Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica – IMECC

Abordagens do problema isoperimétrico

Roberto Limberger

Dissertação de Mestrado

Orientadora: **Prof ª. Dr ª. Sueli Irene Rodrigues Costa**

Fevereiro de 2011

Campinas-SP

Abordagens do problema isoperimétrico

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Roberto Limberger** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 23 de fevereiro de 2011.

Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa
Orientadora

Banca Examinadora:
Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC - UNICAMP)
Prof. Dr. Edson Agustini (UFU)
Profa. Dra. Cláudia Cândida Pansonato (UFSM)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção de Título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Limberger, Roberto

L629a Abordagens do problema isoperimétrico/Roberto Limberger-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : Sueli Irene Rodrigues Costa

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Desigualdades isoperimétricas. 2.Matemática - Estudo e ensino. 3.Projeto auxiliado por computador. 4.Geometria. 5.Roteiros cinematográficos. I. Roberto Limberger. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Approaches to the isoperimetric problem

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Isoperimetric inequalities. 2.Mathematics – Study and teaching. 3.Computer-assisted design. 4.Geometry. 5.Screenplays.

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Edson Agustini (UFU)
Profa. Dra. Cláudia Cândida Pansonato (UFSM)

Data da defesa: 23/02/2011

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 23 de fevereiro de 2011 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof. (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

EDSON AGUSTINI
____

Prof. (a). Dr (a). EDSON AGUSTINI

Pansonato.
____

Prof. (a). Dr (a). CLAUDIA CANDIDA PANSONATO

Murmura o mar
Responde o ar
Gargalha o dia.
O criador e a obra
viajam ao irreal da fantasia.

(Mazinho, Ambrósio e Renatinho)
Unidos da Ponte - 1983

Agradecimentos

Agradeço à Sueli, minha orientadora, pela dedicação, pelo incentivo, por acreditar e por compartilhar, agradeço em especial pelas oportunidades, pelos roteiros e pela paciência.

Agradeço à equipe do Projeto M3, em especial ao Samuel e à Sarah.

Agradeço aos professores do curso e aos professores da banca examinadora.

Agradeço à Ester, pelo aviso e pelos finais de semana de estudo. Agradeço aos colegas de curso, Márcia e Cláudio, pelo apoio.

Agradeço aqueles que perto ou longe sempre estiveram presentes: Carol, Flávio, Euler.

Agradeço em especial ao apoio incondicional dos meus pais, Maria e Arnaldo e do meu irmão, Alberto.

Resumo

Neste trabalho são apresentadas abordagens do problema isoperimétrico que podem ser utilizadas no ensino médio ou ensino universitário. Estas incluem: i) aspectos históricos, ii) deduções formais do problema (dentre as curvas de perímetro fixo, a circunferência é a que engloba a maior área) utilizando apenas geometria euclidiana ou via cálculo diferencial, iii) contextualização em problemas de otimização a serem abordados também utilizando recursos computacionais e iv) descrição detalhada de material audiovisual produzido para o ensino médio, com a participação do autor, para um projeto com suporte MEC - UNICAMP.

Abstract

This dissertation presents approaches to the isoperimetric problem that can be used in high school or university education. These include: i)historical aspects, ii) formal deductions of the problem (among the curves of fixed perimeter, the circle encompasses most area) using only Euclidean geometry or calculus iii) contextualization in optimization problems to be also addressed using computational resources iv) detailed description of audiovisual material produced for the high school, with the participation of the author.

SUMÁRIO

Introdução

"E como eu vou utilizar isso na minha vida?" – Esta é talvez uma das perguntas mais ouvidas pelos professores de matemática dos diversos níveis de ensino. Pela estrutura da própria ciência, muitas vezes os alunos entram em contato com conceitos bastante abstratos, que podem se constituir em uma barreira para a motivação do estudo da disciplina.

Neste contexto, neste trabalho preocupamo-nos em explorar diversas abordagens para um problema clássico da matemática – o problema isoperimétrico. A escolha por este tema deu-se em função de que problemas envolvendo otimização tem grande proximidade com o cotidiano dos alunos, sejam eles de ensino médio ou superior. A busca pela resposta para um problema de natureza isoperimétrica possibilita ao professor mostrar a necessidade e a relevância da construção de alguns resultados prévios, possibilitando ao aluno compreender melhor a estruturação da matemática envolvida.

Este tema foi também objeto de um programa de vídeo e programas computacionais de matemática que integram o Projeto M3 – parceria da UNICAMP com o MEC – para o desenvolvimento de material multimídia voltado para alunos do ensino médio. O mestrando e a orientadora integraram a equipe deste projeto. O trabalho aqui desenvolvido discute e aprofunda o conteúdo de alguns destes programas, propondo extensões que podem ser utilizadas também por professores de cálculo no ensino universitário.

Esta dissertação está organizada em três capítulos assim distribuídos:

No Capítulo 1 são apresentadas algumas referências históricas e várias demonstrações do problema isoperimétrico clássico. Em duas delas utilizam-se apenas conceitos de matemática no nível de ensino médio, em outra utiliza-se conceitos introdutórios de cálculo diferencial e em outra ainda tem-se a demonstração usual do problema do ponto de vista da geometria diferencial. No Capítulo 2 são abordados problemas isoperimétricos em contextos específicos, a partir da análise de dois programas computacionais do Projeto M3. Embora os programas computacionais sejam destinados a alunos de ensino médio, os problemas propostos neles, seus aprofundamentos e extensões são discutidos também com a utilização de cálculo diferencial, tanto de uma, quanto de várias variáveis. No Capítulo 3 é realizada a análise do roteiro audiovisual "A lenda de

Dido”, cuja produção contou com a participação do autor deste trabalho, tanto do ponto de vista da matemática envolvida na sua construção, quanto do ponto de vista da teoria de roteiros.

O propósito é que este material possa ser utilizado por professores dos diferentes níveis de ensino, possibilitando que aulas e atividades complementares sejam propostas a partir da utilização de diferentes recursos didáticos, que motivem e propiciem a incorporação de conceitos e a resolução de problemas do cotidiano.

Capítulo 1
O problema isoperimétrico clássico

Neste primeiro capítulo abordaremos alguns aspectos históricos do problema isoperimétrico, a partir da referência [1]. Serão apresentadas algumas demonstrações para o Teorema Isoperimétrico, ou Desigualdade Isoperimétrica, utilizando somente elementos da geometria plana, com base nas referências [2] e [3] e também utilizando o cálculo diferencial, com base nas referências [4] e [5].

1.1 Aspectos históricos

O problema isoperimétrico aparece em escritos gregos, de Zenódor e Pappus. Embora o resultado (a solução) do problema fosse aceito, não é conhecida desta época nenhuma demonstração formal para o fato de que a circunferência é a curva que maximiza a área para um perímetro fixo. O épico Eneida, do poeta romano Virgílio [1] faz referência à solução do problema, através de um de seus personagens. O poema, escrito por encomenda do Imperador Augusto, retrata o poder a glória de Roma e tinha como função também a propaganda política, narrando indiretamente a grandeza do Imperador Augusto.

A obra é dividida em doze cantos, sendo que os seis primeiros formam um poema de viagem, para rivalizar com a Odisséia, do grego Homero, e os seis últimos formam um poema bélico, no qual são encontrados códigos de guerra dos romanos, neste caso rivalizando com a Ilíada, também de Homero.

Figura 1

ilustração do século VI d.C., que retrata Dido e Enéias e se encontra na Biblioteca Apostólica Romana

A rainha de Cartago, Dido, também conhecida como Elisa, é personagem dos seis primeiros cantos, para a qual Eneias relata suas aventuras (nos três primeiros cantos), uma vez que o texto é iniciado com a saga do herói já em andamento. Por obra de Vênus, mãe do herói Eneias, após ouvir as aventuras por ele relatadas, Dido apaixona-se por ele (canto IV). Entretanto a missão do herói é fundar uma nova cidade, e ele abandona Cartago e a Rainha Dido, que ao sentir-se abandonada, suicida-se. Na descrição de Virgílio, Eneias, que estava partindo com os navios ainda pode observar a fumaça da pira funerária saindo do palácio. Dido ainda aparece no canto VI, quando Eneias desce ao Mundo dos Mortos e vê o espectro da rainha, sem, no entanto, estabelecer qualquer comunicação com ela.

Figura 2

imagem de Dido e seu povo, cortando o couro de um boi

A referência ao problema isoperimétrico no clássico Eneida surge justamente na história da Rainha Dido. Abaixo é reproduzido um trecho do canto I da obra, no qual se evidencia o problema. Embora haja várias traduções do latim, a opção foi pela tradução em verso, realizada por Manuel Odorico Mendes, no século XIX [1].

"É longa a injúria, tem rodeios longos;
Mas traçarei seu curso em breve suma.

Siqueu, fenício em lavras opulento,
Foi da mísera esposo, e muito amado:
Com bom presságio o pai lhe dera intacta.
Pigmalião, façanhoso entre os malvados,
Bárbaro irmão, do estado se empossara.
Interveio o furor: de fome de ouro

Cego, e à paixão fraterna sem respeito,
Pérfido, ímpio, a Siqueu nas aras mata;
O fato encobre, e a crédula esperança
Da amante aflita largo espaço ilude
Com mil simulações. Mas do inumado
Consorte, com esgares espantosos,
Pálida em sonhos lhe aparece a imagem:
Da casa o crime e trama desenleia;
A ara homicida, os retalhados peitos
Desnuda, e à pátria intima-lhe que fuja:
Prata imensa e ouro velho, soterrados,
Para o exílio descobre. Ela, inquieta,
Apressa a fuga, e atrai os descontentes
Que ou rancor ao tirano ou medo instiga;
Acaso prestes naus, manda assaltá-las;
Dos tesouros do avaro carregadas
Empegam-se: a mulher conduz a empresa!
Chegam d'alta Cartago onde o castelo
Verás medrando agora e ingentes muros:
Mercam solo (do feito o alcunham Birsa)
Quanto um coiro taurino abranja em tiras."

Após ter o marido assassinado por seu irmão, ela precisou fugir com seguidores para fundar uma nova cidade. Encontrando um lugar adequado ela negociou com o Rei Jarbas a compra das terras. Ficou acertado que ela poderia comprar apenas a quantidade de terra que conseguisse cercar com a pele de um touro. Ela e seu séqüito decidem então cortar a pele em tiras muito finas, e emendá-las formando uma corda bastante comprida. Assim, eles puderam cercar uma grande quantidade de terras para construir a nova cidade. Como a região a ser escolhida ficava na beira do mar eles decidiram que o formato do terreno seria um semicírculo a ser contornado por esta corda. A cidade fundada por Dido recebeu o nome de Cartago (inicialmente Birsa, que significa couro) e ficava no norte da África, na região onde hoje é a Tunísia.

Entretanto as referências históricas para a solução do problema não se restringem apenas à literatura. Durante a idade média era comum a construção de muros de proteção para as cidades. Ao consultar alguns mapas disponíveis na época, não por acaso, encontramos muros no formato circular, ou semicircular. Como os muros eram feitos de pedras, sua construção era cara e trabalhosa. Utilizar o resultado do problema isoperimétrico, já conhecido na época, otimizava a área cercada, para uma quantidade fixa de material. Abaixo apresentamos os mapas das cidades de Paris - França, Colônia - Alemanha e Braga – Portugal, que tinha formatos circulares (Braga) ou semicirculares (Paris e Colônia), quando as cidades eram banhadas por rios.

Figura 3

mapa de Paris

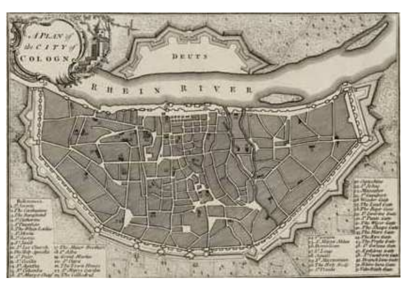


Figura 4

mapa de Colônia

Figura 5

mapa de Braga

Apesar dos fatos acima expostos, uma demonstração formal amplamente aceita surgiu apenas em 1870, com Weierstrass, época em que houve maior apego dos matemáticos ao conceito de ‘prova rigorosa’. Ela aparece como corolário nos estudos da teoria de “Cálculo das Variações”, sendo o problema isoperimétrico, um dos problemas abordados. Outros matemáticos, após Weierstrass obtiveram provas mais concisas do problema, como o alemão Erhard Schmidt, em 1939. Esta demonstração é justamente a apresentada neste trabalho [5], porém uma outra demonstração, proposta por Adolf Hurwitz, em 1902, faz uso essencial das séries de Fourier e pode ser encontrada na referência [12].

As demonstrações existentes antes da apresentada por Weierstrass partiam do princípio de que existia uma curva que maximizava a área, sendo em seguida apresentados argumentos para mostrar que esta curva era a circunferência. Para um estudo mais aprofundado do problema isoperimétrico como um problema variacional e sem assumir a existência de valor máximo sugere-se a leitura do primeiro capítulo de [6].

1.2 Demonstrações utilizando apenas geometria plana

São apresentadas a seguir, duas diferentes demonstrações para o problema isoperimétrico sem o uso de cálculo diferencial. Embora as duas demonstrações utilizem apenas conceitos de geometria plana, apresentam construções bastante distintas, que podem auxiliar na resolução de problemas derivados do problema principal do isoperimétrico, apresentados ao final do Capítulo 2 deste trabalho. A primeira demonstração foi extraída da referência [2] enquanto a segunda foi extraída da referência [3].

1.2.1 Primeira demonstração utilizando geometria plana

A construção da demonstração baseia-se no fato de que dentre os triângulos retângulos que possuem dois lados com medidas fixas, o retângulo é o que possui maior área. A partir deste resultado mostra-se que a semicircunferência é a curva plana aberta, com extremos em dois pontos de uma reta que engloba a maior área, assumindo o segmento de reta como fechamento do contorno. Conclui-se a partir daí que a circunferência é a curva plana fechada que possui a maior área. Iniciamos com duas proposições bastante intuitivas.

Proposição 1.2.1.1: *Seja F_1 uma figura plana limitada, não convexa, cuja fronteira seja uma curva plana simples e fechada, C_1. Então é possível encontrar uma figura plana F_2 de área maior que F_1 tal que sua fronteira C_2 seja uma curva plana, simples e fechada de mesmo comprimento de C_1.*

Sabemos que se F_1 não é convexa, então existem pontos *P* e *Q* pertencentes a F_1 tais que o segmento *PQ* não esteja contido em F_1. Tomamos os pontos, *A* e *B*, de intersecção do segmento *PQ* com C_1, de modo que $AB \cap C_1 = \{A, B\}$. Refletimos uma das partes de C_1 com extremos em *A* e *B* na reta que contém *PQ*, obtendo-se uma nova figura $F_1^{'}$, com fronteira $C_1^{'}$, de mesmo comprimento que C_1, porém com área maior do que F_1.

Se $F_1^{'}$ ainda não for convexa, repetimos o procedimento até a obtenção de uma figura plana convexa, de mesmo perímetro e área maior do que F_1.

Proposição 1.2.1.2: *Seja uma curva C_1 plana, simples e aberta, situada de um mesmo lado de uma reta r, com extremos A e B em r. Suponhamos que a curva fechada $C_1 \cup AB$ seja fronteira de uma figura limitada F_1 não convexa. Então existe uma curva C_2 de mesma natureza de C_1 com os mesmos extremos A e B em r, tal que $C_2 \cup AB$ seja fronteira de uma curva convexa com área maior que F_1.*

Consideramos a figura $C_1 \cup AB$ e aplicamos o procedimento descrito na demonstração da Proposição 1.2.1.1. A figura obtida será $C_2 \cup AB$, uma vez que o segmento AB permanece inalterado na seqüência de figuras obtidas.

Proposição 1.2.1.3: *Dentre todos os triângulos com dois lados com medidas fixas, o de maior área é o triângulo retângulo que possui esses lados por catetos.*

Consideramos todos os triângulos *ABC* com lados *AB* e *AC* de medidas fixas. A área *S* deste triângulo pode ser calculada por $S = \dfrac{\overline{AB}.\overline{AC}.sen\hat{A}}{2}$. O valor máximo da área será obtido justamente quando $sen\hat{A}$ for máximo, ou seja, quando $sen\hat{A} = 1$, o que implica $\hat{A} = \dfrac{\pi}{2}$.

Proposição 1.2.1.4: *Seja uma figura plana convexa F_1, cuja fronteira seja composta por uma curva C_1 plana, simples, aberta, de extremos A e B e de comprimento p, unida com o segmento AB. Suponhamos que, nessas condições F_1 tenha a maior área possível. Então, F_1 é um semi-disco.*

Vamos supor que F_1 não é um semi-disco. Então existe um ponto $C \in C_1$ tal que *ABC* não é um triângulo retângulo, uma vez que, se *ABC* fosse retângulo para todo $C \in C_1$, F_1 seria um semi-disco.

Como F_1 é convexa, os segmentos *AC* e *CB* estão contidos em F_1, isto é, o triângulo *ABC* está contido em F_1. Sejam F_2 e F_3 as figuras sobre *AC* e *CB* de tal modo que $F_1 = F_2 \cup ABC \cup F_3$.

Consideramos agora o triangulo *A'B'C'*, retângulo em *C*, de tal modo que $A'C' \equiv AC$ e $B'C' \equiv BC$. Pela Proposição 1.2.1.3 a área de *A'B'C'* é maior que a área de *ABC*. Consideramos então a figura $F_1^{'} = F_2 \cup A'B'C' \cup F_3$ e denomine sua fronteira de $C_2 \cup A'B'$. Temos, portanto, que $F_1^{'}$ tem fronteira composta por uma curva C_2 plana, simples, aberta de extremos *A'* e *B'* e comprimento p unida com o segmento *A'B'*. No entanto a área de $F_1^{'}$ é maior que a área de F_1, o que contraria a hipótese.

Entretanto, há ainda a possibilidade da figura $F_1^{'}$ não ser convexa. É possível, pela Proposição 1.2.1.2, tomar $F_1^{''}$ convexa, com fronteira $C_3 \cup A'B'$ e área maior que $F_1^{'}$. Contrariando as condições da hipótese. Temos, portanto, que F_1 é um semi-disco.

Teorema 1.2.1.5 (Teorema isoperimétrico): *Dado um comprimento fixo, dentre todas as figuras planas, fechadas, convexas e de perímetro igual a esse comprimento, o disco é a que possui maior área.*

Vamos supor que a figura de maior área não seja um disco. Denominamos essa figura de F_1 e de p o comprimento da sua fronteira C_1. Tomamos os pontos A e B em C_1 de modo que o comprimento da curva em C_1 de A até B seja igual a $\frac{p}{2}$. O segmento AB dividirá a figura em duas outras, F_2 e F_3 (obviamente $F_1 = F_2 \cup F_3$), com fronteiras $C_2 \cup AB$ e $C_3 \cup AB$, respectivamente, ambas com área máxima. Assim, F_2 ou F_3 não é um semi-disco e possui área máxima, contradizendo a Proposição 1.2.1.4 demonstrada.

Esta demonstração demanda menos operações matemáticas do que a apresentada na próxima seção, entretanto sua construção não permite resolver problemas de otimização que envolvam mourões, como o apresentado no vídeo que deu origem a este trabalho e cujo roteiro encontra-se integralmente no Capítulo 3.

1.2.2 Segunda demonstração utilizando geometria plana

A demonstração que segue é extraída de [3] e utiliza-se inicialmente da prova de que entre todos os polígonos com mesmo número de lados e perímetro fixo, o que tem mais área é o regular. Além disto, há um complemento com relação ao apresentado em [3] no que diz respeito à fórmula de Bretschneider, baseada na referência [7].

Proposição 1.2.2.1: *Dentre todos os triângulos ABC de base AB com medida fixa e perímetro dado, aquele de maior área é o isósceles.*

Pela fórmula de Heron temos que a área A de um triângulo de lados a, b e c é dada por $A=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}$ na qual $p=a+b+c$.

Supomos a fixo, para maximizar a área, o produto $P=\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)$ deve ser máximo. Temos que $b+c=p-a$, isolando b e substituindo em P, chega-se a $P=-c^2+(p-a)c+\frac{p}{2}a-\frac{p^2}{4}$. Tem-se então uma função quadrática para o produto, que terá valor máximo para $c=\frac{-(p-a)}{-2}$, ou seja, para $c=\frac{p-a}{2}$, assim o produto será máximo quando $b=c$, ou seja, quando o triângulo for isósceles.

