

CÁLCULO NUMÉRICO DE ZEROS
DE POLINÔMIOS

MARIÂNGELA AMENDOLA

ORIENTADOR
JOSÉ VITÓRIO ZAGO

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

JULHO 1980

Ao Sinibaldo e à Victória

AGRADEÇO

Ao ZAGO, pela orientação nesta pesquisa.

Ao Mestre e Amigo LUIZ GALANTE, a quem tomo como exemplo, pelo estímulo desde os meus primeiros passos na Matemática.

Ao Tio MARTINEZ, pelo incentivo e ajuda permanente.

Ao MARCOS, RÔ e ANTONIO CARLOS, que me ajudaram em diferentes etapas deste trabalho.

Ao Pessoal da Biblioteca, pela ajuda na pesquisa bibliográfica.

A todos os amigos que viveram comigo o essencial desse período.

Ao CNPQ, pelo suporte financeiro.

Ao MOACIR ...

INTRODUÇÃO

Através de uma extensa pesquisa bibliográfica podemos observar que os Métodos Numéricos mais conhecidos da literatura se limitam a dar informações sobre os zeros de polinômios mediante restrições prévias, isto é, são métodos restritos a certas classes de polinômios tais como aos que contêm somente zeros simples, ou contêm somente zeros reais, etc...

O objetivo desta pesquisa é desenvolver um Método Numérico que determina qualquer raiz, real ou complexa, de polinômios com coeficientes reais, resolvendo o maior número de dificuldades possíveis.

COMENTÁRIO E NOTAS HISTÓRICAS

Desde tempos muito remotos, os matemáticos vinham se interessando por obter zeros de polinômios por meio de fórmulas exatas.

No caso de polinômios de grau 2

$$P_2(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$$

a fórmula, para obtenção das raízes,

$$z_i = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}$$

é conhecida há mais de 2.000 anos.

Entretanto, para polinômios de graus 3 e 4, só aparecem fórmulas [1, pp 105 à 108], no Século XVI, e são atribuídas aos matemáticos italianos Scipio del Ferro (1515) e Ferrari (1545). Depois destas, só no Século XIX é que o problema de encontrar zeros de polinômios fica determinado quando Galois (1831) provou o seguinte:

TEOREMA

Se $n > 4$, existe sempre uma equação de grau n que não é solúvel por radicais, [1, pp 421].

Desta forma, para a computação dos zeros de um polinômio, se este é de grau maior que quatro devemos recorrer a Métodos Numéricos.

Muitos processos físicos, químicos, e biológicos são expressos em termos de polinômios, de maneira que o cálculo numérico dos zeros de polinômios tem muitas aplicações na engenharia e na ciência. A determinação das condições de estabilidade de um circuito elétrico, por exemplo, é analisada através do cálculo dos autovalores de um sistema diferencial, os quais são zeros do seu polinômio característico (polinômios contendo zeros múltiplos aparecem frequentemente nestas aplicações práticas), e assim, a simulação de tal circuito será tão mais precisa quanto forem os métodos de cálculo empregados.

Objetivando a resolução de tais processos, muitos Métodos Numéricos tem sido desenvolvido e, geralmente trazem uma ou diversas seqüências de números complexos, $\{z_n\}$ supondo sua convergência para os zeros dos polinômios. A escolha do melhor método não é uma tarefa fácil já que para tal classificação devemos analisar muitos fatores, entre os quais: convergência incondicional, convergência global, ordem de convergência, quantidade de trabalho, segurança dos resultados, etc...

Para entender os problemas que surgem freqüentemente no cálculo numérico de raízes de polinômios, é necessário conhecer algumas definições e teoremas básicos, relativos a polinômios, e alguns dos Métodos Numéricos mais importantes, e/ou conhecidos, para observar quando ocorrem dificuldades em suas aplicações, vide [1], [2], [3], [4], [5], [8], [9], [12], [13], [15], etc ...

SUMÁRIO

No Capítulo 1, apresentamos algumas definições e teoremas básicos relativos a polinômios, e alguns conceitos utilizados no decorrer da pesquisa.

O Capítulo 2 contém alguns dos Métodos Numéricos mais conhecidos que encontram raízes de polinômios.

O Capítulo 3 desenvolve o Algoritmo Composto, uma proposta para determinação de todos os zeros de qualquer polinômio com coeficientes reais.

ÍNDICE

Página

INTRODUÇÃO	
COMENTÁRIO E NOTAS HISTÓRICAS	
SUMÁRIO	
<u>CAPÍTULO 1</u>	1
1.1. - DEFINIÇÕES BÁSICAS E TEOREMAS	1
1.2. - CONCEITOS UTILIZADOS	4
1.2-1. - INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL	4
1.2-2. - ALGORITMO DA DIVISÃO SINTÉTICA	8
1.2-3. - ALGORITMO EUCLIDEANO PARA POLINÔMIOS...	13
1.2-4. - UMA DELIMITAÇÃO PARA RAÍZES DE POLI- NÔMIOS	14
<u>CAPÍTULO 2</u> - ALGUNS PROCESSOS DE OBTENÇÃO DE ZEROS DE POLINÔMIOS	16
2.1. - MÉTODOS ITERATIVOS	16
2.1-1. - O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	19
2.1-2. - O MÉTODO DE BAIRSTOW	21
2.1-3. - O MÉTODO DE BAILEY	25
2.1-4. - O MÉTODO DE APROXIMAÇÕES POR FUNÇÕES RACIONAIS	26
2.2. - MÉTODOS NÃO ITERATIVOS	30
2.2-1. - O MÉTODO DE STURM	30
2.2-2. - O MÉTODO DE LEHMMER-SCHUR	35
2.2-3. - O MÉTODO DE BERNOULLI	46

	<u>Página</u>
<u>CAPÍTULO 3</u> - O ALGORITMO COMPOSTO	49
3.1. - INTRODUÇÃO	49
3.2. - DESCRIÇÃO DO MÉTODO	49
3.2-1. - ESCALA DOS COEFICIENTES	52
3.2-2. - FATORAÇÃO VIA MAIOR DIVISOR COMUM	65
3.2-3. - CÁLCULO DOS ZEROS REAIS	72
3.2-4. - INTERPOLAÇÃO REPRESENTANDO O POLINÔMIO QUE CONTEM OS ZEROS COMPLEXOS	75
3.2-5. - CÁLCULOS DOS ZEROS COMPLEXOS	76
3.2-6. - PURIFICAÇÃO DOS ZEROS	80
3.3. - ESTABILIDADE DO ALGORITMO COMPOSTO	81
3.3-1. - FATORAÇÃO PARCIAL	81
3.4. - FLUXOGRAMA DO ALGORITMO COMPOSTO	84
<u>UM EXEMPLO</u>	90

CAPÍTULO 1

1.1 - DEFINIÇÕES BÁSICAS E TEOREMAS

Definição 1:

Seja C o corpo dos números complexos, e n um inteiro positivo.

Entenderemos por polinômio na variável z , sobre o corpo C , a toda expressão da forma:

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^{n-j}, \quad 1$$

onde $a_j \in R$, $a_0 \neq 0$ e $z \in C$.

Os números a_j são os coeficientes do polinômio e n é o seu grau.

Definição 2:

Um número $\bar{z} \in C$ é uma raiz ou um zero de $P_n(z)$ se e somente se

$$P_n(\bar{z}) = 0.$$

Teorema 1 - "Teorema Fundamental da Álgebra"

Um polinômio de grau maior ou igual a um possui pelo menos um zero.

Teorema 2 - "Teorema da Fatoração"

Se $P_n(z)$ é um polinômio de grau n , então existe um único conjunto de nú

meros complexos $\{ z_i \}_{i=1}^n$ tal que

$$P_n(z) = a_0 (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_n) \quad 2$$

As quantidades z_i não precisam ser distintas. Se existem $r \leq n$ zeros distintos z_1, \dots, z_r , temos, para alguns inteiros m_1, m_2, \dots, m_r satisfazendo:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$$

$$P_n(z) = a_0 (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_r)^{m_r} \quad 3$$

Definição 3:

Quando algum $m_j > 1$, o z_j correspondente é chamado de zero múltiplo ou zero de multiplicidade m_j . Quando $m_j = 1$, o z_j correspondente é chamado de zero simples.

Teorema 3

Se $P_n(z)$ tem um zero complexo $(\alpha + \beta i)$, de multiplicidade m , então $P_n(z)$ tem também, como zero, o complexo conjugado $(\alpha - \beta i)$, com a mesma multiplicidade m (zeros complexos ocorrem aos pares conjugados em polinômios com coeficientes reais).

Teorema 4

Se $P_n(z)$ tem um zero z_j de multiplicidade m_j , então

$$P_n(z_j) = P'_n(z_j) = \dots = P_n^{m_j-1}(z_j) = 0, \quad e$$

$$P_n^{m_j}(z_j) \neq 0$$

onde $P_n^k(z_j)$ indica a k -ésima derivada de $P_n(z)$ calculada no ponto z_j .

Definição 4

Dados, o polinômio $P_n(z)$, e um seu divisor $Q_m(z)$ de grau $m \leq n$, vale a relação:

$$P_n(z) = Q_m(z) P_{n-m}(z).$$

O polinômio $P_{n-m}(z)$, obtido, é chamado polinômio deflacionado de $P_n(z)$; obtê-lo é deflacionar o polinômio $P_n(z)$.

Definição 5

Um polinômio é dito mal-condicionado quando uma pequena perturbação em um ou mais coeficientes resulta em um grande erro em um ou mais zeros.

Zeros múltiplos, próximos ou igualmente espaçados são considerados como uma das mais sérias causas de mal-condicionamento. Observamos que, em geral, a precisão dos algoritmos para encontrar zeros de polinômios, decresce quando zeros múltiplos ocorrem.

1.2 - CONCEITOS UTILIZADOS

1.2-1 - INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

A teoria usada em (3.2-4) , onde um polinômio interpolador é formado, é baseada no seguinte teorema:

TEOREMA

Dados $(n + 1)$ pontos distintos X_0, X_1, \dots, X_n e $(n + 1)$ valores Y_0, Y_1, \dots, Y_n , existe um único polinômio de grau $\leq n$, chamado Polinômio Interpolador, tal que:

$$P_n(X_i) = Y_i, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n$$

além disto, se $Y(X)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n , então $Y(X)$ é idêntica ao polinômio que interpola seus $(n + 1)$ pontos, [2, pp 336].

Quando temos $X_i = X + ih$, isto é, os valores $\{ X_i \}_{i=0}^n$ igualmente espaçados, uma maneira de expressar tal polinômio interpolador é considerar, como base do espaço vetorial dos polinômios de graus menores ou iguais que n , o conjunto:

$$\{1, (z-X_0), (z-X_0)(z-X_1), \dots, (z-X_0)(z-X_1) \dots (z-X_{n-1})\}$$

assim, qualquer que seja o polinômio $P_n(z)$, de grau menor ou igual a n , ele pode ser escrito como:

$$P_n(z) = C_0 + C_1(z - X_0) + C_2(z - X_0)(z - X_1) + \\ + \dots + C_n(z - X_0)(z - X_1) \dots (z - X_{n-1}) \quad 4$$

e os C_j obtidos quando se resolve o sistema formado de (4) quando fazemos $P_n(X_i) = Y_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$; isto é, o sistema $AC = Y$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & X_1 - X_0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & X_2 - X_0 & (X_2 - X_0)(X_2 - X_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_n - X_0 & (X_n - X_0)(X_n - X_1) & \dots & (X_n - X_0)(X_n - X_1) \dots (X_n - X_{n-1}) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \quad e \quad Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

donde, com o uso do que chamamos diferenças progressivas:

$$\begin{cases} \Delta Y_i = Y_{i+1} - Y_i, & \text{para } i = 0, \dots, n-1 \\ \Delta^k Y_i = \Delta^{k-1} Y_{i+1} - \Delta^{k-1} Y_i, & \text{para } k = 2, \dots, n \\ & i = 0, \dots, n-k \end{cases}$$

temos a fórmula de interpolação de Newton:

$$\begin{cases} C_0 = Y_0 \\ C_k = \Delta^k Y_0 / k! h^k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad 5$$

Observe que $P_n(z)$, como expresso em (4) não se encontra na forma usual, como definida em (1); porém esta é facilmente obtida quando efetuamos as multiplicações e reordenamos os valores assim obtidos.

A vantagem deste processo de interpolação, além da formação recursiva, é a simplicidade de aplicação que se deve ao pequeno esforço computacional. Na prática, a partir do conjunto de valores dados:

X_i	Y_i
X_0	Y_0
X_1	Y_1
X_n	Y_n

construímos a tabela das diferenças progressivas:

" Y_i "	" ΔY_i "	" $\Delta^2 Y_i$ "	...
Y_0	0	0	
Y_1	$Y_1 - Y_0 = \Delta Y_0$	0	
Y_2	$Y_2 - Y_1 = \Delta Y_1$	$\Delta Y_1 - \Delta Y_0 = \Delta^2 Y_0$	
\vdots	\vdots	\vdots	
Y_n	$Y_n - Y_{n-1} = \Delta Y_{n-1}$	$\Delta Y_{n-1} - \Delta Y_{n-2} = \Delta^2 Y_{n-2}$	

cujos valores diagonais são utilizados em (5).

Assim,

$$\begin{aligned}
 p_n(z) &= Y_0 + \Delta Y_0 (z - x_0) + \frac{\Delta^2 Y_0}{2h^2} (z - x_0)(z - x_1) + \dots \\
 &+ \dots \frac{\Delta^n Y_0}{n!h^n} (z - x_0)(z - x_1) \dots (z - x_{n-1}) \quad .
 \end{aligned}$$

1.2-2 - ALGORITMO DA DIVISÃO SINTÉTICA

Em geral, a divisão sintética é referida à extração de um fator linear de um polinômio, isto é, quando dividimos $P_n(z)$ por $(z - z_0)$ e obtemos um quociente $B_{n-1}(z)$ e um resto $R(z)$.

Assim:

$$P_n(z) = (z - z_0) B_{n-1}(z) + R(z) \quad , \quad 6$$

onde $B_{n-1}(z)$ é um polinômio de grau menor ou igual que n e $R(z)$ uma constante. Podemos então escrever

$$\begin{cases} B_{n-1}(z) = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1} \\ R(z) = b_n \end{cases} \quad 7$$

portanto, desenvolvendo (6) com a substituição de (7) obtemos de

$$\begin{aligned} a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n &= \\ &= (z - z_0) (b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1}) + b_n \end{aligned}$$

a fórmula recursiva:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_k = a_k + z_0 b_{k-1}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad 8$$

este algoritmo, conhecido como Ruffini-Horner, fornece os coeficientes b_j , $j = 0, 1, \dots, n-1$ de $B_{n-1}(z)$, e o resto $R(z) = b_n$.

Notamos que, dado um valor z_0 , podemos computar $P_n(z_0)$ de acordo com (8), já que

$$P_n(z_0) = (z_0 - z_0) B_{n-1}(z_0) + R(z) = R(z)$$

isto é

$$P_n(z_0) = b_n, \quad 9$$

e, em qual cálculo gastamos n multiplicações somente. Analogamente, $P'_n(z_i)$ pode ser computado quando fazemos:

$$B_{n-1}(z) = (z - z_0) C_{n-2}(z_0) + c_{n-1} \quad 10$$

já que

$$P'_n(z) = B_{n-1}(z) \quad 11$$

e portanto

$$P'_n(z_0) = c_{n-1}. \quad 12$$

De maneira semelhante podemos obter fórmulas recursivas para a extração de fatores quadráticos de $P_n(z)$; em particular, para a extração do fator quadrático determinado pelo par de números complexos conjugados $z_0 = \alpha + \beta i$ e $z_0^c = \alpha - \beta i$:

$$\begin{aligned} z^2 - 2\alpha z + (\alpha^2 + \beta^2) &= \\ &= z^2 + Sz + p \quad \text{com} \quad \begin{cases} S = -2\alpha \\ p = \alpha^2 + \beta^2 \end{cases} \end{aligned} \quad 13$$

podemos escrever:

$$P_n(z) = (z^2 + Sz + p) B_{n-2}(z) + R_1(z) \quad 14$$

onde $B_{n-2}(z)$ é um polinômio de grau menor ou igual que 2 e $R_1(z)$ de grau menor ou igual que um.

Sejam então

$$\begin{cases} B_{n-2}(z) = b_0 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \dots + b_{n-2} \\ R_1(z) = b_{n-1} z + b_n \end{cases} \quad 15$$

Assim, desenvolvendo (14) com a substituição de (15) obtemos a fórmula recursiva :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 - sb_0 \\ b_j = a_j - sb_{j-1} - pb_{j-2} \quad , \quad j = 2, 3, \dots n-1 \\ b_n = a_n - pb_{n-2} \end{array} \right. \quad 16$$

Observamos que quando a divisão sintética é usada para extrair fatores contendo raízes do polinômio $P_n(z)$, este processo é o já definido como deflação.

Generalizando o uso da divisão sintética de um polinômio por outro polinômio, a seguinte notação pode ser usada:

Dado um polinômio "P", o qual será dividido por outro polinômio "D", nós temos como quociente um polinômio "T" e um resto "R", de modo que, se :

$$P = \sum_{k=0}^n p_k z^k \quad , \quad \text{onde } P \text{ é de grau } n$$

$$D = \sum_{k=0}^m d_k z^k \quad , \quad \text{onde } D \text{ é de grau } m \leq n$$

temos que:

$$P = TD + R,$$

onde

$$T = \sum_{k=0}^{n-m} t_k z^k \quad , \quad \text{onde } T \text{ é de grau } n-m$$

$$R = \sum_{k=0}^{m-1} r_k z^k, \quad \text{onde } R \text{ é de grau } m-1$$

e

$$\begin{cases} t_{n-m} = p_n / d_m \\ t_{k-m} = (p_k - \sum_{j=k-n-1}^{\min(k, n-m)} t_j d_{k-j}) / d_m, \quad k = n-1, \dots, m \end{cases}$$

$$r_k = p_k - \sum_{j=0}^{\min(k, n-m)} t_j d_{k-j} \quad \text{para } k = 0, \dots, m-1.$$

1.2-3 - ALGORITMO EUCLIDEANO PARA POLINÔMIOS

O algoritmo euclidiano é usualmente descrito como um processo que encontra o maior divisor comum de dois inteiros e sua demonstração aparece em livros de Teoria dos Números, [1, pp 15]. Porém o algoritmo euclidiano pode ser aplicado a polinômios $f(z)$ e $g(z)$, exatamente como para dois inteiros quando formamos as identidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(z) = q_0(z) g(z) + r_1(z) \\ g(z) = q_1(z) r_1(z) + r_2(z) \\ r_1(z) = q_2(z) r_2(z) + r_3(z) \\ \dots\dots\dots \\ r_{k-1}(z) = q_k(z) r_k(z) \end{array} \right. \quad 17$$

assim, quando buscamos o M.D.C. (f, g) , buscamos o M.D.C. (g, r_1) , ou o M.D.C. $(r_1, r_2) \dots$ ou M.D.C. (r_{k-1}, r_k) . Já que os graus dos polinômios r_1, r_2, r_3, \dots decrescem, após um número finito de passos, algum r_{k+1} deverá ser nulo e portanto, o M.D.C. $(r_{k-1}, r_k) = r_k$, a menos de uma constante, donde:

$$\text{M.D.C.}(f, g) = r_k,$$

exceto quando r_k é uma constante, em qual caso temos que $f(z)$ e $g(z)$ são relativamente primos.

