
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado

**Alguns Tópicos em Probabilidade
Geométrica**

Carlos André Bogéa Pereira

Orientador: Prof. Dr. Simão Nicolau Stelmastchuk

Alguns Tópicos em Probabilidade Geométrica

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Carlos André Bogéa Pereira** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 28 de Fevereiro de 2011.



Prof. Dr. Simão Nicolau Stelmastchuk

Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Simão Nicolau Stelmastchuk (FAFIUV)

Prof^ª. Dr^ª. Sandra Augusta Santos (IMECC-UNICAMP)

Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira (UFU)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Pereira, Carlos André Bogéa

P414i Alguns tópicos em probabilidade geométrica/Carlos André Bogéa
Pereira-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : Simão Nicolau Stelmastchuk

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Probabilidades geométricas. 2.Distribuição (Probabilidades).
3.Geometria. I. Stelmastchuk, Simão Nicolau. II. Universidade Estadual
de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

Título em inglês: Some topics in geometric probability

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Geometric probabilities. 2. Distribution (Probability theory). 3. Geometric.

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Simão Nicolau Stelmastchuk (FAFIUV)
Prof.^a Dr.^a Sandra Augusta Santos (IMECC - UNICAMP)
Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira (UFU)

Data da defesa: 28/02/2011

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 28 de fevereiro de 2011
e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Simão M. Stelmastchuk

Prof. (a). Dr (a). SIMÃO NICOLAU STELMASTCHUK

Sandra Augustas

Prof. (a). Dr (a). SANDRA AUGUSTA SANTOS

Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira

Prof. (a). Dr (a). MARCELO GONÇALVES OLIVEIRA VIEIRA

À minha mãe,
Fátima Bogéa.
Dedico

*“Não deixe jamais que alguém
que se achegou a ti vá embora sem
sentir-se melhor e mais feliz”
(Madre Thereza de Calcutá)*

Agradecimentos

A Deus, por sua proteção.

À minha família, em especial minha mãe, Fátima Bogéa, por tudo o que fizeram por mim.

À minha namorada, Waléria, pelo amor e incentivo em todos os momentos de nossas vidas.

À meus colegas de trabalho, em especial a professora Sônia Maciel e Graça Saraiva, pelo apoio e compreensão nas minhas ausências.

Ao meu orientador Simão Stelmastchuk, pela sabedoria, dedicação e paciência, para que eu pudesse alcançar mais esta etapa em minha vida.

Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática, em especial, Sueli, Sandra, Plínio e Marcelo Vieira, pelos ensinamentos transmitidos.

A todos os colegas do mestrado, em especial, Felix, Danilo, Zuilton e Uilbiran, pela amizade e companheirismo.

Resumo

Ao nosso entender, a Probabilidade Geométrica quantifica a probabilidade de ocorrer alguns fenômenos associados a entes geométricos. O primeiro estudo, talvez o mais famoso, a ser realizado neste sentido é o problema das agulhas de Buffon. A idéia deste estudo é simples. Traçadas duas retas paralelas a uma distância d , qual é a probabilidade de uma agulha de tamanho l tocar uma das retas? Neste trabalho nos dedicamos, inicialmente, a estudar este problema e sua resolução. Um segundo tópico do nosso trabalho foi baseado no seguinte problema: Suponha que uma antena transmissora de algum sinal, por exemplo, de celular, emite seus sinais uniformemente a uma distância a , em um plano. Se estou num ponto P do plano, qual a probabilidade de entrar na zona de emissão de sinal da antena se me deslocar até um raio b ? Para a resolução deste problema nós utilizamos probabilidade contínua, coordenadas polares e integração de várias variáveis. Como aplicações deste estudo temos os casos das distribuições de probabilidade uniforme e normal. Um terceiro problema tratado foi o seguinte: no espaço tridimensional temos uma fonte de emissão T , por exemplo, algum gerador de campo magnético, a qual distribui uniformemente sua energia até um raio a . Suponha, dada uma partícula num ponto P do espaço. Se tal partícula se deslocar aleatoriamente um raio igual a b qual é a probabilidade dela entrar na zona de influência da fonte de emissão T ? Neste problema usamos coordenadas esféricas, integral de superfície e distribuição de probabilidade contínua para o seu estudo. Também, aplicamos aos casos de distribuição de probabilidade uniforme e normal.

Palavras-Chave: Probabilidades Geométricas, Distribuição (Probabilidades), Geometria.

Abstract

In our view, Geometric Probability quantifies the probability of occurs some phenomena associated with geometric entities. The first study, perhaps the most famous, to be performed of this type is the problem of Buffon's needle. The idea of this study is simple. Two parallel lines drawn at a distance d , which is the probability that a needle of length l achieve one of the straights? In this work we decided initially to study this problem and its resolution. A second topic of our study was based on the following problem: Suppose an antenna transmitting a signal, eg mobile, send their signals uniformly until a distance a in a plane. If I'm at a point P of the plane, which is the probability to enter the zone of emission signal from the antenna if I move up to a radius b ? To solve this problem we use continuous probability, polar coordinates and integration of several variables. As applications of this study we have the cases of probability distributions, uniform and normal. A third problem approached was the following: in a three-dimensional space we have an emission source T , for example, a magnetic field generator, which evenly distributes its energy up to a radius a . Given a particle at a point P in space. If this particle moves randomly a radius equal to b what is the probability of it entering the zone of influence of the emission source T ? In this problem we use spherical coordinates, surface integral and continuous probability distribution for its study. Also apply to cases of uniform and normal probability distribution.

Keywords: Geometric Probability, Distribution (Probability), Geometry.

Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 Abordagens Iniciais sobre Probabilidade Geométrica	3
1.1 Abordagem histórica	3
1.2 Primeira abordagem para o Problema da Agulha de Buffon	7
1.3 Segunda abordagem para o Problema da Agulha de Buffon	9
1.4 Solução do Problema de Buffon por Barbier	12
1.5 Extensão do Problema de Buffon	14
1.6 Problema de Laplace	16
1.7 O Paradoxo de Bertrand	19
1.8 Exemplos	21
1.8.1 Exemplo 1	21
1.8.2 Exemplo 2	23
2 Probabilidade da área de um sinal na área de uma antena	25
2.1 Cálculo das equações paramétricas	25
2.2 Condições de existência	28
2.2.1 Quando há dois pontos de intersecção entre as circunferências	29

2.2.2	Quando não há pontos ou um único ponto de intersecção entre as circunferências	30
2.3	Cálculos Gerais para as Probabilidades	32
2.3.1	Probabilidade quando as circunferências se interceptam em dois pontos	33
2.3.2	Teorema principal no plano	35
2.4	Supondo Distribuição Uniforme	35
2.5	Supondo Distribuição Normal	40
3	Probabilidade de uma carga estar numa zona de influência emissora	43
3.1	Cálculo das equações paramétricas	43
3.2	Condições de existência	46
3.2.1	Quando há intersecção entre as esferas	46
3.3	Analisando os ângulos de integração	47
3.3.1	Quando há intersecção entre as esferas	47
3.4	Cálculos Gerais para as Probabilidades	49
3.4.1	Teorema principal no espaço	51
3.5	Supondo Distribuição Uniforme	52
3.6	Supondo Distribuição Normal	55
	Considerações Finais	58
	Referências Bibliográficas	60
	Referências Bibliográficas	60

Introdução

Nos últimos anos têm existido muitos problemas sobre probabilidade geométrica que exigem soluções descobertas no passado. A teoria da probabilidade, geralmente, preocupa-se com variáveis aleatórias, que são quantidades, ou conjuntos de quantidades, tomando valores num conjunto de possibilidades sobre as quais é definida uma medida não-negativa, satisfazendo certas condições necessárias que nos permitam interpretá-las como uma probabilidade. Ainda, na teoria de probabilidades geométricas, os elementos aleatórios não são as quantidades, mas os objetos geométricos como pontos, linhas e rotações.

Iniciamos nosso estudo com uma sucinta pesquisa histórica bibliográfica sobre o tema abordado, tomando como relevância, citações de alguns importantes trabalhos desenvolvidos e seus respectivos teóricos matemáticos. Um estudo teórico de formas diferenciadas da abordagem do problema inicial da agulha de Buffon, com suas extensões é realizado. Situações e problemas que se iniciaram com o problema da agulha de Buffon e de modelos teóricos e experimentais de outros matemáticos, analisando algumas formas modernas, mais adequadas e utilizadas na atualidade com muito mais precisão do que o procedimento empregado originalmente por Buffon, também são apresentados, compondo, um estudo sobre probabilidade geométrica.

Em seguida, elaboramos uma generalização de um caso de probabilidade no plano, onde discutimos e analisamos qual a probabilidade de um ponto deslocar-se até um raio r no plano, e pertencer a uma área de atuação circular de raio R

no plano. Utilizamos estudos da matemática, tais como: geometria euclidiana, cálculo de integrais, probabilidades, etc; e, aplicações com distribuição uniforme e distribuição normal, por estarmos trabalhando com probabilidade contínua. Consolidamos generalizações destas situações-problema com algumas aplicações particulares.

Por fim, estendemos os estudos anteriores para o espaço R^3 , elaborando uma generalização do caso de probabilidade no espaço, onde estudamos qual a probabilidade de um ponto se deslocar exatamente um raio r , esférico no espaço R^3 , e ainda, pertencer a outra esfera de raio R . Utilizamos, neste caso, integrais de superfícies para os cálculos generalizados da probabilidade geométrica.

Objetivamos assim, apresentar situações, com aplicações de definições matemáticas de Geometria, Cálculo e Probabilidade Geométrica, bem como uma extensão de resultados anteriormente descobertos.

Em alguns momentos, necessitamos recorrer a alguns softwares matemáticos, principalmente na visualização das situações anteriores e no cálculo de integrais muito grandes, que demandariam muito tempo, além de sobrecarregar o estudo realizado com excessivos cálculos básicos.

Da mesma forma que no plano, e como trata-se de um caso de probabilidade contínua, utilizamos generalizações e aplicações com distribuição uniforme e distribuição normal, analisando e fazendo conjecturas para trabalhos já encontrados em [5].

Um ponto de suma importância a destacar neste trabalho é que, embora para o seu desenvolvimento recorramos a definições e conceitos pré-estudados, especificamente os capítulos 2 e 3 tiveram um caráter estritamente de originalidade.

Acreditamos portanto, que este trabalho contribua no estudo das probabilidades geométricas, especificamente sobre as situações apresentadas, e nas desenvolvidas a partir das situações reais de aplicação de probabilidade no plano e no espaço.

Capítulo 1

Abordagens Iniciais sobre Probabilidade Geométrica

Neste capítulo, faremos um breve apanhado histórico sobre a evolução da Probabilidade Geométrica. Abordaremos o problema inicial da Agulha de Buffon por diversos processos de resoluções, com uma extensão a outros polígonos. Apresentaremos também duas situações importantes desenvolvidas pelos matemáticos Laplace e Bertrand. Ainda, apresentaremos exemplos de probabilidade geométrica.

1.1 Abordagem histórica

As primeiras análises de problemas contendo Probabilidades Geométricas iniciaram-se por volta do século XVIII, baseando-se no “problema da Agulha de Buffon”, estudado inicialmente pelo matemático e naturalista francês George Louis Leclerc (1707-1788). A partir deste estudo, houve um grande desenvolvimento nas aplicações de probabilidades e estatística, tanto do ponto de vista acadêmico, quanto na vida cotidiana.

Apesar de Leclerc, conhecido como “Conde de Buffon”, ter sido também filósofo e importante biólogo francês, os matemáticos o conhecem por duas contribuições importantes: uma tradução para o francês do “Método dos fluxos de Newton” e o “problema da agulha de Buffon” na Teoria das Probabilidades. Buffon propôs o método probabilístico, mencionado nos Anais da Academia de Ciências de Paris (1733), e posteriormente publicado em 1777 na sua obra “Essai d’Arithmetique Morale”. Hoje, é reconhecido como um dos métodos de Monte Carlo para o cálculo de π , comumente chamado de problema da Agulha de Buffon.

Neste período, muitos tinham interesse por jogos de probabilidades. Depois da morte de Luiz XIV, na França, Buffon (1733) apresentou um trabalho à Academia Real de Ciências, intitulado “jogo de Franc Carreau”, que consistia em atirar uma moeda sobre um piso ladrilhado com lajotas iguais, isto é, com as mesmas dimensões, porém, sendo possível para vários tipos de formatos diferentes, por exemplo, quadrados, triângulos, hexágonos, etc. Apostava-se onde a moeda cairia: entre uma das lajotas ou entre mais de uma.

Sobre o problema da agulha de Buffon, ele analisou a seguinte situação: uma agulha de comprimento l é mantida horizontalmente a certa altura de uma folha de papel com traços paralelos, igualmente espaçados de uma distância d , com $d \geq l$. Ao deixarmos a agulha cair sobre a folha, ela poderá cruzar as linhas ou não tocá-las.

O objetivo de Buffon era determinar a probabilidade de que a agulha cortasse uma das linhas ou não, resolvendo assim o problema de forma não experimental, mas com raciocínios matemáticos e geométricos. Um ponto curioso no problema da agulha de Buffon, é que, mesmo não havendo qualquer círculo no problema original, na sua solução aparece o valor de π . Esta ocorrência se dá pelo fato de que, considerando o centro da agulha, para cada ponto do papel em que este centro possa cair, tem-se um conjunto de possíveis posições para a agulha que delimitam um círculo.

“É interessante que, no desenvolvimento inicial, Buffon enaltece a geometria como uma importante ferramenta para o cálculo de proba-

bilidades e sugere o aprofundamento dos estudos sobre probabilidades geométricas”.(SANTALÓ, [11, 1994])

Segundo Santaló ([11, 1994]), outro matemático que se destacou na teoria da probabilidade foi Pierre Simon Laplace (1749-1827), o qual dizia: “no fundo a teoria das probabilidades é apenas o senso comum expresso em números”.

Um pouco antes, valiosas contribuições na teoria da probabilidade foram descobertas por Jacob Bernoulli (1654-1705), que influenciou o teorema que leva seu nome, Teorema de Bernoulli, publicado em seu livro póstumo “Ars conjectandi”(1713). Este livro foi a primeira tentativa de exposição científica da teoria da probabilidade como um ramo distinto da ciência matemática.