Proposição 1.2.2.2: *Dados dois triângulos ABC e ABC', com mesmo perímetro e* $\left|\overline{AC}-\overline{BC}\right|<\left|\overline{AC'}-\overline{BC'}\right|$*, a área de ABC será maior que a área de ABC'.*

Utilizando o resultado obtido com a Proposição 1.2.2.1, sabemos que o produto P é uma função quadrática que atinge o valor máximo quando a diferença entre os lados é igual a zero. Portanto, quanto maior for a diferença entre os lados, menor será o produto P, conseqüentemente, menor o valor da área do triângulo.

Proposição 1.2.2.3 (Fórmula de Bretschneider): *A área S de um quadrilátero convexo ABCD de lados* $a=\overline{AB}$*,* $b=\overline{BC}$*,* $c=\overline{CD}$ *e* $d=\overline{DA}$ *e ângulos* $\hat{A}$*,* $\hat{B}$*,* $\hat{C}$ *e* $\hat{D}$ *é dada por* $S=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)\left(\frac{p}{2}-d\right)-\frac{1}{2}abcd[1+\cos(\hat{A}+\hat{C})]}$*, na qual* $p=a+b+c+d$.

Inicialmente vamos dividir o quadrilátero em dois triângulos, a partir da diagonal BD. Portanto sua área será $S=\frac{1}{2}ad.sen\hat{A}+\frac{1}{2}cb.sen\hat{C}$.

Então $4S^2 = a^2d^2.sen^2\hat{A} + b^2c^2.sen^2\hat{B} + 2abcd.sen\hat{A}.sen\hat{C}$ (I).

Pela Lei dos Co-senos para o cálculo da diagonal BD, verificamos que $a^2 + d^2 - 2ad.\cos\hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{C}$ que pode ser reescrita como $\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} = ad.\cos\hat{A} - bc.\cos\hat{C}$. Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado, temos:

$$\frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} = a^2d^2.\cos^2\hat{A} + b^2c^2.\cos^2\hat{C} - 2abcd.\cos\hat{A}.\cos\hat{C} \text{ (II).}$$

Somando os lados correspondentes nas equações (I) e (II):

$$4S^2 + \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd.\cos(\hat{A} + \hat{C})$$

Isolando S, empregando a fatoração conveniente e substituindo *p* podemos escrever:

$$16S^2 = 16\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)\left(\frac{p}{2} - d\right) - 8abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]$$

Da qual resulta:

$$S = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)\left(\frac{p}{2} - d\right) - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]}$$

A Fórmula de Bretschneider também pode ser reescrita como:

$$S = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)\left(\frac{p}{2} - d\right) - abcd.\cos^2(\hat{A} + \hat{C})}$$

Basta para tanto reescrever a expressão $1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})$ como $\cos 0 + \cos(\hat{A} + \hat{C})$ e aplicar a fatoração de expressões trigonométricas.

Proposição 1.2.2.4: *Dentre todos os quadriláteros com comprimentos de lados fixados, aquele de maior área é o inscritível.*

Da fórmula deduzida acima, concluímos que o valor de *S* será maximizado somente quando $1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})$ for minimizado. Sabemos que o menor valor atingido pela função co-seno é *-1*, que será obtido quando $\hat{A} + \hat{C} = \pi$.

Por definição, um quadrilátero é inscritível, se, e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares [11], o que encerra a demonstração.

Proposição 1.2.2.5: *Dados dois quadriláteros ABCD e A'B'C'D' com lados correspondentes iguais, se* $\left|\hat{A}+\hat{C}-\pi\right|<\left|\hat{A}'+\hat{C}'-\pi\right|$ *então a área de ABCD é maior que a área de A'B'C'D'.*

Sabemos que o valor máximo é dado quando $\hat{A}+\hat{C}=\pi$. Pelo gráfico da função co-seno, para o domínio $[0,2\pi]$ constatamos que quanto maior for a distância de um ângulo (neste caso a soma $\hat{A}+\hat{C}$*)* com relação a π, maior será o valor de seu co-seno, o que minimizaria o valor da área *S*, pela expressão encontrada na Proposição 1.2.2.3.

Proposição 1.2.2.6: *Dado um polígono não convexo, temos outro polígono com número de lados menor, perímetro menor e área maior.*

Para demonstrar esta proposição, é necessário obter dois vértices não consecutivos, tais que a reta determinada por eles, tem o polígono inteiramente contido em um dos semiplanos por ela determinados. O polígono buscado, de menor número de lados, menor perímetro e maior área será justamente o polígono obtido substituindo a parte interior da poligonal que liga estes dois pontos, pelo segmento, contido na reta, que os liga.

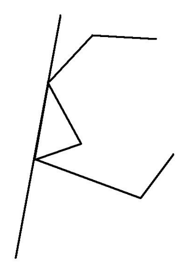


Figura 6

Para encontrar estes vértices, consideramos o polígono inteiramente contido no primeiro quadrante do plano cartesiano e chame o vértice de maior coordenada em *x* de P_0. A reta vertical (perpendicular ao eixo *x*) que passa por este ponto tem todo o polígono em um dos semiplanos por ela determinados. Giramos a reta no sentido anti-horário ao redor deste ponto até encontrar outro vértice. Se o vértice encontrado não for um vértice consecutivo ao vértice P_0, temos os dois vértices procurados.

Entretanto se com a rotação da reta, ela interceptar um vértice consecutivo ao vértice P_0, tem-se que a intersecção da reta com o polígono será um de seus lados. Denominamos esse lado de P_0P_1. Prosseguimos girando essa reta suporte no sentido anti-horário, agora ao redor de P_1, até encontrar um novo vértice do polígono. Caso o vértice encontrado não seja consecutivo do vértice P_1, tem-se os dois vértices procurados. Se o vértice encontrado por sua vez for consecutivo a P_1, tem-se novamente a intersecção da reta com o polígono resultando em um de seus lados. Neste caso nomeamos o vértice consecutivo a P_1 encontrado de P_2 e giramos a reta suporte no sentido anti-horário, ao redor de P_2 até encontrar um novo vértice do polígono.

Realizamos o procedimento acima descrito até obter os dois vértices procurados. Caso a repetição do procedimento retorne ao vértice P_0, concluímos que o polígono analisado é convexo, o que contraria a nossa hipótese.

Proposição 1.2.2.7: *Dado qualquer polígono não regular, existe um polígono regular com número de lados menor ou igual, perímetro menor ou igual e área maior do que a do polígono original.*

Esta demonstração é realizada por indução sobre o número de lados. Inicialmente realizamos um processo para obter um polígono eqüilátero e depois um polígono regular, com o mesmo número de lados do polígono inicial. Realizaremos este processo enquanto o polígono for convexo, caso em algum momento o polígono não for convexo, a Proposição 1.2.2.6 fornece um polígono com número de lados menor, perímetro menor e área maior.

Para tornar o polígono eqüilátero, tomamos a média ℓ de todos os lados do polígono. Vamos supor que existam dois lados adjacentes *AB* e *BC*, um maior e outro menor que ℓ. Com o uso das Proposições 1.2.2.1 e 1.2.2.2, podemos encontrar um ponto *B'* para substituir *B* de modo que o perímetro seja mantido e a área aumentada, tornando $\overline{AB'}$ igual a ℓ.

Caso não existam tais dois lados vizinhos e o polígono não seja eqüilátero, permutamos os lados de forma a obter essa situação. De fato, dados dois lados vizinhos *AB* e *BC*, podemos substituir *B* por *B'* de forma que $\overline{AB'} = \overline{BC}$, $\overline{B'C} = \overline{AB}$, escolhendo *B'* do mesmo lado que B em relação à reta AC. A área e o perímetro ficam, neste caso, inalterados. Após uma seqüência finita de tais permutações, chegamos à situação descrita acima.

Assim, conseguimos aumentar o número de lados iguais a ℓ, até que o polígono se torne eqüilátero, sempre aumentando sua área.

Se o polígono eqüilátero obtido no processo anterior não for eqüiângulo, utiliza-se o processo descrito abaixo, para tornar seus ângulos iguais, sempre aumentando a área. Neste processo utilizaremos a mesma nomenclatura que consta em [3]: denominamos ângulos *bons* os ângulos do polígono que possuírem a mesma medida que o ângulo interno do polígono regular, e *maus* aqueles que possuírem medida diferente.

Uma observação importante é que, já trabalhando com o polígono regular, não poderá haver menos do que quatro ângulos *maus*, sem que o polígono seja regular. Vamos supor um polígono $A_1A_2...A_n$ que possui apenas os vértices A_i, A_j e A_k supostamente *maus*. Consideramos um polígono $B_1B_2...B_n$ regular de mesmo lado ℓ. Os polígonos $A_iA_{i+1}...A_j$ e $B_iB_{i+1}...B_j$ são congruentes. Também $A_jA_{j+1}...A_k$ é congruente a $B_jB_{j+1}...B_k$ e $A_kA_{k+1}...A_i$ é congruente a $B_kB_{k+1}...B_i$. Além disso, os triângulos $A_iA_jA_k$ e $B_iB_jB_k$ são congruentes. Assim o polígono $A_1A_2...A_n$ é regular, contrariando a suposição inicial.

Retorando ao polígono eqüilátero, porém não regular, consideramos o conjunto dos vértices *maus* e tome nesse conjunto dois vértices A e B, sendo A muito grande e B muito pequeno, consecutivos no conjunto dos vértices *maus*. Consideramos o quadrilátero $ABCD$, formado por quatro vértices *maus* deste polígono, sendo C consecutivo de B e A consecutivo de D. Deformamos este quadrilátero, diminuindo $\hat{A}$ e $\hat{C}$ e aumentando $\hat{B}$ e $\hat{D}$, até A ou B tornar-se um vértice bom. Ao deformar o quadrilátero, deformamos também o polígono, mantendo rígidos os arcos entre dois vértices consecutivos do quadrilátero.

Resta verificar que este processo aumenta a área do quadrilátero e portanto, do polígono. Para isto bastam as Proposições 1.2.2.4 e 1.2.2.5, quando A for grande e B pequeno, tem-se $A+C>\pi$.

Tomamos uma circunferência, que contém A e B, com raio igual ao da circunferência circunscrita ao polígono regular de lado ℓ. Sejam C' e D' as intersecções de CD com a circunferência. Portanto $B\hat{A}D > B\hat{A}D'$ e $B\hat{C}D > B\hat{C}'D$, de onde concluí-se

$B\hat{A}D + B\hat{C}D > B\hat{A}D' + B\hat{C}'D = \pi$. Com isso é mostrado que sempre é possível aumentar o número de vértices *bons* do polígono, até torná-lo regular, concluindo a demonstração da Proposição 1.2.2.7.

Proposição 1.2.2.8: *Se* $n < m$ *a área de um polígono regular de n lados é menor do que a área de um polígono regular de m lados de mesmo perímetro. Além disso, a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.*

A demonstração da primeira parte da proposição será por indução sobre m. Supondo a afirmação correta para $n < m \le m_0$, basta provar que a área de um polígono de $m_0 + 1$ lados é maior que a área do polígono de m_0 lados e mesmo perímetro. Tomamos um polígono regular de m_0 lados, porém interprete-o como um polígono de $m_0 + 1$ lados, possuindo um de seus lados com medida igual a zero. Pela Proposição 1.2.2.7, podemos encontrar um polígono regular de perímetro igual, área maior e número de lados menor ou igual a $m_0 + 1$. Na primeira etapa da construção, o lado de tamanho zero, será tornado positivo. Este número de lados só pode ser igual a $m_0 + 1$ pois senão estaríamos contradizendo a hipótese de indução.

Para a segunda parte, observamos que as áreas dos polígonos de n lados e perímetro dado tendem para a área do círculo, quando n cresce. Isto segue do fato de que o polígono regular de perímetro ℓ tem lado maior que o polígono do mesmo tipo inscrito no círculo de circunferência ℓ e menor do que o do polígono circunscrito a este círculo.

Teorema 1.2.2.9 (Desigualdade Isoperimétrica): *Toda curva fechada de comprimento* ℓ *engloba uma área menor ou igual a* $\dfrac{\ell^2}{4\pi}$. *Além disso, este valor só é alcançado para o círculo de raio* $\dfrac{\ell}{2\pi}$.

Vamos supor uma curva de comprimento ℓ englobando uma área *S*. Tomamos um número inteiro positivo n e marca-se n pontos ao longo da curva, igualmente espaçados em termos do comprimento do arco de curva entre eles. Ligamos estes pontos por segmentos de reta de modo a obter um polígono de n lados e perímetro menor do que ℓ. Tomamos o fecho convexo deste polígono, que terá perímetro menor do que ℓ e sua área A é menor do que $\frac{\ell^2}{4\pi}$. Consideremos o número de pontos que ou estão dentro deste fecho convexo ou, caso contrário, distam menos de $\frac{\ell}{2n}$ de algum dos n pontos originais. Temos, portanto, que a curva original estará totalmente contida nesta região, pois qualquer ponto da curva dista menos do que $\frac{\ell}{2n}$ de algum destes n pontos. Por outro lado, a área desta região será menor ou igual a $A + n\pi\left(\frac{\ell}{2n}\right)^2$ pois está contida na união do fecho convexo com n círculos de raio $\frac{\ell}{2n}$ e centros nos n pontos. Assim, $S \leq A + n\pi\left(\frac{\ell}{2n}\right)^2 \leq \frac{\ell^2}{4\pi} + \frac{\pi\ell^2}{4n}$. Como essa estimativa é válida para qualquer n, temos que $S \leq \frac{\ell^2}{4\pi}$.

Por fim, consideramos uma curva de comprimento ℓ englobando a área $\frac{\ell^2}{4\pi}$. O objetivo é provar que ela é um círculo. Primeiro observamos que ela é convexa. De fato, para uma curva não convexa sempre existe um segmento de reta ligando dois pontos da curva e contido inteiramente no exterior da mesma. Este segmento divide a parte do plano fora da curva em duas regiões, uma limitada e outra não. Tomando a porção da curva que toca a região ilimitada mais o segmento de reta, temos uma nova curva fechada de perímetro menor e área maior, contradizendo a primeira parte, já demonstrada.

Agora, para uma curva convexa distinta do círculo, tomamos quatro pontos não co-circulares. Se o quadrilátero, com estes quatro vértices, for deformado, mantendo rígidos os arcos de curva entre dois pontos até o quadrilátero tornar-se inscritível, a área estará sendo aumentada, sem alterar o perímetro, contradizendo novamente a primeira parte, já demonstrada.

Com os resultados obtidos nesta demonstração, é possível resolver problemas que envolvem a maximização de áreas envolvendo um perímetro fixo e também uma quantidade limitada de mourões. Entretanto este resultado, de todos os polígonos regulares de perímetro fixo o que possui maior área é aquele com maior número de lados, é obtido mais facilmente com a utilização de cálculo diferencial, o que realizaremos na próxima seção.

1.3 Demonstrações utilizando cálculo diferencial

Nesta seção detalharemos a demonstração utilizando a geometria diferencial, baseada na referência [5]. Também será apresentada outra maneira de demonstrar a primeira parte da Proposição 1.2.2.8, através da utilização do conceito de limite, apresentada na referência [4].

1.3.1 A desigualdade isoperimétrica para polígonos

Um resultado importante obtido na Seção 1.2.2, o da desigualdade isoperimétrica para polígonos, pode ser também demonstrado utilizando elementos de cálculo diferencial e algumas fórmulas trigonométricas. A demonstração envolve conceitos de cálculo normalmente ensinados no primeiro ano de cursos superiores.

Proposição 1.3.1.1: *Se $i < j$, i e j inteiros positivos, então a área de um polígono regular de i lados é menor do que a área de um polígono regular de j lados de mesmo perímetro. Além disso, a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.*

Seja p o perímetro de um polígono regular de n lados. Desta forma, tem-se que o lado ℓ do polígono é $\ell = \frac{p}{n}$.

Podemos dividir o polígono regular em n triângulos isósceles de base ℓ e altura a, $a = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{tg\frac{\pi}{n}}$. Assim, a área S deste polígono é dada por:

$S = n.\frac{\ell a}{2}$, que é equivalente a $S = \frac{p^2}{4n}.\frac{1}{tg\frac{\pi}{n}}$, que, após a multiplicação do numerador e do denominador da fração por $\frac{\pi}{n}$, pode ser reescrita como $S = \frac{p^2}{4\pi}.\frac{\frac{\pi}{n}}{tg\frac{\pi}{n}}$.

Para ver o modo como a área S varia, fazemos $x = \frac{\pi}{n}$ e estuda-se a função $f(x) = \frac{x}{tgx}$ para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, uma vez que isto fornecerá informações sobre S para $n > 2$.

Tem-se que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$. Além disto, f é contínua em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e neste intervalo $f'(x) < 0$, sendo $f'(x) = \frac{tgx - x.\sec^2 x}{tg^2 x}$.

Concluímos então que a área S é estritamente crescente, quando n cresce. Logo, se $i < j$ a área do polígono regular de i lados será menor do que a área do polígono regular de j lados.

Além disto, como $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, temos que a área S de um polígono regular de n lados satisfaz $S < \frac{p^2}{4\pi}$.

Para demonstrar a segunda parte da proposição, tomamos um círculo de perímetro p. Neste caso seu raio r será $r = \frac{p}{2\pi}$, e sua área S será $S = \frac{p^2}{4\pi}$. Temos, portanto, que a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.

1.3.2 O problema isoperimétrico do ponto de vista da geometria diferencial

Os fundamentos da geometria diferencial partem do estudo de propriedades locais de curvas e superfícies, ou seja, do comportamento da curva ou da superfície nas proximidades de um ponto. Para este estudo, os métodos utilizados são os métodos do cálculo diferencial. Neste contexto, curvas e superfícies são definidas por funções que possam ser derivadas um certo número de vezes.

Para a demonstração da desigualdade isoperimétrica, como é feita em [5] serão necessárias algumas definições e resultados prévios.

Definição 1.3.2.1: *Uma curva plana suave parametrizada é uma aplicação* $\alpha : I \to R^2$ *de um intervalo aberto* $I = (a,b)$ *da reta real* R *em* R^2.

A partir da definição acima, para $t \in I$ tal que $\alpha'(t) \neq 0$, há uma reta bem definida contendo o ponto $\alpha(t)$ com direção dada pelo vetor $\alpha'(t)$. Denomina-se esta reta como a *reta tangente* a α em *t*.

Se para algum $t \in I$, $\alpha'(t) = 0$, t é denominado *ponto singular* de α. Entretanto, para o desenvolvimento da geometria diferencial das curvas é essencial a existência de uma reta tangente em todos os pontos, sendo consideradas a partir de agora apenas as curvas sem pontos singulares, fazendo-se necessária a definição abaixo.

Definição 1.3.2.2: *Uma curva suave parametrizada* $\alpha : I \to R^2$ *é chamada regular quando* $\alpha'(t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$.

Dado $t_0 \in I$, partindo de aproximação por poligonais, pode-se mostrar que o comprimento de arco de uma curva suave parametrizada regular $\alpha : I \to R^2$, a partir do ponto t_0 é dado por $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\, dt$, onde $|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ é o comprimento do vetor $\alpha'(t)$.

Uma observação que se faz necessária é quanto à orientação da curva. Dada uma curva α parametrizada pelo comprimento de arco $s \in (a,b)$, pode-se considerar a curva β definida em $(-b,-a)$ por $\beta(-s) = \alpha(s)$, que possui mesmo traço que a primeira, percorrido em sentido contrário. Pode-se dizer então, que estas duas curvas diferem por uma *mudança de orientação*.

Curvas suaves regulares podem ser reparametrizadas por seu comprimento de arco, como $\frac{ds}{dt}(t) = |\alpha'(t)| > 0$, s é crescente e portanto invertível, $t = F(s)$ e $\alpha(t) = \alpha(F(s)) = \gamma(s)$, $0 < s < \ell$ (ℓ comprimento total da curva). Considerando uma curva $\alpha(s)$ já parametrizada por seu comprimento de arco, temos que $|\alpha'(s)| = 1$ e portanto $\alpha''(s)$ é perpendicular à curva para todo *s*. Consideremos $\eta(s)$ o vetor unitário perpendicular à curva que é o rotacionado de $\frac{\pi}{2}$ de $\alpha'(s)$ no sentido anti-horário.