1.2-4 - UMA DELIMITAÇÃO PARA RAÍZES DE POLINÔMIOS

Seja o polinômio de grau n

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

Se $z \neq 0$, podemos escrever:

$$P_n(z) = z^n \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{z^k} \right)$$

Logo

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{|z|^k} < 1, \text{ implica } P_n(z) \neq 0.$$

Mas

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{|z|^k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{|a_k|^{1/k}}{|z|} \right)^k$$

$$\text{Portanto, se } \frac{|a_k|^{1/k}}{|z|} < \frac{1}{2} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \text{ teremos}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{|z|^k} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$$

Donde

$$\frac{|a_k|^{1/k}}{|z|} < \frac{1}{2} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \implies P_n(z) \neq 0 ,$$

isto é:

Se $P_n(z) = 0$, então existe k_0 , $1 \leq k_0 \leq n$, tal que

$$\frac{|a_{k_0}|^{1/k_0}}{|z|} \geq \frac{1}{2}$$

Por maior razão:

$$\text{Se } P_n(z) = 0 \text{ então } \underset{1 \leq k \leq n}{\text{MÁX}} \frac{|a_k|^{1/k}}{|z|} \geq \frac{1}{2} ,$$

ou:

Se z é um zero de $P_n(z)$, então

$$|z| \leq 2 \underset{1 \leq k \leq n}{\text{MÁX}} |a_k|^{1/k} \quad 18$$

Outra delimitação para as raízes de polinômios é a seguinte:

Se z é tal que $P_n(z) = 0$, então

$$|z| \leq 1 + \text{MÁX} |a_i/a_0| , \quad [8, \text{pp } 71] . \quad 19$$

CAPÍTULO 2

ALGUNS PROCESSOS DE OBTENÇÃO DE ZEROS DE POLINÔMIOS

Neste capítulo, apresentamos alguns processos clássicos para obtenção dos zeros de um polinômio.

2.1 - MÉTODOS ITERATIVOS

Entre os processos que calculam zeros de polinômios, discutimos aqui os métodos iterativos mais importantes e dos quais faremos uso no algoritmo com posto.

Definição:

Uma função de iteração " ϕ " é definida como sendo a função que "leva" os $z_i, z_{i-1}, \dots, z_{i-n}$ em z_{i+1} como:

$$\phi(z_i, z_{i-1}, \dots, z_{i-n}) = z_{i+1} \quad ,$$

onde $z_i, z_{i-1}, \dots, z_{i-n}$ são aproximações de uma raiz de $P_n(z) = 0$.

Defina o erro relativo na i -ésima iteração como

$$\epsilon_{i+1} = \bar{z} - z_{i+1} \quad ,$$

onde \bar{z} é uma raiz de $P_n(z) = 0$. Assuma que a função de iteração ϕ é conver

gente, isto é, que ocorre

$$\bar{z} = \lim_{i \rightarrow \infty} z_i \quad 20$$

se existe um número real $\alpha \geq 1$, tal que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\epsilon_{i+1}|}{|\epsilon_i|^\alpha} = c$$

então α é a ordem de convergência da função ϕ e c é a constante assintótica de erro. Isto quer dizer que o erro relativo está decrescendo de $|\epsilon_i|^\alpha$. Esta definição de ordem de convergência assume \bar{z} como raiz simples; quando \bar{z} é múltipla, em geral, as funções de iteração tem ordem de convergência menor.

Um método iterativo implica em sucessivas aproximações que, sob certas condições (Teo. 1), convergem para uma raiz da equação polinomial. Quando uma aproximação para uma raiz, \bar{z} , satisfaz o critério de convergência, isto é, $|P_n(z_{i+1})| < \epsilon$, $\epsilon > 0$, o fator linear $(z - z_{i+1})$ é tirado do polinômio; ou se z_{i+1} é complexo, o fator quadrático $(z - z_{i+1})(z - z_{i+1c})$ é que é tirado, onde z_{i+1c} denota o conjugado complexo de z_{i+1} . O método iterativo é então aplicado ao polinômio deflacionado para o cálculo da próxima raiz.

WILKILSON [3, pp 56] discute os erros de arredondamentos que ocorrem no processo de deflação e conclui que estes são menores quando os zeros são extraídos em ordem crescente de magnitude.

Observamos ainda que quando estamos usando um processo de razoável esforço computacional, os erros de arredondamentos cometidos após cada operação se propagam cumulativamente podendo afetar gravemente os resultados finais. Nesses

casos, os efeitos dos arredondamentos devem ser controlados e minimizados por algum processo.

Um Teorema sobre Processos Iterativos

Seja a equação polinomial

$$P_n(z) = 0. \quad 21$$

Suponha que (21) possa ser colocada na forma

$$z = \phi(z) \quad 22$$

de modo que qualquer solução de (22) seja também solução de (21).

TEOREMA 1

Se o valor inicial, z_0 , está numa vizinhança de um zero de $P_n(z)$ onde ocorre $|\phi'(z)| < 1$, então a iteração

$$z_{k+1} = \phi(z_k) \quad , \quad k = 0, 1, \dots$$

converge para \bar{z} .

2.1-1 - O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

O Método de Newton-Raphson aproxima $P_n(z)$ por uma reta, através do desenvolvimento de Taylor para $P_n(z)$, o que resulta na seguinte iteração:

$$\phi(z_i) = z_{i+1} = z_i - P_n(z_i)/P'_n(z_i) \quad 23$$

onde $P_n(z_i)$ é o valor do polinômio computado em z_i e $P'_n(z_i)$ é a primeira derivada de $P_n(z)$ computada em z_i (este método não é restrito às funções polinomiais).

O Método de Newton-Raphson é bastante útil para a resolução de equações polinomiais já que o valor do polinômio e sua derivada para um certo z_i , podem ser calculados por uma simples relação recursiva, conforme o algoritmo de divisão sintética. Este método tem ordem de convergência dois - convergência quadrática - para zeros simples e, é menor, em geral, para zeros múltiplos. Uma modificação de (23) dada por Schroder, produz a seguinte:

$$\phi(z_i) = z_{i+1} = z_i - m P_n(z_i)/P'_n(z_i) \quad 24$$

onde m é a multiplicidade exata de um zero. Usando esta função de iteração (24), a convergência permanece quadrática [2, pp 177] Porém, o conhecimento prévio da multiplicidade de um zero, como requer esta modificação, é raro a menos que algum processo de fatoração, como o descrito em (3.2-2), seja realizado. Este porém produz polinômios contendo zeros simples, o que faz esta modificação desnecessária.

A desvantagem básica deste Método de Newton-Raphson é que sua convergência para o zero do polinômio dado, ocorre somente quando a aproximação inicial está numa vizinhança pequena daquele zero - de maneira que ocorra $|\phi'(z)| < 1$ nesta vizinhança - . Portanto, uma boa aproximação inicial é necessária para o uso deste método. Note que quando trabalhamos com polinômios tendo zeros complexos, a aproximação inicial deve ser complexa.

A eficiência máxima pode ser utilizada no Método de Newton-Raphson quando uma boa aproximação inicial é produzida e quando o polinômio tem somente zeros simples - ambas as condições são satisfeitas no Algoritmo Composto (Capítulo 3) quando este método é usado.

2.1-2 - O MÉTODO DE BAIRSTOW

Essencialmente, o Método de Bairstow consiste em determinar divisores quadráticos de polinômios.

Seja :

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^{n-j} \quad , \quad a_0 \neq 0 \quad 25$$

um polinômio de grau n .

Considere um fator quadrático

$$d(z) = z^2 + sz + p.$$

Se escrevemos

$$P_n(z) = d(z) Q_{n-2}(z) + r_0 z + r_1 \quad ,$$

onde r_0 e r_1 , são, obviamente, funções de s e p , então determinar um divisor exato, quadrático, de $P_n(z)$, significa determinar s e p de modo que:

$$\begin{cases} r_0(s, p) = 0 \\ r_1(s, p) = 0 \end{cases} \quad 26$$

Seja:

$$d_0(z) = z^2 + s_0 z + p_0$$

uma aproximação para $d(z)$.

Desenvolvendo $r_0(s, p)$ e $r_1(s, p)$ em série de Taylor numa vizinhança de (s_0, p_0) , temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0(s, p) = r_0(s_0, p_0) + \frac{\partial r_0}{\partial s}(s_0, p_0)(s - s_0) + \\ \quad + \frac{\partial r_0}{\partial p}(s_0, p_0)(p - p_0) + \dots \\ r_1(s, p) = r_1(s_0, p_0) + \frac{\partial r_1}{\partial s}(s_0, p_0)(s - s_0) + \\ \quad + \frac{\partial r_1}{\partial p}(s_0, p_0)(p - p_0) + \dots \end{array} \right. \quad 27$$

Abandonando as potências superiores a um de (27) e observando (26) podemos escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r_0}{\partial s}(s_0, p_0)(s - s_0) + \frac{\partial r_0}{\partial p}(s_0, p_0)(p - p_0) = -r_0(s_0, p_0) \\ \frac{\partial r_1}{\partial s}(s_0, p_0)(s - s_0) + \frac{\partial r_1}{\partial p}(s_0, p_0)(p - p_0) = -r_1(s_0, p_0) \end{array} \right. \quad 28$$

Assim, se chamamos

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = s_0 + (s - s_0) \\ p_1 = p_0 + (p - p_0) \end{array} \right. ,$$

temos uma aproximação, $d_1(z)$, para $d(z)$:

$$d_1(z) = z^2 + s_1 z + p_1$$

Repetindo o processo a partir de $d_1(z)$, obtemos uma segunda aproximação para $d(z)$, e assim por diante ...

Obtenção do Sistema (28)

Efetuada a divisão de $P_n(z)$ por $d_0(z)$, obtemos o quociente $Q_0(z)$ e o resto, cujos coeficientes são $r_0(s_0, p_0)$ e $r_1(s_0, p_0)$.

Diferenciando (25) em relação a p , obtemos:

$$0 = Q_{n-2}(z) + d(z) \frac{\partial Q_{n-2}}{\partial p}(z) + \frac{\partial r_0}{\partial p} z + \frac{\partial r_1}{\partial p} \quad 29$$

Fazendo em (29) s e p iguais a s_0 e p_0 respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = Q_0(z) + d_0(z) \frac{\partial Q_0}{\partial p}(z) + \frac{\partial r_0}{\partial p}(s_0, p_0) z + \\ + \frac{\partial r_1}{\partial p}(s_0, p_0) \end{aligned} \quad 30$$

Observando (30) vemos que:

$$\frac{\partial r_0}{\partial p}(s_0, p_0) \text{ e } \frac{\partial r_1}{\partial p}(s_0, p_0) \text{ são os coeficientes do resto da divi}$$

são de $Q_0(z)$ por $d_0(z)$, com os sinais trocados. Obtivemos assim os coeficientes de $(p - p_0)$ em (28).

Analogamente, diferenciando (25) em relação a s , e substituindo s e p por s_0 e p_0 , obtemos:

$$0 = z Q_0(z) + d_0(z) \frac{\partial Q_0}{\partial s}(z) + \frac{\partial r_0}{\partial s}(s_0, p_0) z + \\ + \frac{\partial r_1}{\partial s}(s_0, p_0)$$

isto é, os opostos dos coeficientes de $(s - s_0)$ em (28) são obtidos dividindo-se $z Q_0(z)$ por $d_0(z)$, ou seja, dividindo-se $\frac{\partial r_0}{\partial s}(s_0, p_0) z^2 + \frac{\partial r_1}{\partial s}(s_0, p_0) z$ por $d_0(z)$.

O processo continua até atingirmos a precisão desejada.

Um critério de parada pode ser:

$$\frac{|s_{k+1} - s_k| + |p_{k+1} - p_k|}{|s_{k+1}| + |p_{k+1}|} < \varepsilon$$

As raízes do divisor determinado são então computadas, as quais são raízes do polinômio, que será em seguida deflacionado, fornecendo um polinômio de grau $n-2$, com o qual repetimos o procedimento até determinarmos todas as raízes de $P_n(z)$.

2.1-3 O MÉTODO DE BAILEY

Este método aproxima $P_n(z)$ por uma quadrática

$$Y(z) = az^2 + bz + c$$

de modo que

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(z_i) = P_n(z_i) \\ Y'(z_i) = P'_n(z_i) \\ Y''(z_i) = P''_n(z_i) \end{array} \right. ,$$

o que resulta na seguinte função de iteração:

$$z_{i+1} = \phi(z_i) = z_i - \frac{P_n(z_i)}{\frac{P'_n(z_i) - \frac{P_n(z_i) P''_n(z_i)}{2P'_n(z_i)}}} ,$$

cujas ordem de convergência é três [5, pp 92]. Isto porém não deve ser visto sempre como uma vantagem já que o método requer muitos cálculos numéricos por iteração, além disto, não há controle sobre a ordem pela qual as raízes são encontradas.

2.1-4 - MÉTODO DE APROXIMAÇÃO POR FUNÇÕES RACIONAIS

Funções racionais podem ser usadas como funções de aproximações, o que estabelece um processo iterativo. Esta técnica envolve uma função racional da forma:

$$y = \frac{z - a}{b^m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0} \quad 31$$

a qual aproxima $P_n(z)$ quando, através de $(m+2)$ pontos, $(z_i, P_n(z_i) = p_i)$, $i = n, n-1, \dots, n-m-1$, um conjunto de $(m+2)$ equações simultâneas é produzido, cuja resolução produz uma solução para (31), donde o valor que nos interessa, "a", é obtido e então usado no lugar de um dos valores z_i , como uma aproximação. O processo iterativo continuará até que seja realizada convergência para um zero de $P_n(z)$.

Consideramos, por exemplo, a função racional linear:

$$y = \frac{z - a}{b_1 z + b_0} \quad 32$$

note que, tendo três valores iniciais z_i , $i = n, n-1, n-2$, formamos um sistema de três equações a partir de

$$z = b_1 y z + b_0 y + a ,$$

como:

$$\begin{cases} z_n = a + b_0 p_n + b_1 p_n z_n \\ z_{n-1} = a + b_0 p_{n-1} + b_1 p_{n-1} z_{n-1} \\ z_{n-2} = a + b_0 p_{n-2} + b_1 p_{n-2} z_{n-2} \end{cases}$$

donde facilmente obtenemos:

$$"a" = z_n + \frac{(z_n - z_{n-1})(z_n - z_{n-2}) p_n (p_{n-1} - p_{n-2})}{D},$$

$$D = (z_n - z_{n-1})(p_{n-2} - p_n) p_{n-1} + (z_n - z_{n-2})(p_n - p_{n-1}) p_{n-2}$$

este valor "a" é então tido como uma aproximação de uma raiz de (32) e será denotada por z_{n+1} .

Depois disto, a iteração continuará descartando-se o valor z_{n-2} e repetindo o processo para os pontos: z_{n+1} , z_n e z_{n-1} . Os cálculos terminam quando

$$|z_{n+1} - z_n| < \varepsilon$$

o que ocorre se contarmos com valores iniciais "suficientemente próximos" da raiz procurada.

A ordem de convergência deste método é de 1.84, [6, pp 63]. Lembremos porém que este valor pode ser menor se a raiz procurada tem multiplicidade maior que um.

No caso em que dois valores da função polinomial são iguais, por exemplo, $p_n = p_{n-1}$, trocamos (z_{n-1}, p_{n-1}) por (z_{n-1}^*, p_{n-1}^*) , onde $z_{n-1}^* = 1/2(z_n + z_{n-1})$, e continuamos a iteração com os valores z_n, z_{n-1}^* e z_{n-2} .

Quando uma aproximação \bar{z} é admitida, pelo critério de convergência, como um zero de $P_n(z)$, deflação explícita é usada para, então, encontrarmos os outros zeros do polinômio.

Observamos que muito pouco é ganho, em termos de ordem de convergência, quando fazemos $m > 2$ em (31). Para $m = 2$ temos ordem de convergência 1.93, [6, pp 64].

Esta técnica iterativa é discutida também em [7], onde as seguintes funções racionais são usadas para aproximar $P_n(z)/P'_n(z)$:

$$\frac{P_n(z)}{P'_n(z)} = \frac{z-a}{b+cz}$$

$$\frac{\tilde{P}_n(z)}{\tilde{P}'_n(z)} = \frac{z-a}{b+cz} \quad , \quad \tilde{P}_n(z) = P_n(z)/z^n$$

das quais obtemos valores para "a". Uma terceira aproximação, aquela que produz o Método de Newton-Raphson, pode ser usada já que este requer poucos cálculos. A partir destas três aproximações para um zero de $P_n(z)$, aquela z_{n+1} que produz o menor valor absoluto para $P_n(z_{n+1})$, tida portanto como a melhor,

é trocada por um dos valores iniciais, donde o processo continua...

Outras funções racionais podem ser usadas; por exemplo

$$\frac{P_n(z)}{P'_n(z)} = \frac{z-a}{z^2+bz+c}$$

a qual tem a vantagem de ter ordem de convergência 1.93, enquanto o número de incógnitas é três.

Outros métodos iterativos aparecem em [2, 8, 9, 13, 14 ...], os quais não apresentam vantagens sobre os aqui discutidos.

2.2 - MÉTODOS NÃO ITERATIVOS

2.2-1 O MÉTODO DE STURM

Este é o método que permite o cálculo do número exato de raízes, em um intervalo real, de uma dada função.