Não menos importante para o estudo das probabilidades geométricas foi o francês Joseph Louis François Bertrand (1822-1900), o qual descobriu e publicou em seu livro “Calcul des probabilités”(1888),ver [1], um paradoxo em probabilidade contínua, conhecido como “Paradoxo de Bertrand”. Problema que parece ser muito simples, mas muito importante para a análise probabilística.

O paradoxo surge a partir de definições diferentes de fatos aleatórios. Bertrand propôs o seguinte problema: qual é a probabilidade de que uma corda aleatória de um círculo seja maior do que o lado de um triângulo equilátero inscrito? Nesse paradoxo, a probabilidade de que uma corda aleatória em um círculo exceda o lado de um triângulo equilátero inscrito pode ser $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2}$ para cada um dos três modelos diferentes, através da qual a corda é estabelecida de forma aleatória.

Com o Paradoxo de Bertrand, surgiram propostas de matemáticos, como o francês Jules Henri Poincaré (1854-1912) e outros, de que a probabilidade de situações geométricas estivesse vinculada a densidades. A densidade adequada no âmbito do grupo de movimentos rígidos levaria à solução de que a probabilidade fosse um $\frac{1}{4}$. As outras duas soluções induzem densidades que não são invariantes, segundo Bertrand.

O Inglês James Joseph Sylvester (1814-1897) estendeu o trabalho de Bertrand para estudos de grupos de permutações, publicando também alguns artigos sobre probabilidade geométrica. Sylvester desenvolveu em conjunto com William

Morgan Crofton (1826-1915), matemático nascido na Irlanda, estudos na área de Probabilidade Geométrica, a partir de observações, na década de 1860.

Sylvester e Crofton discutiram e estenderam estudos baseado nos trabalhos de Buffon. Crofton escreveu sobre a teoria da probabilidade local, em 1868. Entretanto, o artigo mais importante por ele realizado sobre probabilidade geométrica foi escrito, para a nona edição da “Enciclopédia Britannica” editada por TS Baynes, professor de Lógica e Metafísica na Universidade de St Andrews, obra em 24 volumes, sobre Probabilidade, nomeado Teorema de Crofton, trabalho desenvolvido em 1885.

No século XX, podemos destacar o matemático francês Robert Deltheil (1890-1972), que teve importantes trabalhos publicados sobre probabilidade geométrica. Ele apoiou a sua tese em 1920, em Paris, intitulada “Sur la théorie des probabilités géométriques” perante um júri composto por Émile Borel, Paul e Ernest Painlevé Vessiot. Um dos últimos trabalhos de importante relevância publicado foi por Deltheil(1926), foi abordar pequenos ensaios de brochura em Probabilidade Geométrica.

Ainda neste século, o espanhol Luis Antoni Santaló (1911-2001), publicou em 1976 o livro intitulado “Integral Geometry and Geometric Probability”, ver [10]. Outros trabalhos ainda foram publicados sobre Probabilidade Geométrica por Kendall e Moran [6, 1963] e Herbert Solomon [9, 1976], etc., os quais encontram-se citados na bibliografia desta dissertação.

Contudo, mesmo sabendo que na atualidade surge um grande número de problemas contendo probabilidade geométrica, e que tais problemas, geralmente exigem soluções anteriormente descobertas, observamos que poucas publicações sobre esta temática foram produzidas de forma inédita.

1.2 Primeira abordagem para o Problema da Agulha de Buffon

Um plano é marcado com linhas paralelas equidistantes, a largura da faixa entre duas linhas consecutivas, sendo d . Uma agulha tão fina que possa ser comparada a um segmento retilíneo de comprimento $l < d$ é jogada no plano. Qual é a probabilidade de que a agulha cruze uma das linhas (naturalmente não mais do que uma)? Este é o mais antigo problema registrado que envolve Probabilidade Geométrica. Foi mencionado por Buffon, matemático citado na seção anterior.

Primeiro, caso a agulha não intercepte uma das linhas do problema, a probabilidade é nula, ver figura 1.1. Estamos interessados no caso em que a agulha intercepta uma das linhas, por exemplo a superior, ver figura 1.2. Caso a agulha intercepte a linha inferior o estudo é análogo.

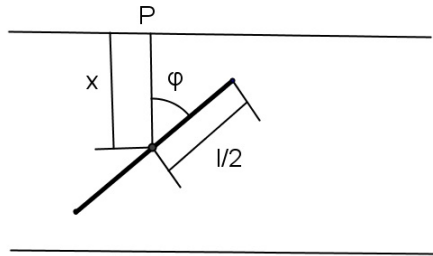


Figura 1.1: Agulha não intercepta as linhas

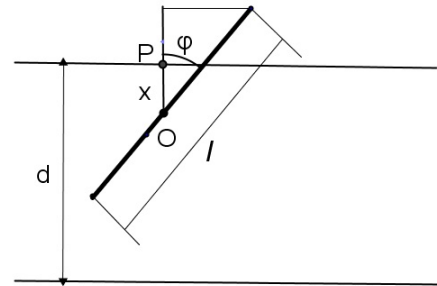


Figura 1.2: Agulha intercepta a linha superior

Vamos determinar a posição da agulha pela distância $OP = x$ do seu ponto médio até a linha superior, e o ângulo φ agudo entre OP e a agulha. As variáveis x e φ podem ser consideradas independentes. Além disso, x e φ variam entre 0 e

$\frac{1}{2}d$ e 0 e $\frac{\pi}{2}$, respectivamente.

Como hipótese assumiremos a distribuição de probabilidade uniforme para x e φ . O domínio de x e φ é um retângulo $OABC$ com $OA = \frac{\pi}{2}$, $OC = \frac{d}{2}$, ver figura 1.3. Usando a relação do cosseno no triângulo retângulo vemos que o limite para a agulha tocar a linha superior é $x = \frac{l}{2} \cos \varphi$. Em outras palavras, a ponta da agulha está sobre a linha. Assim, a agulha cruzará a linha superior se

$$x < \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

Então os pontos x e φ para os quais a agulha intercepta a linha superior residem na área sombreada abaixo da curva

$$x = \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

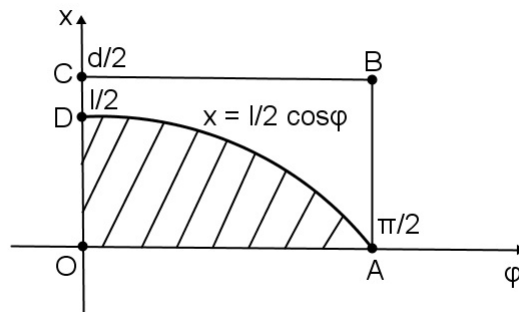


Figura 1.3: Área que representa os pontos de intersecção da agulha com a linha.

Como a distribuição de x e φ são uniformes, a probabilidade será

$$P = \frac{\text{Área } OAD}{\text{Área } OABC}.$$

Mas

$$\text{Área } OAD = \frac{l}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{l}{2}$$

e

$$\text{Área } OABC = \frac{\pi d}{2 \cdot 2}.$$

Consequentemente,

$$P = \frac{2l}{\pi d}.$$

1.3 Segunda abordagem para o Problema da Agulha de Buffon

Seja h a largura da faixa entre duas linhas e $l < h$ o comprimento da agulha. A posição da agulha pode ser determinada pela distância x de seu ponto médio a partir da linha mais próxima e do ângulo agudo φ formado pela agulha que caiu e uma perpendicular à linha, passando pelo ponto médio da agulha, ver figura 1.4.

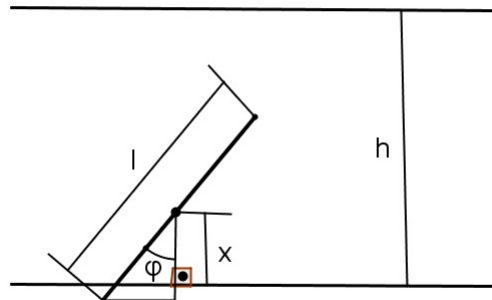


Figura 1.4: Agulha intercepta a linha inferior

É evidente que x pode variar de 0 a $\frac{h}{2}$ e φ varia dentro dos limites de 0 e $\frac{\pi}{2}$. Não podemos definir da maneira usual a probabilidade da agulha cortar a linha, pois existem infinitas possibilidades, no que diz respeito à posição da agulha. No entanto, é possível tratar este problema como o caso limite de um outro problema com um número finito de casos possíveis, onde a definição usual de probabilidade pode ser aplicada.

Suponhamos que $\frac{h}{2}$ é dividido em um número m arbitrário de partes iguais, $\gamma = \frac{h}{2m}$ e o ângulo de $\frac{\pi}{2}$ em n partes iguais, $w = \frac{\pi}{2n}$, ver figura 1.5.

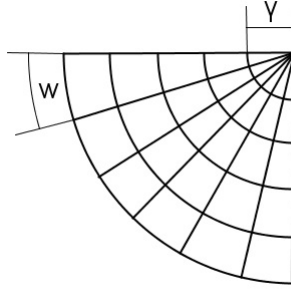


Figura 1.5: Partição da medida x e do ângulo φ

Suponhamos, ainda que, a distância x pode ter apenas os valores

$$0, \gamma, 2\gamma, \dots, m\gamma$$

e o ângulo φ os valores

$$0, w, 2w, \dots, nw.$$

Isto dá

$$N = (m + 1)(n + 1)$$

casos para a posição da agulha, e é razoável supor que esses casos são igualmente prováveis.

Para encontrar o número de casos favoráveis, notamos que a agulha corta uma das linhas se x e φ satisfazem a desigualdade

$$x < \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

O número de casos favoráveis, portanto, é igual ao número de sistemas de inteiros i, j que satisfaz a desigualdade

$$i\gamma < \frac{l}{2} \cos jw. \tag{1.1}$$

Suponhamos que i possa assumir apenas os valores $0, 1, 2, \dots, m$ e j somente os valores $0, 1, 2, \dots, n$. Como supomos $l < h$ o maior valor de i que satisfaz (1.1) é menor do que m . De fato, se $i \geq m$, então de (1.1) obtemos $m\gamma < l/2 \cos jw$.

Mas $m\gamma = h/2$. Logo, $h/2 < l/2 \cos jw$, para qualquer $j = 1, \dots, n$. Disto $h < l$, o que é uma contradição.

Agora, para j dado, existem l valores de i satisfazendo (1.1). Seja k o maior inteiro que é inferior

$$\frac{l}{2\gamma} \cos jw.$$

Em outras palavras, k é um número inteiro determinado pelas condições

$$k < \frac{l}{2\gamma} \cos jw \leq k + 1.$$

O número de possíveis valores para i correspondente a um dado j , o qual será $k + 1$, pode ser representado assim

$$m_j = \frac{l}{2\gamma} \cos jw + v_j,$$

onde v_j pode depender de j , mas para todos j , $0 \leq v_j < 1$. Tomando a soma de todos os valores correspondentes a $j = 0, 1, 2, \dots, n$, obtemos o número de casos favoráveis

$$M = \sum_{j=0}^n m_j,$$

isto é,

$$M = \frac{l}{2\gamma} (1 + \cos w + \cos 2w + \dots + \cos nw) + n\theta,$$

onde $\sum_{j=0}^n v_j = n \left(\sum_{j=0}^n \frac{v_j}{n} \right) = n\theta$, e satisfaz as desigualdades

$$0 \leq \theta < 1.$$

Mas, como sabemos,

$$1 + \cos w + \cos 2w + \dots + \cos nw = \frac{1}{2} + \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) w}{2 \sin \frac{w}{2}}.$$

Sendo $w = \frac{\pi}{2n}$, segue que

$$1 + \cos w + \cos 2w + \dots + \cos nw = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cotg \frac{w}{2}.$$

Portanto,

$$M = \frac{l}{4\gamma} \cotg \frac{w}{2} + \frac{l}{4\gamma} + n\theta.$$

Dividindo isso por $N = (m + 1)(n + 1)$ e substituindo em γ e w por

$$\gamma = \frac{h}{2m}, \quad w = \frac{\pi}{2n}$$

obtemos a probabilidade do problema com um número finito de casos

$$\frac{M}{N} = \frac{l}{2h} \frac{m}{m+1} \frac{\cot \frac{\pi}{4n}}{n+1} + \frac{l}{2h} \frac{m}{m+1} \frac{1}{n+1} + \frac{n\theta}{(n+1)(m+1)}.$$

A probabilidade do problema de Buffon será obtida através do aumento indefinido de m e n na expressão acima. O que justifica isto é o Teorema de Bernoulli, ver por exemplo [12]. Utilizando os limites

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{m+1} &= 1, \\ \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{m}{(m+1)(n+1)} &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)(m+1)} = 0 \quad (m, n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\cot \frac{\pi}{4n}}{n+1} = \frac{4}{\pi}.$$

Por fim,

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = \frac{2l}{h\pi}.$$

Assim, chegamos à expressão da probabilidade $p = \frac{2l}{h\pi}$ no problema da agulha de Buffon.

1.4 Solução do Problema de Buffon por Barbier

Barbier deu outra solução para o problema de Buffon e de sua extensão, ver [12].

Seja $f(l)$ a probabilidade de uma agulha interceptar uma linha desconhecida, onde l é o comprimento da agulha. Imagine que a agulha é dividida em duas partes l' e l'' . Uma linha cruza a agulha se, e somente se, interceptar a primeira ou a segunda parte. Assim, pelo teorema de probabilidade total (ver por exemplo [12, cap. II])

$$f(l) = f(l') + f(l''),$$

donde, sabemos que $f(l) = Cl$, onde C é uma constante independente de l . De fato, ou $f(l') = 0$ ou $f(l'') = 0$. Tomemos $f(l'') = 0$. Então

$$f(l) = f(l') = \frac{l'}{l} = \frac{l'}{l^2}l = Cl,$$

onde utilizamos que a distribuição é uniforme.

Toda questão é como determinar essa constante.

A ideia de Barbier foi reformular esse problema em termos da solução de outro problema. Observe a seguir:

Uma linha poligonal (convexa ou não) é lançada sobre um plano marcado com linhas paralelas equidistantes. O que é a esperança matemática do número de pontos de intersecção da linha poligonal com uma das linhas pertencentes ao plano? O perímetro da linha poligonal pode ser subdividido em n partes retilíneas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, todas menores que d . Com estas n partes podemos associar n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n tais que $x_i = 1$, se uma das linhas intercepta e $x_i = 0$, caso não intercepte. A soma

$$s = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

resulta no número total de pontos de intersecção. Por isso,

$$E(s) = E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_n).$$

Se p é a probabilidade da intersecção de um segmento, com uma (e apenas uma) linha, então

$$E(x_i) = p_i.$$

Mas, de acordo com o resultado anterior

$$p_i = C\alpha_i.$$

Portanto, temos a seguinte fórmula geral

$$E(s) = C(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = CP,$$

onde P é o perímetro da linha poligonal. O resultado é válido para qualquer arco de curva (fechado ou não), como pode ser visto aplicando-se limite na esperança.