Definição 1.3.2.3: *Seja* $\alpha : I \to R^2$ *uma curva suave parametrizada pelo comprimento de arco* $s \in I$. *O número* $k(s) = \alpha''(s).\eta(s)$ *é chamado curvatura de* α *em s.*

Definição 1.3.2.4: *Uma curva plana suave fechada é uma curva suave parametrizada regular* $\alpha : [a,b] \to R^2$ *tal que* α *e todas as suas derivadas coincidam em a e b, isto é,* $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\alpha'(a) = \alpha'(b)$, $\alpha''(a) = \alpha''(b)$ *...*

Definição 1.3.2.5: *Seja* α *uma curva plana suave fechada, dizemos que* α *é uma curva simples quando não possuir outras auto-intersecções; isto é, se* $t_1, t_2 \in [a,b)$, *com* $t_1 \neq t_2$, *então* $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$.

A região Ω limitada do plano, delimitada por uma curva suave simples fechada *C* é denominada interior de *C*. O resultado a seguir é uma conseqüência do clássico Teorema de Green para funções de duas variáveis, que afirma que se existem funções $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ com derivadas parciais contínuas em uma região que contém Ω , então $\int_C Pdx + Qdy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$.

Aplicando o Teorema de Green ao campo $(P,Q) = (y,0)$ temos que a área limitada por uma curva simples fechada com orientação positiva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ onde $t \in (a,b]$ é um parâmetro arbitrário é dada por $A = -\int_a^b y(t)x'(t)dt$. Se aplicarmos o Teorema de Green ao campo $(P,Q)=(0,x)$ também podemos escrever a área A como $A=\int_a^b x(t)y'(t)dt$, ou ainda $A=\frac{1}{2}\int_a^b (xy'-yx')dt$.

A partir das definições e resultados já fornecidos podemos realizar a demonstração da Desigualdade Isoperimétrica, sob a ótica da geometria diferencial. A demonstração apresentada é de Erhard Schmidt [5].

Teorema 1.3.2.6 (Desigualdade Isoperimétrica): *Seja C uma curva plana simples e fechada com comprimento l, e seja A a área da região limitada por C. Então* $l^2-4\pi A\geq 0$*, e verifica-se a igualdade se, e somente se, C é uma circunferência.*

Sejam *E* e *E'* duas retas paralelas que não interceptam a curva fechada *C*. A partir do movimento destas duas retas, encontramos as retas *L* e *L'*, obtidas quando o movimento das retas faz com que elas toquem *C* pela primeira vez. Temos assim um par de retas paralelas *L* e *L'*, tangentes a *C*, de forma que *C* está totalmente contida na faixa limitada por elas.

Vamos considerar também uma circunferência S^1 que seja tangente a *L* e *L'* e não tenha intersecção com *C*. Tomamos o centro de S^1, *O*, e introduzimos o sistema de coordenadas cartesianas com a origem em *O* e o eixo *Ox* perpendicular a *L* e *L'*.

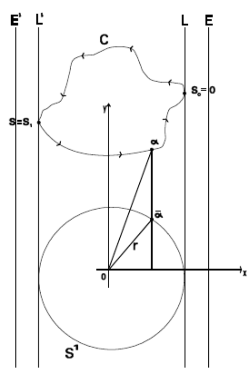


Figura 7

Parametrizamos *C* pelo comprimento de arco, $\alpha(s)=(x(s),y(s))$, de modo que *C* tenha orientação positiva e os pontos de tangência com as retas *L* e *L'* ocorram respectivamente, $s=0$ e $s=s_1$.

Tomando a parametrização de S^1 como $\overline{\alpha}(s)=(\overline{x}(s),\overline{y}(s))=(x(s),\overline{y}(s))$, com $s\in[0,l]$ e denotando sua área por $\overline{A}$, temos $\overline{A}=\pi r^2=-\int_0^l \overline{y}x'ds$, onde *2r* é a distância entre *L* e *L'*.

Sabendo que a área A de C é dada por $A=\int_0^l xy'ds$, temos:

$A+\pi r^2=\int_0^l (xy'-\overline{y}x')ds=\int_0^l [(x',y').(-\overline{y},x)]ds\le\int_0^l |\alpha'||\overline{\alpha}|ds=\int_0^l |\overline{\alpha}|ds=lr$, uma vez que $|\overline{\alpha}|=r$ e $|\alpha'|=1$.

Acima foi utilizada a desigualdade de Cauchy-Schwarz, sendo que a igualdade é verificada se e somente se α' é um múltiplo de $\overline{\alpha}$, isto é, se e somente se $\alpha'=\frac{1}{r}(-\overline{y},x)$, ou seja, a igualdade implica que $y'=\frac{1}{r}x$.

Utilizando o fato de que a média geométrica de dois números positivos é menor ou igual à média aritmética destes dois números, e que a igualdade é válida apenas quando os números são iguais, temos que $\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2}\le\frac{1}{2}\left(A+\pi r^2\right)\le\frac{1}{2}lr$. Logo $4\pi Ar^2\le l^2r^2$, isto é $l^2-4\pi A\ge 0$.

Vamos supor que seja válida a igualdade acima, ou seja, $l^2=4\pi A$. Neste caso serão válidas também as igualdades $\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2}=\frac{1}{2}\left(A+\pi r^2\right)=\frac{1}{2}lr$, de onde $A=\pi r^2$. Além disto, como explicitado acima $y'=\frac{1}{r}x$. Como *r* não depende da direção de *L*, pode-se efetuar a mesma construção com retas perpendiculares a *L*, de onde verificaríamos que $x'=\frac{1}{r}y$. Portanto $1=(x')^2+(y')^2=\frac{1}{r^2}(x^2+y^2)$ e *C* é um círculo, concluindo assim a demonstração.

No âmbito da geometria diferencial o problema isoperimétrico pode ser abordado de maneira mais geral.

1.3.2.1 A desigualdade isoperimétrica para curvas sobre uma esfera

Se quisermos ser um pouco mais rigorosos, podemos assumir que a superfície da Terra é aproximadamente uma esfera e o problema isoperimétrico de Dido deveria ser resolvido sobre uma superfície esférica, neste caso a solução é a mesma!

A desigualdade isoperimétrica para curvas fechadas sobre uma esfera foi resolvida em 1919 por Paul Lévy [18] que também a estendeu para dimensões mais altas e superfícies mais gerais consideradas em geometria diferencial.

Para uma curva fechada de comprimento L_1 englobando uma área A_1 sobre uma esfera de raio um no espaço usual ele mostrou que $L_1^2 \geq A_1(4\pi - A_1)$, sendo que a igualdade só se verifica se a curva do contorno for uma circunferência.

Se a esfera tiver raio *R*, podemos escrever esta desigualdade, para curvas fechadas de comprimento *L*, como $L^2 \geq A\left(4\pi - \frac{A}{R^2}\right)$. De fato, dada uma curva fechada de comprimento *L* sobre a esfera de raio *R* englobando uma área *A*, consideramos uma fator de escala *1/R* e a curva C_1 correspondente na esfera de raio um que engloba uma área A_1. Como ao expandirmos ou contrairmos de um fator *k* as medidas de comprimento são afetadas por este fator *k* e as de área por k^2, temos que $L = RL_1$ e $A = R^2 A_1$.

Assim, se considerarmos o contorno do mar na região de demarcação como parte de um círculo máximo da superfície da Terra, Dido teria mesmo que optar por uma semicircunferência.

E se o comprimento da corda feita de couro fosse L qual seria a área englobada por esta semicircunferência sobre a superfície terrestre ?

A área *A* de uma calota esférica de altura *h* numa esfera de raio *R* é $A = 2\pi Rh$ e isto pode ser verificado como uma conseqüência do Teorema de Pappus para áreas de superfícies de revolução (cálculo integral de uma ou várias variáveis).

Como $L = \pi r$ e ainda $R^2 = r^2 + (R-h)^2$, podemos escrever a área da semi-calota esférica como $A = \pi R\left(R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{\pi}\right)^2}\right)$.

Considerando o raio da Terra como *6400 km* e imaginando que o grupo de Dido tenha conseguido obter uma corda de *8 km*, por esta expressão obtemos que a área cercada por eles foi $10{,}185917\ km^2$, enquanto que pela expressão da área de um semi-círculo no plano obtemos *10,185916* (*1* m^2 a menos). Naturalmente a diferença entre se calcular a área contornada no plano, ou em uma esfera por uma circunferência aumenta conforme o tamanho do contorno. Por exemplo, um contorno por uma circunferência de comprimento 2000 km sobre a superfície da Terra englobará uma área cerca de 3160 km^2 a mais que o disco plano correspondente de mesmo perímetro.

Capítulo 2
O problema isoperimétrico com restrições - Aplicações

Problemas envolvendo maximização de áreas para perímetros fixos podem ser muito motivadores tanto no ensino médio quanto no ensino superior.

Neste capítulo abordaremos alguns problemas desta natureza tanto para ensino médio, como para ensino superior. Para o ensino médio o foco serão os programas computacionais desenvolvidos para o Projeto M3, parceria do MEC-UNICAMP para a produção de material didático de matemática para o ensino médio. As atividades propostas pelos programas analisados também serão abordadas de forma mais abrangente através do cálculo diferencial, utilizando as referências [8], [9] e [10].

2.1 Análise de programas computacionais do Projeto M3

Alguns dos programas computacionais para o ensino de matemática no nível médio desenvolvidos dentro do Projeto M3 abordam especificamente problemas de otimização de áreas a partir de perímetros fixos. Os programas computacionais são de livre uso e atualmente disponíveis para utilização no endereço http://m3.mat.br, estarão também disponíveis no portal do MEC (Ministério da Educação). Nesta seção estudaremos detalhadamente os programas computacionais *Otimização de Janelas* e *Otimização de Janelas com Topo Triangular* e comentaremos também sobre outro programa semelhante do Projeto M3, *Arco Romano*.

2.1.1 Otimização de janelas

O programa permite experimentar o clássico problema de otimização da área de uma janela retangular com restrição de perímetro. O objetivo naturalmente é levar o aluno/usuário a "modelar" corretamente o problema por uma função que é um polinômio de segundo grau, com domínio restrito a um intervalo. O problema de se encontrar a maior área será então traduzido como determinar os valores máximos e mínimos que esta função assume.

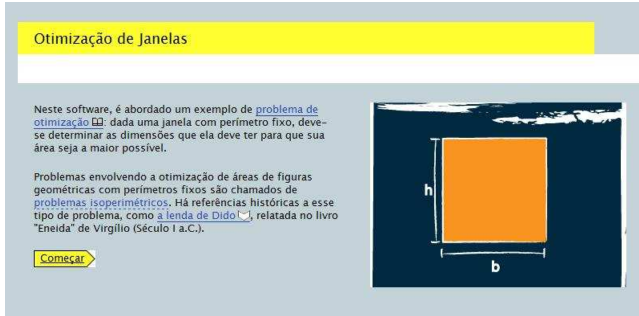


Figura 8

print da tela de apresentação do programa

Na tela inicial além da apresentação e resumo do programa, há ainda possibilidades de utilização de recursos hipermídia para complementar informações sobre os termos: ‘problemas de otimização’, ‘problemas isoperimétricos’ e ‘a lenda de Dido’. Ao clicar sobre um dos termos, as informações complementares surgem na tela, ou então o usuário é levado a outra tela onde elas são exibidas.

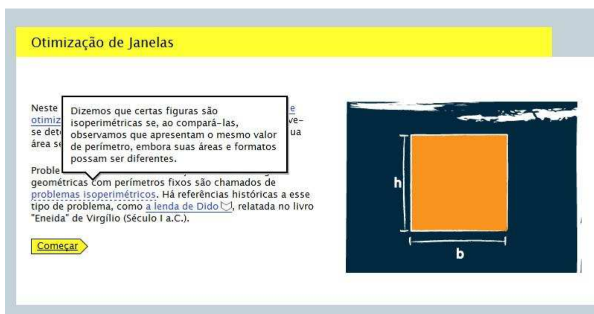


Figura 9

exemplo de informações complementares sobre os termos

Após clicar em começar, é exibido na tela o mapa de atividades. Neste programa temos três ícones, sendo que um deles representa curiosidades acerca do problema, no caso ‘A Lenda de Dido’, e os outros dois, numerados, as atividades. Embora não seja regra o programa recomenda que a atividade 2 seja realizada apenas após a realização da atividade 1.

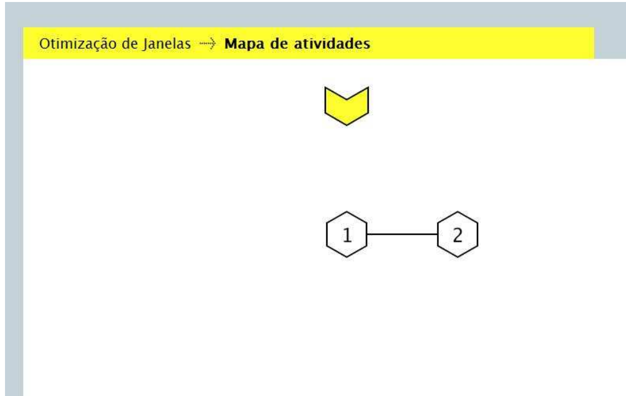


Figura 10

mapa de atividades

Para iniciar a atividade, basta posicionar o mouse sobre o ícone do número da atividade escolhida e clicar em ‘fazer atividade’. É importante destacar aqui que o computador armazena os dados referentes a realização das atividades, entretanto no canto superior direito há a opção ‘limpar dados’.

A atividade 1, chamada ‘Janelas retangulares’, tem como subtítulo a pergunta ‘Qual é a janela retangular de maior área?’. O objetivo da atividade é justamente descobrir entre todas as janelas retangulares de perímetro fixo, qual é a que possui a maior área. Os perímetros escolhidos para os retângulos são fixos em *400 cm*, com altura e base variáveis. A questão 1 da atividade propõe ao usuário descobrir o que acontece com a altura do retângulo quando o valor da base é aumentado.

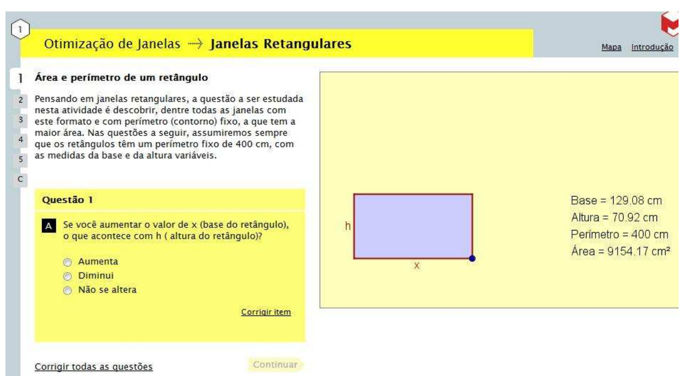


Figura 11

O vértice em azul destacado no retângulo é móvel e permite ao usuário variar o tamanho da base. Os valores indicados ao lado, exceto o perímetro que sempre é fixo, são alterados de acordo com a movimentação do vértice pelo usuário. O usuário precisa acertar a resposta para que possa clicar no botão continuar.

Pode-se formalizar o que é proposto neste primeiro momento supondo um retângulo com perímetro p, base x e altura h. Desta forma, $2x + 2h = p$ ou ainda $x + h = 0{,}5p$. Como o valor de p é fixo, evidentemente ao aumentar o valor de x o valor de h diminui.

Na questão 2 é apresentada ao usuário uma tabela que ele deve preencher, movendo o vértice em destaque do retângulo e anotando os valores de base e altura que o programa computacional indica.

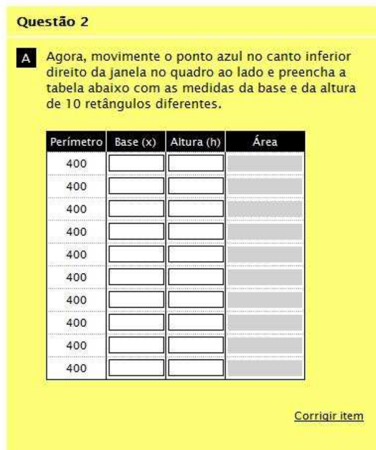


Figura 12

O valor da área é calculado automaticamente pelo programa e a única possibilidade de erro neste item é na digitação de números. A questão 3 disponível na mesma página é uma seqüência do item 2, na qual o usuário deve anotar o maior e o menor valor que pode ser atribuído à base da janela (base do retângulo), ou seja, determinar o intervalo de domínio da função.

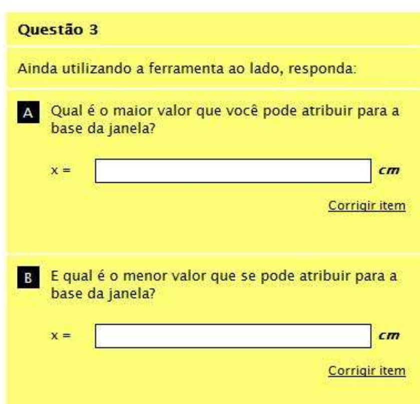


Figura 13

Voltando à equação obtida anteriormente, $x + h = 0{,}5p$, e tomando x e y não negativos, percebe-se que o valor mínimo que pode ser atribuído a x é 0 e o valor máximo atribuído a x é $0{,}5p$, justamente quando h vale 0.

A questão 4 depende dos valores escolhidos pelo usuário na questão 2, e que o programa disponibiliza no ícone referente ao bloco de notas no canto inferior esquerdo da tela.

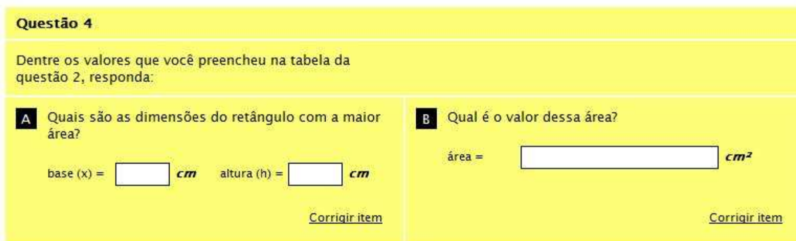


Figura 14

Para resolver corretamente esta questão basta o usuário observar atentamente os valores que constam do bloco de notas.

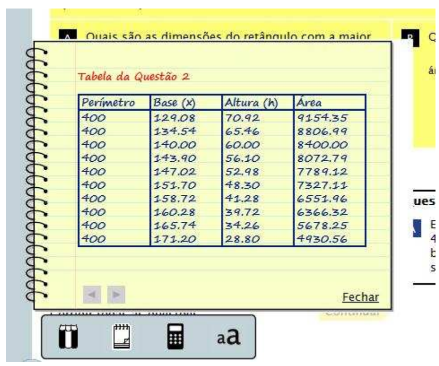


Figura 15

exemplo de informações no bloco de notas

Há ainda nesta página duas perguntas para que o usuário responda ‘no caderno’. A primeira delas aborda a descrição da variação do valor da área à medida que a base aumenta. É importante ressaltar que embora remota, existe a possibilidade de que um usuário utilize para a base apenas valores menores do que *100 cm*, assim, fica a falsa impressão de que quanto maior a base, maior a área. Portanto a segunda pergunta se faz extremamente relevante, visto que aborda a possibilidade de dois retângulos de bases de medidas diferentes, terem a mesma área. Assim, caso o usuário tenha usado apenas valores menores do que *100 cm* ou apenas valores maiores do que *100 cm*, ele obrigatoriamente terá que buscar valores em outro intervalo para a resposta.

Após as atividades empíricas, na questão 5 o usuário deve formalizar uma expressão para o perímetro *p* em função de base *x* e da altura *h*.

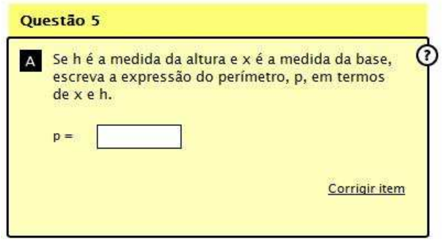


Figura 16

O ponto de interrogação ao lado explica de que maneira o usuário deve digitar as expressões matemáticas nos campos indicados. A questão 6 sugere que o usuário substitua o valor do perímetro por 400 e escreva uma expressão da altura h em função da base x.

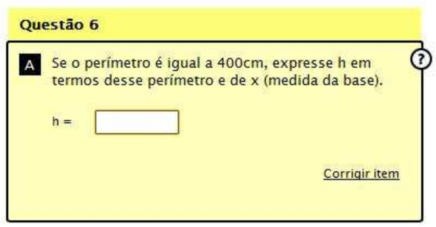


Figura 17

E por fim a questão 7 solicita a expressão da área em função apenas da base x da janela.

