepsilon = \sigma(v^\varepsilon(s) : 0 \leq s \leq t)$.

- (a) $\int_s^t |\mathbb{E}[v_i^\varepsilon(r) | \mathfrak{G}_s^\varepsilon]| dr \rightarrow 0$ uniformemente em s, t no sentido de L^2 .
- (b) $\mathbb{E}[\int_s^t v_i^\varepsilon(\tau) d\tau \int_s^\tau v_i^\varepsilon(\sigma) d\sigma | \mathfrak{G}_s^\varepsilon] \rightarrow \int_s^t v_{ij}(r) dr$ uniformemente em s, t , onde v_{ij} é uma função mensurável determinística.
- (c) Existem constantes $\gamma > 1$ e $K > 0$ tais que

$$\mathbb{E}[\int_s^t |\mathbb{E}[v_i^\varepsilon(r) | \mathfrak{G}_s^\varepsilon]| dr | v_j^\varepsilon(s)|^\gamma] \leq K.$$

Observação 4.26. *Notemos que:*

- (i) (a) e (b) mostram que $\{B_t^\varepsilon(t) = \int_0^t v^\varepsilon(s) ds\}$ converge a um martingale de média zero e com variação quadrática $\int_s^t (v_{ij}(r) + v_{ji}(r)) dr$. Portanto o limite $B(t)$ será um movimento Browniano com média zero e covariância igual à variação quadrática.
- (ii) (c) assegura a tightness da lei $(B_t^\varepsilon(t), \Phi_t^\varepsilon(x))$. Dado que $v^\varepsilon(t)$ converge ao ruído branco então seu momento diverge. A condição também (c) indica que a proporção de divergência de $v^\varepsilon(t)$ e convergência de $\int_s^t |\mathbb{E}[v^\varepsilon(r) | \mathfrak{G}_s^\varepsilon]| ds$ são equilibradas no seguinte sentido: se o momento de $v^\varepsilon(t)$ esta dado por $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, então o momento de $\int_s^t |\mathbb{E}[v^\varepsilon(r) | \mathfrak{G}_s^\varepsilon]| ds$ é $\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$

Agora enunciamos o resultado principal desta seção. Seja $W_m = C([0, T]; C^m)$, $V^r = C([0, T]; \mathbb{R}^r)$ e denotemos por $\mathbb{P}_m^{(\varepsilon)}$ a lei de $(\Phi^\varepsilon, B^\varepsilon)$ definido sobre $W_m \times V^r$.

Teorema 4.27. *Assumimos a condição (A1). Então $\{\mathbb{P}_m^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ converge fracamente para qualquer $m \geq 0$. A medida limite $\mathbb{P}_m^{(0)}$ tem as seguintes propriedades:*

- (i) $B(t)$ é um movimento Browniano r -dimensional com média zero e covariância $\int_s^t (v_{ij}(r) + v_{ji}(r)) dr$.
- (ii) Φ_t satisfaz

$$\begin{aligned} d\Phi_t &= \sum_{l=1}^r F_l(\Phi_t, t) \circ dB_l(t) + F_0(\Phi_t, t) dt \\ &+ \sum_{1 \leq l \leq m \leq r} S_{l,m}[F_l, F_m](\Phi_t, t) dt, \end{aligned}$$

onde $\circ dB$ indica a integral de Stratonovich e $S_{l,m} = \frac{1}{2}(v_{lm} - v_{ml})$,

$$[F_l, F_m]^k(x, t) = \sum_{i=1}^d F_l^i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} F_m^k(x, t) - \sum_{i=1}^d F_m^i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} F_l^k(x, t).$$

Além disso, se $\{B^\varepsilon(t)\}$ converge fortemente a $B(t)$ então $\{\Phi_t^\varepsilon\}$ converge fortemente a Φ_t .

Antes de considerar a prova desse teorema, o ilustramos com alguns exemplos.

Exemplo 4.28. Aproximação poligonal do movimento Browniano.