Esta fórmula aplicada a um círculo com o diâmetro d dá

$$C\pi d = 2,$$

uma vez que tal círculo sempre intercepta em dois pontos com as linhas do sistema.

Assim, concluímos que

$$C = \frac{2}{\pi d}$$

e, substituindo em $f(l) = Cl$, obtemos

$$f(l) = \frac{2l}{\pi d}.$$

Para uma linha convexa fechada, de dimensões suficientemente pequenas, apenas dois casos são possíveis: duas intersecções (probabilidade p) ou nenhuma (probabilidade $1 - p$), onde $E(s) = 2p$ e, conseqüentemente,

$$2p = \frac{2P}{\pi d}$$

ou

$$p = \frac{P}{\pi d}.$$

1.5 Extensão do Problema de Buffon

Uma placa fina, em forma de um polígono convexo, de dimensões tão pequenas que não cruzam duas das linhas simultaneamente, é jogada em uma placa marcada, como no problema de Buffon. Qual é a probabilidade da fronteira da placa cruzar uma das linhas?

Suponhamos que a fronteira do polígono possua cinco partes, ver figura 1.6. Sejam estes lados (e seus comprimentos) indicados por

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon.$$

Cada um deles é menor que a distância d entre duas linhas consecutivas. Por conta da convexidade, uma linha só pode interceptar dois lados ou não interceptar nenhum.

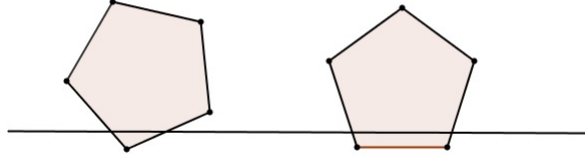


Figura 1.6: Duas maneiras de intersecção da fronteira de um pentágono com uma linha no plano

Assim, combinando os lados, em pares, podemos distinguir 10 casos mutuamente exclusivos e denotar suas probabilidades por

$$(\alpha\beta), (\alpha\gamma), (\alpha\delta), (\alpha\epsilon), (\beta\gamma), (\beta\delta), (\beta\epsilon), (\gamma\delta), (\gamma\epsilon), (\delta\epsilon).$$

A probabilidade requerida será dada pela soma

$$p = (\alpha\beta) + (\alpha\gamma) + (\alpha\delta) + (\alpha\epsilon) + (\beta\gamma) + (\beta\delta) + (\beta\epsilon) + (\gamma\delta) + (\gamma\epsilon) + (\delta\epsilon).$$

De outra forma, o lado α pode ser cortado por uma linha de quatro maneiras mutuamente exclusivas, ou seja, juntamente com β ou γ ou δ ou ϵ . Assim, se α é a probabilidade da intersecção do lado α com uma das linhas, então

$$(\alpha) = (\alpha\beta) + (\alpha\gamma) + (\alpha\delta) + (\alpha\epsilon)$$

similarmente,

$$(\beta) = (\beta\alpha) + (\beta\gamma) + (\beta\delta) + (\beta\epsilon)$$

$$(\gamma) = (\gamma\alpha) + (\gamma\beta) + (\gamma\delta) + (\gamma\epsilon)$$

$$(\delta) = (\delta\alpha) + (\delta\beta) + (\delta\gamma) + (\delta\epsilon)$$

$$(\epsilon) = (\epsilon\alpha) + (\epsilon\beta) + (\epsilon\gamma) + (\epsilon\delta).$$

Donde,

$$(\alpha) + (\beta) + (\gamma) + (\delta) + (\epsilon) = 2p.$$

Mas,

$$(\alpha) = \frac{2\alpha}{\pi d}; (\beta) = \frac{2\beta}{\pi d}; (\gamma) = \frac{2\gamma}{\pi d}; (\delta) = \frac{2\delta}{\pi d}; (\epsilon) = \frac{2\epsilon}{\pi d}$$

e, conseqüentemente,

$$p = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon}{\pi d} = \frac{P}{\pi d},$$

onde P é o perímetro do contorno do polígono. Este resultado é perfeitamente geral, uma vez que não depende do número de lados, podendo ser estendido para o caso de uma placa delimitada por uma curva convexa.

1.6 Problema de Laplace

Um plano é coberto com um conjunto de retângulos congruentes, ver figura 1.7, e uma agulha fina é jogada no plano. Supondo que a agulha seja menor do que os lados menores do retângulos, qual a probabilidade de que a agulha caia totalmente em um dos retângulos contidos no conjunto?

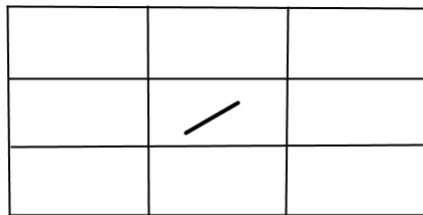


Figura 1.7: Agulha jogada num plano quadriculado

Façamos $AB = a$, $AD = b$ os lados do retângulo que contém o ponto médio da agulha, cujo comprimento é

$$l(l < a, l < b).$$

Tomando-se AB e AD para eixos de coordenadas, a posição da agulha é determinada por duas coordenadas x, y e seus pontos médios $PQRS$ e o ângulo ϕ formado pela agulha com o eixo x , ver figura 1.8.

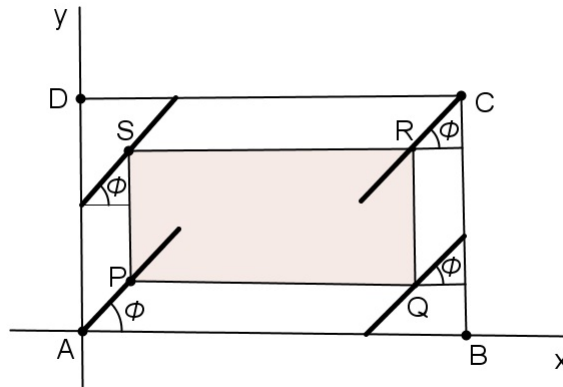


Figura 1.8: Representação da agulha com a área possível, considerando x, y e ϕ

Podemos considerar x, y e ϕ , como três variáveis independentes com distribuição uniforme de probabilidade. O domínio preenchido com todos os pontos possíveis de x, y e ϕ é um paralelepípedo, onde

$$0 < x < a; 0 < y < b; -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2},$$

e a distribuição de probabilidade, em todo este domínio é uniforme [5].

Para caracterizar o domínio dos pontos que representam as posições do ponto médio da agulha quando esta se encontra dentro do retângulo $ABCD$, consideramos as secções deste domínio por planos $\phi = \text{constante}$ e suas projeções no plano xy . Estas projeções são representadas pela área sombreada (Ver figura 1.8), correspondendo aos valores positivo e negativo de ϕ , respectivamente.

As áreas dos retângulos $PQRS$ correspondentes a esses dois casos, podem ser expressas como segue:

para $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, temos

$$\text{Área } PQRS = (a - l \cos \phi)(b - l \sin \phi) = ab - l(b \cos \phi + a \sin \phi) + l^2 \sin \phi \cos \phi,$$

para $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$, temos

$$\text{Área } PQRS = (a - l \cos \phi)(b + l \sin \phi) = ab - l(b \cos \phi - a \sin \phi) - l^2 \sin \phi \cos \phi.$$

Sem distinção de valores positivos e negativos de ϕ , podemos escrever

$$F(\phi) = \text{area } PQRS = ab - bl \cos \phi - la |\sin \phi| + \frac{1}{2} l^2 |\sin 2\phi|.$$

O volume do domínio que representa as posições da agulha inteiramente dentro de ABCD é

$$v = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\phi) d\phi = \pi ab - 2bl - 2al + l^2,$$

definido por

$$0 < x < a; 0 < y < b; -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}.$$

Como $V = \pi ab$ e $p = \frac{v}{V}$, temos como probabilidade

$$p = 1 - \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}.$$

Agora, a probabilidade complementar para a agulha cruzar a fronteira de um dos retângulos é

$$q = \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}.$$

O problema de Buffon pode ser considerado como um limite, quando $a \rightarrow \infty$ e, de fato,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} q = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2l}{\pi b} - \frac{2lb - l^2}{\pi ab}.$$

Como $\frac{2lb - l^2}{\pi ab}$ tende para 0, concluímos que

$$q = \frac{2l}{\pi b},$$

conforme resultado do Problema de Buffon.

1.7 O Paradoxo de Bertrand

Em muitos problemas, a definição de uma ocorrência aleatória pode levar a soluções surpreendentes. Bertrand descobriu o chamado Paradoxo de Bertrand, problema de extrema importância para a definição nas probabilidades geométricas. Observe as análises da seguinte situação colocada por Bertrand: Uma corda é desenhada aleatoriamente num dado círculo. Qual é a probabilidade de que ela seja maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito no círculo?

Primeira análise:

Se o ponto médio da corda está mais próximo do centro do círculo que um lado do triângulo, então a corda será maior que $r\sqrt{3}$. A região variável para todos os pontos médios é um círculo de raio $\frac{r}{2}$, ver figura 1.9.

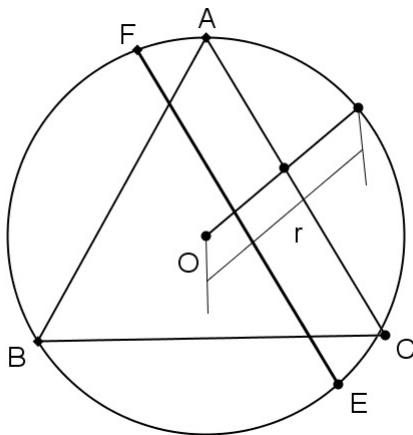


Figura 1.9: Representação da corda no círculo, em relação ao raio

A posição da corda, aleatoriamente, pode ser determinada por sua distância ao centro do círculo. Esta distância pode variar de 0 a r , o raio do círculo. A corda é maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito no círculo, se a sua distância ao centro é menor que $r/2$. Daí, a requerida probabilidade

$$p_1 = \frac{\frac{1}{2}R}{R} = \frac{1}{2}.$$

Segunda análise:

Consideremos agora, através de uma extremidade da corda, traçar uma tangente AT, ver figura 1.10.

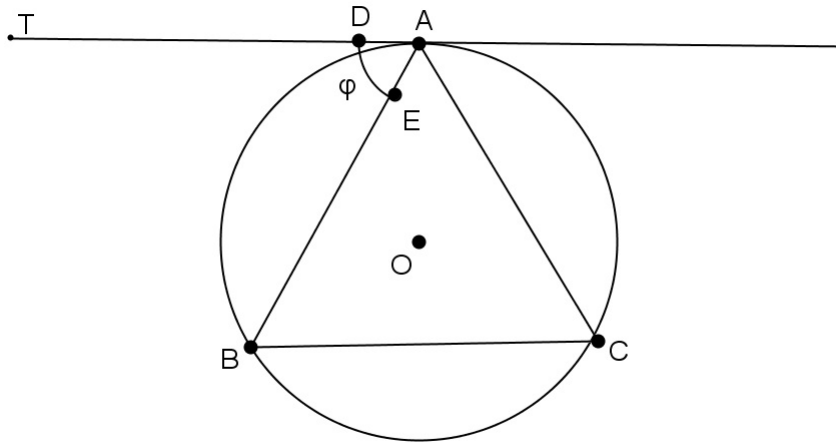


Figura 1.10: Representação da corda no círculo, em relação ao ângulo

O ângulo ϕ , variando de 0° a 180° , determina a posição da corda, ver . Se ela for maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito, o ângulo ϕ deve estar situado entre 60° e 120° . Daí, a probabilidade será

$$p_2 = \frac{120^\circ - 60^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{3}.$$

Terceira análise:

A probabilidade da corda ser maior do que o lado de um triângulo equilátero é encontrada através da comparação da região viável do espaço amostral, ver figura 1.11.

Então, temos

$$p_3 = \frac{\text{Area do Circulo Menor}}{\text{Area Total do Circulo}} = \frac{\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

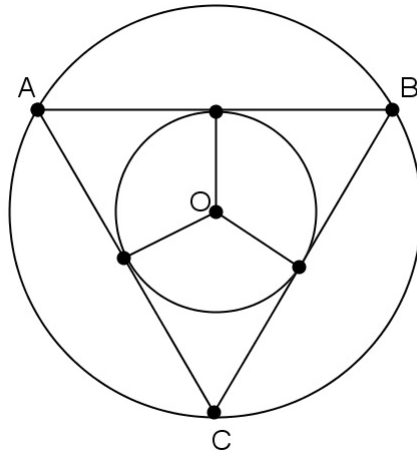


Figura 1.11: Representação da corda no círculo, em relação a área

O fato de obtermos diferentes resultados para a mesma probabilidade parece paradoxal, e o próprio problema é conhecido como “Paradoxo de Bertrand”. No entanto, analisando cada situação, descobrimos que realmente estamos lidando com problemas diferentes. Na primeira análise foi assumida que a distância da corda a partir do centro tem distribuição uniforme. Na segunda análise, foi considerada a distribuição do ângulo ϕ tomada como uniforme, enquanto que na última análise tomamos a distribuição da área do círculo como uniforme.

1.8 Exemplos

A seguir apresentaremos alguns exemplos de probabilidades geométricas, que foram retirados dos exercícios propostos do livro do Uspensky,[12].

1.8.1 Exemplo 1

Um segmento retilíneo AB é dividido por um ponto C em duas partes $AC = a$, $CB = b$, conforme figura 1.12. Os pontos X e Y são escolhidos aleatoriamente em AC e CB , respectivamente. Qual é a probabilidade dos segmentos AX, XY

e BY formarem um triângulo?

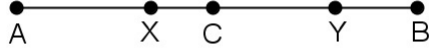


Figura 1.12: Representação dos segmentos AX, BX e XY

Solução: Temos que primeiro entender o significado da expressão ao acaso. A ideia sugerida por esta expressão implica no modo de escolha dos pontos X e Y sem dar preferência a quaisquer pontos de AC e CB , respectivamente. Consequentemente, as variáveis $x = AX$ e $y = BY$ podem ser consideradas como possuindo uma distribuição de probabilidade uniforme. O domínio dos pontos x e y é um retângulo $OMPN$ com lados $OM = a$, $ON = b$.