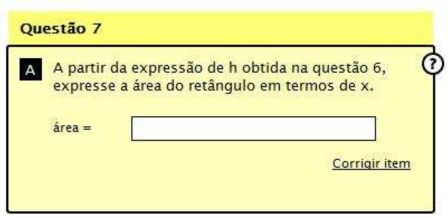


Figura 18

O programa considera corretas as respostas $x(200 - x)$ ou ainda $200x - x^2$, além de levar em conta a comutatividade da adição e da multiplicação. Há possibilidade de corrigir cada questão individualmente, clicando em corrigir item, ou então corrigir todas as questões, clicando nesse texto no canto inferior esquerdo. Ao continuar, antes da questão 8, é apresentado ao usuário um pequeno texto sobre a expressão obtida anteriormente. Neste texto é introduzida a função área, dada por $A(x) = -x^2 + 200x$ e também é ressaltado aquilo que foi respondido na questão 3, ou seja, que x pertence ao intervalo $[0;200]$. Neste ponto é apresentado um novo gráfico, com um plano cartesiano (sem escala) que permite ao usuário marcar os pontos obtidos na tabela da questão 2, e a partir dos pontos traçar o gráfico da função quadrática correspondente. Também há no gráfico um retângulo semelhante ao que havia anteriormente, com um vértice destacado, que permite movimentação por parte do usuário.

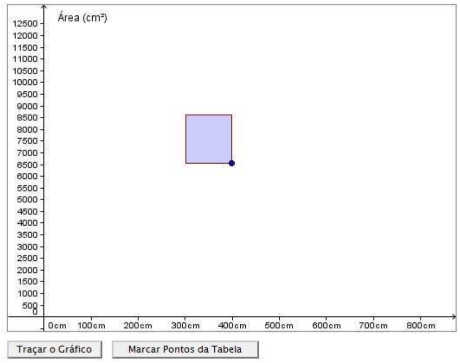


Figura 19

Antes de responder a questão 8 o usuário deve marcar os pontos e traçar o gráfico, clicando nos botões correspondentes.

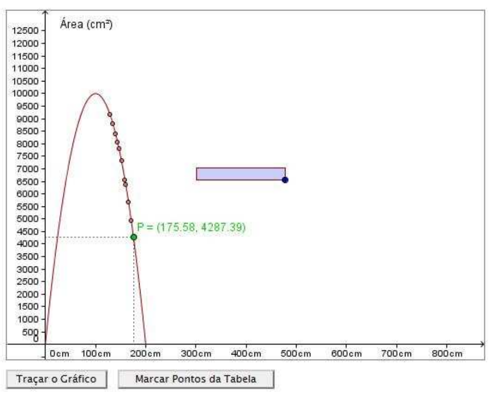


Figura 20

exemplo de pontos marcados na tabela e gráfico construído

Neste gráfico o ponto *P* é móvel, e sua variação depende da movimentação do vértice destacado no retângulo. As coordenadas *(x,y)* de *P* correspondem, respectivamente, a dimensão da base e o valor da área. A questão 8 consiste em movimentar o vértice do retângulo até obter uma área de *7500 cm²*.

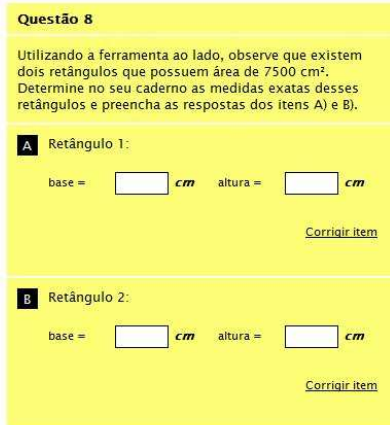


Figura 21

A determinação das medidas solicitadas na questão não se dá via gráfico, embora uma análise cuidadosa dos valores constantes no gráfico possibilita a dedução das medidas sem ser necessária a resolução da equação de segundo grau $-x^2 + 200x = 7500$, que consiste na outra maneira de se resolver a questão proposta. A questão 9 também é baseada na observação do gráfico, embora os valores exatos não sejam obtidos a partir dele.

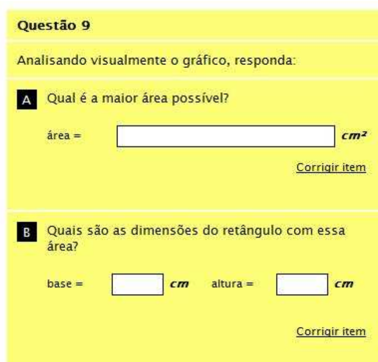


Figura 22

A questão 9 determina o ponto ótimo da solução, e a questão 10 que segue reforça a idéia de que o ponto é único.

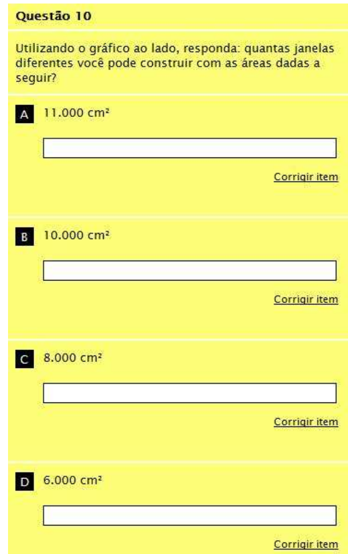


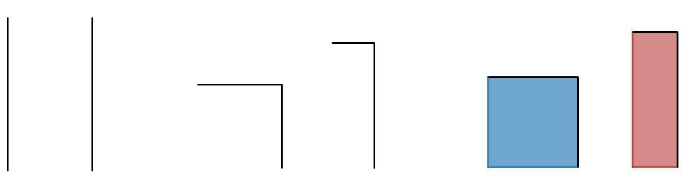
Figura 23

Após a questão 10 a atividade 1 é encerrada com informações sobre funções quadráticas e o fato de que o ponto ótimo corresponde justamente ao vértice da parábola.

A atividade deixa uma questão em aberto: como calcular o ponto de máximo sem explorar o gráfico da função. O fato de que algebricamente podemos determinar as coordenadas do vértice do gráfico de uma função quadrática, sem precisarmos explorar seu gráfico, será introduzido de forma geométrica na atividade 2.

Como a atividade leva o aluno a perceber que a área máxima é obtida justamente quando todas as dimensões do retângulo são iguais, ou seja, quando a figura é um quadrado, a conclusão "de todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é aquele que tem a maior área" serve na verdade como introdução para a segunda atividade do programa.

Ao clicar em continuar o usuário é levado novamente ao mapa de atividades, sendo que as atividades já realizadas aparecem em destaque. Para iniciar a atividade 2 o usuário deve assistir uma animação, que compara, de maneira muito clara, a área de um quadrado e de um retângulo de mesmo perímetro, fazendo-o observar que a diferença entre estas duas áreas é a área de um quadradinho.



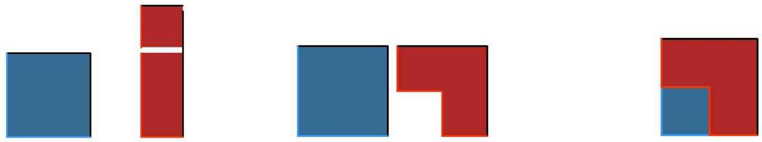


Figura 24

frames da animação

Ao contrário da primeira atividade, na qual o usuário trabalhava prioritariamente com números, na segunda o usuário já inicia, na questão 1, a trabalhar com expressões.

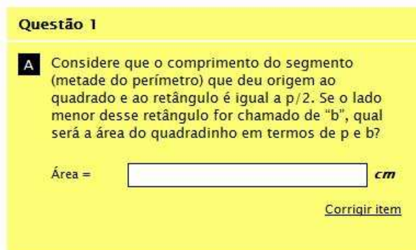


Figura 25

Aqui o aluno deverá perceber que o quadrado formado terá então lado $\frac{p}{4}$, e o quadradinho pretendido é o destacado em azul na animação. Neste caso teremos que cada lado do quadradinho medirá $\frac{p}{4}-b$ e sua área será igual a $\left(\frac{p}{4}-b\right)^2$, que é a expressão solicitada.

A partir desta constatação, todas as atividades do programa são concluídas, com reforço para o fato de que entre um quadrado e um retângulo de mesmo perímetro, o quadrado terá área maior.

O objetivo é de que o aluno possa, com o auxílio do professor, traduzir algebricamente a geometricamente apresentada na animação. A área A do retângulo será $A=b\left(\frac{p}{2}-b\right)=\frac{p}{2}b-b^2=\left(\frac{p}{4}\right)^2-\left(\frac{p}{4}-b\right)^2$. E esta área assume então seu valor máximo quando $\left(\frac{p}{4}-b\right)^2$, que é quando a área do quadradinho azul, for mínima, ou seja, zero.

Aqui também deve ser ressaltado que em $b = \frac{p}{4}$ a parábola, que é o gráfico da função descrita na atividade 1, tem seu vértice.

2.1.2 Otimização de Janelas com Topo Triangular

Neste programa computacional o problema de otimização envolve a maximização da área de janelas com topo triangular e perímetro fixo, sendo um modelo destas janelas apresentado já na inicialização do programa.

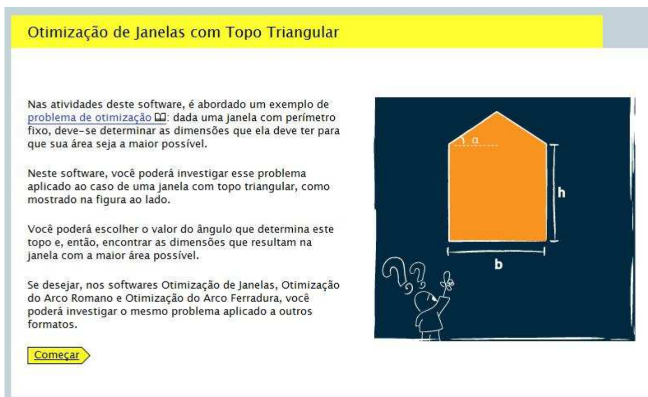


Figura 26

O perímetro fixo novamente é determinado em *400 cm* e para o início da atividade é necessária a escolha de um ângulo, que será utilizado em toda a atividade.

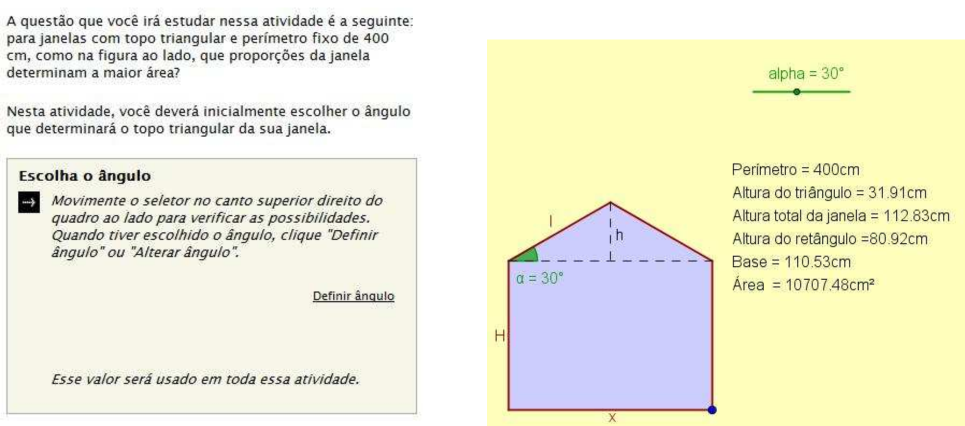


Figura 27

Os valores disponíveis para a escolha dos ângulos variam de *5°* a *60°*, em intervalos de 5°. A partir do momento que o ângulo é escolhido, a questão 1 pode ser iniciada. Escolhemos para desenvolver a atividade um ângulo de 45°.

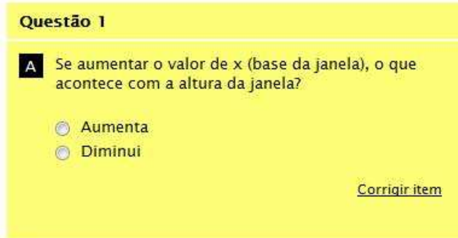
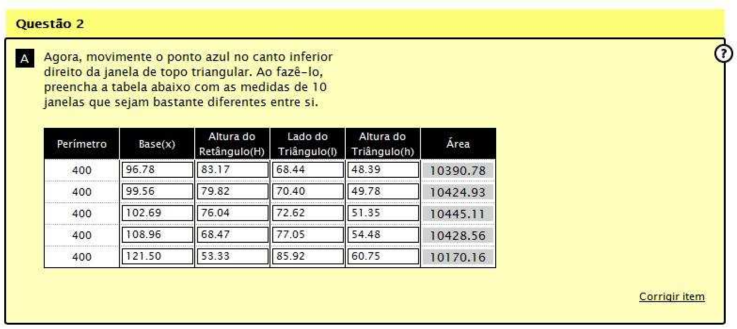


Figura 28

Para que o aluno responda à primeira atividade é permitido que ele movimente a base da janela, e a partir dos valores indicados na caixa possa concluir adequadamente o que ocorre com a altura da mesma quando aumentamos o valor da base. Na questão 2 é apresentada uma tabela, que deve ser preenchida a partir da observação dos números que aparecem na caixa quando alteramos o valor da base. O campo correspondente à área é preenchido pelo programa, porém seu valor também é informado na tabela, o que facilita para o aluno verificar se as informações fornecidas estão corretas.



Perímetro	Base(x)	Altura do Retângulo(H)	Lado do Triângulo(l)	Altura do Triângulo(h)	Área
400	96.78	83.17	68.44	48.39	10390.78
400	99.56	79.82	70.40	49.78	10424.93
400	102.69	76.04	72.62	51.35	10445.11
400	108.96	68.47	77.05	54.48	10428.56
400	121.50	53.33	85.92	60.75	10170.16

Figura 29

Para responder a questão 3 o aluno deve consultar o bloco de notas e observar qual foi a maior área obtida na atividade 2, ou seja, é uma simples questão de observação dos valores já calculados.

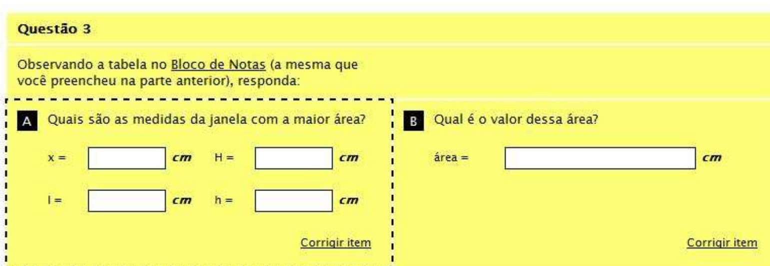


Figura 30

Para responder a questão 4 se faz necessário o uso dos valores de algumas funções trigonométricas no ângulo escolhido. Para isso, o programa apresenta os valores de seno, co-seno e tangente do ângulo escolhido pelo aluno. Neste item, o aluno deverá responder a expressão para o valor das medidas das alturas do retângulo e do triângulo, do lado do triângulo e também da área, em função da base *x* da janela.

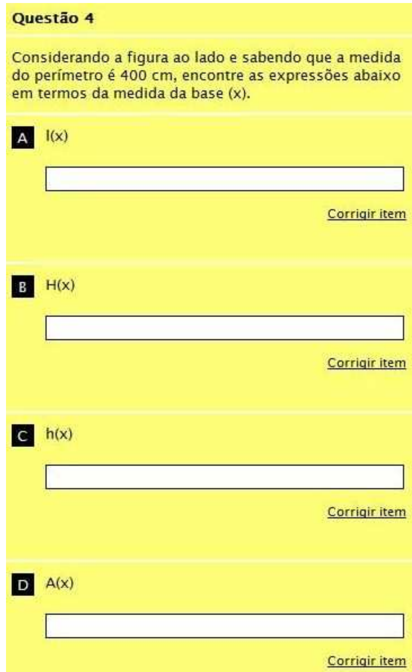


Figura 31

Para o lado l do triângulo, utiliza-se o fato de que $\cos\alpha = \dfrac{x/2}{l}$, o que implica que $l = \dfrac{x}{2.\cos\alpha}$. Para a altura H do retângulo, utiliza-se a expressão do perímetro da janela $2H + 2l + x = 400$, assim, tem-se que $H = 200 - l - \dfrac{x}{2}$ e como o valor de l é conhecido, pode-se escrever $H = 200 - \dfrac{x}{2.\cos\alpha} - \dfrac{x}{2}$. No cálculo da altura h do triângulo pode-se utilizar o fato de que $tg\alpha = \dfrac{h}{x/2}$, de onde $h = \dfrac{x.tg\alpha}{2}$. Por fim, para o cálculo da área da janela, soma-se a área do retângulo com a área do triângulo, ou seja, $A = x.H + \dfrac{x.h}{2}$. Como os valores de H e h já são dados em função da base x, tem-se $A = x.\left(200 - \dfrac{x}{2.\cos\alpha} - \dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{x}{2}.\left(\dfrac{x.tg\alpha}{2}\right)$.

No desenvolvimento das expressões acima não foram utilizados os valores dados para seno, co-seno e tangente, uma vez que a escolha de α fica a critério do aluno. Para a questão 5, é apresentado um gráfico da função quadrática obtida pelo aluno no final da questão 4.

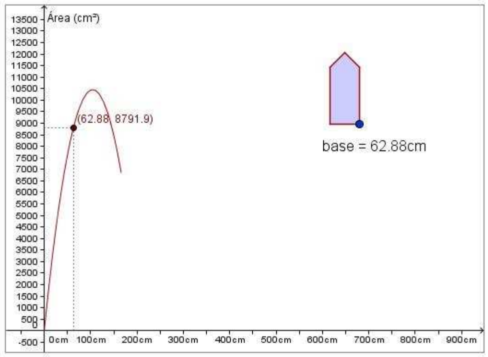


Figura 32

Como o ponto é móvel, o aluno pode aumentar ou diminuir a base, movendo assim o ponto sobre o gráfico de forma a obter os valores solicitados para a resposta da questão 5.

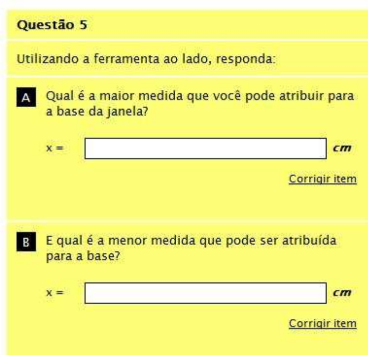


Figura 33

Ao mover o ponto o aluno encontrará o menor valor para a base, zero, e também o maior valor possível, que é justamente quando a figura que forma a janela fica igual a um triângulo, quando a altura *H* do retângulo fica igual a zero. Apenas na questão 6 é que efetivamente o aluno responde sobre a solução ótima do problema apresentado.

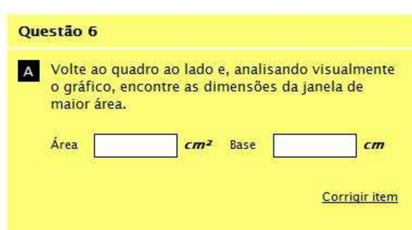


Figura 34

A questão 7 indaga quantas janelas podem ser construídas com uma área dada. Esta questão reforça a constatação de que a maior área é realmente a que foi encontrada na questão 6, além de reforçar o conceito do domínio da função, explorado na questão 5.

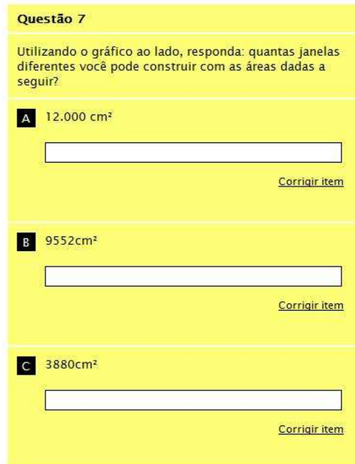


Figura 35

Concluída a questão 7 retornamos ao mapa das atividades, para prosseguir com a atividade 2. A questão 1 desta atividade já propõe uma interação entre os alunos, de modo que eles utilizem também resultados obtidos pelos colegas para o preenchimento da tabela.