Seja $B(t) = (B_1(t), \dots, B_r(t))$ um movimento Browniano r -dimensional. Consideramos

$$v_l^\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \Delta_k^\varepsilon B_l \quad \text{se} \quad \varepsilon k \leq t < \varepsilon(k+1)$$

onde

$$\Delta_k^\varepsilon B_l = B_l(\varepsilon(k+1)) - B_l(\varepsilon k).$$

Então

$$B_l^\varepsilon(t) = \int_0^t v_l^\varepsilon(s) ds$$

é uma função poligonal de t e que converge a $B_l(t)$ uniformemente em t quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pois então $B^\varepsilon(t) \rightarrow B(t)$ uniformemente em t quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Em seguida verificamos que se cumpre a condição (A1). De fato, devido a que $v^\varepsilon(t)$ e $v^\varepsilon(s)$ são independentes se $|t - s| > \varepsilon$ (por definição), resulta

$$\left| \int_s^t |\mathbb{E}[v_l^\varepsilon(u) | \mathfrak{G}_s^\varepsilon]| du \right| \leq |\Delta_k^\varepsilon B_l| \quad \text{se} \quad \varepsilon k \leq t < \varepsilon(k+1).$$

A variância de $\Delta_k^\varepsilon B_l$ é ε por ser B_l um movimento Browniano. Portanto $\text{var}(\Delta_k^\varepsilon B_l)$ converge para zero. Desta forma (a) é satisfeito. Além disso, observamos que $\text{var}(v_j^\varepsilon(s)) = \frac{1}{\varepsilon}$.

Assim

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_s^t |\mathbb{E}[v_i^\varepsilon(u) | \mathfrak{G}_s^\varepsilon]| du \right|^2 |v_j^\varepsilon(u)|^2 \right] \leq (3\varepsilon^2 \cdot 3 \frac{1}{\varepsilon^2})^{\frac{1}{2}} = 3.$$

Então obtemos (c). Mais ainda, vemos que

$$\mathbb{E} \left[\int_s^t v_i^\varepsilon(\tau) d\tau \int_s^\tau v_j^\varepsilon(\sigma) d\sigma \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon \right] \longrightarrow \int_s^t \frac{\delta_{ij}}{2} dr,$$

o qual verifica (b). Desta maneira $S_{l,m} = 0$. Portanto, o Teorema 4.27 é valido para qualquer aproximação poligonal.

Exemplo 4.29. Aproximação de Mollifiers (Malliavin).

Sejam $B(t) = (B_1(t), \dots, B_r(t))$ um movimento Browniano r -dimensional e Φ uma função C^∞ não-negativa cujo suporte está contido em $[0, 1]$ e $\int_0^1 \Phi(s) ds = 1$. Consideremos

$$\Phi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \Phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

e

$$B^\varepsilon(t) = \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(s-t) B(s) ds = \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(s) B(s+t) ds.$$

Então

$$B^\varepsilon(t) \longrightarrow B(t) \quad \text{uniformemente em } t.$$

Definimos

$$v^\varepsilon(t) = - \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(s-t) B(s) ds.$$

Deste modo

$$\int_s^t |\mathbb{E}[v^\varepsilon(u) | \mathfrak{G}_s^\varepsilon]| du = \int_s^{s+\varepsilon} |\mathbb{E}[v^\varepsilon(u) | \mathfrak{G}_s^\varepsilon]| du,$$

desde que $v^\varepsilon(u)$ é independente de $\mathfrak{G}_s^\varepsilon$ se $u > s + \varepsilon$. Além disso

$$\text{var}(v^\varepsilon(u)) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \Phi(s)^2 ds.$$

Portanto temos

$$\text{var}\left(\int_s^{s+\varepsilon} v^\varepsilon(u) du\right) \leq \varepsilon.$$

Assim, como no exemplo anterior, verificamos a condição **(A1)** (ou seja (a), (b) e (c) onde para (b) temos $v_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$).

Em seguida discutimos a prova do teorema de aproximação para equações diferenciais estocásticas. Como sabemos

$$\frac{d\Phi_t^\varepsilon}{dt} = \sum_{i=1}^r F_i(\Phi_t^\varepsilon, t) v_i^\varepsilon(t) + F_0(\Phi_t^\varepsilon, t).$$

Agora para provar o Teorema 4.27 precisamos do seguinte lema.

Lema 4.30. Assumimos a condição **(A1)**. Então para funções quaisquer $f(x, t)$ e $g(x, t)$ sobre $\mathbb{R}^d \times [0, T]$

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t f(x, \tau) v_i^\varepsilon(\tau) d\tau \int_s^\tau g(y, \sigma) v_j^\varepsilon(\sigma) d\sigma \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon\right] \rightarrow \int_s^t f(x, r) g(y, r) v_{ij}(r) dr$$

uniformemente sobre conjuntos compactos.