A fim de que os segmentos AX, XY e BY possam formar um triângulo, as desigualdades abaixo devem ser atendidas (pois um triângulo não degenerado deve satisfazer o Teorema da Desigualdade Triangular):

$$x < (a + b - x - y) + y \quad \text{ou} \quad x < a + b - x$$

$$y < (a + b - x - y) + x \quad \text{ou} \quad y < a + b - y$$

$$a + b - x - y < x + y,$$

onde $XY = a + b - x - y$ também possui distribuição uniforme. Essas desigualdades são equivalentes a

$$x < \frac{a + b}{2}, \quad y < \frac{a + b}{2}, \quad x + y > \frac{a + b}{2}.$$

Para interpretá-las geometricamente, ver figura (1.13), estendamos o segmento OM até o segmento OQ tal que $|\vec{OQ}| = a + b$. Seja S o ponto médio de OQ , isto é, $|\vec{OS}| = \frac{a+b}{2}$. De maneira análoga, na direção vertical, estendamos o segmento ON até o segmento OR tal que $|\vec{OR}| = a + b$. Denotemos o ponto médio de OR por W . Em seguida, as inequações anteriores, limitam as posições dos pontos x e y para a área sombreada SVW , cuja parte TSU está contida no retângulo

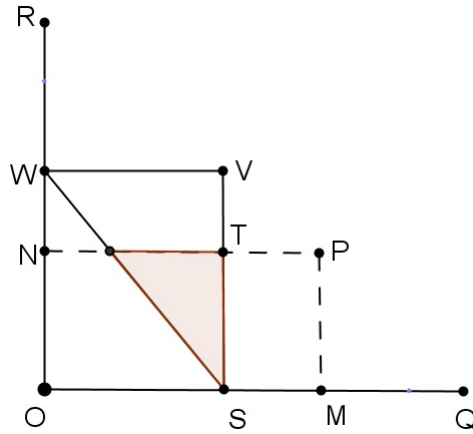


Figura 1.13: Esquema para encontrar a área dos pontos x, y que formam um triângulo

$OMPN$. As variáveis X e Y são independentes e têm uma distribuição uniforme. Assim, a densidade de probabilidade do par x, y é constante e a probabilidade de que o ponto x e y esteja no triângulo TSU será

$$\frac{\text{Área}TSU}{\text{Área}OMPN} = \frac{\frac{1}{2}bb}{ab} = \frac{1}{2} \frac{b}{a}.$$

Ao mesmo tempo, esta é a probabilidade dos segmentos AX, XY, BY formarem um triângulo.

1.8.2 Exemplo 2

Em um segmento retilíneo AB dois pontos X e Y são tomados de forma aleatória. Qual é a probabilidade dos segmentos AX, XY, YB formarem um triângulo (ver figura (1.14))?

As variáveis $AX = x, YB = y, XY = l - (x + y)$ têm distribuição uniforme de probabilidade. O domínio de todas as posições possíveis dos x, y é um quadrado com o lado $AB = l$. As posições dos pontos quando AX, XY, YB formam um triângulo são caracterizadas como segue: x

$$l - (x + y) < x + y \text{ ou } \frac{l}{2} < x + y$$



Figura 1.14: Representação dos segmentos AX , XY e YB

$$x < (l - (x + y)) + y \text{ ou } x < \frac{l}{2}$$

$$y < (l - (x + y)) + x \text{ ou } y < \frac{l}{2}$$

O que significa que x e y pertencem ao triângulo DPQ , o que é evidente se P, Q são pontos médios dos lados DC e DA , respectivamente, do quadrado $ABCD$, ver figura (1.15).

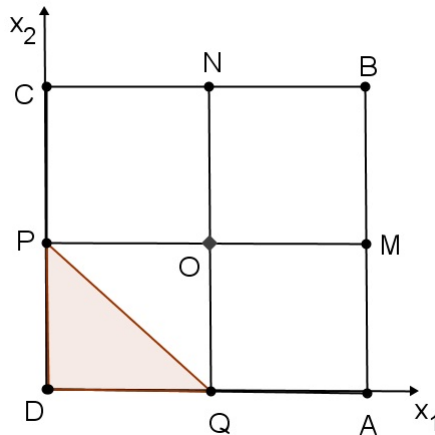


Figura 1.15: Esquema para encontrar a área dos pontos x, y que formam um triângulo

Como as distribuições de x, y são uniformes, a requerida probabilidade é

$$P = \frac{\text{Área } DPQ}{\text{Área } ABCD} = \frac{\frac{l^2}{8}}{l^2} = \frac{1}{8}.$$

Capítulo 2

Probabilidade da área de um sinal na área de uma antena

Neste capítulo, analisaremos o seguinte problema: Suponha que uma antena transmissora de algum sinal, por exemplo, de celular, emite seus sinais uniformemente em uma região circular de raio a , em um plano. Se estou num ponto P do plano, qual a probabilidade de entrar na zona de emissão de um sinal da antena se me deslocar até um raio b ? Para resolução deste problema nós utilizamos probabilidade contínua, coordenadas polares e integração de várias variáveis. Além de descrever de uma maneira geral este problema, abordaremos, como aplicações, os casos das distribuições de probabilidade uniforme e normal.

2.1 Cálculo das equações paramétricas

Seja a emissão de um sinal de uma torre representada por um círculo c_2 de raio b , e c_1 um círculo de raio a que representa um sinal de uma antena móvel, por exemplo de um celular, onde chamaremos a distância entre os dois pontos centrais dos sistemas de d , ver figura (2.1). Além disso, como uma restrição ao

modelo real consideramos sempre $b > a$.

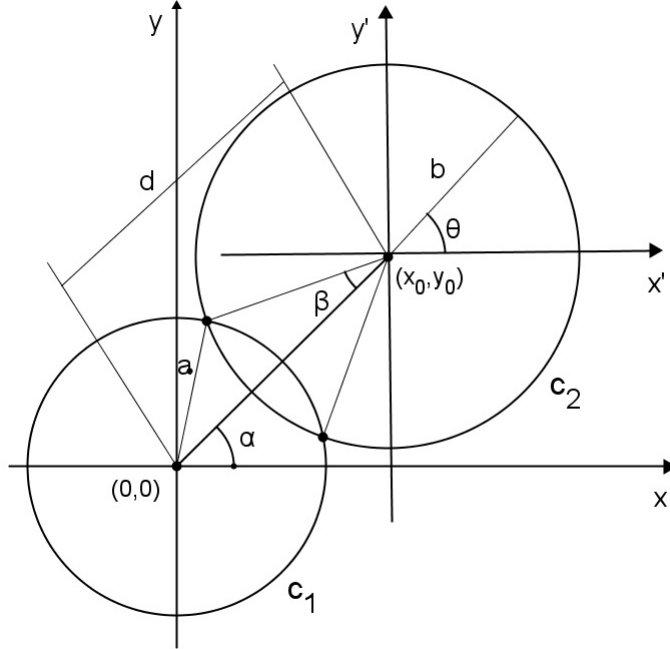


Figura 2.1: Esquema de estudo para o sinal de captação

Em geral, sabemos que as coordenadas polares são dadas por,

$$(x, y) \longleftrightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad e, \quad x^2 + y^2 = r^2. \quad (2.1)$$

Iniciaremos esta análise expressando cada círculo em coordenadas polares. No que segue, descreveremos as coordenadas polares para os círculos c_1 e c_2 .

Círculo c_1

Observamos que o centro de c_1 é $(0, 0)$. Por (2.1) vemos que

$$(x, y) \longleftrightarrow \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases} \quad e, \quad x^2 + y^2 = a^2. \quad (2.2)$$

Logo, em coordenadas polares, o círculo c_1 é descrito como

$$r^2 = a^2 \Rightarrow r = a, \text{ onde } b \geq 0.$$

Círculo c_2

Inicialmente, apontamos o fato do centro do círculo ser (x_0, y_0) . Observando que o círculo c_2 está translado da origem deduzimos que c_2 é descrito pela equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = b^2.$$

Desenvolvendo os quadrados na equação do círculo c_2 obtemos

$$\begin{aligned}x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 &= b^2 \\x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 &= b^2.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Usando coordenadas polares conseguimos um α tal que

$$\begin{cases}x_0 = d \cos \alpha \\y_0 = d \sin \alpha\end{cases}$$

e $d^2 = x_0^2 + y_0^2$. Aplicando estes valores e as coordenadas polares em (2.3) produzimos

$$\begin{aligned}r^2 - 2r \cos \theta d \cos \alpha - 2r \sin \theta d \sin \alpha + d^2 &= b^2 \\r^2 - 2rd(\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) &= b^2 - d^2 \\r^2 - 2rd \cos(\theta - \alpha) &= b^2 - d^2 \\r^2 - 2rd \cos(\theta - \alpha) - (b^2 - d^2) &= 0.\end{aligned}$$

Resolvamos esta equação quadrática em r . O discriminante para tal equação é

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2d \cos(\theta - \alpha))^2 + 4(b^2 - d^2) \\&= 4d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + 4b^2 - 4d^2.\end{aligned}$$

Como é sabido Δ deve ser maior do que 0. Disto,

$$\begin{aligned}d^2(\cos^2(\theta - \alpha) - 1) + b^2 &\geq 0 \\-d^2 \sin^2(\theta - \alpha) &\geq -b^2 \\ \sin^2(\theta - \alpha) &\leq \frac{b^2}{d^2}.\end{aligned}$$

Segue imediatamente que

$$-\frac{b}{d} \leq \sin(\theta - \alpha) \leq \frac{b}{d}. \quad (2.4)$$

Está é a restrição para o ângulo $\theta - \alpha$. Isto é natural que $\theta - \alpha$ deva ter alguma restrição, pois para descrever o círculo c_2 em termos de coordenadas polares não é necessário percorrermos 360 graus de angulação. Agora, usando Δ com a restrição (2.4), encontramos as seguintes soluções para r

$$r = \frac{2d \cos(\theta - \alpha) \pm \sqrt{4d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + 4b^2 - 4d^2}}{2}.$$

Simplificando, temos

$$r = d \cos(\theta - \alpha) \pm \sqrt{d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + b^2 - d^2}.$$

Portanto, as duas equações paramétricas de c_1 e c_2 , no sistema de coordenadas polares (r, θ) , são

$$r = a \quad \text{e} \quad r = d \cos(\theta - \alpha) \pm \sqrt{d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + b^2 - d^2}, \quad (2.5)$$

respectivamente.

2.2 Condições de existência

Para acharmos as condições de existência, igualaremos as equações paramétricas (2.5) das circunferências c_1 e c_2 . De fato,

$$d \cos(\theta - \alpha) \pm \sqrt{d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + b^2 - d^2} = a.$$

Por simplificação, faremos $\gamma = \theta - \alpha$. Segue que

$$\begin{aligned} d \cos \gamma \pm \sqrt{d^2 \cos^2 \gamma + b^2 - d^2} &= a \\ \pm \sqrt{d^2 \cos^2 \gamma + b^2 - d^2} &= a - d \cos \gamma \\ (\pm \sqrt{d^2 \cos^2 \gamma + b^2 - d^2})^2 &= (a - d \cos \gamma)^2 \\ d^2 \cos^2 \gamma + b^2 - d^2 &= a^2 - 2ad \cos \gamma + d^2 \cos^2 \gamma \\ b^2 - d^2 &= a^2 - 2ad \cos \gamma. \end{aligned}$$

Disto

$$\cos \gamma = \frac{a^2 - b^2 + d^2}{2ad}, \quad \text{com } d > 0. \quad (2.6)$$

Caso $d = 0$, trivialmente, temos $a = b$.

2.2.1 Quando há dois pontos de intersecção entre as circunferências

Primeiramente, analisaremos a existência de dois pontos de intersecção entre as circunferências, criando uma área de intersecção entre elas. Acima vemos que para encontrarmos estas condições, (2.6) deve satisfazer a restrição $-1 < \cos \gamma < 1$. Neste caso a área de intersecção entre c_1 e c_2 é diferente do conjunto vazio. Substituindo (2.6) na condição acima deduzimos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} -1 < \frac{a^2 - b^2 + d^2}{2ad} < 1 \\ -2ad < a^2 - b^2 + d^2 < 2ad \\ -d^2 - 2ad - a^2 < -b^2 < 2ad - d^2 - a^2 \\ a^2 + 2ad + d^2 > b^2 > a^2 - 2ad + d^2 \\ (d + a)^2 > b^2 > (d - a)^2 \\ d + a > b > d - a. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Portanto, as circunferências se interceptam nos seguintes casos:

i) $d < a + b$ (ver figura (2.2)).

ii) $d + a > b$ (ver figura (2.3)).

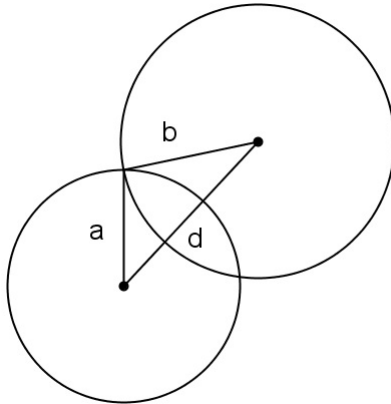


Figura 2.2: Esquema de intersecção quando $d < a + b$

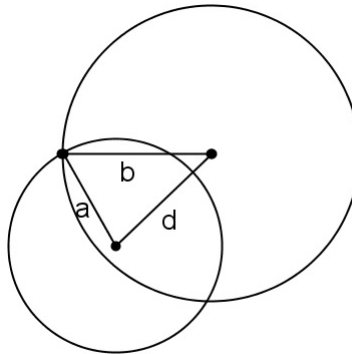


Figura 2.3: Esquema de intersecção quando $d + b > a$

2.2.2 Quando não há pontos ou um único ponto de intersecção entre as circunferências

Agora, analisaremos as condições de intersecção vazia, ou com um ponto, entre as circunferências c_1 e c_2 . Da equação (2.6), observamos que as condições são dadas quando

$$\cos \gamma \leq -1 \quad \text{ou} \quad \cos \gamma \geq 1.$$

Substituindo (2.6) nas condições acima, conseguimos as seguintes desigual-

dades

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2 - b^2 + d^2}{2ad} &\leq -1 & \text{ou} & & \frac{a^2 - b^2 + d^2}{2ad} &\geq 1 \\
 a^2 - b^2 + d^2 &\leq -2ad & \text{ou} & & a^2 - b^2 + d^2 &\geq 2ad \\
 -b^2 &\leq -d^2 - 2ad - a^2 & \text{ou} & & -b^2 &\geq -d^2 + 2ad - a^2 \\
 b^2 &\geq d^2 + 2ad + a^2 & \text{ou} & & b^2 &\leq d^2 - 2ad + a^2 \\
 b^2 &\geq (d + a)^2 & \text{ou} & & b^2 &\leq (d - a)^2 \\
 b &\geq d + a & \text{ou} & & b &\leq d - a.
 \end{aligned}$$

Das duas últimas desigualdades, concluímos as seguintes condições de não intersecção ou um único ponto de intersecção entre c_1 e c_2 :

- i) As circunferências c_1 e c_2 se tocam no ponto P ou não se interceptam, caso $d \geq a + b$ (ver figura (2.4)).