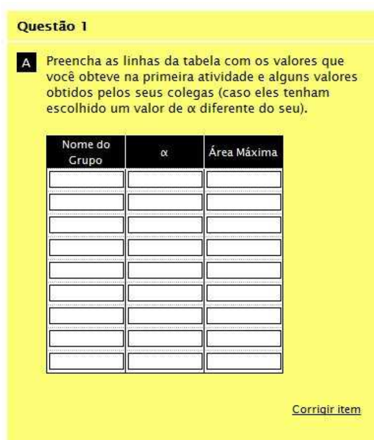


Figura 36

Embora o programa permita refazer a atividade considerando apenas um ângulo, é interessante que o professor estimule a comparação de vários resultados para ângulos diferentes da atividade 1. É proposta inclusive a questão, para ser respondida no caderno, sobre qual ângulo escolhido retornaria a maior área possível. Uma vez que escolhemos as janelas ótimas para certo ângulo, qual ângulo proporcionaria a janela ótima entre todas as ótimas?

2.2 Aprofundamento e extensões utilizando cálculo diferencial

Abaixo apresentaremos exemplos de atividades a serem propostas envolvendo otimização de áreas utilizando para sua resolução elementos de cálculo diferencial, presente nos currículos para o ensino de matemática em cursos superiores. Os programas discutidos em 2.1 podem ser utilizados como motivadores iniciais para uma abordagem mais aprofundada de problemas de otimização utilizando cálculo diferencial de uma ou várias variáveis. Resumimos inicialmente conceitos e resultados necessários para obtenção de máximos e mínimos. As principais referências utilizadas foram [8], [9], [10] e [16]. O desenvolvimento da segunda atividade é baseado na referência [9].

2.2.1 Abordagem utilizando cálculo diferencial de funções de uma variável

Depois de introduzidos os conceitos de limite, continuidade e derivada de funções reais de uma variável, resumimos a seguir as principais definições e resultados essenciais para a abordagem de problemas de máximo e mínimo deste tipo de função, como é o caso dos propostos nos dois programas computacionais analisados na seção 2.1.

Definição 2.2.1.1: *Uma função $f: I \subset R \rightarrow R$ é crescente num ponto x_0, quando existe um intervalo aberto I = (a,b) contendo x_0 tal que $f(x) < f(x_0)$, para x em I à esquerda de x_0 e $f(x_0) < f(x)$, para x em I à direita de x_0. A função f é decrescente em x_0 se $f(x) > f(x_0)$, para x em I à esquerda de x_0, e $f(x_0) > f(x)$, para x em I à direita de x_0.*

Teorema 2.2.1.2: *Se a derivada $f'(x_0)$ existe e é positiva, a função $f: I \subset R \rightarrow R$ é crescente em x_0. Se a derivada é negativa, então, f é decrescente em x_0.*

Definição 2.2.1.3: *Uma função* $f: I \subset R \to R$ *tem um máximo relativo em* x_0*, quando* $f(x) \leq f(x_0)$ *para todo x no intervalo aberto I, que contém* x_0*. A função tem um mínimo relativo em* x_0*, quando* $f(x) \geq f(x_0)$ *para todo x no intervalo aberto I, que contém* x_0*.*

Definição 2.2.1.4: *O ponto* x_0 *é dito ponto crítico de uma função* $f: I \subset R \to R$*, quando* $x_0 \in I$ *e* $f'(x_0)$ *é zero ou não existe.*

Teorema 2.2.1.5: *Se uma função f é contínua num intervalo limitado e fechado , então ela tem um valor máximo e um valor mínimo neste intervalo.*

Teorema 2.2.1.6: *Se f tem um máximo ou um mínimo relativo em* x_0*, então* x_0 *é um ponto crítico de f.*

(Suponha que x_0 não seja um ponto crítico de *f*, neste caso a derivada $f'(x_0)$ existe e não é nula. Pelo Teorema 2.2.1.2, f é crescente ou decrescente em x_0 e não pode ter aí um máximo ou mínimo relativo).

Desta seqüência concluímos então o resultado central para os nossos propósitos:

Teorema 2.2.1.7: *Se uma função f é contínua definida num intervalo limitado fechado, então, seus valores máximo e mínimo no intervalo ocorrem em pontos críticos da função no intervalo ou nos pontos extremos no intervalo.*

Assim, via cálculo de uma variável, o programa de otimização de janelas pode ser concluído com uma aplicação do Teorema 2.2.1.7.

Q1. *Qual é a função a ser analisada?*

Função área de um retângulo com um perímetro fixo *p*. Assumindo a medida *x* para a base, temos $A(x) = x\left(\frac{p}{2} - x\right) = \frac{p}{2}x - x^2$.

Q2. *Qual o domínio desta função?*

O domínio dado pelas restrições do problema é o intervalo $I = \left[0, \frac{p}{2}\right]$.

Q3. *Quais os pontos críticos para a função?*

$A'(x) = 0$ para $\frac{p}{2} - 2x = 0$, ou seja $x = \frac{p}{4}$ é o ponto crítico.

Q4. *Quais os valores da função nos pontos críticos e nos extremos do intervalo do domínio?*

$A\left(\frac{p}{4}\right) = \left(\frac{p}{4}\right)^2$ e $A(0) = A\left(\frac{p}{2}\right) = 0$.

Q5. *Quais os valores máximos e mínimos segundo o Teorema 2.2.1.7?*

O valor mínimo assumido para a área é *0*, quando $x = 0$ ou $x = \frac{p}{2}$ e o valor máximo para a área será $\left(\frac{p}{4}\right)^2$ quando $x = \frac{p}{4}$, ou seja,

Corolário 2.2.1.8: *De todos os retângulos de mesmo perímetro, o de maior área é o quadrado.*

Para o problema proposto no segundo programa computacional tratado em 2.1, de janelas com topo triangular de ângulo fixo *a*, as questões Q1 a Q5 ficam assim respondidas:

Q1.

A função área, obtida pela soma das áreas de um retângulo e um triângulo. Denominando por *x* a base do retângulo temos $A(x) = \frac{1}{2}x\left[p - x(1 + \sec a)\right] + \frac{1}{4}x^2 tga$. O ângulo *a* é fixo.

Q2.

O domínio dessa função expressa a variação possível de *x*, de modo a ainda obtermos janelas triangulares. Temos, portanto, que *x* deve ser positivo e seu valor máximo ocorre quando a altura da parte retangular se anula. Assim sendo, o domínio será $I = \left[0, \frac{p\cos a}{1 + \cos a}\right]$.

Q3.

O ponto crítico da função é obtido quando $A'(x) = 0$, ou seja, $x = \dfrac{p}{2\left(1 + \sec a - \frac{tga}{2}\right)}$.

Q4.

Inicialmente temos que $A(0)=0$, mas também que $A\left(\dfrac{p}{2\left(1+\sec a-\dfrac{tga}{2}\right)}\right)>A\left(\dfrac{p\cos a}{1+\cos a}\right)$.

Q5.

O valor mínimo para a área será zero, e o valor máximo será dado por $A\left(\dfrac{p}{2\left(1+\sec a-\dfrac{tga}{2}\right)}\right)$.

2.2.2 Abordagem utilizando cálculo diferencial de funções de várias variáveis

Como comentado durante a exploração do programa computacional *Janelas de Topo Triangular*, ao não fixarmos o ângulo α, podemos abordar este problema com duas variáveis, a base da janela e o ângulo envolvido. Com a utilização de um ângulo fixo, caímos em um problema de uma única variável como descrito acima. Como feito anteriormente resumimos algumas definições e teoremas do cálculo diferencial de duas e três variáveis, centrais para esta abordagem.

Analogamente ao caso de funções de uma variável, temos também aqui os teoremas para valores extremos, entretanto não mais lidamos com extremos dos intervalos, mas sim com as fronteiras de conjuntos fechados, conjuntos abertos ou interiores de conjuntos no plano.

A seqüência de conceitos e resultados a seguir pressupõe as noções de limite, continuidade e derivadas parciais de funções de duas ou mais variáveis a valores reais.

Definição 2.2.2.1: *Um ponto (x_0, y_0) está na fronteira de um conjunto D do plano R^2, quando cada disco $\beta\left((x_0, y_0), \delta\right)$ dado por $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$, $(\delta>0)$, com centro em (x_0, y_0), não importa quão pequeno ele seja, contém pelo menos um ponto de D e um ponto que não está em D.*

Teorema 2.2.2.2: *Se uma função* $f : A \subset R^2 \to R$ *é contínua num conjunto fechado e limitado do plano* R^2 *, então ela tem um valor máximo e um valor mínimo neste conjunto.*

Teorema 2.2.2.3: *Se uma função f de duas ou mais variáveis, tem um máximo ou um mínimo relativo em um ponto P, então P é um ponto crítico de f.*

Observamos que este resultado é uma conseqüência direta do Teorema 2.2.1.7, pois se $f(x, y)$ tem um máximo ou mínimo relativo em (x_0, y_0), então a função $f(x, y_0)$, de um variável, a saber, *x*, tem um máximo ou um mínimo relativo em x_0. Como também a função $f(x_0, y)$ de *y* tem um máximo ou mínimo relativo em y_0. Pelo teste da derivada primeira para funções de uma variável, as derivadas $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ ou não existem ou são zero, assim, (x_0, y_0) é um ponto crítico de $f(x, y)$.

Os resultados anteriores conduzem ao seguinte teorema:

Teorema 2.2.2.4: *Os valores máximo e mínimo de uma função contínua, definida num conjunto fechado e limitado do plano são assumidos ou em um ponto crítico desta função ou na fronteira deste conjunto.*

Os problemas de máximo e mínimo também podem ser abordados através dos *multiplicadores de Lagrange*, e para tanto são necessários os conceitos resumidos abaixo.

Definição 2.2.2.5: *Uma curva de nível de uma função de duas variáveis* $f : A \subset R^2 \to R$ *consiste dos pontos* (x, y) *de seu domínio onde a função tem o valor c,* $c \in R$ *.*

Para uma função de três variáveis $f : A \subset R^3 \to R$, temos o conceito de superfície de nível, que consiste dos pontos do domínio onde a função assume o valor *c*, $c \in R$.

Definição 2.2.2.6: *O gradiente de uma função* $f : A \subset R^2 \to R$ *com derivadas parciais no ponto* (x, y) *é o vetor cujas coordenadas são as derivadas parciais de f:*

$\vec{grad}\, f(x,y) = f_x(x,y)i + f_y(x,y)j$. *Para uma função de três variáveis o gradiente é definido como* $\vec{grad}\, f(x,y,z) = f_x(x,y,z)i + f_y(x,y,z)j + f_z(s,y,z)k$.

Teorema 2.2.2.7: *Suponhamos que S seja uma superfície de nível de uma função* $g(x,y,z)$*, com gradiente não nulo, e que* $f(x,y,z)$ *e* $g(x,y,z)$ *tenham derivadas parciais contínuas num conjunto aberto contendo S. Se* $f(x,y,z)$ *tem um valor máximo ou mínimo em* (x,y,z) *em S, então, este valor extremo ocorre em um ponto onde* $\vec{grad}\, f(x,y,z) = \lambda\, \vec{grad}\, g(x,y,z)$*, para algum número* λ.

Observe que geometricamente, isto significa que os valores máximo e mínimo da função $f(x,y,z)$ em uma superfície de nível $g(x,y,z) = c$ de outra função, se existirem, ocorrem em pontos onde a superfície de nível de f é tangente à superfície de nível de g. Como $\vec{grad}\, f$ e $\vec{grad}\, g$ são perpendiculares às suas respectivas superfícies de nível, o valor extremo ocorre quando $\vec{grad}\, f$ e $\vec{grad}\, g$ são paralelos e, portanto, $\vec{grad}\, f = \lambda\, \vec{grad}\, g$.

A partir destas considerações podemos abordar o problema proposto do programa computacional. A redação a seguir é baseada em [9].

Consideramos uma janela de topo triangular com base *b*, com altura da parte retangular *h*, o ângulo que cada lado do triângulo isósceles faz com a horizontal igual a *a*. Desta forma temos que o perímetro *p* da janela é dado por $p = b + 2h + \dfrac{b}{\cos a}$.

Podemos isolar a altura h, de modo a ter $h = \dfrac{1}{2}\left[p - b\left(1 + \dfrac{1}{\cos a}\right)\right]$. E como a área *A* da figura é da por $A = bh + \dfrac{1}{4}b^2 tga$, substituindo h, obtemos uma função área, de duas variáveis, a saber, *a* e *b*. Ou seja, termos $A = f(a,b) = \dfrac{1}{2}b\left[p - b\left(1 + b\sec a\right)\right] + \dfrac{1}{4}b^2 tga$.

Inicialmente observam-se as restrições para as variáveis da função, *b* e *a*. A primeira restrição é física sobre a base *b* e o ângulo *a*, $0 \le b \le \frac{p}{2}$ e $0 \le a < \frac{\pi}{2}$. Entretanto $h \ge 0$, o que cria um vínculo entre as variações máximas de *a* e *b* dado por $\cos a \ge \frac{b}{p-b}$.

Com as condições postas, temos a região que é o domínio desta função e lembramos que os pontos ótimos podem estar na fronteira desta região. Primeiramente determinamos a curva de nível $A = f(a,b) = 0$, ou seja, $0 = \frac{1}{2}b\left[p - b\left(1 + b\sec a\right)\right] + \frac{1}{4}b^2 tga$. Isolando *b*, temos $b = \frac{1}{4}\cos a\left(2 - tga + \sqrt{4 + 16p.\sec a - 4tga + tg^2 a}\right)$. Utilizando a restrição $0 \le a \le \frac{\pi}{2}$, obtemos a seguinte região:

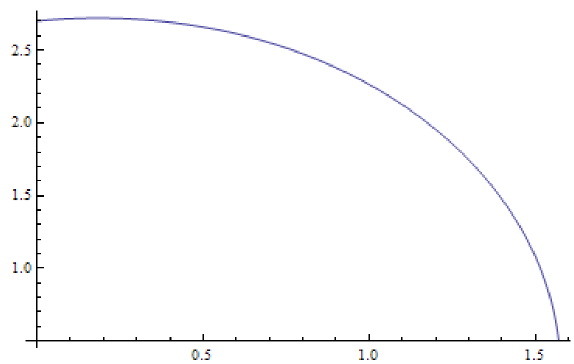


Figura 37

exemplo de gráfico da restrição sobre b, para p = 10

Entretanto ainda há a restrição $\cos a \ge \frac{b}{p-b}$. Isolando *b* e utilizando fatoração de expressões trigonométricas, obtemos $b = \frac{p}{2}\cos a \sec^2 a$. Utilizando novamente a restrição sobre *a*, tem-se a seguinte região:

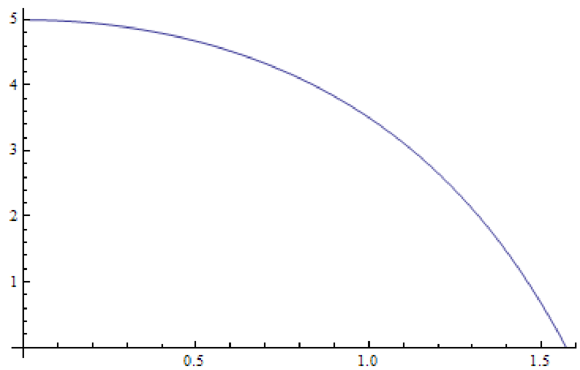


Figura 38

exemplo de gráfico da restrição sobre a, para p = 10

Portanto o domínio da função área é a superfície delimitada pelos eixos e contida abaixo das curvas $b = \frac{1}{4}\cos a\left(2 - tga + \sqrt{4 + 16p.\sec a - 4tga + tg^2 a}\right)$ e $b = \frac{p}{2}\cos a \sec^2 a$.

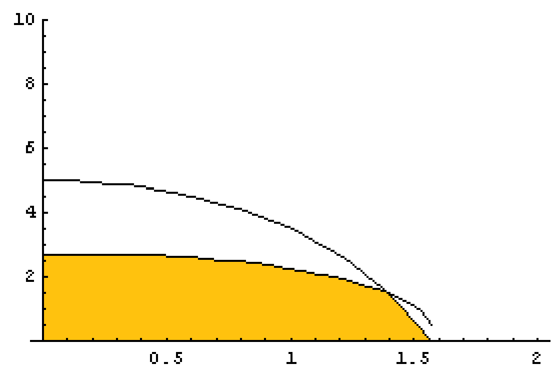


Figura 39

exemplo gráfico domínio da função, para p = 10

Inicialmente a procura pelo(s) ponto(s) crítico(s) da função será através do Teorema 2.2.2.3, ou seja, calculando suas derivadas parciais e igualando-as a zero. Neste caso tem-se que $f_b(a,b) = \frac{1}{2}(p - 2b + 3b^3 \sec a + btga)$, igualando a zero e isolando *b*, obtém-se $b = \dfrac{p}{-2 - 2\sec a + tga}$. Ainda, $f_a(a,b) = -\frac{1}{4}b^2 \sec^2 a(-1 + 2sena)$, igualando a zero obtemos $b = 0$ ou $-1 + 2sena = 0$. Para $b = 0$ a área também será nula, e para $-1 + 2sena = 0$, tem-se $a = \frac{\pi}{6}$ e $b = \dfrac{p}{2 + \sqrt{3}}$, que são as coordenadas de um ponto crítico da função. Entretanto a área máxima pode ainda ocorrer em algum trecho da fronteira, tornando necessária a comparação entre o valor da área obtida para este ponto crítico com o valor que a área atinge na fronteira.

No ponto crítico encontrado, o valor da área será $A = \dfrac{p^2}{8+4\sqrt{3}}$. O trecho da fronteira em que a área não é zero é dado pela relação $\cos a = \dfrac{b}{p-b}$, da qual decorre que $tga = \dfrac{(p-b)^2 - b^2}{b}$. Substituindo o valor da tangente e do co-seno encontrado em $A = \dfrac{1}{2}b\left[p - b\left(1 + b\sec a\right)\right] + \dfrac{1}{4}b^2 tga$, resulta $A = \dfrac{1}{4}b\sqrt{p(-2b+p)}$, que é uma função de uma variável, cujo máximo será dado por $b = \dfrac{p}{3}$. Neste caso, o valor da área será $\dfrac{p^2}{12\sqrt{3}}$.

Comparando o valor máximo da área na fronteira com o valor da área no ponto crítico encontrado, verifica-se que o valor da área no ponto interior é maior do que o valor da área na fronteira, isto é $\dfrac{p^2}{8+4\sqrt{3}} > \dfrac{p^2}{12\sqrt{3}}$.

Utilizando-se programas que traçam gráficos de superfícies parametrizadas, tais como *Matemathica, Winplot* e *Maxima*, podemos plotar o gráfico da função área:

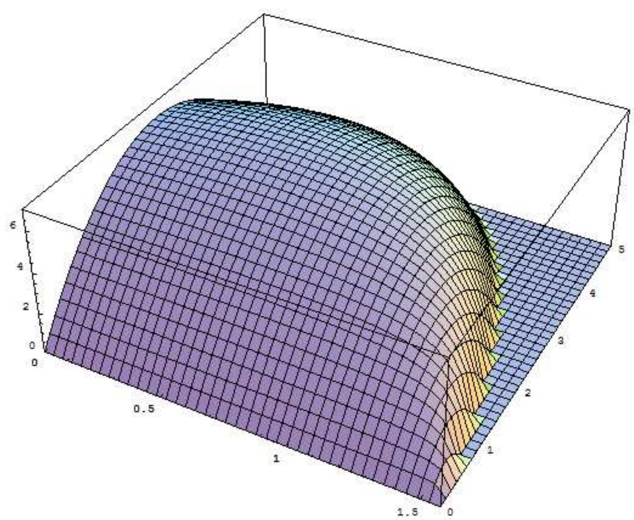


Figura 40

exemplo de gráfico da função área, para p = 10)

E também destacar o ponto ótimo dentro da região que é domínio da função:

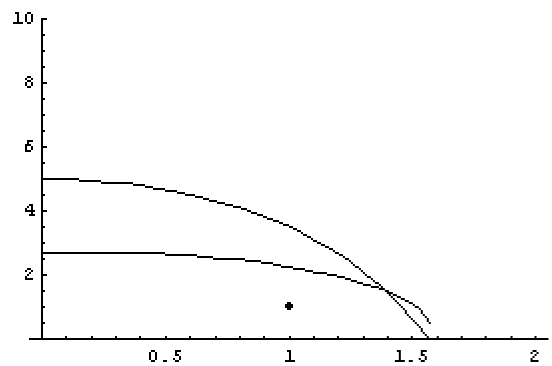


Figura 41

gráfico com ponto crítico destacado no domínio da função, para p = 10

Uma outra forma de resolver este problema é pelo Teorema 2.2.2.7, obtendo os pontos críticos da função através dos multiplicadores de Lagrange para funções de três variáveis. Neste caso tem-se a restrição do perímetro dada por $p = b + 2h + b\sec a$, que pode ser interpretada como uma curva de nível p da função $G = b + 2h + b\sec a$. A área é dada por $A = bh + \frac{1}{4}b^2 tga$.