Definição

Seja $\{f_i\}_{i=0}^m$ uma sequência de funções contínuas, com $f_0(X)$ diferenciável em $[a, b]$. Tal sequência é definida como sequência de Sturm se:

- (i) $f_0(X)$ só contém zeros simples
- (ii) $f_m(X)$ não se anula em (a, b)
- (iii) Se $f_j(\alpha) = 0$, então $f_{j-1}(\alpha) f_{j+1}(\alpha) < 0$, qualquer que seja α em (a, b) .
- (iv) Se $f_0(\alpha) = 0$, então $f'_0(\alpha) f_1(\alpha) > 0$, qualquer que seja α em (a, b) .

TEOREMA - "Teorema de Sturm"

Se $f_0(a) f_0(b) \neq 0$, o número de raízes reais de $f_0(X)$ em (a, b) é igual a $V(a) - V(b)$, onde $V(X)$ indica o número de variações de sinal da sequência de Sturm calculada em X . (valores nulos não são contados).

Demonstração:

O número de variações de sinal pode mudar quando X percorre o intervalo (a, b) , somente quando "alguma" função muda de sinal neste intervalo.

Por (ii) esta função não pode ser $f_m(x)$.

Assuma que para algum $\hat{x} \in (a, b)$, $f_v(\hat{x}) = 0$, $0 < v < m$. Assim, em uma vizinhança de \hat{x} , temos que os sinais podem ser:

x	$f_{v-1}(x)$	$f_v(x)$	$f_{v+1}(x)$
$\hat{x} - \epsilon$	+	\pm	-
\hat{x}	+	0	-
$\hat{x} + \epsilon$	+	\pm	-

, ou

x	$f_{v-1}(x)$	$f_v(x)$	$f_{v+1}(x)$
$\hat{x} - \epsilon$	-	\pm	+
\hat{x}	-	0	+
$\hat{x} + \epsilon$	-	\pm	+

, onde:

1 - Os sinais da linha $x = \hat{x}$, seguem de (iii).

2 - Os sinais das primeiras e últimas colunas seguem da continuidade dos elementos de sequência de Sturm para um ϵ pequeno.

Nós vemos, através das tabelas acima, que quando x passa por \hat{x} , não há mudança no número de variações de sinal na sequência de Sturm.

Examinamos agora os sinais perto de um zero \hat{x} de $f_0(x)$. Podem ocorrer:

	x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	
(a)	$\hat{x}-\epsilon$	+	-	ou
	\hat{x}	0	-	
	$\hat{x}+\epsilon$	-	-	

	x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	
(b)	$\hat{x}-\epsilon$	-	+	, onde:
	\hat{x}	0	+	
	$\hat{x}+\epsilon$	+	+	

1. As 1as. colunas representam os dois possíveis casos para um zero simples de $f_0(x)$.

2. O sinal de $f_1(\hat{x})$ segue de (iv) já que

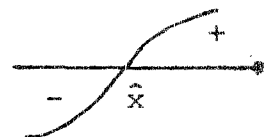
Se (a) , então



e portanto $f_0'(\hat{x}) < 0$,

donde $f_1(\hat{x}) < 0$.

E se (b) , então



e portanto $f_0'(\hat{x}) > 0$,

donde $f_1(\hat{x}) > 0$.

3. Os sinais dos outros elementos das 2as. colunas seguem pela continuidade dos elementos da sequência.

De maneira que agora, como vemos claramente, há um decréscimo de uma mudança no número de variações de sinal quando x passa por um zero de $f_0(x)$.

Portanto, a única maneira de ocorrer mudança de sinal é quando ocorre um zero de $f_0(x)$.

É fácil construir a sequência de Sturm quando $f_0(x)$ é um polinômio:

1 - Definimos $f_1(x) = f'_0(x)$. Assim (iv) ocorre para zeros simples.

2 - Dividimos $f_0(x)$ por $f_1(x)$ e chamamos o resto da divisão de $-f_2(x)$; daí dividimos $f_1(x)$ por $f_2(x)$ e chamamos o resto de $-f_3(x)$, etc... até que determinemos o M.D.C. $(f_0(x), f_1(x)) = f_m$.

Podemos escrever então:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(x) = P_n(x) \\ f_1(x) = f'_0(x) \\ \\ f_0(x) = q_1(x) f_1(x) - f_2(x) \\ f_1(x) = q_2(x) f_2(x) - f_3(x) \\ \\ f_{m-2}(x) = q_{m-1}(x) f_{m-1}(x) - f_m(x) \\ f_{m-1}(x) = q_m(x) f_m(x) \end{array} \right.$$

33

Este processo (33) é o conhecido algoritmo euclideano para a determinação do maior divisor comum, f_m , de $f_0(x)$ e $f_1(x)$. Se f_m não é uma constante (isto é, $f_0(x)$ tem raízes múltiplas), então dividimos todos os f_j 's anteriores por $f_m(x)$, donde obtemos uma sequência, como definida, de Sturm, na qual $f_0(x)$

tem somente zeros simples e assim satisfaça (i), e com f_m constante, o que garante (ii).

Note também que se $f_j(\hat{x}) = 0$, então por (33) , para este ponto, $f_{j-1}(\hat{x}) = -f_{j+1}(\hat{x})$ e, se $f_{j-1}(\hat{x}) = 0$, então $f_0(\hat{x}) = f_1(\hat{x}) = 0$ o que contra diz (i). Logo (iii) é satisfeita.

Portanto, realmente, (33) define uma sequência de Sturm com qual po demos determinar o número de zeros reais de $P_n(x)$.

Na prática, usamos o Teorema de Sturm sucessivas vezes para subinterva - los divididos ao meio a partir daquele determinado por (1.2-4). Quando uma raiz é isolada , é mais eficiente empregar uma técnica mais rápida, por exem - plo a Regra do Sinal:

Quando é determinado que há uma única raiz em um intervalo (c, d) , se es - ta raiz é simples, temos que $f_0(x) f_0(d) < 0$. Podemos então dividir este in - tervalo ao meio e fazer o seguinte teste: $f_0(c) f_0(\frac{c+d}{2}) < 0$? se sim, a raiz procurada está em $(c, \frac{c+d}{2})$. Se não, temos que $f_0(\frac{c+d}{2}) f_0(d) < 0$ e a raiz procurada está em $(\frac{c+d}{2}, d)$.

Deste maneira podemos ir dividindo os intervalos de modo que, a cada passo precisamos de menos cálculos do que quando usamos o Teorema de Sturm.

2.2-2. O MÉTODO DE LEHMMER-SCHUR

Dado um polinômio de grau n ,

$$C(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

considere seu polinômio recíproco:

$$C^*(z) = \bar{a}_n z^n + \bar{a}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \bar{a}_0, \quad 34$$

onde \bar{a}_i é o conjugado complexo de a_i . Note que:

$$(i) \quad C^*(z) = z^n \overline{C(1/\bar{z})}$$

$$(ii) \quad \text{se } |z| = 1, \text{ então } |C^*(z)| = |C(z)|,$$

além disto, se C tem zeros w_k , para $k = 1, 2, \dots, n$, então $C^*(z)$ tem zeros $1/\bar{w}_k$.

Seja

$$T[C(z)] = \bar{a}_n C(z) - a_0 C^*(z), \quad 35$$

a transformada de Schur para C . Então, em particular, temos que

$$T[C(0)] = \bar{a}_n a_n - a_0 \bar{a}_0 = |a_n|^2 - |a_0|^2 = c \quad 36$$

com $c \in \mathbb{R}$. Note ainda, que

$$T[C(z)] \text{ não tem termo em } z^n,$$

de modo que, se definimos

$$T^k [C(z)] = T [T^{k-1} [C(z)]]$$

temos uma sequência de polinômios em ordem decrescente de grau.

O Teorema básico que usamos para a teoria do algoritmo com posto é o seguinte:

TEOREMA - Seja k o menor inteiro para o qual $T^k [C(0)] = 0$.

Suponha $C(0) \neq 0$.

Se, para algum h , $0 < h < k$, $T^h [C(0)] < 0$, então $C(z)$ tem pelo menos um zero no círculo unitário. Se, em vez disto,..... $T^i [C(0)] > 0$, para $1 \leq i < k$ e $T^{k-1} [C(z)] = \text{CTE}$, então não há zeros no círculo unitário.

Demonstração - A demonstração deste teorema requer vários resultados elementares da teoria de variável complexa, essencialmente da aplicação do seguinte:

Teorema de Rouché: Sejam $f(z)$ e $g(z)$ analíticas no interior de uma curva fechada Γ - aqui nos interessa $\Gamma \equiv |z| < 1$ -, contínua sobre Γ , e tais que $|f(z)| < |g(z)|$. Então, $h(z) = f(z) + g(z)$ e $g(z)$ tem o mesmo número de zeros em Γ , [8, pp.72]

Seja $C(z)$ contendo m zeros em $|z| < 1$ e nenhum em $|z|=1$. Considere $C^*(z)$ como definido em (34)

Temos:

(i) Se $T[C(0)] \neq 0 \Rightarrow T[C(z)] \neq 0$ em $|z| = 1$.

De fato,

$$T[C(z)] = \bar{a}_n C(z) - a_0 C^*(z).$$

Se $T[C(\xi)] = 0$, $\xi \in |z| = 1 \Rightarrow \bar{a}_n C(\xi) = a_0 C^*(\xi)$

donde $|\bar{a}_n C(\xi)| = |a_0 C^*(\xi)|$, ou seja $|\bar{a}_n| = |a_0|$.

Mas, daí $|T[C(0)]| = 0$.

(ii) Se $T[C(0)] > 0 \Rightarrow T[C(z)]$ e $C(z)$ tem o mesmo número de zeros em $|z| < 1$.

De fato,

em $|z| = 1$, temos que

$$\begin{aligned} |T[C(z)]| &= |C(z)| (|\bar{a}_n| - |a_0|) = \\ &= |C(z)| T[C(0)] < |C(z)| \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de Rouché, $T[C(z)] = \bar{a}_n C(z) - a_0 C^*(z)$ e, $\bar{a}_n C(z)$ tem o mesmo número de zeros em $|z| < 1$.

(iii) Se $T[C(0)] < 0 \Rightarrow T[C(z)]$ e $C^*(z)$ tem o mesmo número / de zeros em $|z| < 1$.

(iv) Deduzimos portanto que, se $T[C(z)] \neq 0$ em $|z| = 1$, então $T[C(z)]$ tem m zeros em $|z| < 1$ se $T[C(0)] > 0$ e $(n-m)$ zeros / em $|z| < 1$ se $T[C(z)] < 0$.

(v) Finalmente, por repetidas aplicações de (iv) em $T^1 [C(z)]$, concluímos o teorema, pois:

Suponha $T^h [C(0)] < 0$.

Isto implica, que $C(z)$, $T[C(z)]$, $T^{h-2}[C(z)] \dots T^{h-1}[C(z)]$ tem o mesmo número, digamos m , zeros em $|z| < 1$; $T^h [C(z)]$ tem $(g_{h-1}-m)$ zeros em $|z| < 1$, onde $g_{h-1} = \text{Grau}(T^{h-1})$; mas $g_h \geq (g_{h-1}-m)$ (definição de T^k), portanto $m \geq g_{h-1}-g_h > 0$; se todos $T^h > 0$, então todos tem o mesmo número de zeros que T^{k-1} , o qual não tem nenhum.

De maneira que, para usarmos este Teorema nós procedemos como o algoritmo descrito abaixo:

1-) $C(0) = 0?$

Se sim, temos a raiz $z = 0$; se não vá para 2-).

2-) Calcule $T[(z)]$

$T[C(0)] < 0?$ se sim, há pelo uma raiz de C em $|z| < 1$. Se não, vá para 3-)

3-) Calcule $T^j [C(z)]$, para $j = 1, 2, \dots$ até que ocorra uma das 2 alternativas:

- (i) $T^j[C(0)] < 0$ para algum $j < k$
- (ii) $T^k[C(0)] = 0$.

Se (i) ocorrer, isto é, existe h tal que $T^h[C(0)] < 0$, há pelo menos uma raiz de C em $|z| < 1$. Se (ii) ocorrer, isto é, se $T^j[C(0)] > 0$ para algum j , $1 < j < k$, e $T^{k-1}[C(z)]$ é uma constante, então não há raiz em $|z| < 1$.

Note que o teorema não inclui a possibilidade onde
 $T^k[C(0)] = 0$ e $T^{k-1}[C(0)]$ não é uma constante. No decorrer da seção, discutimos uma saída para tal caso.

Para encontrar as raízes de $C(z)$, aplicando este teorema, observamos primeiramente que se $C(z)$ tem zeros em $|z| = \rho$, então $g(z) = C(\rho z)$ tem zeros em $|z| < 1$. Em geral, se $C(z)$ tem zeros em $|z-c| < \rho$, então $g(z) = C(\rho z+c)$ tem zeros em $|z| < 1$. De fato, se os zeros de $C(z)$, $\{z_i\}_{i=1}^n$ são tais que $|z_i-c| < \rho$, onde $(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n) = C(z)$; então $\rho^{-n} C(\rho z+c) =$

$$\left(z - \frac{z_1 - c}{\rho}\right) \left(z - \frac{z_2 - c}{\rho}\right) \dots \left(z - \frac{z_n - c}{\rho}\right) \text{ e os zeros de } C(\rho z+c),$$

$$\left|\frac{z_i - c}{\rho}\right|_{i=1}^n \text{ são tais que } \left|\frac{z_i - c}{\rho}\right| < \frac{\rho}{\rho} = 1.$$

Sendo assim, para encontrar os zeros de $C(z)$, levemos / proceder como o algoritmo descrito abaixo, usando o teorema em cada passo:

1-) $C(z)$ tem zeros em $|z| < 1$?

Se não, considere $g(z) = C(2z)$; $g(z)$ tem zeros em $|z| < 1$?; se não, considere $C(2^2 z)$ continuando neste caminho, mais cedo ou mais tarde encontramos o anel:

$$R = 2^j \leq |z| < 2^{j+1} = 2R$$

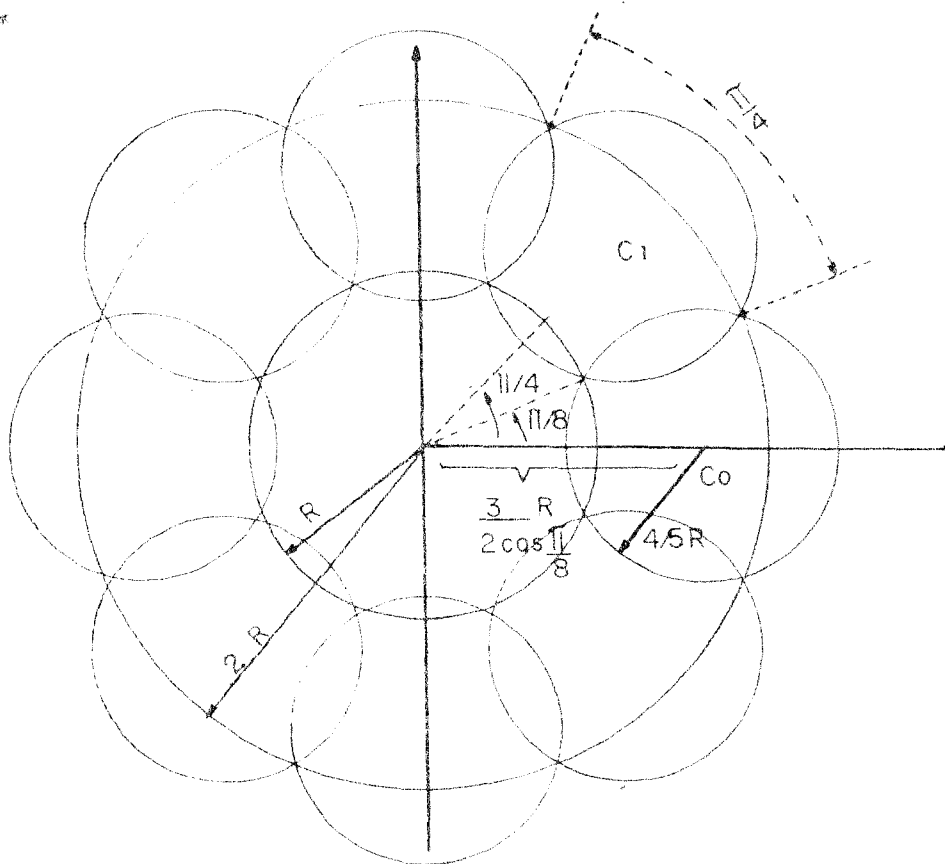
38

tal que $C(z)$ contenha um zero neste e nenhum em $|z| = R$ (se $C(z)$ / tem um zero em $|z| = 1$, nós dividimos ao meio o raio até que encontremos um disco dentro do qual não há zeros. Assim, novamente temos uma desigualdade da forma (38) que contém um zero de $C(z)$)

2-) É fácil verificar que este anel pode ser coberto / por oito discos sobrepostos, com raios $\frac{4}{5} R$ e centros $c_k = \frac{3}{2} R e^{i\pi k/4}$, $k = 0, 1, \dots, 7$. (Veja fig. 1).

Para tanto, basta verificarmos que a intersecção de dois discos consecutivos D_0 e D_1 , por exemplo, ocorre fora do a nel (ou, no máximo, sobre o anel).

Uma cobertura mais econômica porém, é obtida quando tomamos os discos com centros $C_k = \frac{3}{2\cos\pi/8} R e^{ik\pi/4}$ conforme figura abaixo :



$$C_0 = \frac{3}{2\cos\pi/8} R$$

$$C_k = \frac{3}{2\cos\pi/8} R e^{ik\pi/4}, \quad k=1, \dots, 7$$

Testando cada um destes discos por vez, (usando o teorema) nós encontramos pelo menos um que contém uma raiz de $C(z)$.

3-) Chamando o centro deste círculo de C_1 e tomando o raio $\frac{4}{5} R$ nós procedemos como no passo 1, exceto que agora nós dividimos o raio para cada estágio.

Finalmente encontramos um anel

$$R_1 = \frac{4}{5} R 2^{-j_1} \leq |z - c_1| < \frac{4}{5} R 2^{-(j-1)} = 2R_1$$

o qual contém um zero de $P(z)$.

Como no passo dois, nós cobrimos este anel e repetimos o passo 2-) e 3-) tantas vezes quanto requerer nossa precisão / pré-fixada, (veja fig. 2); note que o método não converge necessariamente para α_1 , aquela raiz que determinou o 1º anel.