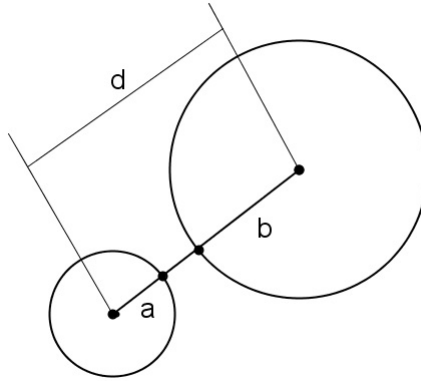


Figura 2.4: Esquema quando $d \geq a + b$

- ii) A circunferência c_1 fica dentro da circunferência c_2 , $d + b \leq a$ (ver figura (2.5)).

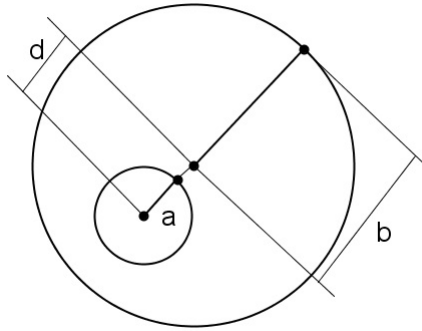


Figura 2.5: Esquema quando $d + b \leq a$

2.3 Cálculos Gerais para as Probabilidades

No caso geral, dada uma função de densidade de probabilidade $f(x, y)$, a probabilidade é definida por

$$P((X, Y) \in B) = \int \int_B f(x, y) dx dy,$$

onde (x, y) são as coordenadas usuais, B é um conjunto mensurável e X, Y são variáveis aleatórias unidimensionais [5].

Em nosso estudo, optamos por olhar os entes geométricos através das coordenadas polares. Transformando as coordenadas de (x, y) em (r, θ) , deduzimos pelo Teorema de mudança de variáveis para integrais duplas [4], que a probabilidade será

$$P((X, Y) \in B) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta, \quad (2.8)$$

onde, neste caso, B poderá ser vazio, c_1 ou $c_1 \cap c_2$, com limites de integração ν_1, ν_2 e r_1, r_2 .

Os nossos estudos se restringiram ao primeiro quadrante, isto é, o centro (x_0, y_0) de c_2 pertence ao primeiro quadrante. Em qualquer outro caso, fazemos uma rotação do círculo c_2 para que o centro esteja no primeiro quadrante.

2.3.1 Probabilidade quando as circunferências se interceptam em dois pontos

Sabemos que, pela subseção 2.2.1, só teremos existência de intersecção entre c_1 e c_2 nos casos $d < a + b$ ou $d + b > a$, onde a, b são os raios de c_1 e c_2 , respectivamente, e d a distância do centro de c_2 a $(0, 0)$. Já conhecemos as equações de c_1 e c_2 em coordenadas polares (ver equação (2.5)), e que estas estão descritas na forma de aplicações $r(\theta)$. Assim, para resolvermos a integral (2.8), nos faltam apenas os ângulos de integração ν_1 e ν_2 .

Analizando os ângulos de integração

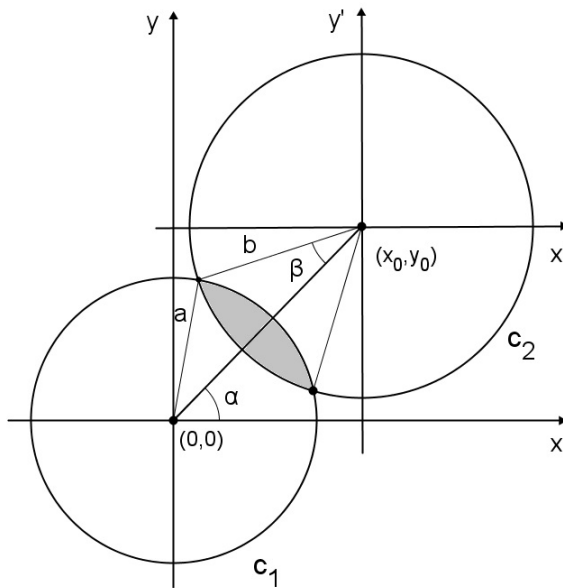


Figura 2.6: Esquema para o ângulo β

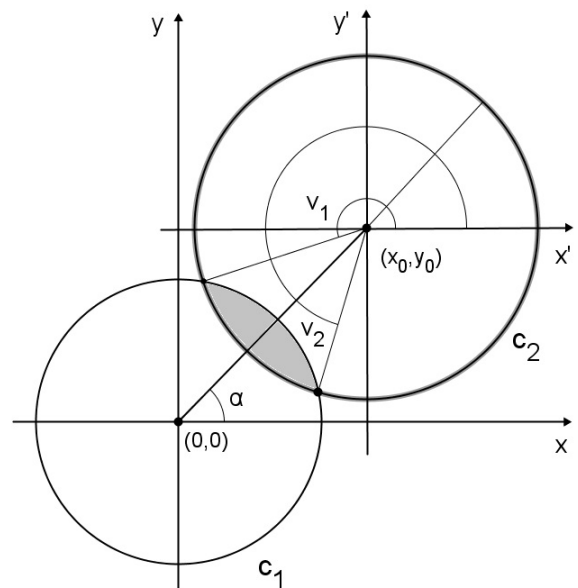


Figura 2.7: Esquema para os ângulo ν_1 e ν_2

Para $d < a + b$, as figuras 2.6 e 2.7 descrevem a situação. Utilizando a lei dos

cosenos, temos

$$\cos \beta = \frac{a^2 - b^2 + d^2}{2ad}, \quad d > 0.$$

Segue que

$$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 + d^2}{2ad}\right).$$

Analisando a figura (2.7) deduzimos que

$$\nu_1 = \alpha - \beta \quad \text{e} \quad \nu_2 = \alpha + \beta.$$

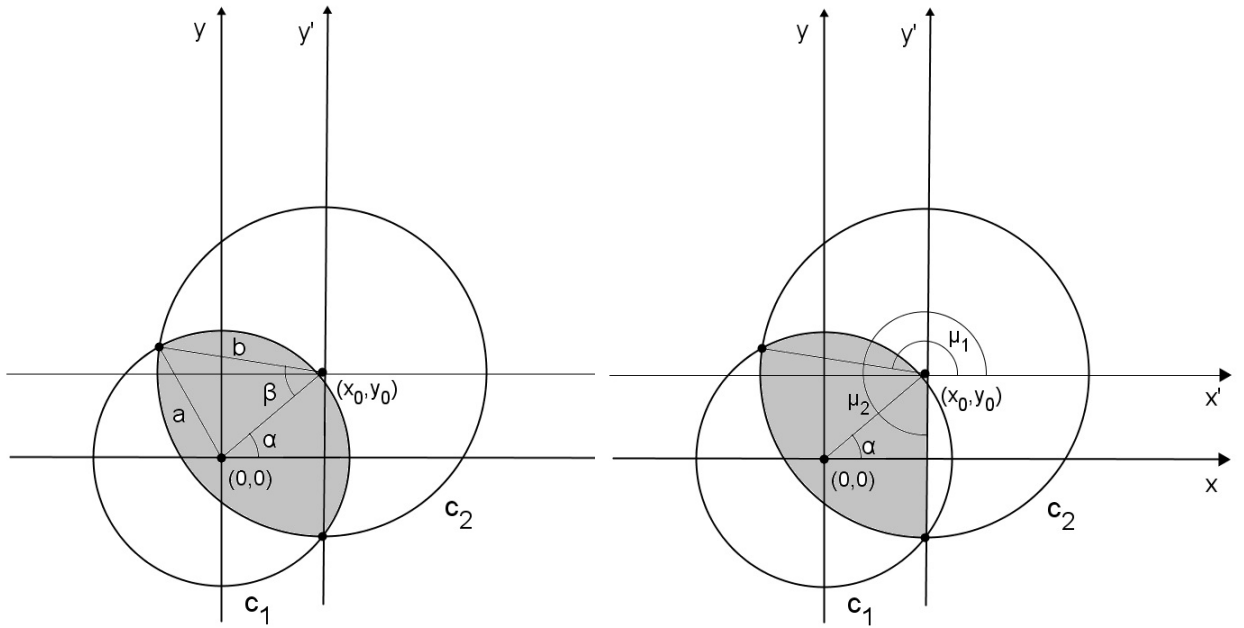


Figura 2.8: Esquema para o ângulo β

Figura 2.9: Esquema para os ângulo ν_1 e ν_2

Analogamente, ver figuras 2.8 e 2.9, quando $d + b > a$ temos

$$\mu_1 = \alpha - \beta \quad \text{e} \quad \mu_2 = \alpha + \beta.$$

2.3.2 Teorema principal no plano

Usando a equação (2.1), as equações paramétricas (2.5) e os ângulos de integração acima, enunciamos o seguinte Teorema.

Teorema 2.1. *Sejam c_1, c_2 duas circunferências com centros em $(0, 0)$ e (x_0, y_0) , respectivamente, e considere uma função de densidade de probabilidade $f(x, y)$ e as variáveis aleatórias reais X, Y . A Probabilidade do vetor aleatório (X, Y) estar na intersecção de $c_1 \cap c_2$, dado que $(X_0, Y_0) = (x_0, y_0)$, é*

1. 0, no caso de não intersecção ou intersecção em um ponto e o centro de c_1 estar fora de c_2 , ou seja, $d \geq a + b$.

2. 1, no caso de não intersecção ou intersecção em um ponto e o centro de c_1 estar dentro de c_2 , ou seja, $d + a \leq b$.

3. no caso de intersecção e o centro de c_1 estar fora de c_2 , ou seja, $d > b$ e $d < a + b$,

$$P((X, Y) \in c_1 \cap c_2) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \int_{d \cos(\theta - \alpha) - \sqrt{d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + b^2 - d^2}}^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

4. no caso de intersecção e o centro de c_1 estar dentro de c_2 , ou seja, $d < b$ e $b < d + a$,

$$P((X, Y) \in c_1 \cap c_2) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_0^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta + \int_{\mu_2}^{\mu_1} \int_0^{d \cos(\theta - \alpha) - \sqrt{d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + b^2 - d^2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

2.4 Supondo Distribuição Uniforme

Uma primeira aplicação do Teorema 2.1 é baseada na seguinte hipótese: o deslocamento não leva em conta o gasto de energia a partir de $(0, 0)$ até o raio a , ou seja, qualquer direção que tomarmos temos as mesmas condições de deslocamento.

Para este estudo aplicaremos a distribuição Uniforme, a qual satisfaz a hipótese apresentada. Por definição, a distribuição Uniforme sobre c_1 é dada por

$$f(x', y') = \begin{cases} \frac{1}{A(c_1)}, & \text{se } (x, y) \in c_1 \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin c_1, \end{cases}$$

onde $A(c_1)$ é a área do círculo c_1 [5].

Para calcular a probabilidade com a distribuição uniforme, usaremos o Teorema 2.1. Para facilitar o nosso estudo, apresentamos os seguintes casos:

Quando não há intersecção

Pelo Teorema 2.1, a probabilidade será 0 ou 1, dependendo se $d \geq a + b$ ou $d + a \leq b$, respectivamente.

Quando há intersecção e $d > b$ e $d < a + b$

Neste caso, pelo Teorema 2.1 a probabilidade será dada por

$$P((X, Y) \in c_1 \cap c_2) = \frac{1}{A(c_1)} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \int_{-d \cos(\theta - \alpha) + \sqrt{d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + b^2 - d^2}}^a r dr d\theta, \quad (2.9)$$

com $\nu_1 = \alpha - \beta$ e $\nu_2 = \alpha + \beta$. Integrando em r , obtemos que $P((X, Y) \in c_1 \cap c_2)$ é

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{A(c_1)} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{r^2}{2} \Big|_{-d \cos(\theta - \alpha) + \sqrt{d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + b^2 - d^2}}^a d\theta \\ &= \frac{1}{2A(c_1)} \int_{\nu_1}^{\nu_2} a^2 d\theta \\ &- \frac{1}{2A(c_1)} \int_{\nu_1}^{\nu_2} (d \cos(\theta - \alpha) - \sqrt{d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + b^2 - d^2})^2 d\theta. \end{aligned}$$

Para simplificar os cálculos, resolveremos cada termo da integral acima separadamente. Denotemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\nu_1}^{\nu_2} (a^2) d\theta; \\ I_2 &= \int_{\nu_1}^{\nu_2} (d \cos(\theta - \alpha) - \sqrt{d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + b^2 - d^2})^2 d\theta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Iniciemos por integrar I_1 . Calculando

$$I_1 = \int_{\nu_1}^{\nu_2} (a^2) d\theta = (a^2)(\nu_2 - \nu_1) = (a^2)(2\beta) = 2\beta(a^2), \quad (2.11)$$

onde na segunda igualdade usamos $\nu_2 - \nu_1 = \alpha + \beta - (\alpha - \beta) = 2\beta$.

Para calcular a integral I_2 usaremos a fórmula de Taylor com resto infinitesimal na sua resolução. O motivo de tal escolha é que a integral I_2 possui um integrando complicado. Procuramos resolver esta integral com as técnicas de cálculo elementar, porém quando levamos para aplicações numéricas o resultado se tornou bastante instável. Assim, preferimos utilizar uma aproximação mais estável e com resultados satisfatórios.