Demonstração. Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções mensuráveis limitadas. Então

$$\left| \mathbb{E} \left[\int_s^t f(\tau) v_i^\varepsilon(\tau) d\tau \int_s^\tau g(\sigma) v_j^\varepsilon(\sigma) d\sigma \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon \right] \right| \leq K \|f\| \|g\| |t - s|. \quad (4.18)$$

Agora por (A1)(c) obtemos

$$\left| \mathbb{E} \left[\int_s^t \left(\int_\sigma^t f(\tau) \mathbb{E}[v_i^\varepsilon(\tau) \mid \mathfrak{G}_\sigma^\varepsilon] d\tau \right) g(\sigma) v_j^\varepsilon(\sigma) d\sigma \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon \right] \right| \leq K^{\frac{1}{\gamma}} \|f\| \|g\| |t - s|.$$

Segundo (4.18) basta provar o caso quando $f(x, t)$ e $g(x, t)$ são funções escada de t . Assim assumimos que

$$f(x, t) = f(x, t_i), \quad g(x, t) = g(x, t_i) \quad \text{para} \quad t_i \leq t < t_{i+1}.$$

Desta maneira

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_s^t f(x, \tau) v_i^\varepsilon(\tau) d\tau \int_s^\tau g(y, \sigma) v_j^\varepsilon(\sigma) d\sigma \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon \right] \\ &= \sum_k f(x, t_k) g(y, t_k) \mathbb{E} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} v_i^\varepsilon(\tau) d\tau \int_{t_k}^\tau v_j^\varepsilon(\sigma) d\sigma \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon \right] \\ &+ \sum_k f(x, t_k) \mathbb{E} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} v_i^\varepsilon(\tau) d\tau \int_s^{t_k} g(y, \sigma) v_j^\varepsilon(\sigma) d\sigma \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon \right] \\ &= I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} I_1^\varepsilon &\longrightarrow \sum_k f(x, t_k) g(y, t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} v_{ij}(r) dr \\ &= \int_s^t f(x, r) g(y, r) v_{ij}(r) dr, \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. De maneira similar

$$\begin{aligned} I_2^\varepsilon &= \sum_k f(x, t_k) \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} v_i^\varepsilon(\tau) d\tau \mid \mathfrak{G}_{t_k}^\varepsilon \right] \int_s^{t_k} g(y, \sigma) v_j^\varepsilon(\sigma) d\sigma \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon \right] \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto

$$\mathbb{E} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} v_i^\varepsilon(\tau) d\tau \mid \mathfrak{G}_{t_k}^\varepsilon \right] \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

□

Demonstração. Prova do Teorema de Aproximação. De acordo com o teorema do limite de Kunita temos que verificar as condições $(A2)_k$ e $(A3)_k$. Assim, observamos que

$$\begin{aligned} b^\varepsilon(x, t) &= \sum_{k=1}^r F_k(x, t) v_k^\varepsilon(t) + F_0(x, t), \\ \bar{b}^\varepsilon(x, t) &= F_0(x, t), \quad \tilde{b}^\varepsilon(x, t) = \sum_{k=1}^r F_k(x, t) v_k^\varepsilon(t), \\ A_{ij}^\varepsilon(x, y, t, r) &= \sum_{k,l} \mathbb{E} \left[\int_r^t F_l^i(x, \tau) v_l^\varepsilon(\tau) d\tau \mid \mathfrak{G}_r^\varepsilon \right] F_k^j(y, r) v_k^\varepsilon(r). \end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_s^t A_{ij}^\varepsilon(x, y, t, r) dr \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon \right] &= \sum_{k,l} \mathbb{E} \left[\int_s^t d\tau F_l^i(x, \tau) v_l^\varepsilon(\tau) \int_s^\tau F_k^j(y, \sigma) v_k^\varepsilon(\sigma) d\sigma \mid \mathfrak{G}_s^\varepsilon \right] \\ &\longrightarrow \sum_{k,l} \int_s^t F_l^i(x, r) F_k^j(y, r) v_{ij}(r) dr \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Da mesma forma mostramos $(A3)_k$. Agora, denotemos por $\tilde{\mathbb{P}}_m^{(\varepsilon)}$ a lei de $(\Phi_t^\varepsilon, X_t^\varepsilon, B_t^\varepsilon)$ definido sobre $W_m^2 \times V_r$. Então como fizemos anteriormente se mostra que $\{\tilde{\mathbb{P}}_m^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ converge fracamente a $\tilde{\mathbb{P}}_m^{(0)}$. Portanto, pelo teorema 4.11 $((\Phi_t, X_t, B_t), \tilde{\mathbb{P}}_m^{(0)})$ satisfaz:

(i) X_t é um C -movimento Browniano com características locais

$$a_{ij}(x, y, t) = F_l^i(x, t) F_k^j(y, t) \bar{v}_{ij}(t)$$

onde $\bar{v}_{ij} = v_{ij} + v_{ji}$, $b(x, t) = F_0(x, t)$.