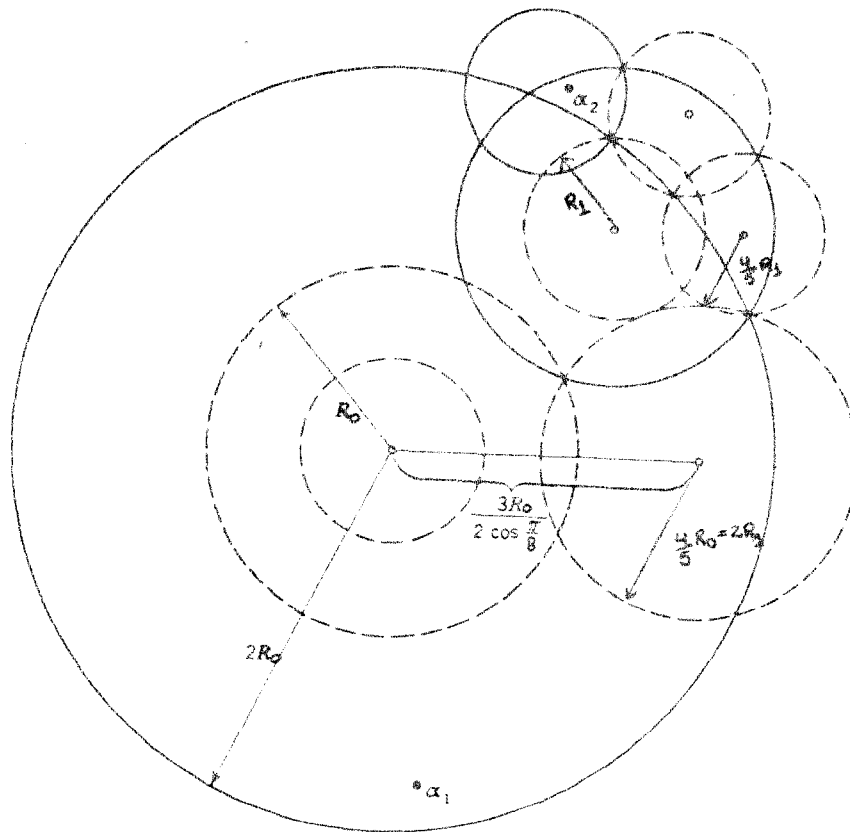


FIG. 2

Desde que j_1 , no passo 3-), é positivo,

$$2R_1 \leq \frac{4}{5} R, \quad 2R_2 \leq \frac{4}{5} R_1 \leq \frac{8}{25} R;$$

em geral, depois de k passos, as raízes de $C(z)$ estão no círculo de raio $2R_k$, onde:

$$R_k \leq \frac{2}{5} R_*$$

A Saída para o caso não incluído no Teorema:

Se, por exemplo, no passo 1, para um raio R , temos que $T^k [g(0)] = 0$ mas, $T^{k-1} [g(0)]$ não é constante; a coisa mais simples a fazer é escolher um novo raio βR , onde $1/2 < \beta < 1$, digamos $\beta = 3/4$ e continuar com este valor. Se isto acontece no passo 3, então usamos o valor $1 < \beta < 2$. (Isto é, fazemos uma translação).

Observamos ainda que a velocidade de convergência do método não é afetada pela multiplicidade dos zeros ou quando as / raízes estão agrupadas [13, pp.358]; além disso, em qualquer estágio do método, nós podemos substituir o processo por qualquer outro que convirja mais rapidamente.

2.2-3 - O MÉTODO DE BERNOULLI

Este é um método que calcula, a cada passo, a maior raiz em módulo, de um polinômio.

Para tanto, se temos

$$P_n(z) = z^n + a z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n = 0, \quad 41$$

assumimos que suas raízes, r_j , são distintas e que, portanto, podem ser ordenadas como:

$$|r_1| > |r_2| > \dots > |r_n|.$$

Esta equação polinomial e suas raízes tem uma relação com a equação das diferenças:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_v = - (a_1 g_{v-1} + \dots + a_n g_{v-n}) , \quad v = n, n+1, \dots \quad 42,a \\ g_0 = c_0 , g_1 = c_1 , \dots , g_{n-1} = c_{n-1}. \quad 42,b \end{array} \right.$$

Além disto, a solução de (42, a) é da forma

$$g_v = b_1 r_1^v + b_2 r_2^v + \dots + b_n r_n^v ; \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad 43$$

[9, pp 98]. O polinômio (41) é chamado de polinômio característico da e quação (42, a).

Então, para n valores iniciais, c_j , obtemos facilmente os valores g_v 's, a partir de (42, a), (com n multiplicações).

Para $v \geq 1$, temos:

$$\frac{g_{v+1}}{g_v} = r_1 \frac{b_1 + b_2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{v+1} + \dots + b_n \left(\frac{r_n}{r_1}\right)^{v+1}}{b_1 + b_2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^v + \dots + b_n \left(\frac{r_n}{r_1}\right)^v} =$$

44

$$= r_1 + O\left(\left|\frac{r_2}{r_1}\right|^v\right)$$

quando assumimos que $b_1 \neq 0$ e, neste caso

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{g_{v+1}}{g_v} = r_1$$

45

já que, $\left|\frac{r_k}{r_1}\right| < 1$, para $k = 2, 3, \dots$

Este método consiste em usar (42, a) para computar sucessivos valores de g_v e então computar o raio g_{v+1}/g_v até que este convirja para r_1 .

A velocidade de convergência é determinada pelo raio $\left|\frac{r_2}{r_1}\right|$.

Observamos que para ocorrer convergência do método, assumimos algumas restrições sobre as raízes de (41); quando $|r_1| = |r_2|$, (45) pode ser verificado quando se faz algumas modificações mas, quando r_1 é complexa, ou quando há várias raízes de maior multiplicidade, (45) pode

não ocorrer. O número de casos especiais é muito grande e cada um requer uma certa modificação do método, logo, como uma proposta geral, este método é pior que o de Lehmer-Schur.

CAPÍTULO 3

O ALGORITMO COMPOSTO

3.1 - INTRODUÇÃO

Apresentamos um algoritmo que calcula todas as raízes de um polinômio real. O algoritmo é composto de diversos métodos básicos, conhecidos, que dão informações sobre zeros de polinômios e não é restrito a uma classe de polinômios com características particulares se não a de terem coeficientes reais; em particular, este algoritmo é eficiente no cálculo de zeros de polinômios que contém zeros múltiplos.

3.2 - DESCRIÇÃO

Inicialmente os coeficientes do polinômio dado são escalados, de maneira a minimizar suas variações de ordem de magnitude. O polinômio escalado é então fatorado, através do uso do algoritmo euclidiano para obtenção do maior divisor comum do polinômio e sua derivada, em "m" fatores polinomiais; e assim cada fator polinomial contém somente zeros simples. Se os graus dos fatores polinomiais são menores que três, os zeros são encontrados diretamente; senão, o seguinte algoritmo é usado:

1 - Os zeros reais são obtidos com o uso do Teorema de Sturm com o qual é encontrado um intervalo contendo um único zero real. O conhecimento destes intervalos permite o uso do Método de Newton-Raphson para obtenção rápida de cada zero.

2 - Usando os valores dos zeros reais, um intervalo é encontrado no qual $K + 1$ pontos são determinados, K sendo o número de zeros complexos a determinar. Uma interpolação polinomial, $C(z) = P(z) / R(z)$ é unicamente de

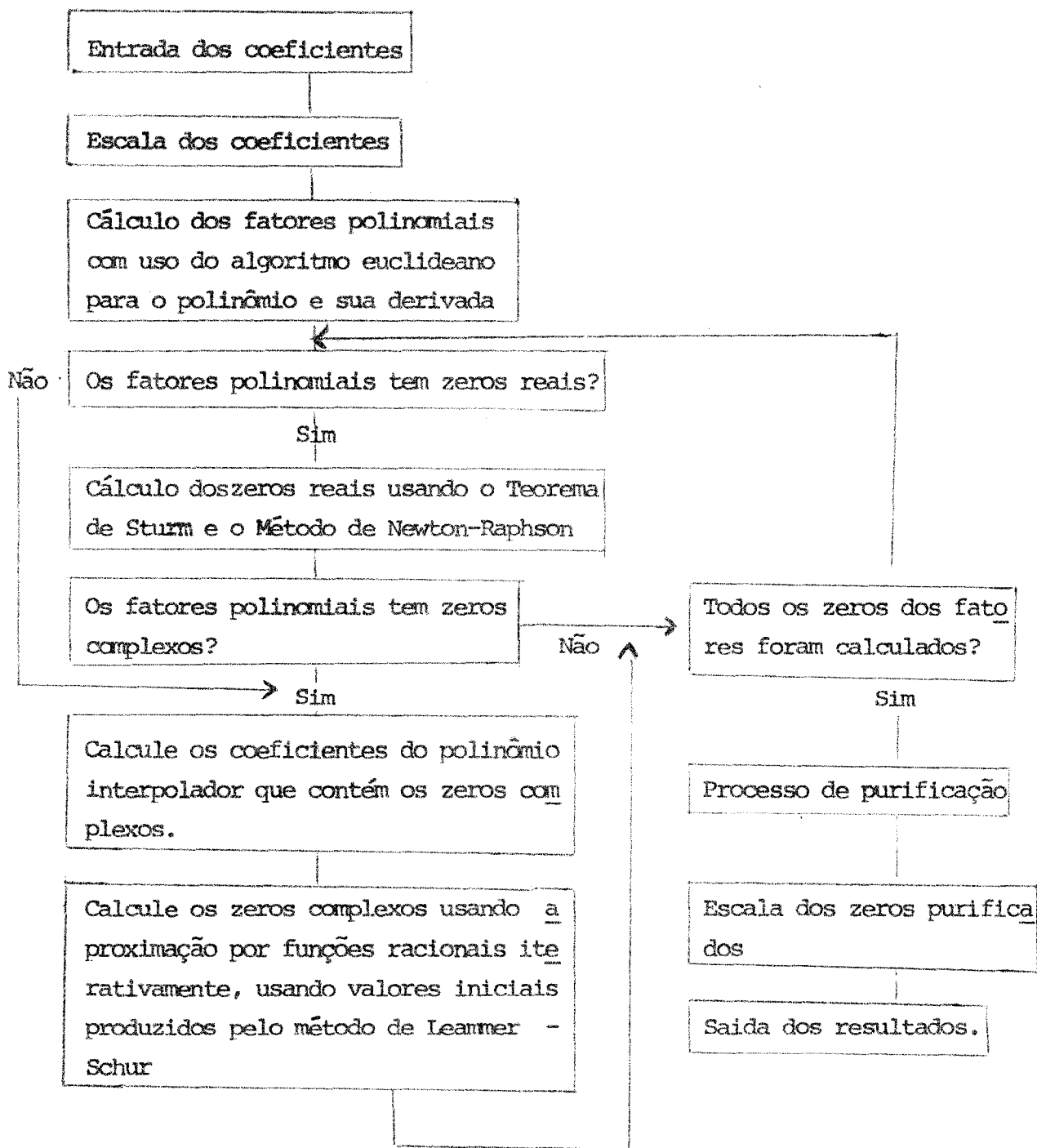
terminada pelos $K + 1$ pontos, z_i , e seus valores associados, $Y_i = P(z_i)/R(z_i)$ para $i = 1, \dots, K + 1$; onde $P(z)$ representa o fator polinomial com o qual estamos trabalhando, $R(z)$ representa o polinômio contendo os zeros reais de $P(z)$ e $C(z)$ será o polinômio contendo os zeros complexos de $P(z)$. Não precisamos nos preocupar com $C(z)$ contendo zeros múltiplos porque cada fator polinomial contém zeros simples somente.

3 - O polinômio $C(z)$ pode então ter seus zeros calculados pelo uso de um processo iterativo baseado em aproximação de funções por uma função racional que usa valores iniciais produzidos pelo Método de Lehmer-Schur.

4 - Quando todos os zeros de todos os fatores polinomiais são obtidos, eles são submetidos a um processo de purificação. Os zeros purificados são então escalados de acordo com o fator de escala usado para os coeficientes originais.

Para maior controle do algoritmo, observe o fluxograma:

FLUXOGRAMA



Nas seções seguintes discutimos detalhadamente cada uma das partes que compõem o algoritmo.

3.2-1 - ESCALA DOS COEFICIENTES

Observamos que uma ampla variação em ordem de magnitude dos coeficientes de um polinômio, em geral, é uma fonte de problemas nos algoritmos para encontrar raízes de polinômios. Com o propósito de diminuir erros de arredondamento, consideramos um pré-processamento do polinômio através da escala uniforme de todos os zeros.

Defina a Variação do Polinômio $P(z)$,

$$P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i} \quad 46$$

por

$$V(P(z)) = \log \left(\frac{\text{MAX } |a_n|}{\text{MIN}_{a_n \neq 0} |a_n|} \right) \quad 47$$

Seja $z = \bar{z}/s$. Então, para algum $s \neq 0$, o polinômio escalado $\bar{P}_s(\bar{z}) = P(sz)$, tem a variação:

$$V(\bar{P}_s(\bar{z})) = \log \left(\frac{\text{MAX } |a_n s^n|}{\text{MIN } |a_n s^n|} \right) \quad 48$$

Podemos então escolher "s" de modo que este minimize $V(\bar{P}_s)$. Desta maneira, o programa matemático pode ser expresso como:

$$\begin{array}{l}
 \text{MIN } t/d \\
 \text{s.a. } \left\{ \begin{array}{l} t \geq |a_n| s^n \\ d \leq |a_n| s^n, \quad a_n \neq 0 \\ d > 0 \\ s > 0 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad 49$$

Seja $\{a_{n_i}\}_{i=1, \dots, M}$ o conjunto dos coeficientes não nulos de $P(z)$.

Se fazemos as transformações:

$$\begin{array}{l}
 T = \log t, \quad D = \log d \\
 S = \log s \quad \text{e} \quad \alpha_i = \log |a_{n_i}|, \quad i = 1, \dots, M,
 \end{array}
 \quad 50$$

verificamos que um programa matemático equivalente a (49) é:

$$\begin{array}{l}
 \text{MIN } T - D \\
 \text{s.a. } \left\{ \begin{array}{l} T - n_i s \geq \alpha_i \\ -D + n_i s \geq -\alpha_i \end{array} \right. \quad i = 1, \dots, M,
 \end{array}
 \quad 51$$

cuja solução, obtida por técnicas de programação linear, produz o valor ótimo para s o qual minimiza a variação de $P(z)$.

Observamos que o problema, tal como formulado em (51) tem as seguintes características particulares:

- (i) Só tem 3 variáveis: T, D e S; e cerca de 2M restrições
- (ii) Sua função objetiva é $T - D$.

Sabemos que o uso do Método Simplex, [10 e 11], é tão mais "complicado" quanto maior for o número de restrições do problema. Assim, se o usamos diretamente em (51) precisamos de cerca de $2M - 3$ variáveis de folga e da "fase 1", provavelmente para M variáveis; de modo que a característica (i) sugere o uso de outras técnicas. Uma primeira idéia seria a aplicação do Método Dual - Simplex ; porém isto se torna inviável segundo a característica (ii). Portanto, a única saída é o uso do Método Simplex ao problema Dual de (51) , o qual só terá três restrições de igualdade e cujo resultado nos fornece, sem nenhum esforço adicional, a solução de (51) quando trabalhamos com o Simplex-Revisado [11, pp 55].

Note que, qualquer que seja o polinômio de grau n:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n ; \quad a_i \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a_0 \neq 0.$$

Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $a_0 = 1$. Assim, da definição de $\{a_{n_i}\}$ temos que $n_1 = 0$ e, portanto, para a formulação do problema (51):

$$\text{MIN } x_1 - x_2$$

$$\text{S. a } \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_1 - n_{23} X_{23} \geq \alpha_2 \\ x_1 - n_{33} X_{33} \geq \alpha_3 \\ \vdots \\ x_1 - n_{M3} X_{M3} \geq \alpha_M \\ -x_2 \geq 0 \\ -x_2 + n_{23} X_{23} \geq -\alpha_2 \\ -x_2 + n_{33} X_{33} \geq -\alpha_3 \\ \vdots \\ -x_2 + n_{M3} X_{M3} \geq -\alpha_M \end{array} \right. \quad T = x_1, \quad D = x_2 \quad e \quad S = x_3.$$

temos o seu problema dual:

$$\text{MAX } \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3 + \dots + \alpha_M Y_M - \alpha_2 Y_{M+2} - \alpha_3 Y_{M+3} \dots - \alpha_M Y_{2M}$$

54

$$\text{S.a. } \left\{ \begin{array}{l} Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_M = 1 \\ Y_{M+1} + Y_{M+2} + \dots + Y_{2M} = 1 \\ -n_{23} Y_2 - n_{33} Y_3 \dots - n_{M3} Y_M + n_{23} Y_{M+2} + \dots + n_{M3} Y_{2M} = 0 \end{array} \right.$$

que, como vemos, requer auxílio da fase I, somente para uma variável artificial.

Passando à formulação por quadro, temos agora o problema:

$$\text{MIN } C = [0, 0, \dots, 0, -1]$$

53

	Y_1	Y_2	Y_M	Y_{M+1}	Y_{M+2}	...	Y_{2M}	Y_{2M+1}	b
Y_1	1	1		1	0	0		0	0	1
Y_{M+1}	0	0		0	1	1		1	0	1
Y_{2M+1}	0	$-n_2$		$-n_M$	0	n_2		n_M	1	0

Donde:

$$(I) \quad B = \{1, M+1, 2M+1\}$$

	B^{-1}			X_B
1	1	0	0	1
M+1	0	1	0	1
2M+1	0	0	1	0

$$\lambda = (0, 0, -1) \quad B^{-1} = (0, 0, -1)$$

$$r = (0, 0, \dots, 0) - (0, 0, -1) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -n_2 & \dots & -n_M & n_2 & \dots & n_M \end{pmatrix} =$$

$$\downarrow$$

$$= (-n_2, \dots, -n_M, n_2, \dots, n_M)$$

Como $n_i > n_j$ para $i > j$, Y_{2M} será a variável indicada a entrar na base (diminui o valor da função objetiva).