Definamos a função $L(\theta)$ como

$$L(\theta) = (d \cos(\theta - \alpha) - \sqrt{d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + b^2 - d^2})^2.$$

Assim, reescrevemos I_2 da seguinte maneira

$$I_2 = \int_{\nu_1}^{\nu_2} L(\theta) d\theta.$$

Sendo $L(\theta)$ uma função de classe C^∞ , o Teorema de Taylor produz

$$\begin{aligned} L(\theta) &= L(\alpha) + L^I(\alpha)(\theta - \alpha) + \frac{L^{II}(\alpha)}{2!}(\theta - \alpha)^2 \\ &+ \frac{L^{III}(\alpha)}{3!}(\theta - \alpha)^3 + R_3(\theta), \end{aligned}$$

onde $L^i(\alpha)$, $i = I, II, III$, são as derivadas de $L(\theta)$ aplicadas em α . Os seus valores são $L^I(\alpha) = L^{II}(\alpha) = L^{III}(\alpha) = 0$ e

$$L(\alpha) = (d - b)^2.$$

Os valores acima foram encontrados com o auxílio do software **Mathematica**, versão 7.0. Assim, a integral I_2 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\nu_1}^{\nu_2} (d - b)^2 d\theta + \int_{\nu_1}^{\nu_2} R_3(\theta) d\theta \\ &= 2\beta(d - b)^2 + \int_{\nu_1}^{\nu_2} R_3(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde utilizamos um cálculo análogo para resolver a integral I_1 para resolução da primeira integral.

Substituindo os valores de $I_1(2.11)$, $I_2(2.12)$ reescrevemos a probabilidade (2.9) como

$$\begin{aligned} P((X, Y) \in c_1 \cap c_2) &= \frac{1}{2A(c_1)}(I_1 - I_2) \\ &= \frac{1}{2A(c_1)} \left(2\beta a^2 - 2\beta(d-b)^2 - \int_{\nu_1}^{\nu_2} R_3(\theta) d\theta \right) \end{aligned}$$

Por fim, concluímos que, para este caso, a probabilidade procurada é

$$P((X, Y) \in c_1 \cap c_2) = \frac{1}{\pi a^2} \left(\beta a^2 - \beta(d-b)^2 - \frac{1}{2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} R_3(\theta) d\theta \right) \quad (2.13)$$

onde usamos o fato de que $A(c_1) = \pi a^2$.

No que segue construímos uma tabela com alguns valores numéricos aproximados a equação (2.13).

a	b	d	β	Probabilidade
4	5	8	$\arccos(\frac{55}{64})$	0.0747481
20	15	30	$\arccos(\frac{29}{36})$	0.112148
200	270	400	$\arccos(\frac{1271}{1600})$	0.120004
180	190	200	$\arccos(\frac{121}{240})$	0.330776
2.8	2.9	3	1.04513	0.332252
1.5	1.6	3	0.263226	0.0107993

Tabela 2.1: Tabela com valores numéricos para distribuição uniforme com as condições $a < b < d$ e $d < a + b$

Quando existe intersecção e $d + a > b$

Neste caso o Teorema 2.1 assegura que para a distribuição uniforme em c_1 a

probabilidade $P((X, Y) \in c_1 \cap c_2)$ é

$$= \frac{1}{A(c_1)} \left(\int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_0^a r dr d\theta \right) + \frac{1}{A(c_1)} \left(\int_{\mu_2}^{\mu_1} \int_0^{d \cos(\theta - \alpha) + \sqrt{d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + a^2 - d^2}} r dr d\theta \right).$$

Mudando os índices de integração obtemos

$$= \frac{1}{A(c_1)} \left(\int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_0^a r dr d\theta \right) + \frac{1}{A(c_1)} \left(\int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{d \cos(\theta - \alpha) + \sqrt{d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + a^2 - d^2}}^0 r dr d\theta \right). \quad (2.14)$$

A primeira integral tem uma resolução direta e seu valor é

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_0^a r dr d\theta = \frac{2\beta a^2}{2} = \beta a^2, \quad (2.15)$$

onde se usa que $\mu_2 - \mu_1 = [\alpha + \beta] - [\alpha - \beta] = 2\beta$.

Agora, resolveremos a segunda integral. Denotemo-la por I . I é a integral I_2 , ver 2.10, com os índices μ_1, μ_2 . Mas, como $\mu_1 - \alpha = -\beta$ e $\mu_2 - \alpha = \beta$ segue de (2.12) que

$$I = 2\beta(d - b)^2 + \int_{\nu_1}^{\nu_2} R_3(\theta) d\theta. \quad (2.16)$$

Tomando os valores de (2.15) e (2.16), reescrevemos a probabilidade (2.18) como

$$P((X, Y) \in c_1 \cap c_2) = \frac{1}{\pi a^2} \left(\beta a^2 + \beta(d - b)^2 + \frac{1}{2} \int_{\mu_1}^{\mu_2} R_3(\theta) d\theta \right), \quad (2.17)$$

onde usamos o fato que $A(c_1) = \pi a^2$. E esta é a probabilidade procurada.

Na tabela (2.4), damos alguns valores numéricos para a, b, d na fórmula 2.15 e encontramos as respectivas probabilidades aproximadas.

a	b	d	β	Probabilidade
2	4	3	$\arccos(-\frac{1}{4})$	0.725538
3	4	2	$\arccos(\frac{1}{4})$	0.8384
3	10	9	$\arccos(-\frac{5}{27})$	0.621432
9	10	3	$\arccos(-\frac{5}{27})$	0.897624

Tabela 2.2: Tabela com valores numéricos para distribuição uniforme e $b > a, d < b$ e $d + a > b$

2.5 Supondo Distribuição Normal

Uma outra hipótese que podemos fazer em nosso modelo é: quando estamos nos deslocando em qualquer direção há um gasto de energia. Porém, adotamos o fato que este gasto é uniforme para uma mesma distância de $(0, 0)$.

Em Teoria de probabilidade a Distribuição Normal é que possui esta característica. Porém, devido às nossas necessidades, aplicaremos a Distribuição Normal truncada. Além disso, restringiremos ao caso em que X, Y são independentes e normais $N(0, 1)$ [5]. Esta suposição é válida no sentido de que ao sairmos de $(0, 0)$, podemos chegar a (x, y) de maneira independente, por exemplo, basta considerar trajetos feitos por verticais e horizontais.

Em geral, a função de densidade normal, em nossas condições, é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}, & \text{se } (x, y) \in c_1 \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin c_1 \end{cases}$$

Para satisfazer o Teorema 2.1, quando c_1 está dentro de c_2 , tomamos a distribuição normal truncada

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \frac{1}{\int \int_{c_1} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy} dx dy.$$

Um cálculo simples, mostra que g é função de distribuição sobre c_1 , isto é,

$$\int \int_{c_1} g(x, y) dx dy = 1.$$

Quando não há intersecção ou um ponto de intersecção

Pelo Teorema 2.1 sabemos que a probabilidade será 0, caso não haja intersecção, ou um ponto de intersecção, e c_1 esteja fora de c_2 , e 1, caso não haja intersecção, ou um ponto de intersecção, e c_1 esteja dentro de c_2 .

Quando há intersecção e $d + b > a$

Pelo Teorema 2.1 a probabilidade neste caso $P((X, Y) \in c_1 \cap c_2)$ é dada por

$$\frac{1}{\int \int_{c_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \int_{d \cos(\theta-\alpha) - \sqrt{d^2 \cos^2(\theta-\alpha) + b^2 - d^2}}^a e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta.$$

Denotemos por I a integral de $e^{-\frac{r^2}{2}}$. Consideremos $u = -\frac{r^2}{2}$. Logo $du = \frac{2r}{2} dr = -r dr$. Usando a técnica de substituição na integral acima vemos que

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\nu_1}^{\nu_2} \int_{\mu_1}^{\mu_2} e^u du d\theta \\ &= - \int_{\nu_1}^{\nu_2} e^u \Big|_{u_1}^{u_2} d\theta \\ &= - \int_{\nu_1}^{\nu_2} e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_{d \cos \theta - \alpha - \sqrt{d^2 \cos^2(\theta-\alpha) + b^2 - d^2}}^a d\theta \\ &= \int_{\nu_1}^{\nu_2} \left(-e^{-\frac{a^2}{2}} + e^{-\frac{1}{2} \left(d \cos(\theta-\alpha) - \sqrt{d^2 \cos^2(\theta-\alpha) + b^2 - d^2} \right)^2} \right) d\theta. \end{aligned}$$

Vamos calcular o valor da integral

$$\int \int_{c_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\theta.$$

Fazendo $u = -\frac{r^2}{2}$ temos $du = -r$, os quais substituindo na integral acima produz

$$\begin{aligned} \int \int_{c_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy &= \int_{2\pi}^0 \int_{\mu_1}^{\mu_2} e^u du d\theta = \int_0^{2\pi} -e^u \Big|_{\mu_1}^{\mu_2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^a d\theta = - \int_0^{2\pi} (e^{-\frac{a^2}{2}} - 1) d\theta \\ &= (1 - e^{-\frac{a^2}{2}}) \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi(1 - e^{-\frac{a^2}{2}}). \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade é dada por $P((X, Y) \in c_1 \cap c_2)$ será

$$\frac{1}{2\pi(1 - e^{-\frac{a^2}{2}})} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \left(-e^{-\frac{a^2}{2}} + e^{-\frac{1}{2} \left(d \cos(\theta - \alpha) - \sqrt{d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + b^2 - d^2} \right)^2} \right) d\theta.$$

Observe que a integral acima é de difícil resolução pelos métodos tradicionais. Já com o cálculo numérico é possível obter os resultados, desde que se atribuam valores específicos para os limites de integração.

Quando $d > a - b \Rightarrow d + b > a$

Pelo Teorema 2.1, temos que a probabilidade é dada por

$$P((X, Y) \in c_1 \cap c_2) = \int \int_{c_1 \cap c_2} f(x, y) dx dy.$$

Neste caso, devido a área de integração (2.8), para o cálculo da probabilidade, separamos as integrais da seguinte forma

$$P((X, Y) \in c_1 \cap c_2) = \int \int_{A_1} f(x, y) dx dy + \int \int_{A_2} f(x, y) dx dy.$$

Tomando a distribuição normal obtemos que

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\int \int_{c_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy} \left(\int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_0^a e^{-r^2/2} r dr d\theta \right) \\ &+ \frac{1}{\int \int_{c_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy} \left(\int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{d \cos(\theta - \alpha) + \sqrt{d^2 \cos^2(\theta - \alpha) + a^2 - d^2}}^0 e^{-r^2/2} r dr d\theta \right). \end{aligned}$$

Levando em conta que a integral $\int \int_{c_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$ tem valor igual a $\pi(1 - e^{-\frac{a^2}{2}})$ vemos que a probabilidade é dada por

$$\frac{1}{\pi(1 - e^{-\frac{a^2}{2}})} \left((2\beta(1 - e^{-a^2/2}) \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_0^0 e^{-r^2/2} r dr d\theta \right).$$

Capítulo 3

Probabilidade de uma carga estar numa zona de influência emissora

Neste capítulo, o problema agora a ser tratado será o seguinte: no espaço tridimensional temos uma fonte de emissão T , por exemplo, algum gerador de campo magnético, a qual distribui uniformemente sua energia em uma esfera de raio b (carga puntiforme). Dada uma partícula na origem do espaço, se ela se desloca aleatoriamente com um raio a em torno da origem, qual é a probabilidade dela entrar na zona de influência da fonte de emissão T ? Neste problema usamos coordenadas esféricas, integral de superfície e distribuição de probabilidade contínua para o seu estudo. Também, aplicamos aos casos de distribuição de probabilidade uniforme e normal.

3.1 Cálculo das equações paramétricas

Consideremos agora, uma fonte de emissão T , num espaço tridimensional, gerando uma esfera S_b de raio b , com centro no ponto (x_0, y_0, z_0) , e uma carga gerada num ponto $(0, 0, 0)$, gerando uma esfera S_a de raio a com $a < b$, ver figura

(3.1). Chamamos a distância entre os dois eixos centrais de d .

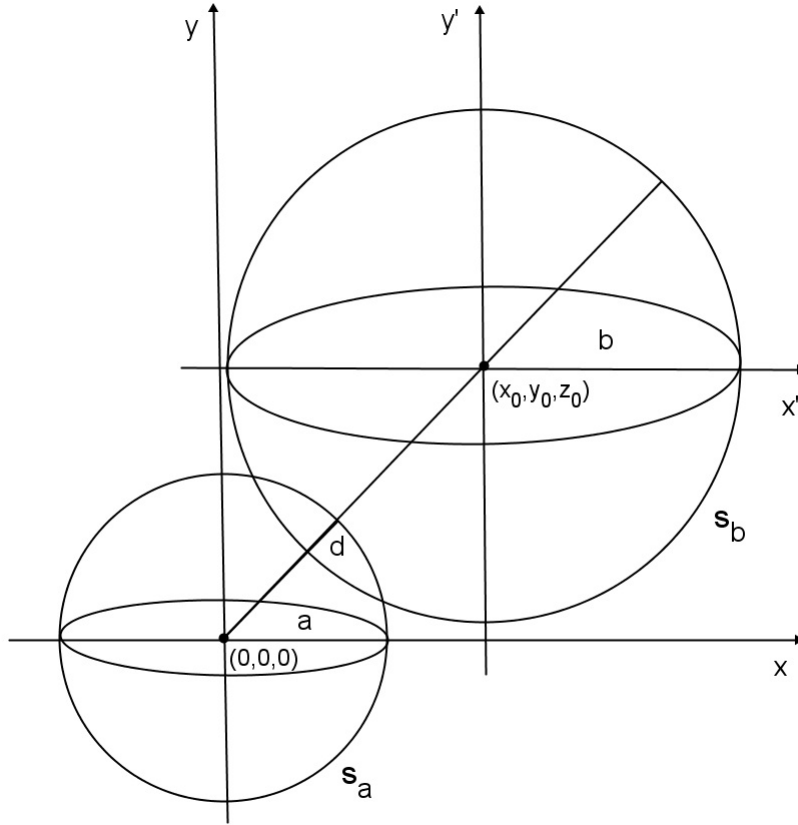


Figura 3.1: Esquema de representação do sinal de captação e da zona de influência

Sabemos em geral que, as coordenadas cartesianas (x, y, z) de um ponto P , podem ser representadas em coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) , do seguinte modo

$$(x, y, z) \longleftrightarrow \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \text{onde, } x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2. \quad (3.1)$$

O determinante jacobiano de x, y, z em relação às variáveis ρ, θ, φ é,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin \varphi.$$

Antes de tudo, faremos algumas hipóteses simplificadoras. Baseado no fato que rotações preservam áreas e volumes, deslocaremos a esfera S_b de tal modo

que seu centro fique sobre o eixo OX , conforme figura (3.2).