Tomando as derivadas parciais $A_a = \frac{1}{4}b^2 \sec^2 a$, $A_b = h + \frac{1}{2}btga$, $A_h = b$, $G_a = b\sec atga$, $G_b = 1 + \sec a$ e $G_h = 2$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} b = 2\lambda \\ h + \frac{1}{2}btga = \lambda(1 + \sec a) \\ \frac{1}{4}b^2 \sec^2 a = \lambda b \sec atga \\ b + 2h + b\sec a = p \end{cases}$$

Resolvendo o sistema são obtidos mais de um valor para *a*, entretanto, apenas $a = \frac{\pi}{6}$ satisfaz a condição $0 \le a \le \frac{\pi}{2}$. E a solução coincide com a obtida anteriormente.

Como o trabalho desenvolvido trata do problema isoperimétrico, são relevantes os valores da base e da altura do retângulo e também o valor do lado do triângulo que forma o topo da janela. Para $a = \frac{\pi}{6}$, a base do retângulo é $b = \frac{p}{2+\sqrt{3}}$, o lado do triângulo é $\frac{p}{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}$. Como $h = \frac{p(3+\sqrt{3})}{6(2+\sqrt{3})}$, percebe-se que a área máxima é formada por metade de um hexágono regular encaixada sobre meio quadrado (cujo lado coincide com a diagonal menor do hexágono), uma vez que $h = \frac{l}{2} + \frac{b}{2}$.

2.3 Outros problemas a serem propostos

Nesta seção são propostos outros problemas que aplicam os conceitos envolvidos no problema isoperimétrico, os quais podem ser utilizados no ensino médio e universitário. Além de outro programa computacional do Projeto M3, também serão abordados dois outros problemas, nas referências [9] e [2].

2.3.1 O problema isoperimétrico com restrição de extremidade

Dados dois pontos A e B, de modo que d seja o comprimento do segmento AB, qual a curva aberta de comprimento ℓ, $\ell > d$, com extremidade em A e B, que delimita a área máxima?

De acordo com o que foi desenvolvido no capítulo 1, sabemos que se $\ell = \pi d$, a solução será uma semi-circunferência. Entretanto o problema fica mais interessante se considerarmos $\ell \neq \pi d$. Poderíamos pensar que a solução fosse uma elipse, por exemplo, neste caso utiliza-se argumentação semelhante à utilizada na Seção 1.2.1 para mostrar que a área será máxima para uma curva igual a um arco de uma circunferência.

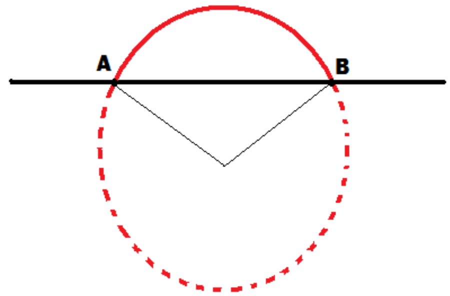


Figura 42

Podemos determinar o ângulo α deste arco de circunferência utilizando o fato de que $\ell = \alpha r$ e que $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{d}{2}}{r}$.

2.3.2 O problema da divisão do barbante

Considere um barbante de comprimento ℓ. Como deve ser realizada a divisão deste barbante, de modo que com os dois pedaços possam ser construídos um quadrado e um triângulo eqüilátero, cuja soma das áreas seja máxima?

Embora o problema seja simples na elaboração, ao ser solucionado como um problema de uma variável, um fato interessante é que a solução não está em um ponto crítico e sim na fronteira. A solução para a área máxima, é formar um quadrado de lado $\frac{\ell}{4}$ e um triângulo de lado zero, ou seja, utilizar todo o barbante para construir o quadrado. Entretanto a solução para a área mínima não será a utilização de todo o barbante para construir o triângulo eqüilátero.

2.3.4 Um programa computacional com variação do problema isoperimétrico

O programa computacional Janelas em Arco Romano, disponível para utilização no site http://www.m3.mat.br, propõe uma abordagem diferenciada do problema isoperimétrico, uma vez que nele a busca pela otimização não é apenas para a área, mas também para a luminosidade.

O processo de otimização da área é semelhante ao que foi desenvolvido nas Seções 2.1.1 e 2.1.2, entretanto este programa usa o conceito de luminosidade de janelas no estilo vitral, dividida em partes que podem ter cores variadas, com diferentes coeficientes de luminosidade, à escolha do aluno.

Após definir de que modo será o vitral e suas cores, forma-se uma função de segundo grau, a qual descreve a luminosidade total da janela de perímetro fixo, tendo como variável o valor da base. O objetivo do aluno é encontrar as medidas da janela que terá luminosidade máxima.

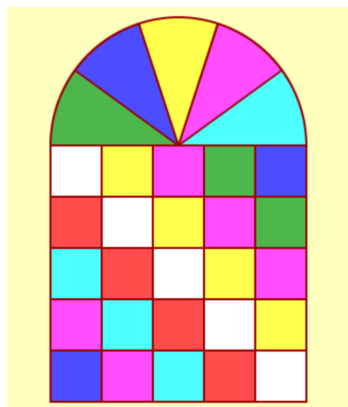


Figura 43

A importância deste programa é justamente a utilização de outros elementos, de modo que a solução do problema para a área máxima não seja a mesma a partir do momento que outra condição, no caso a luminosidade, é introduzida. Este programa também pode motivar outros problemas de várias variáveis, considerando variações da medida da base e também da luminosidade das regiões.

2.3.5 Otimização de áreas com restrição quanto ao número de mourões

Um fazendeiro possui ℓ metros de tela, e decide fazer um cercado que terá como um dos limites a margem de um rio. Qual será o contorno que maximiza a área, se o fazendeiro dispõe de n mourões para a construção da cerca?

Este problema permite uma generalização do apresentado no roteiro que originou este trabalho, qual a poligonal com *(n-1)* lados com dois vértices (mourões) na beira do rio que delimita a maior área. Na resolução, inicialmente é necessário que sejam discutidas as restrições sobre *n*. Para $n = 3$ a melhor solução seria justamente um triângulo retângulo isósceles, que é metade de um quadrado. Para $n = 4$ a solução é apresentada no vídeo, ou seja, meio hexágono. É importante ressaltar, que usando a simetria, como na Seção 1.2.1, e também o teorema para polígonos apresentado tanto na Seção 1.2.2 quanto na Seção 1.3.1, qualquer que seja o número de mourões, a solução ótima será sempre a metade de um polígono regular com número par de lados. É possível neste caso, inclusive, deduzir uma expressão para este problema geral, ou seja, a área máxima será obtida quando o cercado for a metade de um polígono de $2(n-1)$ lados.

2.3.6 O problema das janelas e o fator de escala

Um aprofundamento do problema das janelas pode ser feito a partir da utilização dos fatores de escala, na redação abaixo utilizamos a referência [17].

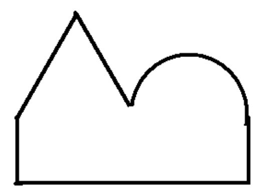


Figura 44

O fato fundamental é que em janelas com parte superior de formato fixo, existe proporcionalidade entre o comprimento da base e do contorno da parte superior da janela. Isto é, se a medida da base é *x*, a do contorno da parte superior será *kx*, este fato é decorrente de que ao ampliarmos ou reduzirmos a base utilizando um certo fator de escala[1], produziremos figuras semelhantes para o topo da janela. Portanto a altura h da parte retangular será $h = \dfrac{p-(k+1)x}{2}$.

No problema envolvendo janela retangular temos que $k = 1$, no problema envolvendo janelas com topo triangular isósceles, com ângulo da base α temos $k = \dfrac{\sec\alpha}{2}$.

Podemos ainda encontrar uma expressão geral para a área de janelas com topo de qualquer formato fixo, como o da figura apresentada acima. Inicialmente tomamos para a base o valor $x = 1$, e chamamos de A_1 o valor da área do topo da janela (sem considerar o

[1] Sobre fatores de escala recomendamos os vídeos “Um certo fator de escala” e “Criador e Criatura”, disponíveis no site do Projeto M3, cujo roteiro é de autoria do autor deste trabalho e que abordam os fatores de escala e algumas de suas conseqüências, respectivamente.

retângulo. Como existe proporcionalidade entre a base x e o topo, temos que $\frac{l(x)}{x} = k$. Assim a área A_1 é obtida para $l(1)$. A área do polígono em função da medida x da base, pode ser escrita como a soma da área do retângulo mais a área do topo, ou seja, $A(x) = h(x).x + x^2 A_1$, substituindo h temos a função $A(x) = x^2\left(A_1 - \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{p}{2}x$, que é um polinômio de segundo grau, cujo máximo será dado por $x = \frac{-p}{4A_1 - 2k - 2}$.

Assim, podemos encontrar, para um topo dado, a janela ótima. Por exemplo, para a janela cujo contorno do topo é uma semi-circunferência, temos que a solução ótima será justamente quando a base $x = \frac{p}{2 + \frac{\pi}{2}}$, que é um semi-círculo sobre um meio quadrado.

2.3.7 A extensão do isoperimétrico para dimensões maiores

A extensão do problema isoperimétrico para dimensões maiores pode ser colocada como: dentre as regiões fechadas e limitadas do R^n cuja fronteira tem medida ℓ, qual o formato da região que possui a maior medida de volume possível?

No espaço R^3 a solução para este problema é uma esfera. Este problema, com restrições, aparece na prática, por exemplo, em embalagens. Alguns exemplos clássicos: dentre as caixas paralelepípedas de mesma área lateral, qual tem maior volume? Se a caixa tiver um formato de prisma hexagonal, este volume é otimizado? E se o formato for cilíndrico?

No espaço R^3, trocamos comprimento por área da superfície de contorno e área da região por volume do sólido.

Capítulo 3
O roteiro audiovisual ‘A lenda de Dido’

Neste capítulo apresentaremos questões relativas ao roteiro audiovisual “A lenda de Dido”, realizado dentro do Projeto M3, uma parceria MEC – UNICAMP, que visa a produção de material didático de matemática para o ensino médio. O roteiro, desenvolvido pelo autor deste trabalho, é apresentado integralmente ao final da Seção 2 deste capítulo. Aqui são utilizadas indiretamente as referências [2] e [3], já que foram utilizadas para a construção do roteiro e também as referências [13] e [14], que dizem respeito à teoria de roteiros.

Além da realização de material audiovisual, o Projeto M3 produziu guias para a utilização dos vídeos em sala da aula. O guia do professor, cuja autoria conta com a participação do autor deste trabalho, é apresentado como anexo.

Para melhor compreensão deste capítulo, recomendamos assistir previamente ao vídeo “A lenda de Dido”, disponibilizado atualmente no endereço http://m3.mat.br e futuramente no portal do MEC.

3.1 Inserções de conceitos matemáticos no roteiro - Opções

Nesta seção apresentaremos algumas opções para a introdução dos conceitos matemáticos tomadas no desenvolvimento do roteiro.

A primeira etapa consistia em apresentar o problema que deveria ser resolvido com o desencadeamento das ações do filme. Esta apresentação é feita diretamente pela protagonista, Elisa, ao narrar um fato passado:

ELISA (OFF)

A história que eu vou contar aconteceu de verdade. Foi na época em que eu precisei cercar uma área pra colocar minha criação de ovelhas.

Meu nome é Elisa e essa aí sou eu conferindo a tela que eu comprei pra fazer o cercado.

O problema era saber como cercar a maior área possível com os oitenta metros de tela que eu tinha.

Fiquei imaginando se fazia um cercado triangular... Quadrado... Retangular... Pensei até em fazer uma figura assim toda diferente...

O importante era que do lado de dentro tivesse o maior espaço possível para a minha criação de ovelhas.

Já na apresentação do problema pela personagem, foi propositalmente inserido um polígono não regular, que ela descreve como “uma figura assim toda diferente”. Entretanto o valor do perímetro para o cercado em questão só é fornecido após o início do diálogo com Dido, a outra personagem do filme.

ELISA

O nosso problema é parecido mesmo! Eu tenho oitenta metros de tela e quero fazer o maior cercado que eu puder.

Após esta apresentação, a personagem Dido, que ao longo do roteiro auxiliará Elisa, destaca uma frase importante quando apresentado o problema isoperimétrico.

DIDO

Muito bem. O perímetro do seu cercado vai ser sempre o mesmo, os oitenta metros de tela. Mas dependendo da figura que você formar com esses oitenta metros de tela, a área interna do cercado pode ficar maior ou menor.

Esta observação feita pela personagem visa ressaltar o fato de que para um mesmo perímetro dado, figuras diferentes delimitam áreas diferentes. Na seqüência, Dido mostra para Elisa que dado um polígono não convexo, é possível obter um polígono convexo com mesmo perímetro e área maior.

DIDO

Vamos começar por esse formato irregular que você pensou. Esse tipo de figura é chamado de polígono não convexo. Ele tem esse nome porque pelo menos um dos seus vértices – que são as quinas da figura – está voltado para dentro e não pra fora como os outros.

Agora, olha só: se a gente virar esse vértice para fora sem alterar o tamanho dos lados, o perímetro da figura vai continuar o mesmo, mas a área interna vai aumentar um pouco.

A definição de polígono não convexo utilizada no diálogo de Dido visa propiciar o desenvolvimento do roteiro, sem que toda hora haja interrupções para tratar de definições formais da matemática. Estas definições formais podem ser realizadas pelo professor em sala de aula, após a exibição do vídeo, utilizando as idéias nele contidas como uma introdução ao assunto.

Logo após a explicação de que é possível obter um polígono convexo com área maior do que o não convexo, Dido conta para Elisa que de todos os polígonos convexos com o mesmo número de lados e mesmo perímetro, os polígonos regulares são os que possuem a maior área. A demonstração formal deste fato é realizada no Capítulo 1 deste trabalho.

DIDO

Bom Elisa, tem uma coisa importante que você precisa saber sobre os polígonos pra entender melhor a solução desse problema:

De todos os polígonos com o mesmo número de lados e o mesmo perímetro, o polígono regular é o que tem maior área.

Para criar uma maior dinamismo no vídeo, a definição de polígono regular é realizada por Elisa.

ELISA

Polígono regular eu sei o que é! É aquele que tem todos os lados e todos os ângulos iguais. Que nem o quadrado, por exemplo.

O exemplo do quadrado dado por Elisa serve para mostrar a comparação entre áreas de um retângulo de dimensões *30 m* e *10 m* e um quadrado de lado igual a *20 m*. Os valores das dimensões e da área surgem na tela com a conclusão de Dido.

DIDO OFF

Entre um quadrado e um retângulo, com o mesmo perímetro, o quadrado é que tem área maior.

Já com o resultado que os polígonos regulares são os que possuem maior área, o passo seguinte seria comparar a área de vários polígonos regulares de mesmo perímetro, mas com número diferente de lados.

DIDO

Vamos pensar em vários polígonos regulares como possibilidades para o seu cercado, começando pelo quadrado.

A medida que se aumenta o número de lados da figura, passando pelo pentágono, hexágono, heptágono e assim por diante a gente percebe que a área também aumenta, mesmo mantendo-se o perímetro.

A fala de Dido é acompanhada por uma seqüência de imagens dos polígonos que ela vai descrevendo, obtidas a partir do programa computacional Otimizando Formas de Trajetórias [15]. O perímetro é fixo para todas as figuras, entretanto o valor da área, que o programa computacional calcula, vai aumentando. Inicialmente o número de lados das figuras que se sucedem aumentam muito pouco, enquanto a diferença entre os valores de sua área aumenta consideravelmente. Entretanto para um grande número de lados, quando aumentamos este número ainda mais, a área aumentará menos.

ELISA

Quer dizer, então, que, para um perímetro fixo, quanto maior o número de lados de um polígono regular, maior é a área interna dele, e a figura fica cada vez mais parecida com um círculo.

DIDO

É verdade, e tem mais ... A área vai aumentando cada vez menos à medida que ela vai se aproximando dá área do círculo.

DIDO (OFF)

Por exemplo, quando a gente passa de um quadrado para um pentágono, a área aumenta bastante. Agora, se a gente passa de um polígono com cinqüenta lados para um com sessenta, o aumento não é muito grande.

Essa seqüência de diálogos trabalha o fato de que a área do círculo é o limite do valor da área para um perímetro fixo. Este fato é demonstrado no Capítulo 1 deste trabalho e também abordado no guia do professor em anexo com maiores detalhes.

Com a solução do problema isoperimétrico propriamente dito, se faz necessário voltar às condições iniciais do problema de Elisa, no qual ela precisava construir um cercado na beira de um rio. Este retorno é feito a partir de uma fala de Dido.

DIDO

Mas acontece que o local onde eu queria construir a cidade ficava na beira da praia. Então deu pra fazer um truquezinho. Eu usei o mar como um dos lados do terreno. E como a parte voltada pro mar não precisava ser cercada, a forma final foi um grande semicírculo, conseguindo assim uma quantidade de terra muito maior.

ELISA

Mas esse é justamente o meu caso, tem um rio que passa dentro do meu sítio. O rio é como uma linha que divide a figura ao meio, que nem o mar no seu caso. Então, com os meus oitenta metros de arame, eu posso contornar a metade de um círculo que é a figura que possui a maior área para um perímetro fixo.

A linha divisória formada pelo mar ou pelo rio, que foi utilizada pelas duas na resolução do problema, não faz parte do perímetro da figura, por isto é utilizado o fato de que 'meia' circunferência resulta no contorno de maior área. A demonstração formal do fato encontra-se na Seção 1.2.1 deste trabalho. Entretanto como o problema de Elisa deve ser um problema mais próximo possível da realidade, ela teria que utilizar uma quantidade pré-definida de mourões para concluir o cercado.

ELISA

Puxa! Eu nunca pensei que um problema aqui do sítio pudesse ter tanta relação com a matemática e até com a história de tantos lugares!

Ih, Dido! Eu esqueci de um detalhe. Eu só comprei quatro mourões e com isso não da pra fazer uma figura que tenha muitos lados... Muito menos um semicírculo.

DIDO

Não se preocupe. O que estava valendo antes continua valendo nesse caso também. Quer dizer: se usando o rio como divisa você precisava fazer a metade de um círculo para ter a maior área possível, agora, o que você tem de fazer é a metade de um polígono regular usando os seus quatro mourões.

Neste caso o problema está realmente próximo de um problema real. O que faz com que a personagem tenha que buscar metade de uma figura que ela possa construir com os quatro mourões. Um problema mais geral é discutido na seção 2.3.5 deste trabalho.

ELISA

Ah, deixa eu ver então... dois mourões vão ficar perto da beira do rio e os outros dois afastados. A primeira figura que impulsivamente eu penso em fazer é um quadrado, com lados medindo um terço dos oitenta metros, já que o outro lado será o próprio rio. Porém, neste caso a área que eu vou conseguir cercar é de aproximadamente setecentos e onze metros quadrados..

DIDO

Porém, como eu disse, continua valendo o que valia para o círculo. Como o rio é uma linha divisória, a melhor solução seria justamente um retângulo que fosse a metade de um quadrado,com quarenta metros no lado maior e vinte metros no lado menor.

Essa discussão sobre o quadrado ser a melhor solução foi inserida justamente porque o senso comum conduz rapidamente à associação de quatro mourões com os quatro vértices de um quadrado. E a melhor maneira de mostrar que o quadrado não seria a melhor solução foi explicitar o valor de sua área claramente no roteiro.

Entretanto a solução ótima do problema inicial, com a restrição dos mourões apresentada no final do vídeo pela personagem Elisa, surge na fala de Dido, com elementos que reforçam alguns resultados abordados no vídeo.

DIDO

Mas Elisa, existe uma solução melhor ainda! Como a gente já viu, quanto maior o número de lados do polígono regular maior é a sua área, certo? Então com os quatro mourões que você tem dá pra fazer a metade de um outro polígono regular. Olha só: se você fizer um hexágono regular e dividi-lo ao meio, também vai usar quatro mourões e conseguir uma área ainda maior do que a do meio quadrado.