De

$$\begin{array}{c|ccc|cc}
 & \begin{matrix} B^{-1} \end{matrix} & & & Y_B & Y_{2M} \\
 \hline
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 M+1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 2M+1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \textcircled{\eta_M}
 \end{array} \rightarrow$$

determinamos que Y_{2M+1} deverá sair da base. Então obtemos:

(II)

$$B = \{1, M+1, 2M\}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & \begin{matrix} B^{-1} \end{matrix} & & & Y_B \\
 \hline
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 M+1 & 0 & 1 & -1/\eta_M & 1 \\
 2M & 0 & 0 & 1/\eta_M & 0
 \end{array}$$

$$\lambda = (0, 0, 0) \quad B^{-1} = (0, 0, 0)$$

$$r = (0, 0, \dots, -1) \quad D = (0, 0, \dots, -1)$$

E, como todas as componentes de r são menores ou iguais a zero, já temos a solução ótima para (53), (isto é, temos uma base inicial). Logo, para resolvermos (52) temos que resolver:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MAX } C = |0, -\alpha_2, -\alpha_3, \dots, -\alpha_M, 0, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_M| \\ \\ \begin{array}{c|cccccccc|c} & Y_1 & Y_2 & \dots & Y_M & Y_{M+1} & Y_{M+2} & \dots & Y_{2M} & b \\ \hline Y_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ Y_{M+1} & 0 & n_2/n_M & \dots & 1 & 1 & 1-n_2/n_M & & 0 & 1 \\ Y_{2M} & 0 & -n_2/n_M & \dots & -1 & 0 & n_2/n_M & & 1 & 0 \end{array} \end{array} \right. \quad 54$$

Assim:

É claro que, dado $P(z)$ e determinados os valores n_i e α_i , para $i = 1, \dots, M$, encontrar Y_B^* , o ótimo de (54) é tudo o que precisamos para que (51) seja resolvido, pois $X_B^* = c_B B^{-1}$, o ótimo de (51) . Daí, temos os valores t, d e s - o valor $c_B B^{-1}$ é o último valor de λ , quando encontramos o ótimo.-

Exemplo 1:

Considere o polinômio:

$$P(z) = z^3 - 10^{-8}z^2 + 10^{18}$$

Note que seus coeficientes estão "muito distantes":

$$V(p) = \log \left(\frac{10^{18}}{10^{-8}} \right) = 26. \quad \text{Façamos então uma escala de modo a diminuir}$$

$V(p)$.

Temos:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 & a_{n_1} &= 1 \\ a_1 &= -10^{-8} & a_{n_2} &= -10^{-8} \\ a_2 &= 0 & a_{n_3} &= 10^{18} \\ a_3 &= 10^{18} \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} n_1 &= 0 & \alpha_1 &= 0 \\ n_2 &= 1 & e & \alpha_2 = -8 \\ n_3 &= 3 & \alpha_3 &= 18 \end{aligned} \quad M = 1, 2, 3.$$

Assim, nosso problema é:

$$\text{MAX } C = | 0, 8, -18, 0, -8, 18 |$$

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	b
Y_1	1	1	1	0	0	0	1
Y_4	0	1/3	1	1	2/3	0	1
Y_6	0	-1/3	-1	0	1/3	1	0

$$(I) \quad B = \{1, 4, 6\} \quad D = \{2, 3, 5\}$$

	B^{-1}			Y_B
1	1	0	0	1
4	0	1	0	1
6	0	0	1	0

$$\lambda = (0, 0, 18) \quad B^{-1} = (0, 0, 18)$$

$$r = (8, -18, -8) - (0, 0, 18) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1 & 2/3 \\ -1/3 & -1 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{c} \text{Entra } Y_5 \\ \downarrow \\ = (14, 0, -14) \end{array}$$

$$Y_5 = Y_5$$

	B^{-1}			Y_B	Y_5
1	1	0	0	1	0
4	0	1	0	1	2/3
6	0	0	1	0	(1/3) \rightarrow Sairá Y_6

Temos:

$$(II) \quad B = \{1, 4, 5\} \quad , \quad D = \{2, 3, 6\}$$

$$B^{-1}$$

	B^{-1}			Y_B
1	1	0	0	1
4	0	1	-2	1
5	0	0	3	0

$$\lambda = (0, 0, -8) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (0, 0, -24)$$

$$r = (8, -18, 18) - (0, 0, -24) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

Entra Y_3

↓

$$= (0, -42, 42)$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

	B^{-1}	Y_B	Y_3
1	1 0 0	1	1
4	0 1 -2	1	3
5	0 0 3	0	-3

→ Sai Y_4

Temos:

$$(III) \quad E = \{1, 3, 5\} \quad , \quad D = \{2, 4, 6\}$$

	B^{-1}	Y_B
1	1 -1/3 2/3	2/3
3	0 1/3 -2/3	1/3
5	0 1 1	1

$$\lambda = (0, -18, -8) \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (0, -14, 4)$$

$$r = (8, 0, 18) - (0, -14, 4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (14, 14, 14) \rightarrow \text{o que indica que já atingimos o ótimo.}$$

Portanto:

$$\begin{cases} Y_1^* = 2/3 \\ Y_3^* = 1/3 \\ Y_5^* = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} Y_2^* = Y_4^* = Y_6^* = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} z^* &= 0Y_1 - 8Y_2 + 18Y_3 + 0Y_4 + 8Y_5 - 18Y_6 \\ &= 6 + 8 = 14 \end{aligned}$$

além disto

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$X^* = c_B B^{-1} = (0, -14, 4)$$

Isto é :

$$\begin{cases} X_1^* = 0 \\ X_2^* = -14 \\ X_3^* = 4 \end{cases}$$

$$W^* = 14$$

Finalmente

$$T = 0 = \log t$$

$$D = -14 = \log d$$

$$S = 4 = \log s$$

De $\log S = 4 \Rightarrow \boxed{s = 10^4}$, e $P(sz)$, o polinômio escalado fica :

$$P_S(z) = 10^{12}z^3 - z^2 + 10^{18}$$

com

$$V(P_S) = \log \left(\frac{10^{18}}{1} \right) = 18 \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{menor que } 26}$$

Um exemplo que usa este resultado, usando tal fator de escala, é mostra
do na tabela abaixo, na qual os coeficientes do polinômio mal-condicionado
discutido em Wilkison [3, pp 41] são mostrados antes e depois da es
cala.

EXEMPLO DE ESCALA DE COEFICIENTES

$$P(z) = (z - 1)(z - 2) \dots (z - 20)$$

COEFICIENTES ORIGINAIS	POTÊNCIAS DE Z	COEFICIENTES ESCALADOS
.2432902008176640 + 019	0	.10000000706626232 + 001
-.8752948036761600 + 019	1	-.2987694968616923 + 002
.1380375975364070 + 020	2	.3912780748756267 + 003
-.1287093124515098 + 020	3	-.3029732648207197 + 004
.8037811822645051 + 019	4	.1571225021217127 + 005
-.3599979517947607 + 019	5	-.5843954115543346 + 005
.1206647803780373 + 019	6	.1626647723686615 + 006
-.3113336431613906 + 018	7	-.3485340815756295 + 006
.6303081209929489 + 017	8	.5859739597035374 + 006
-.1014229986551145 + 017	9	-.7830113839688772 + 006
.1307535010540395 + 016	10	.8382839890616433 + 006
-.1355851828995300 + 015	11	-.7218655094001482 + 006
.1131027699538100 + 014	12	.5000616127424668 + 006
-.7561111845000000 + 012	13	-.2776145050337197 + 006
.4017177163000000 + 011	14	.1224852215667365 + 006
-.1672280820000000 + 010	15	-.4234265940941486 + 005
.5332794600000000 + 008	16	.1121321100419947 + 005
-.1256850000000000 + 007	17	-.2194647643162539 + 004
.2061500000000000 + 005	18	.2989309677751350 + 003
-.2100000000000000 + 003	19	-.2528791827178865 + 002
.1000000000000000 + 001	20	.1000000000000000 + 001

FATOR DE ESCALA = .830436091033 + 001

Note que os coeficientes do polinômio original, de ordem de magnitude máxima e mínima são 10^{20} e 10 respectivamente, dando uma variação de 19 , enquanto no polinômio escalado, os coeficientes de ordem MÁX e MIN são 10 e 10^6 respectivamente, dando a variação 5 .

Experiências numéricas em [15] mostram que com a escala dos coeficientes há uma considerável melhora no processo de fatoração do polinômio.

3.2-2 - FATORAÇÃO VIA MAIOR DIVISOR COMUM

Nosso objetivo, nesta parte do algoritmo, é fatorar o polinômio determinado na seção anterior.

Primeiramente geramos uma sequência de polinômios P_i , como:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = \text{Polinômio que estamos trabalhando} \\ P_2 = \text{M.D.C. } (P_1, P'_1) \\ \dots\dots\dots \\ P_i = \text{M.D.C. } (P_{i-1}, P'_{i-1}) \text{ para } i = 2, \dots \end{array} \right. \quad 55$$

TEOREMA 1

Os zeros de P_1 que tem multiplicidade maior ou igual a "i" aparecerão em P_i . Os zeros de P_1 com multiplicidade menor que i não aparecerão em P_i para $i = 2, 3 \dots$

Demonstração:

Seja P_1 contendo o fator $(z - z_1)^k$, $k > 1$. O maior divisor comum de P_1 e P'_1 conterá o fator $(z - z_1)^{k-1}$. E assim:

$$\begin{array}{l} P_1 = \dots (z - z_1)^k \dots \\ P_2 = \dots (z - z_1)^{k-1} \dots \\ \dots\dots\dots \\ P_i = \dots (z - z_1)^{k-i+1} \dots \text{ para } i = 2, \dots \end{array}$$

A potência, $k-i+1$ deverá ser maior que zero para que $(z - z_1)$ não seja constante, portanto, k deverá ser maior ou igual a i.

COROLÁRIO:

Seja m o menor inteiro para o qual P_{m+1} é constante. Então m é a maior multiplicidade de algum zero de P_1 .

Segue daí que a sequência de polinômios (55) pode terminar em P_m .

TEOREMA 2

O grau de P_i é maior que o grau de P_{i+1} , para $1 \leq i \leq m-1$.

Demonstração:

A demonstração é óbvia já que o maior divisor comum de um polinômio e sua derivada deve ser de grau pelo menos um a menos que o grau de polinômio.

Exemplo 1:

Seja $P_1 = z^9 - 14z^8 + 85z^7 - 294z^6 + 639z^5 - 906z^4 + 839z^3 - 490z^2 +$
 $- 164z - 24$

$$[P_1 = (z - 1)^5 (z - 2)^3 (z - 3)]$$

A sequência de polinômios gerados por (55), é então gerada:

$$P_2 = z^6 - 8z^5 + 26z^4 - 44z^3 + 41z^2 - 20z + 4$$

$$P_3 = z^4 - 5z^3 + 9z^2 - 7z + 1$$

$$P_4 = z^2 - 2z + 1$$

$$P_5 = z - 1, \quad ,$$

ou seja

$$P_2 = (z-1)^4 (z-2)^2$$

$$P_3 = (z-1)^3 (z-2)$$

$$P_4 = (z-1)^2$$

$$P_5 = (z-1)$$

A partir do que notamos:

O zero $z_1 = 1$ de multiplicidade 5 aparece em P_1, \dots, P_5 .

O zero $z_2 = 2$ de multiplicidade 3 aparece em P_1, P_2 e P_3 .

O zero $z_3 = 3$ de multiplicidade 1 aparece em P_1 .

O processo de fatoração termina quando algum P_m e sua derivada são relativamente primos. Usando o algoritmo euclidiano, P_i e P'_i são usados para calcular seu maior divisor comum, P_{i+1} , como:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{i,0} = P_i \\ P_{i,1} = P'_i \\ P_{i,k-1} = \alpha_{i,k} P_{i,k} + P_{i,k+1} \\ P_{i,k_i-1} = \alpha_{i,k_i} P_{i,k_i} \end{array} \right. \quad 1 \leq k \leq k_{i-1}$$

onde k é o primeiro inteiro para o qual $P_{i,k+1}$ é nulo. O maior divisor comum de P_i é $P_{i,k_i} = P_{i+1}$, exceto quando P_{i,k_i} é constante, em qual caso

P_i não é fatorável. Assim, a sequência de polinômios, P_i , é calculada para $i = 1, \dots, m$.

Depois de gerar os P polinômios, podemos obter facilmente outra sequência de polinômios:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_i = P_i / P_{i+1} \\ Q_m = P_m \end{array} \right. \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m-1, \quad 57$$

onde m representa o índice do último polinômio da sequência dos P polinômios e a maior multiplicidade de qualquer zero de P_1 .

TEOREMA 3

Cada polinômio Q_i contém somente zeros simples.

Demonstração:

Cada polinômio Q_i é formado dividindo-se o polinômio P_i pelo maior divisor comum de P_i e P_{i+1} . Este maior divisor comum contém todos os fatores de grau um a menos do grau daqueles fatores que aparecem em P_i . Assim, quando a divisão é efetuada, Q_i conterá somente fatores lineares, e portanto zeros simples.

TEOREMA 4

Os zeros de Q_i aparecem em P_i com multiplicidade maior ou igual a i .

Demonstração:

Este fato vem diretamente do Teorema 1 e da definição de Q_1 .

TEOREMA 5

Todos os fatores de Q_i são fatores de Q_j para $j < i$.

Demonstração:

Idem demonstração anterior.

Exemplo 2:

Como no exemplo 1, seja

$$P_1 = (z - 1)^5 (z - 2)^3 (z - 3) ;$$

Então temos:

$$Q_1 = (z - 1) (z - 2) (z - 3)$$

$$Q_2 = (z - 1) (z - 2)$$

$$Q_3 = (z - 1) (z - 2)$$

$$Q_4 = (z - 1)$$

$$Q_5 = (z - 1) .$$

O Teorema 5 sugere a formação de uma nova sequência de polinômios \tilde{Q} como:

$$\begin{cases} \tilde{Q}_m = Q_m \\ \tilde{Q}_i = Q_i / Q_{i+1} \quad \text{para } i = m-1, \dots, 1, \end{cases} \quad 58$$

para os quais obtemos os zeros de P_1 , pois como cada Q_i contém todos os fatores que aparecem em Q_{i+1} , quando os zeros de Q_{i+1} são encontrados, os fatores de Q_{i+1} são "tirados" de Q_i de maneira que estes mesmos zeros não sejam encontrados outra vez.

Exemplo 3

Continuando o Exemplo 1, usando os polinômios determinados no exemplo 2 e (58), temos os polinômios

$$\tilde{Q}_5 = (z - 1)$$

$$\tilde{Q}_4 = 4$$

$$\tilde{Q}_3 = (z - 2)$$

$$\tilde{Q}_2 = 1$$

$$\tilde{Q}_1 = (z - 3)$$

TEOREMA 6

\tilde{Q}_i conterá somente aqueles zeros que aparecem em P_1 com multiplicidade i , para $i = 1, \dots, m$.

Demonstração:

Como mostramos no Teorema 4, os zeros de Q_i aparecem em P_i com multiplicidade maior ou igual que i . Quando Q_i é dividido por Q_{i+1} , todos os zeros de multiplicidade maior que i são tirados. Portanto, \tilde{Q}_i conterá somente aqueles zeros que aparecem em P_i com multiplicidade igual a i .

Os zeros dos \tilde{Q} polinômios serão então calculados. Se os graus dos \tilde{Q} polinômios são menores que 3, então a equação polinomial é resolvida diretamente, [1, pp 105] senão, o algoritmo descrito nas seguintes seções é usado.

Exemplo 4

Portanto, para os polinômios determinados no Exemplo 3, conforme o Teorema 6, temos que:

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 = 1 & \text{ é zero de multiplicidade 5 em } P_1 \\ \bar{z}_2 = 2 & \text{ " " " " " 3 em } P_1 \\ \bar{z}_3 = 3 & \text{ " " " " " 1 em } P_1. \end{aligned}$$

Nós temos algumas vantagens com este processo de fatoração. Primeiro que, a partir deste, estaremos trabalhando com polinômios de graus menores que o grau do polinômio dado, e, segundo, encontrando zeros de polinômios que contém zeros simples somente.

3.2-3 - CÁLCULO DOS ZEROS REAIS USANDO O TEOREMA DE STURM E O
MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.

Após a fatoração do polinômio, estamos interessados em determinar os ze
ros reais de cada fator polinomial \tilde{Q}_i .

Existem muitos critérios para delimitar, num primeiro estágio, as raí -
zes de um polinômio. Aqui consideramos que:

$$\text{Para qualquer raiz } \bar{z} \text{ de } Q_i(z) = \sum_{k=0}^r \tilde{q}_k z^{r-k} \quad ,$$

tem-se:

$$|\bar{z}| \leq 2 \text{ MÁX } \{ |\tilde{q}_k|^{1/k} \}_{1 \leq k \leq r}$$

Estamos assim determinando um intervalo real $[-\alpha, \alpha]$ que contém todas as raízes
reais de \tilde{Q}_i , se há raízes reais.

O uso do Teorema de Sturm para separar zeros reais não é, certamente, novo.
É particularmente próprio para ser usado no algoritmo composto já que a sequên-
cia de Sturm é gerada na obtenção no maior divisor comum de dois polinômios. A
lém disto permite obtenção dos zeros reais sem usar deflação explícita. Zeros
complexos serão considerados separadamente.

Usando \tilde{Q}_i e sua derivada geramos tal sequência de Sturm para o uso dos re-
sultados do Teorema de Sturm (2.2-1). Assim, o eixo real é pesquisado no senti-
do de determinarmos quantos zeros $\tilde{Q}_i(z)$ tem em $[-\alpha, \alpha]$: se é verdade que $\tilde{Q}_i(z)$
contem zeros reais, utilizamos o Teorema de Sturm sucessivamente para subinter-

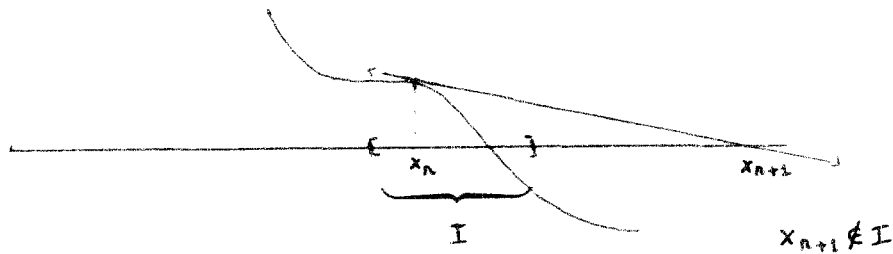
valos de comprimento $h = 0.1$, até determinarmos todos aqueles que contenham pelo menos um zero de $\tilde{Q}_i(z)$; estes intervalos são então divididos ao meio sucessivamente, para com o uso do mesmo teorema determinar intervalos "suficientemente pequenos" contendo um único zero real - (é claro que podemos adotar outra política de pesquisa, porém, esta, de maneira geral, parece ser a de menos esforço computacional se o grau do polinômio é grande).