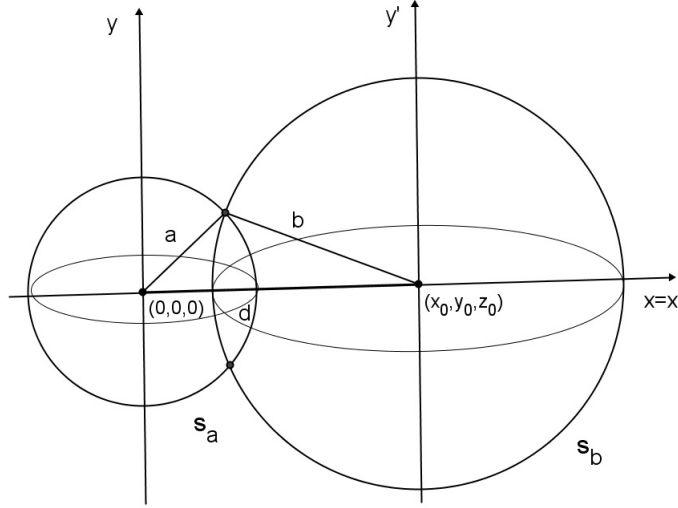


Figura 3.2: Esquema de deslocamento da esfera S_b sobre o eixo OX

Em particular a equação geral de S_a é $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ em coordenadas cartesianas e $\rho = a$ em coordenadas esféricas.

Nosso próximo passo é descrever S_b em relação as coordenadas esféricas ρ, θ, φ . Observando que S_b está deslocada da origem por X_0 prouzimos

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + y^2 + z^2 &= b^2, \\ x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 + z^2 &= b^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_0 + x_0^2 &= b^2. \end{aligned}$$

Substituindo $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$ e $x_0 = d$, temos

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\rho \sin \varphi \cos \theta d + d^2 = b^2.$$

De onde,

$$\rho^2 - 2\rho d \sin \varphi \cos \theta = b^2 - d^2. \quad (3.2)$$

É suficiente resolver a equação quadrática acima em ρ para a completa descrição de S_b nas coordenadas (ρ, θ, φ) . O discriminante é

$$\Delta = (-2d^2 \sin \varphi \cos \theta)^2 - 4(b^2 - d^2)$$

$$\Delta = 4d^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - 4b^2 + 4d^2.$$

Sabemos que a única maneira de possuímos solução é se $\Delta \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} d^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - b^2 + d^2 &\geq 0 \\ d^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta &\geq -b^2 + d^2 \\ \sin^2 \varphi \cos^2 \theta &\geq \frac{d^2 - b^2}{d^2}. \end{aligned}$$

Esta é a restrição dos ângulos φ e θ , a qual é natural pois não é necessário uma angulação de 2π para φ ou π para θ para descrever a esfera S_b . Assim, respeitando a restrição dos ângulos, o valor de ρ é dado por

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{2d \sin \varphi \cos \theta \pm \sqrt{4d^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - 4b^2 + 4d^2}}{2} \\ \rho &= d \sin \varphi \cos \theta \pm \sqrt{d^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - b^2 + d^2} \\ \rho &= d \sin \varphi \cos \theta \pm \sqrt{d^2(\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + 1) - b^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Concluimos que as esferas S_a e S_b tem, respectivamente, em coordenadas polares as seguintes equações

$$\rho = a \quad \text{e} \quad \rho = d \sin \varphi \cos \theta \pm \sqrt{d^2(\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + 1) - b^2}.$$

3.2 Condições de existência

3.2.1 Quando há intersecção entre as esferas

Para encontrarmos a intersecção de S_a com S_b , e acharmos os ângulos de integração, substituiremos o valor $\rho = a$ na equação (3.2)

$$\begin{aligned} a^2 - 2ad \sin \varphi \cos \theta &= b^2 - d^2 \\ -2ad \sin \varphi \cos \theta &= -a^2 + b^2 - d^2 \\ 2ad \sin \varphi \cos \theta &= a^2 - b^2 + d^2 \end{aligned}$$

$$\sin \varphi \cos \theta = \frac{a^2 - b^2 + d^2}{2ad}. \quad (3.4)$$

Da equação (3.2) encontraremos as condições de intersecção entre S_a e S_b . De fato, S_a e S_b se interceptam, além de um ponto, quando a condição $-1 < \sin \varphi \cos \theta < 1$ é satisfeita, caso contrário não há intersecção ou intersecção em um ponto.

Utilizando os cálculos da seção do capítulo 2, concluímos que as esferas S_a e S_b se interceptam, nos seguintes casos:

i) $d < a + b$ (ver figura (2.2) da seção 2.2.1),

ii) $d + a > b$ (ver figura (2.3) da seção 2.2.1).

Por outro lado, não se interceptam em:

iii) As esferas S_a e S_b se tocam no ponto P ou não se interceptam, caso $d \geq a + b$. (ver figura (2.4) da seção 2.2.2)

iv) A esferas S_a fica dentro da circunferência S_b , caso $d + a \leq b$. (ver figura (2.5) da seção 2.2.2)

3.3 Analisando os ângulos de integração

3.3.1 Quando há intersecção entre as esferas

Sabemos que, só teremos existência de intersecção entre S_a e S_b nos casos $d < a + b$ ou $d + a > b$, onde a, b são os raios de S_a e S_b , respectivamente, e d a distância do centro de S_b a $(0, 0, 0)$. Conhecemos também, as equações de S_a e S_b em coordenadas polares (ver equação (3.3)). Assim, para resolvermos a integral (3.3), nos faltam apenas os ângulos de integração θ_1, θ_2 .

Na figura (3.3), temos a representação gráfica do β . Queremos então descobrir

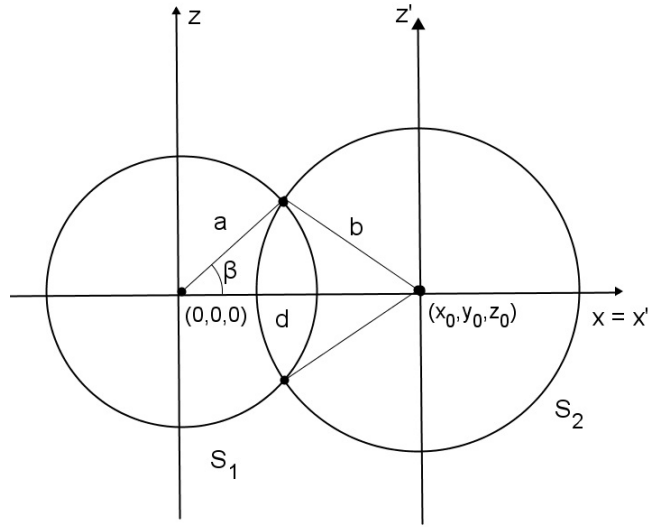


Figura 3.3: Representação dos ângulos φ_1 , φ_2 e β

quem é esse ângulo. Neste caso, a lei dos cossenos produz

$$\begin{aligned}
 b^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cos \beta \\
 2ad \cos \beta &= a^2 + d^2 - b^2 \\
 \cos \beta &= \frac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad}.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Assim nossos ângulos de integração são $-\beta$ e β , onde

$$\beta = \arccos \frac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad}.$$

Para encontrarmos β usamos o fato que $\theta = 0$. Com isto observamos que $-\beta$ é o menor ângulo de integração e β é o maior. Portanto, estamos interessados nos ângulos φ tais que $-\beta \leq \varphi \leq \beta$.

No caso dos ângulos θ , usamos a equação (3.4) para determinar seu intervalo de integração. De fato,

$$\cos \theta = \frac{1}{\sin \varphi} \left(\frac{b^2 + d^2 - a^2}{2bd} \right), \quad 0 < -\beta \leq \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \leq \beta < \pi.$$

Denotamos $\frac{b^2 + d^2 - a^2}{2bd}$ por A . Assim,

$$\theta = \arccos \left(\frac{1}{\sin \varphi} A \right) = \arccos(\csc(\varphi)A).$$

Observamos que o arccos está bem definido, pois o quociente de $\frac{b^2+d^2-a^2}{2bd}$ está bem definido pela escolha do ângulo β e as leis dos cossenos.

No caso em que β for $\pi/2$ temos necessariamente que os ângulos de integração serão $0 \leq \varphi \leq \pi$ e $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$.

3.4 Cálculos Gerais para as Probabilidades

No caso geral, dada uma função distribuição de probabilidade f , temos a seguinte expressão para probabilidade de uma região de S_a estar contida dentro de S_b

$$P((X, Y, Z) \in S_b \cap S_a) = \int \int_{\sigma} f(x, y, z) ds,$$

onde S é a superfície $S_a \cap S_b$ em coordenadas (x, y, z) , B um conjunto mensurável e X, Y, Z as variáveis aleatória [5].

Como trabalharemos com coordenadas esféricas, isto nos dá a seguinte expressão para a probabilidade

$$P((X, Y, Z) \in S_1 \cap B) = \int \int_K f(\sigma(\theta, \varphi)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \right\| d\theta d\varphi,$$

onde

$$K = \{(\theta, \varphi) : -\beta \leq \varphi \leq \beta, -\arccos(\csc \varphi(A)) \leq \theta \leq \arccos(\csc \varphi(A))\}.$$

Substituindo os ângulos de integração na integral acima, vemos que,

$$P((X, Y, Z) \in S_b \cap S_a) = \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\arccos(\csc(\varphi)A)}^{\arccos(\csc(\varphi)A)} f(\sigma(\theta, \varphi)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \right\| d\theta d\varphi.$$

Calculando as derivadas parciais, temos, $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}$. Relembramos que

$$\sigma(\theta, \varphi) = (a \sin \varphi \cos \theta, a \sin \varphi \sin \theta, a \cos \varphi).$$

Derivando parcialmente σ em relação a θ e φ , conseguimos

$$\frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(\theta)} = a \sin \varphi (-\sin \theta) \vec{i} + a \sin \varphi \cos \theta \vec{j} + 0 \vec{k};$$

$$\frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(\varphi)} = a \cos \varphi \cos \theta \vec{i} + a \cos \varphi \sin \theta \vec{j} - a \sin \varphi \vec{k}.$$

Para uma expressão explícita desta integral, desenvolvamos $\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \right\|$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin \varphi \sin \theta & a \sin \varphi \sin \theta & 0 \\ a \cos \varphi \cos \theta & a \cos \varphi \sin \theta & -a \sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= -a^2(\sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta + \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta) \vec{k} - (a^2 \sin^2 \varphi \sin \theta) \vec{j} + (-a^2 \sin^2 \varphi \cos \theta) \vec{i} \\ &= -a^2 \sin \varphi \cos \theta \vec{i} - a^2 \sin^2 \varphi \sin \theta \vec{j} - a^2 \sin \varphi \cos \varphi \vec{k}. \end{aligned}$$

Pela definição de norma euclidiana,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \right\| &= \sqrt{(-a^2 \sin^2 \varphi \cos \theta)^2 + (-a^2 \sin^2 \varphi \sin \theta)^2 + (-a^2 \sin \varphi \cos \varphi)^2} \\ &= \sqrt{a^4 \sin^4 \varphi \cos^2 \theta + a^4 \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + a^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{a^4 \sin^4 \varphi + a^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{a^4 \sin^2 \varphi \sin^2 \varphi + a^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{a^4 \sin^2 \varphi} = a^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Substituindo o valor encontrado, chegamos a probabilidade requerida

$$P((X, Y, Z) \in S_1 \cap B) = \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\arccos(\csc(\varphi)A)}^{\arccos(\csc(\varphi)A)} f(\sigma(\theta, \varphi)) a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi.$$

Chamando $\arccos(\csc(\varphi)A)$ de θ_1 e $-\arccos(\csc(\varphi)A)$ de θ_2 , temos

$$P((X, Y, Z) \in S_b \cap S_a) = \int_{-\beta}^{\beta} a^2 \sin \varphi \left(\int_{\theta_2}^{\theta_1} f(\sigma(\theta, \varphi)) d\theta \right) d\varphi,$$

onde, para o estudo, B poderá ser vazio, S_a ou $S_a \cap S_b$, com limites de integração $\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2$.

É importante destacar que quando o centro de S_a encontra-se dentro de S_b temos que integrar, particionando a região total de integração, ver figura (3.4). Esta partição é necessária, para que não tenhamos problemas nas condições de existência de alguns pontos.

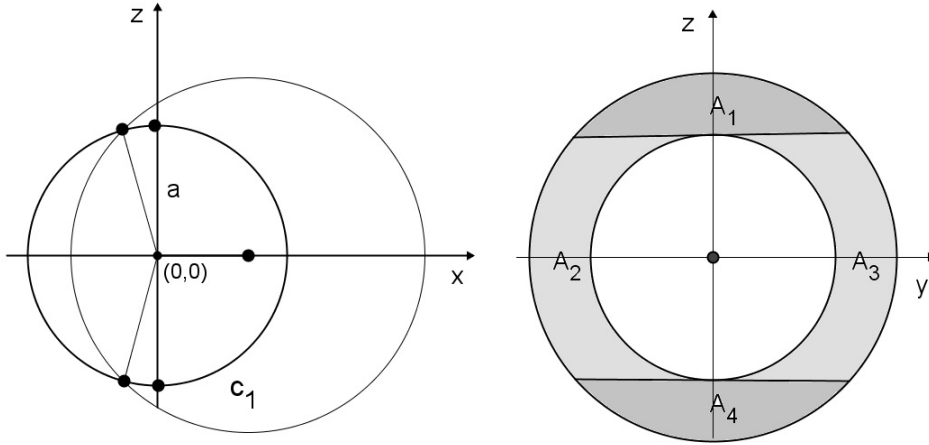


Figura 3.4: Esquema de particionamento da região para integração

3.4.1 Teorema principal no espaço

Usando a equação (3.1), as equações paramétricas (3.3) e os ângulos de integração, enunciamos o seguinte Teorema.