ELISA

Então está tudo resolvido! Dentro das condições do meu problema, o formato da metade de um hexágono regular é o que vai me dar a maior área possível para o cercado das minhas ovelhas!

3.2 Aspectos técnicos do roteiro

Aqui são apresentados alguns aspectos técnicos referentes à teoria de roteiro. A principal referência para este capítulo é [13]. Pode-se comparar a ação de escrever um roteiro à resolver um problema envolvendo sistemas de equação. Para resolver o problema inicialmente identificam-se as incógnitas e organizam-se as equações. Na arte de escrever um roteiro, isto é correspondente a determinar os personagens e escrever a sinopse. Depois, utilizando-se de um método pré-estabelecido, resolve-se o sistema. Para o roteiro, este método estabelecido é utilizado para desenvolver a história. Por fim, temos a apresentação do conjunto solução ou a formatação do roteiro pronto.

3.2.1 Condições iniciais de forma e conteúdo

Um roteiro é *"a forma escrita de qualquer projeto audiovisual"* [13]. Para os roteiros desenvolvidos no Projeto M3 havia condições prévias de desenvolvimento, visando um conjunto coeso de obras audiovisuais. Todos os roteiros da série Matemática na Escola contemplavam algum conteúdo do ensino médio, ou alguma aplicação de conteúdos do ensino médio. Também era comum a todos os roteiros o número de personagens: dois. Por questões envolvendo a produção e a gravação dos episódios, os personagens deveriam interagir sem, no entanto, ocupar o mesmo cenário. Além disto, os vídeos produzidos teriam em média 10 minutos, tempo este que corresponderia em média a 10 páginas escritas utilizando a formatação áudio/vídeo escolhida para os roteiros do projeto.

De acordo com o tema abordado, também poderia ser enviado à produção um arquivo anexo com observações específicas, sugestões de figuras e imagens ou textos relevantes.

As condições de forma e algumas condições de conteúdo eram pré-definidas antes do início do desenvolvimento do roteiro. O primeiro passo para a construção dos roteiros, era uma reunião entre o conteúdista e o roteirista para que pudesse ser apresentado o assunto (conteúdo) a ser abordado e algumas possibilidades de desenvolvimento. Logo após o roteirista enviava uma sinopse para a coordenadora do projeto e após sua aprovação iniciava o trabalho. No caso do roteiro A Lenda de Dido, dada a familiaridade do roteirista com aspectos matemáticos, a coordenadora do projeto participou da reunião com a conteúdista, focando na sinopse a ser desenvolvida pelo roteirista.

3.2.2 Identificando incógnitas e escrevendo as equações: os personagens e a sinopse

Com o assunto do roteiro pré-definido, muitas eram as opções para o desenvolvimento da história. Para evitar vídeos pouco dinâmicos, não era recomendado que o conteúdo fosse desenvolvido dentro de um contexto de aula de matemática, e ainda que os personagens não fossem professores de matemática ou matemáticos.

Pela própria natureza do problema isoperimétrico, a sinopse, em linhas gerais já estava pronta: um personagem teria uma quantidade limitada de material para realizar um contorno, de modo que a área obtida fosse máxima. Este tipo de problema inclusive tem considerável freqüência em questões de vestibulares ou concursos, sendo em geral restritos a retângulos.

O drama básico da história estava criado, incluindo aí os três atos da história, que de acordo com [13] consistem em: apresentar o problema, desenvolver de acordo com o tipo de personagem escolhida e criar a solução deste problema. Desta forma, já estava inclusive determinado quem seria o protagonista da história, ou seja, a personagem básica do drama que seria desenvolvido. Faltava ainda definir as características deste protagonista, bem como o outro personagem, responsável por auxiliar o protagonista a resolver o problema em questão.

Para a escolha dos personagens pesam as qualidades do conflito, que para [13] são duas: correspondência e motivação. A correspondência consiste no fato de que o *"problema da personagem deve também "surgir" na figura do espectador, que entrará em cumplicidade"* [13] e a motivação no fato de que *"o conflito tenha sua razão de ser"* [13]. Como não são estranhos, mas também são parte freqüente do cotidiano das pessoas problemas envolvendo maximização de áreas a partir de um contorno dado, a escolha da personagem principal tinha também por objetivo a 'transferência' de seu problema para os espectadores, isto é, despertar a curiosidade e o interesse na obtenção da resposta. Desta forma, o problema enfrentado pela personagem principal deveria ser um problema real, para que despertasse também a vontade de resolvê-lo por parte do espectador. Um fazendeiro que dispunha de uma quantidade fixa de tela para fazer um cercado para seus animais foi escolhido para ser a personagem principal da história, já que a situação é bastante provável e agregaria ao produto audiovisual o princípio de plausibilidade, ou seja, a escolha desta personagem, com um problema real, auxiliaria a reforçar a correspondência e a motivação do conflito. Pelo grande número de vídeos produzidos dentro do Projeto M3, os roteiristas deveriam variar bastante as características dos personagens, inclusive de gênero, motivo pela qual foi escolhida uma mulher para ser a fazendeira.

No teatro grego era muito comum a presença de um deus que surgia justamente para amarrar as histórias e interceder pelos humanos, essa invenção, denominada *deus ex* *machina* [2] [14]. A estreita relação do problema isoperimétrico com a mitologia, especificamente com a princesa Dido, personagem do épico Eneida, de Virgílio, fez com que Dido fosse justamente a personagem escolhida para auxiliar a fazendeira na resolução de seu problema, já que na obra ela resolve um problema semelhante. Há portanto, a utilização do *deus ex machina* no desenvolvimento do roteiro como forma de explicitar a relevância histórica do conteúdo por ele abordado.

A segunda personagem já estava escolhida, e obviamente, já tinha nome, Dido, entretanto faltava a escolha do nome da personagem principal, que para [13], tem muita importância, já que revela características específicas, como classe, caráter e tipologia da personagem. A princesa Dido também é conhecida como Elisa, que foi justamente o nome escolhido para a personagem principal, reforçando as semelhanças entre as duas personagens, não só um problema matemático semelhante, mas também por serem mulheres fortes e líderes a seu modo: Dido governava seu povo e Elisa administrava uma fazenda.

3.2.3 A utilização de um método na resolução: o desenvolvimento do roteiro

Com a sinopse pronta e os personagens devidamente escolhidos passa-se a uma nova etapa, o desenvolvimento do roteiro. Tal qual os métodos existentes para resolução de sistemas de equações, também existem métodos para o desenvolvimento de roteiros, que tem como base de sua estrutura partes denominadas cenas. De acordo com [13] *"cena é a base, a unidade dramática do roteiro"* e a organização, em seqüência das cenas é *"o fundamento para a construção da estrutura"*.

Dada a especificidade dos roteiros desenvolvidos dentro do projeto, a estrutura da seqüência das cenas é desenvolvida próximo do defendido por [14] para quem *"a cena dramática mostra um aspecto do conflito maior mas, no fim, não resolve esse conflito maior. Se uma cena chegar a uma resolução total e completa, deterá a força que impele uma história para a frente, o que significa que será preciso gastar um tempo precioso da tela para por a história em movimento outra vez"*. Ou seja, uma vez resolvido o problema

[2] Expressão latina que significa "o deus que vem da máquina".

de Elisa, necessariamente a história precisa encaminhar-se para o final, uma vez que este é o objetivo do filme.

Em [13] é apresenta uma classificação de cenas divididas em cinco tipos:

" cenas de exposição: adequadas para expor um motivo, um problema, uma informação;*

** cenas de preparação: informam das complicações que virão mais tarde;*

** cenas de complicação: ilustram o desenrolar da complicação;*

** cenas de clímax: o ponto mais alto do drama;*

** cenas de resolução: terminais ou de conclusão."*

No início do roteiro A Lenda de Dido era necessário apresentar a personagem principal, para que o espectador soubesse de quem se tratava e qual problema ela teria que resolver. Temos, portanto, duas classificações já nas cenas iniciais do roteiro: de exposição, para apresentar Elisa e de preparação, para apresentar o problema. Com a aparição de Dido, também seria necessária uma estratégia para sua apresentação. A solução mais simples seria Elisa prosseguir a narração e contar quem era a princesa fenícia. Entretanto, nos roteiros desenvolvidos dentro do Projeto M3, havia a possibilidade de utilizar um insert, chamado "Olha o Curta", que tratava de assuntos relacionados com o vídeo que estava sendo exibido, complementando informações. Após a aparição de Dido, o insert "Olha o Curta" foi utilizado justamente para apresentar a personagem e trazer novas informações para os espectadores.

Após ser apresentada, Dido inicia o diálogo com Elisa, recordando do problema parecido que teve, em uma cena de preparação. A resposta de Elisa dá início a uma seqüência de cenas de exposição, complicação e preparação. As cenas intercalam-se uma vez que a resolução do problema de Elisa envolve uma série de etapas, que são resolvidas, uma a uma, ao longo da ação.

Esta especificidade surge de dois pontos: o problema isoperimétrico não possui uma resolução direta, em geral as resoluções (principalmente para o ensino médio) são divididas em várias etapas, e segundo, o problema de Elisa, se apresentado integralmente no começo do roteiro faria com que o diálogo criado para o personagem soasse como a declamação de um enunciado de um problema de livro de matemática, sendo portanto, muito mais interessante para o ritmo da narrativa, a apresentação gradual das restrições do problema da personagem.

Durante o desenvolvimento das cenas, não só os diálogos entre os personagens intercalam-se, evitando as falas excessivamente grandes, como também se alteram as posições a respeito do conhecimento dos assuntos que vão sendo abordados.

Mesmo que em várias situações a narrativa pareça atingir seu clímax, é quando Elisa apresenta a última restrição – o número de mourões – que as ações seguem para o desfecho da história. Isto ocorre porque esta última restrição completa e integraliza o problema de Elisa, cujas partes são apresentadas ao longo da narrativa. A solução apresentada por Dido, com o reforço de alguns conceitos desenvolvidos ao longo da história, encerra o 'encontro' das duas, bem como o roteiro.

3.2.4 O conjunto solução: o roteiro pronto

Após a resolução de um problema, através de um sistema linear, as soluções encontradas precisam ser analisadas antes de serem incluídas no conjunto solução. No desenvolvimento de roteiros, essa revisão para a adequação com as condições iniciais do problema, são as diversas revisões pelas quais os roteiros passam. A apresentação das soluções corresponde ao que seria o roteiro completo obedecendo, no caso do problema, uma notação específica e no caso do roteiro uma apresentação específica.

Os roteiros do Projeto M3 foram desenvolvidos dentro do formato áudio/vídeo, ou seja, as páginas do roteiro são como tabelas de duas colunas, onde a da esquerda descreve a ação e a da direita os diálogos ou efeitos sonoros. Cada linha desta tabela corresponde a uma cena do roteiro. No caso específico dos roteiros a utilização de uma formatação específica é importante, uma vez que com sua correta utilização, temos em média uma página de roteiro para cada minuto de filme.

Abaixo é apresentada a última versão do roteiro.

VÍDEO	ÁUDIO
1. VINHETA DE ABERTURA	Trilha sonora da vinheta.
2. EXT/DIA – Imagens do Sítio de	Trilha estilo rasqueado.

Elisa Clipe curto de introdução. Imagens gerais de um sítio, com criação de ovelhas ou carneiros.	
3. INT/DIA – Galpão do Sítio Dentro do galpão existem alguns rolos de tela de arame, com etiquetas penduradas. Elisa verifica as etiquetas, perto das telas, e confere com uma lista. Elisa após conferir as etiquetas pega uma prancheta e começa a desenhar nela (não vemos o que ela desenha)	**ELISA (OFF)** A história que eu vou contar aconteceu de verdade. Foi na época em que eu precisei cercar uma área pra colocar minha criação de ovelhas. Meu nome é Elisa e essa aí sou eu conferindo a tela que eu comprei pra fazer o cercado. O problema era saber como cercar a maior área possível com os oitenta metros de tela que eu tinha.
4. INT/DIA – Galpão do Sítio / Computação gráfica – 2D Efeito animação 2-D puxa os desenhos da prancheta e tomam a tela. Alternando o aparecimento dos desenhos com imagem dela desenhando (um de cada vez conforme a fala). A personagem Dido aparece em pé (gravada em chroma e se sobrepondo ao lado de Elisa, que desenha na prancheta). Câmera passeia pela figura de Dido.	**ELISA (OFF)** Fiquei imaginando se fazia um cercado triangular... Quadrado... Retangular... Pensei até em fazer uma figura assim toda diferente... O importante era que do lado de dentro tivesse o maior espaço possível para a minha criação de ovelhas. Foi aí que a assombração apareceu. Não era uma assombração dessas comuns, que nem saci e mula sem cabeça não. Ela chamava Dido e disse que era uma princesa fenícia.
5. VINHETA OLHA O CURTA Apresentador em Chroma-Key. O apresentador fala enquanto que ao fundo aparecem imagens: - de arquivo de Virgílio, César Augusto, Eneias, rei Jarbas	**VINHETA OLHA O CURTA** **APRESENTADOR** A princesa Dido, também conhecida como Elisa, é personagem do épico Eneida escrito pelo poeta Virgílio no século I antes de Cristo. A obra conta a saga de Enéias, que foi o ancestral do povo romano.

<table>
<tr>
<td>
- colagem com várias capas de Eneida em suas diversas edições

- imagens de manuscritos de Eneida

Animação 2D - animar imagem abaixo

Dido e seu povo cortando o couro
Fotos das ruínas de Cartago:

Mapa da região do mediterrâneo onde se destaca a Tunísia identificada pelo

GC: TUNÍSIA


FECHA VINHETA
</td>
<td>
Segundo a lenda, depois do assassinato do seu marido, Dido precisou fugir com vários seguidores para fundar uma nova cidade.

Ao encontrar um lugar apropriado ela negociou com o rei Jarbas, a compra das terras. Ficou acertado que ela poderia comprar apenas a quantidade de terra que conseguisse cercar usando a pele de um touro.

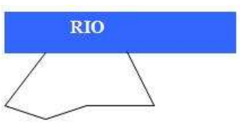
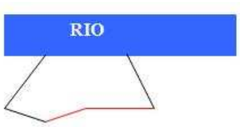
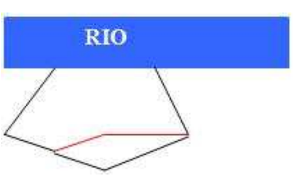
A princesa Dido e seu séquito decidiram, então, cortar a pele em tiras muito finas e depois emendá-las formando uma corda comprida. Assim, eles poderiam cercar uma grande quantidade de terras para a construção da nova cidade.

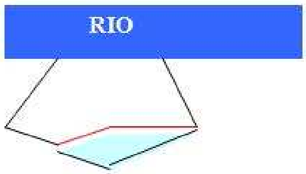
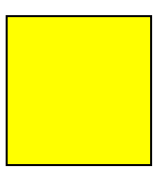
A cidade fundada por Dido recebeu o nome de Cartago e ficava no norte da África na região onde hoje é a Tunísia

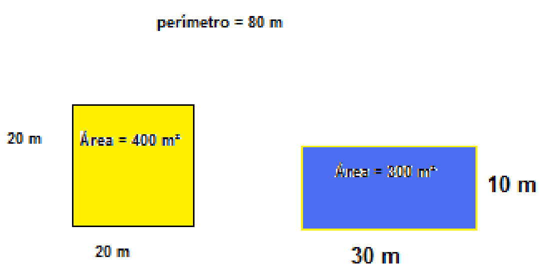
Sobe som: Ária “o lamento de Dido”, (Dido e Enéias, de Henry Purcell).
</td>
</tr>
<tr>
<td>
6. INT/DIA – Computação gráfica – 2D/ Locação de Dido

Dido está sentada em um cenário (em chroma) inspirado no quadro “Dido
</td>
<td>
DIDO

Oi Elisa. Acho que eu posso te ajudar. Como você acabou de ver, o assunto que
</td>
</tr>
</table>

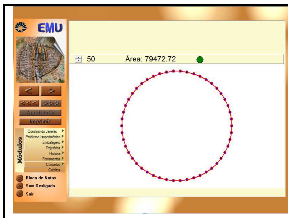
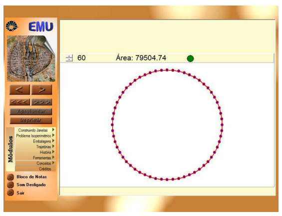
contemplando o mar" (ela está sozinha) 	você está tratando é muito parecido com a decisão que eu tive que tomar há muitos séculos atrás. Eu tinha uma corda muito fina feita com as tiras do couro de um boi e precisava cercar a maior área possível com essa corda, para construir a minha nova cidade.
7. INT/DIA – Galpão do Sítio Elisa começa a conversar com Dido ainda um pouco ressabiada.	**ELISA** O nosso problema é parecido mesmo! Eu tenho oitenta metros de tela e quero fazer o maior cercado que eu puder.
8. INT/DIA – Locação de Dido/Computação gráfica – 2D Dido em cena. **GC: Perímetro = 80 m** **Animação 2-D vai modificando figuras:** **Vemos o polígono não convexo desenhado por Elisa: - Anexo 2**  Animação 2-D muda a cor desses dois vértices conforme a fala:  Animação 2-D - Sem que seu tamanho mude, os vértices que mudaram de cor são "virados" para o lado de fora formando a figura com área maior.  A área acrescentada à figura ganha cor.	**DIDO** Muito bem. O perímetro do seu cercado vai ser sempre o mesmo, os oitenta metros de sua tela. Mas dependendo da figura que você formar com esses oitenta metros de tela, a área interna do cercado pode ficar maior ou menor. **DIDO (OFF)** Vamos começar por esse formato irregular que você pensou. Esse tipo de figura é chamado de polígono não convexo. Ele tem esse nome porque pelo menos um dos seus vértices – que são as quinas da figura – está voltado para dentro e não pra fora como os outros. Agora, olha só: se a gente virar esse vértice para fora sem alterar o tamanho dos lados, o perímetro da figura vai continuar o mesmo, mas a área interna

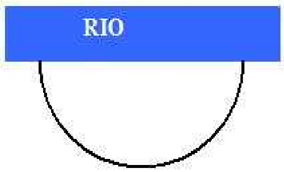
	vai aumentar um pouco.
9. INT/DIA – Galpão do Sítio Elisa em cena.	**ELISA** É mesmo! Eu vou continuar gastando os mesmos oitenta metros de tela, mas vou ganhar um pouco mais de terreno do lado de dentro do cercado! Mas será essa a minha melhor opção?
10. INT/DIA – Locação de Dido Dido em cena. **GC:** **De todos os polígonos com o mesmo número de lados e o mesmo perímetro, o polígono regular é o que tem maior área.**	**DIDO** Bom Elisa, tem uma coisa importante que você precisa saber sobre os polígonos pra entender melhor a solução desse problema: **DIDO (OFF)** De todos os polígonos com o mesmo número de lados e o mesmo perímetro, o polígono regular é o que tem maior área.
11. INT/DIA – Galpão do Sítio Elisa em cena. Animação mostra quadrado:  **GC: Polígono Regular**	**ELISA** Polígono regular eu sei o que é! É aquele que tem todos os lados e todos os ângulos iguais. **ELISA (OFF)** Que nem o quadrado, por exemplo.
12. INT/DIA – Locação de Dido Dido em cena. **Animação 2D – vai construindo as imagens**	**DIDO** Exatamente. **DIDO OFF** Se a gente comparar um quadrado e um

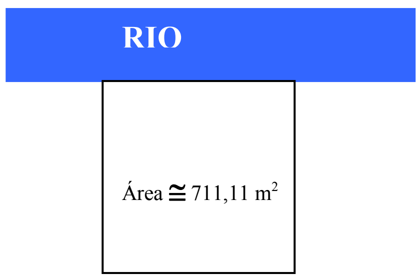
conforme fala.  Dido em cena	retângulo, com o mesmo perímetro, vai ver que o quadrado é que tem área maior. **DIDO** Vamos pensar em vários polígonos regulares como possibilidades para o seu cercado, começando pelo quadrado.
13. Computação Gráfica – 2D A tela é preenchida por algumas imagens do programa computacional da professora Sueli Costa (em anexo). - usar somente as imagens das figuras geométricas indicadas abaixo, sem a borda do programa. *(deve-se usar as figuras do programa pois elas são feitas com medidas precisas de perímetro*). Os valores da área que devem aparecer ao lado de cada figura são os seguintes: **GC:** **Perímetro = 80 m** **Área = 400 m²** Quadrado **Perímetro = 80 m** **Área ≅ 440,44 m²**	**DIDO (OFF)** A medida que se aumenta o número de lados da figura, passando pelo pentágono... hexágono... heptágono... e assim por diante, a gente percebe que a área da figura aumenta, mesmo mantendo-se o perímetro. SOBE SOM

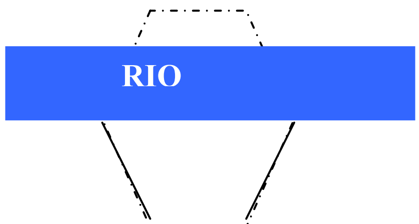
 Pentágono **Perímetro = 80 m** **Área ≅ 461,88 m²**  Hexágono **Perímetro = 80 m** **Área ≅ 474,63 m²**  heptágono **Perímetro = 80 m** **Área ≅ 497,60 m²**  Dodecágono	
14. INT/DIA – Galpão do Sítio Elisa em cena.	**ELISA** Se eu estou entendendo bem, então, para um perímetro fixo, quanto maior o número de lados de um polígono regular, maior é a área interna dele, e a figura fica cada vez mais parecida com um círculo.