Determinados estes intervalos, tomamos seus pontos médios, X_0 , se $\tilde{Q}_i(X_0) \neq 0$, como valor inicial para o Método de Newton-Raphson:

$$X_{n+1} = X_n - \tilde{Q}_i(X_n)/\tilde{Q}'_i(X_n) \quad 59$$

que itera até que convergência quadrática é realizada.

Notamos que "suficientemente pequeno" é impreciso, o que estamos objetivando com tal afirmação é a convergência de (59) que pode não ocorrer... condições necessárias para que (59) convirja são dadas em [12 , pp 135], porém aqui não fazemos uso das mesmas. Em vez disto, incorporamos ao algoritmo composto um teste de proximidade que, a cada passo acusa se a iteração obtida está contida no intervalo determinado. Quando algum X_{r+1} computado não estiver contido naquele intervalo, abandonamos o valor X_{r+1} e decidimos com qual dos subintervalos continuamos o método, se à esquerda de X_r ou à direita de X_r , conforme a Regra do Sinal ... de maneira que se não estivermos nos aproximando da raiz pelo Método de Newton-Raphson estaremos fazendo-o pelo sempre convergente Método de Bisseção. Notamos que o teste pode falhar quando, por exemplo, existe um X_s naquele intervalo tal que $\tilde{Q}_i(X_s) \neq 0$ mas $\tilde{Q}'_i(X_s) = 0$, como:



Os critérios de convergência são:

$$|x_j - x_{j+1}| < \epsilon \quad ,$$

ou

$$|\tilde{Q}_i(x_j)| < \epsilon$$

Convergência quadrática é realizada já que cada fator polinomial contém somente zeros simples.

Esta parte do algoritmo é rápida apesar de requerer muitas avaliações de sequência de Sturm mesmo porque estas são obtidas pelas fórmulas recursivas definida em (1.2-2).

Se não há zeros reais em \tilde{Q}_i , então os zeros complexos de \tilde{Q}_i são calculados pelo processo iterativo descrito em (2.6).

3.2-4 - INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL REPRESENTANDO ZEROS COMPLEXOS.

Depois de calculados os zeros reais de $\tilde{Q}_i(z)$, os seus zeros complexos também ser calculados. Desde que não temos informações quando às magnitudes dos mesmos, evitamos usar deflação explícita para determinar o polinômio que contém os zeros complexos de \tilde{Q}_i . Uma técnica diferente - supressão - é empregada: com a informação do número de zeros reais e os seus valores, um polinômio $C_i(z)$ é construído, o qual conterá os zeros complexos de \tilde{Q}_i .

Seja:

$$R_i(z) = (z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_k), \text{ onde os } r_j \text{'s representam os } m \text{ zeros de } \tilde{Q}_i. \quad 60$$

Seja:

$$C_i(z) = \tilde{Q}_i(z)/R_i(z). \quad 61$$

Se $\tilde{Q}_i(z)$ tem grau n e $R_i(z)$ tem grau m , $C_i(z)$ tem grau $k = (n - m)$. Usando $(k + 1)$ pontos determinamos uma interpolação polinomial a qual define unicamente $C_i(z)$.

Definimos um intervalo entre o máximo e o mínimo valores dos zeros reais e, com este, $(K + 3)$ pontos, igualmente espaçados, são determinados; os pontos extremos serão ignorados já que $R_i(z) = 0$ para estes. Os restantes $(k + 1)$ pontos, X_j , são usados com seus valores associados $z_j = \tilde{Q}_i(X_j)/R_i(X_j)$, para construir o polinômio de grau k , como em (1.2-1).

Note porém que $R_i(X_j)$ pode ser nulo para algum dos X_j escolhidos. Como precaução, portanto, introduzimos um teste que acuse este fato. Quando isto for acusado, escolheremos um novo conjunto de X_j 's.

Determinado o polinômio interpolador usamos o processo descrito na secção seguinte para calcular os zeros de $C_i(z)$.

3.2-5 - CÁLCULO DOS ZEROS COMPLEXOS USANDO O MÉTODO DE LEHMER-SCHUR E FUNÇÕES ITERATIVAS.

Um método iterativo para encontrar os zeros complexos é dado, baseado em aproximações de $C_i(z)/C'_i(z)$ por funções racionais que são montadas a partir de valores previamente computados.

As três funções racionais usadas no algoritmo composto são:

$$\frac{C_1(z)}{C'_1(z)} = \frac{z - A_1}{b + cz}$$

$$\frac{\tilde{C}_1(z)}{\tilde{C}'_1(z)} = \frac{z - A_2}{b + cz}, \text{ onde } \tilde{C}_1(z) = \frac{C_1(z)}{z^n}$$

$$\frac{C_4(z)}{C'_4(z)} = \frac{z - A_4}{z^2 + bz + c}$$

Cada uma destas expressões contém três incógnitas: A_j , b e c . Usando três valores iniciais z_1 , z_2 e z_3 , um conjunto de três equações pode ser resolvido para cada uma das funções racionais. A única incógnita que nos interessa é A_j , a qual é uma aproximação para um zero de $C_i(z)$, para $j = 1, 2$ e 4 .

Outra aproximação, A_3 , é também usada já que poucos cálculos são necessários para produzi-la; é a aproximação obtida pelo Método de Newton-Raphson.

Em cada passo do processo iterativo, os cálculos são feitos usando z_i, z_{i+1}, z_{i+2} ordenados de modo que $C_i(z_i) \geq C_i(z_{i+1}) \geq C_i(z_{i+2})$ para as seguintes aproximações de um zero de $C_i(z)$; onde

$$F = C'_i(z)/C_i(z) :$$

$$A_1 = z_{i+2} + \frac{(z_{i+1}-z_{i+2})(z_{i+2}-z_i)(F_{i+1}-F_i)}{(z_{i+2}-z_{i+1})(F_{i+1}-F_i)+(z_i-z_{i+1})(F_{i+2}-F_{i+1})} \quad . \quad 62$$

$$A_2 = z_{i+2} + \frac{(z_i-z_{i+2})(z_{i+1}-z_{i+2}) \mid n(z_{i+1}-z_i)+z_i^2F_i-z_{i+1}^2F_{i+1} \mid}{D} ,$$

onde 63

$$D = (z_{i+1}-z_{i+2}) \mid z_i^2F_i-z_{i+1}^2F_{i+1} + (z_i-z_{i+1}) \mid z_{i+2}^2F_{i+2}-z_{i+1}^2F_{i+1} \mid .$$

$$A_3 = z_{i+2} - \frac{1}{F_{i+2}} \quad . \quad 64$$

$$A_4 = z_{i+2} + \frac{(z_{i+1}-z_{i+2})(F_i-F_{i+1})(z_i-z_{i+2})}{E} +$$

$$+ \frac{(z_{i+1}-z_{i+2})(z_i-z_{i+2})(z_{i+1}-z_i)}{E} , \quad 65$$

onde

$$E = (z_{i+1}-z_{i+2})(F_i-F_{i+1})+(z_i-z_{i+1})(F_{i+2}-F_{i+1}) .$$

Depois que A_1, A_2, A_3 e A_4 são calculadas, $|C_1(z)|$ é computado para cada uma destas 4 aproximações. Aquela A_j que produzir o menor valor absoluto de $C_1(A_j)$, indicando que esta A_j é a mais próxima de um zero de $C_1(z)$, é escolhida para ser usada na próxima iteração, quando trocamos z_i por z_{i+1} , z_{i+1} por z_{i+2} e z_{i+2} pela nova aproximação.

Este processo continua até que uma das aproximações satisfaça o seguinte critério de convergência:

$$|z - z_{i+2}| < \epsilon, \text{ ou}$$

$$|C_1(z_{i+2})| < \epsilon$$

Quando uma aproximação \bar{z} é tida, pelo critério, como um zero de $C_1(z)$, deflação explícita é usada, isto é $C_1(z)$ é dividido por $(z-\bar{z})(z-\bar{z}_c)$, onde \bar{z}_c é o conjugado complexo de \bar{z} ; e o processo continua após obtenção de três novos valores iniciais ... Até que todos os zeros de $C_1(z)$ são encontrados.

Uma vantagem deste processo é que, a cada iteração, a melhor de três alternativas é escolhida; além disto as funções iterativas não são afetadas quando há agrupamento de zeros e suas ordens de convergência são de 1.84 para funções com fatores lineares no denominador, e 1.93 quando com fatores quadráticos.

Já que esta parte do algoritmo composto usa deflação explícita, cuidados especiais devem ser tomados para a seleção dos valores iniciais de maneira que determinemos zeros em ordem crescente de magnitude. E, é isto o que faz, aproximadamente, o Método de Lehmer-Schur, o qual usamos como:

Seleção dos Valores Iniciais

Usando o Método de Lehmer-Schur, o plano complexo é pesquisado no sentido de procurarmos um anel, $R < |z| < 2R$, contendo um zero do fator polinomial $C_i(z)$. Este anel é então coberto por discos fechados até que encontremos um destes $D_k(c_k, 4/5R)$ contendo um zero de $C_i(z)$. Como estamos procurando valores iniciais para o método iterativo descrito anteriormente, logo após a de terminação do primeiro disco contendo um zero, $D_{k^*}(c_{k^*}, 4/5R)$, tomamos o seu centro, c_{k^*} , como um dos valores iniciais, z_1 , e, a partir deste, escolhemos os outros dois valores, z_2 e z_3 , sobre circunferência do disco, a uma distância R de z_1 , de maneira que estes fiquem "perto" da origem.

Assim, se

$$z_1 = c_{k^*} = \frac{3}{2 \cos \pi/3} R e^{ik^*\pi/4},$$

onde k^* representa o índice para o qual $|z - c_k| < 4/5R$ contém um zero de $C_i(z)$, temos:

$$z_1 = \frac{3}{2 \cos \pi/8} R e^{ik^*\pi/4},$$

$$z_2 = R e^{i(k^*\pi/4 + \pi/8)} \quad e$$

$$z_3 = R e^{i(k^*\pi/4 - \pi/8)},$$

com os quais iniciamos o método iterativo que convergirá se aqueles valores estiverem "suficientemente próximos" da raiz procurada (aproximadamente a mais próxima da origem).

Se após algumas iterações o método iterativo não converge com aqueles valores iniciais, indicando que estes não estavam "suficientemente próximos" , usamos novamente o Método de Lehmer-Schur, agora para o último disco determinado, e, em seguida voltamos, com os novos valores iniciais, ao método iterativo... E assim, sucessivamente, até que ocorra convergência, o que é garantido, já que o Método de Lehmer-Schur é globalmente convergente.

3.2-6 - PURIFICAÇÃO DOS ZEROS

Observamos que por mais eficientes que tenham sido os métodos utilizados no cálculo dos zeros de um polinômio, aqueles, por serem métodos numéricos , não produzem estes com precisão absoluta. Visando resultados ainda mais precisos, nesta parte final do algoritmo composto, submetemos todos os zeros , reais e complexos, determinados, a um processo de purificação, isto é, consideramo-los como valores iniciais para o uso do Método de Newton-Raphson, através do polinômio original.

Esta purificação, em geral, não requer mais que 3 iterações, além do que é compensado pela precisão obtida.

Feito isto resta-se somente usar o fator escala obtido em (3.2-1) para os zeros purificados. De modo que, se até então determinamos z_i , $i = 1, 2, \dots, n$, nosso resultado final é dado por

$$S z_i , \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

3.3 - ESTABILIDADE DO ALGORITMO COMPOSTO

As partes do algoritmo composto usadas no cálculo de zeros de polinômios têm mostrado serem estáveis e seguras. O Método de Newton-Raphson é tido como um dos mais satisfatórios entre os algoritmos que encontram raízes, se conta com valores iniciais suficientemente próximos dos zeros procurados, os quais são obtidos pelas aplicações do Teorema de Sturm. Além disto, o processo de fatoração produz polinômios com zeros simples, o que proporciona convergência quadrática do mesmo.

As iterações que usam funções racionais são estáveis se contam, também, com valores suficientemente próximos dos zeros procurados, os quais são obtidos pelo Método de Lehmer-Schur.

Portanto, a parte mais delicada do algoritmo composto é o processo de fatoração onde podem aparecer dificuldades quando dividimos polinômios e, por causa de erros de arredondamento, este processo pode não terminar normalmente.

O pré-processamento do polinômio, descrito em (2.1) é uma precaução para evitar tais erros de arredondamento. Além disto, o processo de fatoração parcial, descrito na seção seguinte, proporciona o máximo de informações relativas aos zeros de polinômios.

3.3-1 - FATORAÇÃO PARCIAL

Quando o processo de fatoração não termina normalmente, pode ser observado que algum Q_i , como definido em (57) não foi fatorado por algum erro de arredondamento no cálculo do maior divisor comum de P_i e P'_i . Isto é observado quando os graus dos sucessivos Q_i 's tendem a permanecer os mesmos

ou não decrescem. Para reconhecer quando isto ocorre, computamos os Q_i logo após os P_{i+1} terem sido computados e comparamos o grau de Q_i com Q_{i+1} . O grau de Q_i deve ser maior ou igual que o de Q_{i+1} , caso contrário, é óbvia a imprecisão no cálculo do M.D.C. (P_i, P'_i). Infelizmente este teste nem sempre detecta quando isto ocorre. Porém, quando é detectado, o cálculo dos zeros de Q_i , para $i = k, k-1, \dots, 1$, é continuado, onde k denota o índice para o qual Q_k falha na fatoração. Isto tem resultado na determinação de aproximadamente 90% dos zeros, os zeros distintos de P são sempre determinados e os 10% dos zeros não encontrados são atribuídos a erros cometidos na determinação das multiplicidades dos zeros de Q_{k-1} [15].

A determinação das multiplicidades exatas destes zeros é muitas vezes pe nosa. Duas técnicas diferentes podem ser usadas:

1a.) Cada zero \bar{z} encontrado em \tilde{Q}_i , $i = 1, \dots, k$, é tirado do polinômio original até que o valor absoluto do polinômio deflatado seja aproximadamente zero.

Sejam

$$p_1 = P$$

$$p_j = \frac{p_{j-1}}{z - \bar{z}} \quad \text{para } j = 2, \dots$$

se \bar{z} é complexo, o fator quadrático $(z - \bar{z})(z - \bar{z}_c)$ é que é tirado do polinômio. Para

$$(a) \quad |p_j(\bar{z})| \leq \epsilon_a, \quad j = 1 \dots m \quad e$$

$$|p_{m+1}(\bar{z})| > \epsilon_a,$$

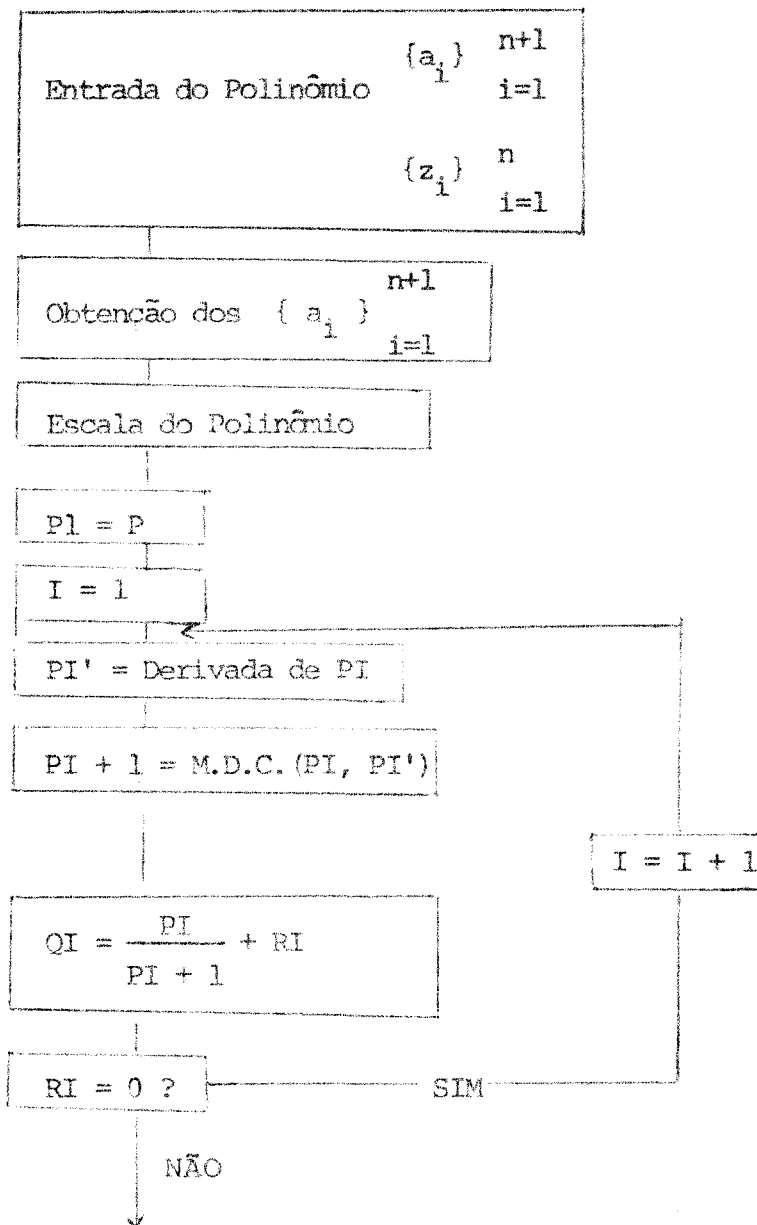
m representa a multiplicidade de \bar{z} , onde ϵ_a é uma tolerância absoluta, ou

$$(b) \quad || p_{j+1}(\bar{z}) - p_j(\bar{z}) || < \epsilon_r, \quad \text{para algum } j,$$

j representa a multiplicidade de \bar{z} , onde ϵ_r é uma tolerância relativa.

2a.) Para cada zero \bar{z} encontrado em \tilde{Q}_i , $i = 1, \dots, k$, calculamos sucessivas derivadas, $Q_i^{(j)}(\bar{z})$, até que encontramos o primeiro j , j^* , tal que $Q_i^{j^*}(\bar{z}) \neq 0$, donde temos que j^* é a multiplicidade de \bar{z} .

ALGORITMO COMPOSTO



C Temos o polinômio original fatorado em Q_I , $I = 1, 2, \dots, k$.