Teorema 3.1. *Sejam S_a e S_b duas superfícies esféricas com centros em $(0, 0, 0)$ e (x_0, y_0, z_0) , respectivamente. Considere uma função de densidade de probabilidade $f(x, y, z)$ e as variáveis aleatórias reais X, Y, Z . A Probabilidade do vetor aleatório (X, Y, Z) estar na intersecção de $S_a \cap S_b$ é*

1. 0, no caso de não intersecção, ou intersecção em um ponto, e o centro de S_a estar fora de S_b , ou seja, $d \geq a + b$.
2. 1, no caso de não intersecção, ou intersecção em um ponto, e o centro de S_a estar dentro de S_b , ou seja, $d + a \leq b$.
3. no caso de intersecção e o centro de S_a estar fora de S_b , ou seja, $d < a + b$, temos

$$P((X, Y, Z) \in S_a \cap S_b) = \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\arccos(\csc(\varphi)A)}^{\arccos(\csc(\varphi)A)} f(\sigma(\theta, \varphi)) a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$$

4. no caso de intersecção e o centro de S_a estar dentro de S_b , ou seja, $a < d+b$,

$$\begin{aligned}
P((X, Y, Z) \in S_a \cap S_b) &= \int_0^\pi \int_{3\pi/2}^{\pi/2} f(\sigma(\theta, \varphi)) a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi \\
&+ \int_{-\beta}^\beta \int_{\pi/2}^{-\arccos(\csc(\varphi)A)} f(\sigma(\theta, \varphi)) a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi \\
&+ \int_{-\beta}^\beta \int_{\arccos(\csc(\varphi)A)}^{3\pi/2} f(\sigma(\theta, \varphi)) a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi \\
&+ \int_0^\beta \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(\sigma(\theta, \varphi)) a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi \\
&+ \int_{-\beta}^\pi \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(\sigma(\theta, \varphi)) a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

Para a última parte do Teorema quebramos a esfera S_a em cinco partes. A primeira integral se refere a metade da esfera. As outras partes podem ser compreendidas na figura (3.4).

3.5 Supondo Distribuição Uniforme

Aplicaremos a Distribuição Uniforme no Teorema 3.1 na seguinte hipótese: que o deslocamento da partícula, até exatamente um raio r , não leve em conta gasto de energia.

Por definição, a distribuição Uniforme sobre S_a é dada por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{A(S_a)}, & \text{se } (x, y, z) \in S_a \\ 0, & \text{se } (x, y, z) \notin S_a, \end{cases}$$

onde $A(S_a)$ é a região da esfera S_a , [5].

Para facilitar o nosso estudo, apresentamos os seguintes casos:

Quando não há pontos ou um único ponto de intersecção entre as esferas

Pelo Teorema 3.1, a probabilidade será 0 ou 1, dependendo se $d \geq a + b$ ou $d + b \leq a$, respectivamente.

Quando há intersecção e $d < a + b$

Como é conhecido, a área de S_a é πa^2 . Logo a distribuição de densidade é dada por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi a^2}, & \text{se } (x, y, z) \in S_b \\ 0, & \text{se } (x, y, z) \notin S_b. \end{cases} \quad (3.6)$$

Portanto, a probabilidade para a distribuição uniforme na intersecção $S_a \cap S_b$ é dada por

$$\begin{aligned} P((X, Y, Z) \in S_a \cap S_b) &= \int_{-\beta}^{\beta} a^2 \sin \varphi \left(\int_{-\arccos(\csc(\varphi)A)}^{\arccos(\csc(\varphi)A)} \frac{1}{4\pi a^2} d\theta \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{-\beta}^{\beta} a^2 \sin \varphi \left(\theta \Big|_{-\arccos(\csc(\varphi)A)}^{\arccos(\csc(\varphi)A)} \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \sin \varphi 2 \arccos(\csc(\varphi)A) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \sin \varphi \arccos\left(\frac{A}{\sin \varphi}\right) d\varphi. \end{aligned}$$

Denotemos a integral da última igualdade por \mathcal{I} . Utilizando o software Mathematica versão 7.0, encontramos que a solução de \mathcal{I} é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{1}{\sqrt{A^2} \sqrt{-1 + 2A^2 + \cos(2\varphi)}} \left((-\sqrt{A^2} \arccos(A \csc(\varphi)) \cos(\varphi) \sqrt{-1 + 2A^2 + \cos(2\varphi)} \right. \\ &\quad - A\sqrt{A^2} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{2} \cos(\varphi)}{\sqrt{-1 + 2A^2 + \cos(2\varphi)}} \right) \sqrt{-(-1 + 2A^2 + \cos(2\varphi)) \csc(\varphi)^2 \sin(\varphi)} \\ &\quad \left. + A \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{2} \sqrt{A^2} \cos(\varphi)}{\sqrt{-1 + 2A^2 + \cos(2\varphi)}} \right) \sqrt{-(-1 + 2A^2 + \cos(2\varphi)) \csc(\varphi)^2 \sin(\varphi)} \right) \Big|_{-\beta}^{\beta}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Assim, a probabilidade procurada para a intersecção de S_a e S_b com a distribuição uniforme é dada por

$$P((X, Y, Z) \in S_a \cap S_b) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{I} \quad (3.8)$$

Quando há intersecção e $d + a > b$

Neste caso o centro de S_a está dentro de S_b . Pelo Teorema 3.1 a probabilidade será dada por

$$\begin{aligned}
 P((X, Y, Z) \in S_a \cap S_b) &= \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4\pi a^2} a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi \\
 &+ \int_{-\beta}^\beta \int_{\pi/2}^{-\arccos(\csc(\varphi)A)} \frac{1}{4\pi a^2} a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi \\
 &+ \int_{-\beta}^\beta \int_{\arccos(\csc(\varphi)A)}^{3\pi/2} \frac{1}{4\pi a^2} a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi \\
 &+ \int_\beta^0 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{4\pi a^2} a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi \\
 &+ \int_{-\beta}^\pi \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{4\pi a^2} a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi,
 \end{aligned}$$

onde utilizamos a definição de função distribuição uniforme (3.6).

Calculemos cada integral separadamente. Iniciemos pela primeira. Isto é imediato que

$$\int_0^\pi \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4\pi a^2} a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi = \frac{1}{2}.$$

Agora, calculemos a segunda integral. Primeiro reescrevamos ela como

$$\begin{aligned}
 \int_{-\beta}^\beta \int_{\pi/2}^{-\arccos(\csc(\varphi)A)} \frac{1}{4\pi} \sin \varphi d\theta d\varphi &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\beta}^\beta \sin \varphi \int_{\pi/2}^{-\arccos(\csc(\varphi)A)} d\theta d\varphi \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\beta}^\beta \sin \varphi ((-\arccos(\csc(\varphi)A)) - \pi/2) d\varphi \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\beta}^\beta \sin \varphi (-\arccos(\csc(\varphi)A)) d\varphi - \frac{1}{8} \int_{-\beta}^\beta \sin \varphi d\varphi \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\beta}^\beta \sin \varphi (\arccos(\csc(\varphi)A)) d\varphi - \frac{1}{4} (-\cos(\varphi)) \Big|_{-\beta}^\beta \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\beta}^\beta \sin \varphi (\arccos(\csc(\varphi)A)) d\varphi.
 \end{aligned}$$

Assim, pelos cálculos feitos na seção anterior, ver equação (3.8), concluímos que

$$\int_{-\beta}^\beta \int_{\pi/2}^{\arccos(\csc(\varphi)A)} \frac{1}{4\pi} \sin \varphi d\theta d\varphi = \frac{1}{4\pi} \mathcal{I},$$

onde \mathcal{I} é a integral definida por (3.7). Um cálculo semelhante ao anterior mostra que a terceira integral é dada por

$$\int_{-\beta}^{\beta} \int_{\arccos(\csc(\varphi)A)}^{3\pi/2} \frac{1}{4\pi} \sin \varphi d\theta d\varphi = \frac{1}{4\pi} \mathcal{I}.$$

Para a quarta integral deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{4\pi a^2} a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\beta} \pi \sin \varphi d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{4} (-\cos(\varphi) \Big|_0^{\beta}) \\ &= \frac{1}{4} (\cos(\beta) + \cos(0)) \\ &= \frac{1}{4} (\cos(\beta) + 1). \end{aligned}$$

Usando o mesmo cálculo acima vemos que a quinta integral é escrita como

$$\int_{-\beta}^{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{4\pi a^2} a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi = \frac{1}{4} (\cos(\beta) + 1).$$

Reunindo todas os resultados das integrais acima, concluímos que a probabilidade procurada é dada por

$$P((X, Y, Z) \in S_a \cap S_b) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \mathcal{I} + \frac{1}{2} (\cos(\beta) + 1). \quad (3.9)$$

3.6 Supondo Distribuição Normal

Faremos agora a aplicação da Distribuição Normal truncada, mas restringiremos novamente, como no Capítulo 2, seção 2.5, e pelos mesmos motivos, ao caso em que as variáveis X, Y e Z são independentes e $N(0, 1)$ [5].

Sobre está condição a distribuição normal é dada por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{(x^2+y^2+z^2)}{2}}.$$

Em coordenadas esféricas temos que f é escrito como

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{\rho^2}{2}},$$

pois $(x^2 + y^2 + z^2) = \rho^2$.

Por questões já discutidas anteriormente, sabemos que se a esfera S_a está dentro da esfera S_b então a probabilidade é 1. Caso contrário, S_a está fora de S_b e a probabilidade é 0.

Assim, nos ateremos aos casos de intersecção.

Supondo distribuição Normal e $d < a + b$

Neste caso existe intersecção entre S_a e S_b e o centro de S_a está fora de S_b . Pelo Teorema 3.1 temos que a probabilidade, neste caso, é dada por

$$\begin{aligned} P((X, Y, Z) \in S_a \cap S_b) &= \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\arccos(\csc(\varphi)A)}^{\arccos(\csc(\varphi)A)} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{a^2}{2}} a^2 \sin \varphi d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{a^2}{2}} a^2 \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\arccos(\csc(\varphi)A)}^{\arccos(\csc(\varphi)A)} \sin \varphi d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

onde utilizamos $\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{a^2}{2}} a^2$ pois estamos trabalhando sobre a esfera S_a .

Agora, pelo estudo da probabilidade com distribuição Uniforme, concluímos que

$$P((X, Y, Z) \in S_a \cap S_b) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{a^2}{2}} a^2 \mathcal{I},$$

onde \mathcal{I} é a integral definida dada por (3.7).

Supondo Distribuição Normal e $d + a > b$

Neste caso existe intersecção entre S_a e S_b e o centro de S_a está dentro de S_b . Antes de realizarmos os cálculos, observemos que no caso anterior temos que a probabilidade com a distribuição normal é múltipla da probabilidade com distribuição uniforme. Isto se dá pelo motivo de estarmos trabalhando sobre a esfera S_a , pois, distribuição normal é constante sobre esferas. Usando este raciocínio e o resultado encontrado para distribuição uniforme, ver (3.9), concluímos que a

probabilidade procurada é

$$P((X, Y, Z) \in S_a \cap S_b) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{a^2}{2}} a^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \mathcal{I} + \frac{1}{2} (\cos(\beta) + 1) \right).$$

Considerações Finais

Neste trabalho conseguimos alcançar o nosso propósito, na medida em que, no capítulo 1, desenvolvemos um apanhado introdutório sobre Probabilidade Geométrica, no capítulo 2, um estudo no plano sobre a probabilidade da área de um sinal na área de uma antena, e no capítulo 3, o estudo da probabilidade de uma carga estar numa zona de influência emissora, supondo distribuição uniforme e normal para os dois últimos capítulos.

Cabe ressaltar, que durante o desenvolvimento deste trabalho, algumas situações foram destacadas. A idéia inicial para o desenvolvimento do capítulo 3, tomando-se como base o capítulo 2, era uma ampliação do estudo da probabilidade de um ponto no espaço, pensamos num primeiro momento, em utilizarmos curvas de níveis, o que no decorrer do trabalho observou-se que seria necessário maiores pré-requisitos de estudos matemáticos, tais como aprofundamento de métricas, etc. Contudo, resolvemos considerar, uma outra situação de análise, conforme apresentada no capítulo 2.

Um outro ponto importante, com relação aos capítulos 2 e 3, é que, apesar de utilizarmos ferramentas matemáticas já existentes, tais capítulos possuíram uma exclusiva originalidade na sua elaboração. Já com relação as aplicações das integrais numéricas, principalmente referente ao capítulo 3, verificamos necessidade, de uma continuidade destes estudos, pois as integrais encontradas são de difícil resoluções, requerendo mais estudo, o que nos leva a perceber a necessidade de continuidade deste trabalho.

Portanto, acreditamos que na sua modesta e limitada abordagem, conseguimos alcançar o nosso objetivo, quando apresentamos problemas que foram aqui resolvidos, utilizando-se de estudos de Probabilidade Geométrica, pois este assunto é podemos dizer inesgotável, e nosso trabalho atinge seus objetivos na medida em que apresenta informações que servirão de base e extensão de estudo pelos que de alguma forma, se envolvem com essa área de estudo na Matemática.

Referências Bibliográficas

- [1] CONNOR, J. J. O'. e ROBERTSON, E. F. **Bertrand Biography**, Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Bertrand.html>>.
- [2] DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: Um Curso Introdutório**, EDUSP, 2008.
- [3] GEOGEBRA, Disponível em: <<http://www.geogebra.org/cms>>.
- [4] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**, vols. 1, 2, 3, LTC, 2006.
- [5] JAMES, B. **Probabilidade: um curso de nível intermediário**, IMPA, 3.ed. IMPA. Rio de Janeiro, 2008.
- [6] KENDALL, M. G. e MORAN, P. A. P. **Geometrical Probability**, Charles Griffin Co. Ltda., 1963.
- [7] LIMA, E. L. **Curso de Análise**, vol. 1, IMPA, 1997.
- [8] MEYER, P.L. **Probabilidade - Aplicações à Estatística**. 2a. ed. LTC. Rio de Janeiro, 1983.
- [9] SOLOMON, H. **Geometrical Probability**, Society for Industrial and Applied Mathematics, Filadélfia, 1978.
- [10] SANTALÓ, L. A. **Integral Geometry and Geometric Probability**, Massachusetts: Addison Wesley, Reading, 1976.

- [11] SANTALÓ, L. A. **La Matemática:Una Filosofía y una Técnica**, tradução de Joan Pages, Editora ARIEL/PLANETA, Espanha, 1994.
- [12] USPENSKY, J. V. **Introdução to Mathematical Probability**, McGraw-Hill, 1978.
- [13] WINPLOT, Disponível em: <<http://www.math.hawaii.edu/lab/241/winplot.html>>.