15. INT/DIA – Locação de Dido Dido em cena.	**DIDO** É verdade, e tem mais ... A área vai aumentando cada vez menos à medida que ela vai se aproximando dá área do círculo.
16. Computação Gráfica – 2D Imagens do programa computacional da professora Sueli Costa (em anexo). A partir de *print screen* de imagens do programa computacional, como na cena 13, aparece a imagem do quadrado, do pentágono, do polígono de 50 lados e do polígono de 60 lados. Com destaque no campo de mudança no valor da área. Em todas as telas aparece GC: **GC:** **Perímetro = 80 m** **Área = 400 m²**  quadrado **Perímetro = 80m** **Área ≅ 440,44 m²**  pentágono **Perímetro = 80 m** **Área ≅ 508,62 m²**	**DIDO (OFF)** Por exemplo, quando a gente passa de um quadrado para um pentágono, a área aumenta bastante. Agora, se a gente passa de um polígono com cinqüenta lados para um com sessenta, o aumento não é muito grande.

 Polígono 50 lados **Perímetro = 80 m** **Área ≅ 508,83 m²**  Polígono 60 lados	
17. INT/DIA – Galpão do Sítio Elisa em cena.	**ELISA** Quer dizer então que de todas as figuras com o mesmo perímetro, o círculo é a que tem a maior área possível! E foi assim que você demarcou a área para a construção da sua cidade? Fazendo um grande círculo com aquela corda de couro de boi?
18. INT/DIA – Locação de Dido Dido em cena.	**DIDO** Essa realmente seria a melhor forma de resolver o problema. Mas acontece que o local onde eu queria construir a cidade ficava na beira da praia. Então deu pra fazer um truquezinho. Eu usei o mar como um dos lados do terreno. E como a parte voltada pro mar não precisava ser cercada, a forma final foi um grande semicírculo, e assim eu consegui uma área ainda maior.
19. INT/DIA – Galpão do Sítio Elisa em cena.	**ELISA** Mas é este também o meu caso, tem um rio que passa dentro do meu sítio. O rio é como uma linha que divide a figura ao

Animação 2D: Desenha o seguinte esquema. (imagem de referência)  	meio, que nem o mar no seu caso. **ELISA (OFF)** Então, com meus oitenta metros de arame, eu posso contornar a metade de um círculo, que é a figura que possui a maior área para um perímetro fixo.
20. INT/DIA – Locação de Dido / Imagens de mapas de cidades Dido em cena. Fala olhando para a CAM. De acordo com a fala de Dido, entram os mapas e ressalta-se os contornos das cidades. Imagem do mapa de Paris na idade média. GC: **Paris - França** Imagem do mapa de Colônia. GC: **Colônia - Alemanha** Imagem do mapa da cidade de Braga. GC: **Braga – Portugal**	**DIDO** Isso mesmo! Aliás essa mesma idéia foi usada muitas vezes ao longo da história. **DIDO (OFF)** Esse é o mapa de Paris, na idade média. Naquela época as cidades tinham muros de proteção. Como construir os muros era caro e trabalhoso, esse era um jeito de cercar toda a cidade com um muro o menos extenso possível. A mesma coisa se repetiu na cidade de Colônia, na Alemanha. E as cidades que não eram banhadas por um rio, tinham quase a forma de um círculo, como é o caso de Braga, em Portugal.
21. INT/DIA – Galpão do Sítio Elisa em cena. Olha para a câmera	**ELISA** Puxa! Eu nunca pensei que um problema aqui do sítio pudesse ter tanta relação com a matemática e até com a história de tantos lugares! Ih, Dido! Eu esqueci de um detalhe. Eu só comprei quatro mourões e com isso não da pra fazer uma figura que tenha muitos lados... Muito menos um semicírculo.
22. INT/DIA – Locação de Dido Dido em cena.	**DIDO** Não se preocupe. O que estava valendo antes continua valendo nesse caso também. Quer dizer: Se usando o rio como divisa você

	precisava fazer a metade de um círculo para ter a maior área possível, agora, o que você tem de fazer é a metade de um polígono regular usando os seus quatro mourões.
23. ANIMAÇÃO 2D Animação 2-D – Perto do rio, dois pontos representando os mourões e outros dois mais afastados. Unindo esses pontos ela forma um quadrado. Conforme Elisa fala as medidas vão aparecendo na tela.  	**ELISA (OFF)** Ah, deixa eu ver então... dois mourões vão ficar perto da beira do rio e os outros dois afastados. A primeira figura que impulsivamente eu penso em fazer é um quadrado, com lados medindo um terço dos oitenta metros, já que o outro lado será o próprio rio. Porém, neste caso a área que eu vou conseguir cercar é de aproximadamente setecentos e onze metros quadrados. Sobe som.
24. INT/DIA – Locação de Dido Dido em cena. Animação 2D Animação forma um retângulo (a metade de um quadrado). A outra metade é formada com linhas pontilhadas do outro lado do rio.	**DIDO** Porém, como eu disse, continua valendo o que valia para o círculo. Como o rio é uma linha divisória, a melhor solução... **DIDO(OFF)** ... seria justamente um retângulo que fosse a metade de um quadrado, com quarenta metros no lado maior e vinte metros no lado menor.
25. INT/DIA – Galpão da Fazenda Elisa em cena.	**ELISA** Puxa, é mesmo! Assim eu consigo uma área de oitocentos metros quadrados.
26. INT/DIA – Locação de Dido Dido em cena.	**DIDO** Mas Elisa, existe uma solução melhor ainda. Como a gente já viu, quanto

	maior o número de lados do polígono regular, maior é sua área, certo? Então com os quatro mourões que você tem dá pra fazer a metade de um outro polígono regular. Olha só:
27. Computação gráfica 2 – D Imagem de um hexágono regular. Ele é dividido ao meio por um rio azul. Uma das metades da figura desaparece. Na outra, surgem 4 pontos coloridos - 2 junto ao rio e 2 sobre os vértices – representando os mourões. 	**DIDO (OFF)** Se você fizer um hexágono regular e dividi-lo ao meio, também vai usar quatro mourões e conseguir uma área ainda maior do que a do meio quadrado.
28. INT/DIA – Galpão da Fazenda/ Computação gráfica 2 - D Elisa em cena.	**ELISA** Então está tudo resolvido! Dentro das condições do meu problema, o formato da metade de um hexágono regular é o que vai me dar a maior área para o cercado das minhas ovelhas! Puxa, Dido! Você é uma assombração muito simpática e me ajudou muito. Obrigada, viu!
29. INT/DIA – Locação de Dido/Imagem de Dido Após agradecer, Dido volta para a posição que estava na imagem inicial. A imagem congela, um efeito de contorno de desenho se sobrepõe à imagem, transformando-a numa ilustração. A pintura toma conta da tela.	**DIDO** De nada, Elisa! Foi um prazer!
30. VINHETA DE ENCERRAMENTO	**VINHETA DE ENCERRAMENTO**

Considerações finais

Neste trabalho foram desenvolvidas diversas abordagens do problema isoperimétrico, focando em especial, a utilização deste problema para contextualizar conceitos do ensino de matemática, tanto para ensino médio, como para ensino superior.

Para isto, diversos recursos didáticos foram apresentados ao longo deste texto. Na abordagem formal do problema, as diversas demonstrações apresentadas buscam possibilitar sua utilização de acordo com a familiaridade do estudante ou do professor com os conceitos apresentados. Já nas aplicações do problema contextualizado, com utilização de programas computacionais e vídeo buscou possibilitar que o presente trabalho seja utilizado pelos docentes para a implementação de aulas com recursos mais próximos do cotidiano de seus alunos.

No desenvolvimento aqui apresentado foi possível ainda realizar um paralelo entre o raciocínio matemático e os parâmetros para a elaboração de roteiros, com o intuito de observar que os conhecimentos e as diferentes ciências ou manifestações artísticas não são conjuntos disjuntos.

O desenvolvimento do roteiro “A Lenda de Dido” e do manual do professor, encontrado no anexo, fez parte efetiva da realização deste trabalho. A expectativa é a de que esta dissertação, que discute e aprofunda este tema e estará disponível no portal da Unicamp, possa ser usada por professores no ensino médio e na universidade como estímulo não só à incorporação de recursos multimídia, mas principalmente à proposição de outras atividades que visem a “incorporação” dos conceitos levem o aluno a “modelar” e procurar soluções para problemas reais.

Referências bibliográficas

[1] Virgílio, P. *Eneida.* Tradução de Manuel Odorico Mendes. Disponível em http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/eneida.html acessado em 13/02/2011.

[2] Agustini, E.; Rodrigues, L.B., Vieira, F.B.P. *O Teorema Isoperimétrico e o Problema da Cerca* em FAMAT em Revista – Revista Científica Eletrônica de Iniciação Científica da Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia – MG, 2005.

[3] Moreira, C.G.T.A e Saldanha, N. C. *A desigualdade Isoperimétrica* em Matemática Universitária, n° 15, 1993.

[4] Figueiredo, D.G. *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana* em Matemática Universitária, n° 9/10, 1989.

[5] Carmo, M.P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* Textos Universitários Sociedade Brasileira de Matemática, 3ª edição, 2008.

[6] Cavalcanti, G.R. *Problemas variacionais geométricos.* Dissertação de mestrado, UNICAMP, 2000.

[7] Weisstein, E.W. *Bretschneider's Formula* de MathWorld – A Wolfram Web Resource http://mathworld.wolfram.com/BretschneidersFormula.html acessado em 26/01/2011.

[8] Shenk, A. *Cálculo e Geometria Analítica: volume 1*. Tradução Anna Amália Feijó Barroso, 2ª edição, Campus, 1985.

[9] Costa, S.I.R. Notas de aula, Campinas, 2005.

[10] Shenk, A. *Cálculo e Geometria Analítica: volume 2*. Tradução Anna Amália Feijó Barroso, 3ª edição, Campus, 1984.

[11] Rezende, E.Q.F., Queiroz, M.L.B. *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. 2ª edição, Editora de Unicamp, 2008.

[12] Araújo, P. V. *Geometria Diferencial*. 2ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2008.

[13] Comparato, D. *Da Criação ao Roteiro.* Rocco, 1995.

[14] Howard, D. e Mabley, E. *Teoria e Prática do Roteiro.* Tradução Beth Vieira, 3ª edição, Globo, 2002.

[15] Costa, S.I.R e Grou, A. (coordenação) *Otimizando Formas e Trajetórias.* Programa Computacional, IMECC – UNICAMP, 2000.

[16] Lima, E.L. *Analise Real: volume 1*. 9ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2007.

[17] Costa, S.I.R Exposição oral, 2010.

[18] Gromov, M. *Paul Levy's isoperimetric inequality* em Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Birkhauser Boston, MA, 1999.

ANEXO

Guia do professor (versão texto) para o vídeo “A Lenda de Dido”

Série

Matemática na Escola

Conteúdo

O problema isoperimétrico

Duração

Aproximadamente 10 minutos

Objetivos

1. Apresentar o problema isoperimétrico;
2. Apresentar aspectos históricos relativos ao problema;
3. Aplicar as soluções do problema em situações reais, com restrições.

Sinopse

A fazendeira Elisa comprou tela para fazer um cercado para as ovelhas na sua fazenda e na busca para encontrar o melhor formato para o cercado ela acaba conhecendo a princesa Dido . As duas descobrem que possuem algumas coisas em comum.

Material relacionado

Vídeos: Naturalmente

Programas computacionais: Otimização de Janelas, Otimização de Janelas com Topo Triangular, Arco Ferradura, Arco Romano.

INTRODUÇÃO

Sobre a série

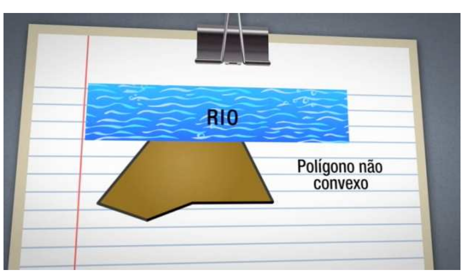
A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

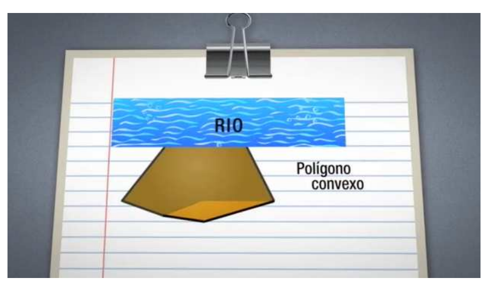
Sobre o programa

O programa aborda um problema isoperimétrico em uma situação real. A fazendeira Elisa tem oitenta metros de tela e pretende fazer um cercado para suas ovelhas. A princesa Dido surge para ajudá-la a escolher o melhor formato para esta cerca.

A apresentação da Lenda de Dido, presente no épico Eneida do poeta Virgílio, escrito no séc. I A. C. ilustra que a solução do problema isoperimétrico já era conhecida há muito tempo atrás, aparecendo em escritos dos gregos Zenódoro e Pappus[1].

O primeiro resultado apresentado no programa é que, dado um polígono não convexo, é possível encontrar um polígono convexo de mesmo perímetro e com área maior.





Neste caso, utiliza-se uma reflexão do vértice V que caracteriza o polígono como não convexo através da reta definida pelos dois vértices adjacentes a este. Como pode ser também observado, se considerarmos o polígono onde as duas arestas que partem de V são substituídas por uma única aresta que liga os dois vértices adjacentes a V, obtemos um polígono convexo com número de lados menor, perímetro menor e área maior[3].

Entre todos os polígonos convexos com o mesmo número de lados e mesmo perímetros, o polígono regular é o que possui maior área. Uma demonstração para este fato pode ser feita por indução sobre o número de lados [2]. A partir de um polígono qualquer, constrói-se inicialmente um polígono eqüilátero e depois um regular (com ângulos também iguais), mantendo o número de lados e aumentando a área a cada passo.

No programa é realizada uma comparação entre dois quadriláteros: um quadrado de lados medindo 20 metros e um retângulo de lados medindo 10 metros e 30 metros. Mantendo fixo o perímetro de 80 metros é possível utilizar máximos e mínimos de uma função de segundo grau para mostrar que entre todos os retângulos, o quadrado possui maior área. Sejam a e b os lados do retângulo, desta forma teremos 2a + 2b = 80, ou seja, a + b = 40 (I). A função área é dada por A = a.b , isolando b em (I) e substituindo teremos A = a.(40 – a) ou ainda $A = -a^2 + 40a$, com a variando de zero a quarenta . O gráfico da função área será portanto uma parábola com a concavidade voltada para baixo. Esta função assume seu valor máximo quando a = 20, que é associado no gráfico ao vértice da parábola (20, 400).

Quando se comparam apenas polígonos regulares com o mesmo perímetro, verifica-se que o de maior área é justamente aquele com maior número de lados. A verificação desta afirmação pode ser realizada deduzindo-se a expressão geral para o cálculo da área de um polígono regular de n lados:

$$A_n = \frac{p^2}{n.tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

na qual p representa o semi-perímetro e n o número de lados da figura. Como a seqüência de áreas (A_n) é crescente, temos que a área cresce em função do número de lados n. A partir de uma consideração de polígonos regulares de n lados, inscritos e circunscritos a uma circunferência pode-se concluir que a área do polígono de n lados e perímetro fixo converge para a área de um círculo de mesmo perímetro. (A dedução de Arquimedes para a área do círculo usa esta aproximação)

Isto significa que o limite da seqüência $n.tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$ é o número que foi denominado como π,

e temos portanto que a sequência (A_n) converge para $A_n = \frac{p^2}{\pi}$.

A prova de que para um perímetro fixo, a circunferência é, de fato, a única curva que contorna a maior área possível é estabelecida no clássico teorema da desigualdade isoperimétrica:

Teorema (desigualdade isoperimétrica)

Toda curva fechada de comprimento l cerca uma área menor ou igual a $\frac{l^2}{4\pi}$*, e este valor só é atingido se a curva em questão for um círculo de raio* $\frac{l}{2\pi}$*.*

Há diversas demonstrações desta desigualdade, utilizando geometria plana ou mesmo cálculo diferencial. Uma referência é o artigo [2].

No programa, entretanto, o problema isoperimétrico é abordado com algumas restrições. A primeira delas é construir um cercado com maior área possível, tendo um dos lados definidos, a saber, a margem de um rio. Neste caso, a demonstração do resultado é feita por absurdo, utilizando o teorema acima. Como na margem do rio não será utilizada nenhuma cerca, a solução para este problema isoperimétrico tem que ser um semi-círculo. De fato, se a solução fosse uma outra curva C, ao considerarmos a curva fechada onde adicionamos à curva C a reflexão dela através da reta associada à margem do rio, obteríamos uma solução que não o círculo para a curva fechada de maior área e perímetro igual ao dobro do comprimento da curva C.

A outra restrição diz respeito ao uso de mourões para a construção das cercas. No programa a restrição é de quatro mourões, e neste caso, um argumento semelhante ao utilizado acima mostra que a solução do problema isoperimétrico é a metade de um hexágono regular. Uma tentativa de solução, que é a metade de um quadrado é explorada no vídeo, contrastando com a solução de fato, que é a metade de um hexágono regular. No caso geral, que pode ser discutido com os alunos, a solução para o uso de *n* mourões será o polígono de *2.(n-1)* lados.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Antes da execução

Solicitar aos alunos que calculem a área de diversos polígonos de mesmo perímetro, para que verifiquem que figuras com mesmo perímetro podem ter áreas diferentes. Por exemplo, dado um perímetro de 120 cm, calcular as áreas de retângulos diversos, quadrado, triângulos, inclusive o eqüilátero e hexágono regular.

Depois de execução

Sugestão de atividades para os alunos:

Polígonos não convexos

A partir de um polígono não convexo fornecido, o professor pode solicitar aos alunos que encontrem um polígono convexo com maior área. Se os alunos apresentarem como resultado um polígono convexo de mesmo número de lados, propor então que eles encontrem um com menor número de lados, maior área e menor perímetro.

Retângulos de mesmo perímetro

Propor que os alunos demonstrem que de todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é o que possui maior área.

Fórmula da área de um polígono regular de n lados

Deduzir, a partir da decomposição em triângulos e expressões trigonométricas, a expressão $A_n = \dfrac{p^2}{n.tg\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$, para o cálculo da área de um polígono regular de n lados.

Construção de Gráfico

O professor pode solicitar aos alunos que calculem o valor das áreas de diversos polígonos regulares, com o uso de uma calculadora científica ou programas computacionais, e depois façam a representação gráfica dos valores. Após a apresentação dos gráficos o professor pode explorar a idéia de limite, que será justamente a área do círculo.

Problemas semelhantes

Solicitar aos alunos que resolvam problemas semelhantes ao apresentado no programa, alterando o número de mourões, ou ainda colocando outras restrições.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS E SUGESTÕES DE LEITURA

[1] G.R. Cavalcanti, *Problemas Variacionais Geométricos*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, (2000).

[2] C.G.T.A. Moreira, N. C. Saldanha , *A desigualdade Isoperimétrica* , Matemática Universitária, n° 15, 13-19, 1993.

[3] C.R.A. Souza, *Duas Demonstrações da Desigualdade Isoperimétrica*, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, (2006).

FICHA TÉCNICA

Autores do Guia: *Sueli Costa e Roberto Limberger*
Revisão do Guia: *Claudina Izepe Rodrigues*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*