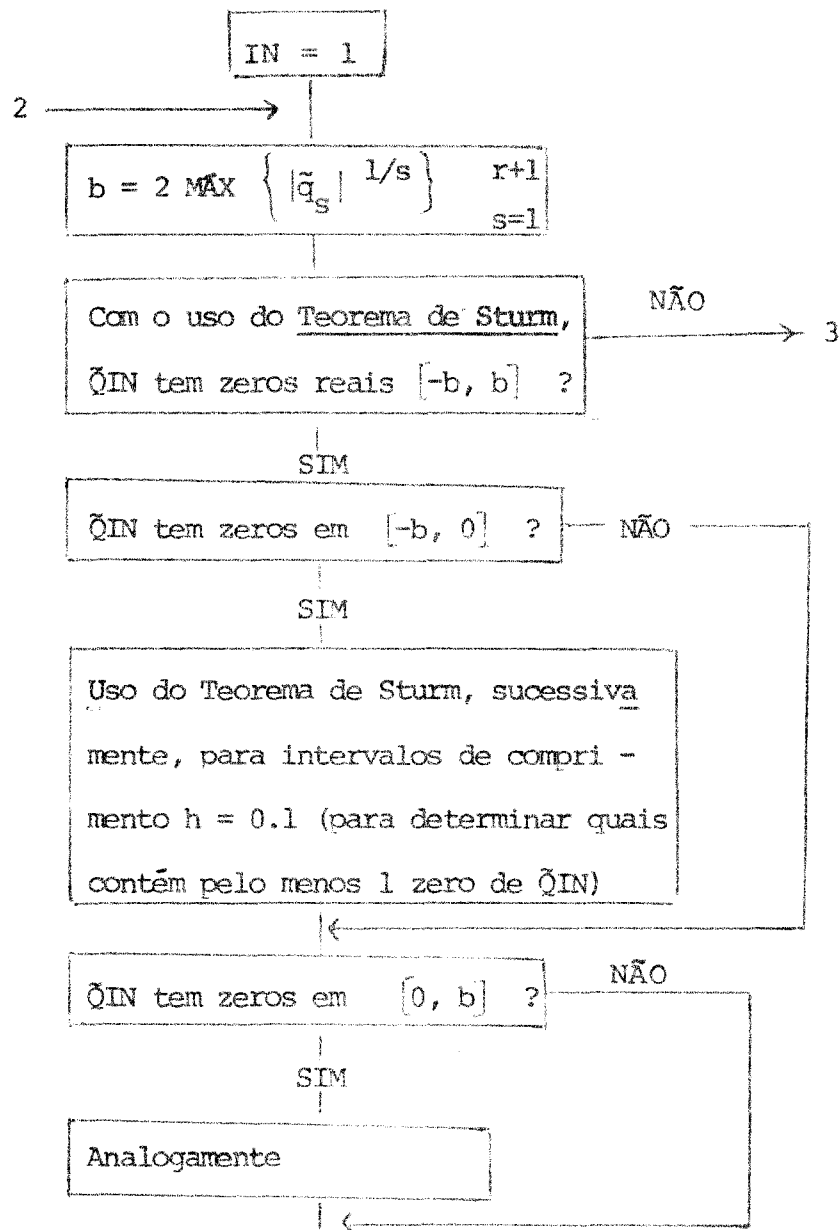
$$\tilde{Q}_I = \frac{Q_I}{Q_I + 1} \quad I = 1, 2, \dots, k \neq 1$$

$$\tilde{Q}_K = Q_K$$

C Temos os fatores \tilde{Q}_{IN} , não constantes, contendo somente zeros simples e que têm multiplicidade IN em P_1 .

C Cálculo dos zeros reais de cada fator

$$\tilde{Q}IN = \tilde{q}_0 z^r + \tilde{q}_1 z^{r-1} + \dots + \tilde{q}_n$$



C Até aqui temos informações quanto ao número de zeros reais em subintervalos de $[-b, b]$, de comprimento $h = 0.1$;

Uso do Teorema de Sturm, agora dividindo ao meio cada subintervalo até encontrar aqueles INJ contendo um único zero real

Tomamos X_{NJ0} , o ponto médio dos INJ; se $\tilde{Q}IN(X_{NJ0}) \neq 0$, consideramos aquele como valor inicial para o Método de Newton-Raphson.

Testar, a cada iteração, se $X_{r+1} = X_r + \tilde{Q}IN(X_r) / \tilde{Q}IN'(X_r)$, está em INJ. Se não estiver, através da Regra de Sinal determinar com qual subintervalo continuar

C Temos $RIN =$ fator de $\tilde{Q}IN$ que contém todos os zeros reais de $\tilde{Q}IN$.

↓
3
↓

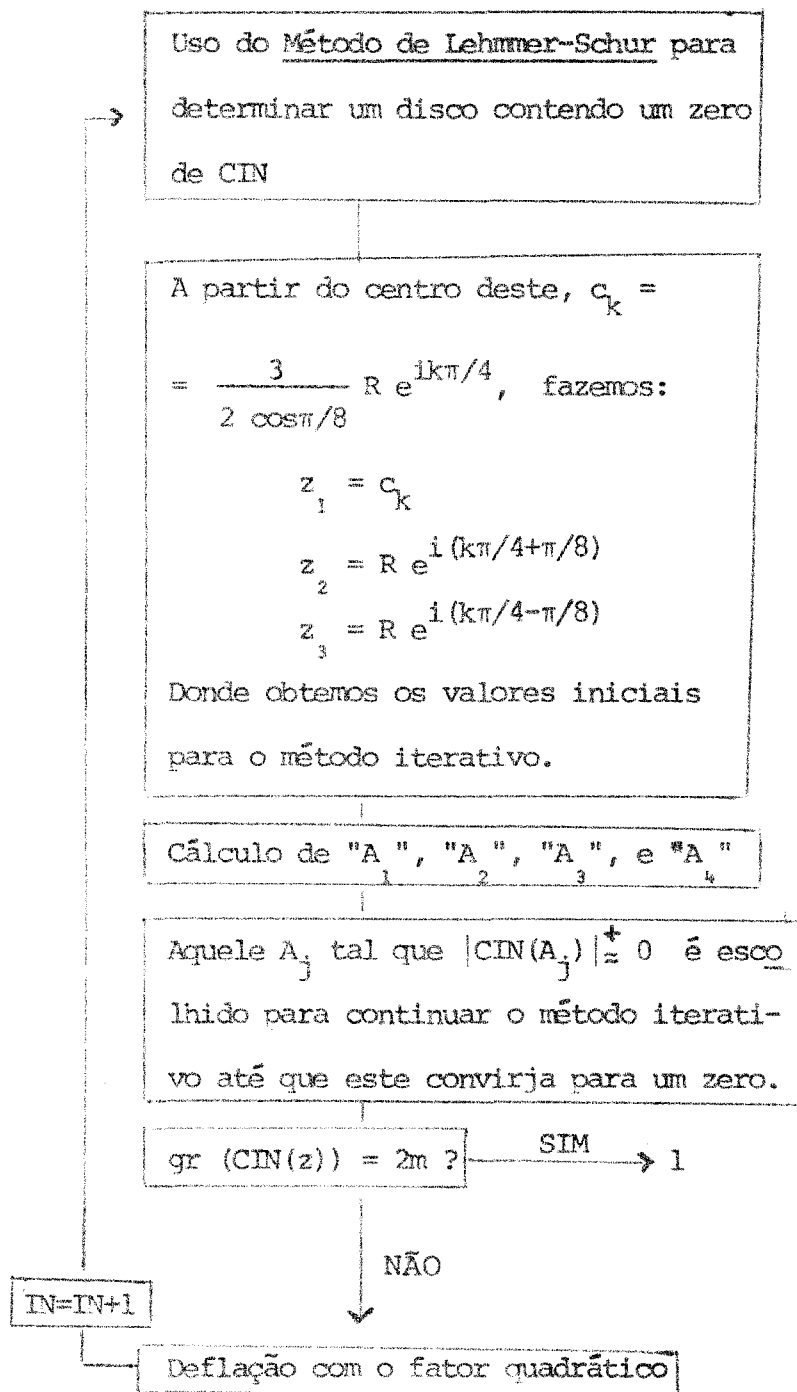
$\tilde{Q}IN$ tem zeros complexos? → NÃO → 1

↓
SIM, 2m

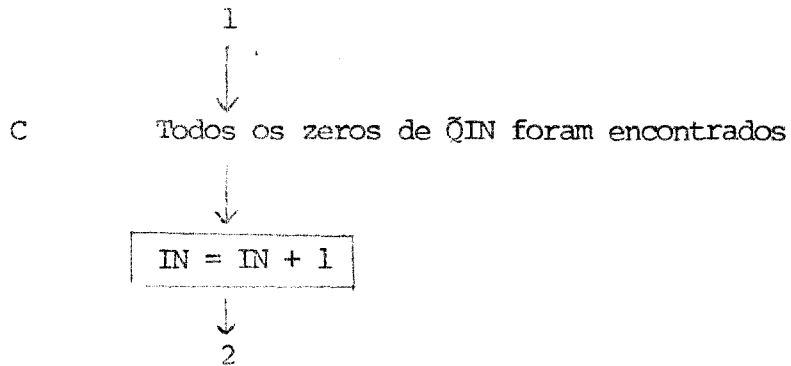
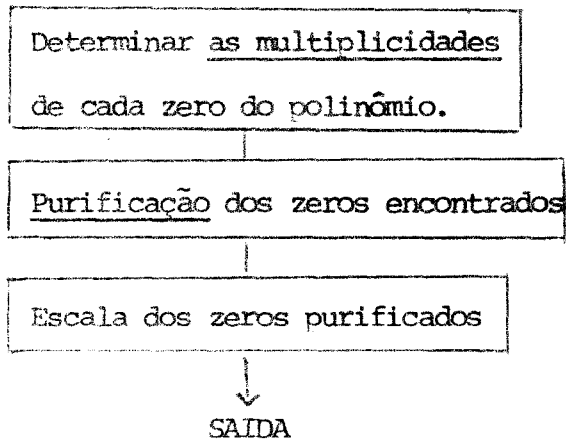
Interpolar em $[MIN, MÁX]$, usando $k + 1$ pontos, z_i , e $k + 1$ pontos, $Y_i = \tilde{Q}IN(z_i) / RIN(z_i)$

C Temos CIN: fator de $\tilde{Q}IN$ que contém todos os seus zeros complexos.

C Cálculo dos zeros complexos



C Todos os zeros de P foram calculados



O Algoritmo Composto apresenta bons resultados
atribuídos aos seguintes fatores:

- 1) Preprocessamento do polinômio original usando uma escala ótima para minimizar variações de ordem de magnitude.
- 2) Obtenção de fatores polinomiais, de graus menores que o do polinômio, que contém somente zeros simples e/ou colhendo tantas informações quanto possível quando a fatoração é parcial.
- 3) Uso do Método de Newton-Raphson junto com o Método de Sturm o que garante a obtenção de todos os zeros reais de todos os fatores polinomiais, sem usar deflação explícita.
- 4) Computação dos zeros complexos dos fatores polinomiais através da computação dos zeros de polinômios interpoladores - evitando deflação explícita dos zeros reais - obtidos em aproximação por funções racionais que usam informações de três pontos do plano complexo, obtidos pelo Método de Lehmer-Schur que é globalmente convergente.
- 5) Purificação dos zeros encontrados.

EXEMPLO:

Com o uso do algoritmo composto, calcular todas as raízes do polinômio

$$P(z) = z^6 - 2z^5 + 3z^4 - 4z^3 + 3z^2 - 2z + 1$$

SOLUÇÃO:

A partir do polinômio dado, construímos uma sequência de polinômios como descrito em (55) (* uso do algoritmo euclideano para o cálculo do M.D.C. de P e P' *). Assim, temos:

$$p_{1,0} = P_1(z) = z^6 - 2z^5 + 3z^4 - 4z^3 + 3z^2 - 2z + 1$$

$$p_{1,1} = P'_1(z) = 6z^5 - 10z^4 + 12z^3 + 6z - 2$$

$$p_{1,2} = z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 3z + 2 \quad (1)$$

$$p_{1,3} = z^3 - z^2 + z - 1 \quad (2)$$

$$p_{1,4} = 0 \quad (3)$$

e, como $p_{1,3} \neq \text{CTE}$, temos que $\text{MDC}(P_1, P'_1) = p_{1,3} = P_2$.

Então

$$P_2(z) = z^3 - z^2 + z - 1$$

e podemos ter $P_1(z)$ fatorado como:

$$P_1(z) = Q_1(z) P_2(z)$$

portanto:

$$Q_1(z) = z^3 - z^2 + z - 1 \quad (4)$$

$$\begin{array}{rcl}
 P_{1,0} & \begin{array}{l} z^6 - 2z^5 + 3z^4 - 4z^3 + 3z^2 - 2z + 1 \\ -z^6 + \frac{5}{3}z^5 - 2z^4 + 2z^3 - z^2 + \frac{1}{3}z \end{array} & \begin{array}{l} \boxed{3z^5 - 5z^4 + 6z^3 - 6z^2 + 3z - 1} \\ \frac{1}{3}z - \frac{1}{9} \end{array} + P_{1,1} \\
 \hline
 (1) & \begin{array}{l} -\frac{1}{3}z^5 + z^4 - 2z^3 + 2z^2 - \frac{5}{3}z + 1 \\ \frac{1}{3}z^5 - \frac{5}{9}z^4 + \frac{2}{3}z^3 - \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{3}z - \frac{1}{9} \end{array} & \\
 \hline
 & \frac{4}{9}z^4 - \frac{4}{3}z^3 + \frac{4}{3}z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{8}{9} &
 \end{array}$$

$$\boxed{P_{1,2} = z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 3z + 2}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{l} 3z^5 - 5z^4 + 6z^3 - 6z^2 + 3z - 1 \\ -3z^5 + 9z^4 - 9z^3 + 9z^2 - 6z \end{array} & \begin{array}{l} \boxed{z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 3z + 2} \\ 3z + 4 \end{array} \\
 \hline
 (2) & \begin{array}{l} 4z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 3z - 1 \\ -4z^4 + 12z^3 - 12z^2 + 12z - 8 \end{array} & \\
 \hline
 & 9z^3 - 9z^2 + 9z - 9 &
 \end{array}$$

$$\boxed{P_{1,3} = z^3 - z^2 + z - 1}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{l} z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 3z + 2 \\ -z^4 + z^3 - z^2 + z \end{array} & \begin{array}{l} \boxed{z^3 - z^2 + z - 1} \\ z - 2 \end{array} \\
 \hline
 (3) & \begin{array}{l} -2z^3 + 2z^2 - 2z + 2 \\ 2z^3 - 2z^2 + 2z - 2 \end{array} & \\
 \hline
 & 0 &
 \end{array}$$

$$\boxed{p_{1,4} = 0}, \quad \text{e, como } p_{1,3} \neq \text{CIE} \Rightarrow p_{1,3} = P_2$$

$$\begin{array}{r}
 P_1 \rightarrow z^5 - 2z^4 + 3z^3 - 4z^2 + 3z + 1 \\
 \quad - z^6 + z^5 - z^4 + z^3 \\
 \hline
 -z^5 + 2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 2z + 1 \\
 \quad z^5 - z^4 + z^3 - z^2 \\
 \hline
 z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 \\
 \quad -z^4 + z^3 - z^2 + z \\
 \hline
 -z^3 + z^2 - z + 1 \\
 \quad z^3 - z^2 + z - 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{c} z^3 - z^2 + z - 1 \\ \hline z^3 - z^2 + z - 1 \end{array} \right| + p_2$$

(4)

$$Q_1 = z^3 - z^2 + z - 1$$

Continuando o processo de fatoração, fazemos a mesma coisa para o fator

$P_2(z)$:

$$p_{2,0} = P_2(z) = z^3 - z^2 + z - 1$$

$$p_{2,1} = P'_2(z) = 3z^2 - 2z + 1 \quad (5)$$

$$p_{2,2} = z - 2 \quad (6)$$

$$p_{2,3} = 3$$

donde, como $p_{2,2}$ é uma constante, temos que $P_2(z)$ e $P'_2(z)$ são relativamente primos; portanto o processo de fatoração terminou. Assim temos:

$$(i) \quad P(z) = Q_1(z) Q_2(z)$$

$$\begin{array}{rcl}
 p_{2,0} & \begin{array}{l} z^3 - z^2 + z - 1 \\ -z^3 + \frac{2}{3}z^2 - \frac{1}{3}z \\ \hline -\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{3}z - 1 \\ \frac{1}{3}z^2 - \frac{2}{9}z + \frac{1}{9} \\ \hline \frac{4}{9}z - \frac{8}{9} \end{array} & \begin{array}{l} \overline{3z^2 - 2z + 1} \\ \frac{1}{3}z - \frac{1}{9} \end{array} + p_{2,1} \\
 (5) & &
 \end{array}$$

$$p_{2,2} = z - 2$$

$$\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{l} 3z^2 - 2z + 1 \\ -3z^2 + 6z \\ \hline 4z + 1 \\ -4z + 8 \\ \hline 9 \end{array} & \begin{array}{l} \overline{z - 2} \\ 3z + 4 \end{array} \\
 (6) & &
 \end{array}$$

$$p_{2,3} = 9 = \text{CIE} \Rightarrow P_2 \text{ e } P'_2 \text{ são primos}$$

onde

$$Q_1(z) = P_1(z) / P_2(z) = z^3 - z^2 + z - 1 \quad (4)$$

e

$$Q_2(z) = P_2(z)$$

Além disso, sabemos que os zeros dos Q_i 's em (i) são simples e que 2 é a maior multiplicidade de qualquer zero de $P(z)$.

NOTA: Na determinação de algum Q_i pode ocorrer alguma divisão cujo resto seja não nulo; é claro então que houve erros no processo de fatoração, na determinação do MDC; Nestes casos continuamos a usar o Algoritmo Composto para os Q_i , $i = 1, \dots, K$, onde K é o índice do último Q_i determinado corretamente.

Após a determinação de (i) construímos uma nova sequência \tilde{Q}_i como definida em (58) donde obtemos

$$\tilde{Q}_1 = Q_1 / Q_2 = 1$$

(ii)

$$\tilde{Q}_2 = Q_2 = z^3 - z^2 + z - 1$$

Observe, a partir de (ii) , que só precisamos calcular os zeros de \tilde{Q}_2 para determinarmos todos os zeros de P_1 e que, além disso , aqueles zeros terão multiplicidade 2 em P_1 .