(ii) Φ_r é gerado por $X_t + \int_0^t c(x, r) dr$, onde

$$c^j(x, t) = \sum_{l,k,i} \frac{\partial}{\partial x_i} F_l^j(x, t) F_k^i(x, t) v_{kl}(t),$$

e $B(t)$ é um movimento Browniano com média zero e variância $\int_0^t \bar{v}_{ij}(r) dr$. Note que como em 4.19 se mostra que

$$\langle X_t(x), B_k(t) \rangle = \sum_k \int_0^t F_l(x, r) \bar{v}_{lk}(r) dr.$$

Em seguida consideramos

$$\tilde{X}_t(x) = \sum_{k=1}^r \int_0^t F_k(x, s) dB_k(s) + \int_0^t F_0(x, s) ds.$$

Daí vemos que $\langle X_t - \tilde{X}_t \rangle = 0$ o que implica $X_t = \tilde{X}_t$. Desta maneira

$$d\Phi_t = \sum_{k=1}^r F_k(\Phi_t, t) dB_k(t) + c(\Phi_t, t) dt$$

respeito de $\mathbb{P}_m^{(0)}$. Considerando a mudança de Itô para Stratonovich (no sentido da integral) temos

$$\begin{aligned} \int_0^t F_k(\Phi_s(x), s) \circ dB_k(s) &= \int_0^t F_k(\Phi_s(x), s) dB_k(s) + \frac{1}{2} \sum_{l,i} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} F_k(\Phi_s(x), s) \times \\ &\quad F_l^i(\Phi_s(x), s) \bar{v}_{k,l}(s) ds. \end{aligned}$$

Também observe que

$$\begin{aligned} c^j(x, s) &- \frac{1}{2} \sum_{k,l,i} \frac{\partial}{\partial x_i} F_k^j(x, s) F_l^i(x, s) \bar{v}_{k,l}(s) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k \leq l \leq r} (v_{kl}(s) - v_{lk}(s)) [F_k, F_l]^j(x, s). \end{aligned}$$

Assim combinando os resultados de acima obtemos o resultado. □

Referências Bibliográficas

- [1] D.W. Stroock, *Topics in stochastic differential equations*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1982.
- [2] H. Kunita, *Stochastic flows and stochastic differential equations*, Cambridge university press, 1986.
- [3] H. Kunita, *Lectures on Stochastic flows and applications*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, Springer Verlag, Berlin. 1986.
- [4] H. Kesten - G.C. Papanicolau *A limit theorem for turbulent diffusion*, Commun. Math. Phys. 65(1979), 97 - 128.
- [5] I. Karatzas - S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag-1988.
- [6] K. R. Parthasarathy, *Probability measures on metrics spaces*, The university of Sheffield, England, 1967.
- [7] N. Ikeda - S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland/Kodansha, 1981.
- [8] N. Ikeda - S. Nakao - Y. Yamato, *A class of approximations of Brownian motion*, RIMS, Kyoto Univ. 13, 285 - 300, 1977.
- [9] P. Baxendale, *Brownian motions in the diffeomorphisms Group*, I. Composito Mathematica, 53(1984), 19 - 50.
- [10] P. Billingsley, *Convergência of probability measures*, John Wiley and Sons, New York, 1968.
- [11] P. Catuogno, *Notas de aula do curso de Tópicos em Cálculo Estocástico*. 2010.

- [12] S. L. Sobolev, *Application of functional analysis in mathematical physics*, Amer. Math. Society, 1963.
- [13] T.E. Harris, *Brownian motions in the diffeomorphisms of the plane*, Ann. Prob. 9(1981), 232 - 254.
- [14] Y. Le Jan, *Flots de diffusions dans $\mathbb{R}^d$* , C.R. Acad. Sci Paris 294(1982), Serie I, 697 - 699.