Cálculo dos zeros reais de \tilde{Q}_2

$$\tilde{Q}_2(z) = z^3 - z^2 + z - 1$$

Em primeiro lugar determinamos um intervalo I , $I \subset \mathbb{R}$, o qual contém todas as raízes reais de $\tilde{Q}_2(z)$.

Sabemos que, qualquer que seja α , raiz de $\tilde{Q}_2(z)$:

$$|\alpha| < 2 \max_{1 \leq k \leq 3} \{ |(a_k)|^{1/k} \} = 2 \max \{ |-1|, |1|^{1/2}, |-1|^{1/3} \},$$

assim, $I = (-2, 2)$.

Em segundo lugar, com o uso do Teorema de Sturm, determinamos quantos zeros de \tilde{Q}_2 há em $(-2, 2)$ para, posteriormente, em caso positivo, determinamos subintervalos de I contendo um único zero real cada. Para tanto, formamos a sequência de Sturm para \tilde{Q}_2 :

$$\tilde{Q}_{2,0}(z) = z^3 - z^2 + z - 1,$$

$$\tilde{Q}_{2,1}(z) = 3z^2 - 2z + 1,$$

$$\tilde{Q}_{2,2}(z) = -z + 2,$$

$$\tilde{Q}_{2,3}(z) = -9$$

e computamos:

$$\tilde{Q}_{2,0}(-2) = -11 < 0 \quad \tilde{Q}_{2,0}(2) = 5 > 0$$

$$\tilde{Q}_{2,1}(-2) = 17 > 0 \quad \tilde{Q}_{2,1}(2) = 9 > 0$$

$$\tilde{Q}_{2,2}(-2) = 4 > 0 \quad \tilde{Q}_{2,2}(2) = 0 = 0$$

$$\tilde{Q}_{2,3}(-2) = -9 < 0 \quad \tilde{Q}_{2,3}(2) = -9 < 0$$

Donde: $V(-2) = 2$ e $V(2) = 1$. Logo, o número de zeros reais de $\tilde{Q}_2(z)$ é $V(-2) - V(2) = 1$.

Agora da mesma maneira, pesquisamos o semi-eixo real positivo $(0, 2)$.

$$\tilde{Q}_{2,0}(0) = 1$$

$$\tilde{Q}_{2,1}(0) = 1$$

$$\tilde{Q}_{2,2}(0) = -2$$

$$\tilde{Q}_{2,3}(0) = -9$$

$V(0) = 2$. E como $V(0)-V(2)=2-1=1$, temos que a única raiz real de $\tilde{Q}_2(z)$ está no intervalo $(0,2)$.

Feito isto, usamos este método sucessivamente para intervalos de comprimento, $h=0.1$ a partir do ponto zero, até encontrarmos algum intervalo contendo aquela raiz, para, com o ponto médio deste, usamos o Método de Newton - Raphson. Neste exemplo, quando pesquisamos o intervalo $(0.9, 1.0)$ encontramos que $\tilde{Q}_2(1.0)=0$ e, portanto já determinamos a raiz real de $\tilde{Q}_2(z)$. (* é claro que podemos pesquisar subintervalos de $(0,2)$ de outras maneiras, por exemplo, se tivéssemos adotado o critério de ir dividindo ao meio os intervalos, num primeiro passo já determinaríamos que 1.0 é uma raiz de $\tilde{Q}_2(z)$. Porém, em geral, esta não é a melhor política de pesquisa *).

Depois que determinamos todos os zeros reais do polinômio, evitando a deflação explícita do mesmo fazemos uma:

Interpolação para determinar o polinômio contendo os zeros complexos de $\tilde{Q}_2(z)$

Sabemos que:

$$\tilde{Q}_2(z) = R_1(z) C_2(z),$$

onde $R_1(z)=z-1$ e $C_2(z)$ será o polinômio contendo todos os zeros complexos de $\tilde{Q}_2(z)$.

Para determinarmos $C_2(z)$ precisamos de 3 pontos equidistantes z_1 , em uma

vizinhança de 1, e $Y_i = \tilde{Q}_2(z_i)/z_i - 1$ para $i = 1, 2, 3$ (de maneira que $R_1(z_i) \neq 0, \forall i = 1, 2, 3$)

Tomamos $h = 1$ e:

$$z_1 = -0.1, \quad z_2 = 0.9 \quad \text{e} \quad z_3 = 1.9,$$

donde temos:

$$Y_1 = -1.11, \quad Y_2 = -0.181 \quad \text{e} \quad Y_3 = 4.149.$$

Assim, formamos a tabela das diferenças progressivas

Y_i	ΔY_i	$\Delta^2 Y_i$
-1.81	0	0
-1	0.81	0
-1.81	-0.81	-1.62

para obter o polinômio interpolador:

$$C_2(z) = Y_0 + \Delta Y_0(z - z_0) + \frac{\Delta^2 Y_0}{h^2} (z - z_0)(z - z_1)$$

isto é :

$$C_2(z) = z^2 + 1.$$

Cálculo dos zeros complexos de $C_2(z)$.

$$C_2(z) = z^2 + 1$$

então

$$C_2^*(z) = z^2 + 1$$

e

$$T[C_2(z)] = 0$$

De acordo com o teorema (pp 36), este é o caso que precisa de cuidados especiais.

Tomamos $\beta = \frac{3}{4}$ e consideramos o anel

$$R_1 = \beta R_0 = \beta = \frac{3}{4} < |z| < \frac{3}{2} = 2\beta = 2\beta R_0 = 2R_1$$

o qual contém um zero de $C_2(z)$.

Este anel pode ser completamente coberto por oito discos com raios $\frac{4}{5} R_1$

e centros $c_k = \frac{3R_1}{2\cos\pi/8} e^{ik\pi/4}$ para $k = 0, 1, \dots, 7$; isto é:

com raios:

$$\frac{4}{5} R_1 = \frac{4}{5} \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

e centros:

$$c_k = 1.2176905 \left(\cos \frac{k\pi}{4} + i \sin \frac{k\pi}{4} \right); \quad k = 0, 1, \dots, 7.$$

Desta maneira, se $C_2(z)$ tem um zero em $|z - c_k| < \rho = \frac{3}{2}$, então $CC_2(z) = C_2(\rho z + c_k)$ tem um zero em $|z| < 1$, para algum c_k .

Consideremos $c_2 = 1.2176905 i$.

Então

$$CC_2(z) = C_2\left(\frac{3}{2}z + 1.2176905 i\right) = 2.25 z^2 + 3.6530715 i z - 0.4827701$$

$$CC_2^*(z) = -0.4827701 z^2 - 3.6530715 i z + 2.25$$

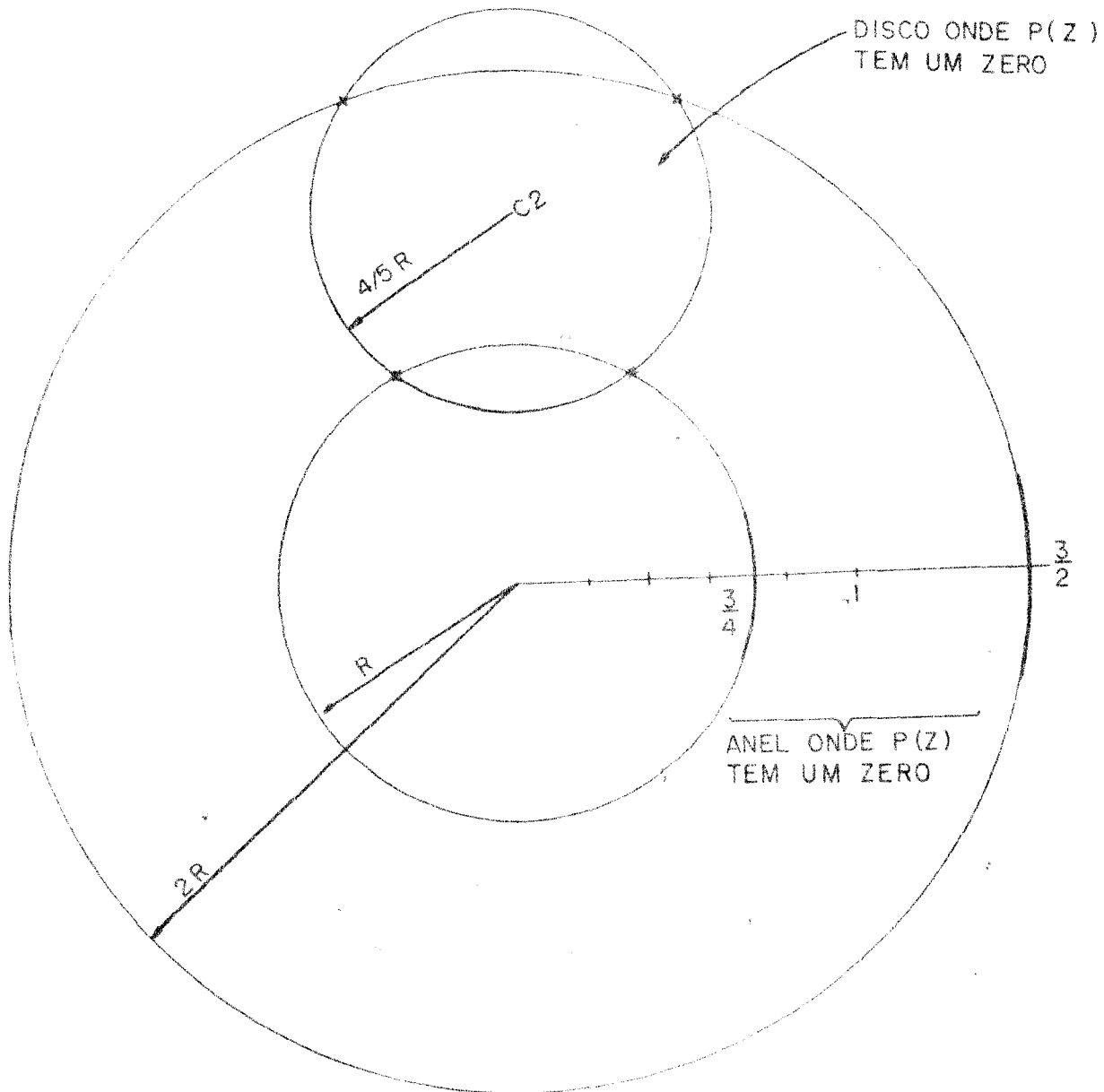
$$\begin{aligned} T [Q(z)] &= -0.4827701 \mid 2.25 z^2 + 3.6530715 \mid z - 0.4827701 \mid + \\ &-2.25 \mid -0.4827701 z^2 - 3.6530715 \mid z + 2.25 \mid = \\ &= 6.4558172 \mid z - 4.8294331 \end{aligned}$$

donde

$$T [Q(0)] = -4.82 \dots < 0$$

e, portanto, de acordo com o teorema (pp 36) existe uma raiz de $C_2(z)$ em

$$\mid z - c_2 \mid < \frac{3}{2} \quad - \text{ vide figura abaixo.}$$



Determinado um disco contendo um zero de $C_2(z)$, fazemos:

$$z_1 \equiv c_2 = 1.2176905 i$$

$$z_2 = 1.2176905 (\cos \pi/2 + i \sin \pi/2)$$

$$z_1 = 1.2176905 e^{i \pi/2}$$

e tomamos z_2 e z_3 os pontos de intersecção daquele disco com o disco de raio

R:

$$z_2 = \frac{3}{4} e^{i \pi/3} \quad e \quad z_3 = \frac{3}{4} e^{i 2\pi/3},$$

para começar o processo iterativo que usa, em cada passo, a melhor de 4 aproximações por funções racionais.

Temos $z_1 = 1.2176905 e^{i \pi/2}$

$$z_2 = \frac{3}{4} e^{i \pi/3}$$

$$z_3 = \frac{3}{4} e^{i 2\pi/3}$$

e

$$C_2(z_1) = -0.4827701$$

$$C_2(z_2) = 0.7243588 + 0.4838902 i$$

$$C_2(z_3) = 0.7243588 - 0.4838902 i$$

donde:

$$|C_2(z_1)| = 0.4827701$$

$$|C_2(z_2)| = |C_2(z_3)| = 0.7588453$$

Assim , como

$$|C_2(z_1)| < |C_2(z_2)| \leq |C_2(z_3)| ,$$

fazemos uma reordenação dos $\{z_i\}_{i=1}^3$ de modo que

$$|C_2(z_1)| \geq |C_2(z_2)| \geq |C_2(z_3)|$$

isto é, trocamos os valores de z_1 e z_3 , de modo que agora temos

$$z_1 = -0.375 + 0.645187 i$$

$$z_2 = 0.375 + 0.645187 i$$

$$z_3 = 1.2176905 i$$

e

$$C_2(z_1) = 0.7243588 - 0.4838902 i$$

$$C_2(z_2) = 0.7243588 + 0.4838902 i$$

$$C_2(z_3) = -0.4827701$$

para, então, computarmos as aproximações:

$$A_1 = z_3 + \frac{(z_1 - z_3)(z_3 - z_2) \begin{bmatrix} \frac{C_1'(z_2)}{C_2(z_2)} - \frac{C_1'(z_1)}{C_2(z_1)} \\ \frac{C_1'(z_2)}{C_2(z_2)} - \frac{C_1'(z_1)}{C_2(z_1)} \end{bmatrix}}{(z_3 - z_2) \begin{bmatrix} \frac{C_1'(z_2)}{C_2(z_2)} - \frac{C_1'(z_1)}{C_2(z_1)} \\ \frac{C_1'(z_2)}{C_2(z_2)} - \frac{C_1'(z_1)}{C_2(z_1)} \end{bmatrix} + (z_1 - z_2) \begin{bmatrix} \frac{C_1'(z_3)}{C_2(z_3)} - \frac{C_1'(z_2)}{C_2(z_2)} \\ \frac{C_1'(z_3)}{C_2(z_3)} - \frac{C_1'(z_2)}{C_2(z_2)} \end{bmatrix}}$$

$$A_2 = z_3 + \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_3) \left[2(z_2 - z_1) + z_1^2 \left[\frac{C'(z_1)}{C_2(z_1)} \right] - z_2^2 \left[\frac{C'(z_2)}{C_2(z_2)} \right] \right]}{D}$$

onde

$$D = (z_2 - z_3) \left[z_1^2 \left[\frac{C'(z_1)}{C_2(z_1)} \right] - z_2^2 \left[\frac{C'(z_2)}{C_2(z_2)} \right] \right] + (z_1 - z_2) \left[z_3^2 \left[\frac{C'(z_3)}{C_2(z_3)} \right] - z_2^2 \left[\frac{C'(z_2)}{C_2(z_2)} \right] \right]$$

$$A_3 = z_3 - \frac{C_2(z_3)}{C_2'(z_3)}$$

$$A_4 = z_3 + \frac{(z_2 - z_3) \left[\frac{C'(z_1)}{C_2(z_1)} - \frac{C'(z_2)}{C_2(z_2)} \right] (z_1 - z_3) + (z_2 - z_3)(z_2 - z_1)(z_1 - z_3)}{F}$$

onde

$$F = (z_2 - z_3) \left[\frac{C'(z_1)}{C_2(z_1)} - \frac{C'(z_2)}{C_2(z_2)} \right] + (z_1 - z_2) \left[\frac{C'(z_3)}{C_2(z_3)} - \frac{C'(z_2)}{C_2(z_2)} \right]$$

Aquela aproximação A_j que resultar no menor valor de $|C_2(A_j)|$, indicando que esta A_j é a mais próxima de um zero de $C_2(z)$, é escolhida para ser usada na próxima iteração quando trocamos z_1 por z_2 , z_2 por z_3 e z_3 pela nova aproximação ...

Este processo continua até que

$$|\bar{z} - z_{1+2}| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad |C_2(z_{1+2})| < \varepsilon ,$$

para $\varepsilon \approx 0$.

Neste exemplo, já sabemos, pois é evidente, que a raiz a determinar é $\bar{z}_1 = 1 i$, como o grau de $C_2(z)$ é 2, após a determinação deste, temos também a outra raiz $\bar{z}_2 = -1 i$. Aqui o processo termina visto que já encontramos todas as raízes de $P(z)$, a saber:

$$\bar{z}_0 = 1, \text{ com multiplicidade } 2 \text{ em } P(z)$$

$$\bar{z}_1 = 1i, \text{ com multiplicidade } 2 \text{ em } P(z)$$

$$\bar{z}_2 = -1i \text{ com multiplicidade } 2 \text{ em } P(z)$$

e

$$P(z) = (z - 1)^2 (z - i)^2 (z + i)^2.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1) BIRKOFF, G. & MACLANE, S. A survey of modern algebra. 3rd. ed. New York, Macmillan, 1970. 437p.
- 2) BLUM, E.K. Numerical analysis and computation theory and practice. Reading, Addison-Wesley, 1972. 612p.
- 3) WILKINSON, J.H. Rounding errors in algebraic processes. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1963. 161p.
- 4) WILKINSON, J.H. The algebraic eigenvalue problem. Oxford, Clarendon, 1965. 662p.
- 5) TRAUB, J.F. Iterative methods for the solution of equations. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1964. 310p.
- 6) JARRAT, P. & NUDDS, D. The use of rational functions in the iterative solution of equations on a digital computer. Computer Journal, London, 8(1):62-5, apr., 1968.
- 7) GARSIDE, G.R.; JARRAT, P. & MACK, C. A new method for solving polynomial equations. Computer Journal, London, 11(1): 87-90, may, 1968.
- 8) HOUSEHOLDER, A.S. The numerical treatment of single nonlinear equations. New York, McGraw-Hill, 1977. 216p. (International series in pure and applied mathematics)
- 9) ISSACSON, E. & KELLER, H.B. Analysis of numerical methods. New York, Wiley, 1966. 541p.

- 10) BAZARAA, M.S. & JARVIS, J.J. Linear programming and networks flows. New York, Wiley, 1977. 565p.
- 11) LUENBERGER, D.G. Introduction to linear and nonlinear programming. Reading, Addison-Wesley, 1973. p. 55
- 12) RALL, L.B. Computational solution of nonlinear operator equations. New York, Wiley, 1969. p.
- 13) RALSTON, A. A first course in numerical analysis. New York, McGraw-Hill, 1965. 578p.
- 14) HENRICI, P. - Applied and computational complex analysis. New York, Wiley, 1974. v.1 (Pure and applied mathematics. A Wiley - Interscience of texts, monographs and tracts)
- 15) DUNAWAY, D.K. Calculation of zeros of a real polynomial through factorization using Euclid's algorithm. SIAM Journal of Numerical Analysis, Philadelphia, 11(6):1087-1104, dez., 1974.